

ESTUDIO COMPUTACIONAL DE LA DINÁMICA DE UN
PLASMA CONFINADO EN UN TOKAMAK ESFÉRICO
EN EL RÉGIMEN LINEAL

JESÚS EDUARDO LÓPEZ DURÁN



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2018

ESTUDIO COMPUTACIONAL DE LA DINÁMICA DE UN
PLASMA CONFINADO EN UN TOKAMAK ESFÉRICO
EN EL RÉGIMEN LINEAL

JESÚS EDUARDO LÓPEZ DURÁN

Trabajo de grado para optar al título de
físico

Director
Eduardo Alberto Orozco Ospino
Ph. D. Física
Codirector
Valeriy D. Dugar-Zhabon
Ph. D. Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2018

*A mis padres,
Luz Yanneth y Pedro Jesús.
A mi hermano Jhon y a mi profesora,
Annie J. Delgado.*

AGRADECIMIENTOS

En este punto es pertinente agradecer a todas las personas que han hecho parte de mi formación académica y que han contribuido a mi crecimiento como persona, por tal motivo agradezco profundamente a mis primeros educadores: la profesora *Aurora, Elsa* y muy especialmente a las profesoras *Nelly Benítez y Francelina Hoyos*, por inculcarme desde temprana edad que la educación es el motor de desarrollo. A quienes despertaron mi gusto por la ciencia en todas sus ramas, los profesores *José Domingo Jaimes, Ana Dolores Araque, Olga Gamarra* y por su puesto, a *Annie J. Delgado*.

A todos mis maestros universitarios, especialmente a *Arturo Plata* por sus consejos, apoyo y amistad. A mi director, *Eduardo A. Orozco*, por su paciencia y carisma. Son varios años de enseñanzas y trabajos en conjunto. Su dedicación en este proceso de formación ha sido vital, a quién le debo gran parte de mis habilidades. A quienes aportaron significativamente a lo largo de mi carrera y espero lo sigan haciendo, a los profesores *Ilia Mikhailov, Valeriy D. Dugar-Zhabon y William Gutiérrez*.

Agradezco especialmente a mis compañeros y amigos: *Mauricio Niño, Edgar Pinzón, Bryan Arenas, Yesid Roman, Karen Carrillo, Ana Milena, Yensur, Andrey Jaimes, Yesid Robles* y a todos con quienes he compartido grandes momentos y experiencias.

A los profesores y amigos, *Fredy Parada, Oswaldo Otero y Petr Tsygankov* por acogerme en el laboratorio y enseñarme el significado del trabajo conjunto.

Sinceramente Agradecido con *Yerson Barragán y José Alejandro Hernández*, a quienes les debo una grandiosa amistad, cooperación y con quienes he compartido diversas enseñanzas, congresos y espero seguir compartiendo y debatiendo.

A Paula Cárdenas, por su gran e incondicional apoyo y consejos en este trabajo.

Finalmente, agradezco a mis padres, a mi hermano y a toda mi familia que me apoyó con sus consejos, motivación e impulsaron a seguir con mis estudios, a ellos les debo el significado de la palabra trabajo.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	16
1. MARCO TEÓRICO	18
1.1. PRINCIPIOS DE LA FUSIÓN NUCLEAR	18
1.2. GENERALIDADES DEL PLASMA	19
1.3. DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA DEL PLASMA	21
1.4. CONFINAMIENTO TOROIDAL	22
1.5. REACTOR MAST	23
2. MODELO DE SIMULACIÓN	24
2.1. GEOMETRÍA	24
2.2. MODELO FÍSICO	25
2.3. CONDICIONES DE FRONTERA	28
2.4. ESQUEMA NUMÉRICO	28
3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	29
3.1. CONDICIONES INICIALES	29

ÍNDICE GENERAL

3.2. DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.	36
4. CONCLUSIONES	47

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Representación de la reacción DT	18
2.	Representación esquemática de los modelos físicos que describen el plasma a diferentes niveles de aproximación.	20
3.	Esquema geométrico de las bobinas y columna de plasma en una configuración tipo tokamak (izquierda) y un stellarator (derecha).	22
4.	Esquema típico de la sección transversal de la columna de plasma en un tokamak.	23
5.	Captura fotográfica de la descarga en la fase de alto confinamiento en el reactor MAST.	23
6.	Representación geométrica del sistema a simular. La sección rectangular delimitada por las líneas rojas punteadas representa el plano poloidal definido por $r_{min} < r < r_{max}$ y $z_{min} < z < z_{max}$. En el interior del plano se representa un esquema típico de la topología de líneas de campo magnético.	25
7.	Líneas de campo y densidad de corriente sobre superficies isóbaras. . .	26
8.	A la izquierda, resultado de la simulación: flujo poloidal magnético ψ . Los contornos más oscuros son los más cercanos a la separatriz plasma-vacío. A la derecha, captura fotográfica de la descarga del reactor MAST. Las líneas punteadas representan una aproximación de la separatriz.	30

ÍNDICE DE FIGURAS

9.	a) Dibujo representativo del D-shape del plasma en la simulación. b) Comparación directa entre D-shape experimental y D-shape obtenido en la simulación.	31
10.	Perfil de presión cinética (a) y densidad de corriente toroidal (b) sobre el plano poloidal en equilibrio MHD.	32
11.	Curva experimental de la concentración electrónica n_e , presión P_e en una descarga cuasi-estacionaria.	32
12.	(a) las líneas de campo magnético poloidal representadas a través de trazas y (b) divergencia del campo magnético en el plano rz demuestran la validez del equilibrio encontrado con la simulación	33
13.	Condiciones iniciales del plasma a lo largo del eje radial. A la izquierda comportamiento de las componentes del campo magnético. A la derecha, perfil de presión cinética P , densidad de corriente toroidal J_t y factor de seguridad.	33
14.	Reconstrucción 3D basado en isosuperficies del perfil de presión, superficie: roja 30[kPa], naranja 20[kPa], azul 10[kPa] y púrpura 3[kPa]. La línea verde representa una línea de campo reconstruida sobre el toroide.	34
15.	Representación de la malla no homogénea sobre la región de simulación. (b) verificación de ajuste de puntos de malla sobre la separatriz del plasma.	35
16.	(a): Perfil de presión cinética sobre el plano poloidal delimitado por la frontera fija del plasma. (b): perfil de presión P , densidad de corriente toroidal J_t y factor de seguridad q sobre eje mayor del sistema.	35
17.	Perfil de perturbación de la componente toroidal de la velocidad (a) sobre el plano poloidal (b): sobre eje mayor del sistema. $\kappa = 15$	37
18.	Evolución temporal de: (izquierda a derecha) densidad de masa, presión magnética y presión cinética para los instantes $t=10\tau_a$, $20\tau_a$, $30\tau_a$, $40\tau_a$, $50\tau_a$ y $60\tau_a$	38
19.	Evolución temporal de algunos modos poloidales presentes en la presión magnética: (izquierda a derecha) $m=3$, $m=7$ y $m=10$ en los instantes $t=10\tau_a$, $20\tau_a$, $30\tau_a$, $40\tau_a$ y $50\tau_a$	40

ÍNDICE DE FIGURAS

20.	(a) Evolución temporal de los modos poloidales, exaltando el efecto de amortiguamiento. (b) Ajuste del decaimiento exponencial de cada modo.	42
21.	Evolución del valor máximo en la divergencia de campo magnético, implementando el esquema de flujo restringido.	43
22.	Evolución temporal de: (izquierda a derecha) presión cinética, densidad de masa y presión magnética para los instantes $t=10\tau_a$, $20\tau_a$, $30\tau_a$, $40\tau_a$, $50\tau_a$ y $60\tau_a$	44
23.	Representación de volumen de control (líneas). La cruz representa las esquinas del volumen de control. Los puntos de malla se identifican por círculos verdes.	59

ÍNDICE DE TABLAS

1.	Ejemplos de reacciones típicas de fusión nuclear con diferentes núcleos atómicos. Reactivos y respectivos productos.	19
2.	Alcance de los modelos que describen el plasma según su respectivo nivel de aproximación.	20
3.	Valores numéricos de los parámetros que describen la región de simulación y la malla rectangular homogénea.	29
4.	Valores numéricos de los parámetros geométricos según resultados de la simulación <i>vs</i> valores experimentales.	31
5.	Factor de amortiguamiento en decaimiento exponencial para cada modo poloidal: $m = 3 - 10$	42
6.	Valor numérico empleado para los parámetros de viscosidad y resistividad en la segunda simulación.	44

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO A.	ECUACIÓN DE GRAD-SHAFRANOV	54
ANEXO B.	DISCRETIZACIÓN ECUACIONES MHD	57
ANEXO C.	TRANSPORTE DE FLUJO RESTRINGIDO	59

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO COMPUTACIONAL DE LA DINÁMICA DE UN PLASMA CONFINADO EN UN TOKAMAK ESFÉRICO EN EL RÉGIMEN LINEAL.*

AUTOR: Jesús E. López, E. A. Orozco, Valeriy D. Dugar-Zhabon†

PALABRAS CLAVES: Plasma, Confinamiento toroidal, Tokamak, Magnetohidrodinámica, Equilibrio MHD.

DESCRIPCIÓN: El confinamiento de un plasma para propiciar reacciones de fusión como fuente de energía se ha estudiado desde hace aproximadamente 5 décadas. Para este propósito se han propuesto múltiples configuraciones, siendo los dispositivos por confinamiento magnético toroidales los que mejores resultados experimentales han arrojado.

El estudio de la dinámica del plasma es la principal herramienta para el control de este tipo de sistemas, el cual se ha realizado principalmente mediante técnicas de simulación computacional. El equilibrio magnetohidrodinámico (MHD) es el punto de partida para el estudio de macro-inestabilidades en plasmas, el cual se obtiene a partir de la solución de la ecuación de balance de fuerza bajo la suposición de plasma estático y estacionario. En sistemas axialmente simétricos dicha condición conduce a la ecuación de Grad-Shafranov. En este trabajo se presentan los resultados del estudio numérico del equilibrio MHD en un Tokamak esférico de razón de aspecto $A \sim 1,6$. Para ello se resuelve numéricamente la ecuación de Grad-Shafranov en una región rectangular del plano poloidal, utilizando el método de diferencias finitas bajo un esquema de sobre-relajación sucesiva (SOR). Se presentan perfiles del flujo magnético poloidal, presión, factor de seguridad y del campo magnético. Posteriormente, dicho equilibrio se somete a perturbaciones en la velocidad para estudiar la dinámica del plasma en el régimen lineal, usando un modelo MHD resistivo. Las simulaciones de la dinámica del plasma se realizan bajo un esquema de diferencias finitas de cuarto orden para las derivadas espaciales e implementando el algoritmo de Runge-Kutta como integrador temporal. Los resultados muestran que las perturbaciones se ubican en la región del borde exterior del plasma; sin embargo se evidencia que algunos modos poloidales se desplazan a la zona central, alrededor del eje magnético y pueden crecer o amortiguarse según el valor numérico de viscosidad. Para garantizar el cumplimiento de la ecuación $\text{div}(\mathbf{B})=0$ en cada paso temporal, con una tolerancia del orden de $10^{-14}[\text{T/m}]$, se implementa el esquema de transporte de flujo restringido.

* Trabajo de Grado.

† Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Eduardo Alberto Orozco Ospino, Ph.D. Física. Codirector: Valeriy D. Dugar-Zhabon, Ph.D. Física.

ABSTRACT

TITLE: NUMERICAL STUDY ON LINEAR DYNAMICS OF A PLASMA CONFINED BY A SPHERICAL TOKAMAK ^{*}

AUTOR: Jesús E. López, E. A. Orozco, Valeriy D. Dugar-Zhabon[†]

KEYWORDS: Plasma, Toroidal confinement, Tokamak, Magnetohydrodynamics, MHD equilibrium.

DESCRIPTION: The plasma confinement to promote fusion reactions as an energy source has been studied since about 5 decades. With this aim, multiple configurations have been proposed, being the toroidal magnetic confinement the ones that have obtained the best experimental results.

The study of plasma dynamics is the main tool for the control of this type of systems, which has been carried out mainly by computational simulation techniques. The magnetohydrodynamic (MHD) equilibrium is the starting point for the study of macro-instabilities in plasmas, which is obtained from the solution of the equation of force balance under the assumption of static and stationary plasma. In axially symmetric systems, this condition leads to the Grad-Shafranov equation. In this paper, we present the results of the numerical study of the MHD equilibrium in a spherical Tokamak of aspect ratio $A \sim 1, 6$. For this, the Grad-Shafranov equation is solved numerically in a rectangular region of the poloidal plane, using finite difference method under a successive over-relaxation scheme (SOR). Profiles of poloidal magnetic flux, pressure, safety factor and magnetic field are presented. Subsequently, said equilibrium is subjected to perturbations in the velocity to study the dynamics of the plasma in the linear regime, using a resistive MHD model. The simulations of the dynamics of the plasma are carried out under a fourth order finite difference scheme for the spatial derivatives and implementing the Runge-Kutta algorithm as a temporal integrator. The results show that the disturbances are located in the region of the outer edge of the plasma; however, it is evident that some poloidal modes move to the central zone, around the magnetic axis and can grow or be dampened according to the numerical value of viscosity. In order to guarantee the fulfillment of the equation $\text{div}(\mathbf{B})=0$ in each temporary step, with a tolerance of the order of $10^{-14}[\text{T/m}]$, the restricted flow transport scheme is implemented.

^{*} Bachelor thesis.

[†] Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Eduardo Alberto Orozco Ospino, Ph.D. Física. Codirector: Valeriy D. Dugar-Zhabon, Ph.D. Física.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la fusión termonuclear basa sus principios en el entendimiento de la física del plasma, siendo el soporte de los avances en diseños experimentales de reactores de fusión. Estos reactores prometen aportar a la solución del problema energético mundial: «Energía limpia y renovable». Las investigaciones de las últimas décadas en esta área han conllevado a una mejor comprensión del tema, como resultado de esto, el alcance de las investigaciones ha crecido, apuntando a aplicaciones del plasma en ramas de la industria como el recubrimiento de materiales.

Las primeras investigaciones en plasma se remontan a la física de descargas eléctricas en tubos de vacío, donde se comprendía el plasma como un gas ionizado [1]. Actualmente esta definición se conserva, salvo que dicho gas cuasineutral debe presentar un comportamiento colectivo. El estudio de la dinámica del plasma es tanto fascinante como complejo, ya que involucra gran cantidad de fenómenos que en muchos casos siguen sin ser resueltos. Parte de estos fenómenos involucran propagación de ondas, donde las oscilaciones de temperatura, presión, campos eléctricos y/o magnéticos pueden crecer, dando lugar a un gran número de inestabilidades [2].

La abundancia de plasma en la naturaleza es tan alta que gran parte de la materia visible presente en el universo se encuentra en estado plasmático ($\sim 99,99\%$). Esto no logra ser percibido debido a la poca presencia de dicho estado en la tierra; sin embargo, saliendo del planeta se encuentra la ionosfera, que es un plasma parcialmente ionizado, el viento y corona solar y en general las estrellas constituyen ejemplos de plasma en la naturaleza.

En el interior de una estrella se presentan gran cantidad de reacciones de fusión termonuclear, liberando gran energía a partir de la transformación de hidrógeno en helio y luego en elementos más pesados; por lo tanto la propia naturaleza nos indica que es posible obtener una fuente de energía por este medio. Sin embargo el confinamiento del plasma no es un problema en las estrellas, debido a que su propio campo gravitacional se opone a que la materia escape.

Lo anterior indica que el problema en la generación de plasma en laboratorios, propicio para las reacciones de fusión, está ligado con el confinamiento para alcanzar las altas temperaturas requeridas y evitar la pérdida de energía. Es así que desde hace unas décadas se ha estudiado diversos mecanismos de confinamiento para lograr dicho proceso. Uno de los más prometedores y analizado es el confinamiento magnético, con el que se ha experimentado diferentes diseños e ideas [3].

Debido a que una partícula cargada gira alrededor de las líneas de campo magnético, se puede pensar que una configuración sencilla para confinar plasma es por medio de una cavidad cilíndrica en presencia de un campo uniforme. Si el radio de la cavidad es mayor al radio de giro de las partículas, se garantiza que el plasma no tocará las paredes de la cavidad, sin embargo, como las partículas pueden moverse a lo largo de las líneas de campo, es inevitable la interacción del plasma con las tapas. Muchas propuestas se han presentado para evitar esta interacción; algunas sencillas como las trampas tipo espejo y otras cuya configuración de campo puede ser compleja, pero se hace persistente la pérdida de partículas [4]. Para evitar que las partículas que conforman el plasma se escapen por los extremos se propone doblar los extremos de las líneas de campo hasta «unirlas» de modo que se conviertan en anillos y la cavidad en un toroide. Pero esta curvatura genera un movimiento de deriva en las partículas, y además posi-

INTRODUCCIÓN

bilita el desarrollo de un gran número de inestabilidades [5]. A pesar de que la configuración toroidal promueve el desarrollo de inestabilidades, es uno de los sistemas de confinamiento más estudiados y desarrollados, tal como los dispositivos TOKAMAK y configuraciones helicoidales (Stellarator) por sus buenos resultados en las reacciones de fusión [2].

La física de plasmas en dispositivos de confinamiento como el tokamak no está completamente entendida; las inestabilidades en el borde exterior de un dispositivo toroidal que generan erupciones de plasma no es la excepción. Estas erupciones se producen cuando sobre la sección poloidal el plasma presenta una estructura filamentada en el régimen de alto confinamiento (high confinement) [6]. Este fenómeno conocido como Edge Localized Modes se ha observado en dispositivos como el MAST-Mega Ampere Spherical Torus [7]. Trabajos teóricos basados en la teoría no lineal de los modos ballooning predicen este fenómeno.

Con el ánimo de iniciar estudios en *Física de Plasma en Reactores de Fusión Termonuclear* como una nueva línea de investigación en el grupo de física y corrosión del plasma FITEK, adscrito a la escuela de física de la Universidad Industrial de Santander, se propone estudiar la dinámica de un plasma confinado magnéticamente en un dispositivo de configuración toroidal, a través de simulaciones computacionales basadas en el modelo linealizado de la magnetohidrodinámica.

En este trabajo se presenta una breve descripción de los parámetros fundamentales del plasma, así como la idea general del principio de fusión. Más adelante se presentan las características globales de dos sistemas de confinamiento toroidal (tokamak y stellarator). En el capítulo 2 se describe a detalle el modelo físico-computacional empleado y finalmente se presentan los resultados obtenidos con su respectiva discusión y conclusiones.

