

**FUNCIONES ENTRE CONTINUOS QUE PRESERVAN
CONEXIDAD**

SERGIO ANDRÉS PÉREZ LEÓN

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2013**

**FUNCIONES ENTRE CONTINUOS QUE PRESERVAN
CONEXIDAD**

SERGIO ANDRÉS PÉREZ LEÓN

**Trabajo de grado presentado para optar al
título de Magister en Matemáticas**

**Director
JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA, Ph.D.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2013**

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por ser mi motor interno que me da fuerzas para vivir todos los días.

A mis padres y hermanas: Andrés Pérez, Olga León, Diana Pérez y Angie Pérez por darme su amor incondicional.

A mi director de tesis Javier Camargo, por enseñarme tanto durante estos dos años de formación.

A mi mejor amigo Michael Rincón, por su valiosa amistad.

A mis compañeros de estudio: Cristian García, Rosana Martínez, Dúwang Prada y Vladimir Angulo, por hacer de estos dos años una etapa aún más agradable en mi vida.

Agradezco a las personas que me apoyaron aún cuando estuve en una delicada situación de salud. En especial, agradezco a mi tío Edgar León y a su esposa Marta Guevara por sus cuidados especiales durante mi recuperación.

Finalmente, agradezco a las personas que hacen parte de mi amada escuela de matemáticas de la UIS.

Tabla de Contenido

Introducción	10
1 Preliminares	13
1.1 Notación	13
1.2 Continuos	14
1.2.1 Definiciones	14
1.3 Función Césaró-Vietoris	16
1.4 Hiperespacios y funciones inducidas	19
2 Clases de funciones	26
2.1 Definiciones y propiedades	26
2.2 Teoremas adicionales	35
3 Composición y factor	37
3.1 Propiedad de composición	37
3.1.1 Funciones de conectividad	37
3.1.2 Funciones de conectividad local	39
3.1.3 Funciones conexas	40
3.1.4 Funciones de Darboux	42
3.1.5 Funciones casicontinuas	42
3.2 Propiedad del factor	44
3.2.1 Funciones conexas	44
3.2.2 Funciones de Darboux	44
3.2.3 Funciones de conectividad	48
3.2.4 Funciones de conectividad local	50
4 Funciones inducidas	52
4.1 Funciones de conectividad y conectividad local	53
4.2 Funciones conexas	56
4.3 Funciones de Darboux	61
4.4 Funciones casicontinuas	62
Bibliografía	63

Lista de Figuras

Figura 1	Curva del topólogo	14
Figura 2	Abanico armónico	15
Figura 3	Círculo de Varsovia	16
Figura 4	Dendrita con una cantidad infinita de puntos de ramificación	16
Figura 5	Gráfica de la función f	28
Figura 6	Gráfica de la función g	29
Figura 7	Gráfica de la función $\chi_{\{0\} \times [-1,1]}$	30
Figura 8	Gráfica de la función f	31
Figura 9	Función composición.	40
Figura 10	Gráfica de la función $g \circ f$	41
Figura 11	Gráfica de la función de Cantor.	46

RESUMEN

TÍTULO: FUNCIONES ENTRE CONTINUOS QUE PRESERVAN CONEXIDAD*

AUTOR: SERGIO ANDRÉS PÉREZ LEÓN**

PALABRAS CLAVES: continuo, funciones de conectividad, funciones de conectividad local, funciones conexas, funciones de Darboux, funciones casicontinuas.

DESCRIPCIÓN:

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Sean X y Y continuos, y sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Diremos que:

1. f es una función de conectividad si para todo conexo $C \subset X$, se tiene que $\Gamma(f|_C)$ es conexas.
2. f es una función de conectividad local si existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X tal que $f|_{U_\alpha}$ es una función de conectividad para todo $\alpha \in \Lambda$.
3. f es una función conexas si $\Gamma(f)$ es conexas.
4. f es una función de Darboux si $f(C)$ es conexo para todo conexo $C \subset X$.
5. f es una función casicontinua si para todo abierto N de $X \times Y$ con $\Gamma(f) \subset N$, existe una función continua $g: X \rightarrow Y$ tal que $\Gamma(g) \subset N$.

El propósito de este trabajo es estudiar algunas propiedades con respecto a las familias de funciones anteriormente definidas. Nuestro trabajo está compuesto por cuatro capítulos:

En el Capítulo 1 presentamos las definiciones y resultados que necesitaremos para desarrollar nuestro trabajo.

El Capítulo 2 está dividido en dos secciones. En la primera sección mostramos las definiciones y propiedades de las familias de funciones definidas en un principio. Además, exhibimos teoremas que muestran las relaciones que se tienen de manera general entre estas funciones. En el Capítulo 3 estudiamos la propiedades de composición y de factor para las familias de funciones anteriormente mencionadas.

Finalmente, en el Capítulo 4 estudiamos las relaciones que existen entre las funciones f , $C(f)$ y 2^f .

*Proyecto de grado

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director Dr. Javier Enrique Camargo García.

ABSTRACT

TITLE: MAPS NO-CONTINUOUS^{***}

AUTHOR: SERGIO ANDRÉS PÉREZ LEÓN^{****}

KEYWORDS: continuum, connectivity function, local connectivity function, connected function, Darboux function, almost continuous function.

DESCRIPTION:

A continuum is a nonempty compact, connected and metric space. Let X and Y continuum, and let $f: X \rightarrow Y$ a function. Say that:

1. f is a connectivity function if for all connected $C \subset X$, must be $\Gamma(f|_C)$ is connected.
2. f is a local connectivity function if there is an open cover $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ of X such that $f|_{U_\alpha}$ is a connectivity function for all $\alpha \in \Lambda$.
3. f is a connected function if $\Gamma(f)$ is connected.
4. f is a Darboux function if $f(C)$ is connected for all connected $C \subset X$.
5. f is a almost continuous function if for all open N of $X \times Y$ with $\Gamma(f) \subset N$, there is a continuous function $g: X \rightarrow Y$ such that $\Gamma(g) \subset N$.

The purpose of this paper is to study some properties with respect to the families of functions defined above. Our work consists of four chapters:

In Chapter 1 present definitions and results that we need to develop our work.

Chapter 2 is divided into two sections. In the first section we show the definitions and properties of families of functions defined in the beginning. In addition, theorems exhibit showing the relationships are generally between these functions.

In Chapter 3 we study the composition and properties of factor for families of functions mentioned above.

Finally, in Chapter 4 we study the relationships between the functions f , $C(f)$ and 2^f .

^{***} Graduation project

^{****} Faculty of Science. Department of Mathematics. Director Dr. Javier Enrique Camargo García.

Introducción

Cuando hacemos una investigación en topología es indispensable e indiscutible el estudio de funciones continuas. Además, en muchas ocasiones, usamos funciones continuas con condiciones adicionales para obtener o preservar alguna propiedad de nuestro interés. Uno de los teoremas más importantes en topología que involucra las funciones continuas es el Teorema del punto fijo de Brouwer. Este teorema nos dice que si tenemos una función continua sobre una n -celda, entonces existe un punto que es igual a su imagen. En [19], Stalling muestra una clase de funciones que no son necesariamente continuas que satisfacen el teorema de Brouwer. Esta clase de funciones Stalling las llamó funciones de conectividad.

El resultado de Stalling motivó a definir otras clases de funciones estrictamente más amplias que la clase de funciones continuas como: funciones de Darboux, funciones conexas, funciones de conectividad local y funciones casicontinuas. Estas clases de funciones definidas por diversos autores han sido objeto de estudio en muchas investigaciones (ver [19], [14], [15], [9], [5] y [10]). Un problema que, a raíz del teorema de Stalling, es muy interesante, es el de encontrar condiciones sobre los espacios para que alguna de las funciones mencionadas anteriormente sea de conectividad. En este trabajo recopilaremos algunos resultados que se conocen al respecto. Las funciones principales con las que vamos a trabajar en esta tesis son las siguientes:

Sean X y Y continuos, es decir, espacios métricos compactos, conexos y diferentes del vacío, y sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Diremos que:

1. f es una función de conectividad si para todo conexo $C \subset X$, se tiene que $\Gamma(f|_C)$ es conexo.
2. f es una función de conectividad local si existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X tal que $f|_{U_\alpha}$ es una función de conectividad para todo $\alpha \in \Lambda$.
3. f es una función conexas si $\Gamma(f)$ es conexo.
4. f es una función de Darboux si $f(C)$ es conexo para todo conexo $C \subset X$.
5. f es una función casicontinua si para todo abierto N de $X \times Y$ con $\Gamma(f) \subset N$, existe una función continua $g: X \rightarrow Y$ tal que $\Gamma(g) \subset N$.

En cursos de cálculo encontramos que la composición de dos funciones continuas, es una función continua. En general, si tenemos una clase de funciones, es natural estudiar

si la composición de dos funciones en esta clase, está nuevamente en la misma clase. Las clases de funciones que cumplen con ser cerradas bajo la operación composición de funciones, tienen la *propiedad de composición*. Otra propiedad que es interesante estudiar para una clase de funciones \mathbb{M} , es la *propiedad del factor*. Si siempre que f sea una función continua sobreyectiva y $g \circ f \in \mathbb{M}$, tenemos que $g \in \mathbb{M}$, entonces diremos que la clase \mathbb{M} tiene la *propiedad del factor*. No es difícil ver que las clases de funciones continuas y la clase de funciones inyectivas, tienen la propiedad de composición y la propiedad del factor. En este trabajo estudiaremos estas dos propiedades para las clases de funciones de conectividad, conectividad local, conexas, Darboux y casicontinuas.

Dado un continuo X , consideramos los siguientes hiperespacios de X :

1. $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y diferente del vacío}\};$
2. $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$
3. $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, n \in \mathbb{N}.$

Los anteriores espacios son espacios topológicos donde la topología es inducida por la métrica de Hausdorff H . Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Dada una función entre continuos $f: X \rightarrow Y$ (f no es necesariamente continua). Definimos la función inducida $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$ dada por $2^f(A) = \overline{f(A)}$. De manera natural definimos $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ por $C(f) = 2^f|_{C(X)}$, sin embargo, estamos interesados en funciones $f: X \rightarrow Y$ para las cuales la función inducida $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ está bien definida. Así, necesitamos que, para cada $A \in C(X)$, $f(A)$ sea conexo. Las funciones que satisfacen esa condición las llamaremos funciones Darboux débil. Claramente cada función continua es Darboux débil.

Dada una función entre continuos $f: X \rightarrow Y$ y una clase de funciones \mathbb{M} , el problema que estudiaremos en el capítulo 4 es determinar si una de las siguientes afirmaciones implica la otra:

1. $f \in \mathbb{M}$;
2. $C(f) \in \mathbb{M}$;
3. $F_n(f) \in \mathbb{M}$, para algún $n \in \mathbb{N}$;
4. $2^f \in \mathbb{M}$.

En este trabajo estudiaremos algunas relaciones que pueden haber entre 1, 2, 3 y 4, cuando la clase de funciones \mathbb{M} es: conectividad, conectividad local, conexas, Darboux y casicontinuas. Nuestro trabajo está compuesto por cuatro capítulos:

En el Capítulo 1 presentamos las definiciones y resultados que necesitaremos para desarrollar nuestro trabajo.

