

Diseño para el estudio de funciones lineales con estudiantes de undécimo grado: Atendiendo la
diversidad del aula

Carlos Fernando Plata Sanabria

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Directora

Sandra Evely Parada Rico

Dra. en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Codirector

Ronald Eduardo Paternina

Dr. en Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

*A mis padres Carlos y Adriana, por el apoyo y animarme en cada momento para
lograr esta meta.*

*A mis hermanos Adriana, Silvia y Diego, porque siempre tuvieron una palabra de
ánimo y apoyo incondicional.*

*A mi tío Elibardo, por su apoyo incondicional en el transcurso de esta etapa de
mi vida.*

Agradecimiento

A Carlos Plata y Adriana Sanabria, mis padres, quienes me apoyaron en todo momento y a pesar de todo estuvieron ahí para mí durante esta formación, por el amor y los consejos que me brindaron ¡Gracias! Los amo.

A mis amigos Lucho, Angelica, Ana, Dani, Ingrid, Sebas B quienes con su apoyo y consejo lograron motivarme en cada momento

A Mafe, que me ha brindado tantos años de amistad y estuvo para mí con un consejo y una motivación, ¡gracias! Por brindarme siempre una mano y contar con un apoyo incondicional para toda la vida.

A Jhoan, quien me brindo risas y consejos, una amistad valiosa en el transcurso de mi formación académica

Al Centro de Estudios de Matemáticas (CEMAT), por brindarme un segundo hogar y grandes amistades en mi transcurso por la universidad.

A la profesora Sandra Evely Parada Rico, por su paciencia y experiencia, me enseñó a no desfallecer y continuar siempre en pie ¡Gracias!

A mi codirector de tesis, el Dr. Ronald Eduardo Paternina Salgado, por su apoyo y colaboración.

¡Muchas Gracias!

Agradecimiento especial

La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia - MINCIENCIAS, quien financió el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código 1115-852-70767, con su respectivo proyecto Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores, código 70783, con recursos del PATRIMONIO AUTÓNOMO FONDO NACIONAL DE FINANCIAMIENTO PARA LA CIENCIA, LA TECNOLOGÍA Y LA INNOVACIÓN FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS, contrato CT 183-2021.

Contenido

	Pág.
1. Planteamiento del problema.....	13
2. Antecedentes.....	20
2.1 Aspectos legales referentes a la atención a la diversidad.....	20
2.2.1 Ámbito internacional.....	21
2.2.2 Ámbito Nacional.....	22
2.2 Estudios asociados al concepto de función y función lineal.....	23
2.3 Función lineal y la atención a la diversidad en el aula.....	27
3. Aspectos teóricos y conceptuales.....	28
3.1 Diseño Universal de Aprendizaje (DUA).....	29
3.2 Aspectos conceptuales y epistemológicos acerca de la función lineal.....	31
3.3 Aspectos fundamentales de una propuesta curricular.....	34
4. Metodología de la investigación.....	39
4.1 Fase I: Revisión de Estándares Básicos de competencias y DBA.....	39
4.2 Fase II: Exploración del DUA.....	40
4.3 Fase III: Diseño de la Malla curricular orientada a la función lineal.....	41
4.4 Fase IV: Construcción del diseño.....	42
4.4.1 Primer Momento.....	42
4.4.2 Segundo Momento.....	48
4.4.3 Tercer Momento.....	51
4.4.4 Cuarto Momento.....	54

4.5 Fase V: Proceso de revisión del diseño.....	62
4.5.1 Validación por la rúbrica.....	62
4.5.2 Revisión del diseño por parte de profesores en formación	63
4.5.3 Revisión del diseño por parte de una profesora en servicio	63
4.6 Fase VI: Ajustes a partir de la revisión	63
5. Estudiando el recibo del agua	64
5.1 Selección de un contexto de interés para atender a las características de los estudiantes	64
5.1.1 Validación a través de la rúbrica.....	65
5.1.2 Valoración por los profesores en formación	66
5.1.3 Valoración por la profesora Sonia	67
5.1.4 Reflexiones sobre la selección del contexto	67
5.2 Atender a los principios y Pautas del DUA	68
5.2.1 Valoración de los principios y pauta a través de la Rúbrica	68
5.2.2 Evidencia del DUA desde la mirada e los profesores en formación.....	74
5.2.3 Valoración de los principios y pautas a través de la profesora en ejercicio	78
5.2.4 Ajustes del diseño a través de las valoraciones presentadas.....	79
5.2.4.1 Primer momento.....	80
5.2.4.2 Ajustes Segundo Momento.....	81
5.2.4.3 Ajustes Tercer Momento.....	81
5.2.4.4 Ajustes Cuarto Momento.....	81
5.3 Considerar los aspectos epistemológicos de la función lineal	82
5.3.1 Función como expresión analítica	83
5.3.2 La función como variación	84

5.3.3 La función como gráfica	84
5.3.4 La función como proporción.....	86
6. Conclusiones	87
Referencias Bibliográficas	90
Apéndices.....	96

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. El problema de Martín	43
Figura 2. Cálculo del consumo del agua	45
Figura 3. Actividad Inicial	45
Figura 4. Diferencia entre Valores	46
Figura 5. Comparación Niveles de profundidad	48
Figura 6. Applets Profundidad 2.....	49
Figura 7. Pendiente	49
Figura 8. Ecuación de la recta.....	50
Figura 9. Applets niveles de profundidad.....	51
Figura 10. Situación Estratos altos.....	52
Figura 11 . Comparativo	53
Figura 12. Conciencia Ambiental	55
Figura 13. Tabla llenado Nivel de Profundidad 2.....	56
Figura 14. Vamos a la práctica.....	56
Figura 15. Preguntas laboratorio	57
Figura 16. Nivel de profundidad 3.....	59
Figura 17. Laboratorio Nivel 3	61
Figura 18. Nivel de Profundidad 4.....	61
Figura 19. Coherencia Horizontal.....	65
Figura 20. Apreciación de profesores en formación	67

Figura 21. Valoración primer principio del DUA: múltiples formas de representación	70
Figura 22. Proporcionar múltiples formas de expresión	72
Figura 23. Proporcionar múltiples formas de implicación	73
Figura 24. Valoración general del diseño	74
Figura 25. Presentación del video	75
Figura 26. Plano Cartesiano en Braille	77
Figura 27. Escritura por Cristian	77
Figura 28. Ajustes inciso a	80
Figura 29. Ajustes actividad de llenado	82
Figura 30. Expresión analítica	83
Figura 31. Variación	84
Figura 32. Función como gráfica	85
Figura 33. Tabla de Llenado	86

Lista de Apéndices

	Pág.
Apéndice A Estructura Malla curricular ajustada según la rúbrica	96
Apéndice B Nivel de profundidad 2 (ajustado)	99
Apéndice C Nivel de Profundidad 3 (ajustado).....	118
Apéndice D Nivel de profundidad 4 (ajustado)	135
Apéndice E Orientaciones Docente nivel de profundidad 2.....	152
Apéndice F Orientaciones Nivel de Profundidad 3	159
Apéndice G Orientaciones Nivel de Profundidad 4.....	171

Resumen

Título: Diseño para el estudio de funciones lineales con estudiantes de undécimo grado: Atendiendo la diversidad del aula*.

Autor: Carlos Fernando Plata Sanabria**

Palabras Claves: Atención a la diversidad, Función Lineal, Contexto

Descripción:

El presente documento reporta el trabajo de investigación cuyo objetivo fue plantear un diseño didáctico alrededor de las funciones lineales que favorezca la inclusión en la clase de matemáticas en estudiantes de undécimo grado. La construcción del diseño se fundamentó en las categorías expuestas por Ruiz (1998), y en el consumo del agua como un recurso didáctico. Así mismo este trabajo se acoge a los principios y pautas del Diseño Universal Para el Aprendizaje (DUA) para favorecer la inclusión en el aula. Por lo anterior, es importante que los docentes consideren aquellas dificultades relacionadas con la complejidad de los objetos matemáticos de estudio a enseñar, para incluir a los estudiantes de forma axiomatizada y terminada en el aula, ofreciendo en ellos oportunidades de aprendizaje según sus necesidades educativas, donde sean ellos quienes construyan el conocimiento según sus ritmos y estilos de aprendizaje. Entre los resultados del proceso, se resaltan las valoraciones por parte de la rúbrica de evaluación al diseño en los que se muestra el cumplimiento de los principios y pautas del DUA, así como las reflexiones de los profesores (uno en formación y un ejercicio) que hicieron una primera implementación del diseño con el fin de ver la viabilidad de este.

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ciencias Escuela de Matemáticas Directora Sandra Evely Parada Rico Dra. en Ciencias Especialidad Matemática Educativa Codirector Ronald Eduardo Paternina Dr. en Matemática

Abstract

Title: Design for the study of linear functions with eleventh grade students: Attending the diversity of the classroom*.

Author: Carlos Fernando Plata Sanabria**

Keywords: Attention to diversity, Linear Function, Context

Description:

This document reports the research work whose objective was to propose a didactic design around linear functions that favors the inclusion in the mathematics class in eleventh grade students. The construction of the design was based on the categories exposed by Ruiz (1998), and on the consumption of water as a didactic resource. Likewise, this work follows the principles and guidelines of Universal Design for Learning (UDL) to promote inclusion in the classroom. Therefore, it is important that teachers consider those difficulties related to the complexity of the mathematical objects of study to be taught, to include students in an axiomatized and finished way in the classroom, offering in them learning opportunities according to their educational needs, where they are the ones who build knowledge according to their rhythms and learning styles. Among the results of the process, the evaluations by the design evaluation rubric are highlighted in which compliance with the principles and guidelines of the UDL is shown, as well as the reflections of the teachers (one in training and an exercise) who made a first implementation of the design to see the viability of this.

* Degree Project

** Faculty of Sciences School of Mathematics Director Sandra Evely Parada Rico Dr. in Sciences Specialty Educational Mathematics Co-Director Ronald Eduardo Paternina Dr. in Mathematics

1. Planteamiento del problema

La educación es un derecho fundamental donde las personas pueden culturizarse y formarse para ser parte activa de la sociedad. En Colombia se plantea en la Constitución Política de 1991, en el artículo 67, garantizar el acceso e igualdad de oportunidades en las instituciones educativas sin importar los diferentes lugares de procedencia, religión etnia o condición (física o mental).

El derecho a la educación ha sido un tema de amplia discusión en congresos de los que emergen amplias normativas internacionales. Al respecto, se destacan la Declaración Universal de Derechos Humanos, la Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad, la Declaración mundial sobre la Educación para todos, la declaración de Salamanca y el informe final del Foro Mundial de la Educación en Dakar. A nivel nacional, se encuentran la Constitución Política, la Ley estatutaria 1618, El decreto 366 y el Decreto 1421 del 2017. En esos documentos se rescata fundamentalmente la necesidad de tener en cuenta la diversidad de estudiantes considerandos sus capacidades, habilidades, ritmos y estilos de aprendizaje.

Frente a lo anterior, Figueroa y Muñoz (2014) afirman que:

Hoy en día no cabe ninguna duda sobre el principio legal y moral de la inclusión educativa, pero todavía no se han conseguido garantizar prácticas que atiendan verdaderamente a la diversidad. Sin embargo, ya existen experiencias que impulsan a cambiar los modelos homogeneizadores, por lo que se debe seguir profundizando en la búsqueda de dispositivos que permitan abordar esta situación desde todos los frentes posibles, de modo que nos

acerquemos progresivamente la anhelo de una educación más inclusiva, dialogante e intercultural (p.182).

En concordancia con lo anterior las instituciones educativas deben buscar una manera de abordar y dar cumplimiento a esta normativa, considerándolo el gran reto de la inclusión escolar, dado que en Colombia la población escolar es ampliamente diversa.

Para Velasco (2022), las instituciones educativas entienden el cumplimiento de la inclusión escolar como la admisión de estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (NEE), pero no tienen en cuenta los recursos y la formación de los profesores que deben tener en cuenta para ello.

Por otra parte, Peñalva y Vega (2019), Echeita y Ainscow (2011), y Parilla (2002) coinciden en que el término de inclusión escolar esté ligado a la atención de estudiantes con NEE, sin embargo, con el paso del tiempo este significado se ha transformado. Actualmente hablar de inclusión no solamente abarca a atender estudiantes con alguna característica y se encuentran significados como el de Digón (2003) quien define “alumnos con discapacidades físicas, psíquicas, sensoriales y trastornos graves de la personalidad o de la conducta” (p.4). Por otra parte, la UNESCO (2017) resalta que es un término utilizado para referirse a estudiantes o niños con dificultades, que requieren un apoyo incondicional; esta definición puede ser diferente para algunos países.

Sin embargo, en Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2003) refiere el término de NEE a la población con discapacidad (auditiva, visual, motora, cognitiva, autismo, múltiple) y con capacidades o talentos excepcionales. Esta investigación se acoge a esta definición por ser la que se rige en el marco legal colombiano, donde se encuentra realizado este estudio.

Teniendo en cuenta lo anterior y aclarando que la inclusión no se refiere netamente a personas con NEE, la investigación aquí presente también asume el concepto de diversidad propuesto por Arnaiz (2000).

La diversidad está presente en el ser humano desde el momento que cada persona tiene sus propias características evolutivas, distintos ritmos de aprendizaje que en interacción con su contexto se traducen en distintos intereses académicos-profesionales, expectativas y proyectos de vida, especialmente, a partir de la etapa de la educación secundaria. Además de estas manifestaciones, podemos encontrar otras de carácter individual, como pueden ser las deficiencias intelectuales, físicas, sensoriales, altas capacidades, o aquellas otras que se manifiestan en contextos socioculturales desfavorecidos o relacionados con las minorías étnicas y culturales. (Arnaiz, 2000, p.1)

La investigación aquí realizada, se acoge a la definición de Arnaiz, reconociendo que todas las personas tienen diferentes características que pueden considerarse fortalezas, dificultades, habilidades y limitaciones incidentes en el aprendizaje; lo que conlleva un proceso de adaptación y flexibilización del currículo.

Para López (1990), algunos docentes en el aula de clase se enfrentan a ciertas dificultades a la hora de enseñar a estudiantes con características particulares, dada la escasa formación de los profesores para atenderlas, lo que para Bruno y Noda (2010) es notoriamente marcado en los profesores de matemáticas.

Sin embargo, investigaciones como las de Bruno y Noda (2010) y Velasco (2022), dan a conocer la escasa formación de profesores de matemáticas en atención a la diversidad los cuales se encuentran en las instituciones educativas del país, y muchas veces no cuentan con una orientación de como atender estas dificultades que pueden presentarse en el aula.

Perilla (2018), afirma que la educación actual es el producto del desarrollo histórico y que la “educación inclusiva debe considerarse un derecho humano para todos los estudiantes” (p,74). Además, el autor expone que se debe tener en cuenta el bienestar de todos los estudiantes, para que no exista alguna discriminación con respecto a sus capacidades a la hora de ser incluidos.

Por otra parte, la UNESCO (2019), en el Foro Internacional sobre Equidad e Inclusión hace un llamado a los sistemas educativos para estimular “la educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje a lo largo de toda la vida para todos” (p.1). Aunque se han evidenciado esfuerzos a nivel nacional e internacional para ofrecer educación de calidad para todos, no se ha logrado una transformación de fondo en los sistemas educativos. Al respecto, Hurtado (2014) afirma que en el contexto colombiano “los niños con discapacidad o capacidades excepcionales no culminan los nueve grados de educación básica, ni alcanzan la educación media” (p.50).

Por otro lado, se espera que los estudiantes con NEE que avancen a los últimos grados de la escolaridad logren construir los aprendizajes necesarios que les permitan también incluirse en la educación superior. Desde la asignatura de matemáticas, se reconocen ampliamente las dificultades que presentan los estudiantes para comprender los objetos de estudio asociados al pensamiento variacional, específicamente en la noción de función lineal y sus diferentes representaciones, propiedades y características.

Para Artigue (1995) hay tres dificultades de acceso al cálculo que son diversas y se refuerzan teniendo en cuenta la complejidad del tema. Divide a estas grandes categorías en tres tipos de dificultades:

- Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones) y al hecho de que estos objetos se conceptualizan

plenamente cuando se inicia una enseñanza del cálculo que va a contribuir de forma fuerte a tal percepción.

- Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo (Artigue,1995, p.107).

Investigaciones como las de Parada y Barajas (2015) analizan las habilidades en matemáticas de los estudiantes que ingresan a primer nivel de la Universidad Industrial de Santander (UIS), evidenciando las dificultades que ellos presentan, específicamente desde el pensamiento variacional. Las autoras, hacen una valoración a partir de las competencias declaradas por MEN (2006) para los grados 10 y 11, e identifican una serie de dificultades en torno con el proceso de elaboración, comparación, y ejercitación de procedimientos de tipo aritmético, métrico, analítico y geométrico inmersos en la resolución de problemas que implican objetos matemáticos del Cálculo.

Feijoo (2018) afirma que el modelo pedagógico predominante para el estudio de los objetos del pensamiento variacional es el tradicional. Teniendo en cuenta que algunos docentes del área de matemáticas aún optan por la enseñanza del conocimiento impartido, considerando que el conocimiento por parte del maestro y la evaluación está orientada a medir el aprendizaje desde la reproducción de la información.

Además, Zubiria (2020) afirma que “Como puede verse, las evaluaciones rutinarias y tradicionales, que siguen dominando la educación colombiana, son una prueba más del peso que sigue manteniendo la educación tradicional en el país” (p.178). teniendo en cuenta que los profesores en el siglo XXI aun dedican el tiempo a la calificación y muy poco a la evaluación.

En el trabajo de grado que se está reportando aquí, se indagó inicialmente sobre acercamientos didácticos, específicamente en lo relacionado con la función lineal.

Investigaciones como la de Fiallo y Parada (2014) nos muestran un camino en la construcción del pensamiento variacional mediante la resolución de problemas donde promueven el análisis de situaciones de variación y cambio, donde emerge el concepto de función y se presenta al estudiante a través de las diferentes representaciones: tabular, gráfico, algebraico y verbal, para de esta manera, contribuir en la comprensión del objeto matemático.

Es importante desarrollar el concepto función lineal en los últimos años de secundaria, dado que esto permite dar tratamiento a fenómenos de variación. Desde esta propuesta queremos hacer un diseño didáctico que de importancia a las dificultades que tienen los estudiantes al momento de aprender este concepto para dar tratamiento a la variación constante, presente en el modelo lineal, considerando la atención a la diversidad que se puede presentar en el aula.

Para ello, en esta investigación se tendrán en cuenta los Estándares Básicos de Competencias (EBC) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), que son ejes fundamentales al momento de desarrollar las competencias matemáticas. A continuación, se presenta en la Tabla 1, una comparación entre los planteamientos de estos documentos en relación con la enseñanza de las funciones y la relación que se puede encontrar con respecto a la atención a la diversidad en el aula.

Teniendo en cuenta la comparación anterior, se puede observar que no existe alguna relación entre los documentos y la adaptación de los temas con respecto a la atención a la diversidad, por lo tanto, se ve la necesidad de flexibilizar el currículo y hacer adaptaciones que respondan a la diversidad cultural, social y personal de los estudiantes en el aula de matemáticas.

En efecto, la importancia de abordar el problema se fundamenta en la necesidad que tienen las aulas de atender los diferentes ritmos y estilos de aprendizaje, de esta manera, permitir a los

estudiantes más que la realización de prácticas algorítmicas y repetitivas, encaminarlos a la comprensión de los objetos matemáticos de estudio, en este caso particular, las funciones lineales desde sus distintos registros de representación, sus características y propiedades.

Tabla 1.

Comparación EBC Y DBA

	ESTANDARES	DBA
Funciones	Es importante también tener en cuenta que las funciones permiten analizar y modelar distintos fenómenos y procesos no sólo en problemas y situaciones del mundo de la vida cotidiana, sino también de las ciencias naturales y sociales y de las matemáticas mismas. (MEN, p.68).	Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes. (MEN, p.77).
Atención a la diversidad	La educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad (MEN, p.46).	Están enfocados hacia la población de niños promedio, los cuales no presentan ninguna limitación ya sea física, sensorial o cognitiva. (Luna y Basto (2019)).

Nota: Comparación entre EBC y DBA referente a la atención a la diversidad y las funciones

De lo planteado en los documentos oficiales de Colombia, se presume que el tratamiento de las funciones lineales se hace de una forma algorítmica y tradicional, sin darle un contexto al tema de estudio, en nuestro caso la función lineal, que se enseña solo de la forma $y = mx + b$, sin profundizar en la comprensión de la misma por todos los estudiantes de la clase, todos y cada uno de ellos con sus particularidades.

Frente a la problemática antes expuestas, para el trabajo de pregrado que aquí se reporta se centró la atención en responder a la pregunta: *¿Cómo favorecer la inclusión en clase de matemáticas en un curso de undécimo grado que estudia las funciones lineales? Para ello, se trabajó para lograr el objetivo de: Plantear un diseño didáctico alrededor de las funciones lineales que favorezca la inclusión en la clase de matemáticas con estudiantes de undécimo grado.*

2. Antecedentes

En el presente apartado se mencionan algunas investigaciones revisadas con relación a los objetos de estudio del trabajo que aquí se reporta, que está organizado en tres partes: i) aspectos legales relacionados con la atención a la diversidad a nivel internacional y nacional, ii) Enseñanza de la función lineal, iii) enseñanza de la función lineal en personas con características diferenciadas.

2.1 Aspectos legales referentes a la atención a la diversidad

A nivel mundial se ha evidenciado el interés por una educación de calidad como derecho fundamental. A continuación, se describen brevemente leyes y decretos establecidos a nivel nacional e internacional que se tuvieron en cuenta para comprender el fenómeno de estudio y para darle fuerza teórica.

2.2.1 Ámbito internacional

Para este apartado tenemos en el ámbito internacional La Declaración Universal de los derechos humanos y la Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad, reconocen que la educación es un derecho fundamental.

- La declaración Universal de los Derechos Humanos, resolución 217 A(III) del 10 de diciembre de 1948, establece que todas las naciones deben ofrecer una educación gratuita y sin discriminación para todas las personas, como lo menciona su artículo 26, resaltando el desarrollo de la personalidad del ser humano y el respeto por los derechos sin importar el grupo étnico o religión al que pertenezca

- La Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad UNESCO (1994), proporcionó la oportunidad de situar las NEE en el marco más amplio del movimiento de Educación para todos, dando así a la reforma del sistema educativo la posibilidad de incorporar la integración en las escuelas para los niños del mundo.

- El Foro Mundial sobre la educación en Dakar (2000), En este foro se integraron seis marcos de acción del mundo frente a los compromisos colectivos de una educación para todos. Allí se enfatizó aún más en los procesos de exclusión inclusiva y se sostuvo la importancia de trabajar por una educación para todos basado en el respeto por el derecho fundamental en la educación.

2.2.2 Ámbito Nacional

En Colombia hay diversos acercamientos a la educación para todos, entre estos se encuentran la Constitución Política de 1991, la Ley General de Educación, el decreto 1421 del 2017.

- La Constitución Política de 1991, en los artículos 13, 42, 47, 54 y 68 se resaltan las obligaciones del estado para atender a las personas con discapacidad, entre ellas, garantizar el acceso, integración y permanencia de los estudiantes a las instituciones educativas y los diferentes espacios socioculturales.

- La Ley 115 de febrero 8 de 1994, en el artículo 46 y 49 que las personas con limitaciones física, sensoriales, psíquicas, cognoscitivas, emocionales y capacidades excepcionales deben ser incluidas en el aula escolar. Asimismo, da a entender que los establecimientos educativos se deben organizar mediante convenios, acciones pedagógicas y terapéuticas que permitan el proceso de integración académica.

Lo mencionado anteriormente, evidencia la importancia del rol del docente en el aula y por ende la necesidad que estos cuenten con una formación o un apoyo en la educación inclusiva, dando así al componente disciplinar de esta investigación.

- El Decreto 1421 del 29 de agosto de 2017 resalta el derecho a la educación de las personas sin discriminación alguna.

Este decreto presenta también que el profesor debe conocer las características y habilidades que poseen los estudiantes, teniendo en cuenta la valoración pedagógica en miras de poder realizar algunas adaptaciones curriculares o estrategias, recursos entre otros, donde el educando logre alcanzar los objetivos planteados de la clase. Para estas adaptaciones y la

flexibilización este propone el uso del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) cuyo enfoque didáctico permite la planeación pensando en todos los estudiantes. Este diseño será explicado a detalle en el apartado 4.1.

2.2 Estudios asociados al concepto de función y función lineal

En el siguiente apartado se evidencian algunos estudios realizados con relación al concepto de función lineal y las dificultades que pueden encontrarse al momento de enseñarlo:

La investigación de López y Moguel (2008), se basó en encontrar aquellos factores que influyen en las dificultades del aprendizaje y errores cometidos por los alumnos en el nivel medio superior cuando manipulan el concepto de función. Algunos de ellos se muestran en la Tabla 2

López y Moguel (2008) destacan algunos errores que ellos pudieron evidenciar, entre ellos: el de concebir la función como una ecuación e identificar variables dependientes como independientes, y viceversa, en un fenómeno, problema o expresión analítica de una función. Estos errores permitieron establecer algunos aspectos para la elaboración del diseño de actividades didácticas sobre funciones.