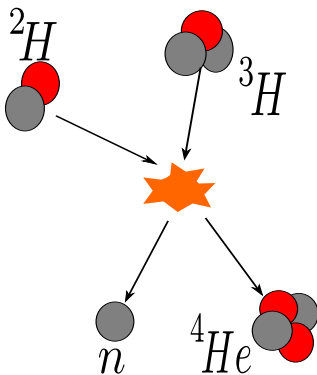
CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

1.1 PRINCIPIOS DE LA FUSIÓN NUCLEAR

La fusión nuclear ocurre cuando dos núcleos atómicos superan la repulsión electrostática logrando formar un nuevo núcleo más pesado. En dicho proceso se libera gran cantidad de energía si la suma de masa de los núcleos atómicos antes de la reacción es mayor que la masa del nuevo núcleo; esta diferencia Δm es conocida como defecto de masa y de acuerdo con la teoría de la relatividad Δmc^2 es la energía liberada en la reacción. Para superar la repulsión electrostática entre los núcleos, es necesario transferirles suficiente energía que permita superar dicha barrera, de naturaleza coulombiana en una colisión. La forma más óptima de realizar este proceso es calentar los reactivos lo suficiente hasta que la fusión se consiga, por tal motivo este proceso es denominado fusión termonuclear. En la tabla (1) se presentan algunas reacciones de fusión, sin embargo, en los reactores de primera especie suele usarse como combustible dos isótopos de hidrógeno: el Deuterio (D) y Tritio (T), (ver figura1), siendo la reacción más eficiente al generar la mayor cantidad de ganancia de energía con las temperaturas más bajas [8].

Figura 1: Representación de la reacción DT



La temperatura necesaria en la reacción anterior: DT, suele ser del orden de los 5-25[Kev], donde 1[Kev]= 10^6 grados celcius; sin embargo no sólo basta con alcanzar dichas temperaturas, se debe mantener esta temperatura durante un tiempo de confinamiento suficientemente largo, con una densidad de iones suficientemente alta, para obtener un rendimiento óptimo, donde la energía de fusión obtenida sea mayor que la suministrada. El criterio que determina lo anterior es conocido como criterio de Lawson y suele definirse como sigue:

$$n\tau_c \geq f(T) \quad (1.1)$$

donde n es la densidad del combustible, τ_c el tiempo de confinamiento de la energía y $f(T)$ una función de la temperatura. Para la reacción DT el criterio de Lawson se aproxima a $n\tau_c \geq 2 \times 10^{11}[\text{m}^{-3}\text{s}]$ [9], de modo que todo esfuerzo en el desarrollo de un dispositivo de fusión termonuclear debe considerar este criterio, exigiendo que el combustible a una cierta densidad y temperatura ha de mantenerse confinado al menos un tiempo τ_c para que el proceso sea eficiente.

1.2 GENERALIDADES DEL PLASMA

Tabla 1: Ejemplos de reacciones típicas de fusión nuclear con diferentes núcleos atómicos. Reactivos y respectivos productos.

$D + D \rightarrow He^3(0,82MeV) + n(2,45MeV)$	$Li^6 + n \rightarrow T + He^4 + 4,8MeV$
$T + D \rightarrow He^4(3,52MeV) + n(14,06MeV)$	$Li^7 + n(2,5MeV) \rightarrow T + He^4 + n$
$D + He^3 \rightarrow He^4(3,67MeV) + p(14,67MeV)$	$D + D \rightarrow T(1,01MeV) + p(3,03MeV)$

1.2 GENERALIDADES DEL PLASMA

El plasma es usualmente definido como un gas ionizado, cuasineutral que exhibe un comportamiento colectivo, compuesto de partículas neutras, iones de diversas especies y electrones. En el estudio de plasma es habitual encontrarse con términos como la longitud de Debye, λ_D , definiendo la longitud en la cual el campo eléctrico generado por una partícula de carga q es anulado por otras partículas con signo de carga opuesto, así, dicho campo no puede influir en la dinámica de otras partículas más allá de ésta distancia.

$$\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 \kappa_B T}{n_e e^2} \quad (1.2)$$

Los parámetros n_e y e son la densidad de electrones y carga eléctrica del electrón respectivamente, ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío, κ_B la constante de Boltzmann y T la temperatura electrónica. En física del plasma, un parámetro importante es el *parámetro del plasma*, N_D y está definido como el número de electrones en la esfera de Debye*.

$$N_D = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\epsilon_0 \kappa_B T}{e^2 n_e^{1/3}} \right)^{3/2} \quad (1.3)$$

El parámetro del plasma proporciona una medida de la razón entre la energía térmica y la energía potencial de interacción entre electrones, así, el plasma es débilmente acoplado si existe un apantallamiento de Debye, es decir $N_D \gg 1$, de modo que la energía térmica es mucho mayor que la energía potencial. De este modo se puede concluir que los plasmas débilmente acoplados tienen un gran número de electrones en la esfera de Debye. Si $N_D < 1$ el plasma es fuertemente acoplado, pues si $T \equiv cte$, n_e debe ser muy grande, siendo posible notar efectos cuánticos.

Otro concepto relevante en física del plasma es la frecuencia plásmica y se define como la frecuencia natural de oscilación de un plasma. Es un efecto de la separación de carga iónica y electrónica, pues se generan oscilaciones de las cargas móviles (e^-) al rededor de los iones, cuya frecuencia de oscilación está dada por:

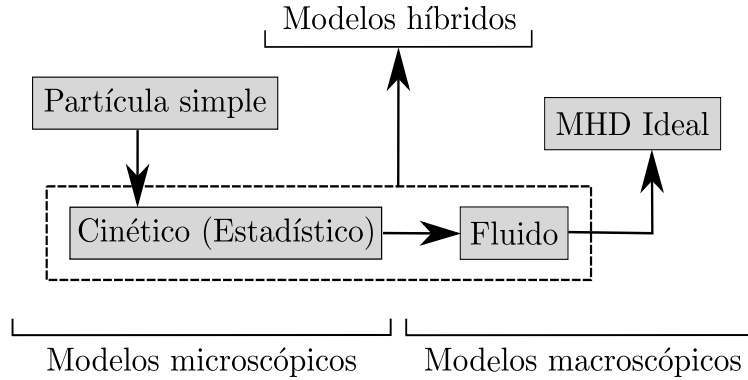
$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \quad (1.4)$$

Es común que el estudio teórico del plasma se base esencialmente en uno de dos puntos de vista. El primero es el estudio teórico microscópico basado en el análisis estadístico y cinético de sus variables físicas. El segundo es el análisis macroscópico basado en termodinámica e hidrodinámica y consiste en considerar el plasma como un fluido conductor.

* Esfera de radio igual a la longitud de Debye: $e\lambda_D$ (1.2).

1.2 GENERALIDADES DEL PLASMA

Figura 2: Representación esquemática de los modelos físicos que describen el plasma a diferentes niveles de aproximación.



La aproximación de partícula simple es el modelo más minimalista pero muy apropiado para dar una idea global del sistema desde el punto de vista microscópico, sin embargo la propiedad fundamental del comportamiento colectivo del plasma se pierde en esta aproximación, pero es el primer paso para la comprensión de los procesos en el plasma. La aproximación cinética se basa en el estudio de la función de distribución de las partículas del plasma en el espacio de fase; un análisis estadístico es imprescindible. Una característica del plasma es que los efectos causados por el movimiento cooperativo de las partículas, como las inestabilidades u oscilaciones sólo son notorios a escala macroscópica [10], de modo que la medición del movimiento de las partículas individuales resulta impráctico además de imposible [11].

Cuando el plasma es considerado como un fluido, los estudios se basan en ecuaciones de valores promedio de las variables macroscópicas como la presión, la temperatura, velocidad media del plasma, etc, los cuales se pueden medir directa e indirectamente. Es claro que en esta aproximación se pierde los detalles del comportamiento de las partículas individuales [12]. La magnetohidrodinámica (MHD) se encarga de este estudio, donde los electrones y cada especie iónica es considerada como un fluido. Es de resaltar que en esta aproximación se hace indispensable el uso de ecuaciones auxiliares entre los parámetros macroscópicos, estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de estado.

La figura 2 presenta de forma simplificada los modelos ya mencionados, resaltando la existencia de modelos intermedios o híbridos, los cuales suelen ser más elaborados para rescatar detalles imprescindibles del modelo cinético, manteniendo características de la simplicidad del modelo MHD. La tabla 1.2 presenta el alcance de cada uno de estos modelos.

Tabla 2: Alcance de los modelos que describen el plasma según su respectivo nivel de aproximación.

	MHD IDEAL	DOS FLUIDOS	GIROCINÉTICA	CINÉTICA	PARTÍCULA A PARTICULA
DESCRIPCIÓN	Plasma como un único fluido. La masa se asocia a la componente iónica, pero la corriente se asocia a la componente electrónica.	Considera a la componente iónica y electrónica como dos fluidos separados.	Modelo cinético que considera el movimiento de superpartículas	Las posiciones y velocidades de las partículas dependen de una función de distribución y realiza el seguimiento a superpartículas.	Seguimiento a cada partícula en cada instante
VENTAJAS	Mirada macroscópica del plasma y en principio, fácil de resolver.	Incorpora algunos efectos que la MHD ideal no, como efectos de reconexión.	Captura algunas propiedades del modelo cinético. Es un modelo práctico y sencillo de resolver.	Herramienta muy poderosa capaz de describir gran variedad de fenómenos	Modelo más preciso posible
DESVENTAJAS	Se pierde la mirada microscópica del plasma. No predice inestabilidades cinéticas	Perdida de la descripción cinética del plasma.	No es aplicable a sistemas o efectos que requieran largas escalas de tiempo	requiere de trabajo duro para resolver e impráctico para sistemas muy grandes como reactores de fusión por confinamiento magnético.	Usualmente, imposible de resolver
MATEMÁTICA	Acople de ecuaciones de Navier-Stokes, fuerza de Lorentz y ecuaciones de Maxwell.	Acople de ecuaciones de Navier-Stokes, fuerza de Lorentz y ecuaciones de Maxwell.	expansión de la ecuación de Vlasov-Maxwell	Ecuación de Vlasov-Maxwell	Modelo de Klimontovich
	Plasma como fluido conductor		Plasma como gas de partículas cargadas		

1.3 DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA DEL PLASMA

Como ya se mencionó, el punto de partida de los modelos macroscópicos se basan en considerar cada componente del plasma como un fluido. Esto es aplicable si las velocidades características de los procesos son mucho más altas que la velocidad térmica del plasma, además se debe suponer que las velocidades de cada especie que componen al plasma se rigen por una distribución Maxwelliana, suponiendo que las partículas se encuentran cerca del equilibrio termodinámico. En este modelo, surgen de forma natural las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas a las ecuaciones de Maxwell.

A pesar que se reduce el detalle microscópico, el sistema de ecuaciones que se obtiene en la mayoría de los casos suele ser muy complicado de resolver o de trabajar, por lo que es necesario seguir reduciendo este modelo.

Magnetohidrodinámica ideal

En el formalismo de la magnetohidrodinámica es común encontrarse con un sistema de ecuaciones que considera el plasma como un único fluido conductor, capaz de describir gran variedad de fenómenos bajo ciertas aproximaciones que hacen al fluido ideal. Estas ecuaciones se enmarcan en el conocido modelo MHD Ideal.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{V}) \quad (1.5)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla P = -\gamma P \nabla \cdot (\vec{V}) \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (1.8)$$

$$\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B} \quad (1.9)$$

$$\mu_o \vec{J} = \nabla \times \vec{B} \quad (1.10)$$

Aquí ρ , \vec{V} , \vec{B} y P representan la densidad, velocidad, campo magnético y presión cinética del elemento de fluido respectivamente, \vec{E} es el campo eléctrico y finalmente \vec{J} es la densidad de corriente. En el sistema anterior se presenta la conservación de masa (ec.1.5), ecuación dinámica del elemento de fluido (ec.1.6), la evolución de la presión y evolución del campo magnético (ecs.1.7 y 1.8 respectivamente), acopladas a la ley de Ohm ideal (ec.1.9) junto a la ley de Amperé (ec.1.10).

Estas ecuaciones tienen un rango de validez, para poder ser usadas, en el sistema físico se debe cumplir que:

- El radio de giro de los iones debe ser muy pequeño comparado con las longitudes características del plasma.
- La resistividad debe ser muy pequeña (nula) para despreciar la difusión del campo magnético.
- Alta frecuencia de colisión para que las diferentes especies tengan la misma temperatura.

De este modo se debe presentar un plasma lo suficientemente dominado por colisiones para que el enfoque de fluido pueda ser usado, pero a su vez debe ser lo suficientemente acolisional para que la resistividad no sea significativa y sea posible aplicar el modelo ideal.

1.4 CONFINAMIENTO TOROIDAL

Modelo Resistivo

Una consecuencia al despreciar la resistividad η en el plasma es la conservación del flujo magnético, en tal caso las líneas de campo magnético están «congeladas» al plasma, pero en general la resistividad no es despreciable en muchos casos. En el estudio de plasmas de fusión es conveniente analizar sistemas en los cuales $\eta \neq 0$ pues en muchas circunstancias los modos que en MHD ideal son estables, en MHD resistivo no lo son [13].

$$\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B} + \eta \vec{J} \quad (1.11)$$

El modelo resistivo incorpora variaciones en las ecuaciones del régimen ideal, como ejemplo, al emplear la ley de Ohm resistiva (ver ec.1.11) la variación de campo magnético adquiere una nueva forma:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{B} (\nabla \cdot \vec{V}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{B} + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B} \quad (1.12)$$

El último término está asociado con la difusión de las líneas de campo magnético en el plasma, donde el coeficiente η/μ_0 es conocido como viscosidad magnética.

1.4 CONFINAMIENTO TOROIDAL

En el estudio de los reactores de fusión termonuclear se busca encontrar las condiciones necesarias para que las reacciones de fusión se lleven a cabo, siendo necesario el aislamiento del plasma a una determinada región, evitando su fuga para satisfacer el criterio de Lawson (ver ec.1.1). Dispositivos basados en geometrías toroidales se han desarrollado con el propósito de mejorar el confinamiento [14]. Las superficies confinantes en estos reactores son esencialmente generados por la superposición de un campo magnético toroidal muy intenso y otro poloidal de menor intensidad. Dos configuraciones de este tipo son la base del confinamiento toroidal: las configuraciones helicoidales o stellarator's y los Tokamak's.

Se define como stellarator a todo dispositivo donde el campo magnético poloidal y toroidal se crea por bobinas enrolladas a lo largo de un toroide. Por otra parte, en un Tokamak el campo poloidal es generado por una corriente toroidal inducida en el plasma y su campo magnético toroidal es generado por bobinas toroidales externas. La figura 3 muestra el esquema de estos dos reactores evidenciando algunas diferencias en la geometría de las bobinas. Una de las diferencias más relevantes entre estos se asocia con la corriente en el plasma, pues un stellarator procura que sea mínima al ser una fuente de inestabilidad [15], pero en un Tokamak esta se induce como ya se mencionó, de modo que el valor máximo se ubica en el centro del plasma, en un stellarator el máximo valor de corriente poloidal se ubica en el exterior.

Figura 3: Esquema geométrico de las bobinas y columna de plasma en una configuración tipo tokamak (izquierda) y un stellarator (derecha).



1.5 REACTOR MAST

En un tokamak, la sección transversal de la columna de plasma suele tener una forma ovalada a lo largo del eje z , y se caracteriza por tener una forma muy particular, similar a la letra «D». En la literatura, esta geometría se conoce como el D-shape, y está bien definido por 4 factores geométricos: el radio mayor R_o , el radio menor a , la triangularidad δ y la elipticidad κ [16].

$$R_o = \frac{R_{max} + R_{min}}{2} \quad (1.13)$$

$$a = \frac{R_{max} - R_{min}}{2} \quad (1.14)$$

$$\delta = \frac{R_o - R_{top}}{a} \quad (1.15)$$

$$\kappa = \frac{Z_{top}}{a} \quad (1.16)$$

Los parámetros R_{max} , R_{min} , R_{top} y Z_{top} y la respectiva representación geométrica del D-shape se muestra en la figura 4.

El nombre de Tokamak Esférico o ST (Spherical Tokamak) es empleado con frecuencia en los dispositivos tokamak con razón de aspecto A cercana a la unidad, típicamente menor que 2. Esta razón de aspecto está definida como la razón entre el radio mayor R_0 (radio del eje del toroide, desde el eje magnético hasta el eje axial del toroide) y el radio menor a (ancho medio del plasma).

$$A = \frac{R_0}{a} \quad (1.17)$$

1.5 REACTOR MAST

Figura 5: Captura fotográfica de la descarga en la fase de alto confinamiento en el reactor MAST.

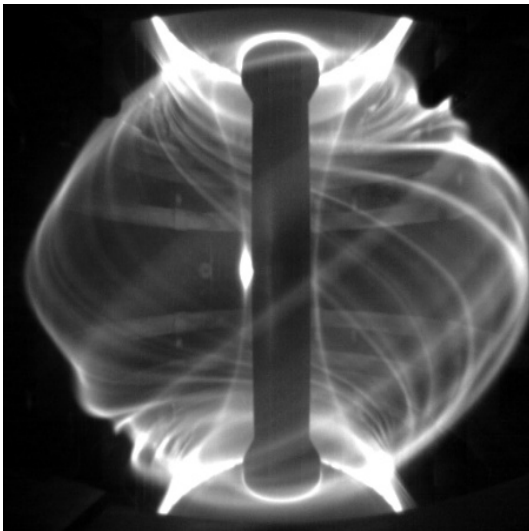
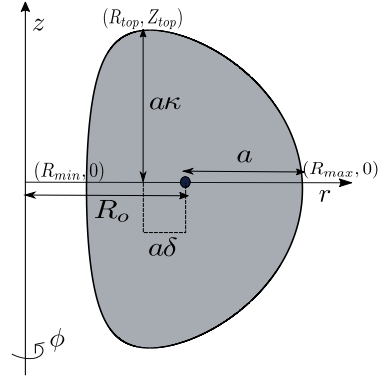


Figura 4: Esquema típico de la sección transversal de la columna de plasma en un tokamak.



El proyecto nuclear MAST - Mega Ampere Spherical Tokamak consiste en el estudio de la viabilidad de la fusión termonuclear, realizando pruebas y estudiando la dinámica del plasma en un tokamak esférico de razón de aspecto $A \sim 1,3$. Este reactor se encuentra ubicado en el centro de fusión *Culham* de Oxfordshire, Inglaterra, y es uno de los reactores con más aporte a esta área. Actualmente se encuentra en fase de actualización [17–19], con el fin de aumentar el campo magnético sobre el eje toroidal de 0.55[T] a 0.85[T], al igual que la corriente inducida en el plasma: de 1.3[MA] a 2[MA], entre otros [20].