El Capítulo 2 está dividido en dos secciones. En la primera sección mostramos las definiciones y propiedades de las funciones que preservan conexidad. Además, exhibimos teoremas que muestran las relaciones que se tienen de manera general entre las funciones que preservan conexidad. También construimos ejemplos que muestran cuando

algunas relaciones no se dan entre las clases de funciones anteriormente mencionadas. En la segunda sección recopilamos algunos teoremas que se tienen en la literatura, que muestran relaciones entre las funciones que preservan conexidad, cuando los dominios de las funciones tienen condiciones especiales. En esta sección resaltamos el siguiente teorema probado por nosotros.

Teorema 2.14 *Sea X una dendrita. Si $f: X \rightarrow Y$ es una función casicontinua, entonces f es una función de Darboux.*

El Capítulo 3 está dividido en dos secciones. En la primera sección estudiamos la propiedad de composición para las funciones que preservan conexidad, y concluimos que la única clase de funciones que preservan la propiedad de composición es la clase de funciones de Darboux. También analizamos las siguientes preguntas para cada clase de funciones \mathbb{M} que preservan conexidad. ¿Si f es una función continua y $g \in \mathbb{M}$, entonces $f \circ g \in \mathbb{M}$? y ¿Si g es una función continua y $f \in \mathbb{M}$, entonces $f \circ g \in \mathbb{M}$?. En la segunda sección trabajamos la propiedad del factor para las funciones que preservan conexidad, y mostramos que las únicas funciones que tienen la propiedad del factor son las funciones conexas. Entre los resultados obtenidos en esta sección, destacamos el siguiente teorema demostrado por los autores de este trabajo.

Teorema 3.19 *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva y $g: Y \rightarrow Z$ una función, tales que $g \circ f: X \rightarrow Z$ es una función de Darboux. Si para todo conexo C de Y , $f^{-1}(C)$ tiene un número finito de componentes, entonces g es una función de Darboux.*

También destacamos algunos ejemplos que muestran que para las demás funciones que preservan conexidad, no se tiene la propiedad del factor.

Finalmente, el Capítulo 4 está dividido en cinco secciones. En la primera sección estudiamos las relaciones que existen entre las funciones f , $C(f)$ y 2^f cuando la función f pertenece a la clase de funciones de conectividad. En las siguientes cuatro secciones estudiamos los mismos tópicos estudiados en la sección uno, cuando la función f pertenece a la clase de funciones de conectividad local, conexas, Darboux y casicontinuas, respectivamente. En este capítulo resaltamos los siguientes tres resultados nuestros:

Teorema 4.13 *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función definida entre continuos. Si f es una función conexas, entonces $F_n(f)$ es conexas, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 4.14 *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función definida entre continuos. Si $F_n(f)$ es una función conexas, entonces $F_k(f)$ es una función conexas, para todo $k \geq n$.*

Teorema 4.17 *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función definida entre continuos. Si f es conexas, entonces 2^f es conexas.*

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones y resultados de topología general y teoría de continuos, que usaremos a lo largo de este trabajo. Todas las definiciones que establecemos en este trabajo serán dadas en el contexto de los espacios métricos compactos y conexos, a los que llamamos *continuos*.

1.1. Notación

Empezamos introduciendo la simbología que, aunque es muy usada en libros de topología general, es importante tener en cuenta:

- \mathbb{N} : El conjunto de enteros positivos;
- S^1 : La circunferencia de radio uno en el plano complejo;
- $A \setminus B$: Es la diferencia entre dos subconjuntos de un espacio X ;
- $A \subset B$: A es un subconjunto de B (puede suceder que $A = B$);
- $f|_A$: Es la restricción de una función f a un subespacio A de su dominio;
- (X, d) : Es un espacio métrico X , con métrica d ;
- $B_d(x, r)$: Es la bola abierta en el espacio métrico (X, d) , de radio el número real mayor que cero r y con centro el punto x en X ;
- \overline{A} : Es la cerradura del conjunto A con respecto al espacio X ;
- $\partial_X(A) := \overline{(X - A)} \cap \overline{A}$;
- Para una función $f: X \rightarrow Y$; $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$; y se llama la gráfica de f .

Algunos otros símbolos que usaremos, que requieren una definición, los introduciremos en su momento.

1.2. Continuos

En esta sección, introducimos los conceptos de la teoría de continuos que serán necesarios para afrontar los objetivos que nos propusimos desarrollar.

1.2.1. Definiciones

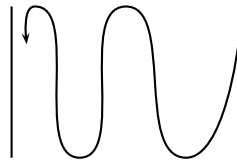
A continuación, definiremos una clase especial de espacios métricos, llamados continuos, sobre los cuales desarrollaremos este trabajo. Además, mostraremos algunas propiedades de los continuos.

Definición 1.1. Un *continuo* es un espacio métrico conexo, compacto y diferente del vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en algún espacio métrico.

Algunos ejemplos de continuos son un *arco* el cual es un continuo homeomorfo al intervalo $[0, 1]$ y la circunferencia de radio uno en el plano complejo denotada por S^1 . Además, sabemos que el producto cartesiano contable de continuos es un continuo. Así, $[0, 1]^n$ es un continuo que llamamos *n celda*, para todo n , y el conocido como *cubo de Hilbert*, continuo homeomorfo a $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$, donde $I_i = [0, 1]$. El cubo de Hilbert es conocido como *el continuo universal* pues todo continuo se puede incajar o inmersar en el cubo de Hilbert. Otro continuo muy conocido es el toro definido por $S^1 \times S^1$.

Un continuo muy importante para tener en cuenta en el desarrollo de esta tesis es la *curva del topólogo* definida por $X = \overline{Y}$, donde $Y = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$.

Figura 1: Curva del topólogo



A continuación definimos algunas propiedades que clasifican ciertos continuos.

Definición 1.2. Sea X un continuo. Diremos que X es *localmente conexo en un punto* x de X , si X tiene una base local de abiertos conexos en el punto x . Diremos que X es *localmente conexo* si es localmente conexo en todos sus puntos. Además, un continuo X se llama *hereditariamente localmente conexo* si todo subcontinuo es localmente conexo.

Un continuo localmente conexo es también conocido como *Continuo de Peano*. De los continuos que hemos presentado, solamente la curva del topólogo no es un continuo de Peano.

Definición 1.3. Sea X un continuo, diremos que X es *unicoherente* si siempre que $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X , se tiene que $A \cap B$ es conexo. Además, diremos que X es *hereditariamente unicoherente* si cualquier subcontinuo es unicoherente.

Los espacios $[0, 1]^2$ y $[0, 1]$ son ejemplos de continuos unicoherentes, sin embargo, aunque $[0, 1]$ es hereditariamente localmente conexo y hereditariamente unicoherente, es fácil ver que el cuadrado $[0, 1]^2$ no es hereditariamente localmente conexo ni hereditariamente unicoherente.

Definición 1.4. Sea X un continuo, diremos que X es *arcoconexo* si para cualesquiera dos puntos x y y en X , existe una inmersión $h: [0, 1] \rightarrow X$, tal que $h(0) = x$ y $h(1) = y$. Diremos que X es *hereditariamente arcoconexo* si todo subcontinuo K de X es *arcoconexo*.

Definición 1.5. Sea X un continuo. Diremos que X es un *dendroide* si X es arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Si, además, X es localmente conexo, lo llamaremos una *dendrita*.

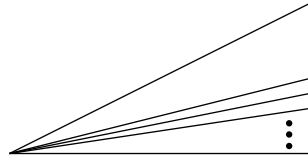
Como es conocido, todo subcontinuo de una dendrita es una dendrita. Así, toda dendrita es un continuo hereditariamente localmente conexo [16, Corolario 10.5, pág. 167].

Definición 1.6. Dado un dendroide X , a un punto p en X lo llamaremos un *punto de ramificación*, si X contiene un triodo simple con vértice p . Un dendroide con un único punto de ramificación es llamado *abanico*.

A continuación, mostramos ejemplos de continuos en el plano \mathbb{R}^2 que satisfacen algunas de las condiciones expuestas anteriormente:

1. S^1 es un continuo de Peano hereditariamente localmente conexo, pero no es unicoherente.
2. Sean $a = (-1, 0)$, $b = (0, 0)$ y $q_n = (0, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, sea $\overline{xy} = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$. Definimos el *abanico armónico* como $X = \overline{ab} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{aq_n}$.

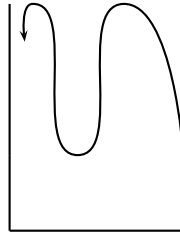
Figura 2: Abanico armónico



El abanico armónico no es un continuo de Peano, pero es un dendroide cuyo único punto de ramificación es $(-1, 0)$.

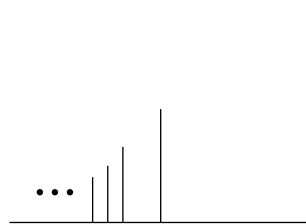
3. La *curva del topólogo* no es un continuo arcoconexo.
4. Sean $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1/\pi, y = \text{sen}(1/x)\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1/\pi, -2 \leq y \leq 0\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1/\pi, y = -2\}$ y $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -2 \leq y \leq 1\}$. El continuo $W = A \cup B \cup C \cup D$ es conocido como el *Círculo de Varsovia* y es arcoconexo, pero no es unicoherente ni hereditariamente arcoconexo.

Figura 3: *Círculo de Varsovia*



5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = \{1/n\} \times [0, 1/n]$ y $L = [0, 1] \times \{0\}$. Definimos la dendrita X como $X = (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup L$. Se puede observar que X tiene una cantidad infinita de puntos de ramificación.

Figura 4: Dendrita con una cantidad infinita de puntos de ramificación



1.3. Función Césaró-Vietoris

En esta sección definimos la función debida a Césaró y Vietoris, y estudiamos algunas de sus propiedades más importantes. Esta función la usaremos con frecuencia para la construcción de ejemplos.

El límite superior de una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se define como $\limsup x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k$. Para que el límite superior de una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exista, debemos asegurar que la sucesión esté acotada.

Todo número $x \in [0, 1]$ se puede expresar en su única representación binaria infinita, es decir, $x = 0.a_1a_2\dots$ donde los dígitos a_i son ceros o unos. Considere la siguiente función $w: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, que llamamos función de Césaró-Vietoris, definida por

$$w(x) = \begin{cases} \limsup \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Vale la pena aclarar, que el $\limsup \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ en este caso siempre existe, porque $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq 1$.