Tabla 2.

Factores influyentes en el aprendizaje de la función

Dificultad	Cognitivo	Epistemológico	Didáctico
Obtener una expresión analítica o grafica de una función que modele un fenómeno	Esquema que responde a situaciones similares	que a muy a la	La enseñanza del concepto ha tomado una dirección contraria a la génesis de este
			Los ejercicios planteados suelen ser rutinarios o algorítmicos, excluyendo aquellos problemas o

Dificultad	Cognitivo	Epistemológico	Didáctico
			situaciones de variación
Confusión entre función y ecuación	Similitud de gráficas	Función como puente entre la geometría y el álgebra	Operar y manejar funciones como cualquier expresión algebraica. Sintaxis utilizada

Nota Factores de naturaleza cognitiva, epistemológica y didáctica que influyen en ciertas dificultades identificadas en el estudio de funciones. (López y Moguel, 2008)

En esta misma línea, Alpízar et al. (2018), en esta investigación muestran las dificultades y errores que presentan los estudiantes de décimo grado en la educación secundaria costarricense. Allí se evidenciaron las limitaciones existentes en el aprendizaje de la función desde una perspectiva cognitiva, estos análisis pertenecen a lo didáctico, observando que en la mayoría de estos errores se deben a los cálculos y asociaciones incorrectas.

Por último, Quintero (2020), aborda las dificultades presentes en los profesores en formación con respecto al concepto de función, teniendo en cuenta la negociación de significados iniciales y al uso de GeoGebra, lleva a cabo una clase sobre la enseñanza de la función lineal en profesores en formación, mediante el uso de esta herramienta se evidenciaron algunas características acerca del objeto matemático en estudio.

Asimismo, Cooney, Beckman y Lloyd (como se citó en Quintero, 2020) plantean cinco ideas alrededor del tratamiento didáctico de la función: i) **concepto de función:** reconocer características principales de las funciones como el dominio y rango, ii) **Covariación y tasa de cambio:** es la necesidad de identificar la descripción de las cantidades que varían conjuntamente y se encuentran relacionadas, teniendo en cuenta también la covariación entre dos variables y reconocerla; iii) **Familia de funciones:** es la identificación de características a los tipos de

funciones; iv) **Combinación y transformación de funciones:** combinación de funciones desde las operaciones básicas como la composición de funciones incluyendo las condiciones que deben cumplir cada función para cumplir las combinaciones; v) **Múltiples representaciones:** es la importancia que debe reconocerse dada las diferentes representaciones de una funciones tales como : la algebraica, la tabular y la verbal.

Por otra parte, la investigación de Salazar (2018), presenta una secuencia didáctica basada en la función lineal a través del apoyo de GeoGebra, cuyo objetivo es el fortalecimiento de las competencias matemáticas, sin embargo, el desarrollo de estas actividades tuvo presente algunas dificultades alrededor del concepto de la función lineal, entre estos se encuentra la interpretación, en vista que algunos estudiantes no consideran la ubicación del plano cartesiano respecto al origen del sistema. Otra dificultad presente es la ubicación de la abscisa y la ordenada, dado que no tenían claros estos conceptos. Sin embargo, el uso del software GeoGebra en las prácticas pedagógicas lograron que los estudiantes reconocieran la función lineal calculando la pendiente y aplicando la fórmula implícita así logrando interpretar las funciones lineales en esta herramienta.

Por otro lado, consideramos algunos estudios que abordan la enseñanza de la función empleando Software dinámicos y la proporcionalidad directa simple para brindar alternativas que les permitan a los estudiantes caracterizar e identificar algunas propiedades de la función lineal.

Investigaciones como la de Giraldo (2012) aborda el estudio de la función lineal desde el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), destacando la necesidad de propiciar un aprendizaje en el que se usen diferentes situaciones de la vida cotidiana donde el sujeto se desenvuelve. El autor destaca que el uso de las TIC son herramientas facilitadoras para los procesos de enseñanza, estas le permitieron abordar la enseñanza de la función lineal como lugar geométrico a través de la mediación de software como Cabri o GeoGebra.

En segunda instancia, Ibarra y Moreno (2010), proponen una aproximación al concepto de función lineal mediante la proporcionalidad directa simple. Las autoras resaltan el uso de gráficos y tablas utilizados por los estudiantes para la expresión de problemas involucrando las situaciones relacionadas con la vida cotidiana, teniendo en cuenta que los alumnos identificaron el concepto de función con la característica del tipo $y = kx$ siendo k la constante de proporcionalidad y la alineación de los puntos que lo conforman.

Así mismo, Olvera-Martínez (2015), en una investigación de corte cualitativo, analizó las formas en el razonamiento de los profesores de matemática de bachillerato al abordar y resolver actividades relacionadas al estudio de funciones. Olvera resalta la importancia del concepto de función en la educación matemática y menciona los tres roles que juega: como entidad puramente matemática; como lentes a través de los cuales se pueden ver y conectar otros objetos matemáticos; y como vía para la aplicación de las matemáticas y la modelización en contextos. La autora también trabaja en la resolución de problemas bajo el uso de tecnologías, esto permite a los profesores a modelar situaciones planteadas, ayudándoles a dar significado a los objetos matemáticos estudiados.

Lo mencionado anteriormente, permitió tomar ideas para proponer actividades del diseño en las que se tienen en cuenta las relaciones de covariación entre las variables, las distintas representaciones de la función lineal, asimismo, las posibles interpretaciones que se le dan a la pendiente y el intercepto para que el estudiante reconozca de esta manera los distintos comportamientos que generan estos parámetros, así como la identificación de contextos significativos para plantear situaciones problema.

Por último, si se ubica la noción de función, en los DBA se puede observar que no se abordan las funciones en el grado undécimo mientras que en décimo grado son referidas mediante

el enunciado siete: “Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes” (MEN, 2016,p.77), teniendo en cuenta como evidencias “Utiliza representaciones gráficas o numéricas para tomar decisiones en problemas prácticos” (MEN, 2016, p.77).

Lo anterior no permite ubicar el diseño que hemos construido para estudiantes incluidos en el conjunto de grados 10 y 11, según los establecen los estándares curriculares de matemáticas MEN (2006).

2.3 Función lineal y la atención a la diversidad en el aula

En este apartado, se consideran algunas investigaciones realizadas alrededor del concepto de función y función lineal, teniendo en cuenta que estas actividades fueron implementadas en un aula heterogénea (estudiantes con alguna característica particular):

En primer lugar, Torres (2013), realiza una investigación donde trabaja el caso de un alumno invidente cuyo objetivo era aproximar el concepto de función lineal en este estudiante, teniendo en cuenta que al darle un contexto a la noción de pendiente en un entorno donde involucren a la función, el alumno relaciona la variación constante que ocurre en un gasto de kilogramo, es decir qué una situación contextualizada puede ayudar a una persona invidente a desarrollar nociones matemáticas en ciertos aspectos.

Asimismo, Peña y Aldana (2014), tuvieron como objeto de investigación el aprendizaje del concepto de función con los estudiantes con déficit auditivo de educación básica y media, donde

se mostró como el problema social y cultural que tiene dicha población en el aprendizaje de las matemáticas puede ser minimizado por la intervención del profesor.

Por último, Herrera (2018), realiza una investigación didáctica con función lineal y afín aplicada en un contexto para los estudiantes que cursaban noveno año de educación básica, con un enfoque constructivista, cuyo objetivo consistió en que, los estudiantes construyan su propio aprendizaje. También en dicha investigación se menciona a un estudiante con discapacidad visual, donde este método funcionó bien a la hora del aprendizaje de los estudiantes.

A manera de síntesis, existen muchas investigaciones y reportes con respecto a la función lineal en diferentes perspectivas teóricas, en bachillerato y universidad, en algunos casos solamente utilizan las representaciones geométricas y aritméticas, sin embargo se revisa que en algunas ocasiones no se está atendiendo a la diversidad en el aula, esto se evidencia porque no se presentan adaptaciones en algunos de los diseños por parte de los autores, allí surge la necesidad de realizar diseños alusivos a la función lineal que abarquen a todos los estudiantes presentes en el aula sin hacer distinción alguna.

3. Aspectos teóricos y conceptuales

En este apartado se describen algunos aspectos teóricos y conceptuales que sustentan la construcción del diseño didáctico alrededor de la función lineal dirigido a estudiantes con características diversas. Inicialmente, se hablará del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), que determinó los ejes principales para la construcción del diseño. Posteriormente, se exponen

aspectos conceptuales de la función lineal y su epistemología, que se tuvieron en cuenta para abordar la diversidad en el aula y dar cumplimiento a nuestro objetivo de investigación (*Plantear un diseño didáctico alrededor de las funciones lineales que favorezca la inclusión en la clase de matemáticas con estudiantes de undécimo grado*). Por último, se exponen elementos de una propuesta curricular (aún en construcción) que hace parte de un proyecto de investigación (aún en curso) en el que se plantea una estructura que posibilite la inclusión en clase de Matemáticas (Parada, 2022).

3.1 Diseño Universal de Aprendizaje (DUA)

En primer lugar, Hernández y Oviedo (2019) afirman que, en Colombia, basados en la Encuesta Nacional de Calidad de Vida en 2012, de la población discapacitada en un rango entre los 18 y 39 años, solo el 5,4% de estas personas terminan el bachillerato.

El decreto 1421 del Ministerio de Educación Nacional expone dos elementos para atender los estudiantes en el aula, estos son: Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) y Plan Individual de Ajustes Razonables (PIAR). El DUA es una de las formas de repensar la educación, con tal de disminuir aquellos obstáculos en el aprendizaje, sin alguna adaptación curricular o diseños especializados, se puede decir, que es una propuesta pedagógica que facilita la atención a las necesidades de los estudiantes favoreciendo los diferentes métodos, apoyos, recursos, evaluaciones que se deben construir a raíz de las necesidades o capacidades y realidades, dando un camino al conocimiento y que ellos puedan llegar a él.

Según el Centre for Assistive Special Technologies (CAST) en 2011, define que el DUA es un marco que aborda el principal obstáculo para los entornos de enseñanza que puedan

promover aprendices: los currículos flexibles. Siendo los currículos inflexibles aquellos que generan dificultades para acceder al aprendizaje. Existen estudiantes que poseen talentos y capacidades excepcionales, por otro lado, también están los estudiantes que presentan discapacidades, estos son considerados alumnos particularmente vulnerables. Asimismo, el marco de DUA estimula la creación de diseños flexibles desde el principio, que permitan a todos los estudiantes llevar un progreso donde ellos están y no desde donde nosotros pensamos que se encuentran.

Asimismo, el DUA posee tres principios fundamentales basados en la investigación que guían el DUA y proporcionan el marco subyacente a las pautas:

- Principio I: Proporcionar múltiples formas de representación (El que del aprendizaje)
- Principio II: Proporcionar Múltiples formas de acción y expresión (El como del aprendizaje)
- Principio III: Proporcionar múltiples formas de implicación (El porqué del aprendizaje).

Los tres principios se verán reflejados en la construcción de los diseños para la enseñanza de la función lineal en grado once.

Finalmente, en esta investigación se presenta el planteamiento de diseños como recursos didácticos para la enseñanza de la función lineal en los estudiantes de décimo o undécimo grado, donde se tienen en cuenta las NEE, por lo tanto, consideraremos los documentos orientadores para la enseñanza MEN (2006, 2016), los enfoques didácticos del DUA y algunos elementos de la evolución del concepto de la función lineal (distintas representaciones, proporcionalidad directa simple).

3.2 Aspectos conceptuales y epistemológicos acerca de la función lineal

El concepto de función fue evolucionando a través de los tiempos y no fue hasta Galileo (1564-1642) donde sus estudios sobre el movimiento lograron establecer algunas proporciones homogéneas para caracterizar el movimiento uniforme. Más adelante, Fermat (1601-1665), expone los principios fundamentales del método de coordenadas, tomando como referencia los ejes cartesianos. Fueron varios matemáticos quienes estudiaron el concepto función, los cuales se consideraron. Sin embargo, no fue hasta que se encontró el manuscrito de Leibniz (1673), donde definió a la función a través de la relación con las tangentes, luego más adelante Leibniz utiliza la palabra función como algo más general relacionándolo con la geometría diferencial.

Luego de las discusiones de Leibniz, dos siglos más adelante, Dirichlet (1837), quien era discípulo de Fourier, definió la función en un sentido más general *“si una variable Y está relacionada con otra variable X de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a X hay una regla según la cual queda determinado un único valor de Y , entonces se dice que Y es una función de la variable independiente X ”*.

Algunos investigadores en educación matemática han analizado el desarrollo del concepto de función considerando las perspectivas didácticas, identificando así las diferentes categorías definidas y presentadas en el proceso de evolución del concepto, los cuales se asocian a diferentes significados como lo son: regla, tabla, fórmula, variable. Así se consideran las representaciones que tienen un fuerte desarrollo en el aula.

A raíz de las investigaciones mencionadas anteriormente asociadas al concepto de función y de las diferentes formas de representarse, se mantuvieron a lo largo de la historia diferentes significados y representaciones a través de los años, estos son: regla, tabla, fórmula, variable, por

ello surgen diferentes categorías que ayudaron a la evolución del concepto; en este orden de ideas Ruiz (1998) citado por Gómez (2011), describe siete categorías de las definiciones del concepto de función, de las cuales cuatro de estas serán consideradas para esta investigación, como se definen a continuación:

- **La función como variación:** Los babilonios establecieron relaciones entre variaciones de las causas y algunos efectos: los fenómenos que generaban algún cambio, tales como el calor, la luz, la distancia, la velocidad de la luz, entre otros, estos pueden representar un rango de variación amplio, sin embargo, pueden cambiar continuamente entre algunos límites dados.

- **La función como proporción:** Si bien las ideas de cambio y cantidad variable se encontraba en los pensamientos griegos quienes consideraron al cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas. Hablar de esta forma llevó a los matemáticos de la época a hablar acerca de las incógnitas e indeterminaciones más que de variables. Esto condujo a la proporción y ecuaciones, no a las funciones.

“Una de las nociones más nefastas en la evolución del concepto de función fueron (la proporcionalidad, la inconmensurabilidad, y la gran disociación en el pensamiento entre número y magnitud)” (Cotret, 1985).

- **La función como gráfica:** durante la edad media las gráficas representaron las relaciones desde lo cualitativo y no tanto lo cuantitativo, los gráficos eran considerados en su época como modelos geométricos, para este entonces no se necesitó que se representaran las relaciones. Cuando se habló de dependencia se representaba por toda la figura, allí es donde predominó la función como gráfica.

- **La función como expresión analítica:** Esta noción de función nació en el siglo XVII, y continuó con Euler y Lagrange en el siglo XVIII. En este momento las únicas funciones que se consideraban para estudiar eran aquellas que se podían representar por medio su expresión algebraica, esto constituye un obstáculo para la evolución del concepto considerados como las ideas de dependencia y variabilidad.

Por otra parte, Sierpinska (1994), nos habla acerca de los obstáculos presentados al momento de abordar el concepto de función y las implicaciones didácticas, los cuales son los siguientes:

- **Obstáculos a nivel de creencia y convicciones:** acá se encuentran i) la concepción estática, aunque es la idea más primitiva de función estuvo relacionada con las nociones de cambio y la relación entre magnitudes. ii) Las magnitudes y números disociados, los cuales datan del asociamiento natural de cualquier cantidad de una magnitud y una medida numérica cualquiera.

- **Obstáculo a nivel de esquemas de pensamiento:** entre ellos se encuentra i) la razón o proporción, dado que los griegos y hasta el siglo XV, la proporción era de forma discursiva y no era considerada una igualdad. ii) La homogeneidad de las variables, las cuales conducían siempre a realizar comparaciones entre magnitudes, por último, la concepción geométrica de las variables, que los griegos construyeron a través de esta el algebra geométrica donde los elementos primordiales eran segmentos y definieron las operaciones.

- **Obstáculo a nivel de conocimiento teórico:** de este obstáculo surgen: i) la concepción algebraica, ii) la concepción mecánica de curva.

Estas concepciones y obstáculos descritos anteriormente se han relacionado por diferentes investigadores entre ellos Sierpinska (1994), que a través de las concepciones de los estudiantes han generado obstáculos epistemológicos entre ellos.

El diseño presentado en esta investigación también concuerda con algunas ideas de Fiallo y Parada (2018) quienes plantean que la resolución de problemas y el uso de la tecnología pueden favorecer el desarrollo de los procesos de razonamiento, comunicación, representación, elaboración comparación y ejercitación de procedimientos.

Se recuperan ideas de Ibarra y Moreno (2010) quienes enseñan la función lineal a través de la proporcionalidad directa simple, con el fin de que se logre interpretar e identificar las características que están presentes en la función lineal en los diferentes contextos. Además, Pérez (2018), explica que una metodología de enseñanza y aprendizaje se modifica a través de la incorporación de tecnologías digitales, esto requiere que el profesor tome un rol importante y muy diferente a lo tradicional. Esta incorporación se da con el fin de que el uso de las tecnologías posibilite un pensamiento diferente movilizado por la actividad matemática propuesta.

Así investigaciones como la de Giraldo (2012) resalta que para la enseñanza de la función lineal es necesario considerar los conocimientos previos de los estudiantes, esto con el fin de que se aborden conceptos matemáticos a través de las TIC con el objetivo que se visualicen las características de la función lineal y familiarizar a los estudiantes con la matemática a través de la tecnología digital.

3.3 Aspectos fundamentales de una propuesta curricular

En el marco del proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en Matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión de profesores” financiado por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander y el Ministerio de Ciencia y Tecnología de Colombia; se está trabajando en la construcción de una

propuesta curricular con la que se espera atender la diversidad en el aula desde la clase de Matemáticas.

Los elementos fundamentales de la propuesta son:

Flexibilidad: Según el MEN 2013 la flexibilidad se relaciona con la adaptabilidad para responder a la diversidad cultural y social, ya que se parte del reconocimiento de la realidad de todas y todos los estudiantes en la educación es dinámica, por ello, el currículo debe n ser susceptibles de revisión, modificación y permanente actualización como parte del carácter procesal de la educación inclusiva.

Adaptabilidad: implica que la educación debería ser compatible con los requerimientos, interés y condiciones específicas de todos los niños en las sociedad y comunidades de contextos sociales y culturales y transformativos, específicamente de niños con discapacidades o de grupos minoritarios (Köster, 2016).

Dentro de esas dos definiciones se tiene previsto posibilitar actividades que atiendan a todos los estudiantes, de acuerdo con sus características y formas diferentes de aprender. A la luz de la literatura revisada con relación a las diferentes Necesidades Educativas Especiales, se reconoce que en cada una de ella existe un espectro amplio que puede determinar si ésta se clasifica en: severo, profundo, moderado y leve. De allí, el proyecto determinó abordar los objetos matemáticos de estudio con cuatro (4) niveles de profundidad diferente y desde la perspectiva de inclusión todos los alumnos abordan el mismo objeto de estudio acercándose a él con propósitos de aprendizaje diferente.

- Diseños de profundidad 1: Las actividades de este diseño deben proporcionar múltiples representaciones del objeto matemático de estudio, especialmente representaciones concretas que permitan evidenciar atributos de los números y de las formas. Las situaciones problemas para este

nivel deberán llevar instrucciones sencillas, que preferiblemente tengan poco texto, con mayor contenido visual, auditivo y que inviten a la manipulación de material concreto (geoplanos, regletas, papel, plastilinas, stickers, etc.). Además, el diseño debe proporcionar múltiples formas de acción y expresión como el uso de palabras claves mediante texto alternativo (imágenes, tablas, bits de información, video, fotografía, material físico o digital, títeres, etc.) con el fin de activar la percepción auditiva, visual, táctil de los estudiantes y así promover actividad matemática en ellos. De igual manera, en este diseño se requiere del acompañamiento permanente del profesor, fundamentalmente, para que puedan apoyar al estudiante en la medida que lo necesite, por ejemplo ayudándolo a hacer conexiones y recordándoles reiterativamente información. Es importante posibilitar en los diseños de este nivel, diferentes formas de implicación, a través trabajo colaborativo con pares y de socialización permanente de sus avances frente al grupo, esto mediante el tratamiento de situaciones y necesidades cotidianas.

- Diseño de profundidad 2: Para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión y comunicación priorizando actividades de resolución de problemas que impliquen la interpretación de información presentada de forma verbal, numérica o gráfica, mediante material visual, auditivo y concreto. El diseño debe proporcionar múltiples formas de acción y expresión al utilizar situaciones culturalmente significativas de los estudiantes. Las situaciones problemas para este nivel deberán llevar instrucciones sencillas con texto moderado que impliquen la conexión de información para comprender y resolver una situación. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión dando lugar a las expresiones orales, gestuales, pictóricas, entre otras posibilidades de producción. De igual manera en este diseño se propone la

mediación del docente que permita ir valorando el paso a paso, para dar nuevas instrucciones hasta el logro del propósito previsto. En este nivel sigue siendo importante el trabajo colaborativo con pares y de socialización permanente de sus avances frente al grupo, no obstante se requiere ir dando autonomía para ir fortaleciendo el uso de los conocimientos aprendidos en la solución de situaciones y necesidades cotidianas. Para ello, el profesor puede dar apoyo con material o representaciones concretas (tapas, ábaco, software, etc.) que puede ir retirando en la medida que el estudiante avanza.

- Diseño de profundidad 3: Para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión y comunicación priorizando actividades de resolución de problemas que impliquen la abstracción de interpretación presentada de forma verbal, numérica, gráfica, tabular con diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software.) permitiendo la manipulación, variedad de feedback, y estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas para que los estudiantes construyan expresiones numéricas o algebraicas que permitan modelar una situación problema del contexto. De igual manera, en este nivel las actividades deben posibilitar el desarrollo de procesos matemáticos abstractos y con un lenguaje matemático preciso. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión haciendo uso del lenguaje matemático acorde con el objeto matemático de estudio. De igual manera en este diseño el docente asumirá la postura de mediación coadyuvando al estudiante para que se acerque y construya los objetos matemáticos según el propósito establecido. En este nivel es importante posibilitar variadas forma de implicación permitiéndole al estudiante mantenerse atento y motivado al resolver y discutir sobre situaciones del contexto matemático y cotidiano.

- Profundidad 4: Para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión, comunicación y argumentación priorizando actividades de resolución, deducción y planteamiento de conjeturas matemáticas con el uso de lenguaje matemático formal. Se sugiere promover la resolución de problemas con la mediación de diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software) permitiendo la visualización, variedad de feedback, argumentación y desarrollo de estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas pero que los estudiantes modelen situaciones del contexto (matemático y no matemático), justificando y argumentando sus procedimientos y deducciones. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión haciendo uso del lenguaje matemático formal propio del objeto matemático de estudio. De igual manera en este diseño el docente asumirá la postura de mediador, coadyuvando al estudiante para que acerque y profundice en sus los objetos de estudio hasta donde su interés, motivación y creatividad se lo permita, de esta forma se da lugar a las múltiples formas de implicación, siempre invitándolo a discutir y exponer avances con sus pares académicos y la comunidad educativa.

En particular, en este trabajo se desarrolló el diseño didáctico en un nivel de profundidad 2, 3 y 4. Se omite el nivel de profundidad 1, considerando lo que nos dice Velandia et al. (2018), muestran en su investigación que en Colombia algunas instituciones de se reportan de 36 estudiantes matriculados muy pocos llegan con una discapacidad o un grado de dificultad profundo que agregar datos que sustenten que personas con dificultades profundas llego en menor medida.

La propuesta curricular expuesta por Parada (2022) plantea que los diseños de clase cuenten con cuatro momentos, descritos de la siguiente forma

- Momento 1: Este es el espacio introductorio respecto a un nuevo objeto de estudio, de forma motivadora, lúdica, notas históricas, etc....
- Momento 2: En este momento se posibilita la matematización del objeto de estudio, además requerirá intervenciones mediadoras por parte del docente.
- Momento 3: esta es la parte práctica donde los estudiantes afirman los saberes construidos hasta el momento.
- Momento 4: es la parte evaluativa que se encarga de valorar el desempeño del alumno.

La descripción a profundidad de los momentos del diseño, se presentarán en la sección 4.4. descrita en la metodología de la investigación.

Los elementos teóricos y conceptuales citados en este apartado se verán reflejados en el diseño construido que reportaremos en los siguientes capítulos.

4. Metodología de la investigación

En este capítulo se describe la metodología de diseño y desarrollo curricular bajo el enfoque de Diaz-Barriga et al, (1990), para responder al objetivo de investigación. Arredondo (1981) citado por Díaz-Barriga (1990) menciona que el diseño es un proceso que consiste en cómo se encuentre organizado el currículo y su estructura, esta investigación comprende cuatro fases que se describen a continuación.

4.1 Fase I: Revisión de Estándares Básicos de competencias y DBA

Los documentos aquí presentes son políticas nacionales que apoyan la construcción del currículo en matemáticas, durante esta revisión se identificaron aspectos relevantes de la función lineal los cuales son:

- Para los Estándares Básicos de Competencia, al realizar el mapeo del estándar se encontró ubicado en el grado noveno el siguiente: *“Análisis en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familia de funciones polinómicas, racionales exponenciales y logarítmica”* (MEN, 2006, p.87).