Sobre este reactor se han podido realizar gran cantidad de experimentos, los cuales se centran en mejorar la comprensión fundamental del transporte, la estabilidad y la física de los fenómenos e inestabilidades en el borde de plasma y en la investigación de soluciones tecnológicas para el calentamiento, la transmisión de corriente y el escape de plasma, para ser orientados al proyecto ITER y futuros dispositivos ST. Una descarga típica en la región de alto confinamiento en el reactor MAST, ver figura5, evidencia la estructura filamentada propia de los modos ballooning [7].

CAPÍTULO 2

MODELO DE SIMULACIÓN

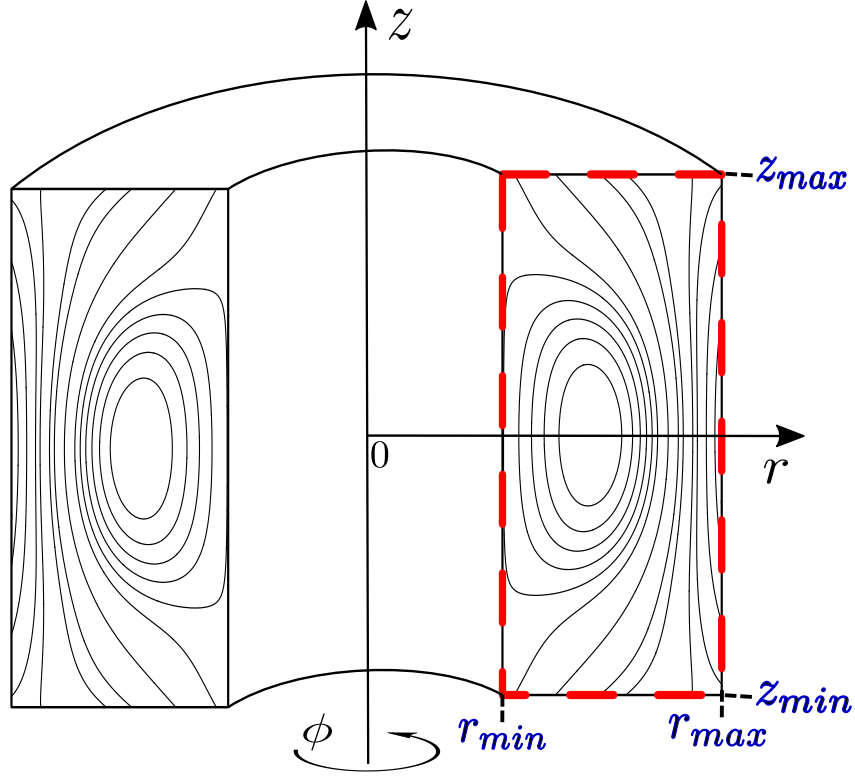
La motivación principal de este trabajo está sustentada en la idea de iniciar estudios en física del plasma de reactores de fusión termonuclear por confinamiento magnético en el grupo de investigación FITEK. Este es un tema de gran interés en la comunidad científica y muchos esfuerzos se enfocan en realizar gran cantidad de trabajos computacionales para predecir y/o entender la física detrás de múltiples procesos que existen en los dispositivos construidos con el fin de generar una fuente viable de energía y minimizar la crisis energética. Basados en la idea de realizar un trabajo preliminar en el grupo de investigación, enfocado en el tema ya mencionado, las simulaciones se desarrollan sobre el modelo resistivo de la magnetohidrodinámica, considerando el plasma como un único fluido. Este modelo se trabaja en el régimen lineal e incluye el efecto de términos viscosos. El objetivo principal se centra en la obtención de las condiciones de equilibrio de un plasma confinado magnéticamente por un tokamak esférico y su posterior evolución en el tiempo. Estas simulaciones tratan de recrear en primera aproximación el escenario de confinamiento de un reactor como el MAST - Mega Ampere Spherical Tokamak.

2.1 GEOMETRÍA

La geometría propia de los sistemas toroidales se simplifica al considerar simetría sobre el eje toroidal, así, las simulaciones se realizan sobre el plano poloidal del reactor, el cual por simplicidad se limita a una región rectangular que incluye las líneas de campo magnético abiertas y cerradas del sistema. Con estas ideas en mente es apropiado trabajar sobre el sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , donde la coordenada radial coincide con el eje del radio mayor del toroide, la coordenada angular ϕ con el ángulo toroidal y el eje z representa la distancia vertical del sistema desde el eje radial tal y como se muestra en la figura 6. Debido a la simetría ya mencionada, toda función que describa el estado del plasma, queda enteramente descrita por las variables que representan el plano poloidal (r, z) .

2.2 MODELO FÍSICO

Figura 6: Representación geométrica del sistema a simular. La sección rectangular delimitada por las líneas rojas punteadas representa el plano poloidal definido por $r_{min} < r < r_{max}$ y $z_{min} < z < z_{max}$. En el interior del plano se representa un esquema típico de la topología de líneas de campo magnético.



2.2 MODELO FÍSICO

El estudio de los procesos que ocurren en los dispositivos de fusión termonuclear suelen ser abordados por diversos modelos del plasma a diferentes niveles de aproximación, dependiendo esencialmente del fenómeno a analizar [10, 11, 21]. Como ya se mencionó, el modelo magnetohidrodinámico es el más adecuado cuando se desea estudiar las macroinestabilidades. Con el ánimo de simular la fase temprana de alto confinamiento del reactor MAST se decide modelar el plasma bajo las ecuaciones MHD resistivo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{V}) \quad (2.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla P + \vec{J} \times \vec{B} + \nu \left[\nabla^2 (\vec{V}) + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla P = -\gamma P \nabla \cdot (\vec{V}) - (\gamma - 1) \eta J^2 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (2.4)$$

$$\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B} + \eta \vec{J} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} \quad (2.6)$$

2.2 MODELO FÍSICO

Los parámetros η y ν representan la resistividad y viscosidad respectivamente, los cuales se consideran uniformes y constantes en toda región del plasma. La constante de compresibilidad adiabática γ toma el valor de 5/3.

Para que el sistema evolucione, se requiere de unas condiciones iniciales, estas se obtienen a través de las condiciones de equilibrio MHD que se describen a continuación.

Equilibrio MHD - Ecuación de Grad-Shafranov

Cuando se estudian las condiciones de equilibrio en cualquier dispositivo de fusión, se busca en primera instancia la topología del campo magnético para el confinamiento del plasma, junto a los parámetros físicos como la presión, densidad de corriente, etc. La primera consideración básica es tratar el plasma en equilibrio estático y estacionario, es decir, la velocidad de cada elemento de fluido es nula, $\vec{V} = 0$, al igual que las derivadas temporales de las demás variables físicas: $\partial[\rho, p, \vec{B}]/\partial t = 0$. Además $\eta = \nu = 0$. Las ecuaciones MHD del equilibrio estático y estacionario son:

$$\vec{J}_e \times \vec{B}_e = \nabla P_e \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \vec{B}_e = \vec{J}_e \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_e = 0 \quad (2.9)$$

El subíndice “e” representa el estado de equilibrio. Si a la ecuación (2.7) se opera en producto escalar con \vec{B} y \vec{J} independientemente, se obtendrá como resultado que $\vec{B} \cdot \nabla p = 0$ y $\vec{J} \cdot \nabla P = 0$, indicando que las líneas de campo magnético y las líneas de corriente reposan sobre las superficies isóbaras. Esto no implica que \vec{B} y \vec{J} sean paralelas o perpendiculares entre sí, son tan sólo dos casos muy particulares; en general el ángulo entre estos vectores es arbitrario. La figura 7 muestra estas ideas.

Para plasmas bidimensionales es posible encontrar el estado de equilibrio estacionario a través de la ecuación de Grad-Shafranov (ec.2.10). Esta ecuación es deducida del sistema de ecuaciones anterior para un sistema de geometría toroidal bajo la condición de simetría axial [21], donde el equilibrio se representa en términos del flujo poloidal de las líneas de campo magnético ψ . La deducción de esta expresión se encuentra en el anexo A.1 de este trabajo.

$$\Delta^* \psi = -r^2 \frac{dP_e(\psi)}{d\psi} - g \frac{dg(\psi)}{d\psi} \quad (2.10)$$

Las funciones $P_e(\psi)$ y $g(\psi)$ son funciones libres asociadas al perfil de equilibrio deseado. La función $P_e(\psi)$ representa la presión cinética y $g(\psi)$ está estrechamente relacionada con la componente toroidal del campo magnético [13]. Δ^* es conocido el operador elíptico toroidal y se define como sigue:

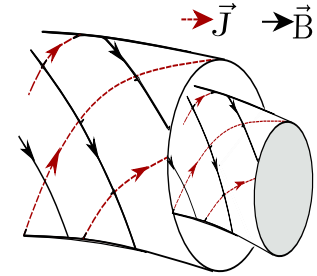
$$\Delta^* \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad (2.11)$$

El campo magnético y densidad de corriente se recupera a través de las siguientes expresiones:

$$\bullet B_{er} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \bullet B_{ez} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \bullet B_{e\phi} = -\frac{g(\psi)}{r} \quad (2.12)$$

$$\bullet J_{er} = -\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial z} \quad \bullet J_{ez} = \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} \quad \bullet J_{e\phi} = r \frac{dP_e(\psi)}{d\psi} + \frac{1}{\mu_0 r} g \frac{dg(\psi)}{d\psi} \quad (2.13)$$

Figura 7: Líneas de campo y densidad de corriente sobre superficies isóbaras.



2.2 MODELO FÍSICO

Adimensionalización y linealización de las ecuaciones MHD

En todo trabajo numérico es necesario e indispensable escalar las variables de las ecuaciones que describen el sistema, esto debido a diferencias entre sus valores numéricos, que en algunos casos pueden superar varios ordenes de magnitud y generar errores en el calculo. Un claro ejemplo son los sistemas de fusión por confinamiento magnético, así, las dimensiones físicas de la cavidad de un reactor tiene dimensiones del orden de unos cuantos metros, y el desarrollo de algunas inestabilidades toma algunos cuantos microsegundos. Debido a que estas variables deben computarse, los errores por redondeo pueden generar inestabilidades artificiales o numéricas y arrojar resultados de carencia física. Por tal razón, las variables y operadores aquí empleadas se normalizan respecto a parámetros característicos del sistema; así:

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{t}{\tau_o}, & r^* &= \frac{r}{l_o}, & z^* &= \frac{z}{l_o}, & \vec{V}^* &= \frac{\vec{V}}{v_o}, \\ \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_o}, & P^* &= \frac{P}{P_o}, & \vec{B}^* &= \frac{\vec{B}}{B_o}, & \vec{E}^* &= \frac{\vec{E}}{E_o}, \\ \vec{J}^* &= \frac{\vec{J}}{J_o}, & \eta^* &= \frac{\eta}{\eta_o}, & \nu^* &= \frac{\nu}{\nu_o}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

el subíndice «o» representa el valor característico de la variable y el superíndice «*» la variable normalizada. Incorporando ésto en el set de ecuaciones 2.22-2.27 se observa que los parámetros deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$v_o = \frac{B_o}{\sqrt{\mu_o \rho_o}}, \quad \tau_o = \frac{l_o}{v_o}, \quad P_o = \frac{B_o^2}{\mu_o}, \quad E_o = v_o B_o, \quad J_o = \frac{B_o}{\mu_o l_o}, \quad \eta_o = \mu_o \frac{l_o^2}{\tau_o}, \quad \nu_o = \rho_o \frac{l_o^2}{\tau_o}, \quad (2.15)$$

Es de resaltar que el parámetro característico de velocidad (v_o) queda definido como la velocidad de fase de las ondas de Alfvén. Finalmente, con la selección adecuada del campo magnético, longitud y densidad de masa característica, las relaciones anteriores quedan completamente definidas y al reescribir las ecuaciones MHD es posible observar que no hay cambio en su estructura, excepto la ley de Amperé, en la cual el término μ_o desaparece.

El proceso de linealización se centra en la perturbación de las condiciones de equilibrio de un sistema, en este caso, las obtenidas de la ecuación de Grad-Shafranov (eq.2.10):

$$\rho(r, z, t) = \rho_e(r, z) + \rho_1(r, z, t) \quad (2.16)$$

$$\vec{V}(r, z, t) = \vec{V}_e(r, z) + \vec{V}_1(r, z, t) \quad (2.17)$$

$$P(r, z, t) = P_e(r, z) + P_1(r, z, t) \quad (2.18)$$

$$\vec{B}(r, z, t) = \vec{B}_e(r, z) + \vec{B}_1(r, z, t) \quad (2.19)$$

$$\vec{E}(r, z, t) = \vec{E}_e(r, z) + \vec{E}_1(r, z, t) \quad (2.20)$$

$$\vec{J}(r, z, t) = \vec{J}_e(r, z) + \vec{J}_1(r, z, t) \quad (2.21)$$

El subíndice 1 representa la perturbación en cada variable. Las variables en estado de equilibrio no dependen del tiempo, esto como consecuencia del equilibrio MHD, además se tiene que $\vec{V}_1 = \vec{0}$, entonces, $\vec{V} = \vec{V}_e$. Reemplazando estos resultados en las ecuaciones 2.22-2.27, expandiendo y manteniendo tan sólo los términos de primer orden, el modelo final MHD Resistivo adimensional y linealizado toma la forma:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_o \vec{V}) \quad (2.22)$$

2.3 CONDICIONES DE FRONTERA

$$\rho_o \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla P_1 + \vec{J}_o \times \vec{B}_1 + \vec{J}_1 \times \vec{B}_o + \nu \left[\nabla^2(\vec{V}) + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) \right] \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla P_o - \gamma P_o \nabla \cdot (\vec{V}) - (\gamma - 1) \eta (J_o^2 + 2\vec{J}_o \cdot \vec{J}_1) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (2.25)$$

$$\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B}_o + \eta (\vec{J}_o + \vec{J}_1) \quad (2.26)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \vec{J}_1 \quad (2.27)$$

Es interesante observar que en el régimen lineal, la evolución de la densidad de masa no afecta la evolución de las demás variables, es decir, ρ_1 se desacopla del sistema de ecuaciones MHD y su evolución depende exclusivamente de la velocidad. Cabe aclarar que el súper índice que resalta las variables adimensionalizadas se omite por comodidad. Desde este punto, todas las variables están parametrizadas a valores característicos del sistema ya planteados, eq.(2.15).

2.3 CONDICIONES DE FRONTERA

Como ya se mencionó, la región de simulación está delimitada sobre una sección rectangular en el plano poloidal, la cual es suficientemente representativa, pues incluye líneas de campo abiertas y cerradas, lo cual indica que en la simulación se considera la interacción plasma-vacío. La región poloidal está delimitada por la frontera más interna del sistema: $r = r_{min}$, la externa se ubica en $r = r_{max}$ y las fronteras superior e inferior en $z = z_{max}$ y $z = z_{min}$ respectivamente. Estas últimas se ubican a igual distancia por arriba y por abajo de $z = 0$. En la experiencia, los dispositivos no poseen este tipo de frontera, suele ser más compleja y cumple un papel muy importante, sin embargo, están hechas de metal. Si se ignoran los efectos complejos como recombinación, emisión secundaria de electrones y demás, lo más apropiado es someter las fronteras como paredes conductoras perfectas. De este modo, la componente tangencial del campo eléctrico debe anularse en las paredes al igual que la componente normal de \vec{B}_1 y \vec{V} . Adicional a estas condiciones que surgen al considerar las paredes conductoras, se añade una más, y consiste en anular la componente tangencial de la velocidad en la frontera, esta condición se conoce como paredes no deslizantes (no-slip wall).

2.4 ESQUEMA NUMÉRICO

El modelo MHD linealizado garantiza la continuidad de todas las variables del sistema, esto es una ventaja en la implementación de cualquier esquema numérico, pues no se requiere de tratamientos especiales para modelar los cambios abruptos. Basados en esta idea, se discretiza el plano poloidal con una malla equidistante sobre el eje radial y el eje azimutal. Los operadores espaciales se expanden en un esquema de diferencias finitas de cuarto orden. En el tiempo, las ecuaciones diferenciales se integran con el esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para mantener la consistencia en la precisión con la derivadas espaciales. Los detalles de estos dos esquemas numéricos se presentan en la sección de anexos (anexo B.1 y B.2).

CAPÍTULO 3

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este trabajo las simulaciones se llevan a cabo sobre el plano poloidal $((r, z)$ en coordenadas cilíndricas) el cual se discretiza uniformemente con una malla rectangular homogénea. El número de puntos y tamaño de la región de simulación se presentan en la tabla 3.

Tabla 3: Valores numéricos de los parámetros que describen la región de simulación y la malla rectangular homogénea.

Eje	Posiciones [m]		Longitud [m]	Número de puntos	Paso [m]
r	$r_{min}=0.25$	$r_{max}=1.85$	$L_r=1.6$	$N_r=161$	$h_r=0.01$
z	$z_{min}=-1.8$	$z_{max}=1.8$	$L_z=3.6$	$N_z=361$	$h_z=0.01$

3.1 CONDICIONES INICIALES

Las condiciones iniciales del plasma se obtienen a través de la solución de la ecuación de Grad-Shafranov (ec.2.10) [22, 23]. Es evidente notar que el flujo poloidal se comporta como variable dependiente en la parte derecha de la ecuación y como variable independiente en la parte izquierda. Debido a la no linealidad, las soluciones analíticas son limitadas y no brindan una buena aproximación a los sistemas reales. Por este motivo es indispensable encontrar una solución basada en técnicas de aproximación numérica. Para dar solución a este problema, la ecuación 2.10 se trabaja como un problema de Poisson convencional y se da solución a través de un algoritmo iterativo, el cual es modificado con el fin de mantener fija la corriente total y presión del eje magnético en el plasma, además de fijar los criterios para diferenciar la región en la que se encuentra el plasma confinado y la región vacía. Detalles del algoritmo se presentan en el anexo A.2.