Proposición 1.7. *La función de Césaró-Vietoris es una función sobreyectiva.*

Demostración. Veamos primero que el número 0 tiene preimágen bajo w . Si $x = 0,01001000100001\dots$, entonces los términos de la sucesión $x_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ para este caso son:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1/2, \quad x_3 = 1/3, \quad x_4 = 1/4, \quad x_5 = 2/5, \quad \dots,$$

de ello que,

$$\limsup x_n = \inf\{1/2, 2/5, 3/9, 4/14, \dots\} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} (1/n) = 0.$$

Así, $w(x) = 0$. Probemos que el número 1 tiene preimágen bajo w . Si $x = 0,0\bar{1}$, obtenemos que

$$\limsup \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \limsup \frac{n-1}{n} = 1.$$

De ello que, $w(x) = 1$. Mostremos que todo número racional de $(0, 1)$ tiene preimágen bajo w . Si $x = 0.\underbrace{0\dots 0}_{l-m \text{ veces}} \underbrace{1\dots 1}_m \underbrace{0\dots 0}_{l-m \text{ veces}} \underbrace{1\dots 1}_m \dots$, tenemos que

$$w(x) = \limsup \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = m/l,$$

donde m/l es cualquier número racional de $(0, 1)$. Finalmente, demostremos que todo irracional en $(0, 1)$ tiene preimágen bajo w . Sea L un número irracional de $(0, 1)$. Entonces existe una sucesión $(y_n) = (\frac{m_n}{l_n}) \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, con $y_n < y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y L siendo el límite de la sucesión. Veamos primero que

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_{k-1}}{l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1}} < \frac{m_k}{l_k},$$

para todo $k > 1$. Sabemos que $\frac{m_1}{l_1} < \frac{m_k}{l_k}$, $\frac{m_2}{l_2} < \frac{m_k}{l_k}$, \dots , $\frac{m_{k-1}}{l_{k-1}} < \frac{m_k}{l_k}$. Así,

$$l_k m_1 < m_k l_1$$

$$\begin{aligned}
l_k m_2 &< m_k l_2 \\
&\vdots \\
l_k m_{k-1} &< m_k l_{k-1},
\end{aligned}$$

sumando la parte derecha e izquierda de las anteriores desigualdades tenemos que

$$l_k(m_1 + m_2 + \dots + m_{k-1}) < m_k(l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1}).$$

Así,

$$\frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_{k-1})}{(l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1})} < \frac{m_k}{l_k}. \quad (1.1)$$

Ahora, veamos que para todo número natural fijo k , existe un número natural $N > k$, tal que

$$\frac{m_k}{l_k} < \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_k + m_{k+1} + \dots + m_N)}{(l_1 + l_2 + \dots + l_k + l_{k+1} + \dots + l_N)}.$$

Demostrar la anterior afirmación es equivalente a probar que

$$(m_k l_1 - l_k m_1 + \dots + m_k l_{k-1} - l_k m_{k-1}) + (m_k l_{k+1} - l_k m_{k+1} + \dots + m_k l_N - l_k m_N) < 0.$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
m_k l_1 - l_k m_1 &> 0 \\
&\vdots \\
m_k l_{k-1} - l_k m_{k-1} &> 0.
\end{aligned}$$

Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}
m_k l_{k+1} - l_k m_{k+1} &< 0 \\
&\vdots \\
m_k l_N - l_k m_N &< 0.
\end{aligned}$$

Sea $m_k l_1 - l_k m_1 + \dots + m_k l_{k-1} - l_k m_{k-1} = r \in \mathbb{N}$, si $N = k + 2 + r$, entonces

$$(m_k l_1 - l_k m_1 + \dots + m_k l_{k-1} - l_k m_{k-1}) + (m_k l_{k+1} - l_k m_{k+1} + \dots + m_k l_N - l_k m_N) < 0.$$

De ello que,

$$\frac{m_k}{l_k} < \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_k + m_{k+1} + \dots + m_N)}{(l_1 + l_2 + \dots + l_k + l_{k+1} + \dots + l_N)}. \quad (1.2)$$

Sea $x = 0$. $\underbrace{0 \dots 0}_{l_1 - m_1 \text{ veces}} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{m_1 \text{ veces}} \quad \underbrace{0 \dots 0}_{l_2 - m_2 \text{ veces}} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{m_2 \text{ veces}} \quad \dots \quad \underbrace{0 \dots 0}_{l_n - m_n \text{ veces}} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{m_n \text{ veces}} \quad \dots$

Por 1.1, tenemos que $w(x) \leq L$. Por otra parte, de 1.2 concluimos que $L \leq w(x)$. Por lo tanto, $w(x) = L$. Finalmente, podemos decir que w es una función sobreyectiva. \square

Con la siguiente proposición mostramos que la definición de la función w está determinada por la “cola” de la representación en base 2.

Proposición 1.8. *Si $x = 0.a_1a_2\dots$ y $z = 0.b_1b_2\dots b_k a_1a_2\dots$, para algún $k \in \mathbb{N}$ fijo. Entonces $w(x) = w(z)$.*

Demostración. Sean $w(x) = \limsup(x_n)$ y $w(z) = \limsup(z_n)$, donde

$$x_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

y

$$z_{n+k} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k + a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n+k}.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{n} + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)}{1 + \frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n).$$

Eso muestra que $w(x) = w(z)$. □

Proposición 1.9. *Sean a, b en $[0, 1]$ con $a < b$, entonces $w([a, b]) = [0, 1]$.*

Demostración. Para todo $y \in [0, 1]$ existe un valor $x_y = 0.a_1a_2\dots$ en $[0, 1]$, tal que $w(x_y) = y$, por la Proposición 1.7. Sean $z = 0.b_1b_2\dots$ el punto medio del intervalo $[a, b]$, y r la distancia del punto z a los puntos extremos del intervalo $[a, b]$. Sea $s \in \mathbb{N}$, tal que $1/2^s < r$. Consideremos el punto $m = 0.b_1b_2\dots b_s b_{s+1} a_1 a_2 \dots \in [a, b]$. Tenemos que $w(m) = w(x_y) = y$, por la Proposición 1.8. Por lo tanto, $w([a, b]) = [0, 1]$. □

1.4. Hiperespacios y funciones inducidas

En esta sección definimos los hiperespacios que estudiaremos en este trabajo.

Una definición general de hiperespacio es la siguiente. Dado un espacio topológico X , un hiperespacio de X es una colección de subconjuntos de X con alguna condición específica.

Dado un continuo, definimos algunos hiperespacios, desarrollamos algunas propiedades y describimos algunos aspectos importantes relacionados con su topología.

Definición 1.10. Sea (X, d) un continuo. Definamos los siguientes hiperespacios de X :

1. $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y diferente del vacío}\};$
2. $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\};$
3. $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, n \in \mathbb{N}.$

Para cada A y B en 2^X , definimos $H : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty)$, por

$$H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset N_d(r, B) \text{ y } B \subset N_d(r, A)\},$$

donde $N_d(s, E) = \{x \in X : d(x, e) < s \text{ para algún } e \in E\}$, para $s > 0$ y $E \in 2^X$. Como mostraremos en el Teorema 1.11, H es una métrica para el hiperespacio 2^X y es conocida como la *métrica de Hausdorff*.

La demostración del siguiente teorema la tomamos de [16].

Teorema 1.11. *Sea X un continuo. Entonces $(2^X, H)$ es un espacio métrico.*

Demostración. De la definición de H , es sencillo probar que $H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$ y también que $H(A, B) = H(B, A)$ para cualesquiera A y B en 2^X . Probemos que se cumple la desigualdad del triángulo. Sean A, B y C puntos de 2^X . Mostremos que:

$$H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B).$$

Sea $\delta > 0$, por la definición de H , tenemos

$$A \subset N_d(H(A, C) + \frac{\delta}{2}, C) \text{ y } C \subset N_d(H(C, B) + \frac{\delta}{2}, B). \quad (1.3)$$

Sea $a \in A$, por (1.3), existe $c \in C$ tal que $d(a, c) < H(A, C) + \frac{\delta}{2}$. Además, de nuevo por (1.3), existe $b \in B$ tal que $d(c, b) < H(C, B) + \frac{\delta}{2}$. Aplicando la desigualdad del triángulo de d tenemos que:

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < H(A, C) + H(C, B) + \delta.$$

Ahora, como a fue un punto arbitrario de A tenemos

$$A \subset N_d(H(A, C) + H(C, B) + \delta, B). \quad (1.4)$$

Un argumento similar muestra

$$B \subset N_d(H(A, C) + H(C, B) + \delta, A). \quad (1.5)$$

De esta manera, por (1.4) y (1.5), $H(A, B) < H(A, C) + H(C, B) + \delta$. Como δ fue arbitrario, concluimos que $H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B)$. Así, H es una métrica de 2^X . \square

Consideremos la colección de subconjuntos de 2^X

$$\beta = \{\langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle : \text{Int}_X(U_i) = U_i \text{ para cada } i\},$$

donde $\langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^l U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\}$. Es fácil probar que β forma una base de alguna topología sobre 2^X . La topología generada por β se conoce como la *topología de Vietoris* [8, Teorema 1.2, pág.3].

Notación 1.12. Escribiremos $\langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle$ en lugar de $\langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle \cap C(X)$ o $\langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle \cap F_n(X)$, para denotar un abierto básico de la topología de Vietoris en $C(X)$ o $F_n(X)$, respectivamente.

El siguiente resultado es muy conocido en la teoría de los hiperespacios de continuos. Aunque la prueba no es difícil, es muy elaborada y por esta razón, no la escribimos. La prueba se puede consultar en [8, Teorema 3.2, pág.18].

Proposición 1.13. *Sea X un continuo. Entonces la topología de Vietoris es equivalente a la topología generada por la métrica de Hausdorff.*

Comentario 1.14. Notemos que si U_1, U_2, \dots, U_l son abiertos de X , entonces

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_l \rangle = \langle U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_l \rangle \cap \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle \cap \dots \cap \langle X, U_l \rangle.$$

Con esto, la colección

$$\varsigma = \{ \langle U \rangle : U \text{ es abierto en } X \} \cup \{ \langle X, V \rangle : V \text{ es abierto en } X \},$$

es una subbase de la topología de Vietoris [4, Problema 3J, pág.163].

La siguiente definición es una noción clásica de convergencia de conjuntos.

Definición 1.15. Sean X un continuo y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X . Definimos el *límite inferior* de la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ como el conjunto

$$\liminf A_i = \{x \in X \mid \forall U \subset X \text{ abierto con } x \in U, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_i \neq \emptyset, \forall i \geq N\}.$$

El *límite superior* de la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ se define como

$$\limsup A_i = \{x \in X \mid \forall U \subset X \text{ abierto con } x \in U; U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para infinitos } i \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que $\liminf A_i \subset \limsup A_i$. Si $\liminf A_i = \limsup A_i = A$, diremos que la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *converge a A* y escribimos $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = A$.

No es difícil probar que dada una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ en 2^X , los conjuntos $\liminf A_i$ y $\limsup A_i$ son no vacíos y cerrados de X [17, Observación 0.6].

Comentario 1.16. La convergencia en el sentido de la Definición 1.15 es equivalente a la convergencia usual en el hiperespacio 2^X dotado con la métrica de Hausdorff cuando X es un continuo [8, Teorema 4.7].

A continuación probaremos que los hiperespacios 2^X , $C(X)$ y $F_n(X)$ son continuos, cuando X es un continuo. Las pruebas de estos resultados se han tomado de [17, Teorema 0.8] y [12, Corolarios 1.8.8 y 1.8.9].