Para la construcción del diseño que se está reportando aquí, se consideró el estándar anterior porque al revisar los documentos oficiales de grados de décimo y undécimo no aparecen explícitos los objetos relacionados con cambio y variación. Sin embargo, en los DBA, allí se encuentran en décimo grado el siguiente derecho:

“Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes” (MEN, 2016, p.77).

El derecho antes citado es el eje central del diseño construido, el cual se adaptó para el grado undécimo.

4.2 Fase II: Exploración del DUA

Esta fase consistió en la revisión de los principios y pautas rectores del DUA, para analizar como se puede tener en cuenta a la hora de construir el diseño, para ello se trabajó de la siguiente manera: primero el objeto matemático de estudio el cual es la función lineal, que responde al que

de esta investigación, luego se seleccionó un contexto como recurso didáctico y finalmente se analizaron posibles actividades que posibilitaran las diferentes formas de representación, expresión e implicación que propone el DUA,

4.3 Fase III: Diseño de la Malla curricular orientada a la función lineal.

Esta fase se basó en la construcción de la malla curricular cuyo objetivo es ayudar en la construcción del diseño. Para la construcción de esta malla se tuvieron en cuenta tres niveles de profundidad, una pregunta problematizadora, los propósitos por pensamiento en nuestro caso el pensamiento variacional y numérico junto con los descriptores de los procesos.

La finalidad de esta fase fue el desarrollo de una malla curricular alrededor del estudio de la función lineal, teniendo en cuenta que la investigación aquí presente se acogió a la definición de la malla curricular que es la estructura de como los docentes abordan el conocimiento desde preescolar hasta undécimo grado. Por tanto, la malla finalizada y ajustada se puede visualizar en el apéndice A.

Para dar continuidad al desarrollo de este apartado, se presenta la siguiente pregunta problematizadora “*¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en el hogar?*”, cuyo propósito es incentivar a los estudiantes a indagar y entender un poco acerca de la función lineal en un contexto de la vida cotidiana, y otra de las ideas principales con esta pregunta es dar una conciencia ambiental a los estudiantes a través de la enseñanza de las matemáticas. Los propósitos de esta malla van orientados hacia el pensamiento variacional descritos en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas MEN (1998). Estos describen los

objetivos que se tienen preparados para cada una de las actividades en los niveles de dificultad que se trabajaron, los cuales son Nivel 2, 3 y 4.

Para los descriptores, se tuvieron en cuenta los objetivos de cada actividad, las pautas y principios del DUA, los cuales se encuentran reflejados en los diseños construidos que serán descritos más adelante.

4.4 Fase IV: Construcción del diseño

En esta fase se construyó el diseño, en tres niveles de profundidad (2,3 y 4). Estos diseños parten desde el uso de tecnologías y el uso de un contexto que genere interés en los estudiantes, reflejando en ellos los principios del DUA y las pautas. Cada nivel de profundidad posee una versión docente y la hoja de trabajo del estudiante. Este diseño surge tras la revisión de la cartilla Equivaler 2019 de la ciudad de Buenos Aires-Argentina.

Teniendo como referente teórico las categorías mencionadas por Ruiz (1998) y los obstáculos mencionados por Sierpínska (1994), la construcción del diseño didáctico se basó en la enseñanza de la función lineal a raíz de un contexto que logre llamar la atención de los estudiantes.

4.4.1 Primer Momento

En el nivel de profundidad 2, este diseño comienza primero contando la historia de Martín Figura 1 un estudiante preocupado por el consumo del agua en Colombia, este contexto se tiene en cuenta por considerarse de importancia en los estudiantes y también por como lo dice Font (2006) “*en la vida diaria, los problemas son concretos y solo se pueden resolver si las personas*

los consideran como problemas a resolver.”, luego de dar esta pequeña introducción de Martín, se presenta un video con el fin de que los estudiantes puedan conocer un poco acerca del consumo de Agua en Colombia y como es el cálculo respectivo según el valor de los metros cúbicos.

Figura 1.

El problema de Martín

 AHORREMOS EL AGUA 

Martín, un estudiante de undécimo grado se preocupa mucho por el consumo de agua en su hogar, él encuentra un video en internet para entender cómo funciona el cobro de agua por metro cúbico (m^3).

El video que encontró Martín es el siguiente:

<https://www.youtube.com/watch?v=w6NKBzunvhM>

Después de ver el video e investigar un poco más, Martín realiza una Tabla 1 de cobro por estrato para tener organizada dicha información, donde incluye el cargo fijo mensual (CF) por estrato. Además, encontró que el valor por m^3 de consumo de agua en Colombia es de \$1.281



Tabla 1 Tarifas de cobro por estrato

Estrato	Subsidio/ contribución (%) (S/C)	Cargo Fijo mensual (CF)
Estrato 1	-70%	\$6.773
Estrato 2	-40%	\$6.773
Estrato 3	-15%	\$6.773
Estrato 4	0	\$6.773
Estrato 5	50%	\$10.160
Estrato 6	60%	\$10.837

Luego de esta presentación, y antes de dar comienzo a las actividades venideras, se presenta una explicación del cómo se debe calcular este valor de consumo, teniendo en cuenta las orientaciones del profesor. En este momento, se espera mostrar la función lineal como una expresión analítica mediante la explicación como se ve en la

Figura 2.

Figura 2.*Cálculo del consumo del agua*

Martín no comprende bien de donde sale el valor total de la factura, por lo que el profesor le explica con un ejemplo particular de consumo igual a $7m^3$, para el estrato 1

$$(1.281 \times 7 + 6.773) \times 0.30 = 4.722$$

Debe multiplicar el consumo de metros cúbicos ($7m^3$), por el valor del metro cúbico (1281), luego a ese valor le suma el cargo fijo mensual (6.773), y a ese resultado se multiplica por el subsidio ($1 - 0.70 = 0.30$) Además, el profesor le recuerda a Martín que si en el hogar se consume más desde $13 m^3$ se aplica la tarifa sin subsidio es decir la tarifa del estrato 4.

La explicación aquí presente se encuentra en los dos siguientes niveles de profundidad, los cuales serán mencionados más adelante. Luego de que los estudiantes tengan claro el contexto, con las respectivas orientaciones del profesor. Se procede a iniciar la actividad que se plantea como introducción la cual está en la Figura 3. En esta actividad se pretende trabajar el proceso de razonamiento tal y como lo menciona el MEN (1998).

Figura 3.*Actividad Inicial*

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor total de cobro
$9m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
$5m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
$11m^3$	$(\square \times \square + \square) \times \square$	6.259
$7m^3$		
$0 \leq x \leq 11$		

Esta actividad tiene como fin encontrar una expresión analítica del consumo de agua en el hogar, la Figura 3, representa un hogar de estrato 1-Clima Frío, en el inciso b y c, de nuestro diseño se presentan la misma actividad para los estratos 2 y 3. Del inciso c) al e) se busca que el estudiante pueda considerar la expresión analítica que obtuvo al momento de trabajar el inciso anterior. Siguiendo con la actividad en el inciso f) se espera que los estudiantes logren identificar la diferencia entre los valores obtenidos en las tablas anteriores, esto con el fin de que el estudiante logre identificar esta variación como una variación constante, dando así a entender la función como variación descrita por Ruiz (1998), tal y como se puede ver en la Figura 4

Figura 4.

Diferencia entre Valores

- f. Con la información anterior complete la siguiente tabla, escoja un dato por cada tabla luego calcule la diferencia de pagos del estrato 2 y 3 con respecto al estrato 1. Explique a que se debe esta diferencia

Estrato	Valor	Diferencia
1		
2		
3		

En cuanto al nivel de profundidad 3 y 4 tiene la intención es similar al nivel de profundidad 2, sin embargo, para estos niveles se espera una dificultad mayor para cada uno de los objetivos, en cuanto a las habilidades a desarrollar en los estudiantes, alrededor del proceso de razonamiento y comunicación con el fin de que los estudiantes logren comprender el concepto de función lineal. Estos niveles de profundidad fueron diseñados teniendo en cuenta la construcción del concepto de la función como variación y la representación analítica descrita por Ruiz (1998).

En la Figura 5 se presenta un comparativo entre los niveles de profundidad 3 Figura 5a y nivel de profundidad 4 Figura 5b, donde se pueden observar los niveles de complejidad. En estas dos actividades se pretende abordar el razonamiento y la comunicación tal y como lo describen Fiallo y Parada (2018) quienes proponen el desarrollo del proceso de razonamiento como una forma de pensar a partir de la necesidad de asegurar la validez de una afirmación, con el fin de que el docente no se centre en el aprendizaje de los contenidos y algoritmos para la solución de problemas matemáticos. El proceso de razonamiento en la Figura 5 se ve reflejado cuando el estudiante analiza y trata de interpretar la explicación dada en la

Figura 2.

La comparación anterior logra reflejar la dificultad entre ambos niveles, por una parte, para el nivel de profundidad 3 (Figura 5), el estudiante debe hacer uso de la explicación presente en la Figura 2. Para encontrar la expresión analítica de la actividad, para el nivel de profundidad 4 (Ver Figura 5b), se espera que a partir de la explicación por parte del profesor, los estudiantes

Figura 5.*Comparación Niveles de profundidad*

a)

Tabla 2 Estrato 1 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
$9m^3$		
$10m^3$		
$5m^3$		
$7m^3$		
$0 \leq x \leq 11$		

b)

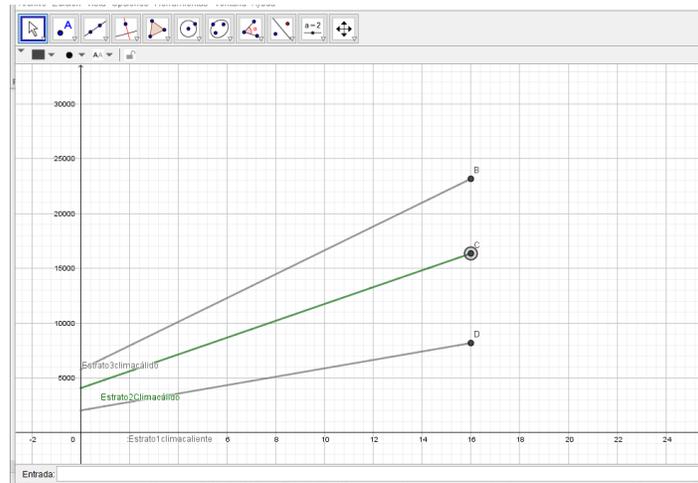
Tabla 2 Estrato 1 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
		4.848
		5.232
		6259
		4.722
$0 \leq x \leq 11$		

logren identificar la expresión analítica y el consumo promedio en metros cúbicos, esto con el fin de que el estudiante de nivel 4 encuentre dicha expresión a raíz de los datos dados.

4.4.2 Segundo Momento

En el nivel de profundidad 2, lo ideal es dar camino a las diferentes representaciones que pueden presentarse en esta actividad, para ello esta actividad se presenta en Applets de GeoGebra, aquí se comienza con una breve explicación y una presentación de las rectas que se generan al modelar los consumos de los diferentes estratos tal y como se trabajó en el momento anterior, los estratos para el nivel de profundidad 2, se observan en la Figura 6

Figura 6.*Applets Profundidad 2*

Esta actividad tiene como fin, que el estudiante manipule y nuevamente pueda observar la variación ya desde un ámbito más tecnológico, donde ellos puedan observar mediante la hoja de cálculo los valores que se pueden observar, y allí poder comparar y analizar los diferentes valores esto se trabajan en el inciso f) al j), por otra parte, en este nivel de profundidad se trata de fortalecer la definición de pendiente como razón de cambio constante esto con el fin que el estudiante logre visualizar geoméricamente este comportamiento, para ello se presentaran algunas conceptualizaciones de la pendiente como se presenta en la Figura 7.

Figura 7.*Pendiente*

CONCEPTUALIZACIÓN:

Una forma de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha se llama pendiente. Definimos la pendiente, para cualquier par de puntos, como la razón de cambio entre el valor a pagar por cada metro cúbico. Simbólicamente:

La **pendiente** m de una recta, no vertical, que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{variación del precio}}{\text{por metros cúbicos}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para finalizar este momento se presenta la ecuación de la recta tal y como se muestra en la Figura 8 estas definiciones se encuentran a lo largo de los otros dos niveles de profundidad.

Figura 8.*Ecuación de la recta***FORMULA DE LA ECUACION DE UNA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO**

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto (x_0, y_0) en general:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

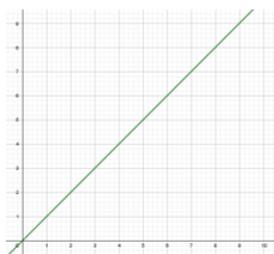


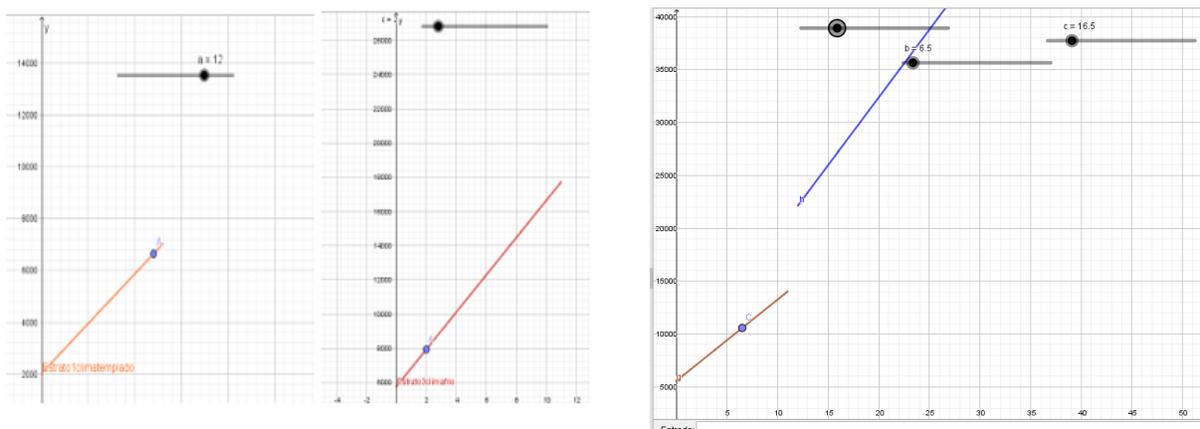
Figura 1 Recta $y=x$

Para el nivel de profundidad 3, se presentan tres Applets por separado, con el fin de trabajar el mismo concepto del nivel anterior, sin embargo, para este nivel en las preguntas no hay cambios significativos, por otra parte, el mayor cambio se evidencia en el nivel de profundidad 4 como se puede observar en la Figura 9, donde se procede a trabajar una función por partes para los diferentes estratos, esto con el fin de que los estudiantes logren analizar el comportamiento después

de cierto consumo de metros cúbicos, lo importante es que al terminar esta actividad logren cada uno socializar los en los diferentes estratos, con el fin de dar conocimiento a los razonamientos que hicieron a la hora de manipular los Applets.

Figura 9.

Applets niveles de profundidad



En este momento de la clase también se espera que el proceso de comunicación observando grosso modo que los estudiantes identifiquen el comportamiento de los Applets luego de este análisis se pretende que logren socializar y aportar los diferentes argumentos y razonamientos que lograron encontrar.

4.4.3 Tercer Momento

Para un nivel de profundidad 2, se introducen los estratos faltantes los cuales son el estrato 4,5 y 6, este momento tiene como finalidad, evidenciar como los estudiantes logran identificar los datos a través de una información brindada la cual tal y como se observa en la Figura 10.

Figura 10.*Situación Estratos altos*

Martín le plantea dos retos a sus dos mejores amigos, Juan, Andrea y él les plantea la situación para los estratos 4,5 y 6. Vamos a ayudar a Juan a completar la información de la tabla.

Tabla 5 Estrato 4

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 4	10	\$10.160	0	
Estrato 4	11	\$10.160	0	
Estrato 4	"x"			

Andrea, una de las amigas de Martín, decide analizar el consumo para el estrato 5. Ayudémosla a completar la tabla

Tabla 6 Estrato 5

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 5	9	\$10.160	50%	
Estrato 5	8	\$10.160	50%	
Estrato 5	"x"			

Juan se encarga de analizar el consumo para un hogar de estrato 6. Ayudemos a completar la tabla.

En esta actividad se pretende que los estudiantes puedan identificar los valores obtenidos y logren también trabajar la función como gráfica y la función como expresión analítica lo describe Ruiz (1998), lo ideal de este momento es que los estudiantes retomen lo trabajado en los momentos anteriores con el fin de fortalecer y afianzar el conocimiento de la función lineal y su expresión analítica, tal y como se muestra en el inciso a), por otra parte, para el inciso b) el estudiante debe tomar los datos obtenidos en las tablas mencionadas en la Figura 10. Allí se pretende que el estudiante compare los datos y los ubique en un plano cartesiano, con el fin de abordar la gráfica como un elemento fundamental para el aprendizaje de la función lineal.

Para los niveles de profundidad 3 (Figura 11) y 4 (Figura 11) se presenta una situación similar, no se evidencia un poco los cambios significativos del diseño, tal y como se muestra en el comparativo de la Figura 11. Allí nuevamente se pretende que los estudiantes logren interpretar la

función como gráfica, por ello el pequeño cambio que se logra evidenciar en los primeros momentos

Figura 11 .

Comparativo

a)

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo	contribución	Valor
Estrato 4	24	\$11.623	0	
Estrato 4	25	\$11.623	0	
Estrato 4	"x"			

Andrea, un de las amigas de Martín, decide analizar el consumo para el estrato. Ayudémosla a completar la tabla

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 5	24	\$17.436	50%	
Estrato 5	25	\$17.436	50%	
Estrato 5	"x"			

Juan se encarga de analizar el consumo para un hogar de estrato 6. Ayudemos a completar la tabla.

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 6	24	\$18.599	60%	
Estrato 6	25	\$18.599	60%	
Estrato 6	"x"			

b)

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo	contribución	Valor
Estrato 4	24	\$11.623	0	
Estrato 4	25	\$11.623	0	
Estrato 4	"x"			

Andrea, un de las amigas de Martín, decide analizar el consumo para el estrato. Ayudémosla a completar la tabla

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 5	24	\$17.436	50%	
Estrato 5	25	\$17.436	50%	
Estrato 5	"x"			

Juan se encarga de analizar el consumo para un hogar de estrato 6. Ayudemos a completar la tabla.

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 6	24	\$18.599	60%	
Estrato 6	25	\$18.599	60%	
Estrato 6	"x"			

Para dar cierre a esta actividad, se espera que los estudiantes puedan socializar junto con el docente lo aprendido hasta el momento, por otra parte, el cierre tiene como finalidad generar una conciencia ambiental, con el propósito de generar un cuidado del agua el cual se está aprendiendo a través de las matemáticas, estas preguntas presentadas en la

Figura **12**, son las mismas para los tres niveles de profundidad, esto se puede discutir junto con el docente para poder razonar sobre las opiniones de los estudiantes.

El propósito de esta actividad mostrada anteriormente es la de identificar como él estudiante logra interpretar las situaciones de la vida cotidiana teniendo como ayuda el aprendizaje de las matemáticas.

4.4.4 Cuarto Momento

En este momento para todos los niveles de profundidad se presenta la situación de un llenado de tanque, el cual tiene como objetivo identificar la función como proporción como lo menciona Ruiz (1998). Aquí se observará en los diferentes niveles que en algunos se encontrara una función afín y una función lineal, esto se hace con el fin de trabajar en la interpretación y ver como los estudiantes logran relacionar estas pautas en la actividad.

Figura 12.*Conciencia Ambiental*

h. Teniendo en cuenta la información que se trabajó hasta este momento responda las siguientes preguntas:

- ¿Considera que los estratos 1,2,3 pueden malgastar el agua? Explique muy bien su respuesta

- ¿Los estratos 4, 5 y 6 deben ahorrar más el agua que los estratos 1,2 y 3? Explique su respuesta

- En términos de conciencia ambiental, ¿Qué les aconseja a las personas para incentivar el ahorro del agua desde el consumo en el hogar?

Para el nivel de Profundidad 2, se abre la actividad con la situación presentada anteriormente, sin embargo, en este momento se encuentran una situación con una tabla tal y como se muestra en la Figura 13, esta tabla aquí mencionada tiene como finalidad la interpretación de la función como proporción, para ellos los estudiantes debe analizar bien la situación e identificar qué es lo que sucede con esta información.

Figura 13.*Tabla llenado Nivel de Profundidad 2*

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	0	3	6	9	12	15

Para esta parte se espera trabajar el proceso de representar la variación tal y como lo definen Fiallo y Parada (2018). Se espera que a través de la información que brinda la tabla en la Figura 13, se logre trabajar la interpretación de representaciones, allí también se presenta la función como proporción tal y como lo define Ruiz (1998).

En este momento también se presenta un laboratorio de Matemáticas el fin de esta actividad es que el estudiante logre, comprender y analizar la situación de un llenado de un valde o tasa en situaciones de la vida cotidiana, allí podrán observar la razón de cambio y logren interpretarla como pendiente, para ello se trabajan con algunos implementos que son nombrados en la Figura 14

Figura 14.*Vamos a la práctica*

Para este experimento necesitamos:

- > Una taza o Valde que indique la cantidad de litros que posee
- > Un cronómetro

Diligencia los datos de la tabla con ayuda del profesor:

Volumen de agua (l)	Tiempo de llenado (s)
1	
2	
3	
4	
5	

Para esta actividad se presenta la toma de datos y unas preguntas orientadas por el docente, las cuales se presentan en la Figura 15, esto con el fin de que los estudiantes puedan tomar estos tiempos y puedan ver la razón de cambio promedio tomando los datos que pondrán en las preguntas mostradas.

Figura 15.

Preguntas laboratorio

¿Cuánto volumen de agua habrá en el recipiente al cabo de segundos?

¿Cuánto volumen de agua habrá en el recipiente al cabo de segundos?

Para el nivel de profundidad 3 se vuelve a presentar la misma situación, sin embargo, en este momento la complejidad aumenta ya que la tabla como se muestra en la

Figura **16**, no se encuentra completa pues la idea es que los estudiantes logren abordar el proceso de razonar sobre los fenómenos de variación y la puedan completar.

Figura 16.*Nivel de profundidad 3*

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	0	3	6			

1. Realice un análisis del comportamiento que se presenta en la tabla

El objetivo de esta actividad es el mismo que se presenta en el nivel de profundidad 2, con el fin de afianzar los procesos en los estudiantes que se categorizan en este nivel.

En este momento también se presenta un laboratorio de Matemáticas como puede observar en la Figura 14, pero el cambio significativo en este apartado son las preguntas que se presentan en la

Figura 17

Para esta actividad también se presentan las preguntas en la Figura 15, pero a esta sección se le agrega unos cálculos con los tiempos tomados, donde el estudiante debe razonar e interpretar el tiempo de llenado, esto con el fin de fortalecer los procesos que se evidencian en este diseño.

Figura 17.*Laboratorio Nivel 3*

¿Por cuánto tiempo debo dejar la llave abierta para que el volumen de agua alcance los 5,4 lt?

Use la razón de cambio promedio para encontrar la representación algebraica del volumen de agua con respecto al tiempo.



Para el nivel de profundidad 4, la actividad tiene el mismo objetivo de los niveles anteriores sin embargo la complejidad para este momento de la clase se presenta en la Figura 18

Figura 18.*Nivel de Profundidad 4*

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	5	8	11			

En esta actividad, se pretende que el estudiante, a pesar de estar trabajando con la función lineal, identifique que lo que se encuentra presente en esta tabla es una función afín, por ello se

pretende trabajar el proceso de comparación tal y como lo hablan Fiallo y Parada (2018), donde él debe compara y calcular las magnitudes presentes y razonar acerca de los procedimientos analíticos a través del análisis de la tabla.

Los diseños mencionados anteriormente se encuentran en los Apéndice B, Apéndice C y Apéndice D

4.5 Fase V: Proceso de revisión del diseño

En este apartado se describirán las formas en que el diseño fue revisado para ser aprobado y presentado en este trabajo de grado, el cual está en marcado en el proyecto de investigación 70783.

4.5.1 Validación por la rúbrica

Para dar cumplimiento con el objetivo de la investigación, se valoró el diseño didáctico al comité evaluador del proyecto de investigación 70783: La rúbrica valora la forma como se implementan las pautas y los principios del DUA, revisando la coherencia horizontal y vertical de los propósitos general de diseño en relación con la pregunta y en relación con los niveles de profundidad.

Los comentarios y resultados para esta rúbrica se tendrán en cuenta para el ajuste de los diseños en el capítulo 5.

4.5.2 Revisión del diseño por parte de profesores en formación

Esta fase se realizó con los estudiantes Daniel, Sofia y Thomas (seudónimos) que cursaban la asignatura de Seminario de Práctica de la Universidad Industrial de Santander, se les presentó el diseño a través de la profesora titular del curso. Ellos implementaron el diseño en un estudiante con discapacidad visual a quien llamaremos Christian, realizando las debidas adaptaciones teniendo en cuenta las necesidades del estudiante. La intención de esta implementación era ver la forma como el estudiante comprendía las preguntas, las formas de responder, los tiempos y así analizar la viabilidad del diseño.