La función de presión $P_e(\psi)$ y de campo toroidal $g(\psi)$ se seleccionaron como funciones polinomiales según trabajos previos [21, 24].

$$P_e(\psi) = P_o \hat{P}(\psi_n); \quad \hat{P}(\psi_n) = \left[1 - (1 - \psi_n)^2\right]^2 \quad (3.1)$$

3.1 CONDICIONES INICIALES

$$g^2(\psi) = g_o^2 [1 + \alpha_g \hat{g}(\psi_n)]; \quad \hat{g}(\psi_n) = 1,5\psi_n^2 - 0,2\psi_n^4 \quad (3.2)$$

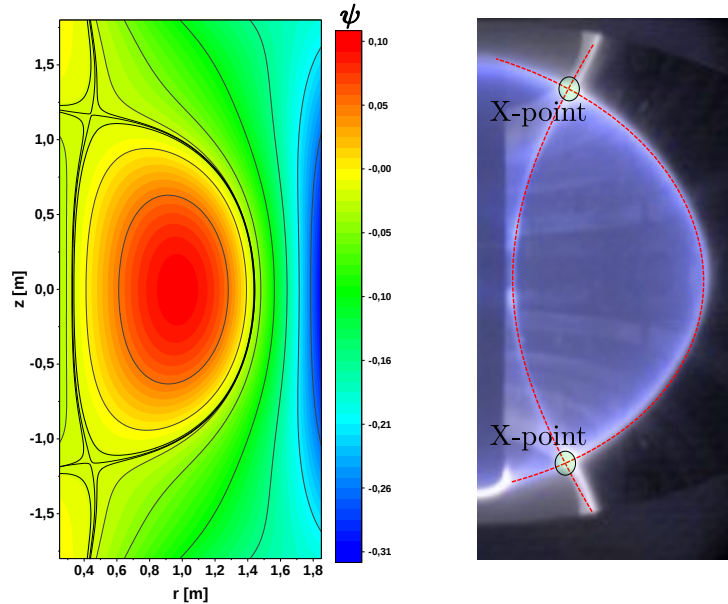
La función ψ_n es conocida como la función de flujo poloidal normalizada y se define como:

$$\psi_n(\psi) = \frac{\psi_l - \psi}{\psi_l - \psi_o} \quad (3.3)$$

donde ψ_l y ψ_o el valor del flujo poloidal en el borde del plasma y en el eje magnético respectivamente. Cabe resaltar que ψ_n sólo está definida en la región del plasma y toma valores entre cero y uno: nula en el borde de plasma y 1 en el eje magnético. Finalmente, P_o es el valor de presión en el eje magnético, g_o , está asociado con el valor de campo magnético en el eje toroidal y α_g es una variable incorporada para mantener fijo el valor de la corriente en el plasma (ver anexo A.2).

Aplicando las condiciones de contorno adecuadas a la región rectangular e incorporando las ideas planteadas, se encuentra el perfil de flujo poloidal del sistema, figura 8a. En esta simulación la corriente total de plasma y presión en el eje magnético se escogen muy cercanos a los valores típicos del reactor MAST: 1,3[MA] y 35[kPa] respectivamente [25].

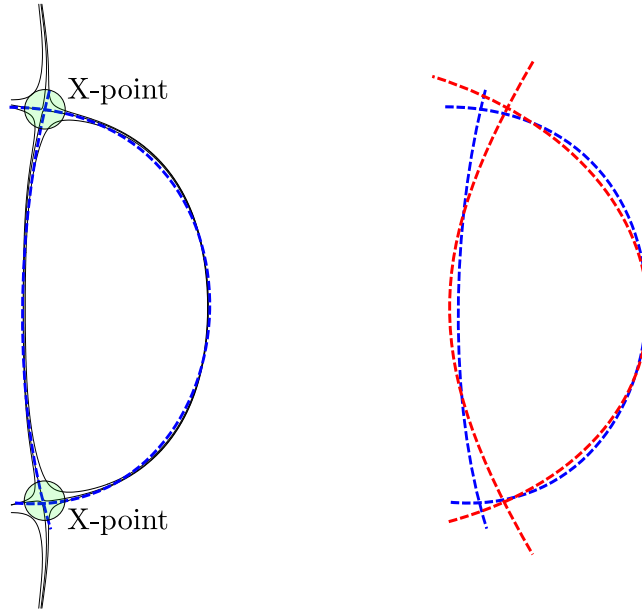
Figura 8: A la izquierda, resultado de la simulación: flujo poloidal magnético ψ . Los contornos más oscuros son los más cercanos a la separatriz plasma-vacío. A la derecha, captura fotográfica de la descarga del reactor MAST. Las líneas punteadas representan una aproximación de la separatriz.



Las líneas cerradas representan la región de confinamiento del plasma. Estas líneas de contorno son en esencia una representación de las líneas de campo poloidal. Los contornos más oscuros se remarcaron intencionalmente, pues estos son los contornos más cercanos a la frontera plasma-vacío, usualmente llamada separatriz. Es interesante notar que en la simulación se pueden rescatar los «x-points». Estos, son puntos en los que el campo poloidal es nulo y se ubican en la frontera de plasma. El «o-point» al igual que los «x-point» es un punto de campo magnético poloidal nulo, sin embargo, este punto representa el eje magnético del reactor, por tal motivo se ubica en la región central del plasma. Las líneas de contorno abiertas, por su parte representan la región vacía del sistema, allí las líneas de campo magnético poloidal no son cerradas, por lo tanto el plasma no puede estar confinado. La figura 8 muestra el resultado de la simulación y una comparación del plasma experimental en el reactor MAST, junto con el dibujo representativo de la separatriz del plasma [26].

3.1 CONDICIONES INICIALES

Figura 9: a) Dibujo representativo del D-shape del plasma en la simulación. b) Comparación directa entre D-shape experimental y D-shape obtenido en la simulación.



La figura 9 muestra la comparación directa de los dibujos representativos de las separatices en la simulación y la forma experimental dada en una descarga típica. En el equilibrio obtenido se puede apreciar una ubicación diferente de los «x-points» respecto a los resultados experimentales, sin embargo, guarda grandes características como la elongación del plasma a lo largo del eje z , este es aproximadamente de 2,2[m]. La tabla 4 muestra los resultados de parámetros geométricos obtenidos en la simulación vs resultados experimentales.

Tabla 4: Valores numéricos de los parámetros geométricos según resultados de la simulación *vs* valores experimentales.

	Símbolo	Simulación	MAST
Radio mayor	R_o [m]	0.89	0.85
Radio menor	a [m]	0.56	0.6
Elongación	$a\kappa$	1.1	1.1
Razón de aspecto	$A = Ro/a$	1.59	1.3
Pos. X-points en r	- [m]	0.46	0.57

El perfil de presión cinética tiene un comportamiento suave en la región central del plasma, es decir su variación es casi nula, esto tiene una gran ventaja desde el punto de vista numérico, pues en la evolución de las ecuaciones MHD (ec.2.22-2.27) la dinámica depende fuertemente del gradiente de presión, si este es grande puede conllevar a errores numéricos debido al método empleado. Por otra parte, este resultado está bien soportado desde el punto de vista experimental [27], pues las mediciones indican poca variación en la zona central (ver figura 11). La figura 10a muestra el perfil de presión y distribución de la densidad de corriente toroidal en el plano poloidal del reactor.

3.1 CONDICIONES INICIALES

Figura 10: Perfil de presión cinética (a) y densidad de corriente toroidal (b) sobre el plano poloidal en equilibrio MHD.

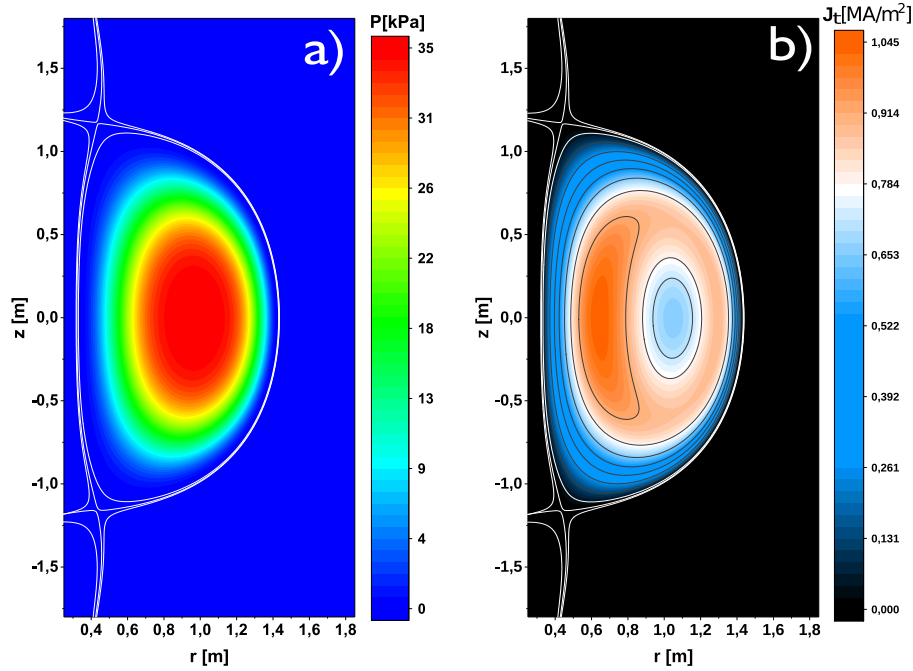
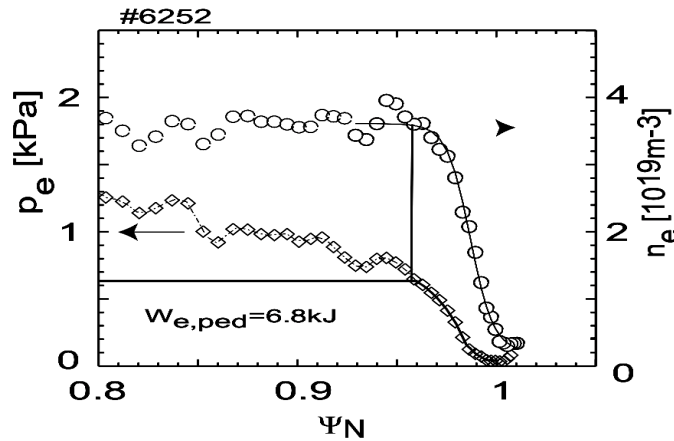


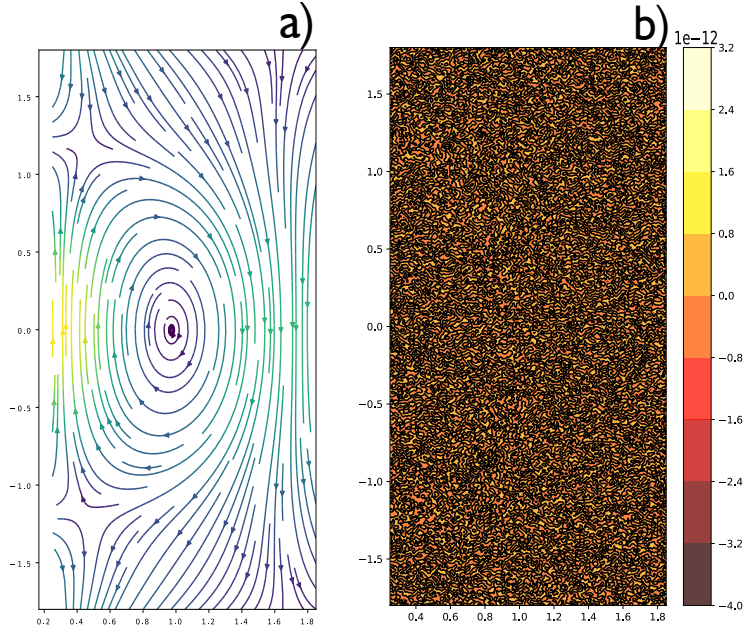
Figura 11: Curva experimental de la concentración electrónica n_e , presión P_e en una descarga cuasi-estacionaria.



La componente poloidal del campo magnético como ya se mencionó está estrechamente ligada con los isocontornos del flujo poloidal magnético, y esto se representa en la gráfica 12 donde se observa que las trazas de las líneas de campo se comportan exactamente igual a los isocontornos de ψ . Para verificar los resultados del equilibrio MHD se calculó la divergencia del campo magnético. En la simulación realizada el valor máximo registrado está cerca de $\sim 10^{-12}$ (ver figura 12b), satisfaciendo la tolerancia del método empleado.

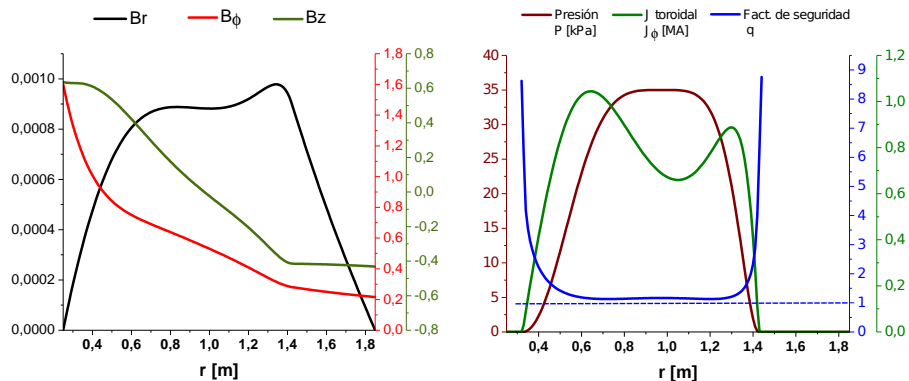
3.1 CONDICIONES INICIALES

Figura 12: (a) las líneas de campo magnético poloidal representadas a través de trazas y (b) divergencia del campo magnético en el plano rz demuestran la validez del equilibrio encontrado con la simulación



Observaciones experimentales han logrado determinar que los valores típicos de la componente magnética toroidal a lo largo del eje radial sobre el eje magnético ($z = 0$) varían entre $1,7[\text{T}]$ en la parte más interna y $0,25[\text{T}]$ en la parte exterior. Esta enorme variación es propia de los reactores tipo tokamak esférico [28]. Un comportamiento análogo es obtenido en la simulación, prediciendo de forma muy similar este hecho experimental. Esto se puede observar en la figura 13a, donde se representan el perfil de las tres componentes de \vec{B} a lo largo del eje radial sobre $z = 0$.

Figura 13: Condiciones iniciales del plasma a lo largo del eje radial. A la izquierda comportamiento de las componentes del campo magnético. A la derecha, perfil de presión cinética P , densidad de corriente toroidal J_t y factor de seguridad.

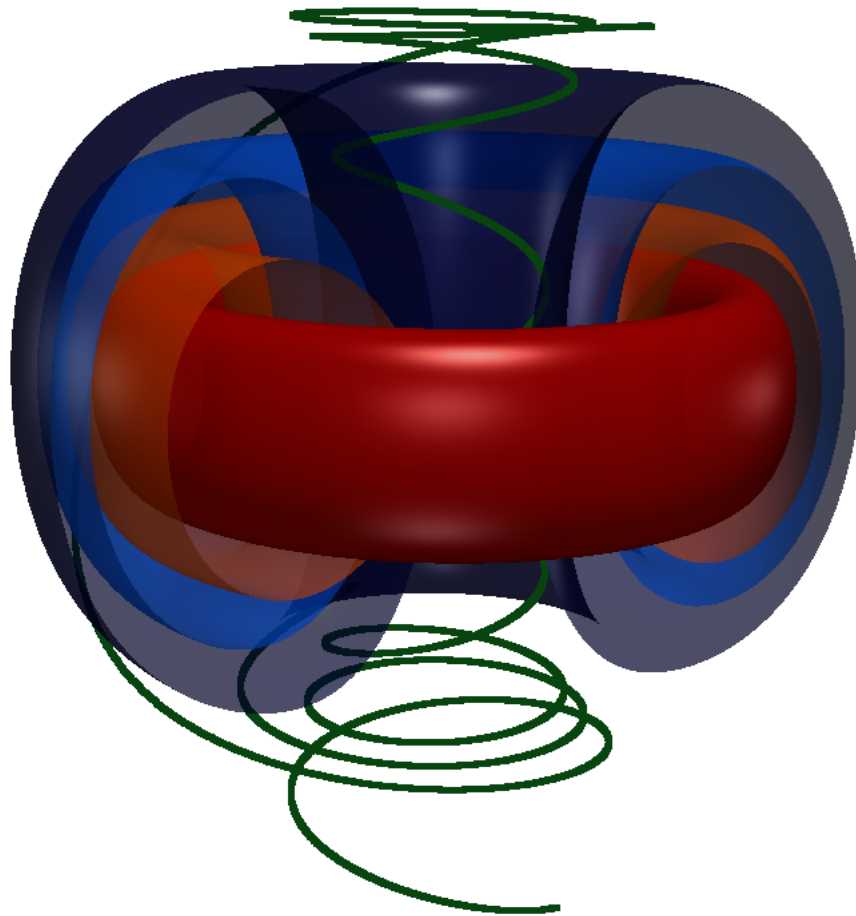


3.1 CONDICIONES INICIALES

La figura 13b exhibe el comportamiento de la presión, densidad de corriente y factor de seguridad a lo largo del radio mayor. Este último parámetro, representa el número de vueltas toroidales que una línea de campo magnético realiza por cada vuelta toroidal, y revela en primera instancia información de la estabilidad del sistema. Valores típicos en el borde del plasma de los reactores convencionales oscilan típicamente entre 6 y 9.

Con los resultados de las simulaciones presentadas es posible garantizar un equilibrio apropiado que describe en grandes rasgos el equilibrio en el reactor MAST. Es claro que existen algunas discrepancias en la forma del D-shape, sin embargo, para los fines de este trabajo, no es algo de mayor relevancia, más que los valores y comportamientos típicos ya verificados. Con estas ideas en mente, es posible reconstruir el equilibrio tridimensional para no perder de vista la geometría toroidal del sistema que se está trabajando.

Figura 14: Reconstrucción 3D basado en isosuperficies del perfil de presión, superficie: roja 30[kPa], naranja 20[kPa], azul 10[kPa] y púrpura 3[kPa]. La línea verde representa una línea de campo reconstruida sobre el toroide.



Para finalizar esta sección, se enfatiza que el equilibrio presentado exhibe una rica variedad de comportamientos típicos de los reactores tipo tokamak esférico, en especial el reactor MAST, centro de este trabajo. El solver desarrollado para determinar las condiciones de equilibrio, parte de una forma desconocida del D-shape, la cual va tomando la forma adecuada en cada iteración de convergencia hasta

3.1 CONDICIONES INICIALES

alcanzar un estado de variación mínima, satisfaciendo una tolerancia, arbitraria en principio. Este tipo de solver, cuya frontera de plasma es libre, actualmente es fuente de investigación. Algoritmos más elaborados y complejos se han desarrollado y es típico que contengan el efecto de las bobinas toroidales en la forma geométrica del plasma [24, 29, 30]. Otro tipo de solver a este problema, se basa en definir analíticamente la separatriz y asignar sobre ésta, un valor apropiado de flujo poloidal para considerarla como condición de contorno fija. Estos solvers, desde el punto de vista numérico son más sencillos de implementar, sin embargo, la complicación surge en la generación de la malla, pues mallas homogéneas son imprácticas al no ajustarse a la frontera establecida. En este caso, las mallas triangulares juegan un papel importante y el problema se puede abordar desde un esquema basado en elementos finitos.

