DINÁMICA DE PARTÍCULAS EN CAMPOS GRAVITACIONALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS

LIKIDCEN FRAMSOL LÓPEZ SUSPES
Físico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2011

DINÁMICA DE PARTÍCULAS EN CAMPOS GRAVITACIONALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS

LIKIDCEN FRAMSOL LÓPEZ SUSPES
Físico

Trabajo de grado para optar al título de Doctor en Ciencias Naturales, Física

Director:
GUILLERMO A. GONZÁLEZ V., PhD.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2011

A Dana

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

- A los doctores José David Sanabria Gómez, Harold Paredes, Antonio C. Gutierrez P., Rafael Torres, Javier F. Ramos-Caro, César A. Valenzuela T.
- Al Profesor Patricio Anibal Letelier (RIP).
- A todas las personas que hicieron esto posible, especialmente las personales que estuvieron o están relacionadas con el Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación, GIRG. Particularmente a Jerson I. Reina M., y Andrés Américo Navarro.
- A los evaluadores: Dr. Juan Manuel Tejeiro de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá; Dr. Yeinzon Rodríguez; Dr. Luis Alberto Núñez de Villavicencio; Especialmente al Dr. Francisco Siddhartha Guzmán Murillo, del Instituto de Física y Matemáticas, de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Mexico, por sus valiosos comentarios y apreciaciones.
- Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas (Tutor), quien pacientemente me llevo en todo el camino de la investigación de la Tesis.
- A Paolo Andrés Ospina Henao amigo y compañero de trabajo, que amablemente ayudó en parte de este trabajo.
- A la *Vicerrectoría Académica* de la Universidad Industrial de Santander, por su finaciación a través del programa de Becas de Sostenimiento para estudiantes de postgrado.
- A la Universidad Santo Tomás, por asignar parte de mi tiempo laboral para la culminación de la redacción de la Tesis.

Bucaramanga-Colombia, 23 de noviembre de 2011

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

TÍTULO
DINÁMICA DE PARTÍCULAS EN CAMPOS GRAVITACIONALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS. [1].

AUTOR
LÓPEZ SUSPES, Likidcen Framsol [7].

PALABRAS CLAVES
Sistemas dinámicos, geodésicas, axial, simétricos, estabilidad, Rayleigh.

DESCRIPCIÓN

Se presenta un estudio de estabilidad en fuentes gravitacionales estáticas y axialmentes simétricas mediante la solución de las ecuaciones de movimiento de partículas de prueba neutras en los campos clásico y relativista. Se hace énfasis en la trayectoria circular en el plano de la fuente, y en la trayectoria circular de la partícula marginalmente estable. Se muestra que la estabilidad en el plano ecuatorial se puede desarrollar a través del análisis el momentum angular de la partícula. Se prueba que la trayectoria de la partícula se reduce a un problema en dos dimensiones.

En la teoría clásica, se estudia la familia de Discos de Kalnajs, estas soluciones son más estables con el aumento de términos en la expansión multipolar de la solución. Se estudia también la influencia del cuadrupolo y octopolo en la estructura del espacio de fase, y se determina que los dos términos pueden inducir al movimiento caótico. Por último se investiga la estabilidad en las galaxias NGC 3817, NGC 3917, encontrándose que los modelos discoidales de las galaxias son estables ante perturbaciones radiales.

Se presenta en Relatividad General, una nueva familia de Discos Gruesos. En cada modelo de disco grueso se realiza un análisis de las partículas de prueba que caen libremente. Se investiga la naturaleza de las soluciones de Weyl en coordendas cilíndricas, prolatas, y oblatas. Se encuentra que todas las soluciones tienen un radio inestable en el caso de fotones. Además se presenta un análisis de la establidad en campos estáticos y esféricamente simétricos, encontrándose allí que la constante cosmológica no influye en la dinámica de fotones.

[1] Tesis Doctoral.
[7] Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

TITLE
Dynamics of test particles in axially symmetric gravitational fields[1].

AUTOR LÓPEZ SUSPES, Likidcen Framsol [7].

KEY WORDS Dynamical systems, geodesics, axially, symmetric, Weyl, stability, marginally, Rayleigh.

DESCRIPTION:
We present a detailed study of the stability of gravitational sources axially symmetrical static and research through the solution of the equations of motion of neutral test particles falling freely, the study is conducted in the fields of Newtonian Gravitation and General Relativity . Emphasis is placed on the circular path in the plane of the source, plus marginally stable circular orbit. In the two fields we show that the stability in the equatorial plane can be developed through the analysis of the angular momentum of the particle, also we demonstrate that in these fields the study of trajectory of the particle is reduced to a problem in two dimensions.

In classical theory we study some particular solutions as family Kalnajs discs for the family is this solutions are more stable as you increase the number of terms in the multipolar expansion of the solution. Also considers the influence of quadrupole and octupole terms in the structure of phase space, then it is determined that any of the terms can lead to chaotic motion. Finally, research on the stability in the galaxies NGC 3817, NGC 3917, we find that circular orbits are stables.

It occurs in General Relativity, a new family of thick disks, with particular solutions Chazy-Curzon type, Zipoy-Voorhees, and Bonnor-Sackfield. In each thick disk model we consider an analysis of test particles falling freely. On the other hand, we research the naturel Weyl solutions in Coordinate cylindrical, prolate, and oblate. In particular we find that all solutions are unstable radio in the special case of fotones. Additionally, we present a detailed analysis in static spherically symmetric gravitational field, we show that the cosmological constant doesn't influence the dynamics treatment of light rays in the plane of the source.

[1]Senior thesis project.
[7]Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

SECCIÓN 1.1

Estado General del Tema

La Mecánica Celeste y la Astronomía Dinámica son ramas de la Astronomía fundamental que se ocupan de las preguntas más básicas con respecto al movimiento y a la evolución dinámica de cuerpos celestes. Las preguntas incluyen teoría de perturbaciones, estabilidad del movimiento, resonancias, el caos y la difusión, marcos de referencia, los efectos relativistas, la influencia de fuerzas no gravitacionales y de las estructuras físicas interiores sobre la evolución dinámica de cuerpos, así como los métodos numéricos para la integración de las ecuaciones de movimiento y para el análisis de las propiedades de la evolución resultante. Los principales objetos de la Mecánica Celeste y Astronomía Dinámica son los planetas (del sistema solar y extrasolar), los cuerpos pequeños, los satélites naturales y artificiales, los anillos planetarios, estrellas, cúmulos estelares y las galaxias [125].

La Mecánica Celeste o los sistemas dinámicos clásicos[1] se origina a partir del intento de Henri Poincaré de dar solución al problema de la interacción gravitacional de N-cuerpos. Poincaré demostró en 1890 que no existe un número suficiente de constantes de movimiento que pueda reducir el problema de tres cuerpos a uno de menor dimensión [92], esto es, el problema no tiene solución por cuadraturas para $N \geq 3$. A partir de esa época, estas ideas de Poincaré dieron a conocer uno de los problemas más estudiados hasta hoy, como es, el problema de resolver de forma exacta o numéricamente, la dinámica de tres cuerpos (totalmente equivalente a determinar lo que se designa como la tercera integral del movimiento) [17].

Por otro lado, los campos gravitatorios estudiados en este trabajo mediante la dinámica de partículas, se analizarán desde el punto de vista de la Gravitación newtoniana y de la Relatividad General, no obstante aunque los campos puedan representar configuraciones de materia similares o soluciones análogas, no se considerará comparaciones entre las soluciones de las dos teorías. En particular, el campo gravitacional que nos interesa es axial y estacionario. Este campo es de gran importancia física, ya que puede proporcionar la descripción de campos exteriores alrededor de objetos astrofísicos bien conocidos como galaxias, agujeros negros, estrellas de neutrones, anillos, etc. Un campo gravitacional se dice que es independiente del tiempo, o estacionario, si podemos escoger un sistema de coordenadas en el que todas las componentes del tensor métrico[2] no dependan de la coordenada temporal, t. Por otra parte, si el campo gravitacional no depende del ángulo acimutal ϕ (en el texto cambiaremos a $\phi \rightarrow \varphi$, en el capítulo de Relatividad General), se puede decir que el campo es axialmente simétrico.

Ahora bien, si es posible escoger convenientemente la coordenada temporal de tal manera que el intervalo (ds^2), no cambie al hacer la trasformación $t \rightarrow -t$, el campo gravitacional se denomina estático. Esto quiere decir que los eventos que ocurren en este campo gravitatorio no son afectados por la dirección en la que fluye el tiempo. La invariancia con respecto a la inversión temporal implica que todas las componentes g_{0i} del tensor métrico deben ser iguales a cero. Si además de ser estático el campo gravitacional es axialmente simétrico, el elemento ds^2, es invariante ante las transformaciones $t \rightarrow -t$ y $\varphi \rightarrow -\varphi$. En Relatividad General, la geometría espacio-temporal que cumple

[1] Clásicos porque las ecuaciones de movimiento no dependen de la constante de Planck $\hbar$, en otro caso se denominan cuánticos

[2] En Gravitación newtoniana las simetrías pueden ser estudiadas a través de la dependencia o no de las coordenadas en el lagrangiano o el hamiltoniano.

con estas características fue introducida inicialmente por Weyl [68, 137, 138], por medio del elemento de línea que lleva su nombre

$$ds^2 = -e^{2\psi}dt^2 + e^{-2\psi}[\rho^2 d\varphi^2 + e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2)], \tag{1.1}$$

donde $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \varphi, \rho, z)$ son conocidas como las coordenadas cilíndricas de Weyl y las funciones γ y ψ dependen sólo de las coordenadas $x^2 = \rho$ y $x^3 = z$. Nótese que el elemento de línea (1.1), no depende de t.

Como consecuencia de lo antes expuesto, y como es sugerido por una gran variedad de evidencias observacionales, muchos objetos astrofísicos[3] se pueden modelar como cuerpos axialmente simétricos, con deformación oblata (achatada) o prolata (alargada) [16, 22, 29, 84, 87]. A modo de ejemplo, se sabe que la Tierra tiene momentos cuadrupolar y octopolar distintos de cero, como consecuencia de su forma achatada [11]. Además, muchas galaxias con un componente de disco de gran tamaño puede ser modeladas como objetos axisimétricos achatados con un momento cuadrupolar grande y, en algunos casos, con una deformación importante octopolar debida a las componentes restantes, como el halo [56]. Del mismo modo, hay cúmulos de galaxias con forma alargada [16] y muchas galaxias pequeñas se pueden considerar como objetos axisimétricos con deformación oblata [102] con un momento octopolar no insignificante. También existen modelos triaxiales de galaxias que muestran los datos observacionales sobre la esferictidad de los cúmulos de galaxias y sugieren que los grupos son más consistentes con una distribución prolata en lugar de un distribución oblata [16]. Otros modelos de galaxias triaxiales con sólo aproximaciones de cuadrupolo se han construido, por ejemplo, por Schwarzschild [110] y Aquilano *et al* [2].

También hay modelos de galaxias oblatas y prolatas construidas a través de la dinámica de las partículas mediante la simulación numérica de N-cuerpos (estrellas). Estos modelos de galaxias elípticas son consistentes y se pueden encontrar a través de las superficies de sección, órbitas tipo tubo, y órbitas caóticas [18]. Los modelos numéricos son variables, pero siempre tienen como objetivo describir su morfología, es decir, el perfil de la superficie de luminosidad, la relación masa-luz, el perfil de la velocidad de dispersión, los halos de materia oscura, etc [15, 19, 61, 62, 66, 112, 131, 141]. La simulación numérica de N-cuerpos permite encontrar un perfil de densidad de la galaxia, análogo a la simulación numérica de la Dinámica Molecular; cabe resaltar que este estudio dinámico no corresponde al estudio de la dinámica de partículas de prueba neutras del presente trabajo.

[3] El presente trabajo también puede ser considero dentro del campo de la Astrofísica

Por otro lado, determinar la estabilidad mediante la cinemática de partículas de prueba del potencial gravitatorio generado por un disco delgado es un problema de gran relevancia en Astrofísica, ya que un hecho que se asume en Astrofísica es que la mayor parte de la masa de un galaxia espiral típica se concentra en un disco delgado [10]. A través de los años, diferentes enfoques se han utilizado para obtener este tipo de modelos de disco delgado (ver Kuzmin [69] y Toomre [126, 127], como ejemplos). Un método simple para obtener la densidad superficial de masa, el potencial gravitacional y la curva de rotación de discos delgados de radio finito fue desarrollado por Hunter [58], el más simple ejemplo de disco obtenido con el método es el conocido disco Kalnajs [65], que también puede ser obtenido por un aplanamiento en rotación de un esferoide uniforme [13, 14, 139]. En un trabajo posterior [40], se utilizó el método de Hunter para obtener una familia infinita de discos delgados de radio finito, esta familia infinita generaliza el disco Kalnajs con un buen comportamiento de la densidad superficial de masa.

El Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG), ha estudiado la dinámica de partículas de prueba a través de varios trabajos, el primero de ellos, en el año 2004, se enfocó en la cinemática de partículas de prueba neutras, temporales y nulas, dentro y fuera de la solución discoidal relativista de Bonnor-Sackfield [35, 76], después en 2005, se investigó sobre las órbitas marginalmente estables, en particular para una solución que representa un objeto masivo no rotante con deformación cuadrupolar y axialmente simétrico [31, 32], la órbita marginalmente estable se puede definir como la última órbita circular estable. Su gran importancia desde el punto de vista astrofísico es que se relaciona con el radio del borde interior de los discos de acrecimiento [136]. En ese mismo año, se exploró la dinámica de agujeros negros estáticos deformados a través de las superficies de sección de Poincaré y el exponente de Lyapunov [23, 24, 25, 49].

En el contexto general, el rango de trabajos relacionados con la cinemática de partículas de prueba es muy amplio, y se puede resaltar algunos de ellos conocidos: en espaciotiempos estacionarios y axialmentes simétricos [6], en el campo de Schwarzschild, Kerr, y Reissner-Nordström [114]. Además, en la actualidad el movimiento de partículas que caen libremente sigue siendo un tema de gran interés y desarrollo en la Astrofísica, incluso para las soluciones más conocidas y estudiadas, como la solución de un agujero negro de Schwarzschild [89, 107, 113], la solución de Reissner-Nordström que describe un agujero negro cargado [43, 93, 94, 95], la solución de un agujero negro rotante (métrica de Kerr) [51, 96], y la solución de un agujero negro de Kerr-Newman [26, 75].

El último trabajo del grupo relacionado con la dinámica de partículas de prueba fue realizado en 2007 [128], y publicado recientemente [104, 105]. La novedad de este trabajo fue que exploró la cinemática de partículas de prueba cargadas (además de las neutras) en soluciones estacionarias de electrovacío. Cabe resaltar que ellos no utilizaron las superficies de sección de Poincaré para analizar el equilibrio de los campos gravitatorios. El presente trabajo analiza la dinámica de partículas de prueba neutras en campos gravitatorios estáticos y axialmente simétricos en configuraciones de materia conocida, y en el ámbito de la Relatividad General y la Gravitación Clásica. Así, uno de los objetivos del trabajo es crear una base para investigaciones futuras como: la dinámica de partículas de prueba (neutras o cargadas) inmersas en campos estacionarios en Relatividad General [4], la cinemática de partículas de prueba en el caso de Relatividad Especial y la dinámica de sistemas desde el punto de vista de la aproximación postnewtoniana, entre otros. En la siguiente sección se relaciona la estructura de la presente Tesis.

SECCIÓN 1.2

Organización del Trabajo

El corazón de este trabajo, se basa en el examen de la estabilidad de campos gravitatorios estáticos y axialmente simétricos por medio de la cinemática de partículas que caen libremente. El capítulo 2, está dedicado al análisis de la estabilidad de los sistemas en el campo de la Gravitación de Newton. Después de una introduccción al capítulo 2, en la sección 2.2, se determinan las expresiones que permiten analizar la trayectoria de las partículas considerando sólo campos estacionarios[5] y axialmente simétricos; además se desarrolla el concepto de las superficies de sección utilizado en gran parte del trabajo. Luego en la sección 2.3, se investiga en particular la órbita circular en el plano de la fuente; la importancia del análisis de este concepto es que, por ejemplo, para el caso especial de la investigación de galaxias, la trayectoria circular es equivalente al estudio del comportamiento de las curvas de rotación de la galaxia. La sección 2.4, está enfocada en determinar las identidades que permitirán examinar la región donde podría estar

[4]En el caso estacionario existe un trabajo famoso [6].

[5]Los términos estacionario y estático, no tienen diferencia en Gravitación newtoniana.

ubicado el radio de un disco de acreción [136], éste se encuentra al calcular el radio de la órbita marginalmente estable (ROME). Para terminar el capítulo 2, en la sección 2.5, se investigan algunos campos gravitacionales, el primer campo gravitacional que se consideró (sección 2.5.1), fue uno que representa fuentes discoidales, como es el caso de los Discos Generalizados de Kalnajs [40], en síntesis en está sección se demuestra que cuando las partículas cruzan el disco, éstas pueden presentar comportamientos caóticos [98]. La siguiente sección, sección 2.5.2, está dedicada a observar cómo influye el momento cuadrupolar en la estabilidad de un campo gravitacional considerando sólo los dos primeros términos de la expansión del potencial gravitacional [72]. Luego, en la sección 2.5.3, se estudia la repercusión de la inclusión del siguiente término de la expansión multipolar en la estabilidad del campo gravitacional [34], es decir, el término denominado octopolar. La última sección, sección 2.5.4, está dedicada a estudiar un campo que puede representar el potencial gravitacional de las galaxias NGC 3877, y NGC 3917. Así, como se esperaba, estas soluciones discoidales son estables [38].

La dinámica de partículas de prueba desde el punto de vista de la Relatividad General se desarrolla en el capítulo 3, en la segunda sección (sección 3.2), se muestra cómo los campos gravitacionales estáticos y axialmente simétricos se puedan tratar a través de la cinemática en un plano equivalente (plano meridional). El caso del radio de órbitas circulares en el plano ecuatorial se considera en la sección 3.3, luego en la sección 3.4, se investiga el ROME y el criterio de la estabilidad de estos campos gravitacionales: como en el caso clásico se muestra que la estabilidad de trayectorias circulares está relacionada con el momentum angular de la partícula o el criterio de Rayleigh. En la última parte del capítulo 3, se examina la naturaleza de algunos campos gravitatorios, por ejemplo, en la sección 3.5.1, se considera una solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío en coordenadas cilíndricas, mientras que las secciones 3.5.2 y 3.5.3, están dedicadas al análisis de las soluciones en coordenadas esferiodales oblatas y esferoidales prolatas, respectivamente [36]. Se culmina el capítulo 3 (seciones 3.5.6 y 3.5.7), presentando la estructura de las ecuaciones para campos gravitatorios esféricos (sección 3.5.6)[39], éstas incluyen soluciones de naturaleza cosmológica. Mientras que en las sección 3.5.7, se presenta una nueva familia de discos gruesos relativistas, con su respectivo análisis de las órbitas en el plano meridional y en el espacio de fases para algunos parámetros de las soluciones discoidales [37].

Capítulo 2

DINÁMICA DE PARTÍCULAS EN GRAVEDAD NEWTONIANA

SECCIÓN 2.1

Introducción

En los últimos dos decenios la comunidad Astrofísica - estudiantes, profesores y investigadores por igual - se han dado cuenta de un nuevo tipo de actividad en la Física. Algunos investigadores, historiadores de la ciencia y los filósofos han ido tan lejos como llamar a una "ciencia nueva" o "nueva Física", mientras que otros lo ven como una mera extensión natural de la Mecánica Clásica y la Dinámica de Fluidos. En cualquier caso, lo que se conoce como Teoría de Sistemas Dinámicos, la Dinámica No Lineal o el Caos, simplemente, ha experimentado un desarrollo importante, causando mucho entusiasmo en la comunidad científica e incluso en el público en general, como lo muestra el gran número de publicaciones en el área.

La cualidad más notable de la Teoría de Sistemas Dinámicos es su diversa gama de aplicabilidad. Mecánica, Dinámica de Fluidos, la Cinética Química, Circuitos Electrónicos, la Biología, la Economía, y la Astrofísica, son algunos de los temas en los que se produce un comportamiento caótico. En el corazón de la teoría se encuentra la búsqueda de lo universal y lo genérico, así la comprensión de fenómenos complejos y heterogéneos, aparentemente pueden surgir. Las ideas de las bifurcaciones, atractores extraños, los conjuntos fractales y así sucesivamente, parecen proporcionar las herramientas necesarias para tal unificación conceptual. Existe un creciente interés en el tema general, así como su posible repercusión en campos específicos de investigación o estudio de la Astrofísica. La literatura sobre el caos ha crecido enormemente en los últimos años. Libros en todos los niveles abundan, desde lo popular a lo rigurosamente matemáticos, algunos de ellos excelentes [4, 28, 77, 91].

Este capítulo se fundamenta en el principio de Hamilton, análogo al de Fermat del mínimo camino óptico. La utilización de este principio en los sistemas clásicos conduce a las ecuaciones de movimiento en la formulación lagrangiana, de ella se pueden deducir las Leyes de Newton, las cuales son análogas a las ecuaciones de Hamilton. Actualmente, el estudio de la dependencia del comportamiento de los sistemas es muy utilizado por la comunidad científica e incluso por el público en general. Los sistemas hamiltonianos analizados constituyen una subclase muy importante de los sistemas dinámicos (dinámica no lineal o caos). Matemáticamente, un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones algebraicas, diferenciales, integrales o combinaciones de éstas, cuya solución proporciona la evolución en el tiempo de alguna variable independiente.

Una de las características importantes en los sistemas hamiltonianos es que no tienen atractores [100], la existencia de atractores extraños en sistemas disipativos es una de las características principales del caos. La falta de atractores, sin embargo, no descarta, como veremos, comportamientos caóticos en los sistemas considerados. Recordemos también que la Mecánica newtoniana es determinista, ya que una partícula no puede estar en dos posiciones diferentes al mismo tiempo, es decir, si el sistema dinámico considerado es irregular o caótico, éste corresponderá a *Caos Determinista.* El determinismo de Newton significa que cada solución de las ecuaciones diferenciales (EDS) de movimiento permite predecir tanto su futuro como su pasado, pues las EDS de movimiento de Newton son de segundo orden, y por lo tanto son invariantes ante la transformación temporal, $t \to -t$. Las EDS de movimiento en todo el texto representan un sistema dinámico autónomo; es decir, en las ecuaciones el tiempo t no aparece de forma explícita.

El capítulo se ha distribuido de la siguiente forma: en la sección 2.2. se muestra cómo los sistemas dinámicos considerados se reducen a un movimiento en un plano, además se presenta la teoría de las superficies de sección de Poincaré. Después, en la seccción 2.3, se analizan las expresiones relacionadas con trayectorias circulares en el plano de la fuente. Luego en las siguiente sección (sección 2.4), se estudian los criterios de estabilidad de los campos analizados, además del ROME. Finalmente, en la última sección del capítulo, se examinan algunos campos que representan configuraciones de materia de interés astrofísico, como, los DGK (sección 2.5.1), objetos con deformación cuadrupolar (sección 2.5.2), objetos con deformación oblata, prolata y octopolar (sección 2.5.3), estabilidad en las galaxias espirales NGC 3877, NGC 3917 (sección 2.5.4).

SECCIÓN 2.2

Trayectoria de Partículas de Prueba en Campos Gravitacionales Axialmente Simétricos

En esta sección se analiza el movimiento de partículas de prueba (como estrellas) en campos gravitacionales con simetría axial (por ejemplo galaxias) desde el punto de vista de la Mecánica Clásica. En estos sistemas, se supone que el origen del sistema de coordenadas está en el centro de la fuente, esto equivale a suponer que la fuente tiene simetría respecto al plano $z = 0$. En esta teoría, el problema de describir la trayectoria de partículas de prueba en campos gravitatorios axialmente simétricos se reduce a un problema bidimensional equivalente[1] en las coordenadas cilíndricas, (R, z). Para demostar esto, se define una de las dos cantidades constantes en estos campos conservativos, la integral primera de movimiento, la energía específica, dada por

$$E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \Phi(R, z), \tag{2.1}$$

en donde $\Phi = \Phi(R, z)$ representa el potencial gravitacional de una fuente con estas características, mientras el punto se refiere a derivada respecto al

[1]Recordemos que el problema equivalente en Mecánica Clásica corresponde a el problema de los dos cuerpos.

tiempo. La otra cantidad física invariante a través del tiempo, es el momentum angular específico respecto al eje z, pues, el langrangiano no depende de la coordenada ϕ, por lo que esta coordenada se conoce como ignorable o cíclica.

De acuerdo con esto, el lagrangiano por unidad de masa para un campo gravitacional axialmente simétrico se puede escribir en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\ell^2}{2R^2} - \Phi(R, z), \tag{2.2}$$

donde se ha utilizado la relación de conservación

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R^2\dot{\phi} = \ell. \tag{2.3}$$

La identidad anterior se puede determinar a través de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, siendo ℓ el momentum angular específico con respecto al eje z. Recíprocamente, reemplazando la ecuación (2.3), se puede escribir la energía específica (o el hamiltoniano específico $\mathcal{H}$) de la forma

$$E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\ell^2}{2R^2} + \Phi(R, z) = \mathcal{H}. \tag{2.4}$$

En esta expresión se aprecian dos términos, uno correspondiente a la energía cinética y otro que depende de la posición de la partícula denominado comúnmente *potencial efectivo*. Suponemos entonces que estudiar el comportamiento de las estrellas en presencia de campos gravitatorios axialmente simétricos se reduce a un problema bidimensional equivalente en el plano (R, z), que se conoce como *plano meridional*. Nótese que en (2.4), el potencial efectivo es de la forma

$$\Phi_{eff}(R, z) = \frac{\ell^2}{2R^2} + \Phi(R, z). \tag{2.5}$$

El potencial efectivo permite analizar las posibles órbitas de forma cualitativa antes de resolver las ecuaciones de movimiento de la partícula[2], por ejemplo, como que la energía (2.4) es una cantidad física que debe ser positiva, se tiene la restricción $\Phi_{eff}(R, z) < 0$; además, los contornos del potencial efectivo definen las regiones del espacio en las que la partícula se puede mover.

[2]Como en el caso del problema unidimensional equivalente estudiado en Mecánica Clásica.

2.2.1 Superficies de Sección o Superficies de Sección de Poincaré

Poincaré inventó una técnica matemática muy útil en la investgación de un sistema dinámico, ella permite reducir el problema a uno más simple con menos dimensiones. La técnica se describe a continuación. Como se verificó, la cinemática de partículas de prueba en los campos considerados[3] se puede analizar en el plano meridional (R, z), pues la órbita de la partícula está completamente determinada por la evolución de las coordenadas, $R = R(t)$ y $z = z(t)$ (sistema con dos grados de libertad). De manera que el espacio de fases del movimiento tiene inicialmente cuatro dimensiones, $(R, z, \dot{R}, \dot{z})$, el cual, según la restricción (2.4), se puede reducir al subespacio tridimensional $(R, z, \dot{R})$; sin embargo, dicho subespacio es complicado de visualizar y por consiguiente de analizar. Así que es usual tener en cuenta[4], el caso en que la partícula cruza el plano $z = 0$, por lo que el movimiento esta finalmente definido por el espacio físico $(R, \dot{R})$. En otras palabras, generalmente se estudia la regularidad de las trayectorias de las partículas a través de la huella que dejan en el espacio de fases $(R, \dot{R})$, dichas huellas son conocidas como las superficies de sección o las superficies de sección de Poincaré, y la teoría aplicada es la de Kolmogorov-Arnold-Moser, conocida como la teoría de KAM. Esta teoría afirma que el movimiento en un sistema integrable está confinado a una superficie toroidal, cualquier perturbación en el hamiltoniano origina que los toroides se vean deformados.

En consecuencia, en el espacio de fase $(R, \dot{R})$ se deben apreciar cortes del toroide, o sea, en las figuras de las superficies de sección de Poincaré se deben visualizar regiones cerradas bien definidas, que representan regiones de regularidad del movimiento (algunas veces son rodeadas por un mar de caos). Dichas regiones en las superficies de sección se conocen como las *islas de estabilidad o curvas de KAM*; en contraste, las regiones que tengan puntos aislados son regiones de irregularidad o caóticas. Así la naturaleza de las trayectorias se puede definir a través de las superficies de sección, pues en ellas se puede distinguir zonas de órbitas períodicas, cuasiperíodicas y no períodicas; además de, zonas de trayectorias tipo caja y tipo lazo.

Por ejemplo, si la curva es cerrada (en la superficie de sección de Poincaré), la solución es periódica, pues el número de cortes es finito y se va repitiendo

[3]Estáticos y axialmente simétricos.
[4]Sin perdida de generalidad.

periódicamente. Cuando la solución no es periódica con frecuencias, como, ω_1 y ω_2, los cortes se producen a intervalos de tiempos $T_1 = 2\pi/\omega_1$ ($T_2 = 2\pi/\omega_2$ para ω_2) y se sitúan en la intersección del toro con el plano de la sección, que corresponde a una curva invariante del momento $\dot{R}$. El aspecto de la sección depende de la razón ω_1/ω_2, si es inconmensurable o no. Si la razón entre las frecuencias angulares es racional, esto es, $\omega_1/\omega_2 = n_1/n_2$, donde n_1, n_2 son enteros primos entre sí, la solución es periódica y se cierra sobre sí misma tras dar n_1 y n_2 vueltas alrededor de los ejes del toro, Fig.2.1(a). Por otro lado, si el cociente entre las frecuencias es irracional, la trayectoria cubre ergódicamente la superficie del toro, de tal forma que los puntos de corte están densamente poblados a lo largo de la curva invariante, Fig.2.1(b). Finalmente, si el movimiento es aperiódico, los puntos se presentan de un modo desordenado, sin seguir ningún patrón y no están sitúados en ninguna curva, sino que, por el contrario, exploran toda la variedad tridimesional, propiedad que se denomina llenado del espacio (caos), ver Fig.2.1(c).

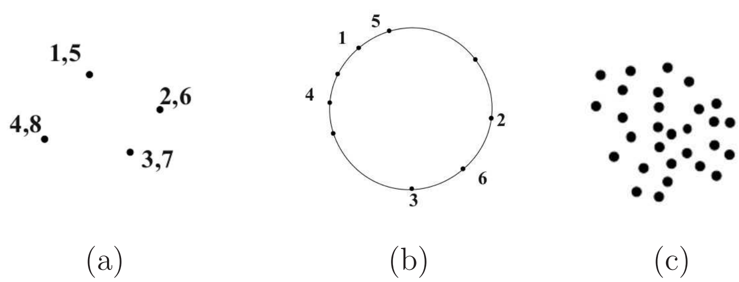


Figura 2.1: Estructura del espacio de fase correspondientes a movimientos periódicos (a), aperiódicos (b) y caóticos (c), respectivamente.

Consecuentemente, la irregularidad del movimiento es producida por dos acciones distintas: el espacio fásico se estira, por lo que las trayectorias se separan (sensibilidad a las condiciones iniciales), y, al mismo tiempo, se pliega sobre sí mismo (mixing), lo que hace que se entremezclen. El resultado es el movimiento caótico. El primero de estos efectos se puede caracterizar a través de los Números Característicos de Lyapunov (NCL). El concepto de divergencia exponencial, de sensibilidad a una condición inicial, no es privativo del caos. Cualquier partícula cercana a un máximo de un potencial se alejará exponencialmente de éste, y dos partículas en posiciones cercanas se alejarán exponencialmente entre sí. Después de un tiempo, si el movimiento es acotado, acabarán acercándose exponencialmente a un mínimo, o a una solución periódica si la hubiera. Una órbita caótica es una órbita a la que le ocurre esto siempre. Es decir, se comporta como si estuviera cerca de un punto de equilibrio inestable siempre, por los siglos de los siglos. Nunca logra encontrar un sumidero o un ciclo que la atraiga (atractor). En cada punto de una tal órbita, hay otros puntos arbitrariamente cercanos que se alejarán exponencialmente de ella. Los NCL están definidos como

$$\mathrm{NCL} = \lim_{\substack{\Delta_o \to 0 \\ t \to \infty}} \left[\frac{\ln(\Delta/\Delta_o)}{t} \right], \tag{2.6}$$

donde Δ_0 y Δ son las desviaciones de dos órbitas en un instante 0 y t, respectivamente. Los NCL se pueden encontrar usando el procedimiento sugerido por [9, 106].

De otra parte, la evolución de las coordenadas se puede determinar al resolver el sistema de EDS de movimiento, este sistema autónomo se pueden obtener de varias formas distintas y sus soluciones son equivalentes: a través de las Leyes de Newton, por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange o mediante las ecuaciones de Hamilton. Los dos primeros métodos se caracterizan porque el sistema dinámico es de segundo orden, mientras que las EDS de Hamilton son de primer orden. Este último, permite integrar más facilmente las ecuaciones; de ahí que, las ecuaciones canónicas o de Hamilton sea el método más utilizado para analizar las superficies de sección de Poincaré, para nuestro caso particular son

$$\dot{R} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_R} = p_R, \qquad \dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = p_z, \tag{2.7}$$

$$\dot{p}_R = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R}, \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} \ . \tag{2.8}$$

Las cuatro condiciones iniciales necesarias para resolver el sistema autónomo anterior se pueden obtener así: se escoje las condiciones para $R(t=0) = R_0$, $z(t=0) = z_0$, según el contorno del potencial efectivo, luego se fija una condición inicial para la velocidad radial $\dot{R}(t=0) = \dot{R}_0$, y finalmente se determina a partir de la ligadura (2.4), la condición inicial para la velocidad vertical $\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0$. Por consiguiente, el único parámetro libre es la velocidad inicial radial de la partícula. La solución del sistema de EDS puede representar, por ejemplo, el movimiento de las estrellas en el interior de la fuente axialmente simétrica o alrededor de galaxia, según sea el caso.