Teorema 1.17. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces 2^X , $C(X)$ son espacios métricos compactos.*

Demostración. Primero, probemos que 2^X es compacto. Es suficiente mostrar que toda sucesión en 2^X tiene una subsucesión convergente [18, Teorema 4.10]. Sea $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en 2^X . Como X es un espacio métrico compacto, existe una base $\{U_m\}_{m=1}^\infty$ numerable [3, Teorema 4.1, pág. 233]. Sea $\{A_n^1\}_{n=1}^\infty = \{A_n\}_{n=1}^\infty$ una y supongamos que hemos definido una sucesión $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$. Definamos $\{A_n^{m+1}\}_{n=1}^\infty$ de la siguiente forma:

- (1) Si $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$ tiene una subsucesión $\{A_{n_k}^m\}_{k=1}^\infty$ tal que $\limsup A_{n_k}^m \cap U_m = \emptyset$ entonces sea $\{A_n^{m+1}\}_{n=1}^\infty$ dicha subsucesión.
- (2) Si para cualquier subsucesión $\{A_{n_k}^m\}_{k=1}^\infty$ de $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$ tenemos que $\limsup A_{n_k}^m \cap U_m \neq \emptyset$ entonces hacemos $\{A_n^{m+1}\}_{n=1}^\infty = \{A_n^m\}_{n=1}^\infty$.

Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, hemos definido $\{A_n^m\}_{n=1}^\infty$. Consideremos ahora la sucesión diagonal $\{A_n^n\}_{n=1}^\infty$. De la construcción, es claro que $\{A_n^n\}_{n=1}^\infty$ es una subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^\infty$. Probemos que esta subsucesión es convergente. Supongamos que $\{A_n^n\}_{n=1}^\infty$ no es convergente entonces existe $p \in \limsup A_n^n \setminus \liminf A_n^n$. Como $p \notin \liminf A_n^n$, existe un abierto U_{k_0} y una subsucesión $\{A_{n_j}^{n_j}\}_{j=1}^\infty$ de $\{A_n^n\}_{n=1}^\infty$ tal que $p \in U_{k_0}$ y $U_{k_0} \cap A_{n_j}^{n_j} = \emptyset$ para cada $j \in \mathbb{N}$ (ver Definición 1.15). Note que $\{A_{n_j}^{n_j}\}_{j=1}^\infty$ es una subsucesión de $\{A_n^{k_0}\}_{n=1}^\infty$. Por lo tanto, la sucesión $\{A_n^{k_0}\}_{n=1}^\infty$ satisface la condición (1). Luego, $\limsup A_n^{k_0+1} \cap U_{k_0} = \emptyset$ por definición de la sucesión $\{A_n^{k_0+1}\}_{n=1}^\infty$. Como $\{A_n^n\}_{n=1}^\infty$ es una subsucesión de $\{A_n^{k_0+1}\}_{n=1}^\infty$ y $\limsup A_n^n \subset \limsup A_n^{k_0+1}$ [17, Observación 0.6] tenemos que $\limsup A_n^n \cap U_{k_0} = \emptyset$ pero esto no es posible pues $p \in \limsup A_n^n \cap U_{k_0}$. Así, 2^X es compacto.

Ahora, para probar que $C(X)$ es compacto, es suficiente ver que $C(X)$ es cerrado en 2^X . Sea $K \in C(X)$ y sea $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K$. Como K es cerrado, es suficiente ver que K es un subconjunto conexo de X . Supongamos que K no es conexo entonces existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $K \subset U \cup V$ y $K \cap U \neq \emptyset$, $K \cap V \neq \emptyset$. Como la convergencia en el sentido de la métrica de Hausdorff es equivalente a la convergencia introducida en la Definición 1.15 [17, Teorema 0.7] y $\langle U \cap V \rangle$ es un abierto de 2^X que tiene al punto K , existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ entonces $K_n \subset U \cup V$. Sean $y \in K \cap U$ y $z \in K \cap V$. Como $y, z \in K$ y $K = \liminf K_n$, existen sucesiones $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ en X tales que $y_n, z_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, respectivamente. Así, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ tenemos $y_n \in U$ y $z_n \in V$. Sean $N = \max\{N_0, N_1\}$ y $n \geq N$, fijo. Entonces $K_n \subset U \cup V$, $K_n \cap U \neq \emptyset$ y $K_n \cap V \neq \emptyset$, lo cual es imposible pues K_n es conexo. Esto completa la prueba del teorema. \square

Teorema 1.18. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $F_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Definamos $g: X^n \rightarrow F_n(X)$ por $g(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Veamos que g es una función continua. Sean $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$ y supongamos que $D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = r$, donde D denota la métrica sobre X^n definida por $D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}$. Veamos que

$H_d(g(x_1, \dots, x_n), g(y_1, \dots, y_n)) \leq r$. Note que $D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = r < r + \varepsilon$ donde $\varepsilon > 0$ es dado; luego $d(x_i, y_i) < r + \varepsilon$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. No es difícil ver que esta última desigualdad implica que $H(g(x_1, \dots, x_n), g(y_1, \dots, y_n)) < r + \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$ y así, $H(g(x_1, \dots, x_n), g(y_1, \dots, y_n)) \leq r$. Esto prueba que g es una función continua. Como X es un continuo, X^n también es un continuo y concluimos que $F_n(X)$ también es un continuo, por la continuidad y sobreyectividad de la función g . \square

Como una consecuencia del Teorema 1.18, tenemos:

Teorema 1.19. *Sea X un continuo. Entonces 2^X es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.17, 2^X es un espacio métrico compacto. Luego, basta probar que 2^X es conexo. Como $F_n(X)$ es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$ y $F_1(X) \subset F_2(X) \subset \dots \subset F_n(X) \subset \dots$, tenemos que $F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ es un subconjunto conexo de 2^X . Así, $\overline{F(X)}$ es conexo, por [3, Teorema 1.6, pág. 109]. Probemos que $\overline{F(X)} = 2^X$. Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, dado. Como A es compacto, existen $x_1, \dots, x_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^n B_d(x_j, \varepsilon)$. Definamos $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ y veamos que $H(A, L) < \varepsilon$. Es claro que $L \subset A$ y así $L \subset N_d(A, \varepsilon)$. Ahora, sea $x \in A$. Entonces existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in B_d(x_j, \varepsilon)$. Luego $d(x, L) \leq d(x, x_j) < \varepsilon$. Por lo tanto, $x \in N_d(L, \varepsilon)$ y se sigue que $A \subset N_d(L, \varepsilon)$. De esta manera concluimos que $\overline{F(X)} = 2^X$ y esto completa la prueba del Teorema. \square

Una herramienta muy útil para estudiar la arcoconexidad en hiperespacios de continuos es la noción de arco de orden, que introducimos a continuación.

Definición 1.20. Sea X un continuo. Un *arco de orden* en 2^X es un arco tal que si $A, B \in \alpha$ tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$. Un *arco de orden de A_0 a A_1* en 2^X es un arco de orden α tal que $A_0, A_1 \in \alpha$ y si $A \in \alpha$ entonces $A_0 \subset A \subset A_1$.

Una prueba para el siguiente resultado puede ser consultada en [17, Teorema 1.8].

Teorema 1.21. *Sean X un continuo y $A_0, A_1 \in 2^X$ tales que $A_0 \neq A_1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *existe un arco de orden en 2^X de A_0 a A_1 ;*
- (2) *$A_0 \subset A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0 .*

Teorema 1.22. *Sea X un continuo. Entonces 2^X es arcoconexo.*

Demostración. Sea $A \in 2^X$ y $A \neq X$. Por la parte (1) del Teorema 1.21, existe un arco de orden de A a X . Claramente esto implica que para cualesquiera dos elementos de 2^X existe un arco en 2^X que los une. Así, 2^X es arcoconexo. \square

Para probar la arcoconexidad del hiperespacio $C(X)$, usaremos el siguiente resultado que probamos a continuación.

Proposición 1.23. *Sea X un continuo y sea α un arco de orden en 2^X . Si $A \in C(X)$ es el punto inicial de α entonces $\alpha \subset C(X)$.*

Demostración. Sea $B \in \alpha$ tal que $B \neq A$. Sea β un subarco de α con puntos finales A y B . Como α es un arco de orden, por [17, Teorema 1.6], tenemos que β es un arco de orden de A a B . Así, $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A , por la parte (2) del Teorema 1.21. Es fácil ver que $B = \bigcup \{A \cup K \mid K \text{ es una componente de } B\}$. Como cada componente de B intersecta a A y A es conexo tenemos que $A \cup K$ es conexo para cada componente de B . Por lo tanto, B es conexo. Así, $\alpha \subset C(X)$. \square

Teorema 1.24. *Sea X un continuo. Entonces $C(X)$ es arcoconexo.*

Demostración. Sea $A \in C(X)$ y $A \neq X$. Note que existe un arco de orden α en 2^X de A a X , por la parte (1) del Teorema 1.21. Como $A \in C(X)$ y A es el punto inicial de α , se sigue que $\alpha \subset C(X)$, por la Proposición 1.23. Por lo tanto $C(X)$ es arcoconexo. \square

Corolario 1.25. *Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es un continuo.*

Demostración. El espacio $C(X)$ es métrico compacto y conexo, por los Teoremas 1.17 y 1.24, respectivamente. Por lo tanto, $C(X)$ es un continuo. \square

Terminaremos este capítulo con las definiciones de las funciones inducidas entre hiperespacios de continuos y algunas propiedades que satisfacen estas funciones.

Definición 1.26. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Definimos $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$, que llamaremos *la función inducida entre los hiperespacios 2^X y 2^Y* , por $2^f(A) = \overline{f(A)}$ para cada $A \in 2^X$.

Definición 1.27. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Definimos $F_n(f): F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$, que llamaremos *la función inducida entre los hiperespacios $F_n(X)$ y $F_n(Y)$* , por $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$.

La siguiente definición es necesaria para poder hablar de la función inducida $C(f)$, para funciones entre continuos que no son necesariamente continuas.

Definición 1.28. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Decimos que f es *Darboux débil* si $f(A)$ es conexo para todo $A \in C(X)$.

La siguiente función es Darboux débil y se estudiará con más detalle en el capítulo 2.

Ejemplo 1.29. Sea $X = \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}}$. Consideremos la función $f: X \rightarrow [0, 1]$ definida por,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}; \\ 1 - |y| & \text{si } (x, y) \in \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}. \end{cases}$$

Definición 1.30. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función Darboux débil. Entonces, definimos $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$, llamada *la función inducida entre los hiperespacios* $C(X)$ y $C(Y)$ por $C(f) = 2^f|_{C(X)}$.

Las definiciones de funciones inducidas no requieren la continuidad de f . Sin embargo, si f es continua, entonces $2^f(A) = f(A)$, pues $f(A) = \overline{f(A)}$ es una función continua entre compactos de Hausdorff y, $C(f) = 2^f|_{C(X)}$ y $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$ están bien definidas.

La siguiente proposición relaciona la continuidad de f con la continuidad de 2^f .