Figura 15: Representación de la malla no homogénea sobre la región de simulación. (b) verificación de ajuste de puntos de malla sobre la separatriz del plasma.

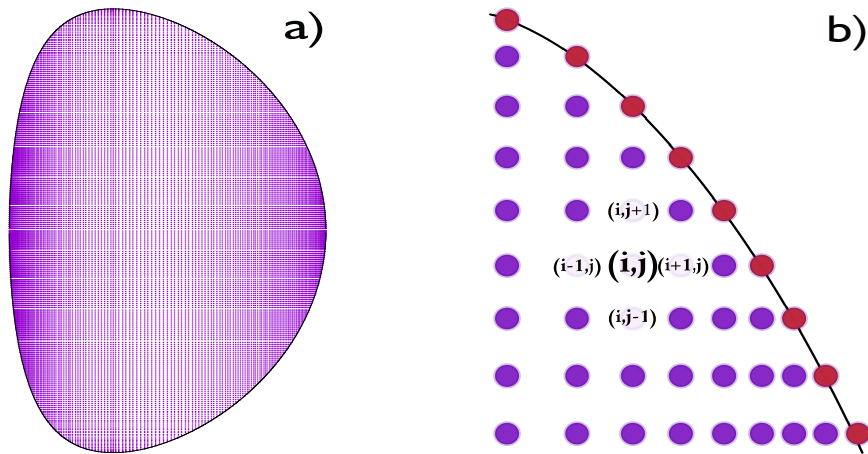
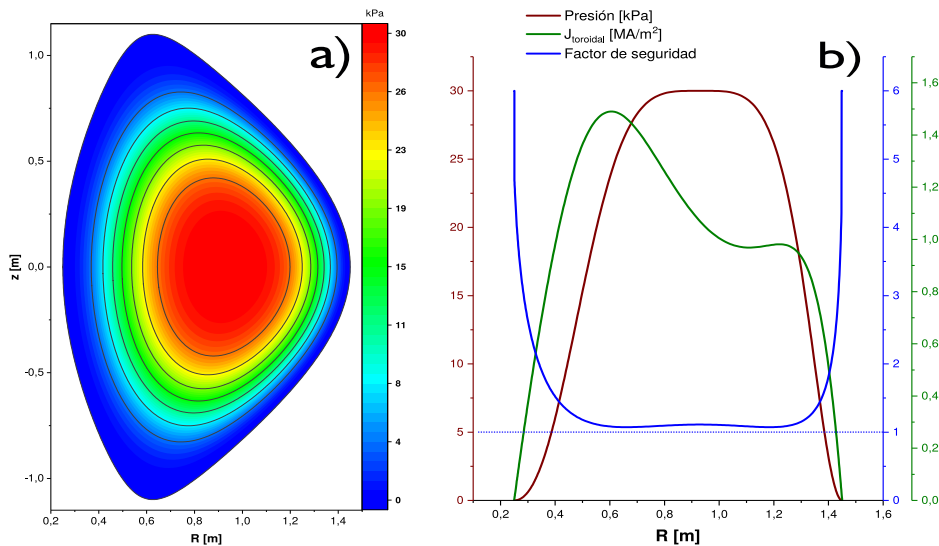


Figura 16: (a): Perfil de presión cinética sobre el plano poloidal delimitado por la frontera fija del plasma. (b): perfil de presión P , densidad de corriente toroidal J_t y factor de seguridad q sobre eje mayor del sistema.



3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.

En el proceso de formación e investigación del presente trabajo, y pensando en la fácil implementación del esquema de diferencias finitas, se desarrolló un solver complementario, basado en la idea de frontera fija del plasma, sobre la cual se elaboró un algoritmo capaz de ajustar puntos de una malla rectangular no homogénea a la separatriz. Sobre esta malla se expanden los operadores diferenciales en diferencias finitas y se elabora de nuevo un solver basado nuevamente en un esquema iterativo, manteniendo controlada la corriente total en el plasma y presión en el eje magnético, con el fin de recrear escenarios similares a los experimentales. La figuras 15 y 16 muestran los resultados de estas nuevas simulaciones aplicadas sobre un D-shape analítico.

Como se observa, los perfiles de la solución son similares a los antes discutidos. Por su parte es apropiado mencionar que en estos solvers se tiene completo control sobre la geometría del plasma, lo cual es una ventaja, pues es posible usar funciones analíticas muy elaboradas para definir la separatriz y tener una correlación apropiada con la geometría de cualquier dispositivo experimental. La desventaja de estos solver es la reducción de la región de simulación, ya que el cálculo se limita sólo a la región del plasma, prescindiendo por completo de la región externa o vacía.

3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.

La evolución numérica de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica no es tarea sencilla. Por tal motivo, existe un gran número de trabajos enfocados en el desarrollo de algoritmos que garantizan la estabilidad y precisión del modelo. Debido a la linealidad del modelo en este trabajo, es posible emplear esquemas sencillos, como el esquema de diferencias finitas y algoritmos de Runge-kutta, específicamente de orden 4 para garantizar precisión. En estas simulaciones el parámetro de resistividad empleado, toma un valor numérico constante en toda la región de simulación de $10^{-6}[\Omega \cdot m]$, valor moderado, de modo que el fluido es en esencia un buen conductor. La viscosidad en esta simulación, más que un parámetro físico es incorporado para mitigar posibles efectos de inestabilidad numérica, por posibles variaciones fuertes en algunas variables. Al igual que la resistividad, la viscosidad es considerada constante y homogénea en todo el espacio, con valor numérico de $1,5 \times 10^{-5}[Pa \cdot s]$.

Perturbación inicial

Las condiciones iniciales del sistema están definidas según los resultados anteriores, obtenidos de la solución numérica de la ecuación de Grad-Shafranov; sin embargo cabe precisar algunos detalles. Los resultados muestran una presión nula en la región vacía del plasma, pero por comodidad numérica, la región externa se modela como un plasma a una presión uniforme, esto se consigue al sumar un valor constante a la solución obtenida del equilibrio, así:

$$Pe = P_{GS} + P_a \quad (3.4)$$

donde P_{GS} es la presión ya calculada y P_a la presión adicional sobre toda la región de simulación. La adición de esta constante no altera el equilibrio obtenido, pues la dinámica del elemento de fluido depende del gradiente de presión, así que esto puede entenderse como un tratamiento extra para evitar que la presión tome valores negativos a lo largo de la simulación. El valor de P_a considerado en este trabajo es el 30% de la presión máxima del equilibrio numérico de Grad-Shafranov: ($P_a = 0,3P_{GS}^{max}$). La densidad de masa en el equilibrio se considera uniforme en toda la región de simulación, igual a $\rho_e(r, z) = 6,7 \times 10^{-8}[kg/m^3]$ característica del reactor MAST.

3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.

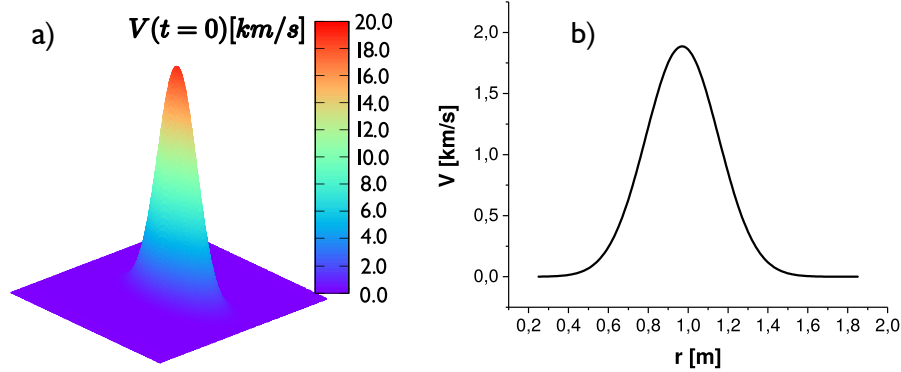
Es importante resaltar que las variables del equilibrio aún no han sido normalizadas según el esquema planteado en la sección 2. El campo magnético representativo en estos sistemas es el valor de la componente toroidal en el eje magnético $B_o = 0,56[T]$, el radio al eje magnético se escoge como la longitud característica $L_o = 0,97[m]$ y la densidad de masa $\rho_o = 6,7 \times 10^{-8}[kg/m^3] = \rho_e$. Estos parámetros definen las demás constantes de normalización y el equilibrio en estas condiciones ya está preparado para evolucionar. Para finalizar, la velocidad de Alfvén característica según parámetros anteriores es aproximadamente $V_a = 1,9 \times 10^6[m/s]$, cuyo periodo de Alfvén asociado es del orden de $0,55[\mu s]$. La simulaciones se desarrollan con un valor del parámetro $\beta_o = 36,5\%$ en el eje magnético, valor típico en reactores de esta especie.

Para estudiar la dinámica del sistema, el plasma se rompe ligeramente de su estado inicial de equilibrio a través de una leve perturbación en todas las componente de la velocidad de cada elemento de fluido; de este modo el sistema evolucionará automáticamente. La perturbación empleada tiene la forma gaussiana y el máximo se encuentra en el eje magnético. La forma explícita de la perturbación está dada por:

$$V_i = A_p e^{-k[(r-r_o)^2 + (z-z_o)^2]} \quad (3.5)$$

donde el subíndice i representa las componentes de la velocidad ($V_r, V_\phi, V_z,$) y A_p es la amplitud de la perturbación, cuyo valor es aproximadamente del 1% V_a . El parámetro k se escoge de forma apropiada para que la gaussiana no tenga un pico muy marcado y el esquema de diferencias finitas sea enteramente aplicable. La figura 18 muestra la perturbación en el plano poloidal.

Figura 17: Perfil de perturbación de la componente toroidal de la velocidad (a) sobre el plano poloidal (b): sobre eje mayor del sistema. $\kappa = 15$.

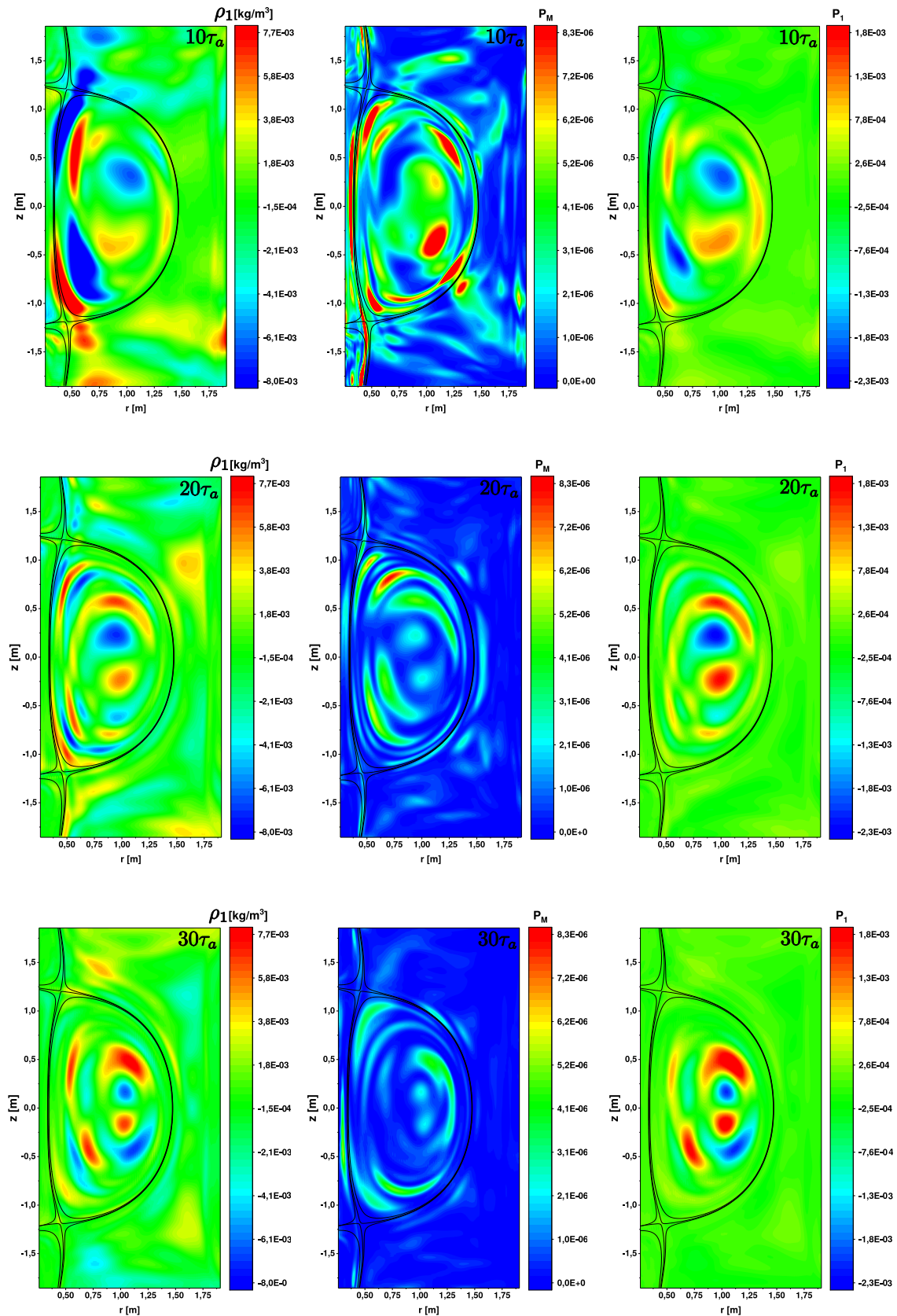


Evolución de la perturbación

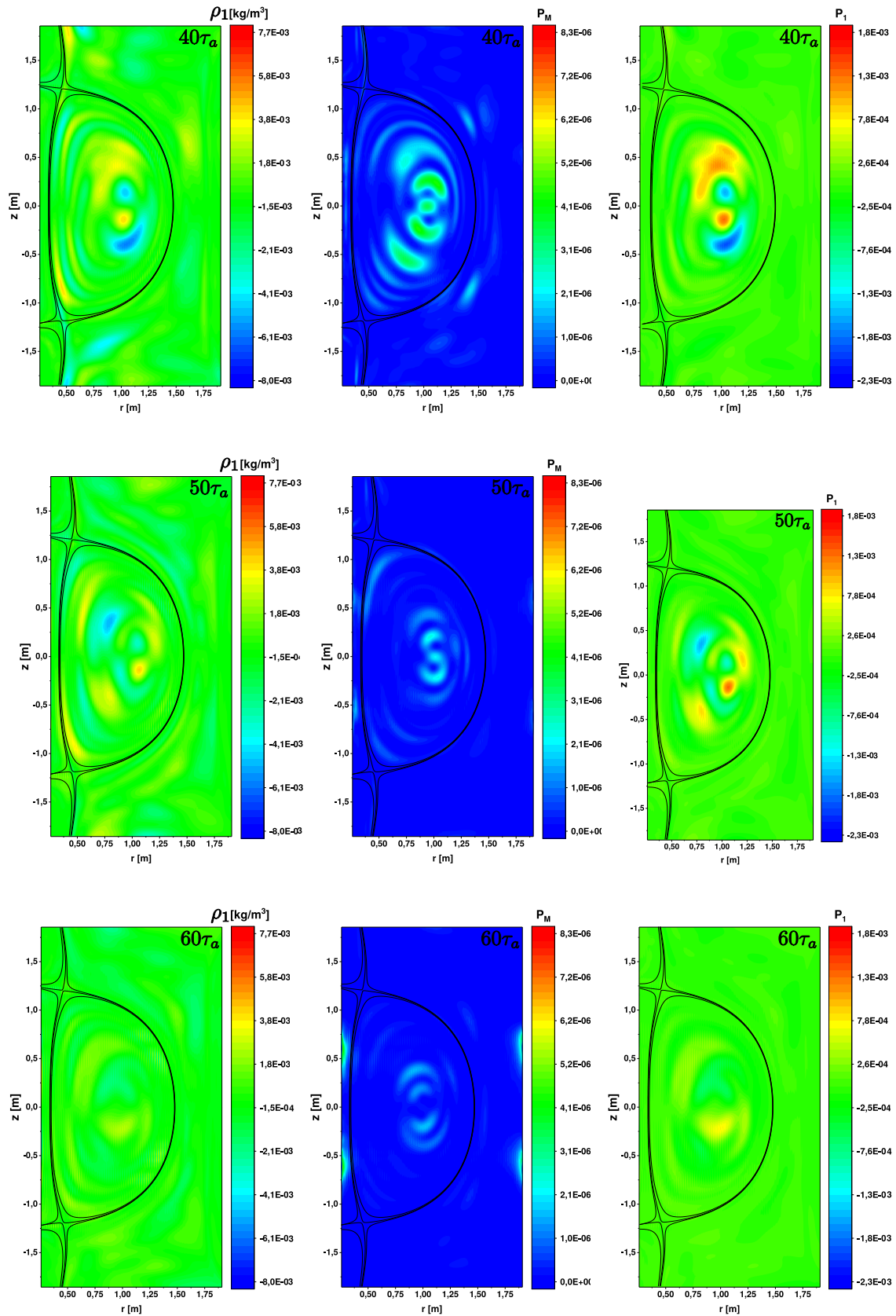
El estudio de la dinámica del plasma se desarrolla en el marco de las ecuaciones MHD linealizadas, donde la evolución del plasma está regido por la evolución de las perturbaciones según el modelo descrito en la sección 2. A pesar de que el sistema es consistente, es decir, hay el mismo número de ecuaciones que incógnitas, es necesario imponer la ecuación de divergencia de campo magnético como ligadura a dicho sistema, esto con el fin de evitar ambigüedades en la simulación y tener certeza del campo magnético en cada integración temporal. Existen varios métodos para incorporar esta ligadura [31,32], sin embargo el método empleado en este trabajo es conocido como transporte de flujo restringido, propuesto por Evans & Hawley, aplicable a mallas rectangulares [33]. En el anexo C se puede apreciar la implementación de este esquema en coordenadas cilíndricas bajo simetría axial. La evolución de la presión cinética, la densidad de masa y energía magnética se presentan en la figura 18.

3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.

Figura 18: Evolución temporal de: (izquierda a derecha) densidad de masa, presión magnética y presión cinética para los instantes $t=10\tau_a$, $20\tau_a$, $30\tau_a$, $40\tau_a$, $50\tau_a$ y $60\tau_a$.



3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.