Para terminar esta sección, en la Fig.2.2, se describe un sistema dinámico conocido, el correspondiente al sistema hamiltoniano de Hénon-Heilis [52]. Este sistema es utilizado para describir el comportamineto de moléculas triatómicas y para describir la dinámica estelar. Las expresiones que lo definen son

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3\right), \tag{2.9}$$

$$E = V(x,y) + \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right), \tag{2.10}$$

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \ . \tag{2.11}$$

Siendo E la energía del sistema, y $V = V(x,y)$ el potencial que, como vemos, tiene una parte correspondiente a un oscilador bidimensional isótropo y, además, otra cúbica. Este problema como se conoce no es integrable [5]. Las condiciones iniciales utilizadas para la Fig.2.2, son variables mantenien-

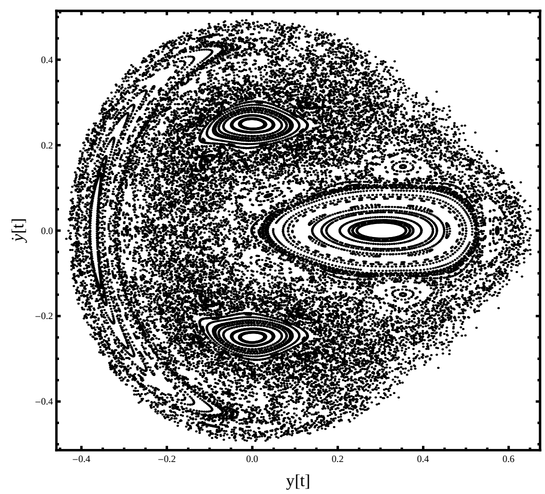


Figura 2.2: Superficie de sección de Poincaré para el sistema de Hénon-Helis, (2.9). Las condiciones iniciales varían según $E = 1/8$ y $x(t=0) = 0$.

do constante $E = 1/8$, y el corte en $x(t=0) = 0$. En esta figura se pueden observar regiones acotadas bien definidas rodeadas de un mar de caos, regiones estables e inestables del movimiento, respectivamente. Por otro lado, las figuras 2.3 y 2.3, representan el espacio de fase de sistema Hénon-Heilis,

[5]Un sistema es integrable o su movimiento es regular si existen tantas constantes de movimiento como variables independientes.

en el caso regular y caótico, respectivamente. En ellas se aprecia los cortes en el eje $z = 0$, donde se muestra que las regiones regulares corresponden a toroides cerrados, y los puntos aleatorios en las superficies de sección de Poincaré corresponden a comportamiento caótico o irregular. En la sección siguiente, se estudia las expresiones relacionadas con trayectorias circulares.

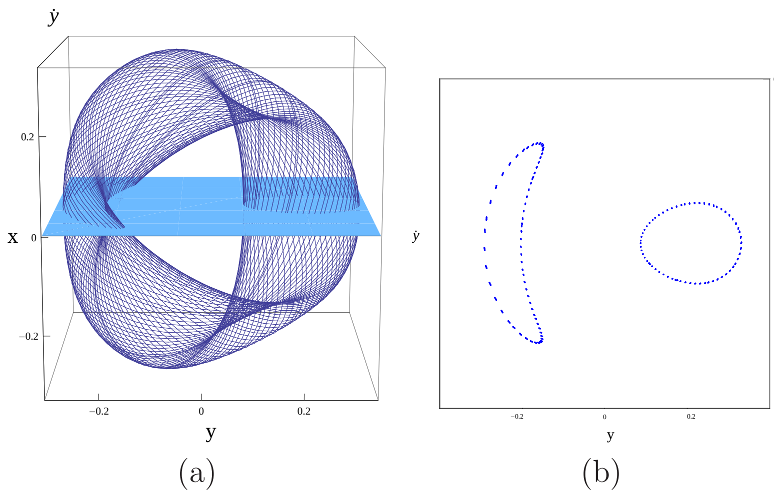


Figura 2.3: (a) Espacio de Fases. (b) Superficie de Poincaré. Sistema Hénon-Heilis. Trayectoria regular.

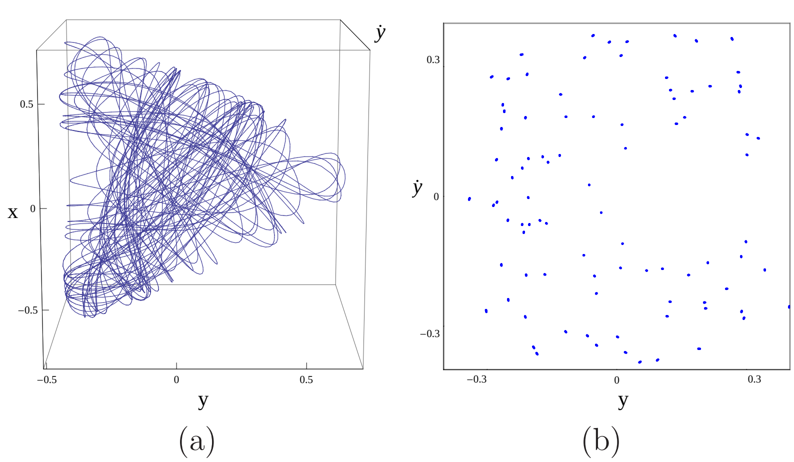


Figura 2.4: (a) Espacio de Fases. (b) Superficie de Poincaré. Sistema Hénon-Heilis. Trayectoria caótica.

SECCIÓN 2.3

Órbita Circular en el Plano Ecuatorial

Una de las trayectorias importantes a analizar en el movimiento de partículas de prueba en un campo gravitacional es aquella trayectoria en la cual la partícula describe una órbita circular en el plano de la galaxia (fuente); el plano es comúnmente denominado plano ecuatorial, para las coordenadas utilizadas es $z = 0$. El interés radica en que la trayectoria circular puede representar la diferencia entre dos regiones del espacio, además en la teoría newtoniana el estudio de la órbita circular en el plano ecuatorial de la galaxia es equivalente al análisis de las curvas de rotación de la galaxia. Para este caso especial la energía específica de una partícula está representada a través de la ecuación

$$E = \frac{1}{2}\dot{R}^2 + V(R), \tag{2.12}$$

en cuyo caso el análisis del movimiento de las estrellas se reduce a un problema unidimensional equivalente, donde $V = V(R)$ es el potencial efectivo, de la forma

$$V(R) = \frac{\ell^2}{2R^2} + \Phi(R, 0)\ . \tag{2.13}$$

La evolución de la coordenada radial se puede determinar nuevamente a través de las ecuaciones de Hamilton (2.7) y (2.8). Otra vez, las condiciones se restringen a las curvas de potencial efectivo, es decir, según una energía particular, se puede fijar la condición $R(t = 0) = R_0$, y mediante la expresión

$$\dot{R}(t = 0) = \dot{R}_0 = \sqrt{E - \frac{\ell^2}{2R_0^2} - \Phi(R_0, 0)}, \tag{2.14}$$

se obtiene la otra condición inicial para resolver el sistema autónomo. Esta vez no se tiene ningún paramétro libre.

Supongamos ahora que la partícula describe una órbita circular de radio $R = R_c$, esto es, se cumple que $\dot{R}_c = \ddot{R}_c = 0$. El radio de la trayectoria circular se puede encontrar al resolver la ecuación de los puntos críticos del potencial efectivo. Así pues, al diferenciar una vez el potencial efectivo (2.13) respecto a la coordenada radial, e igualarlo a cero resulta

$$\ell_c^2 = R^3\Phi_{,R}\ , \tag{2.15}$$

identidad que representa el valor del momentum angular de todas las órbitas circulares en el plano de la galaxia, que, como veremos en la próxima sección, es la expresión fundamental para determinar la estabilidad de las órbitas circulares. La otra cantidad conservada es la energía específica de la órbita circular, la cual se obtiene al reemplazar el valor del momentum en la expresión (2.12), de modo que

$$E_c = \frac{R\Phi_{,R}}{2} + \Phi(R, 0) \ . \tag{2.16}$$

La anterior ecuación se puede utilizar también para encontrar los dos radios de las trayectorias confinadas, como es el caso especial de órbitas tipo figura de rosetta (Figura 2.5(b)), pues en estos radios, se cumple que la velocidad radial de la partícula es nula, $\dot{R} = 0$, siendo estos radios, los puntos de retorno del movimiento. En la figura 2.5(a), se puede apreciar los radios R_1, y R_2, para un determinado valor de la energía específica E_1, estos son los puntos de retorno del movimiento, en los que la partícula está confinada generando algunas veces una figura tipo rosetta. Los radios son conocidos como el *afelio* (R_2), y el *perihelio* (R_1). También en esta gráfica se señala el valor de la energía específica E_c, correspondiente a una órbita circular. En la siguiente sección se analizan los criterios de estabilidad de las órbitas circulares.

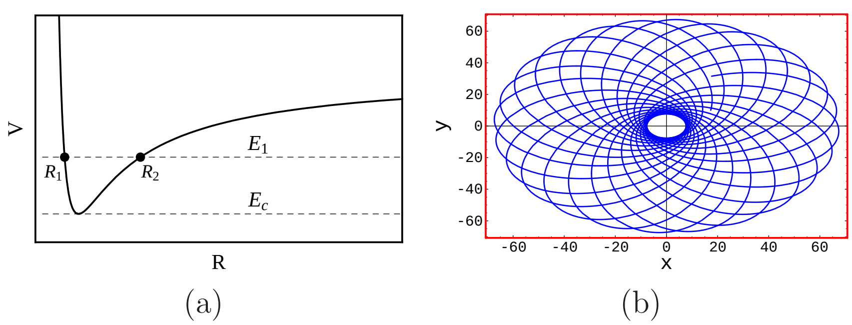


Figura 2.5: (a) Potencial efectivo clásico. Los radios R_1, R_2 son el perihelio y el afelio, respectivamente, según un determinado valor de la energía, E_1. El valor E_c, es la energía de una trayectoria circular. (b) Figura de rosetta.

SECCIÓN 2.4

Estabilidad y Órbita Marginalmente Estable en el Plano Ecuatorial

En el caso especial del plano de la galaxia, es importante investigar la estabilidad de las trayectorias circulares, pues ellas representan la estabilidad de la galaxia. Considerar la órbita circular como se mencionó en la sección anterior, es equivalente a describir el comportamiento de la galaxia a través de la velocidad circular. Se conoce que la descripción de la estabilidad de las órbitas circulares en el plano ecuatorial se puede hacer de varias formas, una de ellas es estudiar el comportamiento de la trayectoria circular ante pequeñas perturbaciones de su radio [79], ya que existen puntos en los que el sistema oscila armónicamente, las regiones alrededor de estos puntos se llaman pozos de potencial. Otra forma, tal vez más sencilla, es analizar los puntos críticos a través del criterio de la segunda derivada del potencial efectivo, en tal caso la órbita circular será estable, si al evaluar el punto crítico en la segunda derivada, el resultado es mayor que cero (estos puntos de equilibrio son llamados puntos elípticos o centros), mientras que si el resultado es menor que cero la órbita circular es inestable. Dichos puntos son denominados puntos hiberbólicos o sillas (porque las trayectorias próximas son hibérbolas similares a las curvas de nivel de una silla de montar)[6]. Esta técnica se conoce como Teorema de Lagrange o Dirichlet.

Específicamente, si se utiliza el criterio de la segunda derivada, la segunda derivada del potencial efectivo es

$$V_{,RR} = \frac{3\ell^2}{R^4} + \Phi_{,RR} \ . \tag{2.17}$$

Esta última expresión se puede reescribir reemplazando la condición de las órbitas circulares (2.15), entonces se obtiene

$$3\Phi_{,R} + R\Phi_{,RR} > 0, \tag{2.18}$$

siendo ésta la condición que se debe cumplir para que el potencial tenga un mínimo o la trayectoria circular sea estable.

[6] Las zonas alrededor de estos máximos se denominan barreras de potencial.

Del mismo modo, existen otras dos cantidades utilizadas para analizar la estabilidad de la trayectoria circular, ellas son conocidas como la frecuencia epicíclica, y la frecuencia vertical, y representan la estabilidad de las trayectorias circulares ante perturbaciones de su radio, radiales y verticales, respectivamente. Según esto, la frecuencia epicíclica es equivalente a analizar la estabilidad a través del criterio de la segunda derivada del potencial efectivo. La frecuencia epicíclica se obtiene haciendo una pequeña perturbación, x, al radio de la órbita circular, esto es, $R \to R_c + x$. De esta forma, se encuentra una expresión para un oscilador armónico con ecuación

$$\ddot{x} + x \left[\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right]_{(R_c,0)} = 0, \tag{2.19}$$

siendo la frecuencia del oscilador la frecuencia epicíclica, dada por

$$\kappa^2 = \left[\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right]_{(R_c,0)}, \tag{2.20}$$

cuya expresión se puede mostrar que es equivalente a la ecuación (2.18), por lo que las trayectorias circulares serán estables ante perturbaciones radiales si la frecuencia epicíclica es positiva.

Análogamente, para perturbaciones verticales se puede encontrar una ecuación para un oscilador armónico con frecuencia,

$$\nu^2 = \left[\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right]_{(R_c,0)}, \tag{2.21}$$

conocida como la frecuencia vertical. Cuando esta cantidad sea positiva, la partícula en un moviemiento circular será estable ante perturbaciones verticales de su radio.

Por otro lado, el ROME, físicamente representa la región de la última órbita circular estable, por ejemplo, puede representar la ubicación del borde interior del disco de acreción alrededor de un agujero negro. Los discos de acrecimiento pueden formar estructuras de forma transitoria en varios escenarios astrofísicos, incluyendo el colapso del núcleo de estrellas masivas o fusión de una estrella de neutrones. Además los modelos de estallidos de rayos gamma se basan en la existencia de grandes discos de acreción alrededor de un agujero negro [67]. El ROME se encuentra al resolver simultáneamente el siguiente sistema de ecuaciones para R

$$\frac{dV}{dR} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dR^2} = 0.$$

Esto es, restringiendo la expresión de la izquierda a que cumpla la segunda, lo que se está considerando es que necesariamente el punto crítico sea un punto de inflexión, siendo ésta la forma de determinar lo que se conoce como el ROME. Según lo anterior, la fórmula que define el ROME es

$$3\Phi_{,R} + R\Phi_{,RR} = 0, \tag{2.22}$$

siendo ésta la misma expresión que define la estabilidad de una órbita circular, pero cuando está sea mayor que cero.

Un hecho adicional significativo, sencillo de demostrar, es la equivalencia entre las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^2V}{dR^2} \geq 0, \tag{2.23}$$

y,

$$\frac{d\ell_c^2}{dR} \geq 0. \tag{2.24}$$

El signo igual se usa para determinar el ROME, mientras la inecuación se utiliza para el rango de estabilidad de la trayectoria circular. La expresión (2.24), representa la pendiente de la curva de momentum angular específico de una órbita circular, por lo tanto cuando la pendiente de la curva de momentum angular específico sea negativa, la órbita circular será inestable, en caso contrario será estable, y en el caso especial que sea igual a cero, la ecuación permititá encontrar el valor del ROME. Es decir, una gráfica de la ecuación (2.15), nos basta para determinar la estabilidad y el ROME. Además, la ecuación (2.24), es semejante a la expresión

$$\ell_c \frac{d\ell_c}{dR} \geq 0, \tag{2.25}$$

conocida como el criterio de Rayleigh [70, 99], y utilizada por diversos autores para determinar la estabilidad de las trayectorias circulares en modelos discoidales de galaxias, ver referencias [71, 129, 130].

De los resultados obtenidos hasta ahora, podemos concluir que la estabilidad de las trayectorias circulares ante perturbaciones radiales se puede analizar de varias formas físicamente similares: por medio de la frecuencia epicíclica (2.20), mediante el análisis de los puntos críticos del potencial efectivo (2.18), a través del bosquejo del momentum angular (2.15) o mediante el criterio de Rayleigh (2.25)[7]. Mientras que las perturbaciones verticales se describen sólo

[7]Recuérdese que todo esto es equivalente al estudio del comportamiento de la velocidad circular de la galaxia en el caso particular de fuentes discoidales.

mediante la frecuencia vertical (2.21). Por tanto, el paso a seguir es definir y analizar algunos campos conservativos, que representen configuraciones de materia de interés astrofísico, como fuentes discoidales. Éste será el estudio de las últimas secciones del capítulo.

SECCIÓN 2.5

Familias Particulares de Soluciones

2.5.1 Dinámica de Partículas en los Discos Generalizados de Kalnajs (DGK)

De acuerdo con las consideraciones anteriores, en esta sección nos centraremos en la cinemática alrededor de los DGK, introducidos por González y Reina [40]. Ellos forman una familia infinita de discos finos, cuyo primer miembro es precisamente el disco Kalnajs [65]. El estudio de las órbitas en el plano ecuatorial de soluciones discoidales de materia, es de claro interés astrofísico, debido a su relación con la dinámica del movimiento estelar en el interior del disco o del flujo de partículas en los discos de acreción alrededor de los agujeros negros. Además, un conocimiento de la cinemática interna del disco es relevante para su posterior análisis estadístico, y el estudio externo del movimiento de partículas ayuda a comprender el comportamiento de las estrellas que pertenecen al resto de componentes de la galaxia como el halo. Muchas de las partículas cruzan de ida y vuelta a través del disco, experimentando un cambio muy brusco en el campo de fuerza gravitacional. Este hecho da lugar a una gran variedad de órbitas caóticas y regulares, como lo señala Hunter [59], en el caso de los discos tipo Kuzmin [69], en Martinet y otros [80, 81, 82, 83], y en el caso de los modelos de Schmidt [108].

En primera instancia vamos a estudiar la estabilidad bajo perturbaciones radiales y verticales de las órbitas circulares, y a continuación se examinan las principales características y las condiciones generales de órbitas ecuatoriales. Luego se presentan soluciones numéricas descritas mediante los diagramas de fase. Como se espera, encontraremos con secciones caóticas cuando las partículas cruzan el disco y regiones regulares para otros casos. Algunas órbitas en el plano meridional se realizan y se calcula los NCL.

Los DGK se obtienen a partir de la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas (ver apéndice A), la cual es [7]

$$\Phi_m(x, y) = -\sum_{n=0}^{m} C_{2n} P_{2n}(y) i^{2n+1} Q_{2n}(ix), \tag{2.26}$$

donde C_{2n} son constantes conocidas, $P_{2n}(y)$ son los polinomios de Legendre, $Q_{2n}(x)$ son las funciones de Legendre de segunda clase, y donde cada valor de m representa un modelo de disco. Las variables x e y son las coordenadas esferoidales oblatas relacionadas con las coordenadas cilíndricas por

$$R^2 = a^2(1 + x^2)(1 - y^2), \tag{2.27}$$

$$z = axy, \tag{2.28}$$

donde a es una constante que representa el radio del disco. Para el plano ecuatorial ($z = 0$), tenemos dos regiones, porque si $x = 0$ entonces $y = \sqrt{a^2 - \rho^2}$, mientras que si $y = 0$ implica $x = \sqrt{\rho^2 - a^2}$; estos dos casos representan las regiones interior ($x = 0$) y exterior ($y = 0$) del disco, respectivamente.

Las constantes C_{2n} que aparecen en (3.42) están dadas por

$$C_{2n} = \frac{MG}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2}(4n + 1)(2m + 1)!}{2^{2m}(2n + 1)(m - n)!\Gamma(m + n + \frac{3}{2}) q_{2n+1}(0)} \right],$$

en donde $q_{2n}(x) = i^{2n+1} Q_{2n}(ix)$, M es la masa del disco, y G es la constante gravitacional. La presencia del termino $(m-n)!$ en el denominador restringe las constantes a la desigualdad $n > m$, tal como se muestra en [40].

Con los valores de las constantes C_{2n} se pueden calcular las diferentes cantidades físicas que caracterizan los diferentes modelos. Así, por ejemplo, el potencial gravitacional para los tres primeros miembros de la familia, están dados por

$$\Phi_1(x,y) = -\frac{MG}{a}[\cot^{-1} x + A(3y^2 - 1)], \tag{2.29a}$$

$$\Phi_2(x,y) = -\frac{MG}{a}[\cot^{-1} x + \frac{10A}{7}(3y^2 - 1) + B(35y^4 - 30y^2 + 3)], \tag{2.29b}$$

$$\Phi_3(x,y) = -\frac{MG}{a}[\cot^{-1} x + \frac{10A}{6}(3y^2 - 1) + \frac{21B}{11}(35y^4 - 30y^2 + 3) + C(231y^6 - 315y^4 + 105y^2 - 5)], \tag{2.29c}$$

donde

$$A = \frac{1}{4}[(3x^2 + 1)\cot^{-1} x - 3x], \tag{2.30a}$$

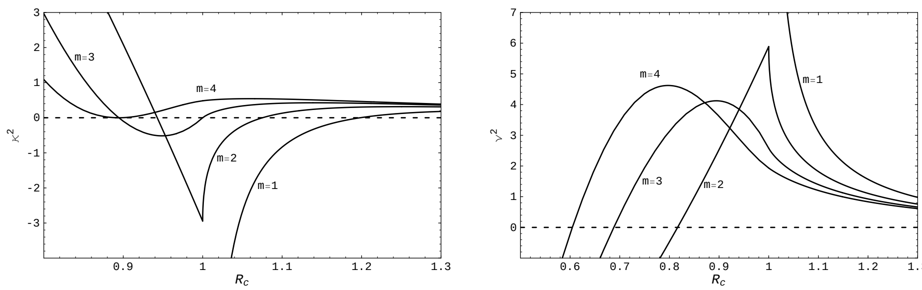
$$B = \frac{3}{448}[(35x^4 + 30x^2 + 3)\cot^{-1} x - 35x^3 - \frac{55}{3}x], \tag{2.30b}$$

$$C = \frac{5}{8448}[(231x^6 + 315x^4 + 105x^2 + 5)\cot^{-1} x - 231x^5 - 238x^3 - \frac{231}{5}x], \tag{2.30c}$$

con expresiones similares pero más complejas, para valores mayores de m.

A continuación se analizará la dinámica alrededor de los DGK, pero sólo para los cuatro primeros miembros de la familia, ver [40]. La dinámica de los demás discos, esto es, $m \geq 5$ puede ser analizada a partir del estudio realizado para $m = 1, 2, 3, 4$. Para realizar el análisis de los cuatro primeros discos se puede tomar $a = M = G = 1$, sin perder generalidad, y se empieza describiendo la dinámica a través del comportamiento de la frecuencias epicíclica y vertical.

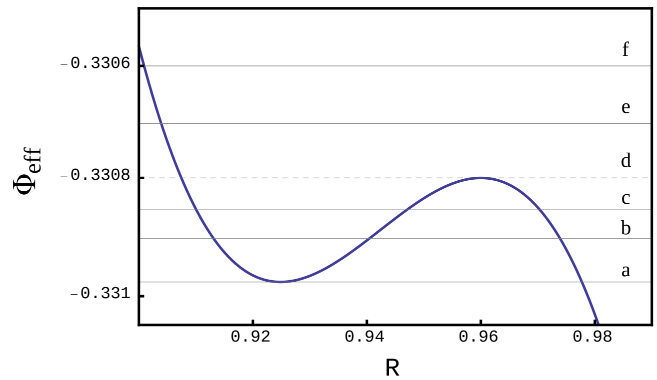
Se encuentra que el caso $m = 1$, presenta estabilidad en el rango de $0 \leq R_c \leq 1$ ($\kappa^2 = 3\pi$), pero es inestable cuando $1 < R_c \leq 1.198$. Para $m = 2$ y $m = 3$ se encuentra órbitas circulares radialmente inestables en los rangos de $2\sqrt{2}/3 \leq R_c \leq 1.075$ y $2/\sqrt{5} \leq R_c \leq 1$, respectivamente. Por el contrario, órbitas circulares para $m = 4$ siempre son estables bajo pequeñas perturbaciones radiales. Se confirmó que los modelos con $m \geq 5$ también son radialmente estables, como se puede apreciar en la referencia [101]. La figura 2.6(a) muestra el comportamiento de κ^2 en función de R_c para $m = 1, 2, 3, 4$. La figura 2.6(b), presenta el comportamiento de ν^2 y enseña la estabilidad ante perturbaciones verticales. Hallamos los siguientes rangos de estabilidad vertical: $0 \leq R_c \leq 1$ para $m = 1$ ($\kappa^2 = -3\pi/2$); $0 \leq R_c \leq 0{,}943$ para $m = 2$; $0 \leq R_c \leq 0{,}688$ para $m = 3$; $0 \leq R_c \leq 0{,}604$ para $m = 4$. Se aprecia que el rango de estabilidad vertical disminuye con m.



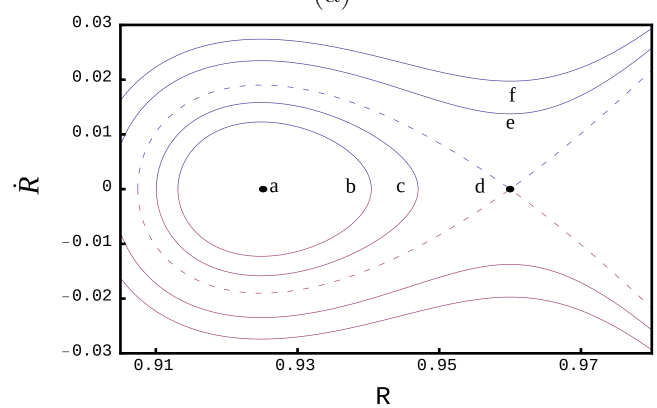
(a) (b)

Figura 2.6: (a) Comportamiento de κ^2, para $m = 1, 2, 3, 4$. Valores de R_c para los cuales dicha gráfica se ubica por encima de la línea a trazos, corresponden a trayectorias circulares que son estables ante perturbaciones radiales. (b) Comportamiento de ν^2, para $m = 1, 2, 3, 4$. Valores de R_c para los cuales dicha gráfica se ubica por encima de la línea a trazos, correspondientes a órbitas circulares que son estables ante perturbaciones verticales.

La dinámica de la partícula está condicionada por $E \geq \Phi_{eff}(R, 0)$ y, en particular, se encuentra movimiento acotado en el rango $R_1 \leq R \leq R_2$ si éste contiene al menos un valor crítico donde Φ_{eff} es mínimo y $\Phi_{eff}(R_1, 0) \leq E \leq \Phi_{eff}(R_2, 0)$. La figura 2.7(a) muestra el potencial efectivo para $m = 2$ y $\ell = 1{,}242$, cerca del borde del disco. En los contornos (energías) (b), (c)(d) se tiene órbitas acotadas, (e) y (f) corresponden a movimiento abierto, mientras que (a) y (d) corresponden a órbitas circulares. En la figura 2.7(b) están los diagramas de fase resultantes y se muestran dos regiones de movimiento acotado y no acotado, divididas por una curva separatriz a trazos (separatriz porque separa dos regiones del espacio de fases con propiedades distintas). Curvas de fase similares pueden ser obtenidas para $m = 1$ y $m = 3$ si usamos ℓ_c según (2.15), para $1 < R_c \leq 1{,}198$ y $2/\sqrt{5} \leq R_c \leq 1$, respectivamente. Para $m = 4$ el potencial efectivo no presenta máximos locales y su diagrama de fase no tiene curva separatriz.



(a)



(b)

Figura 2.7: (a) Potencial efectivo para $m = 2$ y $\ell = 1{,}242$. Las líneas horizontales corresponden a los siguientes valores de energía específica: (a) -0.330975 (mínimo de Φ_{eff}), (b) -0.330900, (c) -0.330850, (d) -0.33079 (máximo de Φ_{eff}), (e) -0.330700 y (f) -0.330600. Mínimos y máximos de Φ_{eff} ocurren en $R_c = 0{,}925$ y $R_c = 0{,}960$. (b) Diagrama de fase para $m = 2$, correspondiente a los mismos valores de ℓ y E mostrados en la figura 2.7. (a) y (d) son órbitas circulares estables e inestables, respectivamente. Las curvas (b) y (c) corresponden a movimiento acotado estable, mientras que (e) y (f) describen movimiento abierto. La línea a trazos representa una separatriz entre las regiones del movimiento acotado y no acotado.

Además, para una energía dada E de una órbita circular, definida por medio de la ecuación (2.16), es conveniente redefinir el momentum angular específico en unididades adimensionales, como $k = \ell/\ell_c$, para así calcular el rango de valores de ℓ_c, tales que Φ_{eff} tenga un mínimo en el interior del disco, esto es, en $0 \leq R \leq 1$ [8]. De esta forma, se establece los valores límite de las integrales de movimiento para los que las partículas permanecerán en el interior de la fuente. De acuerdo con esto, se encuentran los siguientes

[8]Recuerde que el mínimo se obtiene cuando la primera derivada se anula y la región iterior del disco corresponde a $x = 0$, e $y = \sqrt{1 - R^2}$.

rangos para el momento angular específico: (a) $m = 1$, $0 \leq |\ell_c| \leq \sqrt{3\pi}/2$; (b) $m = 2$, $0 \leq |\ell_c| \leq 2\sqrt{10\pi}/9$; (c) $m = 3$, $0 \leq |\ell_c| \leq \sqrt{21\pi/50}$; (d) $m = 4$, $0 \leq |\ell_c| \leq 15\sqrt{7\pi}/64$.

Órbitas que cruzan el disco

En esta parte, se expone las soluciones numéricas de las ecuaciones de movimiento correspondientes a las órbitas limitadas fuera del plano ecuatorial, excepto cuando se cruza el plano $z = 0$, para ciertos valores de E y ℓ, que se limitan a las regiones que contienen el disco y se cruzan de ida y vuelta a través de él. Como mostró Hunter [59], este hecho por lo general da lugar a diversas órbitas caóticas debido a la discontinuidad en z de las componentes del campo gravitacional, produciendo un cambio bastante brusco en sus curvaturas.

Ahora bien, el disco de Kuzmin, esta caracterizado por un potencial integrable de la forma $\Phi = -GM[R^2 + (a + |z|)^2]^{-1/2}$, con $a > 0$. Sin embargo, los potenciales tipo Kuzmin, que se caracterizan por $\Phi(\varepsilon)$, donde $\varepsilon = [R^2 + (a + |z|)^2]^{1/2}$, no son integrables y presentan el comportamiento mencionado anteriormente. Los DGK presentan una muy similar estructura y se puede esperar una dinámica similar. Cada potencial $\Phi(x, y)$ se puede convertir en uno tipo Kuzmin si se tiene en cuenta la transformación inversa, $x = (R_+ + R_-)/2a$ y $y = (R_+ - R_-)/2ia$, donde $R_\pm = [R^2 + (z \pm ia)^2]^{1/2}$. Además, se caracterizan por una discontinuidad en el disco, dada por [40]

$$\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial z}\right)_{z=0^+} = -\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial z}\right)_{z=0^-} = 2\pi G\ \Sigma_m(R). \tag{2.31}$$

La anterior relación impide la aplicación del teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser)[10], pero se observa algunas órbitas regulares cruzando el disco.

En la figura 2.8, se exhibe los contornos de nivel de Φ_{eff} para $m = 1, 2, 3, 4$, con $E = -1{,}245$ y $\ell = 0{,}2$, esto es, $k = 0{,}276, 0{,}266, 0{,}263$ y $0{,}262$, respectivamente. Para estos valores, el movimiento está confinado a una región que contiene el disco. Las correspondientes superficies de sección $z = 0$ se representan en las figuras 2.9, ellas muestran un variedad de trayectorias regulares y caóticas. La figura 2.9(a) tiene los valores tomados en el contorno (a) de la figura 2.8, en donde se observa una gran curva KAM encerrando una cadena de islas resonantes y tres conjuntos de anillos. También hay una gran zona caótica con dos cadenas de islas cerca del borde. La curva KAM grande, la cadena de islas y el conjunto central de anillos son producidas por órbitas tipo caja, mientras que los anillos laterales son como las últimas dos cadenas de islas, están formadas por órbitas tipo lazo. La curva punteada, resultante de una órbita periódica tipo caja, separa las regiones estocástica y regular.

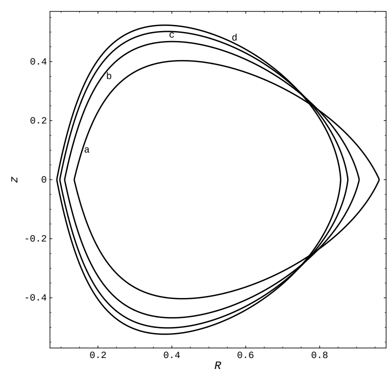


Figura 2.8: Contornos de nivel del potencial efectivo (energías) para (a) $m = 1$, (b) $m = 2$, (c) $m = 3$ y (d) $m = 4$, cuando $E = -1{,}245$ y $\ell = 0{,}2$.