Proposición 1.31. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Entonces 2^f es continua y sobreyectiva.*

Demostración. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. del Comentario 1.14, es suficiente probar que $(2^f)^{-1}(\langle U \rangle) = \langle f^{-1}(U) \rangle$ y $(2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle$, para cualesquiera abiertos U y V en Y .

Probemos primero que $(2^f)^{-1}(\langle U \rangle) = \langle f^{-1}(U) \rangle$. Sea $A \in (2^f)^{-1}(\langle U \rangle)$. Entonces $2^f(A) \in \langle U \rangle$. Luego, por la definición de $\langle U \rangle$, $f(A) \subset U$. De esta manera, $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(U)$ y $A \in \langle f^{-1}(U) \rangle$. Recíprocamente, si $A \in \langle f^{-1}(U) \rangle$, entonces $A \subset f^{-1}(U)$ y $f(A) \subset U$. Con esto tenemos que $2^f(A) \in \langle U \rangle$ y $A \in (2^f)^{-1}(\langle U \rangle)$.

Mostremos que $(2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle) = \langle X, f^{-1}(V) \rangle$. Si $A \in (2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle)$, entonces $2^f(A) \in \langle Y, V \rangle$. Luego, $f(A) \cap V \neq \emptyset$. De donde se sigue que $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ y $A \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle$. De manera similar, si $A \in \langle X, f^{-1}(V) \rangle$, entonces $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Consecuentemente, $f(A) \cap V \neq \emptyset$. Con lo que concluimos que $2^f(A) \in \langle Y, V \rangle$ y $A \in (2^f)^{-1}(\langle Y, V \rangle)$.

Finalmente, sea $B \in 2^Y$. Claramente, $f^{-1}(B) \in 2^X$ y $2^f(f^{-1}(B)) = B$. Luego 2^f es sobreyectiva. \square

Corolario 1.32. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua entre continuos, entonces $C(f)$ y $F_n(f)$ son funciones continuas.*

Demostración. Como f es una función continua, entonces 2^f es una función continua, por la Proposición 1.31. Así, $C(f) = 2^f|_{2^X}$ y $F_n(f)|_{F_n(X)}$ son funciones continuas. \square

Capítulo 2

Clases de funciones

En este capítulo definimos las funciones de conectividad, conectividad local, conexas, Darboux y casicontinuas. También estudiaremos las relaciones que existen entre ellas. Para ello, presentaremos teoremas que muestren dichas relaciones. Además, daremos contraejemplos cuando dichas relaciones no se den. Finalmente, daremos condiciones sobre el dominio y el recorrido de las funciones, para así, enunciar teoremas que muestren algunas relaciones entre las funciones anteriormente presentadas.

2.1. Definiciones y propiedades

A continuación introducimos las definiciones de las funciones que son nuestro principal objeto de estudio en el desarrollo de este trabajo.

Definición 2.1. Sean X y Y continuos, y sea $f: X \rightarrow Y$ una función. Diremos que:

1. f es una función de conectividad si para todo conexo $C \subset X$, se tiene que $\Gamma(f|_C)$ es conexas.
2. f es una función de conectividad local si existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X tal que $f|_{U_\alpha}$ es una función de conectividad para todo $\alpha \in \Lambda$.
3. f es una función conexas si $\Gamma(f)$ es conexas.
4. f es una función de Darboux si $f(C)$ es conexo para todo conexo $C \subset X$.
5. f es una función casicontinua si para todo abierto N de $X \times Y$ con $\Gamma(f) \subset N$, existe una función continua $g: X \rightarrow Y$ tal que $\Gamma(g) \subset N$.

Comentario 2.2. Es fácil ver que para todo $A \subset X$, $f|_A$ es de conectividad, siempre que f sea de conectividad. Lo anterior también se tiene para funciones de conectividad local y de Darboux. Más aún, para todo subconjunto cerrado A de X , se tiene que $f|_A$ es casicontinua, siempre que f sea casicontinua. La última afirmación se demostrará a continuación.

La prueba del siguiente teorema fue tomada de [19].

Teorema 2.3. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función casicontinua. Si C es un subconjunto cerrado de X , entonces $f|_C: C \rightarrow Y$ es una función casicontinua.*

Demostración. Sea N un conjunto abierto de $C \times Y$ tal que $\Gamma(f|_C) \subset N$. Entonces existe un conjunto abierto N' en $X \times Y$, de manera que $N = N' \cap (C \times Y)$. El conjunto $N' \cup [(X - C) \times Y]$ es abierto en $X \times Y$ y $\Gamma(f) \subset N' \cup [(X - C) \times Y]$. Como f es casicontinua, existe una función continua $F: X \rightarrow Y$, donde $\Gamma(F) \subset N' \cup [(X - C) \times Y]$, de ello que, $F|_C$ es una función continua, y además $\Gamma(F|_C) \subset N$. Por lo tanto, $f|_C: C \rightarrow Y$ es una función casicontinua. \square

La siguiente proposición nos muestra la relación que hay entre las funciones de conectividad, con las funciones de conectividad local, conexas y Darboux.

Proposición 2.4. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Si f es una función de conectividad, entonces f es de conectividad local, conexas y Darboux.*

Demostración. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función de conectividad; es decir, $\Gamma(f|_C)$ es un conjunto conexo para cualquier conexo C en X . Note que si tomamos $\{X\}$ como una cubierta abierta de X , entonces, como X es conexo, $\Gamma(f|_X)$ es un conjunto conexo. Por lo tanto, f es de conectividad local. Ahora, como f es de conectividad y X es conexo, tenemos que $\Gamma(f|_X)$ es un conjunto conexo. Además, $\Gamma(f) = \Gamma(f|_X)$. Así, f es conexas. Finalmente, sea $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ la proyección definida por $\pi_2(x, y) = y$. Sea C un conjunto conexo en X . Observe que $f(C) = \pi_2(\Gamma(f|_C))$. Como f es de conectividad y π_2 es continua, tenemos que $f(C)$ es conexo. De ello que, f es una función de Darboux. \square

A continuación, veremos que las funciones continuas pertenecen a las cinco clases de funciones definidas al inicio del capítulo.

Proposición 2.5. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Si f es una función continua, entonces f es de conectividad, conectividad local, conexas, Darboux y casicontinua.*

Demostración. Como $f: X \rightarrow Y$ es una función continua, tenemos que la función $H: X \rightarrow \Gamma(f)$, definida por $H(x) = (x, f(x))$, es también una función continua. Si C es un conjunto conexo de X , entonces $H(C) = \Gamma(f|_C)$ es un conjunto conexo. Así, f es una función de conectividad. La función f también es una función de conectividad local, conexas y Darboux, por la Proposición 2.4. Finalmente, sea N un conjunto abierto de $X \times Y$, tal que $\Gamma(f) \subset N$. Como f es una función continua, se tiene que f es una función casicontinua. \square

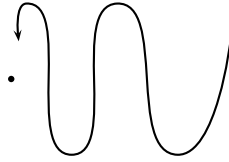
El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de la anterior proposición no se tiene.

Ejemplo 2.6. Existe una función de conectividad, conectividad local, conexas, Darboux, casicontinua y no continua.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$, definida de la siguiente manera,

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(1/x) & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Figura 5: Gráfica de la función f



Veamos primero que f es una función de conectividad. Sea C un conexo de $[0, 1]$ que contenga al cero. Así, $C = [0, \delta]$ o $C = [0, \delta)$, donde $0 \leq \delta \leq 1$. En el primer caso se tendrá que,

$$\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq \delta\} \subset \Gamma(f|_C) \subset \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq \delta\}},$$

y en el segundo caso tendremos que,

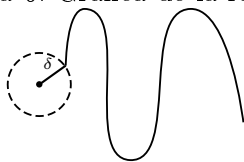
$$\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x < \delta\} \subset \Gamma(f|_C) \subset \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x < \delta\}}.$$

Sabemos que los conjuntos $\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq \delta\}$ y $\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x < \delta\}$ son conexos, de ello que, $\Gamma(f|_C)$ es un conexo [3, Teorema 1.6, pág. 109]. Ahora, si C es un conexo de $[0, 1]$ que no contiene al cero, entonces $\Gamma(f|_C)$ es homeomorfo a un intervalo. Así, $\Gamma(f|_C)$ es un conexo. Por lo tanto, f es una función de conectividad. La función f también es una función de conectividad local, conexas y Darboux, por la Proposición 2.4. Sea N un conjunto abierto de $X \times Y$, tal que $\Gamma(f) \subset N$. Existe un número $\delta > 0$, de manera que $B_d((0, 0), \delta) \subset N$. Sea $\hat{x} = \text{máx}\{x \in [0, 1] : \partial(B_d((0, 0), \delta)) \cap \Gamma(f) \neq \emptyset\}$. Sea $g: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$, definida como

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(1/\hat{x})}{\hat{x}}x & \text{si } 0 \leq x \leq \hat{x}, \\ \text{sen}(1/x) & \text{si } \hat{x} < x \leq 1. \end{cases}$$

Claramente g es una función continua y $\Gamma(g) \subset N$. Por lo tanto, f es una función casicontinua. Finalmente, veamos que f no es una función continua en $x = 0$. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $x_n = 2/(4n + 1)\pi$. La sucesión x_n converge a cero, pero $f(x_n)$ tiende a uno. De ello que, f no es una función continua en $x = 0$.

Figura 6: Gráfica de la función g



El siguiente teorema nos muestra que casicontinuidad implica conexidad. La prueba fue tomada de [19].

Teorema 2.7. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Si f es una función casicontinua, entonces f es conexa.*

Demostración. Supongamos que f no es una función conexa. Es decir, existen conjuntos abiertos A y B de $X \times Y$, tales que $A \cap B = \emptyset$, $\Gamma(f) \subset A \cup B$, $A \cap \Gamma(f) \neq \emptyset$ y $B \cap \Gamma(f) \neq \emptyset$. Sean a y b en X , tales que $(a, f(a)) \in A$ y $(b, f(b)) \in B$. Sea $\pi: X \times Y \rightarrow X$ la proyección definida por $\pi(x, y) = x$. Sean $A' = A \setminus \pi^{-1}(b)$ y $B' = B \setminus \pi^{-1}(a)$. Tenemos que $A' \cup B'$ es un conjunto abierto en $X \times Y$ y $\Gamma(f) \subset A' \cup B'$. Como f es una función casicontinua, existe una función continua $F: X \rightarrow Y$, tal que $\Gamma(F) \subset A' \cup B'$. Pero A' y B' son conjuntos abiertos disyuntos, tales que $(a, F(a)) \in A'$, $(b, F(b)) \in B'$. Así, $\Gamma(F)$ no es conexa, pero esto es absurdo porque F es una función continua. Por lo tanto, podemos concluir que f es una función conexa. \square

Los Ejemplos 2.10 y 2.11 que a continuación se muestran, fueron aportados por nosotros. Los demás ejemplos fueron tomados de [19], [14] y [15]. Los siguientes ejemplos exhiben implicaciones que en general no se tienen entre las funciones anteriormente definidas.