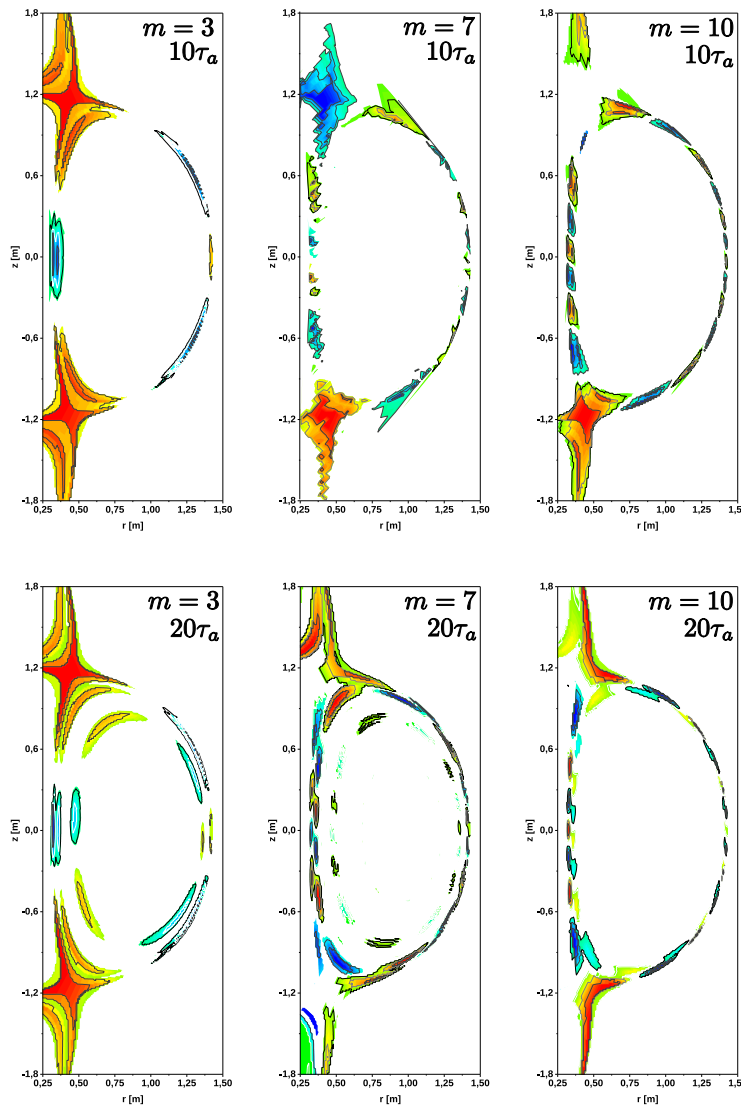


3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.

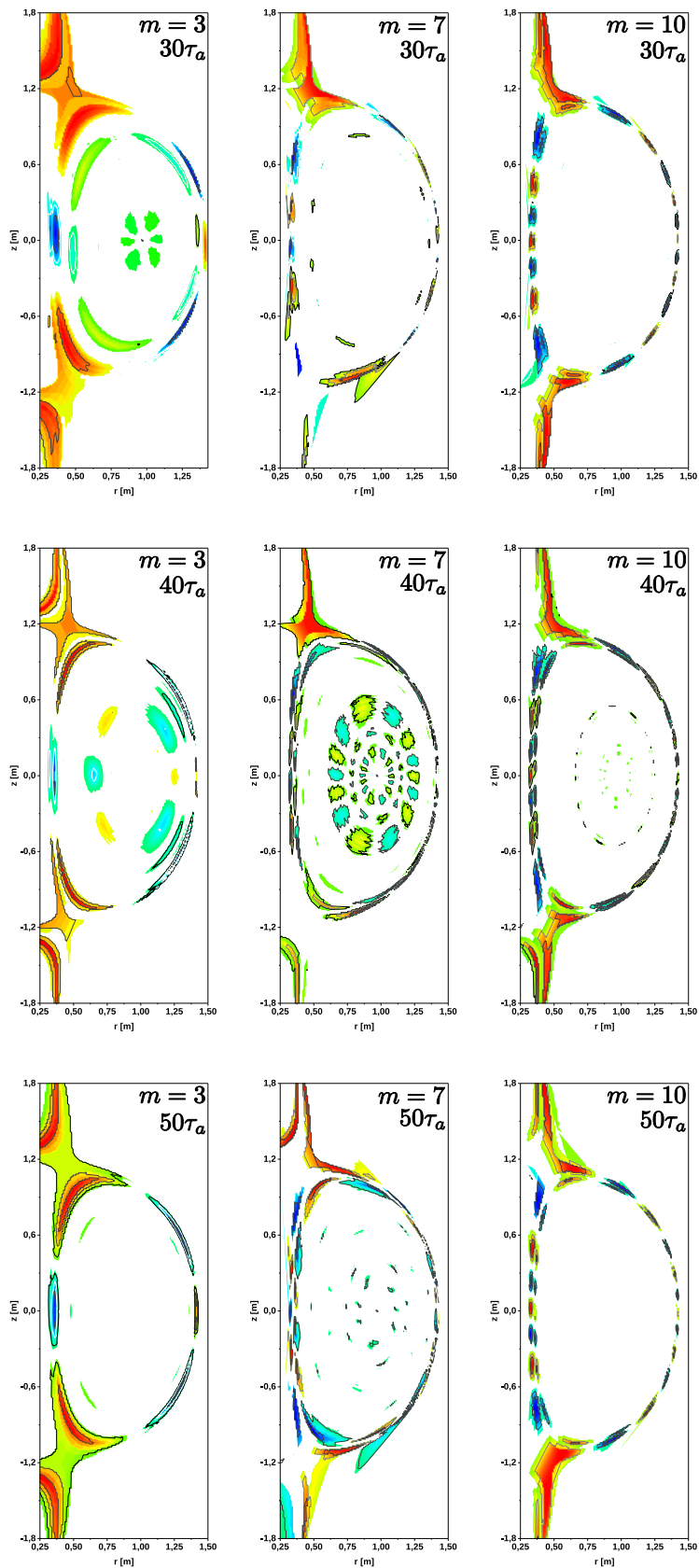
La escala de colores en cada gráfica para la misma variable, no se altera en cada instante de tiempo, por lo cual se observa que la perturbación tanto en la densidad de masa como en la presión magnética se amortigua, disminuyendo su amplitud de un periodo a otro. Aunque la presión cinética en los primeros 30 periodos de Alfvén tiende al aumento, la perturbación es disipada en los 30 periodos posteriores. Estos resultados exhiben a su vez regiones en las que la perturbación se aglomera más en ciertas regiones que en otras. Este es un efecto resonante en el plasma, y al igual que el movimiento de una cuerda o la dinámica de la membrana en un tambor, en el plasma suelen excitarse algunos modos sobre el plano poloidal. La evolución de las perturbaciones en los primeros instantes parece ubicarse en la región de borde exterior del plasma (separatriz), pero paulatinamente, esta se va ubicando en la zona central, al rededor del eje magnético.

Estas observaciones pueden cuantificarse y ser más claras y/o evidentes desde el análisis modal.

Figura 19: Evolución temporal de algunos modos poloidales presentes en la presión magnética: (izquierda a derecha) $m=3$, $m=7$ y $m=10$ en los instantes $t=10\tau_a$, $20\tau_a$, $30\tau_a$, $40\tau_a$ y $50\tau_a$.



3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.



3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.

Con el fin de estudiar la estructura de los modos poloidales de la presión magnética, esta se expande en series de fourier como sigue:

$$P_m(\psi, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} [a_m(\psi)\sin(m\theta) + b_m(\psi)\cos(m\theta)] \quad (3.6)$$

donde θ representa el ángulo poloidal. Los coeficientes $a_m(\psi)$ y $b_m(\psi)$ de la expansión se obtienen a través de la ley de ortogonalidad:

$$a_m(\psi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_m(\psi, \theta)\sin(m\theta)d\theta \quad (3.7)$$

$$b_m(\psi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_m(\psi, \theta)\cos(m\theta)d\theta \quad (3.8)$$

en pocas palabras, se obtienen perfiles de los modos poloidales sobre cada isocontorno del flujo poloidal magnético.

La figura 19 presenta la estructura y evolución de 3 modos poloidales ($m=3, 7$ y 10), siendo evidente que la región de colocación preferida o de resonancia es la región de borde exterior, y verifica la idea que a medida que la perturbación evoluciona, algunos modos se desplazan o excitan en regiones más internas.

Para cuantificar el efecto de amortiguamiento, se graficó la evolución de la presión magnética para los primeros modos más relevantes ($m=3-10$) (ver figuras 20a y b). Las curvas evidencia dos cosas importantes: 1) el modo que más se excita es el tercero, y 2) el decaimiento exponencial en la amplitud de cada modo muestra que algunos modos parecen tener la misma razón de decremento, sin embargo, existen modos que se amortiguan más rápido que otros (ver tabla 5).

Figura 20: (a) Evolución temporal de los modos poloidales, exaltando el efecto de amortiguamiento. (b) Ajuste del decaimiento exponencial de cada modo.

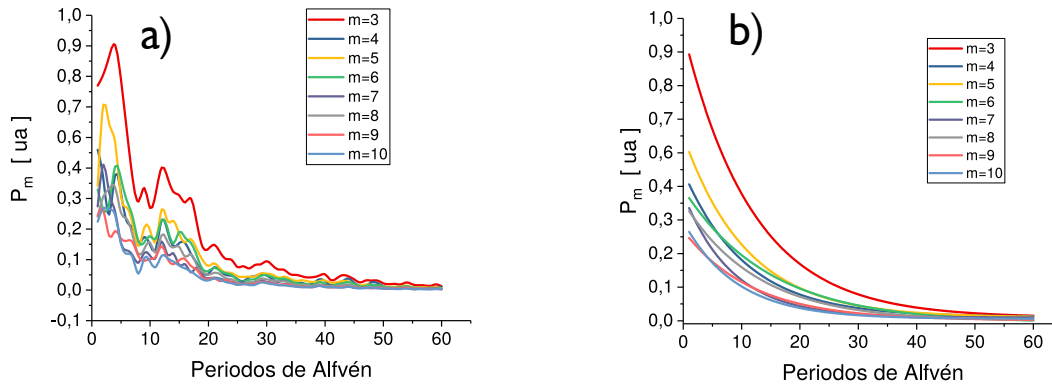


Tabla 5: Factor de amortiguamiento en decaimiento exponencial para cada modo poloidal: $m = 3-10$.

	$A_m = A_{om}e^{-\gamma_m t}$							
m	3	4	5	6	7	8	9	10
γ_m	0.084	0.094	0.091	0.068	0.119	0.079	0.085	0.109

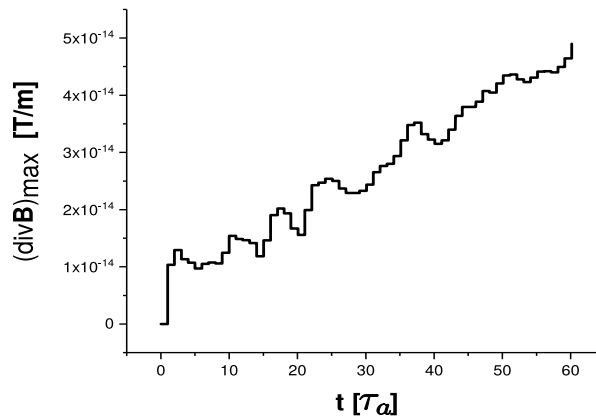
3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.

Debido a que las simulaciones se realizan sobre el modelo MHD lineal, no es posible establecer la dinámica de alguna inestabilidad en particular, sin embargo da la idea de las características más relevantes de algunas de ellas y cuales podrían excitarse, como es el caso de los ELM's (Edge Localized Modes) cuya particularidad es la excitación de modos en la región exterior del plasma, generando erupciones y pérdida de plasma, desestabilizando la reacción. Los modos típicos en estas inestabilidades son los modos ballooning y modos kink [13, 34–37]. Por su parte, que modos se exciten en la región central del plasma y en general se presente un efecto de amortiguación puede estar asociado a modos tearing [2, 38, 39], los cuales se caracterizan por generar deformaciones en las líneas de campo central y acarrear a una gran disipación de energía.

Hasta este punto, se ha verificado la existencia de modos en la zona central y de borde del plasma, sin embargo que estos modos sean estables o no es puramente especulación, debido a que el régimen lineal no permite estudiar la dinámica de dichos modos, caracterizados por presentar comportamientos altamente no lineales. Además, el efecto de amortiguamiento del sistema es anómalo, pues reduce drásticamente la amplitud de las oscilaciones, así, que este puede ser un efecto de los términos viscosos, los cuales al ser mal implementados no cumplen el papel adecuado en la simulación, el de remover y amortiguar errores numéricos, por el contrario, pueden alterar drásticamente la física del sistema. Para poder identificar si dichos modos realmente se excitan y producen un efecto relevante en la estabilidad del sistema se debe aumentar el nivel de simulación o hacer cambio al modelo físico, una de las posibles opciones se basa en el modelo MHD reducido, el cual simplifica las ecuaciones MHD sin perder los efectos de no linealidad, siendo típico para el estudio de los ELMs; o en general usar el modelo MHD, teniendo en cuenta que es necesario emplear técnicas numéricas más adecuadas a las empleadas en este trabajo [40, 41]. Una de ellas se basa en discretizar las ecuaciones bajo un esquema de volúmenes finitos, apropiado en la simulación de fluidos por ser un esquema conservativo [21, 42]. Ahora, para determinar si el efecto de amortiguamiento es un efecto no deseado de los términos viscosos, se deben correr más simulaciones variando cuidadosamente el valor numérico para determinar su efecto en la simulación.

Para finalizar, se presenta la evolución del valor máximo de la divergencia de campo magnético, (ver figura 21), bajo la implementación del flujo restringido, garantizando que la perturbación del campos magnético es consistente.

Figura 21: Evolución del valor máximo en la divergencia de campo magnético, implementando el esquema de flujo restringido.



Finalmente, se realizó una simulación con valores diferentes de viscosidad y resistividad, esto con el fin de identificar que dichos parámetros juegan un papel relevante en las simulaciones. Los nuevos valores empleados se presentan en la tabla 6.

3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.

Tabla 6: Valor numérico empleado para los parámetros de viscosidad y resistividad en la segunda simulación.

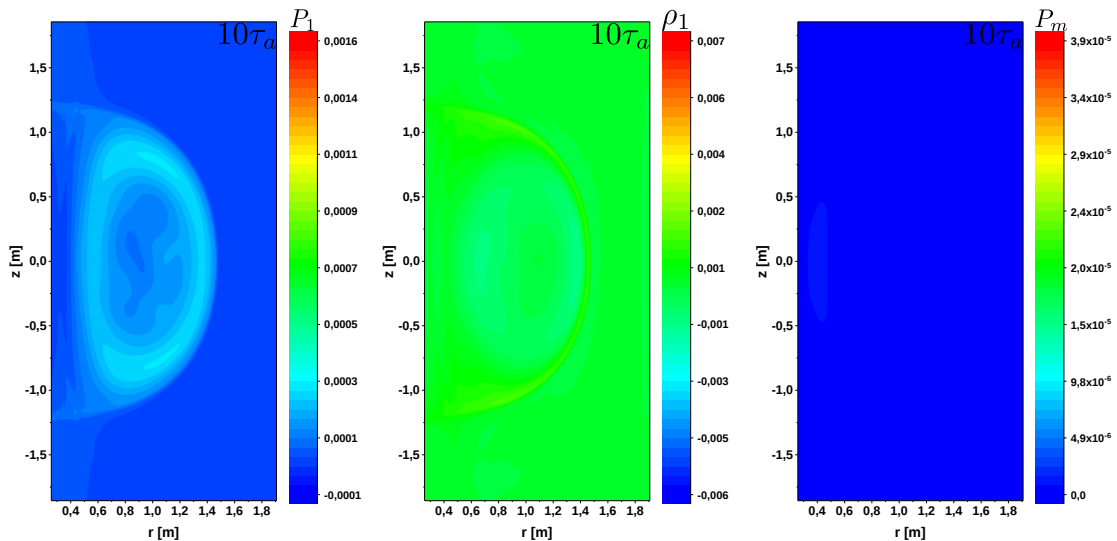
Parámetro	Viscosidad ν	Resistividad η
Valor	$1.8 \times 10^{-5} [Pa \cdot s]$	$2.3 \times 10^{-5} [\Omega \cdot m]$

Es de resaltar que el valor de viscosidad es ligeramente superior a la simulación previa. Por su parte, el valor de resistividad es un orden de magnitud mayor aproximadamente, respecto a su previo valor; de modo tal que en esta simulación, el fluido se opone más al paso de corriente. La perturbación empleada es de naturaleza gaussiana únicamente sobre la componente toroidal de la velocidad como se presenta en la ecuación 3.5, donde $A_p \sim 1,9 [Km/s]$, $0,1 \% V_a$ la velocidad de Alfvén característica del sistema. $V_z = V_r = 0$.