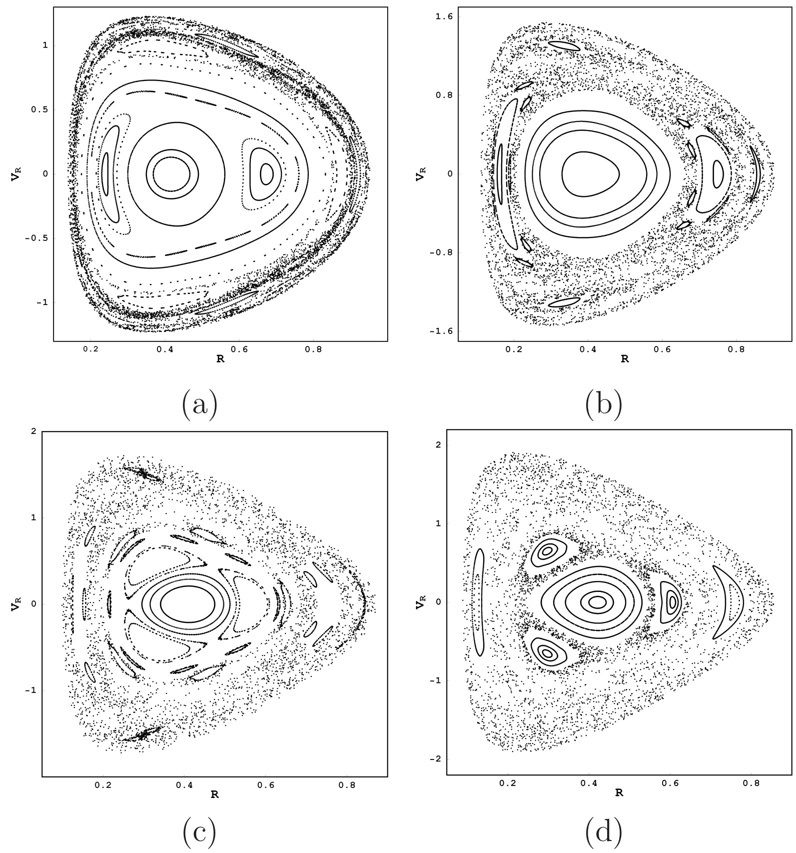


Figura 2.9: Superficies de sección correspondientes a $E = -1{,}245$, para (a) $m = 1$, $k = 0{,}276$, en donde se muestra una pequeña región caótica con dos cadenas de islas resonantes y un toroide central; (b) $m = 2$, $k = 0{,}266$. Después la región estocástica es más prominente que en la figura 2.9(a) y la zona del toroide está enteramente conformada por órbitas tipo caja; (c) $m = 3$, $k = 0{,}263$. Vemos una zona caótica prominente con cadenas de islas encerrando una región estable de órbitas caja y lazo. Esta última corresponde a las dos islas resonantes centrales, (d) $m = 4$, $k = 0{,}262$. La región caótica es más grande que en las figuras anteriores y contiene sólo dos cadenas de islas resonantes; las curvas punteadas en la isla del extremo son debidas a una órbita periódica. La zona regular central está constituida enteramente por órbitas tipo caja.

La figura 2.9(b) muestra características semejantes a las mostradas en 2.9(a). La superficie de sección corresponde a los valores tomados en el contorno (b) de la figura 2.8. En este caso se observa una región central definida por órbitas tipo caja (los cuatro anillos centrales) y una región caótica encerrándola que contiene una variedad de islas resonantes definidas por órbitas tipo lazo. Entonces las regiones de órbitas tipo caja y lazo están claramente separadas, en contraste con la figura 2.9(a), en donde ellas se alternan. La superficie de sección correspondiente a $m = 3$ (contorno (c) de la figura 2.8) se muestra en Fig. 2.9(c); ésta muestra una región regular compuesta por una zona central de órbitas tipo caja y dos cadenas de islas resonantes, compuestas por órbitas tipo lazo. En la región caótica vemos nuevamente cadenas de islas y tres densas zonas cerca del borde, conformadas por órbitas tipo lazo. Por otra parte, se exhiben órbitas en el plano meridional en la figura 2.10. Finalmente, la figura 2.9(d) muestra las superficies de sección para $m = 4$, $k = 0{,}262$ y $E = -1{,}245$. Se encuentra una región prominente caótica con solo dos cadenas de islas y una pequeña región regular de órbitas tipo caja.

Las zonas estocásticas en las figuras 2.9 son debidas a la superposición de muchas resonancias originadas por la presencia del disco[59]. Uno puede ver este hecho claramente en las tres zonas mas densas cerca del borde de la sección en la figura 2.9(c), donde las islas resonantes se superponen en $E = -1{,}245$. Por ejemplo, cuando la energía crece hasta $-1{,}215$, la superposición es completa y la trayectoria resulta ser irregular (Fig. 2.10). En la figura 2.9(d) también se exhibe la huella trazada por la superposición de tres islas centrales prominentes [98].

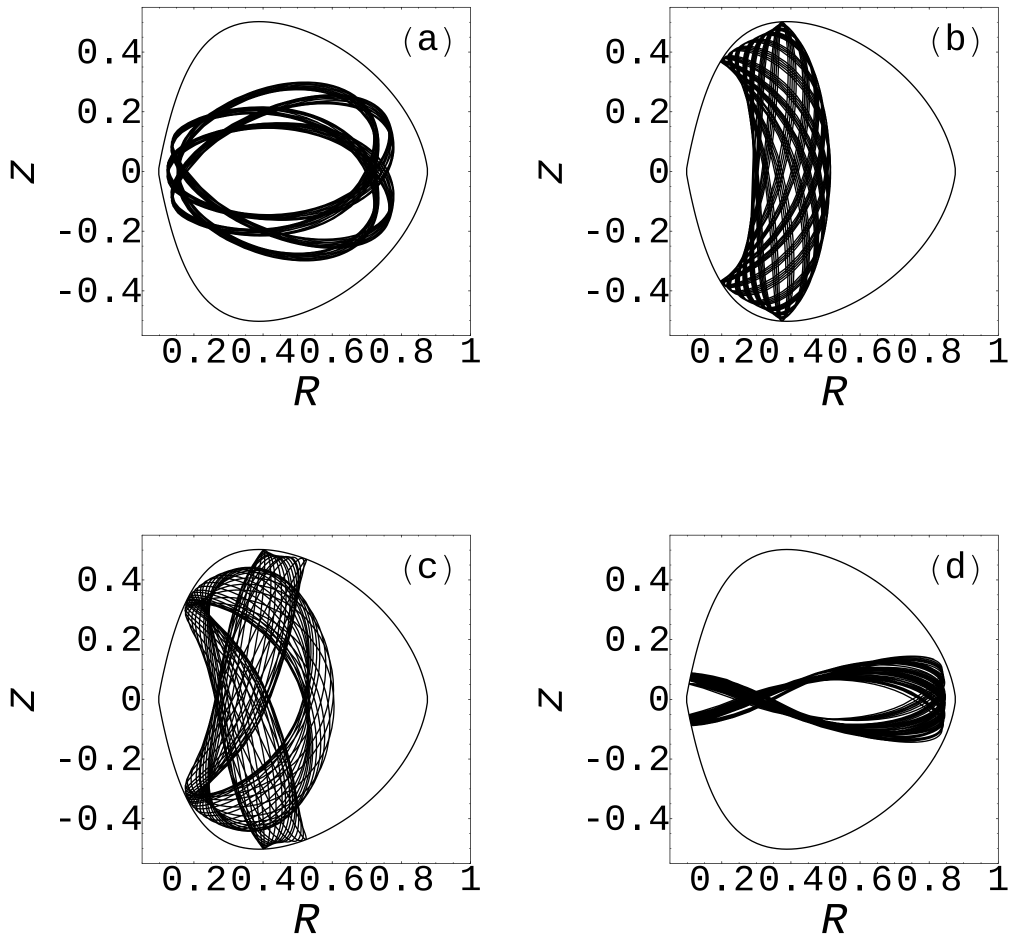


Figura 2.10: Órbitas en el plano meridional para algunas condiciones iniciales de la figura 2.9(c): (a) Órbita tipo lazo con $R = 0{,}739172$, $\dot{R} = 0{,}362539$ (la cadena de islas dentro de la región estocástica, en la mitad); (b) Órbita tipo banano en $R = 0{,}421542$, $\dot{R} = 0{,}362539$ (el anillo central más grande); (c) Órbita tipo lazo en $R = 0{,}405726$, $\dot{R} = 0{,}573413$ (segunda cadena de islas dentro de la región regular); (d) Una órbita tipo lazo en $R = 0{,}283155$, $V_R = 1{,}57197$ que forma las tres zonas más densas cerca del borde de la sección. El contorno exterior es la curva de velocidad cero.

Finalmente por completez (del grado de inestabilidad de las órbitas), se calcula los NCL, definidos como se describe en [98]. Se determinaron los NCL usando el procedimiento sugerido por Benettin y otros [9]. Entonces, fijando las integrales de movimiento $E = -1{,}245$ y $\ell = 0{,}2$, escogiendo $\Delta_o \simeq 10^{-9}$ y $t = 10^7$, estimamos N correspondiente a una órbita caótica que cruza el disco para los casos $m = 1, 2, 3, 4$ (Cuadro 2.1). Así, se encuentra que la inestabilidad crece con el valor de m.

m	NCL($\pm$0,0001)
1	0,0108
2	0,0110
3	0,0118
4	0,0120

Cuadro 2.1: Cálculo de los NCL para condiciones iniciales $z = 10^{-10}$, $R = 0{,}681$, $\dot{R} = 0{,}819$ de una órbita que cruza el disco. Esta corresponde a la región inestable de las figuras 2.9.

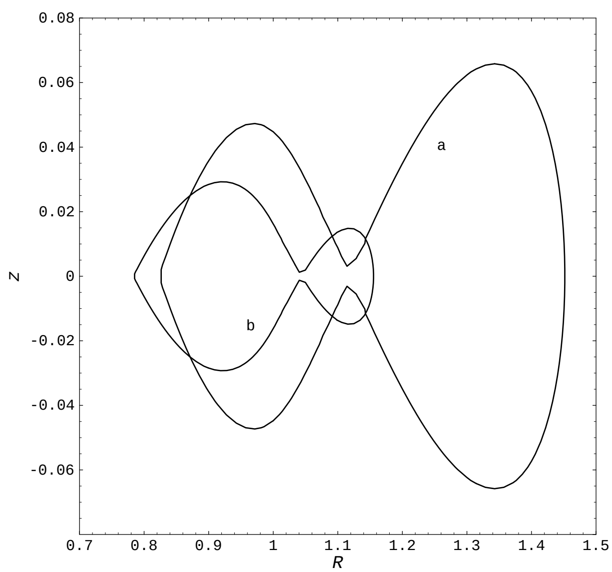


Figura 2.11: Contornos de nivel del potencial efectivo Φ_{eff} (a) $m = 1$, $E = -0{,}335$, $\ell = 1{,}287$; (b) $m = 2$, $E = -0{,}389$, $\ell = 1{,}196$. Ambos casos tienen dos regiones conectadas: una de ellas contiene el disco y la otra no.

Un hecho interesante se produce cuando el potencial efectivo tiene puntos de silla fuera de la disco. Esto sucede para los discos $m = 1$ y $m = 2$, cuyos puntos están en los intervalos $1 < R_c \leq 1{,}198$ y $1 < R_c \leq 1{,}075$, respectivamente. Los puntos de equilibrio se encuentran fuera del disco, pero cerca de su borde, para ciertos valores de E, el contorno de Φ_{eff} contendrá sólo una fracción del disco y una región libre en $z = 0$. Así pues, se tendrá órbitas que cruzan el disco y otras que no lo hacen. Por ejemplo, si se escoje $k = 0{,}673$, es decir, $R_c = 1{,}116$ y $E = -0{,}335$, se obtiene el contorno (a) de la figura 2.11. La superficie de sección resultante, figura 2.9(a), tiene una gran región estocástica a la izquierda y una pequeña región regular a la derecha. Ambas se dividen por el punto de silla, de tal forma que para condiciones iniciales cerca de su izquierda la partícula es *atrapada* en la zona caótica. Mientras que, para condiciones iniciales cerca de la derecha del punto de silla, el movimiento está confinado a una región de toroides regulares. En la Fig. 2.9(b) se exhibe una situación semejante para $m = 2$. En esa superficie $k = 0{,}991$ o $R_c = 1{,}043$ y $E = -0{,}389$, contorno (b) de la figura 2.11. Se encuentra una amplia zona de órbitas que cruzan el disco con una pequeña componente caótica encerrando una cadena de islas y anillos KAM conformados por órbitas tipo caja. A la derecha del punto de silla existe una pequeña región de regularidad. Para los casos $m = 3$ y $m = 4$ no se pudo obtener superficies de sección con las condiciones anteriores ya que sus potenciales efectivos no tienen puntos de silla exteriores y el producto $\kappa^2\nu^2$ es positivo en $R > 1$ [98].

2.5.2 Influencia del Parámetro de la Deformación Cuadrupolar en el Caos

El movimiento de partículas de prueba en campos de fuerza con deformación oblata ha sido un tema de amplio interés en las diferentes ramas de la Física, que van desde la Mecánica Cuántica a la Astrofísica. Desde hace más de 200 años este problema ha sido analizado en la astronomía dinámica, motivado por la gran variedad de objetos astrofísicos que se puede representar como centros de atracción deformados y con simetría axial. El Sol, los planetas del sistema solar y las galaxias son ejemplos importantes [10, 11]. En el mundo cuántico se ha informado de una variedad de núcleos deformados y “metallic clusters” con simetría axial (véase, por ejemplo, Nilson y referencias al respecto [1, 8, 47, 90]) y el análisis de las órbitas clásicas en el campo medio de tales estructuras han demostrado ser fructíferas [5, 53, 54, 63].

El caso de los centros de atracción descritos por términos monopolar más cuadrupolar ha sido ampliamente estudiado por Guerón y Letelier, desde el punto de vista clásico y relativista; ellos encuentran que la inclusión de los momentos externos de la expansión multipolar puede inducir el caos [44, 45, 46]. En la Gravedad de Newton, así como en la Relatividad General, el caos se puede encontrar cuando la fuente tiene deformación prolata y la caoticidad crece al aumentar el momento cuadrupolar. Por otra parte, parece ser que el caso correspondiente a una deformación oblata no da lugar a un movimiento caótico, inclusive para una deformación cuadrupolar muy grande. Este suceso particular se refutará en está sección, primero enfocandonos en el plano de la fuente, y luego ampliando el concepto fuera del plano y en el caso más general (gravitacional, electrotática, etc).

Considerando exclusivamente los dos primeros términos de la expansión multipolar del potencial gravitacional en coordenadas cilíndricas se tiene la expresión

$$\Phi = -\frac{\alpha}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{\beta(2z^2-R^2)}{2(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}, \tag{2.32}$$

donde se ha tenido en cuenta sólo los términos exteriores y se ha omitido el término del dipolo. En la anterior ecuación (2.32) α representa el monopolo de masa, que incluye el término Gm, siendo m la masa de la fuente y G la constante de Gravitación. En esta última identidad β representa la deformación cuadrupolar, donde si $\beta > 0$ la fuente posee deformación prolata y en caso contrario será oblata. Además, nótese que el potencial (2.32), posee simetría de reflexión. El momento cuadrupolar β, esta relacionado con la densidad $\rho(R,z)$ mediante la expresión [10]

$$\beta \;=\; 2\pi G \int_0^\infty r'^4 dr' \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' P_2(\cos\theta')\rho(r',\theta')\;. \tag{2.33}$$

Ahora bien, los puntos críticos se pueden obtener a través del siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R} = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \tag{2.34}$$

Pero como se mencionó antes, nuestro potencial gravitacional está caracterizado por tener simetría de reflexión, es decir, se cumple que

$$\Phi(R,z) = \Phi(R,-z) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{2.35}$$

De acuerdo con (2.35), la ecuación (2.34) se cumple en todo el plano $z=0$ [10], por consiguiente la expresión (2.34) puede ser escrita como

$$\ell^2 = R^3 \left.\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right|_{(R_c,z=0)}, \qquad \text{o} \qquad R_c = \frac{\ell^2 \pm \sqrt{\ell^4 + 6\alpha\beta}}{2\alpha}. \tag{2.36}$$

Cabe mencionar que esta solución no excluye soluciones al sistema de ecuaciones (2.34), fuera del plano $z=0$.

Por otro lado, los puntos estacionarios del potencial efectivo son puntos de silla en el plano $z=0$, si

$$\Delta(R_c, 0) > 0 \tag{2.37}$$

donde $\Delta(R,z)$ es el Hessiano[9]

$$\Delta(R,z) = \left(\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial R\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial R^2}\right) \; . \tag{2.38}$$

Específicamente todas las derivadas y el momentum angular son

$$\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial R\partial z} = \frac{3Rz\left(5\beta\left(3R^2-4z^2\right)-2\alpha\left(R^2+z^2\right)^2\right)}{2\left(R^2+z^2\right)^{9/2}}, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial R^2} = \frac{6l^2\left(R^2+z^2\right)^{9/2}+R^4\left(-4R^6\alpha-6R^4\left(z^2\alpha-2\beta\right)\right)}{2R^4\left(R^2+z^2\right)^{9/2}} \tag{2.40}$$

$$-\frac{R^4\left(81R^2z^2\beta+2z^4\left(z^2\alpha+6\beta\right)\right)}{2R^4\left(R^2+z^2\right)^{9/2}},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial z^2} = \frac{2R^6\alpha-9R^4\beta+R^2\left(72z^2\beta-6z^4\alpha\right)-4\left(z^6\alpha+6z^4\beta\right)}{2\left(R^2+z^2\right)^{9/2}} \tag{2.41}$$

$$\ell^2 = \frac{1}{2R}(2R^2\alpha-3\beta) \; , \tag{2.42}$$

las cuales, evaluádas en el punto crítico en el plano ecuatorial $(R_c,0)$, dan lugar a

$$\left.\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial R\partial z}\right|_{(R_c,0)} = 0, \tag{2.43}$$

$$\left.\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial R^2}\right|_{(R_c,0)} = \frac{16\alpha^4\left(l^4+l^2\sqrt{l^4+6\alpha\beta}+6\alpha\beta\right)}{\left(\sqrt{l^4+6\alpha\beta}+l^2\right)^5}, \tag{2.44}$$

$$\left.\frac{\partial^2\Phi_{eff}}{\partial z^2}\right|_{(R_c,0)} = \frac{8\alpha^4\left[\left(\sqrt{l^4+6\alpha\beta}+l^2\right)^2-18\alpha\beta\right]}{\left(\sqrt{l^4+6\alpha\beta}+l^2\right)^5}, \tag{2.45}$$

y el Hessiano es

$$\Delta(R_c,0) = -\frac{512\alpha^8\left(l^8+3l^4\alpha\beta+l^6\sqrt{l^4+6\alpha\beta}-18\alpha^2\beta^2\right)}{\left(\sqrt{l^4+6\alpha\beta}+l^2\right)^{10}}. \tag{2.46}$$

[9] A veces denotado como *curvatura gaussiana*[64].

Por lo tanto las inecuaciones

$$\ell^8 + 3\ell^4\alpha\beta + \ell^6\sqrt{l^4 + 6\alpha\beta} - 18\alpha^2\beta^2 < 0, \qquad \text{y} \qquad \ell^4 + 6\alpha\beta > 0, \quad (2.47)$$

determinan la existencia de puntos de silla. Si se reescalan todos los parámetros en términos de α: $\ell = \alpha\tilde{\ell}$, $\beta = \alpha^3\tilde{\beta}$, se encuentra

$$\tilde{\ell}^8 + 3\tilde{\ell}^4\tilde{\beta} - 18\tilde{\beta}^2 + \tilde{\ell}^6\sqrt{\tilde{\ell}^4 + 6\tilde{\beta}} < 0, \qquad \text{y} \qquad \tilde{\ell}^4 + 6\tilde{\beta} > 0, \qquad (2.48)$$

$$\Rightarrow \tilde{\ell}^4 < 2\tilde{\beta}, \qquad \text{y} \qquad \tilde{\beta} > 0\ . \qquad (2.49)$$

Es decir, sólo existen puntos de silla para el plano $z = 0$ en el caso $\tilde{\beta} > 0$, que representa la deformación prolata, Fig.2.12. Por lo tanto, no es posible encontrar regiones caóticas en cuerpos con deformación oblata, de acuerdo con [44, 45, 46], aunque sólo en el plano ecuatorial.

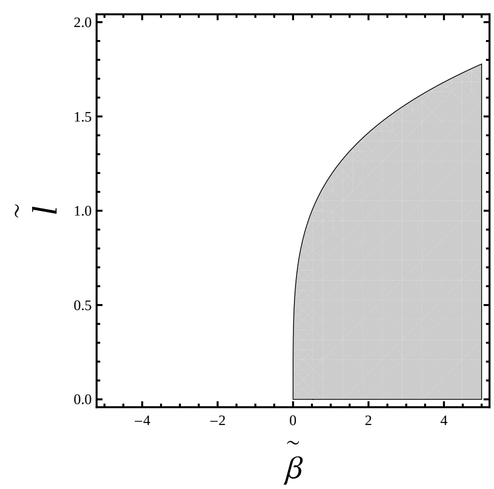


Figura 2.12: Estabilidad a través del momentum angular específico para un campo gravitacional con monopolo $\tilde{\alpha}$ y cuadropolo $\tilde{\beta}$. Se puede apreciar que la región inestable (región sombreada) corresponde sólo al caso $\tilde{\beta} > 0$, deformación alargada.

Para terminar está sección, vamos a aclarar que la hipótesis acerca de la integrabilidad (o regularidad) del movimiento en potenciales con deformación achatada, no es del todo cierto y tiene un rango de validez determinado, tanto en el contexto de los fenómenos gravitatorios (o electrostáticos), así como de física nuclear (o atómica) [72]. En el primero, estudios previos de los fenómenos homoclínicos (la órbita homocíclica marca la frontera de comportamientos cíclicos entre las variables) dan una idea de verificar la existencia o no, del movimiento caótico. De hecho vamos a mostrar evidencia numérica que delimita órbitas irregulares en los mencionados casos. En el segundo caso, la interacción con una base achatada es modelada por un potencial que, en coordenadas cilíndricas, es proporcional a $R^2 + z^2/b^2$, donde $b < 1$. Evidentemente, el movimiento en ese potencial de campo medio es completamente integrable. Sin embargo, otro sería el caso si el potencial del campo se modela como la contribución de un término esférico proporcional a $R^2 + z^2$, más un cuadrupolo achatado. Aunque ambos modelos describen adecuadamente el campo de fuerza, casi con la misma precisión, la segunda presenta cambios no triviales en el comportamiento de las órbitas. En el segundo modelo el hamiltoniano se puede dividir en $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'$, donde $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}'$ son el hamiltoniano integrable y una perturbación (pequeña), respectivamente. Como $\mathcal{H}'$ no es separable en las coordenadas espaciales, es de suponer que podría introducir alguna caoticidad en el movimiento de las partículas de prueba. De hecho, aquí se muestra que las regiones estocásticas en el espacio de fase pueden llegar a ser significativas para modestos valores del momento cuadrupolar.

Un indicador preliminar para el caos es la presencia de puntos de silla en el potencial que determina el movimiento de la partículas de prueba, es decir, el potencial efectivo [103]. En los casos estudiados, la contribución cuadrupolar presenta una silla de montar en el plano ecuatorial. Para gravitación (electrostática) el potencial efectivo permite hacer el cálculo analíticamente (contrariamente a la declaración que se presenta en la referencia [45]), en contraste con el caso correspondiente al potencial con deformación esférica. En ambos casos nos encontramos con situaciones que se caracterizan por una estructura predominantemente regular del espacio de fase, con las regiones caóticas de tamaño relativamente pequeño. Quizás esto ha dificultado el hallazgo de evidencias numéricas sobre las órbitas caóticas en el primer caso [45].

Consideremos nuevamente una partícula de prueba en la acción de un campo de fuerza simétrico descrito por un término esférico y una contribución cuadrupolar. El caso $\beta < 0$, en el que nos centramos aquí, corresponde a los objetos con deformación oblata ($\beta > 0$ representa la deformación prolata). Para el término esférico, se consideran dos formas genéricas correspondientes a situaciones de interés físico: (a) $\Phi_0 = -\alpha/\sqrt{R^2 + z^2}$, cuando estamos considerando sistemas gravitatorios (electrostática), y (b) $\Phi_0 = \alpha(R^2 + z^2)$ en el caso del modelo de cascarón esférico asociado a un sistema cuántico de muchos cuerpos (a veces el término se utiliza también para modelar el campo gravitacional en la dinámica galáctica). En el primer caso, α es el monopolo, que es proporcional a la masa (o la carga) del cuerpo central, en el último caso, α es proporcional a la frecuencia cuadrática de las tres dimensiones del *oscilador armónico isótropo* (OAI). En ambos casos el parámetro α es una constante real positiva. Por lo tanto, vamos a usar nuevamente $\alpha = 1$, sin pérdida de generalidad.

Empezamos por realizar el procedimiento para la situación (a), que designaremos como *monopolo + cuadripolo oblato* (M + OQ). A continuación nos centraremos en el caso (b), que se denota como OAI + OQ.

(a) M + OQ. En esta ocasión, como se demostró antes (2.36), se puede encontrar analíticamente:

$$R_{\pm} = \frac{\ell^2 \pm \sqrt{\ell^4 + 6\alpha\beta}}{2\alpha}. \tag{2.50}$$

Los valores críticos corresponden a los puntos de silla de montar, si el Hessiano, es un número real negativo. El Hessiano (2.46), se puede escribir en la forma

$$\Delta_{\pm} = \frac{(2\alpha R_{\pm}^2 - 9\beta)[6\beta + R_{\pm}(3\ell^2 - 2\alpha R_{\pm})]}{2R_{\pm}^{10}}, \tag{2.51}$$

y podemos observar que, para $\beta < 0$ se satisface $\Delta_+ > 0$ y $\Delta_- < 0$, si y sólo si, $\ell^4 > 6\alpha|\beta|$, que es la condición necesaria que R_+ y R_- sean números reales positivos. Esto significa que en cualquier caso, Φ_{eff} tiene puntos de equilibrio en la zona ecuatorial (como se expuso antes), uno de ellos es un punto de silla. En consecuencia, si la energía orbital satisface la condición

$$E > -\frac{2\alpha^2\ell^2(\ell^2 - \sqrt{\ell^4 + 6\alpha\beta}) + 8\alpha^3\beta}{(\ell^2 - \sqrt{\ell^4 + 6\alpha\beta})^3}, \tag{2.52}$$

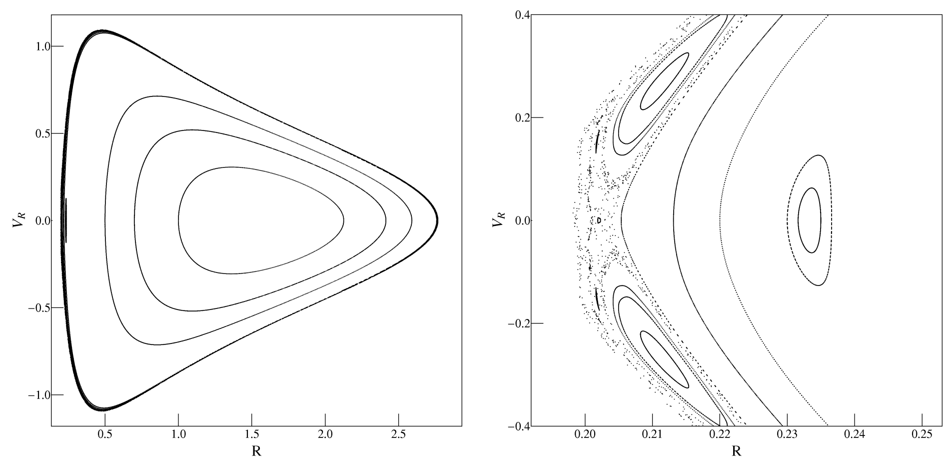
es probable encontrar órbitas caóticas cerca del punto $(R_-, 0)$, es decir, la órbita circular homocilínica [73]. En el caso de un campo de fuerza atractiva, hemos limitado el movimiento si $E \leq 0$, además de (2.52). Este hecho lleva a la condición adicional de $\ell^4 < 8\alpha|\beta|$ y se obtiene

$$0{,}75 < \frac{\ell^4}{8\alpha|\beta|} < 1, \tag{2.53}$$

que puede considerarse como el requisito previo para encontrar el movimiento caótico cuando se trata de los potenciales atractivos modelados como un término monopolar más un deformación achatada.

Las afirmaciones anteriores se ilustran en la figura 2.13, donde se muestra la superficie de sección de Poincaré generada por las órbitas alrededor de un cuerpo con momento cuadrupolar $\beta = -0{,}057$, que corresponde a $E = -0,32$

y $\ell = 0,8$. El anterior conjunto de valores, en unidades adimensionales, cumple con las relaciones (2.52) y (2.53). En este caso nos encontramos con una órbita caótica con un radio inicial de $R = 0{,}198$ (y $z = 0$), la cual esta muy cerca de la coordenada radial del punto de silla, $R_{-} \approx 0{,}19$. Podemos notar que que la región estocástica es muy pequeña, en relación con las zonas regulares que dominan la estructura de espacio de fase (figura 2.13 (a)). La figura 2.13 (b) muestra un detalle de la región caótica, que contiene una subestructura de islas regulares. Con el fin de cuantificar el grado de regularidad de estas órbitas, se estiman los NCL tabla 2.2(a). Encontramos que la órbita caótica se caracteriza por un NCL$\approx 0{,}02$, mientras que para trayectorias regulares se trata de 10^{-4}.



(a) (b)

Figura 2.13: (a) Superficies de sección para órbitas con $E = -0{,}32$, $\ell = 0{,}8$, $\beta = -0{,}057$. (b) Nótese que (a), muestra una región caótica encerrando islas de regularidad. Siendo la figura (b), una ampliación de (a), en la aparentemente existia regularidad.

Los parámetros físicos se pueden utilizar a escala tanto macroscópica, como atómica. Una superficie de sección proporcionaría una descripción de la órbita clásica de un electrón con energía de cercana a 5 MeV, que corresponde aproximadamente a la interacción con un núcleo con número de masa aproximadamente de 200, y momento cuadrupolar eléctrico cercano a -5, para electrones. En tal caso, el punto de silla estarían en una distancia alrededor de 2×10^{-15} m del núcleo. A escalas astronómicas hay algunas restricciones. En la mecánica celeste el momento cuadrupolar está dado por $\beta = \alpha J_2 R_0^2$, donde J_2 y R_0 son el factor de distorsión y el radio ecuatorial de la fuente, respectivamente [11]. De acuerdo a las relaciones (2.50) y (2.53) podemos determinar una serie de localizaciones de puntos de silla de modo que es posible encontrar órbitas inestables confinadas: $0{,}707 < |J_2|^{-1/2}R_-/R_o < 1{,}225$. Por ejemplo, en el caso de la Tierra, $J_2 = -1,082 \times 10^{-3}$ y $R_o = 6{,}378$ Km, y el valor máximo permitido de R_- es de aproximadamente 3,2 Km, que no pertenecen al dominio físico de la aproximación cuadrupolar. Sin embargo, la no integrabilidad de las órbitas es físicamente significativo para objetos con la distorsión achatada más prominente, como las galaxias. De hecho, podemos encontrar las órbitas caóticas pertenecientes al dominio físico de potencial, de un cuerpo compacto con el parámetro de distorsión $|J_2| > 2/3$, y también para un anillo con una masa puntual central (un agujero negro, por ejemplo), si el radio interior está relativamente lejos del centro.

(b) OAI + OQ. En este caso la ubicación radial de los puntos de equilibrio, R_c, viene dada por $\ell_c^2 = (4\alpha R_c^5 - 3\beta)/2R_c$, donde ℓ_c es el momento angular de la órbita circular con un radio ecuatorial de R_c. El Hessiano es

$$\Delta = 4\alpha^2 \left(1 - \frac{9\beta}{4\alpha R_c^5}\right)\left(4 + \frac{3\beta}{4\alpha R_c^5}\right), \tag{2.54}$$

en donde se puede apreciar que $\Delta < 0$, sólo si $R_c^5 < 3|\beta|/16\alpha$. El límite superior es precisamente el valor crítico donde ℓ_c^2 alcanza el mínimo y, en consecuencia, podemos establecer que

$$\chi = \frac{\ell^2}{\alpha^{1/5}|\beta|^{4/5}} > 2{,}6206, \tag{2.55}$$

es ahora la relación que establece el requisito previo para la existencia de movimiento caótico. Por supuesto, tenemos órbitas limitadas si la energía de la partícula de prueba es mayor que la energía de la órbita circular, $E_c = (8\alpha R_c^5 - \beta)/4R_c^3$. En la figura 2.14(a), trazamos la superficie de la sección que corresponde a $\beta = -0,1$ y $\ell = 0{,}8$, con una energía $E = 3,2$. Encontramos una órbita caótica con las condiciones iniciales $R = 0,35$, $z = 0$, $\dot{R} = 0$. Al igual que en el caso (a), la región estocástica es pequeña en relación con la zona de curvas prominentes KAM. Sin embargo, el movimiento caótico ahora es perceptible en una escala más grande del espacio de fase. En la figura 2.14(b), se muestra un detalle de la zona estocástica con una estructura muy similar a la fig. 2.13 (b). Los NCL asociados se muestran en la tabla 2.2(b).