4.5.3 Revisión del diseño por parte de una profesora en servicio

Esta fase se realizó con la profesora Sonia (seudónimo) quién trabaja en una institución pública de Sábana de Torres (Santander/Colombia). La profesora hizo parte de actividades de formación al interior de una comunidad de práctica, en la que los profesores participantes analizaron los diseños construidos desde el proyecto. La profesora, implementó el diseño con estudiantes de 11°, estudiantes que oscilan entre los 15 a 16 años,

4.6 Fase VI: Ajustes a partir de la revisión

En esta fase, y teniendo en cuenta las observaciones emergentes de la rúbrica de evaluación y las sugerencias de los profesores que implementaron el diseño, se realizaron ajustes para lograr

una versión refinada del diseño inicial. En aras de dar cumplimiento al objetivo se presentarán los debidos ajustes en el capítulo 5.

5. Estudiando el recibo del agua

En este capítulo se presentan los resultados principales que intentan responder a la pregunta de investigación *¿Cómo favorecer la inclusión en clase de matemáticas en un curso de undécimo grado que estudia las funciones lineales?*

Estos resultados se presentan en las siguientes categorías:

- i. Selección de un contexto de interés atendiendo las características de los estudiantes.
- ii. Atender a los Principios y pautas del DUA.
- iii. Considerar los aspectos epistemológicos de la función lineal.

5.1 Selección de un contexto de interés para atender a las características de los estudiantes

Para este apartado se usaron los intereses y las motivaciones que están presentes en los estudiantes, tal y como nos lo dicen Font (2006) cuando menciona que *“en la vida diaria, los problemas son concretos y solo se pueden resolver si las personas los consideran como problemas a resolver”*.

En este apartado se enfocará el análisis sobre la forma en que se integraron los aspectos teóricos referentes al contexto de interés propuestos en el diseño didáctico, en los tres niveles de profundidad.

5.1.1 Validación a través de la rúbrica

El diseño que se elaboró pretende promover la participación de los estudiantes, enfocando el diseño en llamar el interés de los estudiantes, por ello se escogió el consumo del agua en el hogar siendo considerado como un contexto de vital importancia para los estudiantes y este pueda ayudarles a generar una conciencia ambiental. A lo largo del diseño al trabajarse desde esta temática se puede observar que el diseño permite una coherencia tanto horizontal como vertical, tal y como se observa en la Figura 19. Esto nos permite decir que al dar cumplimiento de estas coherencias y la conexión que existe entre los momentos en cada nivel de profundidad favorece la inclusión en el aula, como lo dice Aravena (2020), al llamar el interés de los estudiantes mediante situaciones problemas favorece al estudiante considerando los diferentes ritmos de aprendizaje que se puedan encontrar

Figura 19.

Coherencia Horizontal

III1. Coherencia horizontal (Por diseño)

¿Se observa un desarrollo progresivo en las actividades de cada momento, de cada nivel de profundidad?

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Se ajusta cada actividad a los momentos de cada diseño, según el nivel de profundidad.					X

5.1.2 Valoración por los profesores en formación

Para verificar que el contexto seleccionado favorece la inclusión en la clase de matemáticas, los profesores en ejercicio a través de las actividades identificaron que se cumplió el objetivo del diseño y el contexto fue uno de los factores fuertes para la comprensión acertada de la función lineal a través de éste.

La manera en la que Cristian logra interpretar esta información a través del consumo del agua en el hogar ayuda a los profesores en formación a considerar que el contexto es un factor fuerte (Ver Figura 20), esto se da desde la implementación realizada con Cristian, aunque el diseño en su desarrollo recibió adaptaciones que serán mencionadas en el transcurso de este capítulo. Por lo tanto, los profesores en formación reconocen que se cumplió el objetivo en el que Cristian adopta el comportamiento de la función haciendo alusión a la influencia del contexto en este proceso.

Acerca del primer momento del diseño, los profesores en ejercicio dan por cumplido el objetivo relacionado con la comprensión acertada del contexto del consumo del agua en el hogar y la manera en que Cristian (seudónimo), logra interpretar esta información, con ello se logra observar que el contexto es un factor importante y ayuda a la inclusión en clase de matemáticas, sin importar la discapacidad del estudiante.

Desde la implementación realizada por los profesores en formación, nos hablan acerca del contexto como un factor determinante (Ver Figura 20) para el caso de estudio en Cristian para que lograra reconocer el comportamiento de la función lineal, sin embargo, en el momento 3 de la clase se tuvo que hacer un cambio de contexto, destacaron la influencia del contexto en el proceso del reconocimiento de la función lineal.

Figura 20.*Apreciación de profesores en formación*

El contexto en cualquiera de los casos fue un factor determinante para que en el caso del estudio realizado Cristian lograra reconocer el comportamiento de la función lineal, pues a pesar del cambio de contexto que tuvo que realizarse del planteado, a la liga colombiana de fútbol, se destaca la influencia del contexto en el proceso de reconocimiento lineal.

5.1.3 Valoración por la profesora Sonia

Para finalizar los aportes por parte de la profesora respecto al uso del contexto facilitaron el interés de los estudiantes, esto se logró tener en cuenta ya que los estudiantes estaban emocionados en el desarrollo del diseño a través del contexto, quienes también aportaron sugerencias a la profesora para realizar ajustes necesarios al diseño. La profesora Sonia dice:

Si, el uso del contexto favorece la inclusión en el aula y esto se ve dado el interés que despierta en los estudiantes a la hora de abordar el diseño.

5.1.4 Reflexiones sobre la selección del contexto

Teniendo en cuenta las valoraciones presentadas anteriormente, se logra identificar que el uso del contexto fortalece y ayuda a la comprensión del objeto matemático, teniendo así una valoración positiva por parte de la rúbrica, los profesores en formación y la profesora en ejercicio, lo cual da a entender lo fuerte que es el uso del contexto para la enseñanza de las matemáticas y como favorece la inclusión en el aula. Por lo anterior, se puede observar que el diseño no requiere ajuste alguno para la situación presentada.

5.2 Atender a los principios y Pautas del DUA

Como se mencionó en el inciso 3.2 acerca de los principios y pautas del DUA, los cuales son uno de los ejes fundamentales para la construcción de los diseños.

En ese sentido, se tiene como objeto matemático la función lineal que hace referencia al *que*, del presente trabajo, el contexto se puede observar al *cómo*, mientras que la inclusión indica el *para qué*.

En este análisis se exponen los resultados de la forma en que se promovieron los principios y pautas DUA en el diseño planteado a través de la valoración por la rúbrica, los profesores en formación y la profesora en ejercicio y teniendo en cuenta el uso del contexto, que posibilitaron o favorecieron el cumplimiento de dichos principios.

5.2.1 Valoración de los principios y pauta a través de la Rúbrica

En este apartado se tendrán en cuenta en como el diseño favorece la inclusión en clase de matemáticas a través de la valoración de la rúbrica, la cual valoró los principios y pautas del DUA.

- **Principio I: Múltiples formas de representación**

El diseño didáctico que se planteó pretende posibilitar distintas formas de representación de la información. En particular, la actividad del primer momento, donde el estudiante debe interpretar la información que se presenta en el video acerca del consumo de agua en Colombia. Se puede considerar que el diseño puede también tener diferentes adaptaciones que este pueda tener para la conceptualización de la función lineal. La información brindada también es presentada en material concreto como lo es el uso de GeoGebra tal y como lo dice Salazar (2018),

donde presenta una secuencia didáctica con el uso de GeoGebra para la enseñanza así como se presenta el segundo momento, esto con el fin de trabajar la pauta 1: *proporcionar diferentes opciones para percibir la información*, esto teniendo en cuenta que también se puede presentar situaciones donde se adapten los diseños, ya sea que el estudiante realice las gráficas o se pueda llevar un material manipulable (geoplano, etc.)

Por otra parte, para evidenciar la pauta 2: *proporcionar múltiples opciones para el lenguaje y los símbolos*, se presentan las situaciones donde el estudiante manipula varios conceptos que poseen de una forma diferente es decir cuando hablamos de razón de cambio promedio, cuyo objetivo es que el estudiante identifique esta razón como la pendiente o como se presenta en el momento 4, donde el estudiante en cada nivel de profundidad debe interpretar el enunciado que se presenta en este apartado.

Así mismo, se trabaja la pauta 3: *proporcionar opciones para la comprensión*, a lo largo del diseño se encuentran, elementos fundamentales para el apoyo de los conceptos, enunciados como ¿Sabías qué? O ¿Recuerda que? Estos recursos dan referencia a los conceptos que debe conocer el estudiante a la hora de abordar una función, en nuestro caso la función lineal, estos son: la ecuación de una recta, la pendiente como razón de cambio, el dominio y la gráfica de una función; por lo tanto, estos permiten el desarrollo de un lenguaje matemático y favorece la comprensión del contexto. Complementando lo anterior, Giraldo (2012) nos habla acerca de cómo enseñar la función lineal en diferentes representaciones las cuales permiten la comprensión del concepto, para ello se basa en el uso de tecnologías.

Como evidencia del cumplimiento del primer principio del DUA ver Figura 21 **Figura 20**, se muestra la valoración mediante la rúbrica en cuanto al primer principio. Sin embargo, se observa

una calificación de 3, en dichas pautas lo que nos llevó a realizar los debidos ajustes al diseño los cuales están presentes en el Apéndice B

Figura 21.

Valoración primer principio del DUA: múltiples formas de representación

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona diferentes opciones para percepción.			X		
Pauta 2. Proporciona múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y simbólicas			X		
Pauta 3. Proporciona opciones para la comprensión			X		

- **Principio II: Múltiples formas de acción y expresión**

El diseño didáctico que se planteó posibilita a los estudiantes múltiples respuestas, estas múltiples formas de acción y expresión se presentan a lo largo de los niveles de profundidad 3 y 4. Sin embargo, existen espacios que se presentan en la versión docente, donde el estudiante puede expresar y debatir acerca de lo encontrado en las actividades en el desarrollo del diseño.

En particular, el diseño posee actividades donde el estudiante debe tomar datos, ya sea mediante una gráfica o de manera verbal. Un ejemplo claro se encuentra en las actividades finales del momento 1, cuando al finalizar los estudiantes deben socializar lo que identificaron y cómo se comportan los datos, cuando calculan la diferencia entre los valores obtenidos de cada estrato. Por otra parte, se encuentra también el segundo momento donde los estudiantes al manipular GeoGebra puedan tomar datos e interpretar la función lineal en un consumo de agua. Allí se le sugiere al docente dar la libertad para que el estudiante escriba las ideas a como el las entienda, y luego poder

socializar dichas ideas, esto con el fin de dar cumplimiento a la pauta 4: *proporcionar múltiples medios físicos de acción.*

El diseño sugiere al docente, también una forma en que ellos puedan abordar las ideas, mediante el uso de pistas, esto puede observarse en el primer momento cuando la sugerencia al docente es que pueda dar una orientación del cálculo del consumo del agua en Colombia, en el segundo momento, en dado caso si el docente no cuenta con un aula de computación, puede también dar las ideas escritas o graficas en el tablero, allí tratando de trabajar las diferentes gráficas, o puede ayudarse con el uso del geoplano. Esto da como cumplimiento a la pauta 5: *proporciones para la comunicación y la expresión.*

Para la pauta 6, se presentan situaciones donde el estudiante valora su aprendizaje y lo que este diseño le está aportando, lo cual es generar una conciencia ambiental a través del aprendizaje de las matemáticas. Esto se presentan también en el momento 3 del diseño donde el estudiante debe interpretar lo que aprendió durante el momento 1 y 2, allí debe relacionar todo lo que se ha comprendido para trabajar con los estratos faltantes (estratos altos). Lo anterior se sustenta con Aravena (2020), quien habla acerca del interés de los estudiantes con respecto a las representaciones y las situaciones problemas en matemáticas dando así una enseñanza diferente considerando múltiples formas de acción, ya que esto ayuda al estudiante a poder desarrollar formas de expresarse en el aula.

En la valoración de la rúbrica con respecto a este principio como se observa en la Figura 22, fueron valoradas, en calificación de 3, al tener estos resultados se analiza nuevamente el diseño para realizar los debidos ajustes para dar cumplimiento a este principio los cuales se van a encontrar en el apartado 5.2.4.

Figura 22.

Proporcionar múltiples formas de expresión

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para la interacción física.			X		
Pauta 2. Proporciona opciones para la expresión y la comunicación.			X		
Pauta 3. Proporciona opciones para las funciones ejecutivas.			X		

- **Principio III: Múltiples formas de implicación**

El diseño que se elaboró promueve la participación de los estudiantes en el aula de clase, por ello se plantean situaciones de motivación captando el interés de los estudiantes. Esto se ve al observar el primer momento cuyo objeto es orientar al estudiante hacia el tema del consumo del agua y a la construcción de los conceptos de variable, variación y expresión. Por esto se pretende motivar al estudiante mediante el uso de SGD, los cuales ayudan al estudiante a generar un interés hacia la clase y generar curiosidad por su propio aprendizaje, esto favorece al desarrollo de las actividades posteriores en el aula.

Cuando se pensó en la construcción del diseño a lo largo de los momentos, estos se estructuraron de tal forma que los estudiantes se mantuvieran bajo un mismo interés, lo cual permite a su vez que el diseño sea adaptable para cualquier situación en caso de que lo requiera el docente, considerando el interés del estudiante. Con lo anterior se cumple la *pauta 7: proporcionar múltiples formas de captar el interés*. Esta pauta se cumple a su vez en los Applets del diseño dado que esto puede generar un interés en el estudiante por permitir que lo puedan manipular y razonar por cuenta propia. Para considerar el cumplimiento de la *pauta 8: proporcionar opciones para*

mantener el esfuerzo y la persistencia. El uso del contexto para la enseñanza de este objeto matemático ayudo a delimitar el tema y los niveles de complejidad requeridos de acuerdo con la evolución de los conceptos involucrados.

Sin embargo, la pauta 9: *proporcionar opciones para la auto regulación*, busca que el estudiante pueda controlar sus propias emociones parte fundamental del aprendizaje, y esto le ayude a mantenerse motivado, por ello es fundamental, el trabajo del contexto el cual puede ayudar al estudiante a generar una conciencia ambiental y poder tener su atención, por otra parte, GeoGebra también es un factor fuerte a la hora de que el estudiante se motive y por ello la valoración de este principio mediante la rúbrica tuvo fue positiva, sin embargo, no se cumplen todas las pautas en una totalidad de 5, así que se presentarán los debidos ajustes en el apéndice B. Lo anterior se puede observar en la Figura 23

Figura 23.

Proporcionar múltiples formas de implicación

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para captar el interés				X	
Pauta 2. Proporciona opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia.				X	
Pauta 3. Proporciona opciones para la autorregulación.				X	

Para finalizar, teniendo en cuenta el potencial del diseño a través de la valoración de la rúbrica, se visualiza la intención didáctica en las actividades planteadas, desarrollando el objeto matemático de estudio, a medida que el diseño avanza a través de los momentos se encuentran

diferentes representaciones que se articulan entre ellas, el diseño tiene una valoración positiva tal y como se observa en la Figura 24.

Figura 24.

Valoración general del diseño

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Las actividades propuestas responden a lo indicado en la tabla de propósitos y descriptores				X	
Se observa el desarrollo del objeto matemático desde lo didáctico*				X	
Las instrucciones, dentro del diseño, están acordes con el nivel de profundidad y el grupo de grados**				X	

5.2.2 Evidencia del DUA desde la mirada e los profesores en formación

En este apartado se podrán observar lo mencionado por los profesores en formación donde se puedan reflejar algunos de los principios y pautas del DUA, con el fin de favorecer la inclusión a través del diseño didáctico.

- **Principio I: Múltiples formas de representación**

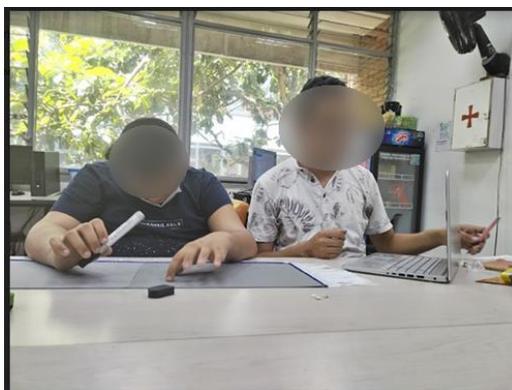
Para identificar y dar cumplimiento a las pautas de este principio, en el diseño se observó la investigación de los profesores en formación, para reconocerlas y mostrar que se encuentran allí presente.

Al iniciar la implementación los profesores en ejercicios presentaron el video a Cristian de manera que este escuchara y comprendiera la información que allí se encontraba, luego para iniciar las actividades del diseño, los profesores pudieron reflejar la pauta 1. Luego al permitir que el

estudiante, escriba la información en lenguaje braille, esta ayuda a la pauta 2. Para finalizar la pauta 3 se encuentra presente en la presentación de la información a través de diferentes medios ayudando a Cristian a comprender la información y dar el cumplimiento a esta. Esto se puede observar en la Figura 25.

Figura 25.

Presentación del video



Nota: Presentación de la información a Cristian

- **Principio II: Múltiples formas de acción y expresión**

En el transcurso del diseño se presentaron actividades que ayudan a reflejar este principio, por ejemplo, para este caso de estudio se adaptaron algunas preguntas y materiales para proporcionar la pauta 4. En material se presentó un plano cartesiano echo en braille tal y como se observa en la

Figura 26.

Figura 26.

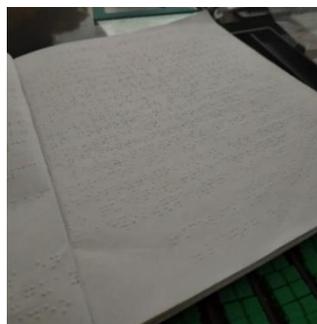
Plano Cartesiano en Braille



Por otra parte, los profesores en formación buscaron medios para la expresión de las ideas del estudiante, el cual tenía el hábito de tomar apuntes, esto le ayudo al estudiante a mostrar sus ideas y aquello que estaba entendiendo, esto se puede observar en la Figura 27. Se puede observar que esta actividad presentada en un programa diferente a GeoGebra ayuda a ver el desarrollo de la pauta 5, en este caso de estudio la pauta 6, se ve reflejada en el avance del diseño, ya que en cada momento se socializaba con el estudiante, aquella información que se brinda, y los resultados que iba obteniendo.

Figura 27.

Escritura por Cristian



- **Principio III: Múltiples formas de implicación**

Durante la implementación Cristian logró despertar un interés y una motivación por el consumo de agua en su hogar, sin embargo, el diseño tuvo que adaptarse en una situación en específico en el momento 3, donde se cambia a un contexto de interés para el estudiante el cual es la liga de fútbol colombiana con esto se logra captar el interés de Cristian, y se puede decir que se cumple la pauta 7. Para el cumplimiento de la pauta 8, se tuvieron presente la participación del estudiante, y el contexto tal y como nos lo dicen los profesores en formación fue un factor fuerte a la hora de introducir el concepto de función lineal. Por su parte, la pauta 9, se logra observar cuando el estudiante, sin importar el cambio del contexto se mantiene motivado por aprender a través de las diferentes tecnologías, que utilizaron los profesores en formación, tales como el geoplano.

5.2.3 Valoración de los principios y pautas a través de la profesora en ejercicio

Para el desarrollo de esta etapa como se menciona en el inciso 4.5.3, la profesora Sonia implementó nuestro diseño en una institución de Santander-Colombia, sin embargo, por cuestiones de tiempo no se logró terminar el diseño por actividades extracurriculares en las instituciones, la profesora en ejercicio nos comenta que durante el diseño se puede percibir que los principios están presentes, dice lo siguiente:

- *el DUA sustenta el uso del contexto, cuando hablamos del principio relacionado con las redes afectivas. El porqué del aprendizaje, el hecho de que sea algo contextualizado le permite al estudiante relacionarse con ese contenido, entonces definitivamente sí, además de eso también favorece la inclusión porque si miramos el dúo*

el diseño que usted hizo tiene varias cosas relacionadas con eso, por ejemplo las múltiples maneras de representar la información como la manera tabular, gráfica también cuando se usa GeoGebra y no solamente se hace a lápiz y papel así tenemos las múltiples maneras de representar.

Con estos comentarios de la profesora en ejercicio, se puede decir que el diseño favorece la inclusión, en los principios I y II, con sus respectivas pautas. Para el cumplimiento del principio III, la profesora dice lo siguiente con respecto al diseño:

- *Complementando lo anterior, hablando nuevamente de las redes afectivas que está relacionado con el principio III, el que tenga diferentes niveles de profundidad le permite al estudiante autonomía y eso lo menciona ese principio, también habla de la comunicación pues en la guía siempre había varios espacios para hacer esa parte del debate.*

Sin embargo, considerando las observaciones de la profesora en ejercicio, tiene una valoración positiva con respecto a los principios y pautas del DUA, aunque por sugerencia de la profesora, recomienda que el diseño sea modificado para que no sea tan extenso, ya que esto sí podría afectar la motivación de los estudiantes al tornarse tan repetitivo. Así se realizan los debidos ajustes recomendados los cuales estarán descritos en el capítulo 5.2.4.

5.2.4 Ajustes del diseño a través de las valoraciones presentadas

Considerando las observaciones presentadas por la profesora Sonia, y la implementación por parte de los profesores en formación, el diseño está planteado para aproximadamente 4 sesiones, en cada sesión un momento de clase de este mismo. Teniendo en cuenta dichas

observaciones descritas anteriormente, el diseño sufrió algunos ajustes, en cuanto a contenido, redacción en algunos incisos, los cuales serán descritos a continuación.

5.2.4.1 Primer momento. Para este primer momento se presenta el siguiente ajuste en el inciso a, se toman en cuenta algunas sugerencias presentadas, las cuales son de redacción e incluir más datos para los estudiantes, ya que por parte de la profesora Sonia desde su experiencia nos dice que en estudiantes de grado once, no son suficientes dos o tres ejemplos para que ellos logren generalizar, dicho esto se procede a aumentar la cantidad de datos brindados en el diseño como se evidencia en la Figura 28

Figura 28.

Ajustes inciso a

Tabla 2 Estrato 1 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor total de cobro
9m ³	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
5m ³	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
6m ³	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
11m ³	$(\square \times \square + \square) \times \square$	6.259
7m ³		
$0 \leq x \leq 11$		

Cabe aclarar que este cambio se realiza para los tres niveles de dificultad que se presentaron en la sección

Por otra parte, considerando las recomendaciones presentadas por la profesora Sonia, y para dar cumplimiento del principio I, se plantea una revisión del diseño y algunas preguntas que

son repetitivas, y se encuentran presentes en este, se quitan y se toman como sugerencia para el docente, las cuales estarán en la versión docente de cada nivel de profundidad, estos ajustes se verán reflejados en el Apéndice B.

5.2.4.2 Ajustes Segundo Momento. En este momento, se realizan los debidos ajustes a las tablas, dado que al momento de plantear el diseño, se presentaron errores de información con el video, en el cual los datos suministrados son diferentes a los presentados en este, nuevamente considerando, las observaciones presentadas por Sonia, se cambian algunas preguntas repetitivas que serán presentadas a los profesores en la versión docente, estos cambios se tendrán en cuenta nuevamente para los tres niveles de dificultad mencionados anteriormente.

5.2.4.3 Ajustes Tercer Momento. Los ajustes para este momento se enfatizaron más en la escritura y en la presentación de algunas preguntas, estos se realizaron teniendo en cuenta los aportes por parte de la profesora Sonia y la valoración por la rúbrica para dar cumplimiento al principio II y III, los cuales se pueden observar en el Apéndice B

5.2.4.4 Ajustes Cuarto Momento. Inicialmente el ajuste realizado en este momento se basa en el problema inicial donde se consideraron las observaciones que la profesora Sonia presentó y nos comentó, esta sugerencia es la de cambiar la capacidad del llenado de la pila, en vista que la información brindada no tendría sentido después de cierto tiempo, por lo tanto, estos datos presentados en el problema sufren una pequeña modificación como puede observar en la Figura 29.

Figura 29.

Ajustes actividad de llenado

Después de entender cómo funciona el costo por consumo de agua, Martín da cuenta que la capacidad de agua que tiene la pila del lavadero en su hogar es de 50 litros y al abrir la llave del lavadero, se vierte agua a una razón constante.

- Ayude a Martín a conocer cuántos litros de agua gasta por minuto cuando dura la llave abierta 5 minutos

Considerando los diferentes niveles de profundidad, este enunciado varió respecto a las diferentes situaciones planteadas. Y para dar las respectivas orientaciones al profesor se procede a realizar los debidos ajustes también a la versión docente, para cumplir con el principio III, ajustes que se pueden observar en el apéndice E

Para realizar estos ajustes, se consideraron los resultados expuestos en la sección 4.5.1., enfatizando estos en los principios y pautas del DUA, los cuales fueron considerados a través de las versiones docentes, y allí es donde se realizaron los ajustes, esto se podrá observar en el Apéndice E.