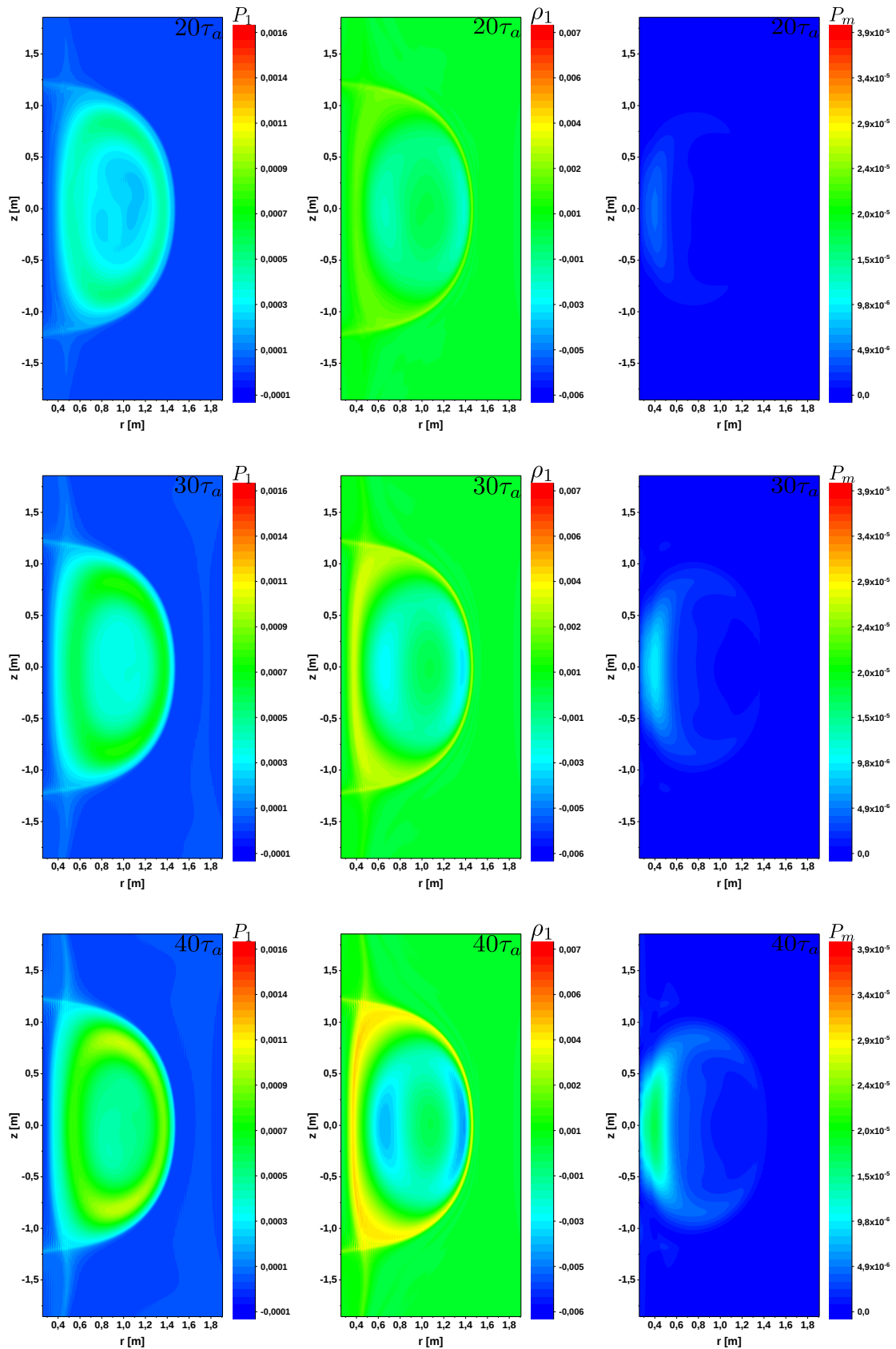
La evolución de la presión cinética, la densidad de masa y energía magnética se presentan en la figura 22. Es apreciable el aumento de la perturbación en la presión magnética, esto refleja que aquí el efecto de amortiguamiento no se presenta, por el contrario, la perturbación parece tener un crecimiento considerable en cada figura; además, dicha perturbación se acomoda notablemente en la región interna del reactor (r_{min}), generando una pequeña isla en dicha zona. La presión cinética tiene un comportamiento anular, cerca del borde exterior del plasma y su valor aumenta paulatinamente, de forma similar a la presión magnética. La conservación de masa se hace evidente al notar un desplazamiento de ρ_1 desde la región central a la zona de borde exterior posibilitando la aparición de los ELMs.

En esta simulación se resalta que la perturbación puede generar una gran inestabilidad en el plasma, pues el aumento en las perturbaciones de presión es notable en cada periodo de Alfvén, sin embargo, para evidenciar este fenómeno es necesario aumentar el nivel de simulación, pues como ya se mencionó, en el régimen lineal es imposible estudiar la dinámica de inestabilidades, pero es posible identificar si estas tienden a desarrollarse desde el punto de vista lineal de la perturbación. Esta segunda simulación, permite recalcar la necesidad de precisar los rangos numéricos adecuados para la viscosidad, pues se han evidenciado dos comportamientos opuestos con ligeras variaciones en su valor numérico. Por otra parte es necesario realizar el mismo estudio para la resistividad y determinar su influencia en la estabilidad y precisión del método empleado.

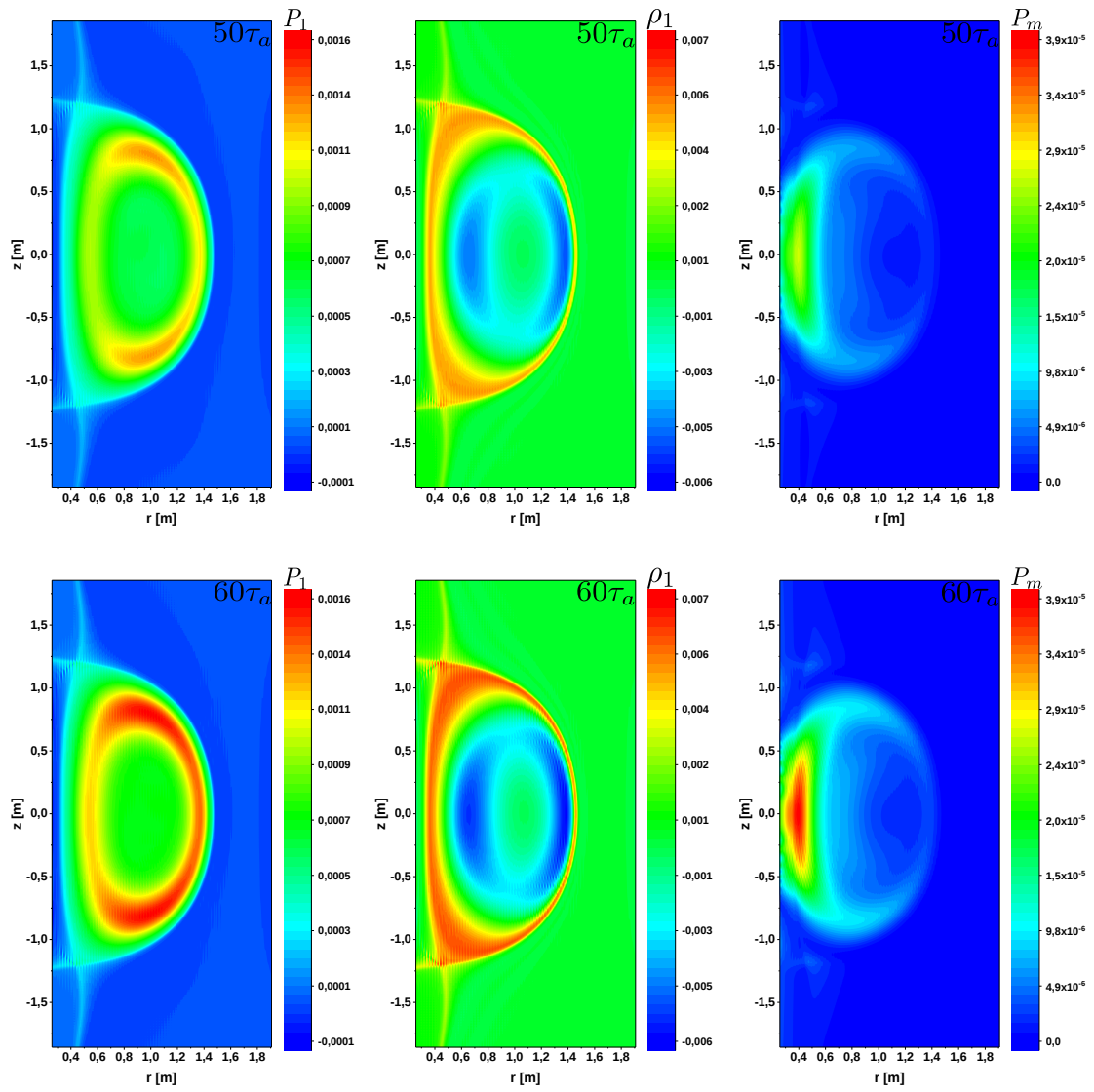
Figura 22: Evolución temporal de: (izquierda a derecha) presión cinética, densidad de masa y presión magnética para los instantes $t=10\tau_a$, $20\tau_a$, $30\tau_a$, $40\tau_a$, $50\tau_a$ y $60\tau_a$.



3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.



3.2 DINÁMICA DEL PLASMA EN EL RÉGIMEN LINEAL.



CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

- En el estudio del equilibrio MHD en reactores de fusión por confinamiento magnético, se hace imprescindible dar solución a la ecuación de Grad-Shafranov. Las técnicas numéricas toman gran relevancia en este aspecto. Modelos típicos se basan en esquemas iterativos. En este trabajo se desarrollaron dos solvers usando el esquema de diferencias finitas bajo el método de sobrerelajación sucesiva (SOR), capaz de dar solución a este problema. Un solver se basa en el problema de frontera libre del plasma, usando una malla rectangular homogénea; el segundo, se desarrolla sobre una frontera fija, a la cual se le ajusta una malla no equidistante.
- En este trabajo se estudió en primera instancia el equilibrio magnetohidrodinámico en plasmas de geometría toroidal axialmente simétricos, el cual es característico de los dispositivos de fusión como los tokamak. Los resultados obtenidos logran predecir en gran aproximación el equilibrio estacionario del reactor MAST, propicio para analizar la fase de alto confinamiento. El valor típico de corriente en el plasma $\sim 1,3[\text{MA}]$, valor del factor de seguridad en el borde de plasma ~ 8 y presión en el eje magnético $\beta_o \approx 39\%$, coinciden fuertemente con las observaciones experimentales. Detalles en la geometría de la columna del plasma difieren ligeramente al D-shape característico en este dispositivo.
- Para analizar la dinámica del plasma se perturbó las condiciones de equilibrio obtenidas a través de la solución numérica de la ecuación de Grad-Shafranov. Para ello, se desarrolló un código basado en diferencias finitas y algoritmos de Runge-Kutta que resuelven las ecuaciones MHD resistivas en el régimen lineal. Estas simulaciones evidencian una fuerte disposición de la perturbación en la zona de borde exterior del plasma. Se logró determinar que a medida que la perturbación se evoluciona, algunos modos poloidales se hacen más visibles al rededor del eje magnético.
- La evolución dinámica de las perturbaciones presenta un efecto de amortiguamiento, logrando establecer que las perturbaciones a unos 60 periodos de Alfvén sean indetectables. En estas simulaciones no es posible determinar la causa que genera esta amortiguación, pero basados en resultados de investigaciones anteriores y reportes de simulaciones, parece indicar que la disipación de energía es generada por valores inapropiados de viscosidad. Desde este punto de vista, se deja abierto el problema para futuras investigaciones, revelar la estabilidad y precisión de este código.

CONCLUSIONES

- A pesar, de que el comportamiento anómalo de amortiguamiento fuerte del plasma no pueda darse por entendido, es relevante resaltar la excitación de varios modos poloidales cerca del borde del plasma, esto debido a que es típico que en la región de alto confinamiento dichos modos se excitan en dicha zona, generando inestabilidades de borde exterior, siendo precursores de los ELMs. Es claro que el amortiguamiento tiene mayor efecto que el posible desarrollo de dichas inestabilidades, sin embargo, es un indicador de que la simulación en su estructura es correcta. Otro indicador que corrobora esta idea se basa en la implementación del algoritmo de flujo restringido como esquema que mantiene la divergencia de campo magnético en valores que garantizan la consistencia de las líneas de campo, eliminando la posibilidad de existencia de monopolos magnéticos en la simulación.

REFERENCIAS

- [1] Andre Gsponer. Physics of high-intensity high-energy particle beam propagation in open air and outer-space plasmas. *arXiv preprint physics/0409157*, 2004.
- [2] Kenro Miyamoto. *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion*. Iwanami Book Service Center, 1997.
- [3] Peter C Stangeby et al. *The plasma boundary of magnetic fusion devices*, volume 224. Institute of Physics Publishing Bristol, 2000.
- [4] BB Kadomtsev and OP Pogutse. Trapped particles in toroidal magnetic systems. *Nuclear Fusion*, 11(1):67, 1971.
- [5] Julio Martinell Benito. Física de los plasmas magnetizados para fusión nuclear.
- [6] Howard Wilson. Edge localized modes in tokamaks. *Fusion Science and Technology*, 57(2T):174–182, 2010.
- [7] A Kirk, HR Wilson, GF Counsell, R Akers, E Arends, SC Cowley, J Dowling, B Lloyd, M Price, M Walsh, et al. Spatial and temporal structure of edge-localized modes. *Physical review letters*, 92(24):245002, 2004.
- [8] Jacobo Varela Rodríguez. Disrupciones internas y modos ballooning en el stellarator lhd. 2011.
- [9] Thomas James Morrow Boyd and Jeffrey John Sanderson. *The physics of plasmas*. Cambridge University Press, 2003.
- [10] Johan P Goedbloed, Rony Keppens, and Stefaan Poedts. *Advanced magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas*. Cambridge University Press, 2010.
- [11] Charles K Birdsall and A Bruce Langdon. *Plasma physics via computer simulation*. CRC press, 2004.
- [12] Dalton D Schnack. *Lectures in magnetohydrodynamics: with an appendix on extended MHD*, volume 780. Springer, 2009.
- [13] KHAN Riaz et al. Simulation study on nonlinear dynamics of ballooning modes in a spherical tokamak. 2006.
- [14] Jeffrey P Freidberg. *Ideal magnetohydrodynamics*. 1987.
- [15] Yuhong Xu. A general comparison between tokamak and stellarator plasmas. *Matter and Radiation at Extremes*, 1(4):192–200, 2016.
- [16] Youjun Hu. Notes on tokamak equilibrium. *Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences*, 2015.
- [17] G Fishpool, John Canik, G Cunningham, J Harrison, I Katramados, A Kirk, M Kovari, H Meyer, R Scannell, et al. Mast-upgrade divertor facility and assessing performance of long-legged divertors. *Journal of Nuclear Materials*, 438:S356–S359, 2013.

REFERENCIAS

- [18] Joe Milnes, Nizar Ben Ayed, Fahim Dhalla, Geoff Fishpool, John Hill, Ioannis Katramados, Richard Martin, Graham Naylor, Tom O’Gorman, Rory Scannell, et al. Mast upgrade–construction status. *Fusion Engineering and Design*, 96:42–47, 2015.
- [19] H Meyer, IG Abel, RJ Akers, A Allan, SY Allan, LC Appel, O Asunta, M Barnes, NC Barratt, N Ben Ayed, et al. Overview of physics results from mast towards iter/demo and the mast upgrade. *Nuclear Fusion*, 53(10):104008, 2013.
- [20] D Stork, H Meyer, RJ Akers, RJ Buttery, I Chapman, NJ Conway, S Cowley, G Cunningham, SR Davis, and AR Field. The upgrade to the mega amp spherical tokamak. Technical report, MAST Upgrade Team, 2010.
- [21] Stephen Jardin. *Computational methods in plasma physics*. CRC Press, 2010.
- [22] VD Shafranov. On magnetohydrodynamical equilibrium configurations. *Soviet Phys. JETP*, 6, 1958.
- [23] Harold Grad and Hanan Rubin. Hydromagnetic equilibria and force-free fields. *Journal of Nuclear Energy (1954)*, 7(3-4):284–285, 1958.
- [24] Young Mu Jeon. Development of a free-boundary tokamak equilibrium solver for advanced study of tokamak equilibria. *Journal of the Korean Physical Society*, 67(5):843–853, 2015.
- [25] A Sykes, RJ Akers, LC Appel, ER Arends, PG Carolan, NJ Conway, GF Counsell, G Cunningham, A Dnestrovskij, Yu N Dnestrovskij, et al. First results from mast. *Nuclear Fusion*, 41(10):1423, 2001.
- [26] G Hommen, M De Baar, PWJM Nuij, G McArdle, R Akers, and M Steinbuch. Optical boundary reconstruction of tokamak plasmas for feedback control of plasma position and shape. *Review of Scientific Instruments*, 81(11):113504, 2010.
- [27] B Lloyd, JW Ahn, RJ Akers, LC Appel, ER Arends, KB Axon, RJ Buttery, C Byrom, PG Carolan, C Challis, et al. Overview of recent experimental results on mast. *Nuclear fusion*, 43(12):1665, 2003.
- [28] A Kirk, GF Counsell, HR Wilson, JW Ahn, R Akers, ER Arends, J Dowling, R Martin, H Meyer, M Hole, et al. Elm characteristics in mast. *Plasma physics and controlled fusion*, 46(3):551, 2004.
- [29] JA Leuer, MJ Schaffer, PB Parks, and MR Brown. Calculation of free boundary ssx doublet equilibria using the finite element method. In *Proceedings of the 43rd Annual Meeting of the APS, Long Beach, CA, GP1*, volume 79, 2001.
- [30] EC Howell and Carl R Sovinec. Solving the grad–shafranov equation with spectral elements. *Computer Physics Communications*, 185(5):1415–1421, 2014.
- [31] Andreas Dedner, Friedemann Kemm, Dietmar Kröner, C-D Munz, Thomas Schnitzer, and Matthias Wesenberg. Hyperbolic divergence cleaning for the mhd equations. *Journal of Computational Physics*, 175(2):645–673, 2002.
- [32] Gábor Tóth. The $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes. *Journal of Computational Physics*, 161(2):605–652, 2000.
- [33] Charles R Evans and John F Hawley. Simulation of magnetohydrodynamic flows—a constrained transport method. *The Astrophysical Journal*, 332:659–677, 1988.
- [34] JW Connor, RJ Hastie, and JB Taylor. Shear, periodicity, and plasma ballooning modes. *Physical Review Letters*, 40(6):396, 1978.
- [35] Hartmut Zohm. Edge localized modes (elms). *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 38(2):105, 1996.
- [36] JW Connor. Edge-localized modes—physics and theory. *Plasma physics and controlled fusion*, 40(5):531, 1998.

REFERENCIAS

- [37] PB Snyder, HR Wilson, and XQ Xu. Progress in the peeling-ballooning model of edge localized modes: Numerical studies of nonlinear dynamics. *Physics of Plasmas*, 12(5):056115, 2005.
- [38] G Gantenbein, H Zohm, G Giruzzi, S Günter, F Leuterer, M Maraschek, J Meskat, Q Yu, AS-DEX Upgrade Team, et al. Complete suppression of neoclassical tearing modes with current drive at the electron-cyclotron-resonance frequency in asdex upgrade tokamak. *Physical Review Letters*, 85(6):1242, 2000.
- [39] David Ciro Taborda. *Modelamento do campo magnético de descargas nao-axissimétricas em tokamaks*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná) Sao Paulo, 2016.
- [40] RS Myong and PL Roe. On godunov-type schemes for magnetohydrodynamics: 1. a model system. *Journal of Computational Physics*, 147(2):545–567, 1998.
- [41] Wenlong Dai and Paul R Woodward. A simple finite difference scheme for multidimensional magnetohydrodynamical equations. *Journal of Computational Physics*, 142(2):331–369, 1998.
- [42] DD Schnack, I Lottati, Z Mikić, and P Satyanarayana. A finite-volume algorithm for three-dimensional magnetohydrodynamics on an unstructured, adaptive grid in axially symmetric geometry. *Journal of Computational Physics*, 140(1):71–121, 1998.

BIBLIOGRAFÍA

Dalton D Schnack. *Lectures in magnetohydrodynamics: with an appendix on extended MHD*, volume 780. Springer, 2009.