M+*OQ*

R_0	NCL$\times 10^{-4}$
0.198	213 ± 12
0.213	$3{,}48 \pm 0{,}22$
0.220	$2{,}31 \pm 0{,}34$
0.230	$1{,}86 \pm 0{,}13$
0.500	$1{,}73 \pm 0{,}23$
0.700	$1{,}32 \pm 0{,}17$
1.000	$1{,}19 \pm 0{,}25$

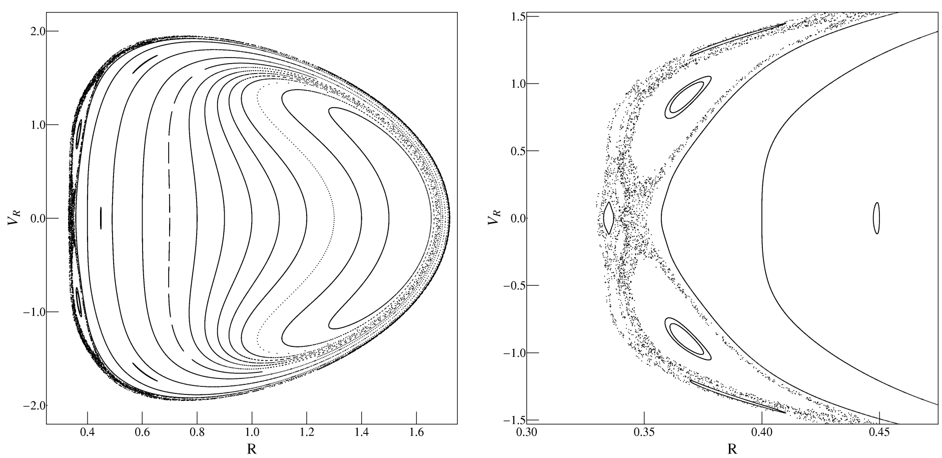
(a)

IHO+*OQ*

R_0	NCL$\times 10^{-4}$
0.35	473 ± 25
0.60	$1{,}48 \pm 0{,}22$
0.80	$2{,}31 \pm 0{,}34$
0.90	$1{,}45 \pm 0{,}13$
1.00	$1{,}80 \pm 0{,}23$
1.20	$1{,}27 \pm 0{,}17$
1.40	$1{,}05 \pm 0{,}25$

(b)

Cuadro 2.2: Cálculo de los NCL correspondientes a trayectorias con condiciones inicales $R = R_0$, $z = 0$, $V_R = 0$, ellos corresponden a las figuras 2.14 (a), y (b), respectivamente.



(a) (a)

Figura 2.14: (a) Superficies de sección con $E = 3{,}2$ y $\ell = 0{,}8$ para el potencial de un oscilador armónico con deformación oblata de $\beta = -0{,}1$. (b) Apreciese que (a), muestra una región estocástica con islas resonantes en su interior, siendo (b) un aumento de (a).

Los resultados presentados en este caso pueden ser relevantes para un mejor análisis de la mecánica cuántica de los sistemas de muchos cuerpos, como los "clustters" y los "metallic clusters". Se sabe que los toros invariantes de las secciones de Poincaré están íntimamente relacionados con los estructuras laminares en el espectro de una partícula [54]. Por consiguiente, si nos encontramos con el caos en el problema clásico, una desaparición de la estructura de la cáscara se debe esperar en el caso cuántico análogo [55]. Por lo tanto, de acuerdo con (2.55), esperaríamos estructura de cáscara achatada si $0 \leq \chi \leq 2{,}6206$. En el caso prolato, $\beta > 0$, la condición de tener puntos de silla es de $0 \leq \chi \leq 5{,}1017$, lo que significa que podemos esperar estructura de cáscara prolata por $\chi > 5,1017$. Tenga en cuenta que hay una gama de inestabilidad entre los regímenes oblato y prolato, $2{,}6206 < \chi < 5,1017$. Sería interesante investigar si existen cualquier conexión entre dicho rango y el fenómeno de la transición de deformaciones prolatas a oblatas, en ciertos valores del momento angular [124].

Los cálculos de las superficies de sección de las figuras. 2.13 y 2.14 y los NCL (Cuadro 2.2) se realizaron en el Laboratório de Computação Paralela (LCP) del Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) de la Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Los métodos utilizados para resolver las sistemas dinámicos fueron: (i) Runge-Kutta de cuarto orden con el paso de tiempo variable y la incorporación de Hénon [57], (ii) algoritmos simpléctico de Runge-Kutta de orden 4, 5 y 6, el tiempo de integración fue $t \sim 10^4$. Según los resultados obtenidos, no encontramos diferencias significativas entre los métodos, excepto por el error máximo acumulado en la conservación de la energía: 10^{-12} y 10^{-15} para (i) y (ii), respectivamente. En la próxima sección se investigará la influencia en el comportamiento de las trayectorias debido a la inclusión del siguiente término en expasión multipolar del potencial, o sea, el término correspondiente a la deformación octopolar.

2.5.3 Dinámica de Partículas Alrededor de Cuerpos con Deformación Oblata, Prolata y Octopolar

Existen evidencias que las agrupaciones de materia oscura y algunos grupos de galaxias pueden tener una estructura con deformación importante octopolar [60], la cual puede ser revelada al estudiar el movimiento de los objetos que caen libremente. Aunque, por lo general el momento cuadrupolar es considero en la desviación de la simetría esférica, hay situaciones en las que la deformación octopolar puede desempeñar un papel comparable, desde el nivel molecular [48, 30] al contexto astrofísico. Hay dos ejemplos importantes a considerar: las galaxias axisimétricas con un componente importante del disco rodeado de un halo deformado y un grupo de galaxias prolatas compuesta por una cantidad de materia oscura con subestructura [60]. En ambos casos, el componente oscuro es responsable de la contribución octopolar y, como veremos, introduce nuevas características en el comportamiento orbital de las partículas de prueba. Así, la inclusión de la deformación octopolar también puede inducir el caos, como se demostró por [53] y [74] en el caso de un oscilador armónico.

La investigación de campos gravitatorios formados por monopolo, dipolo, cuadrupolo, y el término octopolar o combinaciones de los mismos fue realizado por [88]. Como se mencionó, la expansión multipolar del potencial gravitacional en la región exterior a una fuente axialmente simétrica, es

$$\Phi(R,z) = -\frac{\alpha}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{(2z^2-R^2)\,\beta}{2\,(R^2+z^2)^{5/2}} - \frac{(2z^3-3R^2z)\,\gamma}{2\,(R^2+z^2)^{7/2}}, \tag{2.56}$$

donde α, β, y γ son respectivamente, el monopolo, cuadrupolo y octupolo de masa. En este potencial no aparece el término dipolar debido a la simetría axial con respecto a $z = 0$. Los dos primeros términos del potencial ya fueron analizados en las referencias [44, 45, 46], y en la sección anterior [72]. El término γ, esta relacionado con la densidad $\rho(R,z)$ mediante las ecuación [10]

$$\gamma = 2G\pi \int_0^\infty r'^5 dr' \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' P_3(\cos\theta')\rho(r',\theta'), \tag{2.57}$$

con $r = \sqrt{R^2+z^2}$, $\cos\theta = z/\sqrt{R^2+z^2}$ y donde P_l son los Polinomios de Legendre de orden l. Tengamos en cuenta que la órbita de la partícula está confinada al plano definido por el potencial efectivo, el plano como se ha mencionado se conoce como plano meridianal. La integración numérica se realiza a través el método de Runge-Kutta de cuarto orden y comprobando que la energía se conserva con una tolerancia de 10^{-10}.

En la figura 2.15, se traza una superficie de sección para $z = 0$, correspondiente al movimiento de partículas de prueba en presencia de un campo gravitatorio considerando los términos monopolar y cuadrupolar ($\gamma = 0$). Se observa una región central y lateral, regular compuesta por anillos de toros (curvas de KAM). Ellas están envueltas por una región caótica, con dos pequeñas islas resonantes cerca de sus bordes, superior e inferior.

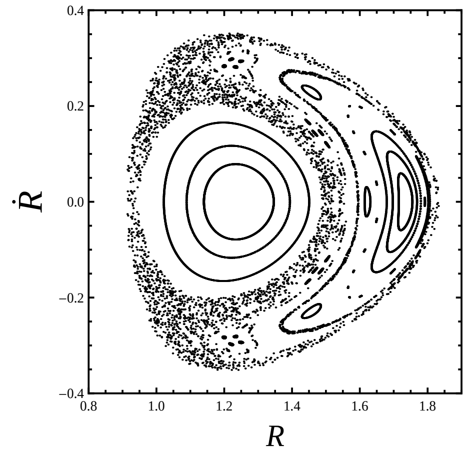


Figura 2.15: Superficies de sección de Poincaré para algunas órbitas con $\ell = 0{,}9$, $E = -0{,}4$, el potencial esta caracterizado por $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}3$ y octopolo nulo, $\gamma = 0$.

En la figura 2.16 cambiamos el momento octopolar por $\gamma = 0,02$, manteniendo los mismos valores para α, y β. La superficie de sección resultante presenta una región caótica más destacada, ya que en esta ocasión las zonas exteriores de islas resonantes se superponen. Las regiones regulares ahora contiene el "eje" del toro. Se pueden ver claramente la región central y la aparición de inestabilidad en la región lateral anteriormente estable.

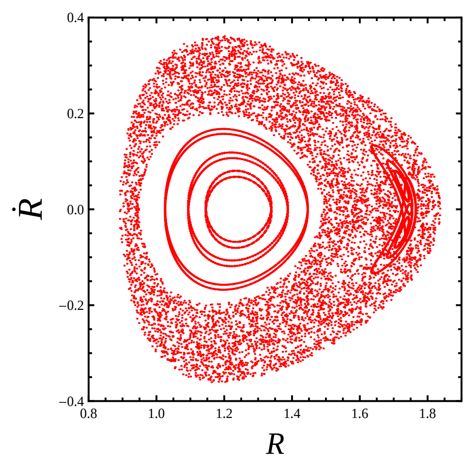


Figura 2.16: Superfcies de sección para las mismas condiciones iniciales de la figura anterior. Se mantienen los valores $\ell = 0{,}9$, $E = -0{,}4$, $\alpha = 1$ y $\beta = 0{,}3$, pero ahora $\gamma = 0{,}02$.

En la figura. 2.17, como consecuencia de aumentar el momento de octopolar

$\gamma = 0,04$, la región caótica es más prominente (la zona lateral regular ha desaparecido), así como las curvas centrales de KAM. Por último, las figuras. 2.18 y 2.19 muestran el efecto causado por el aumento progresivo de la deformación octopolar, a partir de una deformación prolata regular.

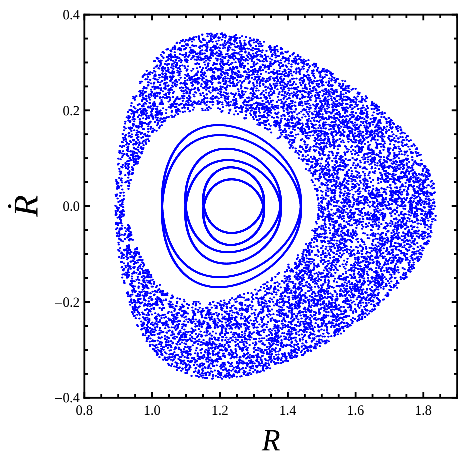


Figura 2.17: Los mismos valores de las gráficas anteriores pero con $\gamma = 0{,}04$, se obtiene una región caótica rodeando tres curvas de KAM.

Un resultado importante del análisis es que al cambiar el momento octopolar aumenta la caoticidad y conduce a la aparición del eje del toro, se puede ver incluso en el caso correspondiente a la deformación achatada, que comúnmente presenta movimiento regular, figura 2.18.

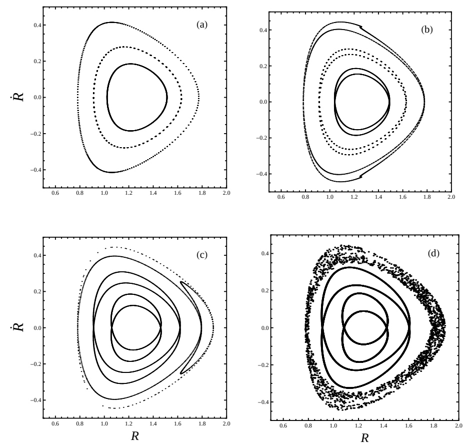


Figura 2.18: Superficies de sección de Poincaré para $\ell = 1{,}1$, $E = -0{,}32$, $\alpha = 1$, $\beta = -0{,}2$ y (a) $\gamma = 0$; (b) $\gamma = 0{,}02$; (c) $\gamma = 0{,}04$; (d) $\gamma = 0{,}06$. En cada caso, fueron generadas por tres órbitas con condiciones iniciales (i) $z = 0$, $R = 0{,}91$, $V_R = 0$; (ii) $z = 0$, $R = 0{,}78$, $V_R = 0$ y (iii) $z = 0$, $R = 1{,}16$, $V_R = 0{,}18$.

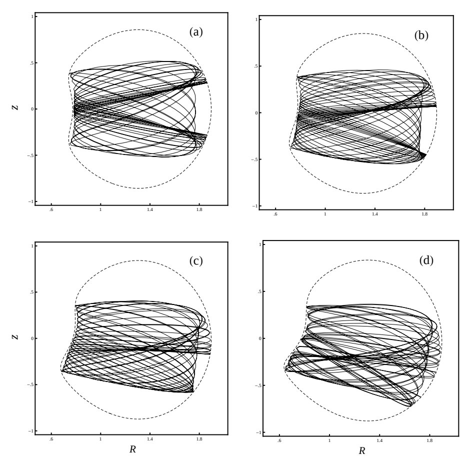


Figura 2.19: Una órbita en el plano meridional con condiciones iniciales $z = 0$, $R = 0{,}78$, $V_R = 0$ y los mismos parámetros considerados anteriormente. De nuevo hemos tomado los casos (a) $\gamma = 0$; (b) $\gamma = 0{,}02$; (c) $\gamma = 0{,}04$; (d) $\gamma = 0{,}06$.

La Fig. 2.20, muestra la transición de la regularidad al caos debido al aumento de γ. Con $E = -0,32$, $\ell = 1,1$ y $\beta = -0{,}2$, se parte de $\gamma = 0$ (Fig.2.18a) que corresponde a un movimiento regular. El caso $\gamma = 0,02$ es normal, pero las curvas KAM se ha distorsionado por unos anillos. En la figura 2.18c($\gamma = 0,04$) la distorsión es más prominentes y, por último, cuando γ se ha incrementado hasta 0,06 en la Fig.2.18d, observamos la aparición de una región caótica que incluye los anillos.

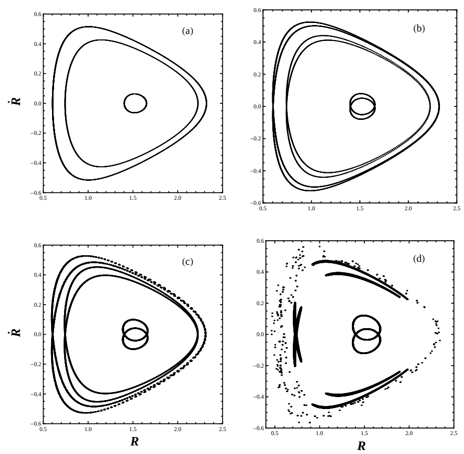


Figura 2.20: Superficies de sección de Poincaré para algunas órbitas caracterizadas por $\ell = 1{,}1$, $E = -0{,}32$, en un potencial con $\alpha = 1$, $\beta = -0{,}2$ y $\gamma = 0$. En cada caso, ellas fueron generadas por tres familas con (i) $z = 0$, $R = 1{,}4$, $V_R = 0$; (ii) $z = 0$, $R = 0{,}74$, $V_R = 0$ y (iii) $z = 0$, $R = 0{,}601$, $V_R = 0$, nuevamente (a) $\gamma = 0$; (b) $\gamma = 0{,}02$; (c) $\gamma = 0{,}04$; (d) $\gamma = 0{,}06$.

2.5.4 Estabilidad en las Galaxias NGC 3877, NGC 3917

En esta sección se estudia la estabilidad en los modelos de galaxias espirales (galaxias en forma de disco) NGC 3877, NGC 3917 construidos por [41]. Se escojen estos dos modelos de galaxia debido a que fueron los que mejores se ajustaron a los datos observacionales basados en [133]. Antes de analizar la estabilidad de los modelos mediante el momentum angular y el criterio de Rayleigh, haremos una breve descripción de la técnica utilizada por los autores para encontrar un potencial gravitatorio que define las galaxias.

En los modelos discoidales de galaxias, dado un potencial gravitacional, $\Phi(R, z)$, la velocidad circular[10] $v_c(R)$ se encuentra a través de la relación

$$v_c^2(R) = R \left. \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|_{z=0} . \tag{2.58}$$

También, dado $\Phi(R, z)$, la densidad superficial de masa $\Sigma(R)$ puede ser obtenida mediante la Ley de Gauss, y teniendo en cuenta la propiedad de

[10] Velocidad tangencial de las estrellas en órbitas circulares alrededor del centro.

reflexión (2.35), se obtiene

$$\Sigma(R) = \left[\frac{1}{2\pi G}\right] \frac{\partial \Phi}{\partial z}\bigg|_{z=0^+}. \tag{2.59}$$

Por lo tanto, con el fin de tener una densidad superficial de masa, que corresponda a una distribución finita de materia, se imponen las condiciones de contorno en forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} \neq 0; \quad R \leq a, \tag{2.60a}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} = 0; \quad R > a, \tag{2.60b}$$

en las cuales se puede verificar que la distribucción de materia está restringida al disco $z = 0$, $0 \leq R \leq a$.

Considerando el potencial gravitacional que se obtiene al solucionar la ecuación de Laplace en coordenadas oblatas (3.42), se encuentra la velocidad circular, dada por la siguiente expresión

$$v_c^2(\widetilde{R}) = \frac{\widetilde{R}^2}{y} \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(0) P'_{2n}(y) = \sum_{n=1}^{m} A_{2n} \widetilde{R}^{2n}, \tag{2.61}$$

en donde las constantes A_{2n} están relacionadas con la constante C_{2n} por medio de la expresión

$$C_{2n} = \frac{4n+1}{4n(2n+1)} \sum_{k=1}^{m} \frac{A_{2k}}{q_{2n}(0)} \int_{-1}^{1} y(1-y^2)^k P'_{2n}(y) dy, \tag{2.62}$$

con $n \neq 0$.

La densidad superficial de masa toma la forma

$$\Sigma(\widetilde{R}) = \frac{1}{2\pi a G y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}(2n+1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(y), \tag{2.63}$$

siendo $y = \sqrt{1 - \widetilde{R}^2}$ y $\widetilde{R} = r/a$. Así, mediante la integración de la superficie total del disco, encontramos la expresión

$$\frac{\mathcal{M} G}{a} = C_0, \tag{2.64}$$

	NGC3877	NGC3917
m	6	7
C_0	17452.78	11258.92
C_2	26564.93	17210.85
C_4	13926.79	8998.92
C_6	7478.82	4573.34
C_8	4053.13	2213.64
C_{10}	1887.23	1063.01
C_{12}	498.29	640.40
C_{14}		264.69

Cuadro 2.3: Constantes C_{2n} para las galaxias NG3C877 y NGC3917 [$\mathrm{km}^2, \mathrm{s}^{-2}$], además de los correspondientes valores de m.

que permite calcular el valor de la masa total de $\mathcal{M}$.

En consecuencia, todos los cantidades que caracterizan el modelo de disco delgado se determinan en función del conjunto de las constantes de C_{2n}, lo que puede determinarse a partir de los datos observacionales correspondientes a las curvas de rotación de una galaxia en particular. Es decir, las constantes A_{2n} son determinadas por un ajuste de los datos observacionales de la curva de rotación [133], la relación (2.62) permite encontrar los valores de las constantes C_{2n}, las cuales definen el modelo de potencial gravitacional en cada ajuste.

Después de ajustar el modelo anterior a los datos reales observados, y eligiendo dos de las galaxias espirales del cúmulo de la Osa Mayor, las galaxias NGC3877, NGC3917, los datos correspondientes se ajustan según el reciente trabajo de [133]. En el trabajo se muestran 43 galaxias cercanas al cúmulo de la Osa Mayor analizadas mediante el Westerbork Synthesis Radio Telescope. En la tabla 2.3 se presentan los valores de C_{2n} para las dos galaxias, así como el valor correspondiente de m utilizado en (2.61). En la tabla 2.4 se indica, para cada galaxia, el tipo morfológico, según la clasificación del Hubble de galaxias, el radio a en unidades de kiloparsec (kpc) y la masa total de $\mathcal{M}$ en unidades de kilogramos (kg) y masas solares ($\mathcal{M}_\odot$).

La figura 2.21 muestra la estabilidad de la galaxia NGC3877 a través de: (a) un análisis del criterio de Rayleigh, (b) el bosquejo del momentum angular al cuadrado; las dos gráficas exhiben que la galaxia es estable. En la primera, en el criterio de Rayleigh, la gráfica no tiene una zona negativa. En

	Tipo	a [kpc]	$\mathcal{M}$ [kg]	$\mathcal{M}$ [$\mathcal{M}_\odot$]
NGC3877	Sc	11.74	9.47×10^{40}	4.76×10^{10}
NGC3917	Scd	15.28	7.95×10^{40}	3.95×10^{10}

Cuadro 2.4: Clasifcación Morfólogica de las galaxias NG3C877 y NGC3917, radio a y masa total $\mathcal{M}$.

la segunda, en la gráfica del momentum angular al cuadrado, la pendiente siempre es positiva. Además, en la figura 2.21(a) se observa que no existe una órbita circular marginalmente estable, pues no existe un punto crítico para esta gráfica. Igualmente, el análisis se realizó para la galaxia NGC3917, encontrando el mismo comportamiento, ver figura 2.22. Es decir, las dos galaxias son estables ante perturbaciones radiales, en concordancia con [41], y ninguna de las dos poseen una órbita circular marginalmente estable.

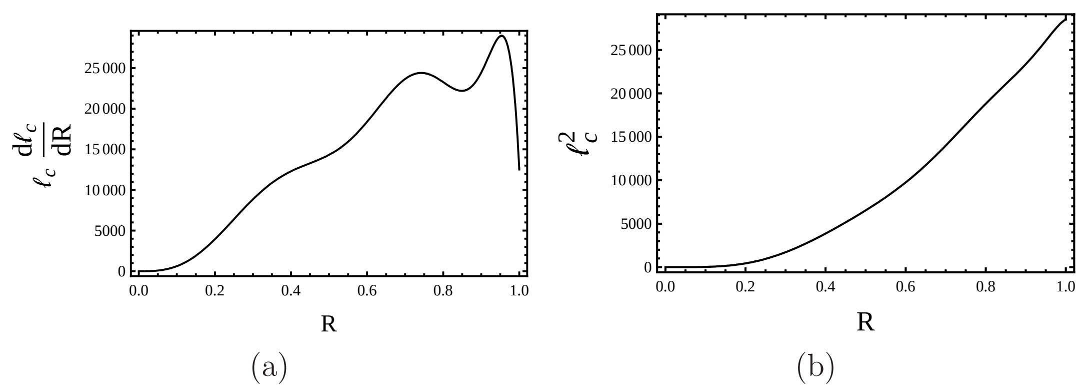
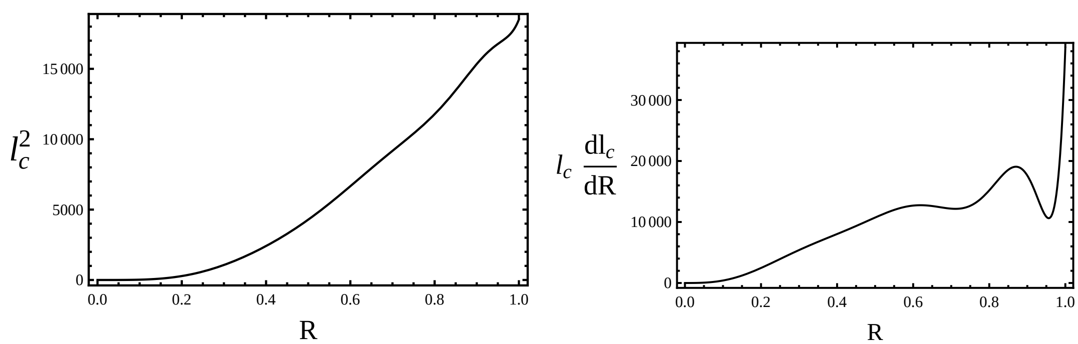


Figura 2.21: Estabilidad para la galaxia NGC3877 mediante: (a) criterio de Rayleigh, (b) momentum angular específico.

Las regiones inestables ante perturbaciones verticales que se aprecian en [41], se pueden analizar mediante el estudio de las trayectorias en plano meriodional, o por medio del estudio de las superficies de sección, este análisis está fuera de los alcances del texto.



(a) (b)

Figura 2.22: Estabilidad para la galaxia NGC3917 a través del: (a) momentum angular específico, (b) criterio de Rayleigh.

Capítulo 3

DINÁMICA DE PARTÍCULAS EN RELATIVIDAD GENERAL

SECCIÓN 3.1

Introducción

Un problema de gran importancia en la Teoría de la Relatividad General es la obtención de las soluciones de las ecuaciones de Einstein, las cuales corresponden a la descripción del campo gravitacional. Una vez obtenida la solución, otro problema igualmente importante es la solución de la ecuaciones de las geodésicas, las cuales corresponden al comportamiento de la partículas en presencia del campo gravitatorio. Las propiedades de los campos gravitatorios axialmente simétricos han sido estudidas a través de la cinemática de las partículas de prueba, desde el punto de vista de la Teoría Clásica [10] y de la Relatividad General. En el caso relativista se ha estudiado tanto el caso estático como el estacionario, incluso se encuentran diversos trabajos relativistas sobre la trayectoria de partículas de prueba en soluciones de naturaleza cosmológica [115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123].

El capítulo esta organizado de la siguiente manera: la sección 3.2, está dedicada al análisis del movimiento de partículas en campos estáticos y axialmente simétricos en forma general, donde se encuentra que el problema de analizar las geodésicas se reduce a un plano dos dimensional. En la sección 3.3, se restringe el movimiento al plano ecuatorial y se determine el radio de la órbita circular para fotones y partículas masivas. Luego en las siguiente sección (sección 3.4), se encuentra la expresión que permite estudiar la estabilidad de los espaciotiempos, además de la trayectoria de la partícula marginalmente estable. Luego en la sección 3.5, se consideran las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein en coordenadas cilíndricas, esferoidales oblatas y esferoidales prolatas. Después en la sección posterior (sección 3.6), se investigan todas las expresiones de órbitas circulares en espaciotiempos estáticos y esféricamente simétricos. Por último, se encuentra una nueva familia de discos gruesos relativistas, sección 3.7; adicionalmente se analizan algunas trayectorias de partículas de prueba neutras.

SECCIÓN 3.2

Geodésicas para Campos Gravitacionales Estáticos y Axialmente Simétricos

Con el fin de realizar un análisis de las órbitas de partículas de prueba[1] en un campoobtenemos gravitacional estático axialmente simétrico en Relatividad General, se define su geometría por medio del elemento de línea de Weyl [68, 137, 138], que en coordenadas cilíndricas se puede escribir como la expresión (1.1)

$$ds^2 = -e^{2\psi}dt^2 + e^{-2\psi}[\rho^2 d\varphi^2 + e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2)], \tag{3.1}$$

donde $\rho > 0$, $z \;\epsilon\; (-\infty, \infty)$, $\varphi \;\epsilon\; [0, 2\pi]$, y las funciones métricas ψ, γ dependen solamente de las coordenadas ρ y z. Ahora bien, como el elemento de línea (3.1), no depende explicítamente del tiempo, ni de la coordenada acimutal, existen dos constante de movimiento, otra vez, relacionadas con la energía y el momentum angular de la partícula.

[1]Las partículas de prueban en Relatividad General pueden ser rayos luminosos o partículas masivas (cargadas o neutras).

El lagrangiano $\mathcal{L}$, para una métrica con estas características está dado por[2]

$$2\mathcal{L} = -e^{2\psi}\dot{t}^2 + e^{-2\psi}[\rho^2\dot{\varphi}^2 + e^{2\gamma}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2)], \tag{3.2}$$

donde el punto denota derivación con respecto al parámetro afín τ, comúnmente relacionado con el tiempo propio. Esta relación se puede expresar en términos de las constantes de movimiento E y ℓ, las cuales se pueden determinar por medio de los momentos canónicos

$$p_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a}. \tag{3.3}$$

Entonces, $-E = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{t}$, $\ell = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$. En donde E y ℓ son respectivamente, la energía y el momento angular por unidad de masa de la partícula, medidas por un observador en el infinito.

Utilizando las cantidades conservadas anteriores, se puede reescribir la ecuación (3.2), en la forma

$$\frac{E^2}{2} = \frac{1}{2}\,e^{-2\gamma}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\,e^{2\psi}\left[\epsilon^2 \,+\, \frac{\ell^2}{\rho^2}\,e^{2\psi}\right], \tag{3.4}$$

donde

$$-\epsilon^2 = 2\mathcal{L} = p^\nu p_\nu = g_{\nu\mu}p^\nu p^\mu = g_{\nu\mu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \;=\; \left\{\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array}\right. , \tag{3.5}$$

siendo $\epsilon = 1$ ó 0, según sean partículas masivas ó no. Del mismo modo, se puede definir un potencial equivalente al problema clásico[3], conocido como *potencial efectivo*, de acuerdo con (3.4), el mencionado potencial tiene la forma

$$V_{eff}(\rho, z) = e^{2\psi}\left[\epsilon^2 \,+\, \frac{\ell^2}{\rho^2}\,e^{2\psi}\right], \tag{3.6}$$

donde nuevamente el problema se ha reducido a un movimiento en el plano (ρ, z). Esta vez el análisis del potencial efectivo por medio de los puntos estacionarios no es tan simple de hacer pues las funciones métricas dependen de las coordenadas.

[2]Se puede demostar que estos espaciotiempos el lagrangiano es idéntico al hamiltoniano, $\mathcal{L} = \mathcal{H}$.

[3]Se puede apreciar en la ecuación (3.4), la superposición de dos términos iguales a E^2, uno de ellos corresponde al cuadrado de la velocidad de la partícula y el otro es asociado con el potencial.

De otra parte, el sistema dinámico autónomo formado por las EDS de movimiento de la partícula para las dos coordenadas no-ignorables ρ, z pueden se puede determinar a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^{\nu}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{dx^{\nu}}=0, \tag{3.7}$$

de donde

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= -(\dot{\rho}^2-\dot{z}^2)(\gamma_{,\rho}-\psi_{,\rho}) \qquad (3.8)\\ &\quad -2\dot{\rho}\dot{z}(\gamma_{,z}-\psi_{,z})-\ e^{-2\gamma}\left[E^2\psi_{,\rho}+(\psi_{,\rho}-1/\rho)\frac{\ell^2e^{4\psi}}{\rho^2}\right]=0,\\ \ddot{z} &- (\dot{\rho}^2-\dot{z}^2)(\gamma_{,z}-\psi_{,z}) \qquad (3.9)\\ &\quad +2\dot{\rho}\dot{z}(\gamma_{,\rho}-\psi_{,\rho})+\ e^{-2\gamma}\psi_{,z}\left[E^2+\frac{\ell^2e^{4\psi}}{\rho^2}\right]\ =0, \end{aligned}$$

El anterior sistema dinámico tiene una solución única cuando las condiciones iniciales de $\tau=\tau_0$ están dadas por $x_0^i=x_0^i(\tau_0)$ y $U_0^i=(\frac{dx^i}{d\tau})_{\tau_0}$, con $i=\rho,z$. La condición inicial de la velocidad de la partícula se obtiene por medio de (3.4), la cual es

$$\dot{z}^2=e^{2\gamma}\left[E^2-V_{eff}(R,z)\right]-\dot{\rho}^2, \tag{3.10}$$

donde $\epsilon=1$, para geodésicas tipo tiempo y $\epsilon=0$, para rayos luminosos. Así, el movimiento de las partículas se puede estudiar otra vez mediante las superficies de sección de Poincaré. En la próxima sección encontraremos las cantidades relacionadas con las trayectorias circulares en el plano de la fuente.

SECCIÓN 3.3

Radio de la Órbita Circular en el Plano Ecuatorial

Por otra parte, si se restringe el movimiento de la partícula de prueba al plano ecuatorial, $z=0$, la órbita estará determinada a través de la solución del siguiente sistema autónomo

$$\ddot{\rho} + \dot{\rho}^2 \left(\gamma_{,\rho} - \psi_{,\rho}\right) + e^{-2\gamma} \left[E^2 \psi_{,\rho} + (\psi_{,\,\rho} - 1/\rho) \frac{\ell^2 e^{4\psi}}{\rho^2} \right] = 0, \quad (3.11)$$

$$\dot{\varphi} - \ell\, e^{2\,\psi} \rho^{-2} = 0, \quad (3.12)$$

$$\dot{\rho}^2 = e^{-2\gamma} \left[E^2 - e^{2\psi} \epsilon^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} e^{4\psi} \right], \quad (3.13)$$

eliminando el parámetro τ. La primera ecuación diferencial se obtiene de la expresión (3.8), la segunda se encuentra mediante la ecuación de los momentos canónicos (3.3) para la coordenada cíclica φ. Mientras que, la última ecuación es la condición que determina la velocidad inicial de la partícula respecto a la coordenada radial, ρ.

Específicamente, si la trayectoria de la partícula es circular, se tiene que $\rho = \rho_c =$ constante, y $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Así, en la expresión (3.4), la energía específica de la órbita circular será

$$E^2 = V_{eff}(\rho_c, 0), \quad (3.14)$$

con, V_{eff} dado por (3.6). Además, como el espaciotiempo de Weyl (3.1), se debe reducir al elemento de linea de Minkowski (esto debido a que las funciones métricas ψ y γ son asintóticamente planas), se puede deducir una condición límite sobre todos los potenciales de la forma (3.57), está es

$$\lim_{\rho \to \infty} V_{eff}(\rho, 0) = \epsilon^2. \quad (3.15)$$

Del mismo modo, que el caso newtoniano, los puntos críticos del potencial se determinán cuando la derivada con respecto a ρ, del potencial efectivo se anula. Dicha expresión es

$$\ell^2 e^{2\,\psi} (2\rho\, \psi_{,\,\rho} - 1) + \rho^3 \epsilon^2 \psi_{,\,\rho} = 0. \quad (3.16)$$

Para geodésica nulas ($\epsilon = 0$), esta última identidad se convierte en

$$2\rho\, \psi_{,\,\rho} - 1 = 0. \quad (3.17)$$

Las raíces de esta ecuación determinan los radios de las órbitas circulares de rayos luminosos. Acuérdese que la relevancia del estudio de órbitas circulares, es que ellas pueden separar dos regiones diferentes del espaciotiempo.