Ejemplo 2.8. Existe una función de conectividad local, que no es de conectividad, no es conexa, no es Darboux y no es casicontinua.

Sea $X = \overline{\{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}}$. Consideremos la función característica $\chi_{\{0\} \times [-1, 1]}: X \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\chi_{\{0\} \times [-1, 1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \{0\} \times [-1, 1], \\ 0 & \text{si } (x, y) \in X \setminus \{0\} \times [-1, 1]. \end{cases}$$

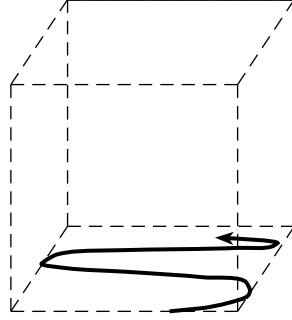
Para ver que esta función es de conectividad local, basta con tomar la cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ de X , donde los conjuntos abiertos U_1 y U_2 son:

$$U_1 = [(-1/2, 3/2) \times (0, 3/2)] \cap X$$

$$U_2 = [(-1/2, 3/2) \times (-3/2, 1/2)] \cap X.$$

Es fácil ver que si C es un conexo contenido en U_1 o U_2 , entonces $f|_C$ es constante. Así, f es de conectividad local.

Figura 7: Gráfica de la función $\chi_{\{0\} \times [-1,1]}$



Veamos que f no es una función conexa. Observando que $\Gamma(f)$ está contenido en el espacio $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$, podemos concluir que f no es una función conexa. Como f no es una función conexa, tenemos que f no es una función de conectividad, por la Proposición 2.4. La función f no es de Darboux, porque $f(X) = \{0, 1\}$. Finalmente, probemos que f no es casicontinua. Consideremos los siguientes conjuntos abiertos:

$$U_1 = [(0, 3/2) \times (-3/2, 3/2)] \cap X \times (-1/2, 1/2)$$

$$U_2 = [(-3/2, 1/2) \times (-3/2, 3/2)] \cap X \times (1/2, 3/2),$$

claramente $\Gamma(f) \subset U_1 \cup U_2$, pero no existe una función continua $g: X \rightarrow [0, 1]$, de tal manera que su gráfica quede contenida en $U_1 \cup U_2$. Por ende, f no es una función casicontinua.

Ejemplo 2.9. Existe una función conexa que no es de conectividad ni de Darboux.

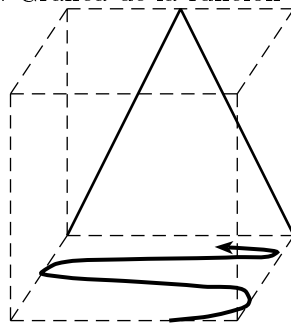
Sea $X = \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}}$. Consideremos la función $f: X \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}; \\ 1 - |y| & \text{si } (x, y) \in \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}. \end{cases}$$

Claramente los conjuntos $A = \{(x, y, 0) : (x, y) \in \{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}\}$ y $B = \{(x, y, 1 - |y|) : (x, y) \in \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}\}$ son conexos, y $\Gamma(f) = A \cup B$. Ahora, es fácil ver que el punto $(0, 1, 0) \in B \cap \overline{A}$. Así, podemos concluir que $\Gamma(f)$ es un conexo de $X \times [0, 1]$. Por lo tanto, f es una función conexa. Veamos que f no es Darboux. Consideremos el conjunto conexo $C = \{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, 0)\}$ de X . Tenemos que $f(C) = \{0, 1\}$, de ello que, f no es una función de Darboux. Así, la función f tampoco es de conectividad, por la Proposición 2.4.

Ejemplo 2.10. Existe una función conexa, que no es de conectividad local y tampoco es casicontinua.

Figura 8: Gráfica de la función f



Sea $S^1 = \{e^{2\pi it} : 0 \leq t < 1\}$. Definimos $f: S^1 \rightarrow [0, 1/2]$ como

$$f(e^{2\pi it}) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1. \end{cases}$$

Probemos que f es una función conexa. Como f es una función continua en $S^1 \setminus (1, 0)$, tenemos que $\Gamma(f|_{S^1 \setminus (1, 0)})$ es un conjunto conexo. No es difícil ver que $\Gamma(f|_{S^1 \setminus (1, 0)}) \subset \Gamma(f) \subset \overline{\Gamma(f|_{S^1 \setminus (1, 0)})}$. Así, $\Gamma(f)$ es un conjunto conexo, porque está entre un conjunto conexo y su adherencia. Mostremos que f no es de conectividad local. Consideremos cualquier cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X . Sea U_{α_0} la vecindad del punto $(1, 0)$. Sabemos que $f|_{U_{\alpha_0}}$ no es de conectividad, porque se puede encontrar un conjunto conexo C contenido en U_{α_0} , de tal forma que, $f(C) = [0, \delta] \cup \{1/2\}$, donde $0 < \delta < 1/2$. De ello que, $\Gamma(f|_C)$ no es un conjunto conexo. Así, f no es una función de conectividad local. Consideremos el conjunto abierto $N = \{\cup_{x \in S^1} [B_{\mathbb{R}^2}(x, 1/5) \times B_{\mathbb{R}}(f(x), 1/5)]\}$ de $S^1 \times [0, 1/2]$, que contiene la gráfica de f . Sea la sucesión $x_n = e^{2\pi i(1 - \frac{1}{3n})}$ convergente a $(1, 0)$. Note que, para toda función $g: S^1 \rightarrow [0, 1/2]$ cuya gráfica esté contenida en N , tenemos que, $g(x_n) \in (1/2 - 1/5, 1/2 + 1/5)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, g será discontinua en el punto $(1, 0)$, porque $g(1, 0) \in (-1/5, 1/5)$ y $g(x_n) \in (1/2 - 1/5, 1/2 + 1/5)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la función f no es casicontinua.

Ejemplo 2.11. Existe una función $f: X \rightarrow [0, 1]$ casicontinua que no es de conectividad, no es de conectividad local y no es de Darboux.

Sea $X = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$, donde $A_1 = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$, $A_2 = \{(x, x/2) : 0 \leq x \leq 1\}$, \dots , $A_n = \{(x, x/n) : 0 \leq x \leq 1\}$ Definimos $f: X \rightarrow [0, 1]$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } (x, y) \in \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in X \setminus \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}. \end{cases}$$

Para ver que f es casicontinua, debemos notar que para cualquier $\delta > 0$, y cualquier conjunto abierto $N = \{\cup_{x \in X} [B_{\mathbb{R}^2}(x, \delta) \times B_{\mathbb{R}}(f(x), \delta)]\}$ que cubre la gráfica de la función f , siempre podemos construir la siguiente función continua $g : X \rightarrow [0, 1]$.

$$g(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } (x, y) \in (\{(t, s) : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s < \delta\} \cap X), \\ 0 & \text{si } (x, y) \in X \setminus \{(t, s) : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s < \delta\}. \end{cases}$$

Claramente g es continua, porque hemos arreglado los problemas de discontinuidad que habían en los puntos de la forma $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$, con respecto a la función f . La función f no es una función de Darboux, porque al tomar el conjunto conexo $C = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \{(1, 0)\}$ de X . Tenemos que $f(C) = \{0, 1\}$. Como f no es una función de Darboux, la función f no es de conectividad, por la Proposición 2.4.

Finalmente, probemos que f no es una función de conectividad local. Observemos que para cualquier cubierta abierta $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$, donde U_{α_0} es vecindad del punto $(0, 0)$, $f|_{U_{\alpha_0}}$ no es una función de conectividad, porque siempre se puede encontrar un conjunto conexo D contenido en U_{α_0} que sea homeomorfo a X . Así, como probamos que f no era una función de conectividad, podremos probar de manera similar que $f|_{U_{\alpha_0}}$ no es una función de conectividad. De ello que, f no es una función de conectividad local.

Ejemplo 2.12. Existe una función de Darboux que no es de conectividad, no es de conectividad local, no es conexa y tampoco es casicontinua.

Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } w(x) = x, \\ w(x) & \text{si } w(x) \neq x, \\ 1/2 & \text{si } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Donde w es la función de Césaró-Vietoris definida en el capítulo 1. Veamos que $f(C) = [0, 1]$ para todo conexo no degenerado $C \subset [0, 1]$. Es claro que existen a y b en $[0, 1]$ tales que $[a, b] \subset C$. Sea $y \in [0, 1]$, existe un valor $x_y = 0.a_1a_2\dots \in [a, b]$, tal que $w(x_y) = y$, por la Proposición 1.9. Si $x_y \neq w(x_y)$, $f(x_y) = y$. Por otra parte, si $x_y = w(x_y)$, entonces consideramos un intervalo $[a', b'] \subset [a, b]$, tal que $x_y \notin [a', b']$. Así, podemos encontrar un punto $m \in [a', b']$, de manera que $w(m) = y$, de nuevo por la Proposición 1.9. Por lo tanto, $f(m) = y$. Finalmente, podemos concluir que $f(C) = [0, 1]$. Esto es suficiente para probar que f es una función de Darboux.

Probemos que f no es una función conexa. Como la diagonal $\{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$ no está en la gráfica de la función f . Tenemos que la recta $y = x$ permite separar a la gráfica de f . De ello que, f no es una función conexa. Así, f tampoco es una función de conectividad, por la Proposición 2.4. Mostremos que f no es una función de conectividad local. Sea $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de $[0, 1]$, y U_{α_0} una vecindad del punto $x = 0$. Podemos encontrar un valor $\delta > 0$, tal que el conjunto conexo $[0, \delta] \subset U_{\alpha_0}$. Si vemos la gráfica de $f|_{[0, \delta]}$, se encontrará que el conjunto $\{(x, x) : 0 \leq x < \delta\}$ la separa. De ello

que, $f|_{U_{\alpha_0}}$ no es de conectividad. Por ende, f no es una función de conectividad local. Finalmente, como f no tiene punto fijo, obtenemos que f no es una función casicontinua por [19, Teorema 3, pág. 252].

Proposición 2.13. *Existe una función de conectividad que no es casicontinua.*

Demostración. Sea D el disco unitario en \mathbb{R}^2 . Definimos

$$f(x, y) = \begin{cases} \left| \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right) \right| & \text{si } (x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}; \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Veamos que f es una función de conectividad. Sea C un conjunto conexo de D que no contiene al punto $(0, 0)$. La gráfica de $f|_C$ es un conjunto conexo, porque f es una función continua en $D \setminus \{(0, 0)\}$. Ahora, sea C un conjunto conexo de D que contiene al punto $(0, 0)$. Tenemos que $\Gamma(f|_C) = \Gamma(f|_{C \setminus \{(0, 0)\}}) \cup \{(0, 0), f(0, 0)\}$. Sabemos que $\Gamma(f|_{C \setminus \{(0, 0)\}})$ es un conjunto conexo. Como C es un conjunto conexo, $(0, 0) \in \overline{C \setminus \{(0, 0)\}}$, es decir, existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C \setminus \{(0, 0)\}$, tal que x_n converge al punto $(0, 0)$. Ahora, si V es una vecindad del punto $\{(0, 0), f(0, 0)\}$, existe un número $\delta > 0$, tal que $B_{\mathbb{R}^2}((0, 0), \delta) \times B_{\mathbb{R}}((0, 0), \delta) \subset V$. Sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \in B_{\mathbb{R}^2}((0, 0), \delta)$ para todo $n \geq N$. Además, como $f(x_n)$ oscila entre $[-1, 1]$, existe al menos un punto $(x_n, f(x_n)) \in B_{\mathbb{R}^2}((0, 0), \delta) \times B_{\mathbb{R}}((0, 0), \delta)$, para algún $n \geq N$. Por lo tanto, $\{(0, 0), f(0, 0)\} \in \overline{\Gamma(f|_{C \setminus \{(0, 0)\}})}$. Ahora, como $\Gamma(f|_{C \setminus \{(0, 0)\}}) \subset \Gamma(f|_C) \subset \overline{\Gamma(f|_{C \setminus \{(0, 0)\}})}$, $\Gamma(f|_C)$ es un conjunto conexo [3, Teorema 1.6, pág.109]. Finalmente, podemos concluir que f es una función de conectividad.