Harold Grad and Hanan Rubin. Hydromagnetic equilibria and force-free fields. *Journal of Nuclear Energy (1954)*, 7(3-4):284–285, 1958.

Jeffrey P Freidberg. *Ideal magnetohydrodynamics*. 1987.

JW Connor. Edge-localized modes-physics and theory. *Plasma physics and controlled fusion*, 40(5):531, 1998.

Kenro Miyamoto. *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion*. Iwanami Book Service Center, 1997.

KHAN Riaz et al. Simulation study on nonlinear dynamics of ballooning modes in a spherical tokamak. 2006.

Peter C Stangeby et al. *The plasma boundary of magnetic fusion devices*, volume 224. Institute of Physics Publishing Bristol, 2000.

Stephen Jardin. *Computational methods in plasma physics*. CRC Press, 2010.

Thomas James Morrow Boyd and Jeffrey John Sanderson. *The physics of plasmas*. Cambridge University Press, 2003.

VD Shafranov. *On magnetohydrodynamical equilibrium configurations*. *Soviet Phys. JETP*, 6, 1958.

Youjun Hu. Notes on tokamak equilibrium. *Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences*, 2015.

Young Mu Jeon. *Development of a free-boundary tokamak equilibrium solver for advanced study of tokamak equilibria*. *Journal of the Korean Physical Society*, 67(5):843–853, 2015.

ANEXOS

ECUACIÓN DE GRAD-SHAFRANOV

DEDUCCIÓN

Partiendo de la idea de que se trabaja sobre un sistema de coordenadas cilíndricas y bajo la consideración simetría axial, el campo magnético expresado como el rotacional del campo vectorial magnético, toma la siguiente forma:

$$\vec{B} = \nabla \times (A_\phi \hat{e}_\phi) + [\partial_z(A_r) - \partial_r(A_z)] \hat{e}_\phi \quad (.1)$$

donde el primer término representa la componente poloidal del campo magnético y el segundo la componente toroidal. Introduciendo y definiendo el flujo magnético poloidal como $\psi = rA_\phi$ y una función $g = r [\partial_z(A_r) - \partial_r(A_z)]$ el campo magnético se puede escribir como:

$$\vec{B} = -\nabla\phi \times \nabla\psi + g\nabla\phi \quad (.2)$$

aquí, $\nabla\phi = \frac{1}{r}\hat{e}_\phi$ es el gradiente de la función $f = \phi$. Si aplicamos el operador rotacional sobre el campo magnético se obtiene que:

$$\nabla \times \vec{B} = -\nabla\phi\Delta^*\psi - \nabla\phi \times \nabla g \quad (.3)$$

donde se ha introducido el operador elíptico toroidal definido como:

$$\Delta^* \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad (.4)$$

Aplicando este resultado a la ley de Amperé, es posible identificar la componente poloidal y toroidal del densidad de corriente, las cuales poseen la siguiente estructura:

$$\mu_o \vec{J}_p = \nabla g \times \nabla \phi \quad (.5)$$

$$\mu_o J_\phi = -\nabla\phi\Delta^*\psi \quad (.6)$$

Ahora, haciendo uso de la primera ecuación del equilibrio MHD (ec.2.7) se puede verificar que

$$\vec{B} \cdot \nabla P = 0 \quad (.7)$$

sustituyendo la ec.A.3 en la ec.A.7 es sencillo deducir que $\nabla p \parallel \nabla\psi$. Esto permite escribir el ∇P en términos de $\nabla\psi$, así:

$$\nabla P = \frac{dP}{d\psi} \nabla\psi \quad (.8)$$

resaltando que en la parte derecha de esta ecuación la presión P se puede escribir en términos de una sola variable, el flujo poloidal ψ . Por otra parte, si la ec.2.7 se opera en producto punto con la densidad de corriente, se encuentra que:

$$\vec{J} \cdot \nabla P = 0 \quad (.9)$$

sustituyendo las ecs. A.5 y A.6 en la expresión anterior, es posible notar que $\nabla p \parallel \nabla g$, por ende, $\nabla \psi \parallel \nabla g$ y de igual forma que la presión, la función g puede escribirse en términos del flujo poloidal magnético:

$$\nabla g = \frac{dg}{d\psi} \nabla \psi \quad (.10)$$

Desde este punto, se hace uso de todos los resultados obtenidos en los pasos anteriores y se incorporan en la ec.2.7 del equilibrio magnetohidrodinámico. Operando todos los términos es posible llegar finalmente a la ecuación de Grad-Shafranov:

$$\Delta^* \psi = -r^2 \frac{dP(\psi)}{d\psi} - g \frac{dg(\psi)}{d\psi} \quad (.11)$$

Debido a que la componente toroidal de la densidad de corriente queda expresada en función del operador elíptico toroidal, la ecuación anterior puede reescribirse en dos:

$$\Delta^* \psi = -\mu_o r J_\phi \quad (.12)$$

$$J_\phi = r \frac{dP(\psi)}{d\psi} + \frac{1}{\mu_o r} g \frac{dg(\psi)}{d\psi} \quad (.13)$$

Así, la ecuación A.12 puede interpretarse como una ecuación tipo “Poisson”, donde la densidad de corriente cumple el papel de termino fuente, el cual está definido por la ecuación A.13. Esta forma final es la más empleada para fines computacionales por su fácil interpretación, facilitando el desarrollo de solvers basados en el problema de Poisson.

ESQUEMA COMPUTACIONAL PARA SOLUCIÓN NUMÉRICA

El esquema que se plata a continuación, es uno de los esquemas más conocidos y más empleados para determinar el equilibrio en reactores de fusión. Explicaciones más detalladas se pueden encontrar en el libro de S. Jardin o en el trabajo de Jeon & Young Mu [21, 24].

Al considerar el sistema de ecuaciones A.12 y A.13, un esquema numérico basado en el problema de Poisson es viable y sencillo de aplicar. Tomando la expresión A.12 y expandiendo los operadores diferencias en un esquema de diferencias finitas centradas de 2^o orden, esta toma la siguiente forma discreta:

$$\frac{\psi(i+1, j) - 2\psi(i, j) + \psi(i-1, j))}{h_r^2} - \frac{1}{r_i} \frac{\psi(i+1, j) - \psi(i-1, j)}{2h_r} + \frac{\psi(i, j+1) - 2\psi(i, j) + \psi(i, j-1))}{h_z^2} = -\mu_o r_i J_\phi(i, j) \quad (.14)$$

Es posible despejar el término $\psi(i, j)$, el cual queda determinado por el valor del flujo poloidal de sus vecinos más cercanos, definiendo la molécula computacional.

$$\psi^{n+1}(i, j) = C_1 \psi^{n+1}(i+1, j) + C_2 \psi^{n+1}(i-1, j) + C_3 \psi^{n+1}(i, j+1) + C_4 \psi^{n+1}(i, j-1) + D \mu_o r_i J_\phi^n \quad (.15)$$

donde:

$$\bullet C_1 = \frac{A_r}{C} \quad \bullet C_2 = \frac{B_r}{C} \quad \bullet C_3 = \frac{A_z}{C} \quad \bullet C_4 = \frac{B_z}{C} \quad \bullet D = \frac{1}{C} \quad (.16)$$

$$\bullet A_r = \frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2r_i h_r} \quad \bullet B_r = \frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2r_i h_r} \quad \bullet A_z = B_z \frac{1}{h_z^2} \quad \bullet C = 2 \left[\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{h_z^2} \right] \quad (.17)$$

Con el fin de garantizar que en el proceso iterativo la solución no converja a la solución trivial y con el ánimo de mantener algunos valores característicos del plasma constantes e invariantes en cada iteración se introduce la función de flujo normalizada.

$$\psi_n(\psi) = \frac{\psi_l - \psi}{\psi_l - \psi_o} \quad (.18)$$

donde ψ_l y ψ_o representa el valor del flujo poloidal en el borde del plasma y en el eje magnético respectivamente. Cabe resaltar que ψ_n sólo está definida en la región del plasma y toma valores entre cero y uno: nula en el borde de plasma y 1 en el eje magnético.

Las funciones libres $P(\psi)$ y $g(\psi)$ se redefinen en términos de ψ_n y dos constantes que se ajustan en cada iteración para mantener la corriente total del plasma y presión en el eje magnético fijas, según datos experimentales.

$$P(\psi) = P_o \hat{P}(\psi) \quad y \quad g^2(\psi) = g_o^2 [1 + \alpha_g \hat{g}(\psi_n)] \quad (.19)$$

P_o y g_o se interpreta como el valor de flujo poloidal y la función g en el eje magnético respectivamente. Ahora las funciones $\hat{P}(\psi_n)$ y $\hat{g}(\psi_n)$ heredan la propiedad de funciones libres que dependen exclusivamente del flujo poloidal normalizado.

Con el planteamiento anterior la presión sobre el eje magnético se mantiene constante en cada iteración, sin embargo no se puede asegurar lo mismo con la corriente total en el plasma. Para corregir esto, la constante α_g debe ajustarse en cada iteración.

Para determinar el valor de ajuste se α_g , se parte del cálculo de la corriente total en el plasma como sigue:

$$I_p = \sum_{i,j} J_\phi^n(i,j) h_r h_z \quad (.20)$$

$$= \left[\sum_{i,j} \left(-\frac{1}{\Delta\psi} \right) \frac{d\hat{P}}{d\psi_n} + \sum_{i,j} \frac{\alpha_g g_o^2}{2\mu_o r_i} \left(-\frac{1}{\Delta\psi} \right) \frac{d\hat{g}}{d\psi_n} \right] h_r h_z \quad (.21)$$

organizando los términos se obtiene finalmente:

$$\alpha_g = -2\mu_o \left[\frac{I_p \Delta\psi}{h_r h_z} + \frac{\sum_{i,j} r_i \hat{P}'}{g_o^2 \sum_{i,j} \frac{1}{r_i} \hat{g}'} \right] \quad (.22)$$

naturalmente, I_p es el valor de corriente de plasma que se desea mantener. $\Delta\psi = \psi_l - \psi_o$.

Un último detalle hace falta para concluir el algoritmo, y este consiste en diferenciar la región interna y externa del plasma. Para esto se es indispensable el calculo de los puntos críticos del flujo poloidal en cada iteración, $\nabla\psi = 0$. Debido a que se deben emplear técnicas numéricas para este trabajo, obtener puntos en los que el gradiente sea exactamente nulo es en principio imposible, por tal motivo es necesario establecer una tolerancia. Una vez obtenidos los puntos críticos, el siguiente paso consiste en identificar los puntos silla. Para ello se define $H = (\partial_{rr}\psi)(\partial_{zz}\psi) - \partial_{rz}^2\psi$ en cada punto crítico. Si $H < 0$, el punto en cuestión corresponde a un punto silla. Al final, entre todos los puntos sillas que se encuentren, se escoge el punto con el valor de flujo poloidal más cercano al del eje magnético. Estos puntos críticos, que determinan la frontera del plasma son bien conocidos como x-point. El o-point, es el punto crítico que satisface la condición $H > 0$ y define la ubicación del eje magnético.

DISCRETIZACIÓN ECUACIONES MHD

DISCRETIZACIÓN ESPACIAL - MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El método de diferencias finitas es uno de los métodos más conocidos en la solución numérica de ecuaciones diferenciales, pues es un método que posee varios niveles de aproximación y es de fácil implementación. Sin embargo, tiene sus limitantes y en algunos casos es poco práctico. En el trabajo desarrollado, se emplea un esquema de cuarto orden, pues ofrece gran precisión y es un general un método apropiado. Diferentes autores hacen estudios basados en este modelo.

La forma de la derivada discreta en un esquema de diferencias finitas centradas, de cuarto orden está dada por:

$$\partial_x|_{x=x_i} \approx \frac{1}{12h_x} [-f(i+2) + 8f(i+1) - 8f(i-1) + f(i-2)] \quad (.23)$$

donde i representa el índice de malla en la coordenada arbitraria x y h_x el paso de la malla homogénea. El orden del error en esta aproximación está dado de la siguiente forma; $\epsilon \sim (h_x)^4$. Cabe resalta que en esta aproximación se requiere la información de la función de los 4 puntos más cercanos, dos adelante ($i+1$), ($i+2$) y dos detrás ($i-1$) y ($i-2$). Dicho esto, este nivel de aproximación no es aplicable a los puntos siguientes de la frontera, por lo tanto es adecuado aplicar para dichos puntos una aproximación de segundo orden, así:

$$\partial_x|_{x=x_i} \approx \frac{1}{2h_x} [f(i+1) - f(i-1)] \quad (.24)$$

para los puntos sobre la frontera computacional se aplica la aproximación de derivadas de primer orden, ya sea paso adelante o paso atrás según sea conveniente.

$$Paso \rightarrow: \partial_x|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h_x} [f(i+1) - f(i)] \quad Paso \leftarrow: \partial_x|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h_x} [f(i) - f(i-1)] \quad (.25)$$

INTEGRADOR TEMPORAL - MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

La evolución temporal queda determinada a través del método de Runge-Kutta de cuarto orden, esto para mantener la consistencia con las derivadas espaciales. Este es un método que consiste en 4 pasos o niveles para determinar $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$. Si denotamos las variables de evolución ($\rho_1, \vec{V}_1, \vec{B}_1$) por el vector \mathbf{Q} , y la parte derecha de cada ecuación por el vector \mathbf{R} , la evolución queda determinada por:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n)dt \quad (.26)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n + 0,5\mathbf{k}_1)dt \quad (.27)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n + 0,5\mathbf{k}_2)dt \quad (.28)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n + \mathbf{k}_3)dt \quad (.29)$$

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (.30)$$

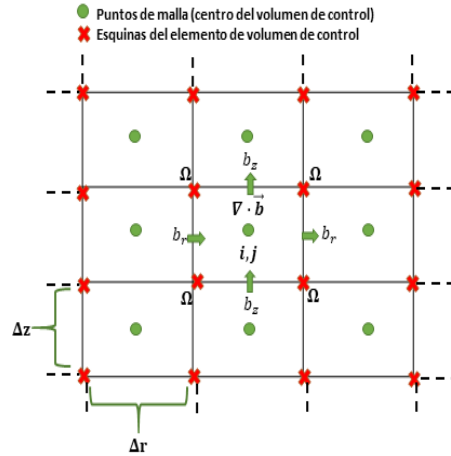
n presenta el índice temporal sobre el cual se está evaluando las variables y dt el paso de tiempo empleado en la simulación.

El acople de estos dos métodos permite estudiar la dinámica del sistema a través de la solución de las ecuaciones MHD. Es importante resaltar que la selección del paso temporal no es arbitrario, de hecho, es un parámetro muy delicado y se selecciona, de modo tal que se garantice que su valor numérico sea menor que el tiempo que emplearía una perturbación que se propaga a la velocidad característica del sistema en atravesar el paso espacial más pequeño.

TRANSPORTE DE FLUJO RESTRINGIDO

El método de transporte restringido, desarrollado por Evans and Hawley es aplicable sobre mallas rectangulares para mantener $\nabla \cdot \vec{b} = 0$. Se basa en el estudio de las componentes de \vec{b} en los puntos medios de cada cara de la celda de control asociada al punto (i, j) (ver figura 23).

Figura 23: Representación de volumen de control (líneas). La cruz representa las esquinas del volumen de control. Los puntos de malla se identifican por círculos verdes.



De la ley de inducción de Faraday se tiene que: $\partial_t \vec{B} = -\nabla \times \vec{E}$. Expandiendo en coordenadas cilíndricas:

$$(a) \quad \partial_t(B_r) = \partial_z(E_\varphi) \quad (b) \quad \partial_t(B_z) = -\frac{1}{r} \partial_r(rE_\varphi) \quad (.31)$$

si se discretiza la ec. A.31(a) alrededor del punto medios de la superficie izquierda de la celda (i, j) se tiene:

$$\frac{b_r^{n+1}(i - \frac{1}{2}, j) - b_r^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta t} = \frac{[\Omega(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \Omega(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})]}{\Delta z} \quad (.32)$$

Entonces:

$$b_r^{n+1}(i - 1/2, j) = b_r^n(i - 1/2, j) + \frac{\Delta t}{\Delta z} [\Omega(i - 1/2, j + 1/2) - \Omega(i - 1/2, j - 1/2)] \quad (.33)$$

De igual forma para la segunda componente de la ley de inducción (eq.A.31(b)) alrededor del punto medio de la superficie superior:

$$\frac{b_z^{n+1}(i, j - \frac{1}{2}) - b_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta t} = -\frac{[r(i + \frac{1}{2})\Omega(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) - r(i - \frac{1}{2})\Omega(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})]}{r(i)\Delta z} \quad (.34)$$

Entonces:

$$b_z^{n+1}(i, j-1/2) = b_z^n(i, j-1/2) - \frac{\Delta t}{r(i)\Delta z} [r(i+1/2)\Omega(i+1/2, j-1/2) - r(i-1/2)\Omega(i-1/2, j-1/2)] \quad (.35)$$

Donde Ω es el valor de E_φ en las esquinas de cada celda de control.

Interpolando en el tiempo y en el espacio para determinar el valor de \vec{B} en las esquinas de la celda de control:

$$\begin{aligned} \vec{B}^{n+\frac{1}{2}}(i-1/2, j-1/2) = \frac{1}{8} [& \vec{B}^n(i, j) + \vec{B}^n(i, j-1) + \vec{B}^n(i-1, j-1) + \vec{B}^n(i-1, j) + \\ & \vec{B}^*(i, j) + \vec{B}^*(i, j-1) + \vec{B}^*(i-1, j-1) + \vec{B}^*(i-1, j)] \end{aligned} \quad (.36)$$

Aplicando esta misma idea para $\vec{V}^{n+\frac{1}{2}}(i-1/2, j-1/2)$ y para $\vec{J}^{n+\frac{1}{2}}(i-1/2, j-1/2)$ Aplicando la ley de ohm resistiva, es posible determinar Ω en cada esquina de la celda:

$$\vec{\Omega}(i-1/2, j-1/2) = \vec{B}^{n+\frac{1}{2}}(i-1/2, j-1/2) \times \vec{V}^{n+\frac{1}{2}}(i-1/2, j-1/2) + \eta \vec{J}^{n+\frac{1}{2}}(i-1/2, j-1/2) \quad (.37)$$

Finalmente, las componentes del campo \vec{B} en los puntos de malla se obtienen a partir de interpolación lineal:

$$B_r^{n+1}(i, j) = \frac{b_r^{n+1}(i+1/2, j) + b_r^{n+1}(i-1/2, j)}{2} \quad (.38)$$

$$B_z^{n+1}(i, j) = \frac{b_z^{n+1}(i, j+1/2) + b_z^{n+1}(i, j-1/2)}{2} \quad (.39)$$