Para partículas masivas ($\epsilon = 1$), despejando ℓ de (3.16), se obtiene

$$\ell_c^2 = \frac{\rho^3 \psi_{,\rho}\, e^{-2\psi}}{1 - 2\rho\,\psi_{,\rho}}\,, \tag{3.18}$$

con la restricción $0 \leq \rho\,\psi_{,\rho} \leq 1/2$, para que el cuadrado del momentum angular específico sea siempre positivo. Esta ecuación expresa que los radios de las órbitas circulares para geodésicas tipo tiempo dependen del valor del momentum angular específico. Además, reemplazando (3.18), en (3.14), se tiene la otra constante de movimiento, E. Para una partícula moviéndose en una trayectoria circular la energía será

$$E_c^2 = \frac{e^{2\psi}(1 - \rho\,\psi_{,\rho})}{(1 - 2\rho\,\psi_{,\rho})}, \tag{3.19}$$

donde otra vez se tiene la condición $0 \leq \rho\,\psi_{,\rho} \leq 1/2$.

Finalmente, para una trayectoria circular se puede encontrar la velocidad angular asociada por medio de la ecuación

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}}, \tag{3.20}$$

con $\dot{t} = E\, e^{-2\psi}$ y $\dot{\varphi} = \ell\, e^{2\psi} \rho^{-2}$. La anterior ecuación permite también determinar el período de la órbita circular a través de la simple expresión, $\omega = 2\pi/T$, siendo T el período. Para partículas masivas la velocidad angular será

$$\omega_T^2 = \frac{\ell^2 e^{8\psi}}{E^2 \rho_c^4}, \tag{3.21}$$

aquí ρ_c, son las raíces de la expresión (3.16). Por otro lado, para partículas sin masa se encuentra la identidad

$$\omega_N = \frac{e^{2\psi}}{\rho_c}, \tag{3.22}$$

donde ρ_c, son las soluciones de la ecuación (3.17).

Por otra parte, el campo gravitacional que nos interesa se puede encontrar resolviendo las ecuaciones Einstein en el vacío para el elemento de línea de Weyl. Las ecuaciones de Einstein en el vacío, $R_{\mu\nu} = 0$ en coordenadas cilíndricas se reducen al sistema de EDS parciales [68, 137, 138]

$$\psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_{,\rho} + \psi_{,zz} = 0, \tag{3.23}$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho(\psi_{,\rho}^2 - \psi_{,z}^2), \tag{3.24}$$

$$\gamma_{,z} = 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,z}, \tag{3.25}$$

donde la primera relación es la ecuación de la Laplace. Las otras dos ecuaciones son un sistema sobredeterminado que se utiliza para encontrar la otra función métrica, γ. Ahora queda determinar alguna expresión que defina la estabilidad de dichos espaciotiempos; éste será el tema de la próxima sección, pero sólo en el plano ecuatorial.

SECCIÓN 3.4

Estabilidad y Radio de la Órbita Circular Marginalmente Estable

La estabilidad de las órbitas circulares en el plano ecuatorial, como se nombró antes, está dada por la desigualdad $V''(\rho_c) > 0$. Para partículas con $c = 1$, se encuentra

$$\psi_{,\,\rho} + \rho\,\psi_{,\,\rho\rho} > 0, \tag{3.26}$$

para la estabilidad de la trayectoria circular. Mientras que, para geodésicas tipo tiempo, se encuentra la siguiente condición de estabilidad

$$\rho\,\psi_{,\,\rho\rho} + 3\psi_{,\,\rho} + 2\rho\,\psi_{,\,\rho}^2(2\rho\,\psi_{,\,\rho} - 3) > 0, \tag{3.27}$$

donde, $0 \leq \rho\,\psi_{,\,\rho} \leq 1/2$.

Igual que en el caso newtoniano se puede mostrar que las siguientes expresiones

$$V''(\rho) \geq 0, \tag{3.28}$$

y,

$$\frac{d\ell^2}{d\rho} \geq 0, \tag{3.29}$$

son equivalentes para órbitas circulares. Esto significa, que el valor mínimo de la curva de momentum angular específico en función del radio de la órbita circular (3.18), representa la última órbita circular estable, la cual como se sabe, se conoce como la órbita circular marginalmente estable. Es decir, el ROME se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones $V'(\rho) = 0$ y $V''(\rho) = 0$, o lo que es lo mismo, a través de la ecuación $d\ell^2/d\rho = 0$. Esto sólo si existe dos órbitas circulares, una inestable y otra estable. Para geodésicas nulas se encuentra la expresión

$$\psi_{,\rho} + \rho\,\psi_{,\rho\rho} = 0, \tag{3.30}$$

y para geodésicas temporales se encuentra la identidad

$$\rho\,\psi_{,\rho\rho} + 3\psi_{,\rho} + 2\rho\,\psi_{,\rho}^2(2\rho\,\psi_{,\rho} - 3) = 0, \tag{3.31}$$

donde nuevamente, $0 \leq \rho\,\psi_{,\rho} \leq 1/2$. Nótese, que se ha encontrado una correspondencia en la estabilidad de los modelos (3.28), y el denominado criterio de Rayleigh (3.29).

De las anteriores secciones del capítulo, se puede concluir que la estabilidad de las trayectorias circulares ante perturbaciones radiales se puede estudiar a través de un análisis del momentum angular (3.18), o mediante el criterio de Rayleigh (3.29)[4]. En la próxima sección se estudiará algunos campos, según el sistema de EDS (3.23) - (3.25).

SECCIÓN 3.5

Familias Particulares de Soluciones

3.5.1 Movimiento de Partículas en el Plano Ecuatorial en Coordenadas Cuasi-cilíndricas

La solución de la ecuación de Laplace (3.23), para la función métrica ψ y su correspondiente función γ se puede expresar en *coordenadas esféricas* (r, θ),

[4]Esta investigación de la estabilidad es semejante al estudio del comportamiento de la velocidad circular de la galaxia.

por [68]

$$\psi_k = -\sum_{n=0}^{k} \frac{C_n P_n}{r^{n+1}}, \tag{3.32}$$
$$\gamma_k = -\sum_{l,m=0}^{k} \frac{C_l C_m (l+1)(m+1)}{(l+m+2) r^{l+m+2}} (P_l P_m - P_{l+1} P_{m+1}),$$

con

$$\rho = r \sin\theta, \qquad z = r\cos\theta, \qquad r > 0, \qquad 0 \le \theta \le \pi,$$

y donde $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, $P_n = P_n(\cos\theta)$ son los polinomios de Legendre, C_n son constantes y el rango de las coordenadas (ρ, z) son el rango de las coordenadas cilíndricas usuales. En el plano ecuatorial, $z = 0$, se tiene

$$\psi_k = -\sum_{n=0}^{k} C_{2n} \frac{P_{2n}(0)}{\rho^{2n+1}}, \tag{3.33}$$
$$\gamma_k = -\sum_{l,m=0}^{k} \frac{C_{2l} C_{2m} (2l+1)(2m+1)}{(2l+2m+2) \rho^{(l+m)/2+1}} (P_{2l} P_{2m} - P_{2l+1} P_{2m+1}).$$

Se puede obtener el radio de la órbita circular de un fotón (3.17) en estas coordenadas resolviendo la ecuación

$$\sum_{n=0}^{k} 2C_{2n} P_{2n}(0)(2n+1)\rho^{-(2n+1)} = 1, \tag{3.34}$$

donde si $C_{2n}P_{2n}(0) > 0$, se obtiene el polinomio

$$p(\rho) = \rho^{2k+1} - \sum_{n=0}^{k} a_{2n} \rho^{2n} = 0. \tag{3.35}$$

Según esto, como el polinomio tiene grado impar siempre tendremos una raíz real positiva o negativa, además como sólo se tiene un cambio de signo en el polinomio, esta raíz es positiva. Por lo tanto, siempre existe una solución a la ecuación anterior (3.35), es decir, siempre se puede determinar un radio de una órbita circular de un fotón en este tipo de soluciones.

Por otra parte, se puede ver que la relación de estabilidad no se satisface, así

$$\rho\, \psi_{k,\,\rho\rho} + \psi_{k,\,\rho} = -\sum_{n=0}^{k} C_{2n} P_{2n}(0)(2n+1)^2 \rho^{-(2n+2)} < 0. \tag{3.36}$$

En conclusión todas las órbitas circulares son inestables. Además, se puede verificar de la expresión (3.36), que la ecuación $\rho\,\psi_{,\rho\rho} + \psi_{,\rho} = 0$, no tiene raíces reales positivas, debido que el polinomio no tiene cambios de signo. Por lo tanto, no existen órbitas circulares marginalmente estables, y por lo tanto tampoco se puede encontrar un ROME.

Ahora, para ilustrar las anteriores conclusiones se analiza una solución particular. El primer miembro de la familia (3.32), corresponde a la solución de Chazy-Curzon [20, 21], la cual puede ser obtenida escogiendo $k = 0$, y $C_0 = m > 0$ en (3.32). Este campo representa el potencial newtoniano de una masa puntual m. Las funciones métricas en el plano ecuatorial para esta solución son

$$\psi_0 = \frac{-m}{\rho}, \qquad \gamma_0 = \frac{-m^2}{2\rho^2}. \tag{3.37}$$

En este espaciotiempo el radio de la trayectoria circular inestable, de acuerdo con (3.34), es $\rho = 2m$. Ahora con $\rho = 2m$, la energía y la frecuencia angular están dadas por

$$\omega_N = (2me)^{-1}, \qquad E_N = \ell\,\omega_N, \tag{3.38}$$

en un movimiento circular, donde ℓ, es una constante arbitraria, y e es la base de los logarítmos neperianos.

En la figura 3.1, se observa el potencial efectivo para rayos de luz en la solución de Chazy-Curzon. Esta gráfica tiene un máximo en $\rho = 2m$, y el valor de ese máximo es $(2me)^{-2}\ell^2$. Las posibles trayectorias están descritas a través de líneas horizontales ($V = E^2$) escogiendo diferentes valores de m, y ℓ. Por ejemplo, cuando $0 < E_1 < (2me)^{-2}\ell^2$ el movimiento corresponde a una partícula que viene desde el infinito con energía E_1 hasta un punto de retorno B y regresa al infinito (la trayectoria es abierta), además no se encuentra órbita en la región $A < \rho/m < B$, porque la velocidad es imaginaria. Mientras que, en el pozo de potencial $0 < \rho/m < A$, la trayectoria está en el interior de A. En contraste, cuando el valor de la energía sea mayor a $(2me)^{-2}\ell^2$ (E_2), se observa que no hay puntos de retorno del movimiento y la partícula sólo se moverá en una dirección. En general todos los potenciales para diferentes soluciones (diferentes valores de k en (3.33)) tienen la forma de la figura 3.1, con valores arbitrarios de la constante ℓ, siempre que se tome la restricción $C_{2n}P_{2n}(0) > 0$, en esta familia.

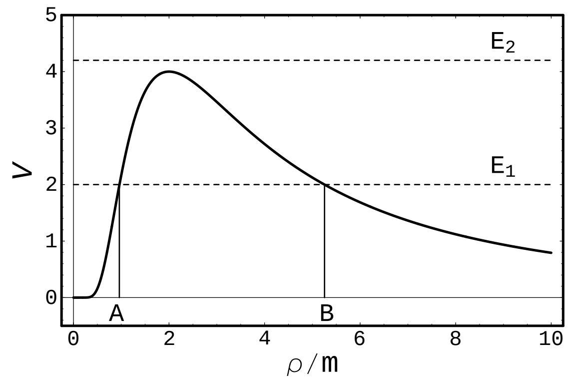


Figura 3.1: Potencial efectivo para partículas sin masa en el campo de Chazy-Curzon. Se ha tomado $\ell = 4me$ para realizar está gráfica.

De otro lado, para geodésicas temporales la energía y el momentum angular específico de una trayectoria circular son respectivamente

$$\ell^2 = \frac{\rho^2 m\, e^{2m/\rho}}{\rho - 2m}, \qquad E^2 = e^{-2m/\rho}, \tag{3.39}$$

donde $\rho > 2m$. De acuerdo con esto se tiene

$$\omega_T^2 = \frac{e^{-4m/\rho} m}{(\rho - 2m)\rho^2}.$$

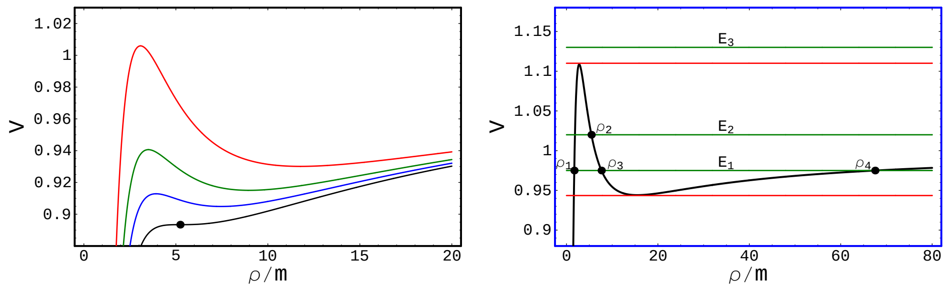
Además, se puede obtener el ROME al resolver la ecuación (3.31), y su correspondiente valor del momentum angular reemplazando esta solución en (3.18). Para el espaciotiempo de Chazy-Curzon se obtiene

$$\rho = 5{,}23m, \qquad \ell = 3{,}52m, \tag{3.40}$$

$$E = 0{,}826, \qquad \omega_T^2 = \frac{0{,}00525}{m^2}, \tag{3.41}$$

para la órbita circular marginalmente estable.

El esquema del potencial efectivo de geodésicas temporales (3.57), de la solución de Chazy-Curzon, se presenta en las figuras 3.2. En el gráfico 3.2(a), se puede apreciar que el potencial efectivo varía según los valores que pueda tomar ℓ: en éste caso todos los valores de momentum angular definen dos trayectorias circulares (una estable y otra inestable), excepto para la curva de color negro. En esta figura la curva oscura tiene el valor $\ell = 3{,}52m$ y representa la órbita circular marginalmente estable.



(a) (b)

Figura 3.2: (a) Potencial efectivo en función de ρ/m para geodésicas temporales con diferentes valores de ℓ/m en el campo de Chazy-Curzon. De la curva superior a la inferior los valores son $\ell/m = 4{,}1, 3{,}8, 3{,}65$ y $\ell = 3{,}52m$, respectivamente. En la curva oscura el punto tiene un valor de $\rho/m = 5{,}23$, el cual corresponde al ROME con un valor de $\ell/m = 3{,}52$. (b) Potencial efectivo para geodésicas temporales con $\ell = 4{,}5m$ en el espaciotiempo de Chazy-Curzon.

En la figura 3.2(b), se exhibe el potencial efectivo con $\ell = 4,5m$ y diversos valores de la energía (líneas horizontales con $V = E^2$), que definen las posibles trayectorias de las partículas de prueba. Específicamente, para E_1, se tienen tres diferentes radios debido a que la energía corta tres veces la curva del potencial, mientras que para radios menores A, la partícula está confinada al pozo de potencial $0 < \rho/m < A$, como la figura 3.1. Mientras que para los dos radios C y D, obtenemos una órbita entre estos radios, por ejemplo, si escogemos $E_1 = 0{,}975$, la trayectoria está confinada entre $C = \rho/m \approx 7{,}66$ (perihelio) y $D = \rho/m \approx 67{,}52$ (afelio), ver figura 3.3(a). Cuando la energía es igual a E_2, tenemos un punto de retorno, entonces para $E_2 = 1{,}02$ el punto de retorno es $B = \rho/m \approx 5{,}45$, como se observa en la figura 3.3(b). Para la línea a trazos F con energía $E_2 = 1{,}02$, la partícula está confinada en un pozo de potencial, igual que en el radio A. Por otro lado, si la energía $E \geq E_3$, la partícula no tiene puntos de retorno, por lo que se mueve en una sola dirección. Finalmente, en la figura 3.4, se exhibe el rango de estabilidad de geodésicas temporales por medio del momentum angular (3.39). En esta solución el intervalo de estabilidad se encuentra en $3{,}52m \leq \ell < \infty$ y $5{,}23m \leq \rho < \infty$. En esta gráfica el punto tiene coordenadas $(\ell/m, \rho/m) = (3{,}52, 5{,}23)$ y corresponde al ROME.

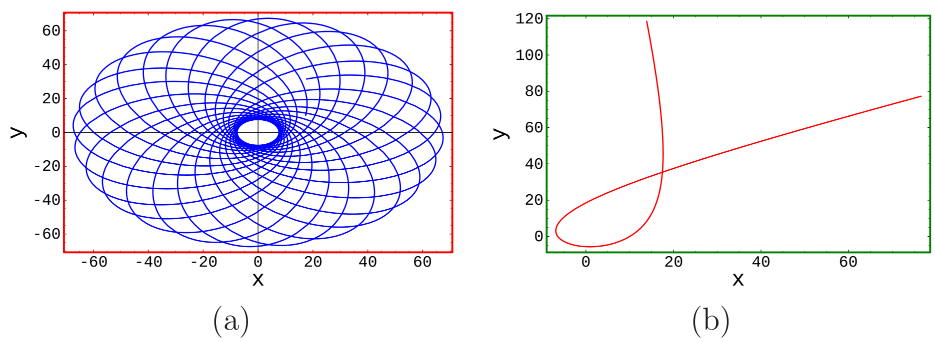


Figura 3.3: (a) Trayectoria de una partícula de prueba correspondiente al potencial efectivo de la figura 3.2(b) con $E_1 = 0{,}975$. La órbita esta confinada entre $C \approx 7{,}66$ y $D \approx 67{,}52$. Las condiciones iniciales usadas son $\dot{\rho}(t=0) \approx 0{,}17$, $\varphi(t=0) = \pi/6$ y $\rho(t=0) = 20$. (b) Órbita de una partícula de prueba correspondiente al potencial efectivo de la figura 3.2(b) con $E_2 = 1{,}02$. Las condiciones iniciales utilizadas son $\dot{\rho}(t=0) \approx 0{,}17$, $\varphi = \pi/6$ y $\rho = 20$.

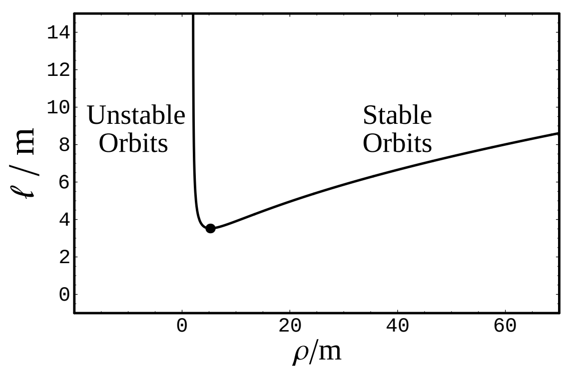


Figura 3.4: Relación entre el momentum angular específico, ℓ/m, y el radio de una trayectoria circular, ρ/m, para geodésicas temporales en el caso de Chazy-Curzon. El punto tiene coordenadas $(\ell/m, \rho/m) = (3{,}52, 5{,}23)$. El rango de estabilidad está en $3{,}52m \leq \ell < \infty$ y $5{,}23m \leq \rho < \infty$.

3.5.2 Órbitas en el Plano Ecuatorial en Coordenadas Oblatas

En *coordenadas oblatas* la solución de la ecuación de Laplace (3.23), es

$$\psi_n = -\sum_{k=0}^{n} C_{2k} P_{2k}(y) i^{2k+1} Q_{2k}(ix), \tag{3.42}$$

donde C_{2k} son constantes, P_k son los polinomios de Legendre y Q_k son las funciones de Legendre de segunda clase. El primer término de esta solución ($n = 0$), fue obtenido de forma independiente por Zipoy [140] y Vorhees [135], y fue interpretado por Bonnor and Sackfield [12], como el campo gravitacional que produce un disco delgado estático sin presión, el cual se caracteriza por tener una singularidad en el borde.

Las constantes C_{2k}, que aparecen en (3.42), están dadas por

$$C_{2k} = \frac{Gm}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2}(4k+1)(2n+1)!}{2^{2n}(2k+1)(n-k)!\Gamma(n+k+\frac{3}{2}) q_{2k+1}(0)} \right],$$

donde $q_{2k}(x) = i^{2k+1} Q_{2k}(ix)$, m es la masa del disco y $G \approx 6{,}67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$. Las variables x e y son las coordenadas cilíndricas relacionadas por medio de las expresiones

$$\rho^2 = a^2(1+x^2)(1-y^2), \qquad z = axy, \tag{3.43}$$

siendo a una constante asociada con el radio del disco delgado, $-1 \leq y \leq 1$ y $0 \leq x < \infty$. Se escogerá de ahora adelante $a = 1$, sin perder generalidad.

Ahora, desarrollaremos las diferentes expresiones en estas coordenadas en plano de la fuente, empezando con las relacionadas con geodésicas nulas. Por ejemplo, el radio de órbita (3.17), en el interior de la fuente se encuentra a través de

$$\sum_{k=1}^{n} 4k C_{2k} q_{2k}(0) \left[P_{2k-1}(y) - y P_{2k}(y) \right] = y, \tag{3.44}$$

siendo $y = \sqrt{1-\rho^2}$. La relación para la estabilidad de la fuente toma la forma

$$y(1-y^2)\psi_{n,\,yy} - (1+y^2)\psi_{n,\,y} \leq 0. \tag{3.45}$$

La anterior ecuación y considerando (3.42), se reescribe de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} 2k q_{2k}(0) \left[2ky P_{2k}(y) + P_{2k-1}(y) \right] > 0. \tag{3.46}$$

donde $q_{2k}(x) = i^{2k+1}Q_{2k}(ix)$. Mientras que, para geodésicas nulas el radio de la órbita circular se encuentra mediante la expresión

$$\sum_{k=0}^{n} 2C_{2k}P_{2k}(0)\,[xq_{2k}(x) + q_{2k+1}(x)] + x = 0, \tag{3.47}$$

en donde $x = \sqrt{\rho^2 - 1}$. La correspondiente relación de estabilidad toma la forma

$$x(1 + x^2)\psi_{,xx} + (x^2 - 1)\psi_{,x} \leq 0. \tag{3.48}$$

con (3.42), la última idéntidad está dada por

$$-\sum_{k=0}^{n} C_{2k}(2k + 1)\,[2xq_{2k}(x) + q_{2k+1}(x)] > 0. \tag{3.49}$$

Las funciones ψ, para algunos miembros de la familia de discos (3.42), tienen la forma [40, 98]

$$\psi_1 = -\mu[\cot^{-1} x + A(3y^2 - 1)], \tag{3.50a}$$

$$\begin{aligned}\psi_2 = -\mu[\cot^{-1} x &+ \frac{10A}{7}(3y^2 - 1)\\ &+ \ B(35y^4 - 30y^2 + 3)],\end{aligned} \tag{3.50b}$$

$$\begin{aligned}\psi_3 = -\mu[\cot^{-1} x &+ \frac{10A}{6}(3y^2 - 1)\\ &+ \ \frac{21B}{11}(35y^4 - 30y^2 + 3)\\ &+ \ C(231y^6 - 315y^4 + 105y^2 - 5)],\end{aligned} \tag{3.50c}$$

con

$$A = \frac{1}{4}[(3x^2 + 1)\cot^{-1} x - 3x], \tag{3.51a}$$

$$B = \frac{3}{448}[(35x^4 + 30x^2 + 3)\cot^{-1} x - 35x^3 - \frac{55}{3}x], \tag{3.51b}$$

$$\begin{aligned}C = \frac{5}{8448}&[(231x^6 + 315x^4 + 105x^2 + 5)\cot^{-1} x\\ &- 231x^5 - 238x^3 - \frac{231}{5}x],\end{aligned} \tag{3.51c}$$

siendo $\mu = m/a$ en el potencial (3.42), y $n = 1, 2, 3$, respectivamente. Para $n = 1$, la otra función métrica es [68, 85, 86]

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \frac{9\mu^2(\eta^2 - 1)}{16}&\left[9x^2y^2 - x^2 + 4y^2 + 4 + \right.\\ (x^2 + 1)(\cot^{-1}(x))^2&(9x^2y^2 - x^2 + y^2 - 1)\\ -2x\cot^{-1}(x)&(9x^2y^2 - x^2 + 7y^2 + 1)\left.\right].\end{aligned} \tag{3.52}$$

Éste disco es singular el borde también [111].

Para $n \geq 2$, no encontramos soluciones explícitas para la función métrica, γ. Por consiguiente, presentamos la solución al sistema de EDS de Weyl (3.89)-(3.90), en el caso $n = 2$, la cual es

$$\begin{aligned}\gamma_2 \;=\;& \frac{25\mu^2(y^2-1)}{2048}\big\{9x^6\left(1225y^6 - 1275y^4 + 315\eta^2 - 9\right)\\ &+3y^4\left(5050y^6 - 3630y^4 + 366\eta^2 + 6\right)x^4 + \big(4945y^6 - 723\\ &-45y^2 - 81\big)x^2 - 6\big[375y^6 + 113y^4 + 15y^2 + 3\big(1225y^6\\ &-1275y^4 + 315y^2 - 9\big)x^6 + \big(6275y^6 - 4905y^4 + 681y^2\\ &-3)x^4 + \big(3005y^6 - 1111y^4 - 105y^2 + 3\big)x^2 + 27\big]\,x\,*\\ &*\cot^{-1}(x) + 9(x^2+1)\big[9y^6 + 5y^4 - 5y^2 + x^6\big(1225y^6 -\\ &1275y^4 + 315y^2 - 9\big) + x^4\big(1275y^6 - 785y^4 + 17y^2 + 5\big)\\ &+x^2(315y^6 - 17y^4 - 47y^2 + 5) - 9\big]\left(\cot^{-1}(x)\right)^2 +\\ &256\left(y^6 + y^4 + y^2 + 1\right)\big\}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Ahora, analizaremos algunos ejemplos, si escogemos $n = 1$, es decir, el segundo miembro de la familia de discos. Como se mencionó antes, el radio se encuentra por medio de (3.44). Después si reemplazamos el valor en la velocidad angular y la energía de la órbita obtenemos las expresiones

$$\rho^2 = \frac{2}{3\pi\mu}, \qquad \omega_N^2 = \frac{E^2}{\ell^2} = \frac{3\pi\mu}{2}\,e^{1-3\pi\mu}, \tag{3.54}$$

en donde $\mu \geq 2/3\pi$, y siendo ℓ una constante arbitraria. El radio corresponde a un valor inestable para geodésicas nulas en el interior de la fuente. Por otra parte, fuera del disco el potencial tiene un valor máximo (órbita circular inestable), luego disminuye hasta 0 a medida que ρ se incrementa, de acuerdo con (3.15). Nuevamente, no encontramos una órbita circular marginalmente estable para partículas sin masa. El comportamiento del potencial efectivo para diferentes parámetros tiene un comportamiento similar al que mostramos en la figura 3.5, la cual corresponde a geodésicas temporales. En el potencial de la figura 3.5, escogemos $\ell = 8,6$ (curva gris) y 3.56 (curva punteada). El comportamiento para otros parámetros es similar, para realizar la gráfica hemos tomado $\mu = 1$.

En el caso exterior escogemos representar el tercer miembro de la familia de discos, $n = 2$, figura 3.6(a). En está gráfica el punto B, corresponde al ROME, éste tiene un valor de momentum angular $\ell \approx 3{,}688$. Los puntos C y D tienen momentum angular $\ell = 4{,}2$ y energía 0.935, la trayectoria

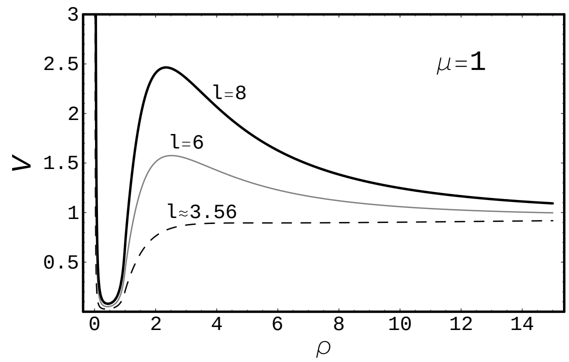


Figura 3.5: Potencial efectivo dentro y fuera de la fuente (disco) para partículas sin masa para el segundo miembro de la familia de discos de Morgan y Morgan, $n = 1$ y $\mu = 1$.

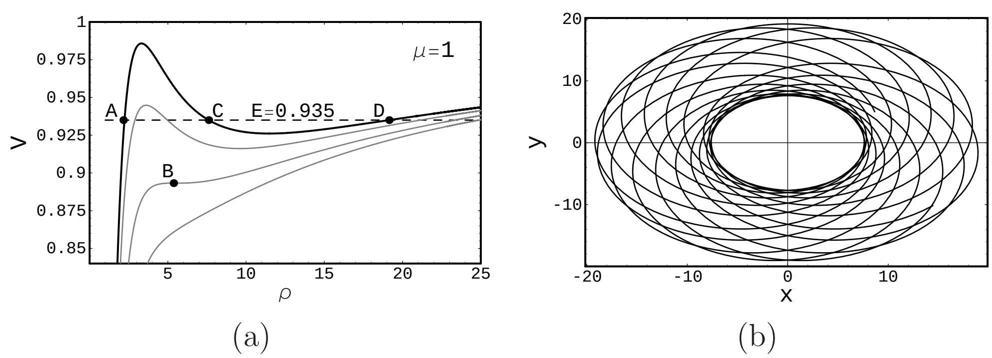


Figura 3.6: (a) Potencial efectivo fuera de la fuente del tercer miembro de la familia de discos de Morgan y Morgan, $n = 2$, para geodésicas temporales. El punto B, corresponde al radio de la órbita circular marginalmente estable, tiene un valor de $\ell \approx 3{,}688$. Los puntos C y D, tienen un valor de $\ell = 4{,}2$ y potencial efectivo 0.935, la trayectoria está confinada entre los radios 7.61 y 19.14, figura 3.6(b). En está gráfica se escogió $\mu = 1$. (b) Órbita de la partícula correspondiente al potencial efectivo de la fig. 3.6(a) con $E = 0{,}935$. Las condiciones iniciales utilizadas fueron $\dot{\rho}(0) = 0{,}0903$, $\varphi(0) = \pi/6$ y $\rho(0) = 10$. La trayectoria está entre $C \leq \rho \leq D$.

es necesariamente cerrada entre los radios 7.61 y 19.14, como en la figura 3.6(b). Las condiciones iniciales utilizadas para la órbita Figura 3.6(b), son $\dot{\rho}(0) = 0{,}0903$, $\varphi(0) = \pi/6$ y $\rho(0) = 10$.

3.5.3 Movimiento de Partículas en el Plano Ecuatorial en Coordenadas Prolatas

La solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío para la función métrica ψ, correspondiente a campos estáticos y axialmente simétricos en *coordenadas prolatas* (u, v), está dada por [97]

$$\psi_l = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{n+1} d_n Q_n(u) P_n(v), \tag{3.55}$$

donde $u \geq 1$, $-1 \leq v \leq 1$, d_n son constantes relacionadas con los momentos multipolares de masa [78, 97], P_n son los polinomios de Legendre y Q_n son las funciones de Legendre de segunda clase. Las coordenadas están relacionadas con las coordenadas canónicas de Weyl mediante las expresiones

$$\rho^2 = m^2(1 - v^2)(u^2 - 1), \qquad z = muv, \tag{3.56}$$

siendo m la masa de la fuente que produce el campo. La solución para γ asintóticamente plana fue encontrada por Quevedo [97].

La solución monopolar, $l = 0$, junto con $d_0 = 1$ es el conocido campo de Schwarzschild. La solución de la expresión (3.17) (geodésicas nulas) para solución de Schwarzschild es $u = 2$, éste corresponde al radio de un órbita circular inestable. Para ver un estudio detallado de la cinemática de las partículas de prueba en el campo de Schwarzschild en el plano ecuatorial ver las referencias [114].

El segundo término de la familia de soluciones de (3.55), es la métrica de Erez-Rosen [27], el cual está dado por

$$\begin{aligned} \psi_1 &= d_0 \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} \\ &+ \frac{1}{2} d_2 (3v^2 - 1) \left[\frac{1}{4} (3u^2 - 1) \ln \frac{u-1}{u+1} + \frac{3}{2} u \right]. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Como se mencionó antes, d_0, y d_2 están relacionados con los momentos monopolar y cuadrupolar arbitrio, respectivamente, [78]. El estudio del comportamiento de la cinemática de partículas de prueba en esta solución ha sido desarrollado por diferentes autores, ver [3].

Nuevamente, estamos interezados en detallar las diferentes expresiones en estás coordenadas para movimientos circulares, por ejemplo, la energía, el

ROME, etc. Todas las expresiones consideradas son obtenidas a través del potencial efectivo y restringidas al plano ecuatorial ($v = 0$)

$$V = e^{2\psi_l}\left(\epsilon^2 + \frac{e^{2\psi_l}\ell^2}{(u^2-1)\,m^2}\right).$$

Empezaremos presentando las ecuaciones para geodésicas nulas, $\epsilon = 0$. El radio de la órbita circular puede ser determinado por medio de

$$2(u^2-1)\psi_{l,\,u} = u, \tag{3.58}$$

la cual, en términos de (3.55), tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{l} 2d_{2n}P_{2n}(0)(u^2-1)Q'_{2n}(u) = u, \tag{3.59}$$

y tiene una condición de estabilidad

$$u(u^2-1)\psi_{,\,uu} + (u^2+1)\psi_{,\,u} \geq 0. \tag{3.60}$$

Esta última ecuación junto con (3.55), toma la forma

$$\sum_{n=0}^{l} d_{2n}P_{2n}(0)\left[(u^2-1)Q'_{2n}(u) - 2nu(2n+1)Q_{2n}(u)\right] \geq 0.$$

En la anterior expresión, el signo igual corresponde al radio de la órbita circular marginalmente estable. Otras expresiones son encontradas mediante (3.72) y (3.80).