5.3 Considerar los aspectos epistemológicos de la función lineal

Como referente teórico se usaron las categorías de la función lineal (Ruiz, 1998). Lo anterior ayudó a la construcción del diseño, logrando los alcances del diseño didáctico.

En este apartado, se hablará sobre el análisis de como los aspectos teóricos se integraron dentro del diseño propuesto, en los tres niveles de profundidad. Este análisis basa en observar 4 de las categorías que expone (Ruiz, 1998), cuales son: i) la función como expresión analítica, ii) la función como variación, iii) la función como gráfica, iv) la función como proporción.

5.3.1 Función como expresión analítica

En este diseño comienza con la presentación de un video el cual se encuentra descrito en el inciso 4.4.2, allí se brinda cierta información importante para los estudiantes, al finalizar esta primera etapa del primer momento, se presenta una pequeña situación descrita en la Figura 30.

Figura 30.

Expresión analítica

Martín no comprende bien de donde sale el valor total de la factura, por lo que el profesor le explica con un ejemplo particular de consumo igual a $7m^3$, para el estrato 1

$$\left(\frac{\$1.281}{m^3} \times 7m^3 + \$6.773 \right) \times 0.30 = \$4.722$$

Debe multiplicar el consumo de metros cúbicos ($7m^3$), por el valor del metro cúbico (1281), luego a ese valor le suma el cargo fijo mensual (6.773), y a ese resultado se multiplica por el subsidio ($1 - 0.70 = 0.30$) Además, el profesor le recuerda a Martín que si en el hogar se consume más desde $13 m^3$ se aplica la tarifa sin subsidio es decir la tarifa del estrato 4.

Como puede observarse, en este comienzo de la actividad se quiere introducir una expresión analítica de la función, tal y como lo describe Ruiz (1998). Asimismo, en los aportes hechos por Aravena (2020), que nos dice que: “*desde el punto de vista epistémico, en la secuencia de tareas, considerar actividades matemáticas de relevancia, la utilización de modos de expresión verbal, gráfica, simbólica o analítica y el tránsito entre las mismas para la observación de fenómenos desde diversas perspectivas.*” (p.13). Esto se sustenta en el diseño bajo las actividades de los incisos a, b, y c, presentados en el apartado 4.4.1.

5.3.2 La función como variación

Para introducir, la función como variación, en este caso nuestro diseño tiene en alguna de las actividades encontrar la diferencia entre varios puntos, esto con el fin de introducir el concepto de la pendiente tal y como se observa en la Figura 31.

Con esta actividad se pretende que el estudiante observe los cambios constantes (variación) por ello, los estudiantes deben tomar los valores y tomar los puntos obtenidos, calcular la diferencia y allí, observe cómo se comporta la variación, esto con el fin de introducir el concepto de pendiente de una recta, y observar los cambios que tiene la función con respecto al consumo de agua, lo describe Ruiz (1998), sin embargo, en este apartado también se pretende trabajar en el proceso de comunicación tal y como lo hablan Fiallo y Parada (2018), a través de socializaciones por parte de los estudiantes y el docente, las cuales se encuentran presentes en las versiones docente. La función como variación influye en la inclusión de tal forma, cuando hablamos de las múltiples formas de representar, esto con ayuda del DUA.

Figura 31.

Variación

- f. Con la información anterior complete la siguiente tabla, escoja un dato por cada tabla luego calcule la diferencia de pagos del estrato 2 y 3 con respecto al estrato 1. Explique a que se debe esta diferencia

Estrato	Valor	Diferencia
1		
2		
3		

5.3.3 La función como gráfica

Al observar la función como gráfica se observa que esta se encuentra presente en los primeros momentos de la clase, esto nos ayuda a fortalecer las múltiples formas de representación como se muestra en el inciso 3.4.2. donde el uso de GeoGebra es un apoyo fuerte a la hora de trabajar el diseño, sin embargo, considerando algunas sugerencias para el docente, este momento de la clase, puede mostrarse de diferentes formas, tal y como se vio en la Figura 24. Una de las actividades demuestra esta situación se observa en la Figura 32.

Figura 32.*Función como gráfica*

k. Dibuje un plano cartesiano y ubique los valores obtenidos en las tablas 2, 3 y 4. Luego responda junto con sus compañeros

Complementando lo anterior, Font et al. (2008), nos muestran que a través del uso de metáforas y la gráfica de la función ayudan a los estudiantes a comprender el objeto matemático en estudio. Sin embargo, también se puede presentar algunas actividades con respecto a la gráfica de una función, a través de Sistemas de Geometría Dinámicos (SGD), (Ver inciso 4.4.3), tales como GeoGebra. El uso de estas tecnologías son grandes ayudas para los estudiantes, tal y como lo muestra Salazar (2018), que nos dice la importancia del uso de tecnologías para la enseñanza de las matemáticas en nuestro caso de estudio la función lineal.

5.3.4 La función como proporción.

A lo largo del diseño se estudia la función lineal $f(x) = mx$ como variación y proporción pues esto les permite a los estudiantes identificar la constante de proporcionalidad presente entre las variables de estudio, la cual corresponde a la pendiente de la recta Figura 33

Figura 33.

Tabla de Llenado

Después de entender cómo funciona el costo por consumo de agua, Martín da cuenta que la capacidad de agua que tiene la pila del lavadero en su hogar es de 50 litros y al abrir la llave del lavadero, se vierte agua a una razón constante.

- Ayude a Martín a conocer cuántos litros de agua gasta por minuto cuando dura la llave abierta 5 minutos

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	0	3	6	9	12	15

- ¿Cuál es la razón de cambio del agua al ingresar a la pila?

Se espera que los estudiantes analicen la variación e identifiquen la constante de proporcionalidad la cual corresponde la pendiente de la recta, pues de acuerdo con Ibarra y Moreno (2010), la función lineal debe estudiarse a partir de la formulación de problemas a través de la proporción.

Además de potenciar el estudio de la función lineal $f(x) = mx$ como proporción, de acuerdo con la valoración de la rúbrica (Ver Figura 24), el diseño permite al estudiante el uso de

múltiples formas de representación considerando las características de los estudiantes en los distintos niveles de profundidad.

6. Conclusiones

En el presente capítulo se presentan algunas reflexiones generales sobre el proceso y valoración de este trabajo de grado con el fin de responder al objetivo: Plantear un diseño didáctico alrededor de las funciones lineales que favorezca la inclusión en la clase de matemáticas en estudiantes de undécimo grado.

En relación con la primera categoría, selección del contexto, se tuvo el reto de proponer una manera distinta de abordar la función lineal considerando las diferentes formas de representación, el uso del entorno (contexto) y las herramientas didácticas tal como los softwares de geometría dinámica (SGD), entre otros. Así mismo, se consideró el desarrollo de los procesos de inclusión (propuestos en el DUA) para las clases de matemáticas. Con el trabajo realizado se pudo observar que las diferentes formas de representar un objeto matemático de estudio pueden ayudar al estudiante a analizarlos y visualizarlos mejor.

En cuanto a la segunda categoría, atender los principios y pautas del DUA, estos se reflejan en el uso de distintas formas de representación y expresión propuestas a lo largo de las tareas presentadas en el diseño y en el uso de las múltiples formas de implicación presentes en las orientaciones realizadas al docente. Así mismo, el abordar el objeto matemático en tres niveles de profundidad distintos, permitiendo a su vez la flexibilidad y adaptabilidad de este teniendo en

cuenta las características y capacidades particulares de los estudiantes, promueve la inclusión en la clase de matemáticas siempre que se tengan las debidas orientaciones y sugerencias hacia el docente.

Respecto a la tercera categoría, considerar los aspectos epistemológicos de la función lineal, en el transcurso del diseño se usaron las categorías expuestas por Ruiz (1998) las cuales, a través de la relación del objeto matemático con la vida cotidiana, promueven la comprensión de este y las múltiples formas de representación por medio del uso de los SGD, puesto que el uso de tecnologías permite abordar las distintas formas de representación de los objetos matemáticos del Cálculo, lo cual favorece el interés y la curiosidad de los estudiantes.

Considerando la secuencia de tareas planteadas en el diseño enmarcado en el estudio de la función lineal en un contexto, en tres niveles de profundidad distintos, ateniendo los principios y pautas del DUA por medio del uso tecnologías, se pudo observar que estos permiten promover la inclusión, el desarrollo de los procesos matemáticos y el pensamiento variacional, de acuerdo con los resultados de la valoración del diseño y su aplicación.

Por otra parte, cabe mencionar que este diseño surge como un medio de apoyo para las docentes con la finalidad de darles herramientas que les permitan promover la inclusión en la clase de matemáticas, pues su flexibilidad y adaptabilidad promueven la atención a las particularidades de los estudiantes. Así mismo, es importante resaltar que, aunque se promueva la inclusión por medio de políticas públicas, es fundamental brindar a los docentes insumos y herramientas que les permitan atender a todos los estudiantes. En ese sentido, se invita al educador matemático a reflexionar y considerar todo aquello que les permita promover la inclusión en el aula.

Con la finalidad de motivar el desarrollo de las ideas aquí planteadas, se deja abierto el interrogante ¿qué aprendizajes logran los estudiantes que hacen uso de estos diseños, según sus características particulares de aprendizaje?

Referencias Bibliográficas

- Alpízar, M; Fernández, H; Morales, J; Quesada, S (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de investigación y divulgación en matemática educativa*, 9(1), pp. 6-19
- Arnaiz, P. (2000). Educar en y para la diversidad. En Soto, F.J. y López, J.A. (Coords.): *Nuevas Tecnologías, Viejas Esperanzas: Las Nuevas Tecnologías en el Ámbito de las Necesidades Especiales y la Discapacidad*. Murcia: Consejería de Educación y Universidades. Consejería de Educación y Universidades. Murcia
- Arraíz, G. (2014). Teoría fundamentada en los datos: un ejemplo de investigación cualitativa aplicada a una experiencia educativa virtualizada en el área de matemáticas. *Revista Virtual Universidad católica del norte*, 20-29.
- Artigué, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 1, 97-140.
- Asamblea Nacional Constituyente. (1991). *Constitución Política de Colombia 1991*. Bogotá.
- Boyer, C.B. y Merzbach, U. C. (2019). Historia da matemática. Editora Blucher. Parrilla, A. (2002). Acerca del origen y sentido de la Educación Inclusiva. *Revista de Educación*, (327), 11-29.
- Bruno, A., Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 141-162). Lleida: SEIEM.

- CAST (2011). Universal Design for Learning Guidelines version 2.0. Wakefield, MA. Pastor, C. A., Hípala, P. S., Serrano, J. M. S., & Río, A. Z. (2013). Pautas sobre el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA). Traducción al español, versión, 2.
- Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994) Ley General de Educación. [Ley 115, 1994]. del servicio educativo a la población con necesidades educativas especiales. [Resolución 2565 de 2003].
- Díaz-Barriga, F., Lule, M.C., Pacheco, D. C., Rojas, S.C, y Saad, E.C. (1990). *Metodología de diseño curricular para educación superior*. Editorial Trillas.
- Digón, P. (2003). La Ley orgánica de calidad de la Educación: análisis crítico de la nueva reforma española. *Revista electrónica de Investigación Educativa*, 5(1), 6.
- Duk, C., & Murillo, F. J. (2019). De la conferencia mundial de Salamanca al foro de Cali: 25 años de lucha. *Revista latinoamericana de educación inclusiva*, 13(2), 11-14.
- Echeita, G. y Ainscow, M. (2011). La educación inclusiva como derecho. Marco de referencia y pautas de acción para el desarrollo de una revolución pendiente. *Tejuelo: Revista de didáctica de la Lengua y la Literatura*, (12), 24-46.
- Fiallo, J., & Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación: curso de Precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS, Bucaramanga, Colombia
- Fiallo, J., & Parada, S. E. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista científica*, 3(20), 56-71.
- Figueroa, I. y Muñoz, Y. (2014). La Guía para la Inclusión Educativa como herramienta de autoevaluación Institucional: Reporte de una Experiencia. *Revista Latinoamericana de Inclusión Educativa*, 8(2), 179-198.
- Font, V. (2006). Problemas en un contexto cotidiano. *Cuadernos de pedagogía*, 355, 52-54.

- Font, V., Acevedo, J. I., Castells, M., y Bolite, J. (2008). Metáforas y Ontosemiótica. El caso de la representación gráfica de funciones en el discurso escolar. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*. 667-676. México, DF.
- Giraldo Buitrago, H. (2012). *Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función lineal en el grado noveno mediada en las nuevas tecnologías*: Estudio de caso en el Colegio Marymount grupo 9° B del municipio de Medellín.(Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
- Hernández, A., y Oviedo-, M. D. P. (2019). La educación inclusiva para el colectivo docente es un reto que se asume en soledad. *Revista Logos Ciencia & Tecnología*, 11(2), 113-125. <https://doi.org/10.22335/rlct.v11i2.832>
- Herrera, A.(2018). *Función lineal y afín aplicada en el contexto*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Educación, Barcelona
- Hurtado, L. (2014). Inclusión educativa de las personas con discapacidad en Colombia. *CES Movimiento y Salud*, 2(1), 45-55. <http://hdl.handle.net/11181/4889>
- Ibarra, Y., y Moreno, V. (2010). *Una aproximación al concepto de función lineal desde la proporcionalidad directa simple en situaciones de variación de la vida cotidiana*. (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín.
- López, J., & Moguel, L. S. (2008). Dificultades Conceptuales y Procedimentales en el Aprendizaje de Funciones en Estudiantes de Bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21,308-317.
- López, J; Sosa, L (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana*

- de Matemática Educativa* (pp. 308-318). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- López-Melero, M. (1997). La educación intercultural. El valor de la diferencia. En J. Torres (coord.). *La innovación de la educación especial*. Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén
- Luna, A. & Basto, J. (2019). Esquema de Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para estudiantes con Síndrome de Down. *Revista digital CIE: Conocimiento Investigación Educación*. Vol.1. (7), 62-71.
- MEN (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Panamericana Formas e Impresas S.A.
- MEN(1998). *Lineamientos curriculares en Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN(2006). *Estándares Básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN(29 de agosto de 2017a) Por el cual reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. [Decreto 1421 de 2017].
- MEN.(24 de octubre de 2003). Por la cual se establecen parámetros y criterios para la prestación
- Olvera, M. (2015). *El uso de herramientas digitales en el estudio de funciones y el desarrollo de competencia matemática para la enseñanza*. (Tesis doctoral) Instituto politécnico nacional, México, Distrito Federal.
- ONU (1948). *Declaración Universal de los Derechos Humanos*. United Nations. NR004682.pdf (un.org)

- Parada, S., y Barajas, C. (2015). Aproximación a las dificultades del pensamiento variacional de estudiantes de nuevo ingreso de la Universidad Industrial de Santander. *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa*, (404-408).
- Parada, S.E. (2022). *Educadores matemáticos que reflexionan sobre la atención a la diversidad en el aula*. Conferencia presentada en el Foro EMAD 2022. Transmitida el 15 de noviembre. <https://www.youtube.com/watch?v=mhGg9HbeSro>
- Peña, R., y Aldana, E. (2014). El problema social y cultural de la población sorda en el aprendizaje de las matemáticas se minimiza con la intervención del profesor. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2),(29-43).
- Peñalva, A. y Vega, M. (2019). Convivencia escolar, participación y atención a la diversidad: el programa PrInCE. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 33(2), 63-80.
- Quintero, A. (2020). *Una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación que reflexiona sobre el significado de la función*. (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.
- Ruiz, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. España: *Publicaciones de la Universidad de Jaén*.
- Salazar, N. (2018). *Secuencia didáctica centrada en la función lineal para fortalecer la competencia comunicación matemática mediada por el software GeoGebra en los estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa "Pablo Correa León"*. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Bucaramanga.
- Torres, C. (2013). *Aproximación al concepto de función lineal. El caso de una alumna invidente que cursa el segundo grado de secundaria* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

- UNESCO. (1990). *Declaración Mundial Sobre la Educación para todos*.
https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000127583_spa
- UNESCO. (1994). *Conferencia Mundial Sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y calidad*. Salamanca, España. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000110753_spa
- Velandia, S., Castillo, M., & Ramírez, M.. (2018). Acceso a la educación superior para personas con discapacidad en Cali, Colombia: paradigmas de pobreza y retos de inclusión. *Lecturas de Economía*, (89), 69-101. <https://doi.org/10.17533/udea.le.n89a03>
- Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16(1), 37–85. <http://www.jstor.org/stable/41133460>
- Zubiria, J. (2020). Las reformas pedagógicas pendientes en la universidad. En R. García, J. Wilches (Eds.) *La educación superior en Colombia: retos y perspectivas en el siglo XXI*, (pp.166-187), Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Apéndices

Apéndice A Estructura Malla curricular ajustada según la rúbrica

Etapas	Preguntas problematizadoras	¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?
Nivel 2	Propósito	<p>PENSAMIENTO NÚMÉRICO Identificar el concepto de función lineal para comprender el consumo del agua en el hogar</p> <p>PENSAMIENTO VARIACIONAL Identificar propiedades y representaciones de la función lineal en el consumo del agua en mi hogar</p>
	Descriptores	<p>La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos Plantea y ejecuta estrategias para resolver problemas de la función lineal a través del consumo del agua en el hogar Reconoce las variables necesarias para encontrar valor aproximado del cobro en el consumo de agua en el hogar Compara la función lineal como una proporcionalidad directa simple</p> <p>Comunicación Interpreta situaciones de variación constante utilizando el lenguaje natural</p> <p>Razonamiento Justifica situaciones de la función lineal mediante el uso de GeoGebra</p> <p>Modelación Interpreta la información presentada (tablas, gráficos o verbales) que modelan situaciones de la función lineal</p>
Nivel 3	Propósito	<p>Pensamiento Numérico Comprender el concepto de función lineal y los usa para resolver problemas del consumo del agua en el hogar</p> <p>Pensamiento Variacional Analiza características y situaciones de la función lineal teniendo en cuenta el consumo del agua en el hogar</p>
	Descriptores	<p>La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos</p>

Etapas	Preguntas problematizadoras	¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?
		<p>Propone y realiza estrategias para resolver problemas del consumo del agua en el hogar</p> <p>Interpreta el concepto de función para representar mediante graficas</p> <p>Comunicación</p> <p>Explica situaciones de variación constante utilizando el lenguaje natural</p> <p>Razonamiento</p> <p>Reconoce el comportamiento de la función lineal en situaciones de la vida cotidiana</p> <p>Justifica las diferentes características de la función lineal, como el comportamiento de las pendientes, la función por partes etc.</p> <p>Modelación</p> <p>Construye las representaciones graficas que modelan las situaciones de la función lineal</p>
Nivel 4	Propósito	<p>Pensamiento numérico</p> <p>Interpretar el concepto de función lineal como parte de la vida cotidiana</p> <p>Pensamiento variacional</p> <p>Generaliza y comprende las diferentes situaciones de la función lineal teniendo en cuenta las representaciones que esta puede tener en el consumo de agua en el hogar</p>
	Descriptores	<p>La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos</p> <p>Razona y propone procedimientos para resolver problemas acerca de la función lineal</p> <p>Compara e interpreta los diferentes datos presentados en situaciones de la vida cotidiana con respecto a la función lineal</p> <p>Comunicación</p> <p>Justifica y argumenta situaciones de variación constante utilizando el lenguaje natural</p> <p>Razonamiento</p> <p>Valida y explica los procedimientos para las diferentes características de la función lineal</p> <p>Justifica y argumenta el comportamiento de la función lineal en situaciones de la vida cotidiana</p>

Etapas	Preguntas problematizadoras	¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?
		Modelación Construye y reconoce las representaciones de la función lineal, en un contexto de la vida cotidiana

PRODUCTO DE PROPIEDAD DEL
PROYECTO: 70783-UIS

Apéndice B Nivel de profundidad 2 (ajustado)

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

El Consumo de Agua y las Matemáticas



¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Primer Momento



AHORREMOS EL AGUA



Martín, un estudiante de undécimo grado se preocupa mucho por consumo de agua en su hogar, él encuentra un video en internet entender cómo funciona el cobro de agua por metro cúbico (m^3).



el
para

El video que encontró Martín es el siguiente:

<https://www.youtube.com/watch?v=wGNKBzurvhM>

Después de ver el video e investigar un poco más, Martín realiza una Tabla 1 de cobro por estrato para tener organizada dicha información, donde incluye el cargo fijo mensual (CF) por estrato. Además, encontró que el valor por m^3 de consumo de agua en Colombia es de \$1.281

Tabla 1 Tarifas de cobro por estrato

Estrato	Subsidio ¹ / contribución ² (%) (S/C)	Cargo Fijo mensual (CF)
Estrato 1	-70%	\$6.773
Estrato 2	-40%	\$6.773
Estrato 3	-15%	\$6.773
Estrato 4	0	\$6.773
Estrato 5	50%	\$10.160
Estrato 6	60%	\$10.837

¹ Subsidio: Los subsidios son ayudas sociales que brinda el gobierno colombiano para mitigar las necesidades de los hogares que más lo necesitan. Es decir, de aquellas familias que son consideradas "población vulnerable", permitiendo de esta manera mejorar sus condiciones de vida y favorecer la igualdad en Colombia.

² Contribución: Cantidad de dinero o de otro bien con que se contribuye para algún fin

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

La siguiente información presenta la información del consumo mínimo hasta el año 2018 en Colombia complétela.

Tabla de consumo mínimo de m^3 según la ubicación geográfica para el año 2018		
Frío	Templado	Cálido

Martín no comprende bien de donde sale el valor total de la factura, por lo que el profesor le explica con un ejemplo particular de consumo igual a $7m^3$, para el estrato 1

$$\left(\frac{\$1.281}{m^3} \times 7m^3 + \$6.773 \right) \times 0.30 = \$4.722$$

Debe multiplicar el consumo de metros cúbicos ($7m^3$), por el valor del metro cúbico (1281), luego a ese valor le suma el cargo fijo mensual (6.773), y a ese resultado se multiplica por el subsidio ($1 - 0.70 = 0.30$) Además, el profesor le recuerda a Martín que si en el hogar se consume más desde $13 m^3$ se aplica la tarifa sin subsidio es decir la tarifa del estrato 4.

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

1. Con la información del video y la Tabla 1, completa cada tabla teniendo en cuenta que el consumo promedio para clima frío es igual a $11m^3$. Rellene los recuadros con el valor correspondiente

a.

Tabla 2 Estrato 1 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor total de cobro
$9m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
$5m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
$6m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.30$	
$11m^3$	$(\square \times \square + \square) \times \square$	6.259
$7m^3$		
$0 \leq x \leq 11$		

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Tabla 3 Estrato 2 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
$9m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.60$	
$5m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.60$	
$6m^3$	$(1281 \times \square + 6773) \times 0.60$	
$11m^3$	$(\square \times \square + \square) \times \square$	12.518
$7m^3$		
$0 \leq x \leq 11$		

Tabla 4 Estrato 3 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
$9m^3$	$(1281 \times \square + 6.773) \times 0.85$	
$5m^3$	$(1281 \times \square + 6.773) \times 0.85$	
$6m^3$	$(1281 \times \square + 6.773) \times 0.85$	17.734
$11 m^3$	$(\square \times \square + \square) \times \square$	
$7m^3$		13.379
$0 \leq x \leq 11$		

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

- b. ¿Qué ocurre cuando se desea calcular el valor a pagar por consumo de agua en los estratos 1, 2 y 3 en clima frío si se genera un consumo de 10m^3 ? (se sugiere ver video nuevamente, si es necesario). Compare su resultado con un compañero(a) y discuta. Explique muy bien su respuesta.

Utilice la información del inciso a, para responder las siguientes preguntas:

- c. ¿Cuánto es el valor de la factura para un consumo 10 m^3 para el estrato 1 en clima frío?

- d. ¿Cuánto es el valor de la factura para un consumo de 10 m^3 de estrato 2 clima frío?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

- e. ¿Cuánto es el valor de la factura para un consumo de 10 m^3 de un hogar de estrato 3?

- f. Con la información anterior complete la siguiente tabla, escoja un dato por cada tabla luego calcule la diferencia de pagos del estrato 2 y 3 con respecto al estrato 1. Explique a que se debe esta diferencia

Estrato	Valor	Diferencia
1		
2		
3		

- g. ¿Qué se debe tener en cuenta para calcular el valor de la factura del consumo de agua para cada estrato y cada clima? ¿Por qué?

- h. ¿De qué depende el valor de la factura en cada estrato?

- i. ¿Cómo representaría la situación del consumo de m^3 para el estrato 1- clima frío?



¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?



j. ¿La representación encontrada anteriormente es la misma para los diferentes estratos? Explique su respuesta.

k. Dibuje un plano cartesiano y ubique los valores obtenidos en las tablas 2, 3 y 4. Luego responda junto con sus compañeros

- ¿Cómo son las gráficas obtenidas?

- ¿Las gráficas son iguales? ¿Por qué?