Por otro lado, hallamos las ecuaciones

$$\ell^2 = \frac{e^{-2\psi}\left(u^2-1\right)^2 m^2\psi_{,\,u}}{u - 2\left(u^2-1\right)\psi_{,\,u}}, \tag{3.61}$$

$$E^2 = \frac{e^{2\psi}\left[u - (u^2-1)\psi_{,\,u}\right]}{u - 2\left(u^2-1\right)\psi_{,\,u}}, \tag{3.62}$$

para partículas masivas, donde $u - 2\left(u^2-1\right)\psi_{,\,u} \geq 0$, para garantizar que la energía y el momentum angular específico no sean cantidades imaginarias. La condición de estabilidad que se encuentra y el ROME, están definidos a través de

$$\psi_{,\,u}\left\{3u^2+1+ 2(u^2-1)\psi_{,\,u}\left[2(u^2-1)\psi_{,\,u} - 3u\right]+1\right\} + u(u^2-1)\psi_{,\,uu} \geq 0,$$

con $u - 2\,(u^2 - 1)\,\psi_{,u} \geq 0$.

Finalmente, para terminar está sección, hacemos un análisis de la estabilidad a través de un bosquejo el momentum angular (3.61), ver la figura 3.7. En esta gráfica particular hemos escogido la solución de Erez-Rosen, la cual nos arroja el intervalo

$$0 \leq u \leq 4{,}77, \qquad 4{,}77 \leq u < \infty,$$

y $11{,}62 \leq \ell < \infty$ para la órbita circular estable. Hemos tomado $d_0 = 1$ y $d_2 = 1{,}5$. En la gráfica el ROME tiene coordenadas $(\ell/m, u) = (11{,}62, 4{,}77)$. En la próxima sección ampliaremos los conceptos estudiados a las soluciones esféricas.

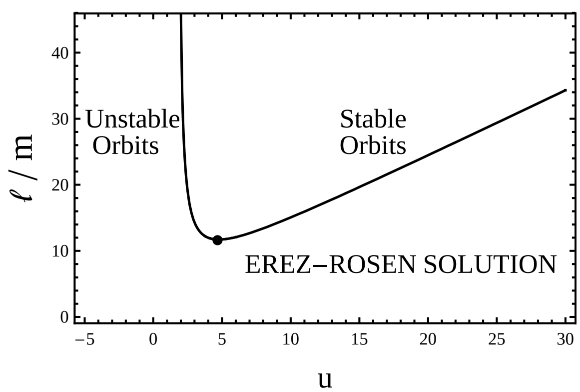


Figura 3.7: Momentum angular específico en función de u para órbitas en el campo de Erez-Rosen. Los parámetros usados son $d_0 = 1$ y $d_2 = 1{,}5$. El punto tiene coordenadas $(\ell/m, u) = (11{,}62, 4{,}77)$, que corresponde al ROME.

SECCIÓN 3.6

Geodésicas en Soluciones Esféricas

En está sección se estudia la dinámica de partículas de prueba neutras en campos gravitatorios estáticos y esféricamente simétricos. En estos campos gravitacionales están incluidos las soluciones de Schwarzschlid, de De Sitter, de Anti De-Sitter, de Reissner-Nordström y combinaciones de ellos. El espacio tiempo de De Sitter juega un papel importante en la cosmología, pués la geometría de la mayoría de los modelos inflacionarios está cerca de la métrica De Sitter y podría explicar el comportamiento de la expansión acelerada del universo actual [132]. Analógamente, a las secciones anteriores, se investigará los trayectorias de partículas de prueba a través de un potencial efectivo. Después, demostraremos que la constante cosmológica no tiene ninguna influencia en el caso particular de geodésicas nulas, pues todas las soluciones tiene el mismo radio circular inestable. En el caso de geodésicas temporales se muestra la influencia de momentum angular en el radio de las órbitas circulares y en la estabilidad de los campos.

3.6.1 Elemento de Línea, Ecuaciones de Movimiento y Potencial Efectivo

El elemento de línea para espaciotiempos estáticos y esféricamente simétricos en unidades $c = 8\pi G = 1$, puede ser escrito como [68]

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3.63}$$

donde, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ y f es una función que sólo depende de coordenada radial, r. El interés físico de la métrica anterior, es que ella incluye los campos de Schwarzschild, De Sitter, Anti De-Sitter, Reissner-Nordström y combinaciones de ellos. El lagrangiano correspondiente tiene la forma

$$2\mathcal{L} = -f\dot{t}^2 + f^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\Omega}^2, \tag{3.64}$$

donde, $\dot{\Omega}^2 = \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2$, y el punto representa derivada con respecto al parámetro a lo largo de la geodésica, τ.

Del mismo modo, que en las anteriores coordenadas, el lagrangiano es independiente de t, y ϕ, por consiguiente, los momentos canónicos de estas aoordenadas ignorables se relacionan con la energía y el momentum angular de la partícula. Las expresiones son la siguientes

$$-E = f\,\dot{t}, \qquad \dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2\sin^2\theta}\ , \tag{3.65}$$

siendo E, ℓ la energía y el momentum angular por unidad de masa de la partícula medido por un observador en el infinito.

De otra parte, la órbita de la partícula puede ser determinada a través de la solución del sistema de EDS autónomo

$$\dot{r}^2 = E^2 - f\left[\epsilon^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{r^2\sin^2\theta}\right] \tag{3.66}$$

$$\ddot{r} - \frac{f'}{2f}(E^2 + \dot{r}^2) - f\left[r\dot{\theta}^2 - \frac{\ell^2}{r^2\sin^3\theta}\right] = 0 \tag{3.67}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\,\dot{\theta}\,\dot{r} + \frac{\ell^2\cos\theta}{r^3\sin^3\theta} = 0. \tag{3.68}$$

Como sabemos, si $\epsilon = 0$, el análisis será para geodésicas nulas, mientras que para geodésicas temporales, $\epsilon = 1$. Las primera de las ecuaciones (3.66), puede ser obtenida mediante (3.64), las otras dos ecuaciones de movimiento se pueden elaborar mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange. Se puede obtener un movimiento radial bajo las condiciones $\phi = \phi_0 =$ constante, donde $\ell = 0$.

Si se toma en consideración la expresión (3.64) como la expresión que define todas las trayectorias en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$), podemos reescribir la ecuación en la forma

$$E^2 = \dot{r}^2 + f(r)\left(\epsilon^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right). \tag{3.69}$$

De acuerdo con esto, existe un potencial efectivo de la forma

$$V(r) = f(r)\left(\epsilon^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right). \tag{3.70}$$

Se puede ver que el potencal efectivo (3.70), cumple la relación

$$\lim_{\rho\to\infty} V(r) = \epsilon^2, \tag{3.71}$$

debido a que la función métrica es asintóticamente plana. Continuaremos el estudio analizando la trayectoria circular y su estabilidad.

3.6.2 Órbita Circular y Criterio de Estabilidad

De modo similar, a las anteriores campos (axial y simétricos), pondremos especial enfásis al caso de las trayectorias circulares, en este caso $r = r_c =$

constante, luego $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. De est forma, la expresión (3.69), para la energía de una órbita circular se encuentra mediante la identidad

$$E = V^{1/2}. \tag{3.72}$$

En está ecuación V está dado por (3.70). Los puntos estacionarios, como sabemos, se hallan cuando la primera derivada del potencial se anula. De acuerdo con esto, la expresión que determina los puntos críticos es

$$\ell^2 \left[r f'(r) - 2f(r) \right] + \epsilon^2 r^3 f'(r) = 0. \tag{3.73}$$

Las raíces de la anterior identidad definen los radios de las órbitas circulares.

Para el caso de partículas masivas, el valor del momentum angular específico ℓ, es

$$\ell_c^2 = \frac{r^3 f'(r)}{2f(r) - r f'(r)} \tag{3.74}$$

con la restricción, $2f(r) - r f'(r) > 0$. Luego si se reemplaza (3.74) en (3.72), obtenemos el valor de la energía de una trayectoria circular

$$E^2 = \frac{2\epsilon^2 f(r)^2}{2f(r) - r f'(r)}, \tag{3.75}$$

aquí otra vez, $2f(r) - r f'(r) > 0$.

La condición de estabilidad se obtiene a través del potencial efectivo, cuando sea un máximo o un mínimo. Para partículas sin masa, obtenemos

$$r_c \left[r_c f''(r_c) - 4f'(r_c) \right] + 6f(r_c) > 0, \tag{3.76}$$

siendo r_c las raíces de la ecuación $2f(r) - r f'(r) = 0$. Mientras que para partículas con momentum angular dado por (3.74), obtenemos

$$f(r_c) \left[3f'(r_c) + r_c f''(r_c) \right] - 2 r_c f'(r_c)^2 > 0 \tag{3.77}$$

con $r_c f'(r_c) \neq 2f(r_c)$, y donde r_c son las soluciones de la ecuación (3.73). El ROME, como conocemos, se encuentra al resolver simultanéamente el sistema de ecuaciones $V'(r) = 0$ y $V''(r) = 0$, considerando dos puntos críticos para el potencial, uno estable y otro inestable.

De otra parte, se puede probar que la ecuación (3.77) es equivalente a los valores críticos del momentum angular dado por (3.18), es decir, se cumple que

$$V''(r_c) \geq 0, \qquad \text{y}, \qquad \frac{d\ell_c^2}{dr} \geq 0.$$

Lo anterior implica que si la pendiente de una gráfica ℓ_c^2 es positiva, la órbita será estable; en caso contrario es inestable, y cuando se anule éste valor corresponderá al radio de la trayectoria circular marginalmente estable. Nuevamente considerar la estabilidad a través del cuadrado del momentum angular es equivalente a analizar la estabilidad de los campos mediante el criterio de Rayleigh.

También es posible determinar la velocidad angular de una partícula en una trayectoria circular mediante la expresión

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}, \tag{3.78}$$

donde $\dot{t} = Ef^{-1}(r)$ y $\dot{\phi} = lr^{-2}$. Para geodésicas tipo tiempo ($\epsilon = 1$) se tiene

$$\omega_T^2 = \frac{rf'(r)}{2\left[2f(r) - rf'(r)\right]^{1/2}} \tag{3.79}$$

y para geodésicas nulas,

$$\omega_N = \frac{f^{1/2}(r)}{r}. \tag{3.80}$$

Finalmente, se puede obtener la velocidad física de la partícula mediante la ecuación

$$v = f^{1/2}\omega \tag{3.81}$$

donde $\omega = \omega_T$ para geodésicas tipo tiempo y $\omega = \omega_N$ para rayos de luz. Para culminar esta sección expondremos la equivalencia entre algunas soluciones esféricas en lo que se refiere al radio de la órbitas circulares de fotones.

3.6.3 Ejemplos de Soluciones Esféricas

Empezaremos el análisis de las familias de soluciones particulares considerando la función métrica de la forma

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \mp \frac{\Lambda}{3}r^2,$$

donde $\Lambda > 0$ es la constante cosmológica, y el signo $\mp$ designa los espaciotiempos de Schwarzschild De Sitter y Schwarzschild Anti-De Sitter, menos y más respectivamente. Si $\Lambda = 0$, se tiene el caso más simple, que corresponde al campo de Schwarzschild, donde M es la masa de Schwarzschild. El análisis del movimiento de partículas de prueba en dicho espaciotiempo ha sido realizado a través del tiempo por diferentes autores, ver [114], para un análisis detallado. Para el caso Schwarzschild es bien conocido que $r = 3M$, corresponde al radio de una órbita circular inestable de un rayo luminoso.

Particularmente, la expresión que determina el radio de las órbitas circulares para geodésicas nulas en estos espaciotiempos se determina por medio de la expresión (3.73), tomando $\epsilon = 0$, la cual se reduce a

$$rf'(r) = 2f(r) \qquad \Rightarrow \qquad r = 3M,$$

es decir, las soluciones de Schwarzschild, Schwarzschild De Sitter, y Schwarzschild Anti-De Sitter tienen una órbita circular inestable con radio $r = 3M$, en el caso de rayos de luz. Igualmente, estas soluciones no poseen un ROME, pues sólo existe un radio para una órbita circular y éste es inestable. Este hecho fue mencionado por [117, 123], aunque sólo en el caso de Schwarzschild De Sitter.

De otro lado, para ilustrar la estabilidad de los campos para partículas masivas se muestra una gráfica del momentum angular en el espacio tiempo de Schwarzschild (figura 3.8), recuerdese que el intervalo en el cual esta solución es estable es

$$0 < r < 3M. \tag{3.82}$$

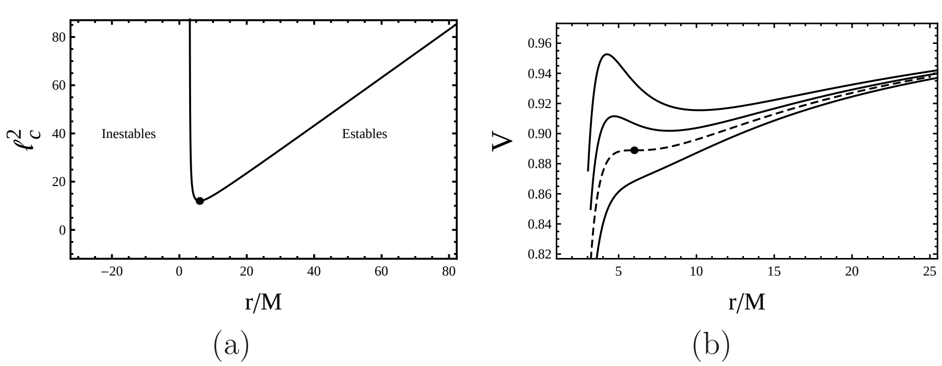


Figura 3.8: (a) Momentum angular de una órbita circular en una espaciotiempo de Schwarzschild. (b) Potencial efectivo en función de r/M en el caso de Schwarzschild. En las dos gráficas el punto corresponde al radio de órbita circular marginalmente estable, cuyas coordenadas son $(\ell_c^2, r/M) = (12, 6)$.

Consideremos ahora la solución que corresponde al campo de una objeto masivo (M), cargado (Q) y no rotante, esto es, la métrica de Reissner Nordström. Esta se comparó con las soluciones de Reissner Nordström De Sitter y Reissner Nordström Anti De-Sitter. Todas ellas están incluidas en la función métrica

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \pm \Lambda r^2 \ .$$

Así en el caso especial en el que $\epsilon = 0$, encontramos nuevamente que el radio es inestable para las tres soluciones, y además coincide. El radio se puede determinar a través de la solución de la ecuación

$$r^2 - 3Mr + 2Q^2 = 0 \ .$$

En las mencionadas soluciones se puede eliminar el parámetro r en el sistema de ecuaciones $V'(r) = 0$ y $V''(r) = 0$, con lo cual se obtiene la identidad $9M^2 = 8Q^2$. Esta relación corresponde al valor de la última órbita circular estable, no el ROME. Mediante la Fig. 3.9, ilustramos el sentido de este significado, esto es, el punto en esta gráfica representa la última órbita circular estable.

Finalmente, el caso de geodésicas temporales se ilustra mediante una gráfica de momentum angular para una órbita circular. Como antes la figura representa la estabilidad y la última órbita circular estable, como ejemplo a ilustrar se consideró la solución de Reissner Nordström, Fig. 3.10. Para terminar el capítulo de Relatividad General encontraremos y analizaremos una nueva familia de discos gruesos relativistas.

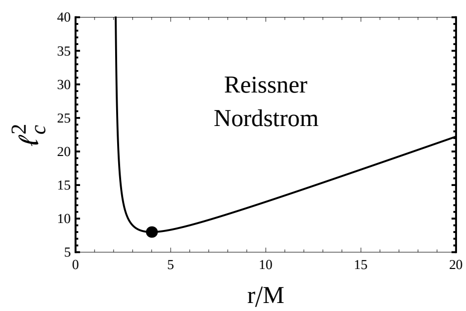


Figura 3.9: Momentum angular de una órbita circular en una espaciotiempo de Reissner Nordström. El punto corresponde al ROME, cuyas coordenadas son $(\ell_c^2, r/M) = (12, 6)$.

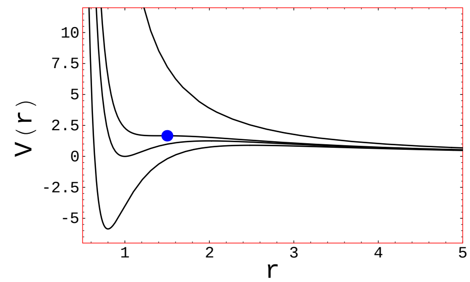


Figura 3.10: Potencial efectivo para la solución Reissner Nordström. El punto corresponde a la última órbita circular estable, y tiene la restricción $9M^2 = 8Q^2$.

SECCIÓN 3.7

Geodésicas Alrededor de Discos Gruesos Relativistas

3.7.1 Una Nueva Familia de Discos Gruesos Relativistas

Para completar el capítulo, se obtiene una nueva familia de soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein que representa el campo gravitacional de un disco grueso. El elemento de línea que define espaciotiempos estáticos y axialmente simétricos se puede escribir en coordenadas cuasi-cilíndricas como [68, 137, 138]

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{-2\Phi}[R^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda}(dr^2 + dz^2)], \tag{3.83}$$

conocido como la métrica de Weyl. En la anterior expresión Φ, Λ, R son funciones de las coordenadas r y z, solamente. El rango de las coordenadas es el intervalo usual de las coordendas cilíndricas, además $-\infty \leq t < \infty$. La métrica anterior (3.83), se reduce al elemento de línea (3.1), cuando $R = r$.

Las ecuaciones de campo de Einstein para el intervalo (3.83), son

$$R_{,rr} + R_{,zz} = 0, \tag{3.84a}$$

$$(R\Phi_{,r})_{,r} + (R\Phi_{,z})_{,z} = 0, \tag{3.84b}$$

$$R_{,z}\Lambda_{r} + R_{,r}\Lambda_{z} - 2R\Lambda_{,r}\Phi_{,z} - R_{,rz} = 0, \tag{3.84c}$$

$$R_{,r}\Lambda_{,r} - R_{,z}\Lambda_{,z} - R(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2) + R_{,zz} = 0. \tag{3.84d}$$

siendo $(\ )_{,\alpha} = \partial/\partial x^{\alpha}$. La primera de estas expresiones es la ecuación de Laplace bidimensional para la función R. De acuerdo con esto, podemos considerar que la función R es la parte real de una función $W(\omega) = R(r,z) + iZ(r,z)$[5]. Es decir, para encontrar los campos consideraremos las transformaciones [42]

$$r \longrightarrow R(r,z), \qquad z \longrightarrow Z(r,z), \tag{3.85}$$

las cuales conllevan a

$$\Phi \longrightarrow \tilde{\Phi} = \Phi, \qquad \Lambda \longrightarrow \tilde{\Lambda} = \Lambda - \ln|dW/d\omega|, \tag{3.86}$$

en donde $W = \omega \pm \alpha\sqrt{\omega^2 - 1}$, además α es una constante positiva.

De acuerdo con lo anterior, la métrica (3.83) toma la forma

$$ds^2 = -e^{2\,\tilde{\Phi}}dt^2 + e^{-2\,\tilde{\Phi}}[R^2 d\varphi^2 + e^{2\tilde{\Lambda}}(dR^2 + dZ^2)], \tag{3.87}$$

y así las ecuaciones de campo se reducen al sistema de ED de Weyl, el cual es [68, 137, 138]:

$$\tilde{\Phi}_{,RR} + \frac{1}{R}\tilde{\Phi}_{,R} + \tilde{\Phi}_{,ZZ} = 0, \tag{3.88}$$

$$\tilde{\Lambda}_{,R} = R\left(\tilde{\Phi}_{,R}^2 - \tilde{\Phi}_{,Z}^2\right), \tag{3.89}$$

$$\tilde{\Lambda}_{,Z} = 2R\,\tilde{\Phi}_{,R}\tilde{\Phi}_{,Z}, \tag{3.90}$$

[5]Las funciones R, Z deben cumplir con las condiciones de Cauchy-Riemann para que la función W sea analítica, estas son

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial z}\ , \qquad \frac{\partial Z}{\partial r} = -\frac{\partial R}{\partial z}\ .$$

para las funciones $\tilde{\Phi}$, y $\tilde{\Lambda}$.

Según esto, a partir de las ecuaciones de Einstein en el vacío correspondiente al elemento de línea de Weyl (3.83), podemos construir modelos de discos gruesos mediante el método de "desplazamiento, corte, llenado y reflexión", usando la transformación $z \to h(z) + b$, donde $h(z)$, podría ser la presentada en las referencias [33, 134]. Las componentes del tensor momentum energía del disco pueden ser calculadas utilizando las ecuaciones de Einstein en la materia, es decir, mediante

$$T_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R, \tag{3.91}$$

escogiendo $c = 8\pi G = 1$.

Por medio de las ecuaciones de Einstein (3.84a), las componentes distintas de cero del tensor T_a^b son

$$\begin{aligned} T_t^t \quad &= \quad \frac{e^{2(\Phi-\Lambda)}}{R} \left\{ [(h')^2 - 1] \left[R \left(\Lambda,_{hh} - 2\Phi,_{hh} - 2\Phi,_h R,_h \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \Phi,_h^2 \right) - R,_{hh} \right] + h'' \left[R(\Lambda,_h - 2\Phi,_h) + R,_h \right] \right\}, \end{aligned} \tag{3.92a}$$

$$T_\varphi^\varphi \quad = \quad e^{2(\Phi-\Lambda)} \left\{ [(h')^2 - 1](\Phi,_h^2 + \Lambda,_{hh}) + h''\Lambda,_h \right\}, \tag{3.92b}$$

$$\begin{aligned} T_r^r \quad &= \quad \frac{e^{2(\Phi-\Lambda)}}{R} \left\{ [(h')^2 - 1](R,_{hh} - R,_h \Lambda,_h + R\Phi,_h^2) \right. \\ &\quad \left. + h'' R,_h \right\}, \end{aligned} \tag{3.92c}$$

$$T_z^z \quad = \quad \frac{e^{2(\Phi-\Lambda)}}{R} \left\{ [(h')^2 - 1](R,_h \Lambda,_h - R\Phi,_h^2) \right\}, \tag{3.92d}$$

válidas en la región $-a \leq z \leq a$, porque fuera de la fuente el tensor cumple $T_a^b = 0$.

Definiendo una tetrada ortonormal $\{V^b, X^b, Y^b, Z^b\}$, siendo

$$V^a = e^{-\Phi}(1,0,0,0) , \tag{3.93a}$$

$$X^a = \frac{e^{\Phi}}{R}(0,1,0,0) , \tag{3.93b}$$

$$Y^a = e^{\Phi-\Lambda}(0,0,1,0) , \tag{3.93c}$$

$$Z^a = e^{\Phi-\Lambda}(0,0,0,1) , \tag{3.93d}$$

podemos reescribir el tensor momentum energía en la forma canónica

$$T_{ab} = \epsilon V_a V_b + P_\varphi X_a X_b + P_r Y_a Y_b + P_z Z_a Z_b . \tag{3.94}$$

Aquí, $\epsilon = -T^t_t$ es la densidad de energía, $P_\varphi = T^\varphi_\varphi$ es la tensión acimutal, $P_r = T^r_r$ es la radial tension y $P_z = T^z_z$ es la presión vertical.

Estos parámetros físicos se relacionan mediante la ecuación $\rho = \epsilon + P_\varphi + P_r + P_z$, que representa la "densidad newtoniana efectiva", la cual está dada por

$$\begin{aligned}\rho = \; & \frac{2e^{2(\Phi-\Lambda)}}{R}\Big\langle R\left\{[(h')^2-1]\Phi_{,hh} + h''\Phi_{,h}\right\} \\ & +[(h')^2-1]\Phi_{,h} R_{,h}\Big\rangle \quad .\end{aligned} \tag{3.95}$$

Esta densidad se denomina densidad newtoniana porque a través de ella se puede enconctrar la masa total de la fuente. Por otra parte, si $\rho \geq 0$ la condición de energía fuerte se cumple, mientras que la condición de energía débil requiere que $\epsilon \geq 0$. La condición de energía dominante es equivalente a la suposición $|\frac{P_\varphi}{\epsilon}| \leq 1$, $|\frac{P_r}{\epsilon}| \leq 1$ y $|\frac{P_z}{\epsilon}| \leq 1$, [50]. A continuación se presentará algunas soluciones que representan discos gruesos, cuyos parámetros se ajustaron de tal forma que se cumpla la condición de energía fuerte, esto es, $\rho \geq 0$.

3.7.2 Disco Grueso tipo solución de Chazy-Curzon

La solución más simple de las ecuaciones de Einstein para el campo exterior de un disco es la correspondiente a la solución de Chazy-Curzon, ésta puede ser escrita [20, 21, 42], como

$$\tilde{\Phi} = -\frac{\gamma}{\sqrt{R^2 + Z^2}}, \qquad \tilde{\Lambda} = -\frac{\gamma^2 R^2}{(R^2 + Z^2)^2}, \tag{3.96}$$

siendo γ una constante real. Para cada uno de los ejemplos expuestos en esta sección consideraremos las siguientes funciones R, Z

$$R(r, z) = -z, \qquad Z(r, z) = r, \tag{3.97}$$

que cumplen con las condiciones de Cauchy Riemann.

Considerando el método de "desplazamiento, corte y reflexión", las expresiones (3.96), de esta simple solución se pueden escribir en la forma

$$\tilde{\Phi}(r, z) = -\frac{\gamma}{\sqrt{r^2 + (h + b)^2}}, \tag{3.98}$$

$$\tilde{\Lambda}(r, z) = -\frac{\gamma^2 (h + b)^2}{(r^2 + (h + b)^2)^2}, \tag{3.99}$$

en donde la función $h = h(z)$, utilizada para analizar el comportamiento de las diferentes cantidades físicas, está dada por

$$h(z) = \begin{cases} z - 2a/\pi \quad , & z \geq a, \\ \frac{2a}{\pi}\left[1 - \cos\left(\frac{2az}{\pi}\right)\right] \quad , & -a \leq z \leq a, \\ -z - 2a/\pi \quad , & z \leq -a. \end{cases} \tag{3.100}$$

Nótese que la función $h(z)$, genera el disco localizado en la región $-a \leq z \leq a$, ver referencias [42, 134]. En las figuras 3.11 se puede apreciar un bosquejo de la función $h(z)$ y sus derivadas.

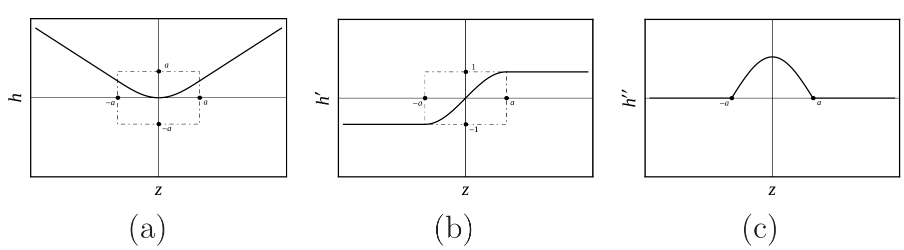
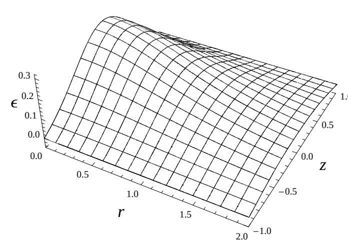
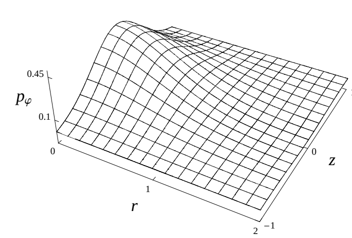


Figura 3.11: (a) Función $h(z)$. (b) Primera derivada de $h(z)$. (c) Función $h''(z)$.

Ahora bien, como no fue posible determinar intervalos analíticos que cumplan con todas las condiciones de energía, vamos a utilizar algunos valores que cumplan con algunas de las propiedades. Así, en las figuras (3.12 - 3.14), se exhiben los comportamientos de las propiedades físicas para el Disco Grueso Tipo Chazy-Curzon, en donde los parámetros utilizados para realizar estas gráficas son: $\gamma = 1$, $b = 2$, $a = 1$. Se puede observar que las cantidades son cero fuera del disco, esto es, $z = \pm a$. El comportamiento de la Densidad de Energía (figura 3.12(a)), la Tensión Acimutal (figura 3.12(b)), y la Densidad Newtoniana (figura 3.14) son similares: tienen un valor máximo en el centro del disco $z = 0$, y decrecen monótonamente a medida que r crece. Por el contrario, la Tensión Radial y la Presión Vertical son negativas, figuras 3.13, ellas tiene un mínimo en el centro y luego crecen según aumenta r. Para estos valores de los parámetros las condiciones de energía fuerte y débil se satisfacen, pues $\rho \approx 0{,}8$, $\epsilon \approx 0{,}3$. Algunas de las condiciones de energía dominante no se satisfacen porque $P_\varphi \approx 0{,}45$, $P_r \approx -2$, $P_z \approx 0{,}45$, luego $|P_\varphi/\epsilon| \approx 1{,}5$ (no se cumple), $|P_r/\epsilon| \approx 6{,}6$ (no se cumple), y $|P_z/\epsilon| \approx 0{,}13$ (se cumple).

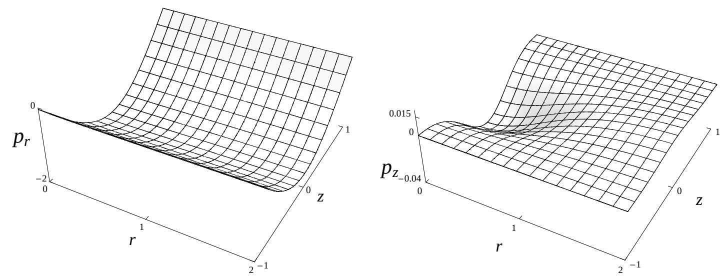


(a)



(b)

Figura 3.12: (a) Densidad de Energía. (b) Presión Acimutal. Para el Disco Grueso tipo Chazy Curzon. Los parámetros utilizados son $a = 1$, $\gamma = 1$, y $b = 2$.



(a) (b)

Figura 3.13: (a) Tensión Radial. (b) Presión Vertical, para el Disco Grueso tipo Chazy Curzon. Los parámetros usados son $a = 1$, $\gamma = 1$, y $b = 2$.

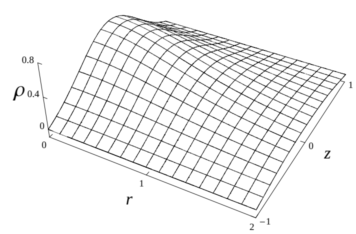


Figura 3.14: Densidad Newtoniana para el Disco Grueso tipo Chazy Curzon. Los parámetros utilizados son $a = 1$, $\gamma = 1$, y $b = 2$.

3.7.3 Disco Grueso tipo Bonnor-Sackfield

Esta segunda solución se obtiene escogiendo $0 < \alpha < 1$, y eligiendo la primera solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas (x, y), en cuyo caso la solución está dada por [42]

$$\tilde{\Phi} = -\gamma \cot^{-1} x, \qquad \tilde{\Lambda} = -\gamma^2 \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + y^2} \tag{3.101}$$

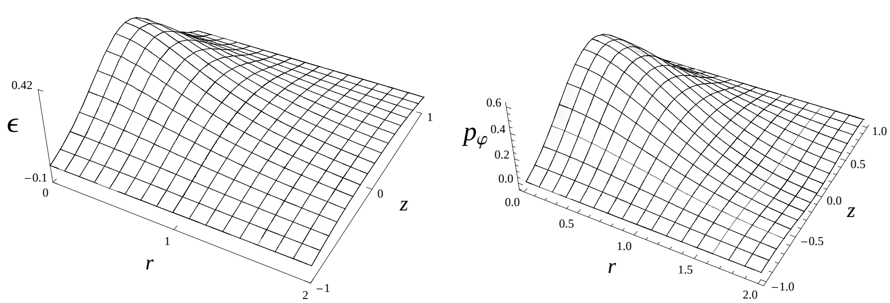
siendo γ una constante real. Las anteriores funciones métricas son continuas en el disco y se anulan en el infinito. La solución (3.101), fue encontrada por Zipoy [140] y Voorhees [135], e interpretada por Bonnor y Sackfield [12] como el campo gravitacional de un disco estático sin presión.

Las coordenadas de Weyl (R, Z), están relacionadas con las coordenadas esferoidales oblatas mediante la transformación

$$R^2 = \beta^2(x^2+1)(1-y^2), \qquad Z = \beta xy, \tag{3.102}$$

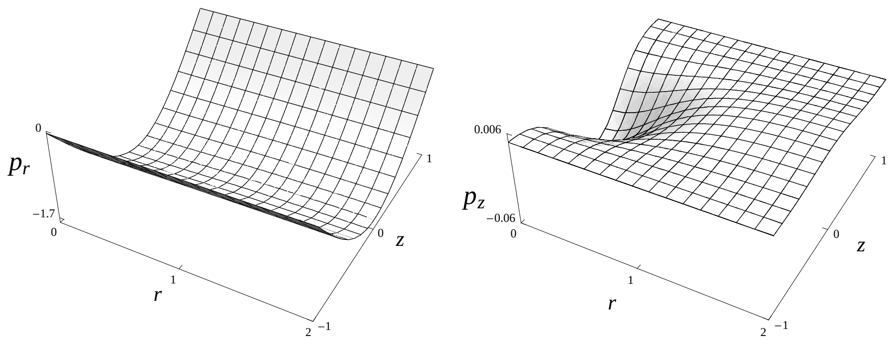
donde $\beta = \sqrt{1-\alpha^2}$, $0 \leq x < \infty$ y $0 \leq y \leq 1$.

Otra vez, no fue posible determinar intervalos analíticos que cumplan con todas las condiciones de energía. Por lo tanto, se utilizó algunos valores que cumplan con algunas de las propiedades físicas. En las figuras (3.15 - 3.17), se aprecian los comportamientos de las propiedades físicas para el Disco Grueso Tipo Bonnor-Sackfield, en donde los parámetros considerados para realizar las gráficas fueron: $\gamma = 1$, $b = 2$, $a = 1$. La Densidad de Energía (figura 3.12(a)), la Tensión Acimutal (figura 3.15(b)), y la Densidad Newtoniana (figura 3.17) presentan comportamiento similar: tienen un valor máximo en el centro del disco $z = 0$, y decrecen monótonamente a medida que r crece. En cambio, la Tensión Radial y la Presión Vertical son negativas, ellas tiene un mínimo en el centro y luego crecen según aumenta r, ver figuras 3.16. Para estos valores de los parámetros las condiciones de energía fuerte y débil se satisfacen, ya que $\epsilon \approx 0{,}42$, $\rho \approx 0{,}3$. Algunas de las condiciones de energía dominante no se cumplen pues $P_\varphi \approx 0{,}6$, $P_r \approx -1{,}7$, $P_z \approx -0{,}05$, por consiguiente $|P_z/\epsilon| \approx 0{,}13$ se cumple, mientras que $|P_r/\epsilon| \approx 4{,}05$, y $|P_\varphi/\epsilon| \approx 1{,}42$, no se cumplen.



(a) (b)

Figura 3.15: (a) Densidad de Energía. (b) Presión Acimutal, para el Disco Grueso tipo Bonnor-Sackfield. Los parámetros usados son $a = 1$, $\gamma = 1$, y $b = 2$.



(a) (b)

Figura 3.16: (a) Tensión Radial. (b) Presión Vertical, para el Disco Grueso tipo Bonnor-Sackfield, los parámetros escogidos son $a = 1$, $\gamma = 1$, y $b = 2$.

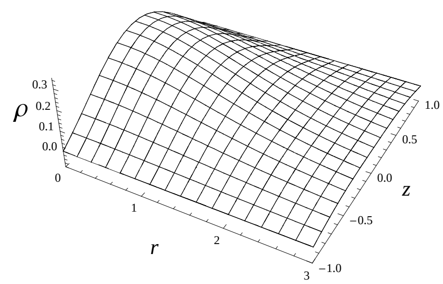


Figura 3.17: Densidad Newtoniana para el Disco Grueso tipo Bonnor-Sackfield. Los parámetros utilizados son $a = 1$, $\gamma = 1$, y $b = 2$.

3.7.4 Disco Grueso tipo solución de Zipoy-Voorhees

La tercera familia de soluciones es la correspondiente a Zipoy-Voorhees [140, 135], la cual se obtiene considerando la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales prolatas (u, v), además de $\alpha > 1$. En esta ocasión las coordenadas de Weyl se relacionan con las prolatas a través de las ecuaciones

$$R^2 = \beta^2(u^2 - 1)(1 - v^2), \qquad Z = \beta uv, \tag{3.103}$$

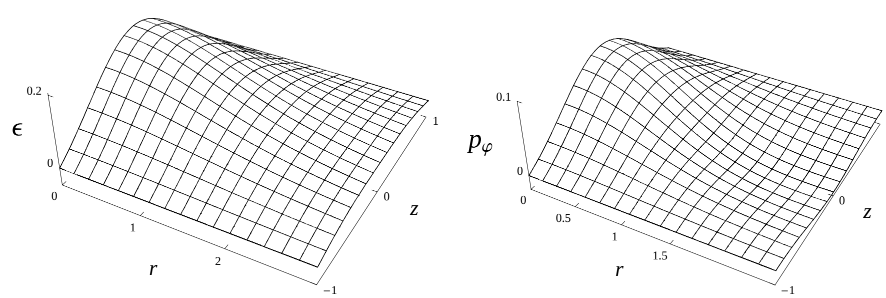
siendo $\beta = \sqrt{\alpha^2 - 1}$, $1 \leq u < \infty$, y $0 \leq y \leq 1$.

La solución de Zipoy-Voorhees [140, 135], también conocida como la solución γ - Weyl [137, 138], está dada por [42]

$$\tilde{\Phi} = \gamma \ln \frac{u-1}{u+1}, \qquad \tilde{\Lambda} = \gamma^2 \ln \frac{u^2-1}{u^2-v^2}. \tag{3.104}$$

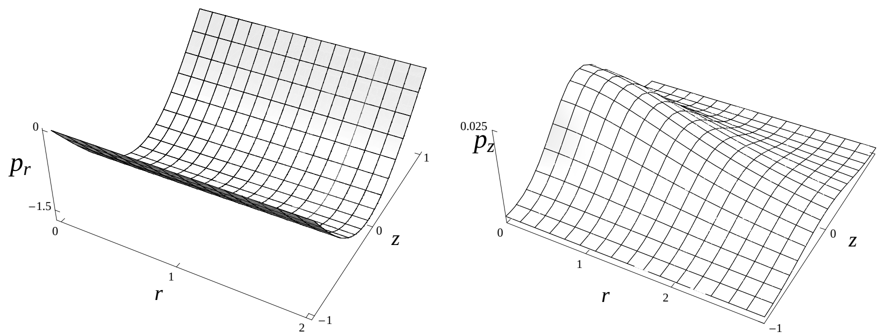
siendo γ una constante real.

Nuevamente no se pueden determinar intervalos analíticos que cumplan con todas las condiciones de energía. De tal forma que se considera algunos valores que cumplan con las condiciones de energía fuerte y débil. En las figuras (3.18 - 3.20), se exhiben los comportamientos de las propiedades físicas para el Disco Grueso Tipo Zipoy-Voorhees, en donde los parámetros usados para bosquejar estas gráficas son: $\gamma = 1$, $b = 2$, $a = 1$. El comportamiento de la Densidad de Energía (figura 3.18(a)), la Tensión Acimutal (figura 3.18(b)), y la Densidad Newtoniana (figura 3.20) son similares: otra vez, tienen un valor máximo en el centro del disco $z = 0$, y decrecen monótonamente a medida que r crece. Mientras que la Tensión Radial y la Presión Vertical son negativas, ellas tiene un mínimo en el centro y luego crecen según aumenta r, figuras (3.19). Para estos valores de los parámetros las condiciones de energía fuerte y débil se satisfacen, pues $\rho \approx 0{,}4$, $\epsilon \approx 0{,}2$. Una de las condiciones de energía dominante no se cumplen debido a que $P_\varphi \approx 0{,}1$, $P_r \approx -1{,}5$, $P_z \approx 0{,}028$, por lo tanto $|P_\varphi/\epsilon| \approx 0{,}5$ (se cumple), $|P_r/\epsilon| \approx 7{,}5$ (no se cumple), y $|P_z/\epsilon| \approx 0{,}14$ (se cumple).



(a) (b)

Figura 3.18: (a) Densidad de Energía. (b) Presión Acimutal, para el Disco Grueso tipo Zipoy-Voorhees. Los parámetros usados son $a = 1$, $\gamma = 1$, y $b = 2$.



(a) (b)

Figura 3.19: (a) Tensión Radial. (b) Presión Vertical, para el Disco Grueso tipo Zipoy-Voorhees. Los parámetros utilizados son $a = 1$, $\gamma = 1$, y $b = 2$.

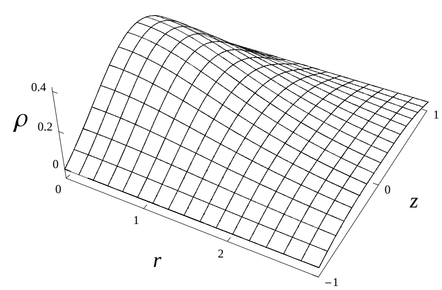


Figura 3.20: Densidad Newtoniana para el Disco Grueso tipo Zipoy-Voorhees. Los parámetros esgocidos son $a = 1$, $\gamma = 1$, y $b = 2$.

3.7.5 Ecuaciones de Movimiento

Esta vez las géodesicas se determinarán encontrando las soluciones al sistema de ecuaciones de movimiento que resulta a través de las ecuaciones de Hamilton, dadas por

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_a}, \qquad \dot{x}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_a}, \tag{3.105}$$

siendo p_a los momentos canónicos y $\mathcal{H}$ el hamiltoniano correspondiente al elemento de línea utilizado para encontrar las soluciones que corresponden a discos gruesos (3.83).

Al estudiar el comportamiento de partículas de prueba a través de sus trayectorias se encuentra, como lo hemos demostrado, que el análisis se reduce a un plano en dos dimensiones (plano meridional), esto debido a la simetría de los campos que se están considerando, estáticos y axiales. Las cantidades conservadas a través de tiempo otra vez son

$$\ell = R^2 \dot{\varphi} e^{2\Phi}, \qquad E = \dot{t} e^{2\Phi}. \tag{3.106}$$

donde ℓ es el momentum angular específico y E es la energía específica de la partícula, ambas medidas por un observador en el infinito. Estas cantidades se pueden determinar mediante la formulación lagrangiana o hamiltoniana, en cualquier caso no dependen de las coordenadas t y φ, por lo que los momentos canónicos repecto a estas coordenadas cíclicas son constantes.

De otra parte, existe otra cantidad constante relacionada mediante la expresión

$$2\mathcal{H} = -E^2 e^{-2\Phi} + \frac{R^2 \ell^2}{r^4} e^{2\Phi} + e^{2(\Lambda - \Phi)}(p_r^2 + p_z^2), \tag{3.107}$$

siendo $2\mathcal{H} = -1$, para geodésicas tipo tiempo y $2\mathcal{H} = 0$, para geodésicas tipo espacio. En el anterior hamiltoniano el movimiento se reduce al movimiento en un plano (r, z), pues la ecuación (3.107), se puede reescribir, para comparar con una energía efectiva, de la forma

$$E^2 = U(r, z) + T(r, z),$$

donde U y T representan el potencial efectivo y el término relacionado con la parte cinética, respectivamente. Según esto, las ecuaciones serán

$$U(r, z) = e^{2\Phi} \left(-2\mathcal{H} + \frac{R^2 \ell^2}{r^4} e^{2\Phi} \right), \tag{3.108}$$

$$T(r, z) = e^{2(\Lambda - \Phi)}(p_r^2 + p_z^2). \tag{3.109}$$

Nótese que la órbita esta restringida al área del plano (r, z) que cumple con la desigualdad $U \leq E^2$.

Las soluciones del sistema de EDS de movimiento (3.105) pueden encontrarse dadas las constanes E, ℓ, $\mathcal{H}$ y las condiciones iniciales $r(t = 0) = r_0$, $z(t = 0) = z_0$, $p_r(t = 0) = \dot{r}_0$ y $p_z(0) = \dot{z}_0$. La condición inicial para la velocidad vertical $\dot{z}_0$ esta determinada por la expresión (3.107), en cambio r_0 y z_0 están restridas por la desigualdad $U \leq E^2$, por consiguiente el único parámetro libre es $\dot{r}_0$. A continuación se describen algunas trayectorias obtenidas a partir de considerar las soluciones presentadas en las secciones anteriores correspondientes a los discos gruesos tipo Chazy-Curzon, Zipoy-Voorhees y Bonnor-Sackfield.

En las figuras (3.21-3.22) se exhiben las trayectorias correspondientes al Disco Grueso Tipo Bonnor Sackfield, en donde los parámetros usados son los asignados en las gráficas (3.15-3.17). Las condiciones iniciales escogidas para las figuras regulares (3.21) son $z(0) = 0{,}1$, $r(0) = 0{,}8$, $p_r(0) = 0$, $p_z(0) \approx 0{,}5127$, además $\ell = 0{,}2$. La figura (3.21(b)) en una órbita en el espacio de fásico $(r, p_r = \dot{r}, z)$, cuya proyección en el plano meridional es la trayectoria (3.21(a)); la curva a trazos es el contorno de energía, su valor es $E^2 = 0{,}45$. Las figuras (3.22) también corresponden a comportamiento regular en el interior del Disco Grueso Tipo Bonnor Sackfield, en donde las condiciones iniciales se cambiaron a $z(0) = 0$, $r(0) = 0{,}8$, $p_r(0) = 0$, $p_z(0) \approx 0{,}0672$ y el momentum angular ahora es $\ell = 0{,}25$. La figura (3.22(a)) es la proyección el espacio de fase $(r, p_r = \dot{r}, z)$ 3.22(b). La curva a trazos en (3.22) es el contorno de energía, su valor es $E^2 = 0{,}45$

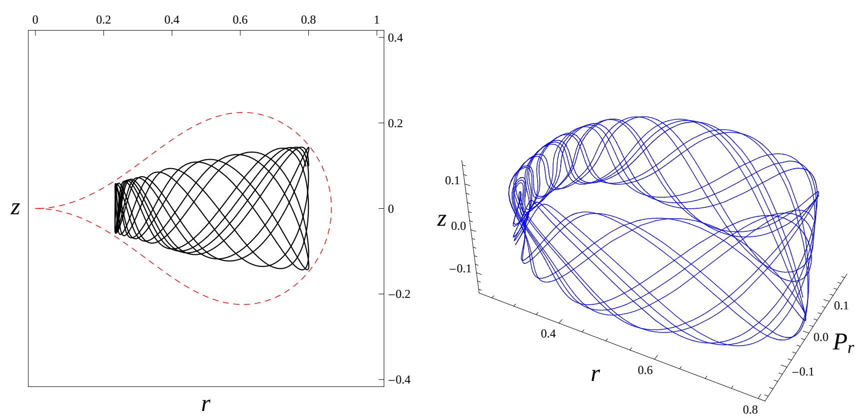


Figura 3.21: (a) Órbita en el plano meridional, la línea punteada corresponde al contorno de energía $E^2 = 0{,}45$, (b) Órbita en el espacio de fase $(r, p_r = \dot{r}, z)$, para el disco de Bonnor-Sackfield. Las condiciones iniciales escogidas son $z(0) = 0{,}1$, $r(0) = 0{,}8$, $p_r(0) = 0$, $p_z(0) \approx 0{,}5127$. El momentum angular escogido es $\ell = 0{,}2$, y los parámetros usados son los correspondientes a las figuras 3.15-3.17.

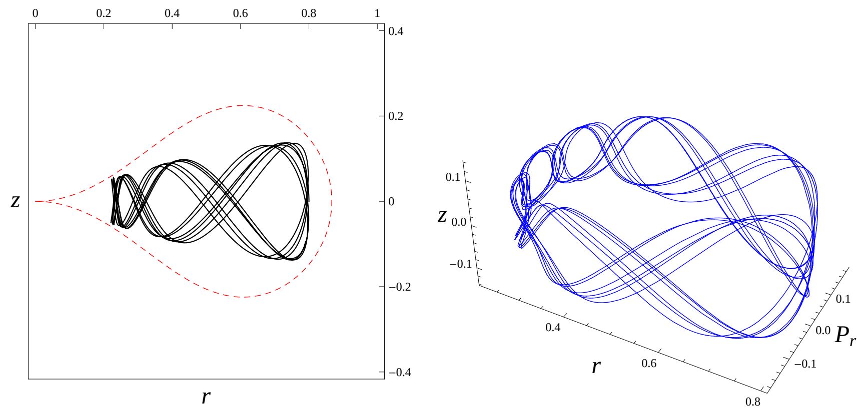


Figura 3.22: (a) Órbita en el plano meridional, la línea punteada corresponde al contorno de energía $E^2 = 0{,}45$, (b) Órbita en el espacio de fase $(r, p_r = \dot{r}, z)$, para el disco de Bonnor-Sackfield. Las condiciones iniciales utilizadas son $z(0) = 0$, $r(0) = 0{,}8$, $p_r(0) = 0$, $p_z(0) \approx 0{,}0672$. El momentum angular escogido es $\ell = 0{,}25$, y los parámetros seleccionados son los asignados a las figuras (3.15-3.17).

En el caso del Disco Grueso Tipo Chazy-Curzon se encontró comportamiento caótico, parece que el punto de silla se encuentra próximo a $z = 0{,}1$, con energía $E^2 = 0{,}4$ y momentum angular $\ell = 0{,}2$. La figura 3.23(a) presenta un comportamiento regular, las condiciones iniciales elegidas son $p_r(0) = 0$, $z(0) = 0{,}11$, $r(0) = 0{,}8$, $p_z(0) \approx 0{,}426$. Mientras que, la figura (3.23(b)) presenta un comportamiento caótico porque la trayectoria cubre ergódicamete el espacio, así que no es posible encontrar una relación racional entre las frecuencias ω_r/ω_z. Las condiciones iniciales elegidas para la figura (3.23(b)) son $p_r(0) = 0$, $z(0) = 0{,}1$, $r(0) = 0{,}8$, $p_z(0) \approx 0{,}445$. De acuerdo con las dos trayectorias se infiere que existe un punto de silla entre $0{,}11 < z < 0{,}1$, pues la órbita pasa de ser regular a caótica en ese rango.

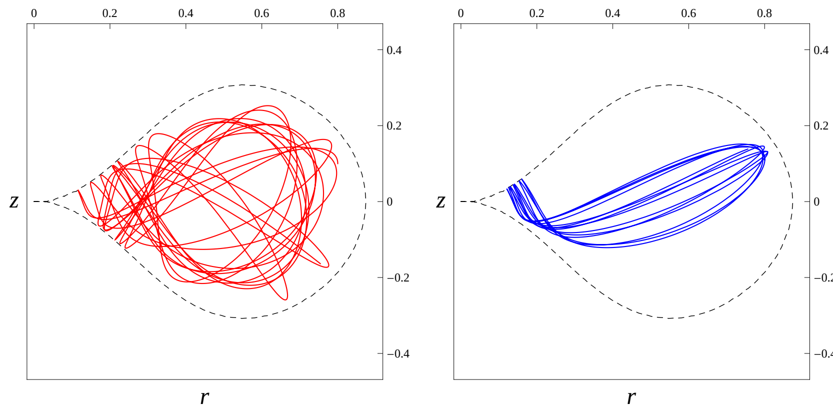


Figura 3.23: Órbitas en el plano meridional, la línea punteada corresponde al contorno de energía $E^2 = 0{,}4$. El momentum angular escogido es $\ell = 0{,}2$, y los parámetros usados son los correspondientes a las figuras (3.12-3.14). Las condiciones iniciales utilizadas son $p_r(0) = 0$, $r(0) = 0{,}8$, en (a) $z(0) = 0{,}11$, $p_z(0) \approx 0{,}426$, y la órbita regular. En (b) $z(0) = 0{,}1$, $p_z(0) \approx 0{,}445$, y la órbita es caótica. Las dos trayectorias corresponden al Disco Grueso Tipo Chazy-Curzon.

Finalmente, se observó comportamientos regulares para el Disco Grueso Tipo Zipoy-Voorhees: las figuras 3.24 presentan esta conducta. Las condiciones iniciales escogidas para realizar las gráficas son $p_r(0) = 0$, en (a) $r(0) = 0{,}5$, $z(0) = 0{,}35$, $p_z(0) \approx 0{,}2877$, en (b) $r(0) = 0{,}8$, $z(0) = 0{,}25$, $p_z(0) \approx 0{,}0178$. La figura (3.24(a)) es una órbita tipo caja, mientras que la figura (3.24(b)) tiene la relació $\omega_z/\omega_r = 7/2$. Por lo tanto, las dos trayectorias son regulares para los valores $E^2 = 0{,}17$, y $\ell = 0{,}2$.

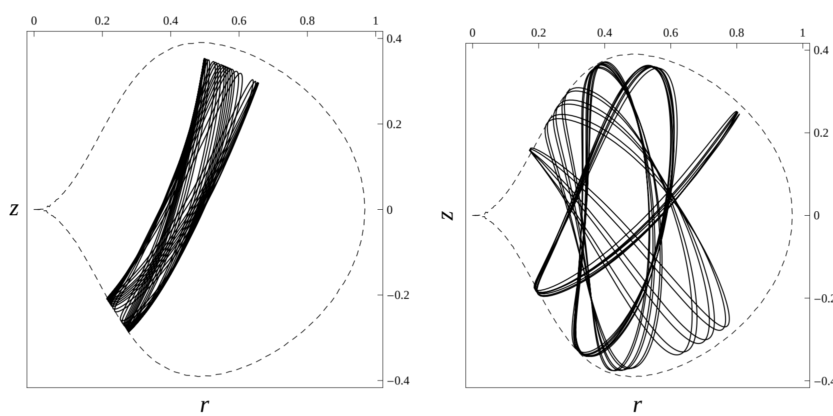


Figura 3.24: Órbitas en el plano meridional correspondientes al Disco Grueso Tipo Zipoy-Voorhees, la línea punteada corresponde al contorno de energía $E^2 = 0{,}17$. El momentum angular escogido es $\ell = 0{,}2$, y los parámetros usados son los correspondientes a las figuras (3.18-3.20). Las condiciones iniciales seleccionadas son $p_r(0) = 0$, en (a) $r(0) = 0{,}5$, $z(0) = 0{,}35$, $p_z(0) \approx 0{,}2877$, y en (b) $r(0) = 0{,}8$, $z(0) = 0{,}25$, $p_z(0) \approx 0{,}0178$.

CONCLUSIONES

Se presentó un análisis detallado de la estabilidad de los campos gravitatorios estáticos y axialmente simétricos, desde el punto de vista de la Gravitación Newtoniana y de la Relatividad General. Se consideró el modelo más general del campo gravitatorio, mostrándose en los dos casos que, dada la naturaleza de los campos, existen dos cantidades conservadas, asociadas con las dos coordenadas cíclicas, la coordenada acimutal, y el tiempo, t. Este hecho, como se mencionó, hace que la cinemática de partículas de prueba se reduzca siempre a un problema bidimensional (plano meridional), el que se puede tratar a través de un potencial equivalente (potencial efectivo). Además se encontró expresiones generales que permiten estudiar órbitas circulares en el plano de la fuente, como el ROME. Se determinó los criterios de estabilidad ante perturbaciones radiales y verticales, específicamente se mostró que la estabilidad de órbitas circulares se puede analizar mediante el momentum angular de la partícula, el cual es totalmente equivalente al criterio de Rayleigh. En el caso especial de Relatividad General se determinó una expresión simple para encontrar el radio de la trayectoria circular de fotones, entre otras relaciones.

En consecuencia, consideramos que el presente trabajo es una base para posibles investigaciones en campos axialsimétricos en Mecánica newtoniana o relativista, por ejemplo, dinámica de partículas desde el punto de vista de la aproximación postnewtoniana de primer orden (1PN), dinámica de partículas de prueba cargadas (caso estático), órbitas considerando sólo Relatividad Especial, trayectoria de partículas de prueba en campos estacionarios en Relatividad General, trayectoria de partículas (cargadas y neutras) que caen libremente en campos electromagnéticos, influencia del término hexadecapolo en el espacio de fase en campos gravitatorios estáticos (Gravedad newtoniana, 1PN, Relatividad Especial), ROME en campos electromagnéticos, etc. Luego se podría considerar todos los anteriores trabajos en campos estáticos, pero no axialmente simétricos, es decir, con una sola integral de movimiento, la energía de la partícula.

Esta investigación en algunos campos específicos produjo los siguientes resultados:

- En la sección 2.5.1 [98], en lo que respecta al movimiento de partículas alrededor de los DGK, un hecho notable, sugerido por el análisis, es que la estabilidad de las órbitas circulares bajo perturbaciones radial y vertical aumenta con el parámetro m (para $m \geq 2$), esto es, a medida que m crece, los modelos son más estables, cuando se trata de órbitas circulares. Otro hecho importante es que el rango de momentum angular para el que podemos encontrar movimiento acotado está dentro del disco, disminuye con m. Por lo tanto, en términos generales, cada vez más modelos estables tienen menos posibilidades y menos para mantener sus partículas dentro del disco. Estas consideraciones tienen especial relevancia en la búsqueda de funciones de distribución de equilibrio que caracterizan las galaxias discoidales.

  Los cálculos numéricos confirman el análisis realizado por Hunter acerca de las órbitas que cruzan el disco. Existe un movimiento caótico inducido por la presencia del disco y, a pesar que las versiones actuales del teorema de KAM no se aplican (por la discontinuidad el campo de fuerza), también hay una importante gama de órbitas regulares. Además, dado que en nuestro caso nos ocupamos de modelos de disco finito, una distinción entre las partículas que crucen el disco y no, a veces es necesaria. En el último caso no encontramos movimiento caótico, incluso en condiciones extremas en los que los puntos de silla se encuentran fuera de la fuente del campo, y el disco y el exterior de él, están conectadas (figuras 2.9).

- Sección 2.5.2. Contrariamente a las declaraciones hechas por Gueron y Letelier [45,46], quienes encontraron evidencias numéricas de un movimiento caótico alrededor de un monopolo más cuadrupolo achatado, ellos señalaron que los puntos de silla están dados por $R = \sqrt{(3\beta - 1\ell^2)/2\alpha}$, $z = 0$, junto con las condiciones $\ell^2 < 3\beta$, y $3\ell^2 > \sqrt{2\alpha/3}$. En consecuencia, declararon que las órbitas irregulares son posibles sólo con deformación prolata, $\beta > 0$. Sin embargo, se muestra aquí que esto no es cierto [72], debido a que algunos expresiones se han corregido, es decir, las ecuaciones, (2.50) y (2.53), que permiten la existencia de órbitas caóticas alrededor de un sistema de M + OQ. Las superficies de sección revelan la existencia de zonas estocásticas (en el espacio de fase) de tamaño muy pequeño, tal vez esto dificultó su descubrimiento (Fig. 2.13(b)). Se señala acá que la irregularidad del movimiento alrededor de M + OQ es significativo para los organismos que $\mid J_2 \mid > 2/3$, como galaxias axialsimétricas, por ejemplo.

También se consideró en esta sección, el caso correspondiente a la interacción de un núcleo (átomo) con una partícula de prueba externa. Normalmente esto se modela a través de un potencial esferoidal (SP) y el movimiento caótico sólo es posible por la introducción de nuevos términos multipolares (octopolar, hexadecapolo, etc) [53, 54]. Sin embargo, se presentó aquí un modelo alternativo, denominado OHI + OQ, que admite órbitas caóticas sin tener en cuenta los términos adicionales multipolares (Fig. 2.14). Este hecho sugiere que el estudio de la mecánica cuántica podría revelar una modificación no trivial en la descripción del espectro de una partícula, en relación con los resultados obtenidos con el SP. Mientras que en el caso SP hay estructura de cáscara para cualquier deformación oblata (o alargada), el modelo OHI + OQ tiene las restricciones: de acuerdo con (2.55), en el caso prolato $0 \geq \chi \geq 0{,}26206$, donde χ, está definido a través de (2.55). En el caso prolato ($\beta > 0$), la condición para los puntos de silla es $0 \geq \chi \geq 0{,}51017$, lo que significa que podemos esperar estructura alargada cuando $\chi > 0{,}51017$. Nótese que exite un rango de inestabilidad entre las dos deformaciones, $0{,}26206 \geq \chi \geq 0{,}51017$. Sería interesante investigar si existe alguna relación entre dicho rango y el fenómeno de transición de deformaciones alargada a achatada, para ciertos valores del momento angular [124].

- Como se demostró, desde el punto de vista clásico (sección 2.5.3), la deformación octopolar de objetos astrofísicos puede introducir modificaciones importantes en la estructura del espacio de fase correspondiente a partículas de prueba que se mueven alrededor de centros de atracción con deformación alargada o achatada [34]. Aparte de un aumento en el caoticidad, la aparición de toroides deformados en las regiones regulares es un notable efecto causado por la asimetría de la fuente con respecto a su plano ecuatorial. Una asimetría ecuatorial más grande implica más curvas torcidas de KAM y regiones estocásticas más prominentes en el espacio fásico (Figs. 2.18 y 2.20). Este hecho tiene consecuencias dramáticas en el caso de los fuentes con deformación oblata, que normalmente se asocian con movimiento regular. Aquí, el caos surge una vez que se encienda el momento octopolar (Fig. 2.16). Los resultados aquí obtenidos son la generalización, para el caso de la gravedad de Newton, además de los obtenidos anteriormente por [53] y [74] para osciladores armónicos. La influencia del siguiente término de la expansión multipolar del potencial gravitacional, suponemos que distorsionaría el espacio de fase, debido a la inclusión de otro parámetro, sin embargo el análisis del apagado y encendido del término hexadecapolo lo dejaremos para investigaciones futuras.

- Para terminar el capítulo 2 (sección 2.5.4), se realizó un estudio de la estabilidad en las galaxias NGC 3877, y NGC 3917 [38], esto de acuerdo con un modelo contruido por [41]. Los autores muestran que las galaxias son estables ante perturbaciones radiales de su radio, mediante el bosquejo de las frecuencias epíclicas de cada modelo. Para estas galaxias discoidales se mostró mediante el análisis del momentum angular que efectivamente los campos son estables (Figs. 2.21 y 2.22). Por otra parte, no se realizó un estudio de las trayectorias en el plano meridional, o en el espacio de fase. Nosotros consideramos que se puede presentar regiones estocásticas en los modelos debido a las gráficas presentadas por los autores de las frecuencias verticales. Valdría la pena realizar el estudio fuera del plano de la fuente para determinar las posibles zonas de inestabilidad de cada galaxia, además podría considerarse ampliar a nuevos modelos de galaxia según el procedimiento presentado en la sección, y en la referencia [41].

- En Relatividad General, sección 3.5, se realizó un análisis detallado del movimiento de partículas que caen libremente en soluciones axiales y simétricas, en coordenadadas cilíndricas, prolatas y oblatas. Las funciones métricas consideradas son soluciones del sistema de EDS de Weyl. Un hecho particular que se demostró, es que todas las soluciones presentan un radio de inestabilidad en el caso de trayectorias circulares de rayos de luz. En coordenadas cilíndricas se analizó la solución de Chazy-Curzon: en la solución se encontró que, para partículas masivas las trayectorias en el plano ecuatorial pueden ser abiertas, cerrada, y acotadas (Figs. 3.2 y 3.3). Luego en coordenadas oblatas se estudió el segundo miembro de la familia de discos de Morgan y Morgan: nuevamente se encontró los tres tipos de movimientos para partículas masivas (Figs. 3.5 y 3.6). Finalmente, en coordenas prolatas, se presentó una comparación entre las soluciones de Schwarzschild, y Erez-Rosen. Para el caso de Erez-Rosen se descubrió el rango de inestabilidad, además del valor de ROME, Fig. 3.7. Para cada modelo se encontró que no existe un ROME para los rayos de luz, en contraste con las partículas masivas [36]. Podría ser interesante estudiar la influencia de la inclusión del siguiente término de la expansión, el relacionado con el momento hexadecapolar.

- En la sección 3.6. se amplió el estudio a fuentes estáticas con simetría esférica [39], considerando las soluciones de Schwarzschild, Schwarzschild De Sitter, De Sitter, Schwarzschild Anti De-Sitter, Anti De-Sitter, Reissner-Nordström, Reissner-Nordström De Sitter, y Reissner-Nordström Anti De Sitter. Dos hechos trascendentes se pueden subrayar en esta sección, el primero de ellos es que los campos de Schwarzschild, Schwarzschild De Sitter, De Sitter, Schwarzschild Anti De-Sitter, y Anti De-Sitter conciden en el radio de las órbitas circulares para rayos luminosos, esto es, $r = 3M$. Recuérdese que en $r = 3M$, se encuentra un mínimo del potencial efectivo y que por lo tanto éste es inestable. Segundo, examinando sólo rayos de luz, no se pudo determinar en estas soluciones el ROME, pués no se lográ encontrar una ecuación para estos radios. Análogamente, se consiguió las dos conclusiones investigando los espaciotiempos de Reissner-Nordström, Reissner-Nordström De Sitter, y Reissner-Nordström Anti De Sitter. Además se notó que el ROME de las tres métricas coincide en $9M^2 = 8Q^2$, ver Fig.3.10. De acuerdo con esto, la constante cosmológicas no juega ningún papel en la dinámica de partículas de prueba en el caso de rayos de luz en todas las soluciones estudiadas. A futuro se podría realizar una investigación examinando la influencia de la constante cosmológica en la cinemática de partículas de prueba masivas en los campos mencionados.

- Sección 3.7. Se presentó una nueva familia de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que representan discos gruesos [37]. Se encontró esta solución a través del procedimiento inverso y del método de "desplazamiento, corte, llenado y reflexión". Además una nueva función de llenado se propone en esta sección (Fig. 3.11). Particularizamos el modelo a algunas soluciones conocidas, de esta forma se encontró nuevas soluciones para discos gruesos tipo Chazy-Curzon, Bonnor-Sackfield y Zipoy-Voorhees.