- ¿Qué puede decir de los valores que toma el eje x ?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Segundo Momento

El profesor de Martín realiza tres simulaciones en GeoGebra, donde muestra a los estudiantes del grado undécimo cómo se comporta el consumo de agua para los estratos 1, 2, y 3 en cada uno de los climas: frío, templado y cálido. Considerando la siguiente información:

Consumo básico por climas (m^3 /suscriptor)	
Ciudades y municipios con altitud promedio por encima de 2000 msnm FRÍO	11
Ciudades y municipios con altitud promedio entre 1000 y 2000 msnm TEMPLADO	13
Ciudades y municipios con altitud promedio por debajo de 1000 msnm CÁLIDO	16

Ingrese al applet llamado GeoGebra 1.1. que modela la situación del cobro del consumo de agua por estrato-Climas. Deslice el botón D

- a. ¿Cómo es el comportamiento de las rectas que modela los estratos en el applet? Justifique su respuesta

- b. ¿De qué magnitudes depende el precio de la factura para el estrato1-clima frío?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Luego de la manipulación del Applet, abra la hoja de cálculo y luego de deslizar el punto D, responda

c. ¿Qué representan las coordenadas del punto D ($x(D)$, $y(D)$)?

d. ¿Qué precio tendrá una factura cuyo consumo sea igual a $5 m^3$ y $6 m^3$? ¿por qué?

e. ¿Calcula la diferencia entre los valores a pagar en la factura por el consumo de $4 m^3$ y $6 m^3$?

f. ¿Calcula la diferencia entre los valores a pagar por los consumos de $10 m^3$ y $11 m^3$ respectivamente?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

g. ¿Compara los dos valores de las diferencias encontradas en el inciso e) y en inciso g)? ¿Hay alguna similitud?

CONCEPTUALIZACIÓN:

Una forma de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha se llama pendiente. Definimos la pendiente, para cualquier par de puntos, como la razón de cambio entre el valor a pagar por cada metro cúbico. Simbólicamente:

La **pendiente** m de una recta, no vertical, que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{variación del precio}}{\text{por metros cúbicos}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

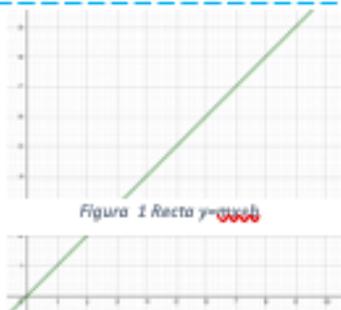
h. ¿Cuál es la pendiente de la recta que se modela para el estrato 1-clima frío?

SABIAS QUE...

FORMULA DE LA ECUACION DE UNA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto (x_0, y_0) en general:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?



Martín le plantea dos retos a sus dos mejores amigos, Juan, Andrea y él les plantea la situación para los estratos 4,5 y 6. Vamos a ayudar a Juan a completar la información de la tabla.

Tabla 5 Estrato 4

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 4	10	\$10.160	0	
Estrato 4	11	\$10.160	0	
Estrato 4	"x"			

Andrea, una de las amigas de Martín, decide analizar el consumo para el estrato 5. Ayudémosla a completar la tabla.

Tabla 6 Estrato 5

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 5	9	\$10.160	50%	
Estrato 5	8	\$10.160	50%	
Estrato 5	"x"			

Juan se encarga de analizar el consumo para un hogar de estrato 6. Ayudemos a completar la tabla.

Tabla 7 Estrato 6

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 6	6	\$10.837	60%	
Estrato 6	7	\$10.837	60%	
Estrato 6	"x"			

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

- Realice una representación algebraica en el cuaderno, para cada uno de los casos presentados anteriormente

Luego de analizar los casos particulares responda

- a. ¿Cómo cambia el valor de la factura para cada uno de los hogares en los diferentes estratos?

- b. Dibuje en el cuaderno un plano cartesiano y ubique los puntos de las tablas 5, 6 y 7 y responda lo siguiente:

- c. ¿Son iguales las pendientes de cada recta? Explique su respuesta

- d. ¿Qué valores que toma la variable consumo?

RECUERDA QUE...

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

El dominio de una función se refiere a los posibles valores de x que pueden sustituirse en la regla de correspondencia de una función.

- e. ¿Cómo identifico el dominio de cada grafica?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

f. ¿Cuál es el dominio de cada gráfica? ¿el dominio de las gráficas es el mismo?

g. ¿Qué representa el punto de corte con el eje y? Explique su respuesta

h. Teniendo en cuenta la información que se trabajó hasta este momento responda las siguientes preguntas:

- ¿Considera que los estratos 1,2,3 pueden malgastar el agua? Explique muy bien su respuesta

- ¿Los estratos 4, 5 y 6 deben ahorrar más el agua que los estratos 1,2 y 3? Explique su respuesta

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

- En términos de conciencia ambiental, ¿Qué les aconseja a las personas para incentivar el ahorro del agua desde el consumo en el hogar?



Después de entender cómo funciona el costo por consumo de agua, Martín da cuenta que la capacidad de agua que tiene la pila del lavadero en su hogar es de 50 litros y al abrir la llave del lavadero, se vierte agua a una razón constante.

- Ayude a Martín a conocer cuántos litros de agua gasta por minuto cuando dura la llave abierta 5 minutos

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	0	3	6	9	12	15

1. Realice un análisis del comportamiento que se presenta en la tabla

- a. Realice un plano cartesiano en el cuaderno y ubique los puntos de la tabla anterior y responda lo siguiente

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

- ¿Cómo varía la cantidad de agua en la pila con el paso del tiempo?

Recuerda que.

FORMULA DE LA ECUACION DE UNA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto (x_0, y_0) en general:

Donde m se conoce como la pendiente, que se puede conocer como la razón de cambio promedio y se calcula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , son puntos de la gráfica y (x_0, y_0) es cualquiera de los puntos dados

Por lo tanto, la formula o ecuación de la recta es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Con la información anterior responda lo siguiente

- ¿Cuál es la razón de cambio del agua al ingresar a la pila?

- ¿Cómo es la expresión que modela la tabla anterior?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Ahora teniendo en cuenta la situación del llenado de la pila

- ¿Cuánto litros de agua tiene la pila transcurridos 20 minutos?

a. Si la pila tiene una capacidad de 50 litros. ¿En qué momento la pila del lavadero se llena completamente? Realice un análisis algebraico de esta situación en el siguiente recuadro.

¡Vamos a la práctica!

Para este experimento necesitamos:

- Una taza o Valde que indique la cantidad de litros que posee
- Un cronómetro

Diligencia los datos de la tabla con ayuda del profesor:

Volumen de agua (lt)	Tiempo de llenado (s)
1 lt	
2 lt	
3 lt	

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

4 lt	
5 lt	

1. Abra la llave de agua y cuando ubique el recipiente debajo de esta inicie el cronómetro para calcular el tiempo de llenado en los volúmenes de agua indicados
2. Con ayuda de los datos obtenidos en la tabla, calcule la razón de cambio promedio del volumen de agua con respecto al tiempo.

¿Qué representa la razón de cambio promedio del volumen de agua con respecto al tiempo?

¿Cuánto volumen de agua habrá en el recipiente al cabo de _____ segundos?

¿Cuánto volumen de agua habrá en el recipiente al cabo de _____ segundos?

Use la razón de cambio promedio para encontrar la representación algebraica del volumen de agua con respecto al tiempo.

Apéndice C Nivel de Profundidad 3 (ajustado)

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Ahorremos y cuidemos el agua



The illustration features a young boy with dark skin and hair, wearing a brown shirt and a green vest, holding a glass of blue water. To his right is a circular diagram with a blue stream of water flowing through it. The diagram is set against a dark blue background with white stars. The text "AHORRO DEL AGUA" is written in white on an orange banner at the top right of the diagram. The diagram includes several icons: a showerhead, a washing machine, a recycling symbol, a water drop, and a flower. A watermark "83-UIS" is visible in the background.

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Primer Momento



AHORREMOS EL AGUA



Martín, un estudiante de undécimo grado se preocupa mucho por consumo de agua en su hogar, él encuentra un video en internet entender cómo funciona el cobro de agua por metro cúbico (m^3).



el para

El video que encontró Martín es el siguiente:

<https://www.youtube.com/watch?v=wGNKBzumvhM>

Después de ver el video e investigar un poco más, Martín realiza una Tabla 1 de cobro por estrato para tener organizada dicha información, donde incluye el cargo fijo mensual (CF) por estrato. Además, encontró que el valor por m^3 de consumo de agua en Colombia es de \$1.281

Tabla 1 Tarifas de cobro por estrato

Estrato	Subsidio ¹ / contribución ² (%) (S/C)	Cargo Fijo mensual (CF)
Estrato 1	-70%	\$6.773
Estrato 2	-40%	\$6.773
Estrato 3	-15%	\$6.773
Estrato 4	0	\$6.773
Estrato 5	50%	\$10.160
Estrato 6	60%	\$10.837

¹ Subsidio: Los subsidios son ayudas sociales que brinda el gobierno colombiano para mitigar las necesidades de los hogares que más lo necesitan. Es decir, de aquellas familias que son consideradas "población vulnerable", permitiendo de esta manera mejorar sus condiciones de vida y favorecer la igualdad en Colombia.

² Contribución: Cantidad de dinero o de otro bien con que se contribuye para algún fin

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Con base al video anterior complete la siguiente tabla para el año 2018

Tabla de consumo mínimo de m^3 según la ubicación geográfica para el año 2018		
Frío	Templado	Cálido

Martín no comprende bien de donde sale el valor total de la factura, por lo que el profesor le explica con un ejemplo particular de consumo igual a $7m^3$, para el estrato 1

$$\left(\frac{\$}{m^3} (1.281) \times 7m^3 + \$6.773 \right) \times 0.30 = \$4.722$$

Debe multiplicar el consumo de metros cúbicos ($7m^3$), por el valor del metro cúbico (1281), luego a ese valor le suma el cargo fijo mensual (6.773), y a ese resultado se multiplica por el subsidio ($1 - 0.70 = 0.30$) Además, el profesor le recuerda a Martín que si en el hogar se consume más desde $11 m^3$ se aplica la tarifa sin subsidio es decir la tarifa del estrato 4.

- Con la información del video y la Tabla 1, completa cada tabla teniendo en cuenta que el consumo promedio para clima frío es igual a $11m^3$

a.

Tabla 2 Estrato 1 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
$9m^3$		
$11m^3$		
$5m^3$		
$6m^3$		
$7m^3$		
$0 \leq x \leq 13$		

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Tabla 3 Estrato 2 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
$9 m^3$		
$11 m^3$		
$6 m^3$		
$8 m^3$		
$7 m^3$		
$0 \leq x \leq 13$		

Tabla 4 Estrato 3 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
$9m^3$		
$11m^3$		
$6m^3$		
$5m^3$		
$7m^3$		
$0 \leq x \leq 13$		

- b. ¿Qué ocurre cuando se desea calcular el valor a pagar por consumo de agua en los estratos 1, 2 y 3 en clima frío si se genera un consumo de $15m^3$? (se sugiere ver video nuevamente, si es necesario). Compare su resultado con un compañero(a) y discuta. Explique muy bien su respuesta.

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

h. Dibuje en su cuaderno y ubique los valores obtenidos en las tablas de los estratos 1, 2 y 3, en el clima frío, y responda.

- ¿Cómo es el comportamiento de cada gráfica?

- ¿Qué similitudes tienen las gráficas?

Segundo Momento

El profesor de Martín realiza tres simulaciones, donde muestra a los estudiantes del grado undécimo cómo calcular el precio del consumo de agua para los estratos 1, 2, y 3 en cada uno de los climas: frío, templado y cálido.

Estrato	Subsidio/ contribución (%) (S/C)	Cargo Fijo mensual (CF)
Estrato 1	-70%	\$6.773
Estrato 2	-40%	\$6.773
Estrato 3	-15%	\$6.773

Consumo básico por climas (m^3 /suscriptor)

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Consumo básico por climas (m^3 /suscriptor)	
Ciudades y municipios con altitud promedio por encima de 2000 msnm FRÍO	13
Ciudades y municipios con altitud promedio entre 1000 y 2000 msnm TEMPLADO	16
Ciudades y municipios con altitud promedio por debajo de 1000 msnm CÁLIDO	23

Con ayuda del profesor ingrese al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/kc6hnmcz> y este archivo es GeoGebra 2.1 Estrato-Clima Frío que modela una situación de cobro. Luego deslice el botón A y responda:

- a. ¿Cómo es el comportamiento de las rectas que modela el estrato1-frío, estrato1-Cálido y el estrato1-Templado? ¿por qué?

- b. ¿De qué magnitudes depende el precio de la factura para el estrato1-clima frío con subsidio?

Luego de realizar estas acciones, ingrese a la hoja de cálculo en GeoGebra, deslice nuevamente y responda lo siguiente:

- c. ¿Qué representan las coordenadas del punto A ($x(A), y(A)$)?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

d. ¿Qué precio tendrá una factura cuyo consumo sea igual a 5 m^3 y 6 m^3 ? ¿por qué?

e. ¿Calcula la diferencia entre los valores a pagar en la factura por el consumo de 5 m^3 y 6 m^3 ?

f. ¿Qué precio tendrá una factura cuyo consumo sea igual a 11 m^3 y 12 m^3 ? ¿por qué?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

g. ¿Calcula la diferencia entre los valores a pagar por los consumos de 11 m^3 y 12 m^3 respectivamente?

h. ¿Compara los dos valores de las diferencias encontradas en el inciso e) y en inciso g)? ¿Hay alguna similitud?

CONCEPTUALIZACIÓN:

Una forma de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha se llama pendiente. Definimos la pendiente, para cualquier par de puntos, como la razón de cambio entre el valor a pagar por cada metro cúbico. Simbólicamente:

La pendiente m de una recta, no vertical, que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{variación del precio}}{\text{por metros cúbicos}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Luego ingrese al siguiente link <https://www.geogebra.org/m/peuvgaed> el cual modela una situación similar a la anterior, para un estrato 2, deslice el punto A, y responda:

- i. ¿Cómo se comportan las rectas estrato2-frio, el estrato 2-Calido y el estrato2-Templado con subsidio? ¿por qué?



- j. ¿Cuál es la pendiente de la recta para el estrato 2-climafrio? Explique ¿por qué? ¿Es la misma para las otras rectas?



Ahora para el siguiente link <https://www.geogebra.org/m/a7jmq5ye>, se presenta una situación de cobro para un estrato 3, deslice nuevamente el punto A, y responda:

- k. ¿Cuál es la diferencia entre la recta que modela el estrato3-frio, el estrato 3-Calido y el estrato3-Templado con subsidio? ¿por qué?



¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

l. ¿Cuál es la pendiente de la recta para el estrato 3-climafrio con subsidio? Explique ¿por qué?



m. Calcule las pendientes de las rectas Estrato 1,2 y 3 en clima frío, teniendo en cuenta algunos datos generados por la hoja de cálculo.



n. Compare la pendiente de la recta para el estrato 1, estrato 2 y estrato 3 ¿Qué pueden concluir? Discuta con tus compañeros y profesor.



¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

SABIAS QUE...

FORMA PENDIENTE-PUNTO DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y y en general:

$$y = mx + b$$



Tercer Momento

Martín le plantea tres retos a sus tres mejores amigos, Juan, Andrea y María, él les plantea la situación para los estratos 4,5 y 6. Vamos a ayudar a Juan a completar la información de la tabla.

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 4	24	\$10.160	0	
Estrato 4	25	\$10.160	0	
Estrato 4	"x"			

Andrea, un de las amigas de Martín, decide analizar el consumo para el estrato 5. Ayudémosla a completar la tabla

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 5	24	\$10.160	50%	
Estrato 5	25	\$10.160	50%	
Estrato 5	"x"			

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Juan se encarga de analizar el consumo para un hogar de estrato 6. Ayudemos a completar la tabla.

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 6	24	\$10.837	60%	
Estrato 6	25	\$10.837	60%	
Estrato 6	"x"			

Luego de analizar los casos particulares responda

- a. ¿Cómo cambia el valor de la factura para cada uno de los hogares en los diferentes estratos?

- b. Realice las gráficas de cada tabla en el cuaderno, realizando un plano cartesiano y responda
- c. ¿Son iguales las pendientes de cada recta? Explique su respuesta

- d. ¿Cuáles son los valores que toma la variable consumo?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

RECUERDA QUE...

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

El dominio de una función se refiere a los posibles valores de x que pueden sustituirse en la regla de correspondencia de una función.

e. ¿Cómo es el dominio de cada gráfica?

f. ¿Cuál es el dominio de cada gráfica? ¿el dominio de las gráficas es el mismo? Justifique su respuesta

g. ¿Qué representa el punto de corte con el eje y ? Explique su respuesta

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

h. Teniendo en cuenta la información que se trabajó hasta este momento responda las siguientes preguntas:

- ¿Considera que los estratos 1,2,3 pueden malgastar el agua? Explique muy bien su respuesta

- ¿Los estratos 4, 5 y 6 deben ahorrar más el agua que los estratos 1,2 y 3? Explique su respuesta

- En términos de conciencia ambiental, ¿Qué les aconseja a las personas para incentivar el ahorro del agua desde el consumo en el hogar?



Después de entender cómo funciona el costo por consumo de agua, Martín da cuenta que la capacidad de agua que tiene la pila del lavadero en su hogar es de 50 litros y al abrir la llave del lavadero, se vierte agua a una razón de 3 litros por minuto.

- Ayude a Martín a conocer cuántos litros de agua gasta por minuto cuando dura la llave abierta 5 minutos

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	0	3	6			

1. Realice un análisis del comportamiento que se presenta en la tabla, justifique su respuesta

2. De la información anterior responda:

- a. ¿Qué representa la razón con la que el agua ingresa a la pila?

- b. ¿Cómo varía la cantidad de agua en la pila con el paso del tiempo?

- ¿Cómo es la expresión que modela la tabla anterior?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

c. ¿Cuánto litros de agua tiene la pila transcurridos 20 minutos?

d. Si la pila tiene una capacidad de 15 litros. ¿En qué momento la pila del lavadero se llena completamente?

¡Vamos a la práctica!

Para este experimento necesitamos:

- Una taza o Valde que indique la cantidad de litros que posee
- Un cronómetro

Diligencie los datos de la tabla con ayuda del profesor:

Volumen de agua (lt)	Tiempo de llenado (s)
1 lt	
2 lt	
3 lt	
4 lt	
5 lt	

1. Abra la llave de agua y cuando ubique el recipiente debajo de esta inicie el cronómetro para calcular el tiempo de llenado en los volúmenes de agua indicados
2. Con ayuda de los datos obtenidos en la tabla, calcule la razón de cambio promedio del volumen de agua con respecto al tiempo.

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

¿Qué representa la razón de cambio promedio del volumen de agua con respecto al tiempo?

¿Cuánto volumen de agua habrá en el recipiente al cabo de _____ segundos?

¿Cuánto volumen de agua habrá en el recipiente al cabo de _____ segundos?

¿Por cuánto tiempo debo dejar la llave abierta para que el volumen de agua alcance los 5,4 lt?

Use la razón de cambio promedio para encontrar la representación algebraica del volumen de agua con respecto al tiempo.



Apéndice D Nivel de profundidad 4 (ajustado)

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?



The illustration features two young girls standing on either side of a large wooden sign. The sign has the text '¿QUÉ PODEMOS HACER PARA CUIDAR EL AGUA?' written in blue, bold, capital letters. Below the sign, a blue water drop and a green and blue globe with human-like faces are holding hands. The background is a colorful zigzag pattern. The entire scene is framed by a black border with corner crop marks.

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Primer Momento



AHORREMOS EL AGUA

Martín, un estudiante de undécimo grado se preocupa mucho por el consumo de agua en su hogar, él encuentra un video en internet para entender cómo funciona el cobro de agua por metro cúbico (m^3).



El video que encontró Martín es el siguiente:

<https://www.youtube.com/watch?v=wGNKBzurvhM>

Después de ver el video e investigar un poco más, Martín realiza una encuesta para tener organizada dicha información, donde incluye el cargo fijo mensual (CF) por estrato y un valor complementario C .

Tabla 1 Tarifas de cobro por estrato

Estrato/USO	%Subsidio contribución	Cargo Fijo (\$/mes)	Complementario
Estrato 1	-70%	4632	2358
Estrato 2	-40%	6949	2358
Estrato 3	-15%	8339	2358
Estrato 4	0	9265	2358
Estrato 5	50%	13898	3538
Estrato 6	60%	14825	3774

Nota: el valor del metro cúbico (m^3) en Colombia es 1281

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Tabla de consumo mínimo de m^3 según la ubicación geográfica para el año 2018

Frio	Templado	Cálido

Martín, pregunta a su profesor la forma en cómo se debe calcular el valor total de la factura a lo que este le responde de la siguiente manera

Debe multiplicar el consumo de metros cúbicos ($7m^3$), por el valor del metro cúbico (1281), luego a ese valor le suma el cargo fijo mensual (6.773) y el valor complementario (2358), y a ese resultado se multiplica por el subsidio ($1 - 0.70 = 0.30$) Además, el profesor le recuerda a Martín que si en el hogar se consume más desde $13 m^3$ se aplica la tarifa sin subsidio es decir la tarifa del estrato 4.

Interprete de forma analítica la información presentada por el profesor

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

1. Con la información del video y la tabla 1, complete cada tabla teniendo en cuenta lo visto en el video

a. Complete las siguientes tablas teniendo en cuenta el valor dado:

Tabla 2 Estrato 1 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
		4.848
		5.232
		6.259
		4.722
$0 \leq x \leq 11$		

Tabla 3 Estrato 2 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
		7.906
		9.444
		10.981
		12.518
$0 \leq x \leq 11$		

Tabla 4 Estrato 3 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
		15.556
		6.850
		17.734
		13.379
$0 \leq x \leq 11$		

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

- b. Si el consumo de la tabla 2, 3 y 4, es superior a los 11 m^3 . ¿Cómo se debe calcular el consumo total de la factura del agua? (Sugerencia ver nuevamente el video)

- c. Utilice la información del inciso a, para el consumo mínimo de 13 m^3 para los estratos 1, 2 y 3, en clima templado, en el cuaderno escriba el valor de la factura para cada uno de ellos y calcule la diferencia de pagos del estrato 2 y 3 con respecto al estrato 1. Explique a que se debe esta diferencia.

Estrato	Valor	Diferencia
1		
2		
3		

- d. ¿Qué se debe tener en cuenta para calcular el valor de la factura del consumo de agua? ¿Por qué?

- e. ¿Quién varía con respecto al consumo en cada estrato?

- f. ¿Cómo representaría la situación del consumo de m^3 para cualquiera de los estratos?



¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

- g. ¿Qué otra representación puede considerar para las situaciones de consumo? Explique su respuesta, luego compare con sus compañeros

- h. ubique los valores de las tablas 2,3 y 4, dibujen un plano cartesiano en el cuaderno y responda

- ¿Cómo es el comportamiento de las gráficas a lo largo del eje x ?

- ¿existe alguna similitud entre las gráficas? ¿Cuáles? Justifique su respuesta

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Segundo Momento

El profesor de Martín realiza tres simulaciones, donde muestra a los estudiantes del grado undécimo cómo calcular el precio del consumo de agua para los estratos 1, 2, y 3 en cada uno de los climas: frío, templado y cálido.

Estrato	Subsidio/ contribución (%) (S/C)	Complementario	Cargo Fijo mensual (CF)
Estrato 1	-70%	2358	4632
Estrato 2	-40%	2358	6949
Estrato 3	-15%	2358	8339

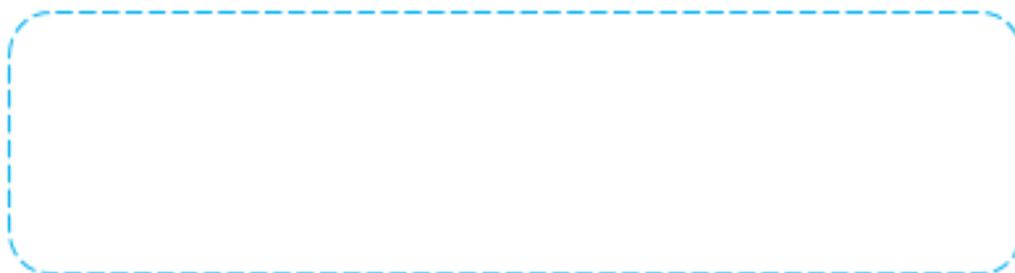
Consumo básico por climas (m^3 /suscriptor)	
Ciudades y municipios con altitud promedio por encima de 2000 msnm FRÍO	11
Ciudades y municipios con altitud promedio entre 1000 y 2000 msnm TEMPLADO	13
Ciudades y municipios con altitud promedio por debajo de 1000 msnm CÁLIDO	16

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Luego con ayuda del profesor ingrese al siguiente link

<https://www.geogebra.org/m/weag4yfn> el cual presenta una situación de cobro para los estratos 1, 2 y 3 en clima frío, deslice los puntos A,B,C y responda

a. ¿Cómo es el comportamiento de las rectas que modela la situación? ¿por qué?



b. Existen magnitudes en las que exista dependencia. ¿cuales?



c. ¿Qué sucede cuando los puntos superan los $11m^3$?, explique este comportamiento



¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Luego de la manipulación del Applet, abra la hoja de cálculo, y responda

- d. Tome dos puntos del punto A, de la hoja de cálculo y use la ecuación de la pendiente para encontrarla

- e. Escoja dos valores del Punto C de la hoja de cálculo y realice el procedimiento anterior,

- f. ¿Compara los dos valores de las diferencias encontradas en el inciso f) y en inciso g? ¿Hay alguna similitud?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

- g. Realice el mismo procedimiento para los puntos B. ¿Qué puede concluir? Discuta con sus compañeros (a)

CONCEPTUALIZACIÓN:

Una forma de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha se llama pendiente. Definimos la pendiente, para cualquier par de puntos, como la razón de cambio entre el valor a pagar por cada metro cúbico. Simbólicamente:

La **pendiente** m de una recta, no vertical, que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{variación del precio}}{\text{por metros cúbicos}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

SABIAS QUE...