  Para cada modelo se realizó el análisis correspondiente de las cantidades físicas, tales como densidad de energía, tensión acimutal, tensión radial, presión vertical, y densidad newtoniana. Los parámetros de las soluciones se ajustaron de forma que la densidad newtoniana es positiva, Chazy-Curzon (Fig. 3.14), Bonnor-Sackfield (Fig. 3.17), y Zipoy-Voorhees (Fig. 3.20). Adicionalmente se calculó algunas trayectorias para cada familia de disco grueso, en particular se encontró comportamiento caótico en el Disco Grueso Tipo Chazy-Curzon (Fig. 3.23(b)), los demás discos son estables considerando los parámetros escogidos, Figs. 3.21-3.22 (Bonnor-Sackfield), Figs. 3.24 (Zipoy-Voorhees). La familia de soluciones presentada en esta sección generaliza las soluciones propuestas en [33, 134]. Esperamos ampliar este estudio a nuevas soluciones discoidales, por ejemplo, seleccionando otras transformaciones que satisfagan las condiciones de Cauchy-Riemann.

En suma, los principales resultados obtenidos en el marco del desarrollo de esta Tesis se han divulgado a través de una serie de artículos internacionales y ponencias, los cuales se detallan a continuación:

- PONENCIA. XXIV Congreso Nacional de Física. Título: Una Nueva Familia de Discos con un Hueco Central. Octubre 2011. Bogotá, Colombia.
- PONENCIA. XXIV Congreso Nacional de Física. Título: Líneas de Campo Gravitacional para Campos Estáticos y Axialmente Simétricos, Octubre 2011. Bogotá, Colombia.
- ARTÍCULO. Chaotic motion in axially symmetric potentials with oblate quadrupole deformation. *Phys. Lett. A*, 375:3655, 2011, [72].
- ARTÍCULO. Stability in galaxies NGC 3877, NGC 3917. *Artículo en Preparación, 2011*, [38].
- ARTÍCULO. Geodesic in static spherically symmetric gravitational field. *Artículo en Preparación, 2011*, [39] .
- ARTÍCULO. A New Exact Solutions for Relativistic Thick Disk. *Artículo en Preparación, 2011*, [37]
- ARTÍCULO. Geodesics around Weyl solutions in the equatorial plane. *Summited to Internat. J. Theoret. Phys.*, [36].
- ARTÍCULO. Chaotic and Regular Motion Around Objects with Quadrupolar and Octupolar Deformation. *Summited to J. Astrophys. & Astron.* [34].
- ARTÍCULO. Timelike and null equatorial geodesics in the Bonnor-Sackfield relativistic disk. *Revista Integración.* Aprobado en espera de paginación, 2011, [35].
- PONENCIA. Tercera Reunión Colombo-Venezolana de Relatividad y Gravitación. Título: Efecto de la Curvatura Gaussiana en la estabilidad de Campos Gravitacionales Estáticos y Axialmente Simétricos. Noviembre 2010. Curiti, Colombia.

- PONENCIA. Tercera Reunión Colombo-Venezolana de Relatividad y Gravitación. Título: Discos Gruesos Newtonianos con Momentos Multipolares. Noviembre 2010. Curiti, Colombia.
- CURSO. Perfeccionamiento docente. Título: Manejo del software Mathematica. Marzo 2008. Socorro, Colombia.
- ARTÍCULO. Chaotic and regular motion around generalized Kalnajs discs. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 371:1873, 2008 [98].
- CURSO. VI Simposio Nororiental de Matemáticas. Título: Introducción al uso del software Mathematica. Diciembre 2007. Bucaramanga, Colombia.
- PONENCIA. Segunda Reunión Colombo-Venezolana de Relatividad y Gravitación. Título: Regular and Chaotic Orbits Around Axisymmetric Galaxies. Noviembre 2007. Armenia, Colombia.
- PONENCIA. Segunda Reunión Colombo-Venezolana de Relatividad y Gravitación. Título: Chaos Around Static Axially Symmetric Bodies with Octupolar Deformation. Noviembre 2007. Armenia, Colombia.
- PONENCIA. XXII Congreso Nacional de Física. Título: Regular and Chaotic Orbits Around Axisymmetric Galaxies. Octubre 2007. Ibagué, Colombia.
- PONENCIA. XXII Congreso Nacional de Física. Título: Movimiento de Partículas en Campos Gravitacionales Esféricamente Simétricos. Octubre 2007. Ibagué, Colombia.
- PONENCIA. Tercer Taller de Relatividad y Gravitación. Título: Discos gruesos relativistas. Noviembre 2006. Isla Coche, Venezuela.
- PONENCIA. I Congreso Binacional de Relatividad y Gravitación Colombia-Venezuela. Título: Geodésicas en el plano ecuatorial para espaciotiempos de Weyl. Noviembre 2005. Cartagena, Colombia

REFERENCIAS

[1] S. Åberg, H. Flocard, W. Nazarewicz. Nuclear Shapes in Mean Field Theory. *Annu. Rev. Nucl. Phys.*, 40: 439, 1990.

[2] R.O. Aquilano, J.C. Muzzio, H.D. Navone, and A.F. Zorzi. Orbital structure of self-consistent triaxial stellar systems. *Celest.Mech.Dyn.Astron.*, 99:307, 2007.

[3] A. Armenti. A classification of particle motions in the equatorial plane of a gravitational monopole-quadrupole field in Newtonian mechanics and general relativity. *Celestial Mech. Dynam. Astronom.*, 6:383, 1972; A. Armenti. On a class of exact geodesics of the erez-rosen metric, *Int. J. Theor. Phys.*, 16:813, 1977; H. Quevedo and L. Parkes. Geodesics in the Erez-Rosen space-time. *Gen. Relativ. Gravit.*, 21:1047, 1989; K.D. Kriori, and J.C. Sarmah. A geodesic study of the Erez-Rosen spacetime. *Gen. Relativ. Gravit.* 23:801, 1991); H. Quevedo and L. Parkes. On the geodesics in the Erez-Rosen spacetime. *Gen. Relativ. Gravit.* 23:495, 1991; J. Young, and G. Menono. A Charged Erez-Rosen Spacetime and Gravitational, Repulsion. *Gen. Relativ. Gravit.* 32:1, 2000;

[4] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics (Graduate Texts in Mathematics)*. Second Edition, Springer, New York, USA, 1989.

[5] R. Arvieu, F. Brut, J. Carbonell, J. Touchard. Phase-space organizations in prolate and oblate potentials: Classical, semiclassical, and quantum results. *Phys. Rev. A*, 35:2389, 1987.

[6] J. M. Bardeen and S. A. Teukolsky. Stability of circular orbits in stationary axisymmetric spacetimes. *Ap. J.*, 178:347, 1972.

[7] H. Bateman, *Partial Diferential Equations.* Dover, 1944.

[8] M. Brack. The physics of simple metal clusters: self-consistent jellium model and semiclassical approaches *Rev. Mod. Phys.*, 65:677, 1993.

[9] G. Bennetin, L. Galgani and A. Giorgilli. Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev. A.* 14:2338, 1976.

[10] J. Binney and S. Tremaine. *Galatic Dynamics*, 2nd ed. Princeton University Press, Pinceton, USA, 2008.

[11] D. Boccaletti, G. Pucacco. *Theory of Orbits*, Volume 1. Springer. Third edition (2004).

[12] W. Bonnor, and A. Sackfield. The Interpretetation of Some Spheroidal Metrics. *Commun. Math. Phys.*, 8:338, 1968.

[13] J.C. Brandt. On the Distribution Ofmass in Galaxies. I. The Large-Scale Structure of Ordinary Spirals with Applications to M 31. *Ap. J.*, 131:211, 1960.

[14] J.C. Brandt and M.J.S. Belton. On the Distribution of Mass in Galaxies. III. Surface Densities. *Ap. J.*, 136:352, 1962.

[15] R. Capuzzo-Dolcetta, L. Leccese, D. Merritt, A. Vicari. Self-consistent models of cuspy triaxial galaxies with dark matter halos. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 666:165, 2007.

[16] A.R. Cooray. Galaxy clusters: oblate or prolate? *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 313:783, 2000.

[17] G. Contopoulos., *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*, Springer 1ed, 2002.

[18] G. Contopoulos, N. Voglis, and C. Kalapotharakos. Order and Chaos in Self-Consistent Galactic Models. *Celest.Mech.Dyn.Astron.*, 83:191, 2002.

[19] G. Contopoulos, M. Harsoula. Chaotic spiral galaxies. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*,

[20] J. Chazy. Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité. *Bull. Soc. Math. France*, 52:17, 1924.

[21] H.E.J. Curzon. Cylindrical Solutions of Einstein's Gravitation Equations. *Proc. London Math. Soc.*, 23:477, 1924.

[22] R.L. Davies, and M. Birkinshaw, M.: NGC 4261 - A prolate elliptical galaxy. *Ap. J.*, 303:L45-L49, 1986.

[23] F.L. Dubeibe, *Dinámica alrededor de objetos compactos*, Universidad Industrial de Santander, Trabajo de Grado en Física (2005).

[24] F.L. Dubeibe, L.A. Pachón, and J.D. Sanabria-Gómez. Geodésica Alrededor de un Agujero Negro Estático Deformado. *Revista Colombiana de Física*. 38:1637, 2006.

[25] F.L. Dubeibe, L.A. Pachón, and J.D. Sanabria-Gómez. Chaotic dynamics around astrophysical objects with nonisotropic stresses. *Phys. Rev. D*, 75:023008, 2007.

[26] V.I. Dokuchaev. Is there life inside black holes? *Class. Quantum Grav.*, 28: 235015, 2011.

[27] G. Erez and N. Rosen. *Bull. Res. Counc. Isr.*, 8F:47, 1959.

[28] R.H. Enns, and G. McGuire. *Nonlinear physics with Mathematica for scientists and engineers*. Birkhäuser. Third edition, Boston-USA (2004).

[29] G. Fasano, R. Vio. Apparent and true flattening distribution of elliptical galaxies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 249:629, 1991.

[30] S. Frauendorf, V.V. Pashkevich. Shapes of Na Clusters. *Z. Phys D*, 26:98, 1993.

[31] J.L. González-Arango, *Órbitas Marginalmente Estables para Métricas Estáticas Axialmente Simétricas con Deformación Cuadripolar*, Universidad Industrial de Santander, Trabajo de Grado en Física (2005).

[32] J.L. González-Arango, J.D. Sanabria-Gómez. Órbita Marginalmente Estable para Métricas Estáticas Axialmente Simétricas con Deformación Cuadripolar. *Revista Colombiana de Física*. 38:1038, 2006.

[33] G.A. González and P.S. Letelier. Exact general relativistic thick disks. *Phys. Rev. D*, 69:044013, 2004.

[34] G.A. González and F. López-Suspes. Chaotic and Regular Motion Around Objects with Quadrupolar and Octupolar Deformation. *Summited to Summited to J. Astrophys. & Astron.*. Noviembre 2011.

[35] G.A. González and F. López-Suspes. Timelike and null equatorial geodesics in the Bonnor-Sackfield relativistic disk. *Revista Integración*, 49:59 , 2011.

[36] G.A. González and F. López-Suspes. Geodesics around Weyl solutions in the equatorial plane. *Summited to Internat. J. Theoret. Phys.*

[37] G.A. González and F. López-Suspes. A New Exact Solutions for Relativistic Thick Disk. *Artículo en Preparación, 2011.*

[38] G.A. González and F. López-Suspes. Stability in galaxies NGC 3877, NGC 3917. *Artículo en Preparación, 2011.*

[39] G.A. González and F. López-Suspes. Geodesic in static spherically symmetric gravitational field. *Artículo en Preparación, 2011.*

[40] G.A. González and J. I. Reina. An infinite family of generalized Kalnajs discs. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 371:1873, 2006.

[41] G.A. González, S.M. Plata-Plata, and J. Ramos-Caro. Finite thin disc models of four galaxies in the Ursa Major cluster: NGC3877, NGC3917, NGC3949 and NGC4010. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 404:468, 2010.

[42] G.A. González, and , P. S. Letelier. Relativitic static thin disk with radial stress support. *Class. Quantum Grav.*, 16:479, 1999.

[43] S. Grunau and V. Kagramanova. Geodesics of electrically and magnetically charged test particles in the Reissner-Nordström space-time: Analytical solutions. *Phys. Rev. D*, 83:044009, 2011.

[44] E. Guéron and P.S. Letelier. Chaos in pseudo-Newtonian black holes with halos. *A & A*, 368:716, 2001.

[45] E. Guéron and P.S. Letelier. Chaotic motion around prolate deformed bodies. *Phys. Rev. E*, 63:035201, 2001.

[46] E. Guéron and P.S. Letelier. Geodesic chaos around quadrupolar deformed centers of attraction. *Phys. Rev. E*, 66:04661, 2002.

[47] J.H. Gundlach, K.A. Snover, J.A. Behr, C.A. Gossett, M. Kicinskahabior, K.T. Lesko. Oblate deformed shapes of hot rotating nuclei deduced from giant-dipole-resonance decay studies. *Phys. Rev. Lett.*, 65: 2523, 1990.

[48] I. Hamamoto, B. Mottelson, H. Xie and X.Z. Zhang. Shell-structure and octupole instability in fermion systems. *Z.Phys. D*, 21:163, 1991.

[49] W. Han. Revised research about chaotic dynamics in Manko et al. spacetime. *Phys. Rev. D*, 77:123007, 2008.

[50] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. (Cambridge University Press, 1973).

[51] T. Harada, and M. Kimura. Collision of an innermost stable circular orbit particle around a Kerr black hole *Phys. Rev. D*, 66:04661, 2011.

[52] M. Hénon, y C. Heiles. The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments. *Astron. J.* 69:73, 1964.

[53] W.D. Heiss, R.G. Nasmitdinov, and S. Radu. Chaos in axially symmetric potentials with octupole deformation. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2351, 1994.

[54] W.D. Heiss, R.G. Nazmitdinov, S. Radu. Regular and chaotic motion in axially deformed nuclei. *Phys. Rev. C.*, 52:3032, 1995.

[55] W.D. Heiss, R.G. Nazmitdinov, S. Radu. Nuclear shell structure and chaotic dynamics in hexadecapole deformation. *Phys. Rev. C.*, 52:1179, 1995.

[56] A. Helmi. Is the dark halo of our Galaxy spherical? *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 351:643, 2004.

[57] M. Hénon. On the numerical computation of Poincaré maps. *Physica D*, 5:412, 1982.

[58] C. Hunter. The structure and stability of self-gravitating disks. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 126:299, 1963.

[59] C. Hunter. Chaos in Orbits Due to Disk Crossings. *Ann. New York Acad. Sciences*, 1045(1): 120-138, 2005.

[60] J. Irving and M. Shmakova M. Observations of cluster substructure using weakly lensed sextupole moments. *Amer. Astron. Soc.*, 35:1407, 2003.

[61] M.A. Jalali, and Y. Sobouti. Some Analytical Results in Dynamics of Spheroidal Galaxies. *Celest.Mech.Dyn.Astron.*, 70:255, 1998.

[62] M. Jeon, S.S. Kim and H.B. Ann. Galactic Warps in Triaxial Halos. *Ap. J.*, 696:1899, 2009.

[63] H. Jin, Z.W. Zun, and R.R. Zheng. Influence of angular momentum in axially symmetric potentials with octupole deformation. *Chinese Physics C,* 33(9):759, 2009.

[64] L. Junquing. Comment on “Chaos in Axially Symmetric Potentials with Octupole Deformation”. *Phys. Rev. Lett.*, 79:2387, 1997.

[65] A.J. Kalnajs. The Equilibria and Oscillations of a Family of Uniformly Rotating Stellar Disks. *Ap. J.*, 175:63, 1972.

[66] T. Kimm, S.K. Yi. Intrinsic axis ratio distribution of early-type galaxies from the sloan digital sky survey *Ap. J.*, 670:1048, 2007.

[67] O. Korobkin, E.B. Abdikamalov, E. Schnetter, N. Stergioulas, B. Zink. Stability of general-relativistic accretion disks. *Phys.Rev.D*, 83:043007, 2011

[68] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt and M. Maccallum. *Exact Solutions of Einstein's Fields Equations.* Cambridge University Press (2000).

[69] G.G. Kuzmin. Model of the steady Galaxy allowing of the triaxial distribution of velocities. *Astron. Zh.*, 33:27, 1956.

[70] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, Sec. 27 (1987)

[71] P.S. Letelier. Stability of circular orbits of particles moving around black holes surrounded by axially symmetric structures. *Phys. Rev. D*, 68:104002, 2003.

[72] P.S. Letelier, J. Ramos-Caro and F. López-Suspes. Chaotic motion in axially symmetric potentials with oblate quadrupole deformation. *Phys. Lett. A*, 375:3655, 2011.

[73] P.S. Letelier, and W.M. Vieira. Chaos in periodically perturbed monopole + quadrupole-like potentials. *Phys. Lett. A*, 242:7, 1998.

[74] J. Li. The stability of trajectories in an axially symmetric potential with octupole deformation. *Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, 24:1021, 1998.

[75] C. Liu, S. Chen, J. Jing. Collision of two general geodesic particles around a Kerr-Newman black hole. Published online at www.arXiv.org, archived as arXiv:astro-ph/1104.3225v1 (2011)

[76] L.F. López-Suspes, *Geodésicas Ecuatoriales en Espaciotiempos de Weyl Generados por Discos Delgados Relativistas*, Universidad Industrial de Santander, Trabajo de Grado en Física (2004).

[77] S. Lynch. *Dynamical systems with applications using mathematica.* Birkhäuser. Second edition, Boston-USA (2007).

[78] V.S. Manko. On the description of the external field of a static deformed mass. *Class. Quantum Grav.*, 7:L209, 1990.

[79] J. Marion. *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas.* Editorial Reverté. Segunda Edición, Bogotá (1995).

[80] L. Martinet and A. Hayli. Galactic Orbits and Integrals of Motion for 'High-Velocity'Stars. I. *A&A*, 14:103, 1971.

[81] L. Martinet. Heterclinic Stellar Orbits and "Wild" Behaviour in our Galaxy. *A&A*, 32:329, 1974.

[82] L. Martinet and F. Mayer. Galactic orbits and integrals of motion for stars of old galactic populations. III - Conclusions and applications. *A&A*, 44: 45, 1975.

[83] F. Mayer and L. Martinet. Orbits and Integrals of Motion for Old Galactic Population Stars. II. Periodic and Non-periodic Orbits in the 2nd Schmidt Potential. *A&A*, 27:199, 1973.

[84] D. Merritt. Chaos and the Shapes of Elliptical Galaxies. *Sience*, 271:337, 1996.

[85] T. Morgan and L. Morgan. The Gravitational Field of a Disk. *Phys. Rev.*, 183:1097, 1969.

[86] L. Morgan and T. Morgan. Gravitational Field of Shells and Disks in General Relativity. *Phys. Rev.*, 2:2756, 1970.

[87] A.V. Mosenkov, N.Ya. Sotnikova, V.P. Reshetnikov. 2MASS photometry of edge-on spiral galaxies - I. Sample and general results. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 401:559, 2010.

[88] A. Moura, P.S. Letelier. Chaos and fractals in geodesic motions around a nonrotating black hole with halos. *Phys. Rev. E*, 61:6506, 2000.

[89] T. Müller and S. Boblest. Visualizing circular motion around a Schwarzschild black hole. *Amer. J. Phy.*, 79: Issue 1, 63, 2011.

[90] S.G. Nilsson, C.F. Tsang, A. Sobiczewsky, Z. Szymanski, S. Wycech, C. Gustafson, I.L. Lamm, P. Möller, B. Nilsson. *Nucl. Phys. A*, 131: 1, 1969.

[91] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems.* Cambridge Unversity Press, Cambridge (2002).

[92] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Paris (1892), Dover Publications (1957).

[93] P. Pradhan, P. Majumdar. Circular Orbits in Extremal Reissner Nordström Spacetimes. *Phys.Lett.A* 375:474, 2011.

[94] D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini. Circular motion of neutral test particles in Reissner-Nordström spacetime. *Phys. Rev. D*, 83:024021, 2011.

[95] D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini. Motion of charged test particles in Reissner-Nordström spacetime. *Phys. Rev. D*, 83:104052, 2011.

[96] D. Pugliese, H. Quevedo, and R. Ruffini. Equatorial circular motion in Kerr spacetime. *Phys. Rev. D*, 84:044030, 2011.

[97] H. Quevedo. Class of stationary axisymmetric solutions of Einstein's equations in empty space. *Phys. Rev.*, 33:324, 1986.

[98] J. Ramos-Caro. G. González, and F. López-Suspes. Chaotic and regular motion around generalized Kalnajs discs. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 371:1873, 2008.

[99] L. Rayleigh. On the Dynamics of Revolving Fluids. *Proc. S. Soc. Lond. Ser. A*, 93:148, 1917.

[100] O. Regev. *Chaos and Complexity in Astrophysics*, Cambridge University Press (2006).

[101] J.I. Reina. *Potencial Gravitacional, Densidad Superficial y Velocidad Circular para Modelos Planos de Galaxias*, Universidad Industrial de Santander, Trabajo de Grado en Física (2004).

[102] B. S. Ryden. The Intrinsic Shapes of Stellar Systems. *Ap. J.*, 61:146, 1996.

[103] A. Saa. On the viability of local criteria for chaos. *Ann. Phys.*, 314:508, 2004.

[104] J.D. Sanabria-Gómez, C. A. Valenzuela-Toledo. Movimiento De Partículas De Prueba Cargadas En Un Espacio-Tiempo Estático Con Campo Magnético. *Revista Colombiana de Física.* 43:1, 2011.

[105] J.D. Sanabria-Gómez, C. A. Valenzuela-Toledo. Movimiento de Partículas Cargadas en el Campo Exterior Generado por un Objeto Magnetizado Rotante. *Revista Colombiana de Física.* 43:5, 2011.

[106] M. Sandri. Numerical calculation of Lyapunov exponents. *The Mathematica Journal*, 6:78, 1998.

[107] G. Scharf. Schwarzschild geodesics in terms of elliptic functions and the related red shift. *J. Mod Phys.* 2, issue 04: 274, 2011.

[108] M. Schmidt. *Bull. Astron. Inst. Neth*, 13: 15, 1975.

[109] H.J. Schmidt. Perihelion advance for orbits with large eccentricities in the Schwarzschild black hole. *Phys. Rev. D*, 83:124010, 2011.

[110] M. Schwarzschild. A numerical model for a triaxial stellar system in dynamical equilibrium. *Ap. J.*, 232:236, 979.

[111] O. Semerák. Curvature singularity around first Morgan-Morgan disc. *Class. Quantum Grav.*, 18:3589, 2001.

[112] M. Sereno, E. De Filippis, G. Longo, and M.W. Bautz. Measuring the three-dimensional structure of galaxy clusters. II. Are clusters of galaxies oblate or prolate? *Ap. J.*, 645:170, 2006.

[113] A.G. Shah, T.S. Keidl, J.L. Friedman, D. Kim and L.R. Price. Conservative, gravitational self-force for a particle in circular orbit around a Schwarzschild black hole in a radiation gauge. *Phys. Rev. D*, 83:064018, 2011.

[114] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Hole White Dwarfs, and Neutron Stars* (John Wyley & Sons, 1983); S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Hole.* (Oxford University Press, New York, 1998); E. F. Taylor and J. A. Wheeler, *Exploring Black Hole Introduction to General Relativity.* (Addison Wesley Longman, 2000).

[115] P. Slaný, K. Jiȓía and Z. Stuchlík. Relativistic Dynamics with Cosmological Constant: Circular Geodesic Motion of Test Particles. *IJMPA* , 24:1598, 2009.

[116] Z. Stuchlík and M. Calvani. Null geodesics in black hole metrics with non-zero cosmological constant. *Gen. Rel. Grav.*, 23:507, 1991.

[117] Z. Stuchlík and S. Hledík. Some properties of the Schwarzschild–de Sitter and Schwarzschild–anti-de Sitter spacetimes. *Phys. Rev. D*, 60:044006, 1999.

[118] Z. Stuchlík and P. Slaný. Equatorial circular orbits in the Kerr de Sitter spacetimes. *Phys. Rev. D*, 69:064001, 2004.

[119] Z. Stuchlík and K. Jiří. Equilibrium conditions of spinning test particles in Kerr de Sitter spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, 23:3935, 2006.

[120] Z. Stuchlík and S. Hledík. Equatorial photon motion in the Kerr-Newman spacetimes with a non-zero cosmological constant. *Class. Quantum Grav.*, 17:4541, 2006.

[121] Z. Stuchlík and K. Jiří. Pseudo-Newtonian Gravitational Potential for Schwarzschild-De Sitter Space-Times. *IJMPD*, 17:2089, 2008.

[122] Z. Stuchlík and J. Schee. Influence of the cosmological constant on the motion of Magellanic Clouds in the gravitational field of Milky Way. *JCAP*, 09:018, 2011.

[123] Z. Stuchlík, H. Stanislav; S. Jiří, O. Erlend. Null geodesics and embedding diagrams of the interior Schwarzschild-de Sitter spacetimes with uniform density. *Phys. Rev. D*, 64:044004, 2001.

[124] Y. Sun, P.M. Walker, F.R. Xu, and Y.X. Liu. Rotation-driven prolate-to-oblate shape phase transition in ^{190}W: A projected shell model study. *Phys. Lett. B.*, 659:165, 2008.

[125] Terms of Reference. Commission 7: Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. International Astronomical Union (IAU).

[126] A. Toomre. On the Distribution of Matter Within Highly Flattened Galaxies. *Ap. J.*, 138:385, 1963.

[127] A. Toomre. On the gravitational stability of a disk of stars. *Ap. J.*, 139:1217, 1964.

[128] C.A. Valenzuela-Toledo, *Movimiento de Partículas Cargadas en Espacio Tiempos Estáticos y Estacionarios de Electrovacío*, Universidad Industrial de Santander, Trabajo de Grado en Física (2007).

[129] D. Vogt, P.S. Letelier. Exact general relativistic perfect fluid disks with halos. *Phys. Rev. D*, 68:084010, 2003.

[130] D. Vogt, P.S. Letelier. Newtonian and General Relativistic models of spherical shells. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 402:1313, 2009.

[131] M. Valluri, V.P. Debattista, T. Quinn, and B. Moore. The orbital evolution induced by baryonic condensation in triaxial haloes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 403:525, 2010.

[132] E. Verdaguer. Gravitational fluctuations in de Sitter cosmology. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 314: 012008, 2011.

[133] M.A.W. Verheijen and R. Sancici R. The Ursa Major cluster of galaxies. IV. HI synthesis observations. *A&A*, 370:765, 2001.

[134] D. Vogt and P.S. Letelier. New models of general relativistic static thick disks. *Phys. Rev. D*, 71:084030, 2005).

[135] B.H. Vorhees. Static Axially Symmetric Gravitational Fields. *Phys. Rev. D*, 2:2219, 1970.

[136] K. Watarai, S. Mineshige. Where is a Marginally Stable Last Circular Orbit in Super-Critical Accretion Flow? *Publ. Astron. Soc. Japan.*, 55:959, 2003.

[137] H. Weyl. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter. *Ann. Physik.*, 54:117, 1917.

[138] H. Weyl. Zur Gravitationstheorie. *Ann. Physik*, 59:185, 1919.

[139] A.B. Wyse,and N.U. Mayall. Distribution of Mass in the Spiral Nebulae Messier 31 and Messier 33. *Ap. J.*, 95:24, 1942.

[140] D.M. Zipoy. Topology of Some Spheroidal Metrics. *Journal Math. Phys.*, 7:1137, 1966.

[141] J. Zhenglu. Dynamical modelling of the elliptical galaxy NGC 2974. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 103:31, 2009.

A

Coordenadas Esferoidales Oblatas

El sistema de coordenadas esferoidales oblatas es generado tomando una familia de elipses e hipérbolas confocales y rotandolas alrededor del semieje menor de las elipses. Estas elipses e hipérbolas tienen sus focos comunes en $y = a$, $y = -a$, de manera que el semieje menor b estará ubicado en la dirección del eje Z, mientras que sobre el eje Y estará ubicado el semieje mayor c, figuraA.1

Empecemos por considerar el plano YZ de las coordenadas elípticas planas y definamos la ecuación de cada elipse coordenada como:

$$\frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \tag{A.1}$$

cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$y = c\,\mathrm{sen}(u), \tag{A.2a}$$

$$z = b\cos(u). \tag{A.2b}$$

Recordando que la la distancia focal y los semiejes satisfacen la relación:

$$a^2 = c^2 - b^2, \tag{A.3}$$

se puede parametrizar c y b como:

$$c = a\cosh(v), \tag{A.4a}$$

$$b = a\,\mathrm{senh}(v), \tag{A.4b}$$

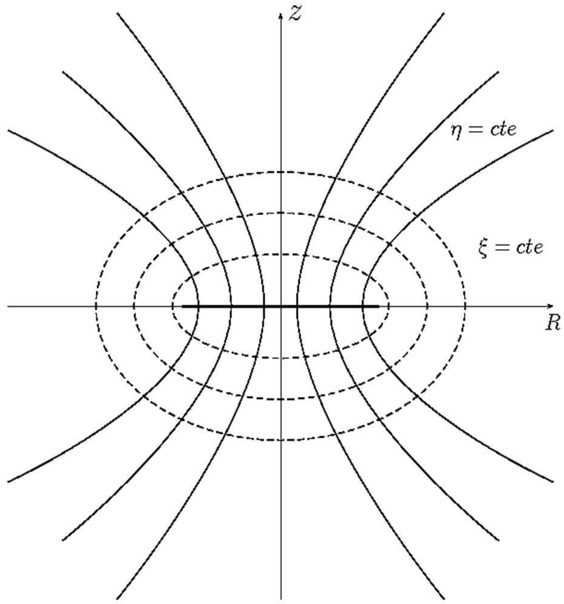


Figura A.1: Coordenadas esferoidales oblatas.

en donde el parámetro a es constante para todas las elipses, mientras que v caracteriza a cada elipse coordenada. Introduciendo estas últimas ecuaciones en (A.2a) y (A.2b), obtenemos las ecuaciones que definen a cada elipse coordenada:

$$y = a \cosh(v) \operatorname{sen}(u), \tag{A.5a}$$
$$z = a \operatorname{senh}(v) \cos(u). \tag{A.5b}$$

Las otras curvas coordenadas de este sistema son las hipérbolas focalizadas en $y = \pm a$, cuya ecuación es:

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \tag{A.6}$$

la cual puede parametrizarse como:

$$y = c \cosh(v), \tag{A.7a}$$
$$z = b \operatorname{senh}(v). \tag{A.7b}$$

En este caso la distancia focal y los semiejes se relacionan mediante la ecuación:

$$a^2 = c^2 + b^2, \tag{A.8}$$

de modo que podemos expresar c y b como:

$$c = a\,\mathrm{sen}(u), \tag{A.9a}$$
$$b = a\cos(u), \tag{A.9b}$$

siendo u el parámetro que caracteriza a cada hipérbola coordenada.

De igual manera como lo hicimos para las elipses, reemplazando (A.9a) y (A.9b) en (A.7a) y (A.7b) respectivamente, encontramos las ecuaciones que definen a cada hipérbola coordenada:

$$y = a\cosh(v)\,\mathrm{sen}(u), \tag{A.10a}$$
$$z = a\,\mathrm{senh}(v)\cos(u). \tag{A.10b}$$

Podemos ver que estas últimas ecuaciones coinciden con las ecuaciones (A.5a) (A.5b), que definen a cada elipse coordenada. Esto quiere decir que podemos asociar a cada punto del sistema de coordenadas cartesianas (y, z) un punto que es la intersección de las elipses e hipérbolas (v, u), con lo cual podemos establecer (A.5a) y (A.5b), como las transformaciones que relacionan el sistema de coordenadas cartesiano (y, z) y el sistema de coordenadas elípticas planas (v, u).

Ahora bien, para obtener el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, rotamos el sistema de coordenadas elípticas planas alrededor del eje z un ángulo φ. Anteriormente ubicamos las elipses e hipérbolas confocales sobre el plano YZ, ahora al hacer la rotación, ubiquemonos sobre el plano RZ, en donde los puntos ubicados sobre éste tienen coordenadas elípticas (A.5a) y (A.5b) dadas por:

$$R = a\cosh(v)\,\mathrm{sen}(u), \tag{A.11a}$$
$$z = a\,\mathrm{senh}(v)\cos(u). \tag{A.11b}$$

Como el ángulo formado por los planos XZ y RZ es φ, el cual varía entre $0 < \varphi \leq 2\pi$, las coordenadas cartesianas (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas (R, φ, z) se relacionan mediante las siguientes ecuaciones:

$$x = R\cos(\varphi), \tag{A.12a}$$
$$y = R\,\mathrm{sen}(\varphi), \tag{A.12b}$$
$$z = z. \tag{A.12c}$$

Reemplazando (A.11a) y (A.11b) en las expresiones anteriores obtenemos:

$$x = a\cosh(v)\,\mathrm{sen}(u)\cos(\varphi), \tag{A.13a}$$
$$y = a\cosh(v)\,\mathrm{sen}(u)\,\mathrm{sen}(\varphi), \tag{A.13b}$$
$$z = a\,\mathrm{senh}(v)\cos(u), \tag{A.13c}$$

expresiones que relacionan el sistema de coordenadas cartesianas con el sistema de coordenadas esferoidales oblatas.

Con el fin de obtener unas expresiones más convenientes para nuestros propósitos posteriores, hacemos el cambio de variable:

$$\xi = \mathrm{senh}(v), \tag{A.14a}$$
$$\eta = \cos(u), \tag{A.14b}$$

con $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$. Reemplazando entonces en (A.13a) - (A.13c), obtenemos:

$$x = a\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}\cos(\varphi), \tag{A.15a}$$
$$y = a\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}\,\mathrm{sen}(\varphi), \tag{A.15b}$$
$$z = a\xi\eta. \tag{A.15c}$$

Estas últimas ecuaciones son las transformaciones entre el sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) y el sistema de coordenadas (ξ, η, φ), las cuales comúnmente se denominan también como coordenadas esferoidales oblatas.