FORMA PENDIENTE-PUNTO DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y en general:

$$y = mx + b$$

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?



Martín le plantea tres retos a sus tres mejores amigos, Juan, Andrea y María, él les comenta la situación del consumo del agua para los estratos 4,5 y 6. Les enseña las tablas presentes a continuación y les pide que al terminar discutan quien paga más por este consumo y luego lo discutan con sus compañeros.

Vamos a ayudar a Juan a completar la información de la tabla.

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo	contribución	Valor
Estrato 4	24	\$11.623	0	
Estrato 4	25	\$11.623	0	
Estrato 4	"x"			

Andrea, un de las amigas de Martín, decide analizar el consumo para el estrato Ayudémosla a completar la tabla

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 5	24	\$17.436	50%	
Estrato 5	25	\$17.436	50%	
Estrato 5	"x"			

Juan se encarga de analizar el consumo para un hogar de estrato 6. Ayudemos a completar la tabla.

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 6	24	\$18.599	60%	
Estrato 6	25	\$18.599	60%	
Estrato 6	"x"			

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

Luego de analizar los casos particulares responda

a. ¿Cómo cambia el valor de la factura para cada uno de los hogares en los diferentes estratos?

b. Realice un plano cartesiano en el cuaderno y considere las tablas anteriores para realizar tres graficas diferentes luego responda

c. ¿Se puede calcular las pendientes de cada recta? ¿cómo se comportan? calcúelas

d. ¿Cuáles son los valores que toma la variable consumo?

RECUERDA QUE...

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

El dominio de una función se refiere a los posibles valores de x que pueden sustituirse en la regla de correspondencia de una función.

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

e. Según la situación anterior, ¿cual podría considerarse el dominio de la función? ¿Por qué?

f. ¿Cuál es el dominio de cada gráfica? ¿existe alguna diferencia entre estos?, si es verdad diga cuales.

g. ¿Qué representa b en la ecuación de la recta? Explique su respuesta

h. Teniendo en cuenta la información que se trabajó hasta este momento responda las siguientes preguntas:

- ¿Considera que los estratos 1,2,3 pueden malgastar el agua? Explique muy bien su respuesta

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

- ¿Los estratos 4, 5 y 6 deben ahorrar más el agua que los estratos 1, 2 y 3? Explique su respuesta

- En términos de conciencia ambiental, ¿Qué les aconseja a las personas para incentivar el ahorro del agua desde el consumo en el hogar?



Cuarto Momento

Después de entender cómo funciona el costo por consumo de agua, Martín da cuenta que la capacidad de agua que tiene la pila del lavadero en su hogar es de 50 litros y al abrir la llave del lavadero, se vierte agua a una razón de 3 litros por minuto.

- Ayude a Martín a conocer cuántos litros de agua gasta por minuto cuando dura la llave abierta 5 minutos

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	5	8	11			

1. Realice un análisis del comportamiento que se presenta en la tabla

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

1. De la información anterior responde:

a. ¿Qué representa la razón con la que el agua ingresa a la pila?

b. ¿Cómo varía la cantidad de agua en la pila con el paso del tiempo?

• analíticamente como se podría representar la situación anterior



c. ¿Cuánto litros de agua tiene la pila transcurridos 23 minutos?



d. Si la pila tiene una capacidad de 50 litros. ¿En qué momento la pila del lavadero se llena completamente?



¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

¡Vamos a la práctica!

Para este experimento necesitamos:

- Una taza o Valde que indique la cantidad de litros que posee
- Un cronómetro

Diligencia los datos de la tabla con ayuda del profesor:

Volumen de agua (lt)	Tiempo de llenado (s)
1 lt	
2 lt	
3 lt	
4 lt	
5 lt	

1. Abre la llave de agua y cuando ubiques el recipiente debajo de esta inicia el cronómetro para calcular el tiempo de llenado en los volúmenes de agua indicados
2. Con ayuda de los datos obtenidos en la tabla, calcule la razón de cambio promedio del volumen de agua con respecto al tiempo.

¿Qué representa la razón de cambio promedio del volumen de agua con respecto al tiempo?

¿Cuánto volumen de agua habrá en el recipiente al cabo de _____ segundos?

¿Cuánto volumen de agua habrá en el recipiente al cabo de _____ segundos?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

¿Por cuánto tiempo debo dejar la llave abierta para que el volumen de agua alcance los 5,4 lt?

Use la razón de cambio promedio para encontrar la representación algebraica del volumen de agua con respecto al tiempo.



Producto del proyecto 701

Apéndice E Orientaciones Docente nivel de profundidad 2



NIVEL DE PROFUNDIDAD 2

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

PROPÓSITO

Identificar propiedades y representaciones de la función lineal en el consumo del agua en mi hogar

Material elaborado por: Sandra Evelyn Parada, Carlos Fernando Plata Sanabria

Primer Momento

Actualmente el interés por interactuar y relacionar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la vida cotidiana ha sido una característica particular a la hora de abordar temas en matemáticas, por ello Font (2006) nos pregunta acerca de este interés, al cual responde con que existen diferentes motivos por el cual se está llevando a cabo la relación de los contextos reales en matemática, los cuales pueden incentivar al estudiante a observar las matemáticas desde otro punto de vista diferente al lápiz y al papel.

Para iniciar la clase se le sugiere al docente que el video presente en la guía sea mostrado a los estudiantes en clase desde un video beam, en caso de no poseer los recursos tecnológicos, otra forma puede ser que antes de iniciar el momento este video sea visto desde casa y de allí tomen los datos importantes de él. Esta historia comienza con la historia de martin un estudiante de undécimo grado que se preocupa por el consumo de agua en su hogar, y para ello investiga acerca del cobro del consumo de agua en los diferentes estratos (Ver Figura 1).

 AHORREMOS EL AGUA 

Martin, un estudiante de undécimo grado se preocupa mucho por el consumo de agua en su hogar, él encuentra un video en internet para entender cómo funciona el cobro de agua por metro cúbico (m^3).

El video que encontró Martin es el siguiente:

<https://www.youtube.com/watch?v:w0NK3zuv6M>

Después de ver el video e investigar un poco más, Martin realizó una Tabla 1 de cobro por estrato para tener organizada dicha información, donde incluye el cargo fijo mensual (CF) por estrato. Además, encontró que el valor por m^3 de consumo de agua en Colombia es de \$1.281



Tabla 1 Tarifas de cobro por estrato

Estrato	Subsidio/ contribución (%) (S/C)	Cargo Fijo mensual (CF)
Estrato 1	-70%	\$6.773
Estrato 2	-40%	\$6.773
Estrato 3	-15%	\$6.773
Estrato 4	0	\$6.773
Estrato 5	50%	\$30.160
Estrato 6	60%	\$10.837

Figura 1 El problema de Martin

Luego de observar el video, este video se puede presentar de diferentes formas ya sea mediante alguna explicación con el tablero, de forma oral, o escrita. Al finalizar, el docente puede pedir a uno de los estudiantes que lea la situación de los diferentes estratos que existen como se muestra en la tabla presente al principio del diseño, allí se le pide al estudiante a que atribuya la tabla, también se les sugiere leer un poco acerca del significado del subsidio y del cobro complementario. Esto con el fin de que los estudiantes puedan comprender e identificar estas características del diseño, se pide socializar mediante una lluvia de ideas, lo que entienden por estos significados.

Al terminar esta socialización se presentará la siguiente tabla (Ver Figura 2), para esta información se les puede pedir a los estudiantes que lo observado del video, tomen los datos del consumo promedio del año 2018.

Con base al video anterior complete la siguiente tabla para el año 2018

Tabla de consumo mínimo de m^3 según la ubicación geográfica para el año 2018		
Frío	Templado	Cálido

Ilustración 1 Tabla de consumo promedio

Al finalizar el llenado de la tabla, viene una explicación, se sugiere al docente que uno de los estudiantes lea dicha explicación la cual esta presenten en los tres niveles de profundidad, con el fin de que los estudiantes analicen lo que dice en esta y traten de relacionar y lograr encontrar la expresión analítica. Luego de esta lectura los estudiantes pueden socializar junto con el docente aquellas partes donde puedan comprender dicho texto. Al finalizar la socialización se espera que los estudiantes

Luego de lo anterior, se presentan las siguientes actividades

Luego de observar el video, este video se puede presentar de diferentes formas ya sea mediante alguna explicación con el tablero, de forma oral, o escrita. Al finalizar, el docente puede pedir a uno de los estudiantes que lea la situación de los diferentes estratos que existen como se muestra en la tabla presente al principio del diseño, allí se le pide al estudiante a que atribuya la tabla, también se les sugiere leer un poco acerca del significado del subsidio y del cobro complementario. Esto con el fin de que los estudiantes puedan comprender e identificar estas características del diseño, se pide socializar mediante una lluvia de ideas, lo que entienden por estos significados.

Al terminar esta socialización se presentará la siguiente tabla (Ver Figura 2), para esta información se les puede pedir a los estudiantes que lo observado del video, tomen los datos del consumo promedio del año 2018.

Con base al video anterior complete la siguiente tabla para el año 2018

Tabla de consumo mínimo de m^3 según la ubicación geográfica para el año 2018		
Frío	Templado	Cálido

Ilustración 1 Tabla de consumo promedio

Al finalizar el llenado de la tabla, viene una explicación, se sugiere al docente que uno de los estudiantes lea dicha explicación la cual esta presenten en los tres niveles de profundidad, con el fin de que los estudiantes analicen lo que dice en esta y traten de relacionar y lograr encontrar la expresión analítica. Luego de esta lectura los estudiantes pueden socializar junto con el docente aquellas partes donde puedan comprender dicho texto. Al finalizar la socialización se espera que los estudiantes
Luego de lo anterior, se presentan las siguientes actividades

a.

Tabla 2 Estrato 1 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor total de cobre
9m ³	(1281x <input type="text"/> +6773) x0.30	
5m ³	(1281x <input type="text"/> +6773) x0.30	
11m ³	(<input type="text"/> x <input type="text"/> + <input type="text"/>) x <input type="text"/>	6.259
7m ³		
$0 \leq x \leq 11$		

Ilustración 2 Actividad 1

Para estas actividades, desde el inciso a al e, sirven como guía de orientación para los estudiantes el cual lleva a identificar las variables y a analizar el comportamiento de estas mismas, para este nivel de profundidad se da la sugerencia de dar una orientación más pausada, sin dejar de lado los otros niveles, esta actividad lleva a los estudiantes a ir conociendo un poco de la función lineal con respecto a la variable independiente.

Para el inciso f, en esta parte de la actividad se sugiere al docente

- f. Con la información anterior complete la siguiente tabla, escoja un dato por cada tabla luego calcule la diferencia de pagos del estrato 2 y 3 con respecto al estrato 1. Explique a que se debe esta diferencia

Estrato	Valor	Diferencia
1		
2		
3		

Ilustración 3 Tabla diferencias

Luego de analizar la tabla de las diferencias se prosigue a resolver los incisos g al j, son preguntas orientadas a la diferencia encontrada en la Ilustración 1, las cuales se pretende llevar al estudiante al que se debe tener en cuenta, para estas actividades se le sugiere al docente que se trabajen de manera individual primero, luego de terminar esta actividad tratar de socializar con los demás compañeros para poder comparar las diferentes respuestas y en la forma en que los estudiantes están comprendiendo el tema trabajado.

- g. ¿Qué se debe tener en cuenta para calcular el valor de la factura del consumo de agua para cada estrato y cada clima? ¿Por qué?

- h. ¿De qué depende el valor de la factura en cada estrato?

- i. ¿Cómo representaría la situación del consumo de m^3 para el estrato 1-clima frío?



- j. ¿La representación encontrada anteriormente es la misma para los diferentes estratos? Explique su respuesta.

Ilustración 4 Enunciados Primer momento

Para el inciso k, se presenta una situación de representación geométrica, el cual lleva al estudiante a poder representar lo trabajado en la tabla de la Ilustración 3, se le sugiere al docente pedirle a los estudiantes de realizar un plano cartesiano en el cuaderno y realicen la ubicación de los puntos en el plano cartesiano, y unan los puntos, para este caso una de las posibles respuestas entre los estudiantes puede ser la unión de los puntos no mediante una línea recta, si no mediante curvas, sin embargo es bueno aclarar la idea de trabajo para que los estudiantes no caigan en este error, sin embargo, tener en cuenta esta respuesta para una posible pregunta: ¿Por qué los une de esta manera?, si esto llega a ser presentado en alguna de las situaciones, el docente podría darle dos datos más al estudiante para que ellos vean como es el comportamiento y la variación de estas con respecto a y.

k. Dibuje un plano cartesiano y ubique los valores obtenidos en las tablas 2, 3 y 4. Luego responda junto con sus compañeros

- ¿Cómo son las gráficas obtenidas?

- ¿Las gráficas son iguales? ¿Por qué?

- ¿Qué puede decir de los valores que toma el eje x?

Ilustración 1 Inciso k

Para esta actividad, los procesos identificados por los estudiantes de profundidad 1, se espera la comprensión de los enunciados y el comportamiento de la recta en el eje x, identificándolo como la variable independiente

Apéndice F Orientaciones Nivel de Profundidad 3

**NIVEL DE PROFUNDIDAD 3**

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

PROPÓSITO

Analiza características y situaciones de la función lineal teniendo en cuenta el consumo del agua en el hogar

Material elaborado por: Sandra Evelyn Parada, Carlos Fernando Plata Sanabria



Primer

Actualmente el interés por interactuar y relacionar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la vida cotidiana ha sido una característica particular a la hora de abordar temas en matemáticas, por ello Font (2006) nos pregunta acerca de este interés, al cual responde con que existen diferentes motivos por el cual se está llevando a cabo la relación de los contextos reales en matemática, los cuales pueden incentivar al estudiante a observar las matemáticas desde otro punto de vista diferente al lápiz y al papel.

Para iniciar la clase se le sugiere al docente que el video presente en la guía sea mostrado a los estudiantes en clase desde un video beam, en caso de no poseer los recursos tecnológicos, otra forma puede ser que antes de iniciar el momento este video sea visto desde casa y de allí tomen los datos importantes de él. Esta historia comienza con la historia de Martín un estudiante de undécimo grado que se preocupa por el consumo de agua en su hogar, y para ello investiga acerca del cobro del consumo de agua en los diferentes estratos (Ver Figura 1).



DE PROPIEDAD DE
783-UIT5

AHORREMOS EL AGUA



Martín, un estudiante de undécimo grado se preocupa mucho por el consumo de agua en su hogar, él encuentra un video en internet para entender cómo funciona el cobro de agua por metro cúbico (m^3).



El video que encontró Martín es el siguiente:

<https://www.youtube.com/watch?v=wGNKBzumvhM>

Después de ver el video e investigar un poco más, Martín realiza una Tabla 1 de cobro por estrato para tener organizada dicha información, donde incluye el cargo fijo mensual (CF) por estrato. Además, encontró que el valor por m^3 de consumo de agua en Colombia es de \$1.281

Tabla 1 Tarifas de cobro por estrato

Estrato	Subsidio/ contribución (%) (S/C)	Cargo Fijo mensual (CF)
Estrato 1	-70%	\$6.773
Estrato 2	-40%	\$6.773
Estrato 3	-15%	\$6.773
Estrato 4	0	\$6.773
Estrato 5	50%	\$10.160
Estrato 6	60%	\$10.837

Figura 1 Problema de Martín

Luego de observar el video, este video se puede presentar de diferentes formas ya sea mediante alguna explicación con el tablero, de forma oral, o escrita. Al finalizar, el docente puede pedir a uno de los estudiantes que lea la situación de los diferentes estratos que existen como se muestra en la tabla presente al principio del diseño, allí se le pide al estudiante a que atribuye la tabla, también se les sugiere leer un poco acerca del significado del subsidio y del cobro complementario. Esto con el fin de que los estudiantes puedan comprender e identificar estas características del diseño, se pide socializar mediante una lluvia de ideas, lo que entienden por estos significados.

Al terminar esta socialización se presentará la siguiente tabla (Ver Figura 2), para esta información se les puede pedir a los estudiantes que lo observado del video, tomen los datos del consumo promedio del año 2018.

Con base al video anterior complete la siguiente tabla para el año 2018

Tabla de consumo mínimo de m^3 según la ubicación geográfica para el año 2018		
Frío	Templado	Cálido

Figura 1

Al finalizar la explicación de la tabla, se le sugiere al profesor hacer énfasis en el desarrollo de la operación que se necesita para encontrar el costo de una factura en el hogar, para que el estudiante vaya conociendo el concepto y sobre lo que se va a estar trabajando en el transcurso de la actividad, resaltando el cálculo del valor total de la factura, teniendo en cuenta el estrato y los diferentes consumos que se mostraran en el transcurso del video y la tabla.

Luego de lo anterior, se presentan las siguientes actividades

1. Con la información del video y la Tabla 1, completa cada tabla teniendo en cuenta que el consumo promedio para clima frío es igual a $11m^3$

a.

Tabla 2 Estrato 1 Clima-Frío

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
$9m^3$		
$10m^3$		
$5m^3$		
$7m^3$		
$0 \leq x \leq 11$		

Figura 1

Para estas actividades, desde el inciso a al e, el estudiante logre identificar y analizar el comportamiento que tienen las variables con respecto al consumo del agua en el hogar a través del desarrollo de estas actividades, y así puedan identificar los diferentes cambios de la variación con respecto a los estratos y los diferentes consumos.

Para el inciso f y g, se quiere evidenciar con ayuda de las preguntas anteriores a como el estudiante puede obtener una representación de la situación, en este caso se espera que tengan diferentes tipos de representaciones, desde la parte geométrica, analítica o algebraica

- f. ¿Cómo representaría la situación del consumo de m^3 para el estrato 1-clima frío?

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

- g. ¿La representación encontrada anteriormente es la misma para los diferentes estratos? Explique su respuesta.

Figura 2

Para el inciso *h*, se sugiere al docente que se trabaje de forma similar al nivel anterior, en la cual el estudiante realice un plano cartesiano en el cuaderno y acorde a las tablas anteriores, él pueda ubicar los puntos que se están trabajando, es recomendable recordar la escala o una forma de representación para los valores que se obtendrán ya que siempre serán un poco alto, otra forma en que el docente puede llegar a abordar esta parte es mediante el uso de la aplicación de GeoGebra y permitir que los estudiantes participen de alguna forma ubicando los puntos que se les presentaron, y allí luego socializarlos, sin embargo para el caso de que se trabaje en el cuaderno se espera que los estudiantes logren unir los puntos mediante una línea recta, sin embargo cabe aclarar que si ellos llegan a unir los puntos mediante alguna curva, no quiere decir que el estudiante este errado, esto se puede permitir pero luego hay que aclarar en el transcurso de la actividad como se está comportando ese patrón o esa variación, para ello si lo unen con curvas el docente debe pedir al estudiante un valor diferente a los presentados que no supere el rango del consumo. Para luego poder llegar al segundo momento el cual se verá con la manipulación de los applets



Primero antes iniciar este diseño se le sugiere al docente descargar el programa GeoGebra para el computador, ingresando al siguiente video:

<https://youtu.be/3R0zIfRHSjc> , Este video será para el docente que necesite descargar la aplicación de GeoGebra, por otra parte, si el docente desea también puede trabajar con la versión online de GeoGebra en caso de tener acceso a conexión a internet puede observar el siguiente video <https://youtu.be/1qthBLLcmA4> donde se explica la creación de usuario para Geo Gebra.

A continuación, se presenta también un video, para explicar el acceso a los applets para este momento, <https://youtu.be/INaMaluDC2s> hay que tener en cuenta y precaución a la hora de descargar los archivos generar la copia para su respectiva descarga de lo contrario no se podría tener acceso a los applets aquí presentados.

Ah manera de sugerencia, se le recuerda al docente que la aplicación de GeoGebra también se encuentra disponible para dispositivos móviles

Para el segundo, momento es importante recordar para el docente que esta actividad está sujeta a cambios, acorde a como el los necesite en este caso, la manipulación de GeoGebra mediante video beam para que los estudiantes puedan organizar y lograr la información un poco, o tratar de llevar la implementación al lápiz y papel, y tratar de abordar las diferencias de forma oral con el grupo

El análisis con respecto al video y las tablas que se van a presentar, en estas tablas se van a observar y recordar los diferentes rangos de consumos de metro cúbicos por sector (climas), se sugiere una breve explicación de los rangos que deben poseer.

El profesor de Martín realiza tres simulaciones, donde muestra a los estudiantes del grado undécimo cómo calcular el precio del consumo de agua para los estratos 1, 2, y 3 en cada uno de los climas: frío, templado y cálido.

Estrato	Subsidio/ contribución (%) (S/C)	Cargo Fijo mensual (CF)
Estrato 1	-70%	\$6.773
Estrato 2	-40%	\$6.773
Estrato 3	-15%	\$6.773

<i>Consumo básico por climas (m³/suscriptor)</i>	
Ciudades y municipios con altitud promedio por encima de 2000 msnm FRÍO	13
Ciudades y municipios con altitud promedio entre 1000 y 2000 msnm TEMPLADO	16
Ciudades y municipios con altitud promedio por debajo de 1000 msnm CÁLIDO	23

Figura 1. Tabla de consumo promedio por climas

Luego de presentar la tabla y los diferentes promedios de consumo por climas, el profesor podrá realizar una breve explicación haciendo énfasis en el video que se presentó, se sugiere a que está sujeto a la forma en como el profesor desee presentarlo ya sea mediante una discusión o volver a revisar el video, eso se debe a las formas que se deben presentar al momento de generar un valor total de la factura en los estratos 1, 2 y 3 los cuales tienen un subsidio otorgado por el gobierno. Al finalizar esta explicación se puede apoyar del siguiente applet de GeoGebra.

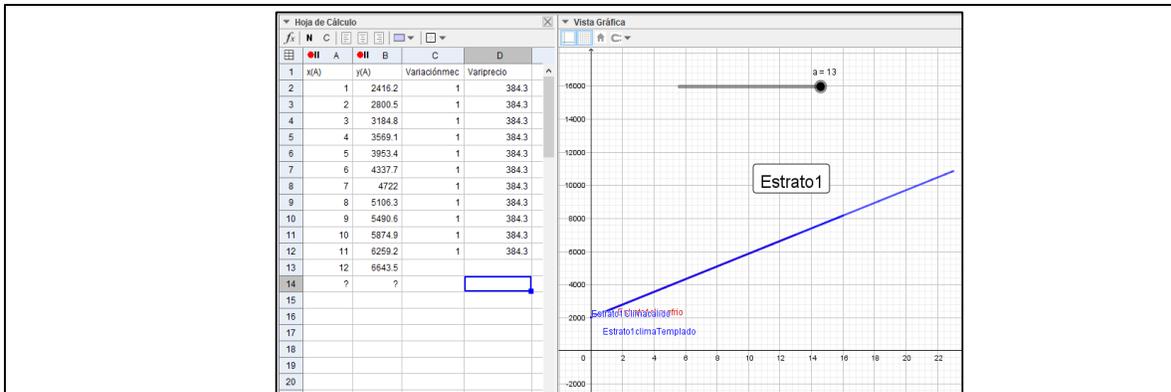


Figura 5. Estrato 1-Climas

Para la manipulación de este applet, se espera que se aborden las preguntas teniendo en cuenta las indicaciones que se van a presentar, para este análisis se tendrán en cuenta dos applets más para los diferentes estratos, estos están con el nombre de GeoGebra 2.2 y GeoGebra 2.3, los cuales pueden ser abordados para los análisis de los estratos 2 y 3 en los diferentes climas, se pretende aclarar con esta actividad, el concepto de la variación constante lo cual será esencial.

Por otro lado, se sugiere al docente dar nuevamente como definiciones, acerca de la pendiente y la ecuación de la recta (punto-pendiente) estas definiciones pueden ser abordadas durante el desarrollo de la actividad.

A continuación, se presentan los applets que serán utilizadas para el desarrollo de este momento

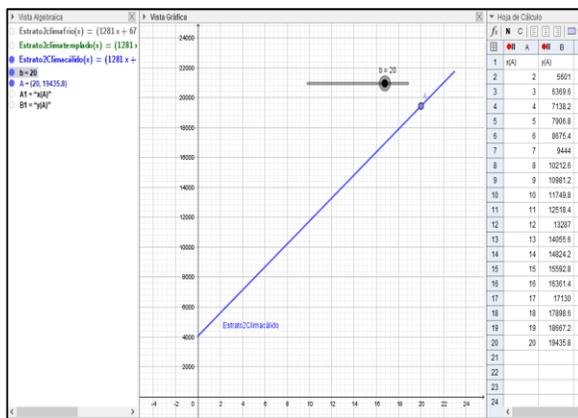


Figura 6. Estrato 2-Climas

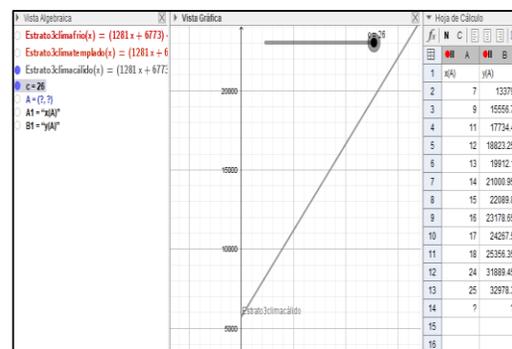


Figura 7. Estrato 3-Climas

Para estas actividades se pueden trabajar de forma colectiva, donde el profesor puede guiar a los estudiantes mediante las preguntas orientadoras, las cuales precisan algo similar a él applet de Estratos 1-climas.



Para este tercer momento se le presenta al estudiante la situación de los amigos de Martín, los cuales tratan de abordar los estratos faltantes, esto es para poder analizar los comportamientos de las funciones para los denominados estratos altos. Primero se les presenta la siguiente tabla a los estudiantes.

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo fijo	contribución	Valor
Estrato 4	24	\$10.160	0	
Estrato 4	25	\$10.160	0	
Estrato 4	"x"			

Figura 7. Consumo hogares

En estas actividades, se pretende que el estudiante aborde las situaciones con respecto a lo trabajado en los momentos anteriores, los cuales se basan en cálculo del valor de la factura, para después abordar las gráficas de los diferentes estratos. A raíz de este análisis se sugiere a los estudiantes realizar los respectivos cálculos luego representar las tablas en un plano cartesiano, de allí abordar las preguntas de la c a la g , las cuales ayudarían a observar las diferentes interpretaciones que puede llegar a tener el estudiante. Para este apartado de preguntas se sugiere al profesor hacer un repaso de la definición del dominio de una función, para que los estudiantes puedan abordar las respectivas preguntas, también hacer un pequeño repaso de la definición de pendiente, esto es debido si algún estudiante no recuerde que es la pendiente de una función. Sin embargo, en la guía se encuentran algunos apartados como recuerda que o sabías que, en donde se estarán recordando estos conceptos

RECUERDA QUE...

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

El dominio de una función se refiere a los posibles valores de x que pueden sustituirse en la regla de correspondencia de una función.

Figura 8. Def. de dominio

Para este momento, se espera comenzar a introducir un poco la respuesta a la pregunta en la que gira este diseño, la cual es ¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?, para abordar esta pregunta se utilizara el inciso h del tercer momento el cual consta de una respuesta por parte de los estudiantes desde su propio punto de vista con respecto a las situaciones que pueden evidenciar en su hogar o en algún lugar diferente donde observen esta problemática.

h. Teniendo en cuenta la información que se trabajó hasta este momento responda las siguientes preguntas:

- ¿Considera que los estratos 1,2,3 pueden malgastar el agua? Explique muy bien su respuesta

- ¿Los estratos 4, 5 y 6 deben ahorrar más el agua que los estratos 1,2 y 3? Explique su respuesta

- En términos de conciencia ambiental, ¿Qué le aconseja a las personas para incentivar el ahorro del agua desde el consumo en el hogar?

DE PROPIEDAD DEL
A-UTIS

Al finalizar esta actividad, se puede sugerir un espacio para que los estudiantes logren incentivar y conversar entre ellos la forma en como se encuentran representando la información esto con el fin de que los estudiantes se concienticen sobre el medio ambiente.



Para este cuarto momento se planea retomar todo lo aprendido con respecto a los anteriores momentos, haciendo énfasis en la estructura de las actividades, se pretende dar situaciones del contexto cotidiano a los estudiantes, esto para llevarlos al cálculo del valor de una factura ya en un hogar. Como la primera situación, esta se representa mediante un llenado de tanque o un lavadero en este caso:

- Ayude a Martín a conocer cuántos litros de agua gasta por minuto cuando dura la llave abierta 5 minutos

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	0	3	6			

Figura 10. Situación de llenado

Para el comienzo de esta actividad evaluativa, se le pedirá al estudiante realizar un análisis respecto al comportamiento de la tabla, este análisis puede ser expuesto al final de la actividad para evidenciar las diferentes formas que los estudiantes interpretan la tabla, para poder completarla. Como sugerencia al docente se puede adaptar el diseño en orientaciones hacia los gustos de los estudiantes.

Luego para observar las respuestas de los estudiantes, con el diferente análisis, se espera que los estudiantes aborden las siguientes preguntas que son la segunda parte de esta actividad, esta constituida de cinco consignas

2. De la información anterior responde:

a. ¿Qué representa la razón con la que el agua ingresa a la pila?

b. ¿Cómo varía la cantidad de agua en la pila con el paso del tiempo?

• ¿Cómo es la expresión que modela la tabla anterior?

c. ¿Cuánto litros de agua tiene la pila transcurridos 20 minutos?

d. Si la pila tiene una capacidad de 5 litros. ¿En qué momento la pila del lavadero se llena completamente?

Ilustración 1

Para la segunda parte de la actividad, se espera que el docente logre trabajar de forma cooperativa un laboratorio de matemáticas llamado vamos a la práctica, el cual consta en la elaboración de dicho laboratorio a través de un llenado de valdes o tazas, haciendo uso del cronometro, y considerando estos datos, para ver el comportamiento que se obtiene. Por otra parte, el docente puede cerrar la actividad de manera en que los estudiantes comparen cual recipiente se llenó más rápido en caso de que sean recipientes diferentes

¡Vamos a la práctica!

Para este experimento necesitamos:

- Una taza o Valde que indique la cantidad de litros que posee
- Un cronómetro

Diligencia los datos de la tabla con ayuda del profesor:

Volumen de agua (lt)	Tiempo de llenado (s)
1 lt	
2 lt	
3 lt	
4 lt	
5 lt	

1. Abra la llave de agua y cuando ubique el recipiente debajo de esta inicie el cronómetro para calcular el tiempo de llenado en los volúmenes de agua indicados
2. Con ayuda de los datos obtenidos en la tabla, calcule la razón de cambio promedio del volumen de agua con respecto al tiempo.

¿Qué representa la razón de cambio promedio del volumen de agua con respecto al tiempo?

Ilustración 1

Se recomienda usar un recipiente que tenga una capacidad mayor a 5 litros. La idea es mostrar los primeros cinco litros y tapar la marcación de los siguientes para efecto de las preguntas que se plantearán a continuación.

Otra sugerencia es que el docente podría proponer un tiempo mayor al tiempo en el que tarda el agua en alcanzar los 5 litros. Lo que se quiere es que el estudiante sienta la necesidad de encontrar la expresión algebraica que le permita calcular el volumen de agua en cualquier instante t .

Esto se recomienda para llevar al estudiante a la necesidad de encontrar la fórmula o la expresión algebraica de la función que está llenando el recipiente que escogieron

Apéndice G Orientaciones Nivel de Profundidad 4



NIVEL DE PROFUNDIDAD 4

¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?

PROPÓ

Generaliza y comprende las diferentes situaciones de la función lineal teniendo en cuenta las representaciones que esta puede tener en el consumo de agua en el hogar

Material elaborado por: Sandra Evelyn Parada, Carlos Fernando Plata Sanabria

Primer

Actualmente el interés por interactuar y relacionar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la vida cotidiana ha sido una característica particular a la hora de abordar temas en matemáticas, por ello Font (2006) nos pregunta acerca de este interés, al cual responde con que existen diferentes motivos por el cual se está llevando a cabo la relación de los contextos reales en matemática, los cuales pueden incentivar al estudiante a observar las matemáticas desde otro punto de vista diferente al lápiz y al papel.

De manera inicial comenzara la clase hablando acerca del caso de Martín, la cual relata un estudiante preocupado por el consumo del agua en su hogar (Ver Figura 1). Al contar esta pequeña parte de la curiosidad de Martín, a través de un video donde se explicará cómo es el consumo de agua en Colombia para los diferentes estratos y los diferentes climas o sectores de nuestro país.

Primer Momento



Martín, un estudiante de undécimo grado se preocupa mucho por el consumo de agua en su hogar, él encuentra un video en internet para entender cómo funciona el cobro de agua por metro cúbico (m^3).

El video que encontró Martín es el siguiente:

<https://www.youtube.com/watch?v=w6NKBzumvhM>



Después de ver el video e investigar un poco más, Martín realiza una investigación para encontrar el origen de la referencia de cobro por estrato para tener organizada dicha información, donde incluye el cargo fijo mensual (CF) por estrato y un valor complementario C.

Tabla 1 Tarifas de cobro por estrato

Estrato/US O	%Subsidio contribución	Cargo Fijo (\$/mes)	Complementario
Estrato 1	-70%	4632	2358
Estrato 2	-40%	6949	2358
Estrato 3	-15%	8339	2358
Estrato 4	0	9265	2358
Estrato 5	50%	13898	3538
Estrato 6	60%	14825	3774

Nota: el valor del metro cúbico (V_m^3) en Colombia es 128l

Ilustración 1. El problema de Martín

La historia de Martín está sujeta a cambios como el profesor lo desee, en este caso se puede adaptar a los contextos donde la función lineal se puede abordar (servicios, viajes, etc.). Luego de observar el video se sugiere mostrar la tabla de cobros por estratos, teniendo en cuenta y hacer la aclaración a los estudiantes, de lo que significa un subsidio y una contribución estas definiciones se encuentran en una nota al pie de la guía, para este nivel se le agregara una variable llamada como complementario la cual se debe tener presente a la hora de calcular el consumo del agua.

Luego, teniendo en cuenta la revisión del video el cual se puede presentar a los estudiantes, de forma en que ellos puedan analizar los datos tomados, una sugerencia para el docente es que el video también puede ser dado de forma oral o escrita en caso de querer adaptarlo para diferentes situaciones. Se presentará la siguiente tabla (Ver Figura 2), esta información hay que tener en cuenta que se encuentra en el video y por ello se especifica que se tomaran los datos para el año 2018.

Con base al video anterior complete la siguiente tabla para el año 2018

Tabla de consumo mínimo de m^3 según la ubicación geográfica para el año 2018		
Frío	Templado	Cálido

Ilustración 1

Al finalizar la explicación de la tabla, se le sugiere al profesor hacer énfasis en el desarrollo de la operación que se necesita para encontrar el costo de una factura en el hogar, para que el estudiante vaya conociendo el concepto y sobre lo que se va a estar trabajando en el transcurso de la actividad, resaltando el cálculo del valor total de la factura, teniendo en cuenta el estrato y los diferentes consumos que se mostraran en el transcurso del video y la tabla.

Luego de lo anterior, se presentan las siguientes actividades

Consumo Promedio	Procedimiento	Valor
		4.848
		5.232
		6.259
		4.722
$0 \leq x \leq 11$		

Ilustración 1

Para estas actividades, desde el inciso *a* al *e*, lo esencial es que estudiante logre identificar y analizar el comportamiento que tienen las variables con respecto al consumo del agua en el hogar a través del desarrollo de estas actividades, y así puedan identificar los diferentes cambios de la variación con respecto a los estratos y los diferentes consumos. En este caso al considerarse un nivel de dificultad 3, se le propone al estudiante encontrar tanto la ecuación que representa el valor identificado, y encontrar la cantidad del consumo del agua al encontrar la expresión

Para el inciso *f* y *g*, se quiere evidenciar con ayuda de las preguntas anteriores a como el estudiante puede obtener una representación de la situación, en este caso se espera que tengan diferentes tipos de representaciones, desde la parte geométrica, analítica o algebraica

- c. Utilice la información del inciso a, para el consumo mínimo de 13 m³ para los estratos 1, 2 y 3, en clima templado, en el cuaderno escriba el valor de la factura para cada uno de ellos y calcule la diferencia de pagos del estrato 2 y 3 con respecto al estrato 1. Explique a que se debe esta diferencia.

Estrato	Valor	Diferencia
1		
2		
3		

- d. ¿Qué se debe tener en cuenta para calcular el valor de la factura del consumo de agua? ¿Por qué?

- e. ¿Quién varía con respecto al consumo en cada estrato?

- f. ¿Cómo representaría la situación del consumo de m³ para cualquiera de los estratos?

- g. ¿Qué otra representación puede considerarse para las situaciones de consumo? Explique su respuesta y compare con sus compañeros

- h. ubique los valores de las tablas 2,3 y 4, dibujen un plano cartesiano en el cuaderno y responda
- ¿Cómo es el comportamiento de las gráficas a lo largo del eje x?

- ¿Qué similitudes tienen las gráficas?

Luego de realizar esta sección, compare las respuestas obtenidos con sus compañeros (a).

Ilustración 1 Incisos

Para el inciso *h*, se sugiere al docente que se trabaje de forma similar al nivel anterior, en la cual el estudiante realice un plano cartesiano en el cuaderno y acorde a las tablas anteriores, él pueda ubicar los puntos que se están trabajando, es recomendable recordar la escala o una forma de representación para los valores que se obtendrán ya que siempre serán un poco alto, otra forma en que el docente puede llegar a abordar esta parte es mediante el uso de la aplicación de GeoGebra y permitir que los estudiantes participen de alguna forma ubicando los puntos que se les presentaron, y allí luego socializarlos, sin embargo para el caso de que se trabaje en el cuaderno se espera que los estudiantes logren unir los puntos mediante una línea recta, sin embargo cabe aclarar que si ellos llegan a unir los puntos mediante alguna curva, no quiere decir que el estudiante este errado, esto se puede permitir pero luego hay que aclarar en el transcurso de la actividad como se está comportando ese patrón o esa variación, para ello si lo unen con curvas el docente debe pedir al estudiante un valor diferente a los presentados que no supere el rango del consumo. Para luego poder llegar al segundo momento el cual se verá con la manipulación de los applets



Primero antes iniciar este diseño se le sugiere al docente descargar el programa GeoGebra para el computador, ingresando al siguiente video:

<https://youtu.be/3R0zIfRHSjc> , Este video será para el docente que necesite descargar la aplicación de GeoGebra, por otra parte, si el docente desea también puede trabajar con la versión online de GeoGebra en caso de tener acceso a conexión a internet puede observar el siguiente video <https://youtu.be/1qthBLLcmA4> donde se explica la creación de usuario para GeoGebra.

A continuación, se presenta también un video, para explicar el acceso a los applets para este momento, <https://youtu.be/INaMaluDC2s> hay que tener en cuenta y precaución a la hora de descargar los archivos generar la copia para su respectiva descarga de lo contrario no se podría tener acceso a los applets aquí presentados.

Ah manera de sugerencia, se le recuerda al docente que la aplicación de GeoGebra también se encuentra disponible para dispositivos móviles

Para el segundo, momento es importante recordar para el docente que esta actividad está sujeta a cambios, acorde a como el los necesite en este caso, la manipulación de GeoGebra mediante video beam para que los estudiantes puedan organizar y lograr la información un poco, o tratar de llevar la implementación al lápiz y papel, y tratar de abordar las diferencias de forma oral con el grupo

El análisis con respecto al video y las tablas que se van a presentar, en estas tablas se van a observar y recordar los diferentes rangos de consumos de metro cúbicos por sector (climas), se sugiere una breve explicación de los rangos que deben poseer.

El profesor de Martín realiza tres simulaciones, donde muestra a los estudiantes del grado undécimo cómo calcular el precio del consumo de agua para los estratos 1, 2, y 3 en cada uno de los climas: frío, templado y cálido.

Estrato	Subsidio/ contribución (%) (S/C)	Cargo Fijo mensual (CF)
Estrato 1	-70%	\$6.773
Estrato 2	-40%	\$6.773
Estrato 3	-15%	\$6.773

Consumo básico por climas (m^3 /suscriptor)	
Ciudades y municipios con altitud promedio por encima de 2000 msnm FRÍO	13
Ciudades y municipios con altitud promedio entre 1000 y 2000 msnm TEMPLADO	16
Ciudades y municipios con altitud promedio por debajo de 1000 msnm CÁLIDO	23

Ilustración 1 Inicio Momento 2

Luego de presentar la tabla y los diferentes promedios de consumo por climas, el profesor podrá realizar una breve explicación haciendo énfasis en el video que se presentó, se sugiere a que está sujeto a la forma en como el profesor desee presentarlo ya sea mediante una discusión o volver a revisar el video, eso se debe a las formas que se deben presentar al momento de generar un valor total de la factura en los estratos 1, 2 y 3 los cuales tienen un subsidio otorgado por el gobierno. Al finalizar esta explicación se puede apoyar del siguiente applet de GeoGebra.

Para la manipulación de este applet llamado GeoGebra 4.1, el cual representa una función por partes, se le pedirá al estudiante que deslice y analice las situaciones al momento de deslizar el puntero y encontrarse con lo que está cambiando en el applet.

Por otro lado, se sugiere al docente dar nuevamente como definiciones, acerca de la pendiente y la ecuación de la recta (punto-pendiente) estas definiciones pueden ser abordadas durante el desarrollo de la actividad.

en mi hogar?

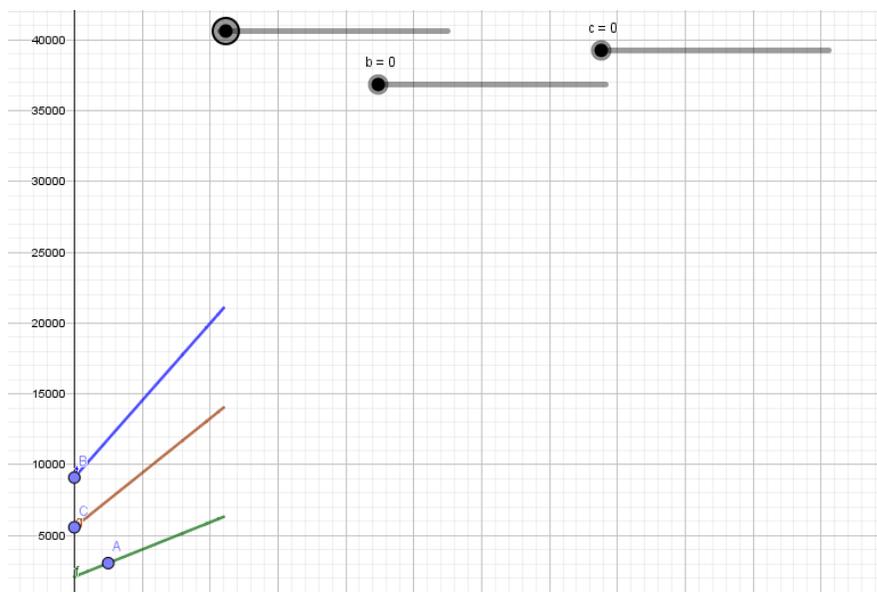
Luego con ayuda del profesor ingrese al siguiente link
<https://www.geogebra.org/m/weag4yfn> el cual presenta una situación de cobro para los estratos 1, 2 y 3 en clima frío, deslice los puntos A, B, C y responda

a. ¿Cómo es el comportamiento de las rectas que modela la situación? ¿por qué?

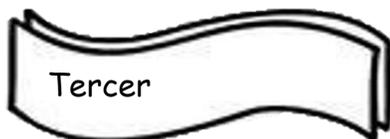
b. ¿De qué magnitudes depende el precio de la factura para los estratos 1?

c. ¿Qué sucede cuando los puntos A, B y C superan los $11m^3$?

A continuación, se presentan los applets que serán utilizadas para el desarrollo de este momento



Para estas actividades se pueden trabajar de forma colectiva, donde el profesor puede guiar a los estudiantes mediante las preguntas orientadoras, las cuales precisan algo similar a él applet de Estratos 1-climas.



Para este tercer momento se le presenta al estudiante la situación de los amigos de Martín, los cuales tratan de abordar los estratos faltantes, esto es para poder analizar los comportamientos de las funciones para los denominados estratos altos. Primero se les presenta la siguiente tabla a los estudiantes.

Consumo en los hogares				
Hogares	Metros cúbicos	Cargo	contribución	Valor
Estrato 4	24	\$11.623	0	
Estrato 4	25	\$11.623	0	
Estrato 4	"x"			

Ilustración 1 Consumos Estratos 4,5 y 6

En estas actividades, se pretende que el estudiante aborde las situaciones con respecto a lo trabajado en los momentos anteriores, los cuales se basan en cálculo del valor de la factura, para después abordar las gráficas de los diferentes estratos. A raíz de este análisis se sugiere a los estudiantes realizar los respectivos cálculos luego representar las tablas en un plano cartesiano, de allí abordar las preguntas de la c a la g , las cuales ayudarían a observar las diferentes interpretaciones que puede llegar a tener el estudiante. Para este apartado de preguntas se sugiere al profesor hacer un repaso de la definición del dominio de una función, para que los estudiantes puedan abordar las respectivas preguntas, también hacer un pequeño repaso de la definición de pendiente, esto es debido si algún estudiante no recuerde que es la pendiente de una función. Sin embargo, en la guía se encuentran algunos apartados como recuerda que o sabías que, en donde se estarán recordando estos conceptos

RECUERDA QUE...

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

El dominio de una función se refiere a los posibles valores de x que pueden sustituirse en la regla de correspondencia de una función.

Para este momento, se espera comenzar a introducir un poco la respuesta a la pregunta en la que gira este diseño, la cual es ¿Cómo las matemáticas pueden ayudarme a entender el consumo del agua en mi hogar?, para abordar esta pregunta se utilizara el inciso *h* del tercer momento el cual consta de una respuesta por parte de los estudiantes desde su propio punto de vista con respecto a las situaciones que pueden evidenciar en su hogar o en algún lugar diferente donde observen esta problemática.

h. Teniendo en cuenta la información que se trabajó hasta este momento responda las siguientes preguntas:

- ¿Considera que los estratos 1,2,3 pueden malgastar el agua? Explique muy bien su respuesta

- ¿Los estratos 4, 5 y 6 deben ahorrar más el agua que los estratos 1,2 y 3? Explique su respuesta

- En términos de conciencia ambiental, ¿Qué le aconseja a las personas para incentivar el ahorro del agua desde el consumo en el hogar?



Para este cuarto momento se planea retomar todo lo aprendido con respecto a los anteriores momentos, haciendo énfasis en la estructura de las actividades, se pretende dar situaciones del contexto cotidiano a los estudiantes, esto para llevarlos al calculo del valor de una factura ya en un hogar. Como la primera situación, esta se representa mediante un llenado de tanque o un lavadero en este caso:

X(minutos)	0	1	2	3	4	5
Y (litros de agua)	5	8	11	14		

Para el comienzo de esta actividad evaluativa, se le pedirá al estudiante realizar un análisis respecto al comportamiento de la tabla, este análisis puede ser expuesto al final de la actividad para evidenciar las diferentes formas que los estudiantes interpretan la tabla, para poder completarla.

Luego para observar las respuestas de los estudiantes, con el diferente análisis, se espera que los estudiantes aborden las siguientes preguntas que son la segunda parte de esta actividad, está constituida de cinco consignas

Sin embargo, algunas de las consignas serán omitidas en el diseño y se pueden tener en cuenta para algún tema en discusión al momento de desarrollar la clase, ya sea como una pregunta evaluativa por parte del docente.

2. De la información anterior responde:

a. ¿Qué representa la razón con la que el agua ingresa a la pila?

b. ¿Cómo varía la cantidad de agua en la pila con el paso del tiempo?

• ¿Cómo es la expresión que modela la tabla anterior?

c. ¿Cuánto litros de agua tiene la pila transcurridos 20 minutos?

d. Si la pila tiene una capacidad de 5 litros. ¿En qué momento la pila del lavadero se llena completamente?

Ilustración 1

Para una segunda parte que se llama vamos a la práctica se pretende relacionar todo lo aprendido en el transcurso de la actividad para concientizar al estudiante con respecto al agua y el comportamiento de la función lineal en nuestro entorno adelante se presenta el siguiente laboratorio

¡Vamos a la práctica!

Para este experimento necesitamos:

- Una taza o Valde que indique la cantidad de litros que posee
- Un cronómetro

Diligencia los datos de la tabla con ayuda del profesor:

Volumen de agua (lt)	Tiempo de llenado (s)
1 lt	
2 lt	
3 lt	
4 lt	
5 lt	

1. Abra la llave de agua y cuando ubique el recipiente debajo de esta inicie el cronómetro para calcular el tiempo de llenado en los volúmenes de agua indicados
2. Con ayuda de los datos obtenidos en la tabla, calcule la razón de cambio promedio del volumen de agua con respecto al tiempo.

¿Qué representa la razón de cambio promedio del volumen de agua con respecto al tiempo?

Ilustración 1 Actividad Práctica

Se recomienda usar un recipiente que tenga una capacidad mayor a 5 litros. La idea es mostrar los primeros cinco litros y tapan la marcación de los siguientes para efecto de las preguntas que se plantearán a continuación.

Otra sugerencia es que el docente podría proponer un tiempo mayor al tiempo en el que tarda el agua en alcanzar los 5 litros. Lo que se quiere es que el estudiante sienta la necesidad de encontrar la expresión algebraica que le permita calcular el volumen de agua en cualquier instante t .

Esto se recomienda para llevar al estudiante a la necesidad de encontrar la fórmula o la expresión algebraica de la función que está llenando el recipiente que escogieron