Considere $F: D \rightarrow Y$ definida por $F(x, y) = ((x, y), f(x, y))$, donde $Y = \overline{\Gamma(f)}$. Sea $\varphi: \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(f)$, definida por $\varphi((x, y), F(x, y)) = ((x, y), f(x, y))$. Es fácil ver que φ es un homeomorfismo. De lo anterior se deduce que F también es una función de conectividad. Sea C la frontera de D . Definimos $\phi: D \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow C$ por, $\phi(p)$ es el punto en C más cercano a p . Veamos que F no es casicontinua. Como $F|_C$ es continua, existe $\delta > 0$, tal que si $d_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta$, entonces $d_{\mathbb{R}}(F((x_1, y_1)), F((x_2, y_2))) < 1/16$. Sea $\delta' = \min\{\delta, 1/8\}$, y considere el conjunto abierto U de $D \times Y$, definido por $U = \cup_{(x, y) \in D} [B_{\mathbb{R}^2}((x, y), \delta') \times B_{\mathbb{R}^2}((x, y), \delta') \times B_{\mathbb{R}}(F(x, y), \delta')]$. Claramente, $\Gamma(F) \subset U$. Sean n y m puntos de $U \cap \pi_D^{-1}(x, y)$, donde $(x, y) \in C$ y $\pi: D \times Y \rightarrow D$. Entonces $n = (x, y) \times (x_1, y_1) \times \{F(x_1, y_1)\}$, $m = (x, y) \times (x_2, y_2) \times \{F(x_2, y_2)\}$, donde $d_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1), (x, y)) < \delta'$ y $d_{\mathbb{R}^2}((x_2, y_2), (x, y)) < \delta'$. Ahora, $d_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq d_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1), (x, y)) + d_{\mathbb{R}^2}((x_2, y_2), (x, y)) < 2\delta' \leq 1/4$, también tenemos que $d_{\mathbb{R}}(F(x_1, y_1), F(x_2, y_2)) \leq d_{\mathbb{R}}(F(x_1, y_1), F(x, y)) + d_{\mathbb{R}}(F(x, y), F(x_2, y_2)) < 1/16 + 1/16 = 1/8$. De ello que, $d_{\mathbb{R}^5}(n, m) = d_{\mathbb{R}^3}((x_1, y_1) \times \{F(x_1, y_1)\}, (x_2, y_2) \times \{F(x_2, y_2)\}) \leq d_{\mathbb{R}^2}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_{\mathbb{R}}(F(x_1, y_1), F(x_2, y_2)) < 3/8$. Por lo tanto, $\text{diám}(U \cap \pi_D^{-1}(x, y)) < 1/2$ para todo $(x, y) \in C$. Asumamos que existe una función continua $g: D \rightarrow Y$, tal que $\Gamma(g) \subset U$. Veamos que $d_{\mathbb{R}^2}(\phi(\pi_D(g(x, y))), (x, y)) < 1$ para todo $(x, y) \in C$. Note que $((x, y), g(x, y))$ y $((x, y), F(x, y))$ están en $U \cap \pi_D^{-1}(x, y)$. Así,

$$d_{\mathbb{R}^5}((x, y) \times g(x, y), (x, y) \times F(x, y)) = d_{\mathbb{R}^3}(g(x, y), (x, y) \times f(x, y)) < 1/2.$$

Como

$$d_{\mathbb{R}^2}(\pi_D(g(x, y)), (x, y)) \leq d_{\mathbb{R}^3}(g(x, y), (x, y) \times f(x, y)) < 1/2,$$

tenemos que,

$$d_{\mathbb{R}^2}(\phi(\pi_D(g(x, y))), (x, y)) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\phi(\pi_D(g(x, y))), \pi_D(g(x, y))) + d_{\mathbb{R}^2}(\pi_D(g(x, y)), (x, y)) < 1/2 + 1/2 = 1,$$

para todo $(x, y) \in C$. En particular $(\phi \circ \pi_D \circ g): C \rightarrow C$ no es homotópica a una constante (ver [16, 12.37, 12.38 pág. 72]). Como $g(D) \not\subseteq \{(0, 0)\} \times I$ y $g(D)$ es localmente conexo. Obtenemos que $(0, 0) \notin \pi_D(g(D))$. Así, $\phi \circ \pi_D \circ g$ está bien definida y es continua. Por ende, $\phi \circ \pi_D \circ g$ es homotópica a una constante por [16, 12.35, pág. 256]. Así, $\phi \circ \pi_D \circ g|_C$ es homotópica a una constante, lo cual es absurdo por lo dicho anteriormente. Finalmente, podemos concluir que F no es casicontinua.

La siguiente tabla muestra las implicaciones generales, entre las funciones anteriormente estudiadas.

\implies	Conectividad	Conectividad local	Conexa	Darboux	Casicontinua
Conectividad	✓	✓ Proposición 2.4	✓ Proposición 2.4	✓ Proposición 2.4	× Proposición 2.13
Conectividad local	× Ejemplo 2.8	✓	× Ejemplo 2.8	× Ejemplo 2.8	× Ejemplo 2.8
Conexa	× Ejemplo 2.9	× Ejemplo 2.10	✓	× Ejemplo 2.9	× Ejemplo 2.10
Darboux	× Ejemplo 2.12	× Ejemplo 2.12	× Ejemplo 2.12	✓	× Ejemplo 2.12
Casicontinua	× Ejemplo 2.11	× Ejemplo 2.11	✓ Teorema 2.7	× Ejemplo 2.11	✓

□

2.2. Teoremas adicionales

En esta sección enunciaremos algunos teoremas que muestran relaciones entre las funciones que preservan conexidad, para ello, será indispensable considerar en los enunciados de los teoremas, funciones que preservan conexidad con conjuntos de salida especiales.

El siguiente teorema fue probado por nosotros y nos muestra cuándo una función casicontinua es una función de Darboux.

Teorema 2.14. *Sea X una dendrita. Si $f: X \rightarrow Y$ es una función casicontinua, entonces f es una función de Darboux.*

Demostración. Como f es una función casicontinua, tenemos que f es una función Darboux débil [7, Lema 1, pág. 70]. Como X es una dendrita, tenemos que f es una

función de Darboux, por el Teorema 3.22. \square

Los siguientes resultados muestran cuándo una función conexa es de conectividad, y cuándo una función casicontinua es de conectividad. La prueba de los siguientes teoremas puede ser encontrada en [14].

Teorema 2.15. *Sea X una dendrita tal que cada arco en X contiene solo un número finito de puntos de ramificación de X . Entonces cada función conexa de valores reales en X es una función de conectividad.*

Teorema 2.16. *Si X es una dendrita tal que cada arco en X contiene solo un número finito de puntos de ramificación de X , entonces cada función casicontinua de valores reales en X es una función de conectividad.*

Con los siguientes teoremas mostramos cuándo una función de conectividad local es conexa, y también cuándo una función de conectividad local es de conectividad. Los siguientes teoremas requieren demasiados resultados para su prueba, por ende, no serán demostrados en este trabajo. Consultar la prueba en [15].

Teorema 2.17. *Sea X un continuo de Peano. Entonces cada función de conectividad local de X a un espacio topológico Y , es una función conexa.*

Teorema 2.18. *Sea X un espacio métrico arcoconexo. Entonces cada función de conectividad local de X a un espacio topológico Y , es una función conexa.*

Teorema 2.19. *Sea X un espacio métrico hereditariamente arcoconexo. Entonces cada función de conectividad local de X a un espacio topológico Y , es una función de conectividad.*

Teorema 2.20. *Sea X una dendrita. Entonces cada función de conectividad local de X a un espacio topológico Y , es una función de conectividad.*

Capítulo 3

Composición y factor

En cursos de cálculo encontramos que la composición de dos funciones continuas, es una función continua. En general, si tenemos una clase de funciones, es natural estudiar si la composición de dos funciones en esta clase, está nuevamente en el mismo conjunto. Otra propiedad importante es determinar en que condiciones siempre que la composición de dos funciones está en una determinada clase, entonces alguna de las funciones está en la clase. Estas propiedades las definiremos formalmente y las llamaremos propiedad de composición y factor, respectivamente.

Este capítulo lo dividimos en dos grandes secciones donde estudiaremos la propiedad de composición y la propiedad del factor, para las clases de funciones que hemos venido estudiando.

3.1. Propiedad de composición

Abordamos cada clase de funciones en subsecciones. Mostramos ejemplos y condiciones para que la propiedad de composición sea satisfecha.

Definición 3.1. Sea \mathbb{M} una clase de funciones. Si para cada f y g en \mathbb{M} , tenemos que $g \circ f \in \mathbb{M}$, entonces diremos que la clase \mathbb{M} tiene *la propiedad de composición*.

Como mencionamos en la introducción, la clase de funciones continuas tiene la propiedad de composición. Otras clases conocidas muy bien con la propiedad de composición, son las funciones inyectivas y la clase de funciones sobreyectivas.

3.1.1. Funciones de conectividad

Como mostramos en el siguiente ejemplo, la clase de funciones de conectividad no tiene la propiedad de composición. El siguiente ejemplo fue tomado de [10].

Ejemplo 3.2. Existen funciones de conectividad f y g , tales que $g \circ f$ no es de conectividad.

Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función proyección definida por $f(x, y) = x$. Claramente la función f es continua y por tanto de conectividad. Sea $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida de la siguiente manera

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1+\operatorname{sen}(2\pi/x)}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

De la misma forma como demostramos que la función en el Ejemplo 2.6 es de conectividad, se demuestra que g también es una función de conectividad. Probemos que $g \circ f$ no es de conectividad. Consideremos el conjunto conexo $D = ([0, 1] \times \{0\}) \cup [\cup_{i=1}^{\infty} (\{1/i\} \times [0, 1])] \cup \{(0, 1)\}$ de $[0, 1] \times [0, 1]$. Note que el punto $(0, 1, 1)$ está en la gráfica de $g \circ f|_D$. Ahora, veamos que $([0, 1/3] \times [2/3, 1] \times [2/3, 1]) \cap \Gamma(g \circ f|_D) = \{(0, 1, 1)\}$. Supongamos que existe $(x, y, z) \neq (0, 1, 1)$, tal que $(x, y, z) \in ([0, 1/3] \times [2/3, 1] \times [2/3, 1]) \cap \Gamma(g \circ f|_D)$. Como los puntos de la forma $(0, k)$, con $0 < k < 1$, no están en D , tenemos que $x \neq 0$. Sea $0 < x \leq 1/3$. Como $y \in [2/3, 1]$, x es de la forma $1/n$ con $n \geq 3$. Ahora, $g(f(1/n, y)) = g(1/n) = 1/2$, pero eso es absurdo, porque el punto $(1/n, y, 1/2)$ no está en el conjunto $[0, 1/3] \times [2/3, 1] \times [2/3, 1]$. Así, $(0, 1, 1)$ es un punto aislado de $\Gamma(g \circ f|_D)$. Por lo tanto, $\Gamma(g \circ f|_D)$ no es un conjunto conexo. Por ende, podemos concluir que $g \circ f$ no es una función de conectividad.

Note que el ejemplo anterior muestra que la compuesta de dos funciones de conectividad, donde una de ellas es continua, no es de conectividad. Con el siguiente resultado vemos que si tomamos correctamente una función continua, entonces tendremos que la compuesta será de conectividad.

Teorema 3.3. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función de conectividad y $g : Y \rightarrow Z$ una función continua, entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es de conectividad.*

Demostración. Supongamos que $g \circ f$ no es de conectividad. Esto es, existe un conjunto conexo $D \subset X$, tal que $\Gamma(g \circ f|_D)$ no es conexo. Entonces, existen conjuntos abiertos U y V de $X \times Z$, tales que $U \cap V = \emptyset$ y $\Gamma(g \circ f|_D) = U \cup V$. Considerando los conjuntos abiertos U y V en términos de la base; escribimos $U = \cup_{(x,z) \in U} (U_x \times V_z)$ y $V = \cup_{(x',z') \in V} (U_{x'} \times V_{z'})$. Como g es continua, tenemos que los conjuntos $M = \cup_{(x,z) \in U} (U_x \times g^{-1}(V_z))$ y $N = \cup_{(x',z') \in V} (U_{x'} \times g^{-1}(V_{z'}))$ son conjuntos abiertos en $X \times Y$. Veamos que $\Gamma(f|_D) \subset M \cup N$. Sea $(x, f(x)) \in \Gamma(f|_D)$. Sabemos que $(x, g(f(x))) \in \Gamma(g \circ f|_D)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $(x, g(f(x))) \in U$. Así, existe $U_x \times V_z$, tal que $(x, g(f(x))) \in U_x \times V_z \subset U$. Pero esto implica que $(x, f(x)) \in U_x \times g^{-1}(V_z) \subset M$. Lo anterior implica que $\Gamma(f|_D) \subset M \cup N$. Además, $M \cap N = \emptyset$, porque $U \cap V = \emptyset$. Pero lo anterior contradice que f es de conectividad. Por lo tanto, $\Gamma(g \circ f|_D)$ es conexa para todo conexo $D \subset X$, esto es, $g \circ f$ es una función de conectividad. \square

Es natural preguntarnos si bajo alguna condición particular sobre los espacios la composición de funciones de conectividad siempre es una función de conectividad.

Pregunta 3.4. ¿Existe una familia de continuos \mathcal{L} , tal que la composición de dos funciones de conectividad definidas en \mathcal{L} , es de conectividad?

3.1.2. Funciones de conectividad local

Al igual que las funciones de conectividad, empezaremos con un ejemplo creado por nosotros donde mostramos que la composición de funciones de conectividad local no es de conectividad local.

Ejemplo 3.5. Existen funciones de conectividad local f y g , tales que $g \circ f$ no es de conectividad local.

Sea $f_1: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} \text{sen}(1/x) & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Sabemos que f_1 es de conectividad local por el Ejemplo 2.6. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [-1, 1]$ definida por $f(x) = (x, f_1(x))$. Probemos que f es de conectividad local. Sea $\varphi: \Gamma(f) \rightarrow \Gamma(f_1)$ definida por $\varphi(x, (x, f_1(x))) = (x, f_1(x))$. Es fácil probar que φ es un homeomorfismo. De esta observación se sigue que f es de conectividad local.

Sea $g: \overline{\Gamma(f_1)} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \overline{\Gamma(f_1)} \setminus \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}. \end{cases}$$

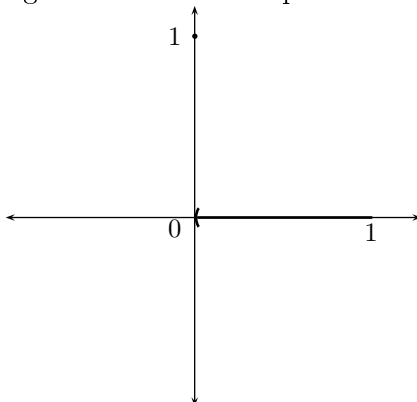
Veamos que g es de conectividad local. Sea $\mathcal{V} = \{U_1, U_2\}$ una cubierta abierta de $\overline{\Gamma(f_1)}$, donde $U_1 = [(-1/2, 3/2) \times (1/2, 3/2)] \cap \overline{\Gamma(f_1)}$ y $U_2 = [(-1/2, 3/2) \times (-3/2, 2/3)] \cap \overline{\Gamma(f_1)}$. Todo conexo C de U_1 o de U_2 es homeomorfo a un intervalo. Además C debe estar contenido en $\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ o $\overline{\Gamma(f_1)} \setminus \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$. De esta manera $g(C)$ es constante. Por lo tanto, $\Gamma(g|_C)$ es un conjunto conexo. Así, $g|_{U_1}$ y $g|_{U_2}$ son funciones de conectividad y g es una función de conectividad local. Es fácil ver que la gráfica de $g \circ f$ está dada como en la Figura 9.

Probemos que $g \circ f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ no es una función de conectividad local. Si consideramos cualquier abierto $U = [0, a) \subset [0, 1]$, tenemos fácilmente que

$$\Gamma(g \circ f|_U) = \{(0, 1)\} \cup [(0, a) \times \{0\}].$$

De lo que se sigue que $g \circ f$ no es una función de conectividad local.

Figura 9: Función composición.



El siguiente teorema nos muestra que al componer una función continua con una función de conectividad local, resulta una función de conectividad local, siempre y cuando la función de conectividad local actúe de primero.

Teorema 3.6. *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función de conectividad local y $g: Y \rightarrow Z$ una función continua, entonces $g \circ f: X \rightarrow Z$ es una función de conectividad local.*

Demostración. Supongamos que $g \circ f$ no es una función de conectividad local. Esto quiere decir que para toda cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X , existen $\alpha_0 \in \Lambda$ y un conexo $D \subset U_{\alpha_0}$, tal que $\Gamma(g \circ f|_D)$ no es un conjunto conexo. Entonces, existen conjuntos abiertos U y V de $X \times Z$, tales que $U \cap V = \emptyset$ y $\Gamma(g \circ f|_D) = U \cup V$. Considerando los conjuntos abiertos U y V como sigue: $U = \cup_{(x,z) \in U} (U_x \times V_z)$ y $V = \cup_{(x',z') \in V} (U_{x'} \times V_{z'})$. Como g es continua, tenemos que los conjuntos $M = \cup_{(x,z) \in U} (U_x \times g^{-1}(V_z))$ y $N = \cup_{(x',z') \in V} (U_{x'} \times g^{-1}(V_{z'}))$ son conjuntos abiertos en $X \times Y$. Note que, $N \cap M = \emptyset$ y $\Gamma(f|_D) \subset N \cup M$. Pero esto contradice que f es una función de conectividad local. Así, existe una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X , tal que $\Gamma(g \circ f|_D)$ es un conexo para todo conexo $D \subset U_\alpha$ y $g \circ f|_{U_\alpha}$ es una función de conectividad para todo $\alpha \in \Lambda$. Por ende, $g \circ f$ es una función de conectividad local. \square

Las funciones que usamos en el Ejemplo 3.5 están definidas entre continuos con propiedades particulares. De esta manera es importante plantear la siguiente pregunta:

Pregunta 3.7. ¿Existe una familia de continuos \mathcal{L} , tal que la composición de dos funciones de conectividad local definidas en \mathcal{L} , es de conectividad local?

3.1.3. Funciones conexas

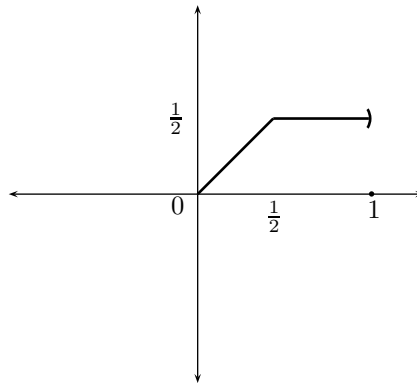
Como en los dos casos anteriores, empezaremos exhibiendo un ejemplo que muestra que la composición de dos funciones conexas, no necesariamente vuelve a ser una función conexas.

Ejemplo 3.8. Existen funciones conexas f y g , tales que $g \circ f$ no es una función conexa. Sea $f: [0, 1] \rightarrow S^1$ definida como $f(t) = e^{2\pi it}$. Claramente f es una función continua y por tanto conexa. Sea $g: S^1 \rightarrow [0, 1/2]$, definida por

$$g(e^{2\pi it}) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1/2; \\ 1/2 & \text{si } 1/2 \leq t < 1. \end{cases}$$

Aunque g no es continua en 0, es sencillo ver que g es una función conexa. La función $g \circ f: [0, 1] \rightarrow [0, 1/2]$ no es conexa, porque $(1, 0)$ es un punto aislado de $\Gamma(g \circ f)$ (ver Figura 10).

Figura 10: Gráfica de la función $g \circ f$.



El siguiente teorema muestra que la composición entre una función continua y una función conexa, es una función conexa, siempre y cuando la segunda función que actúa sea continua. El orden en que se toman las funciones en la composición es importante, porque como vimos en el ejemplo anterior, al componer una función continua con una función conexa, no necesariamente obtenemos una función conexa.

Teorema 3.9. Sean $f: X \rightarrow Y$ una función conexa y $g: Y \rightarrow Z$ una función continua, entonces $g \circ f: X \rightarrow Z$ es una función conexa.

Demostración. Supongamos que $g \circ f$ no es una función conexa. Entonces, existen conjuntos abiertos U y V de $X \times Z$, tales que $U \cap V = \emptyset$ y $\Gamma(g \circ f) = U \cup V$. Considerando los conjuntos abiertos U y V como sigue: $U = \cup_{(x,z) \in U} (U_x \times V_z)$ y $V = \cup_{(x',z') \in V} (U_{x'} \times V_{z'})$. Como g es continua, tenemos que los conjuntos $M = \cup_{(x,z) \in U} (U_x \times g^{-1}(V_z))$ y $N = \cup_{(x',z') \in V} (U_{x'} \times g^{-1}(V_{z'}))$ son conjuntos abiertos en $X \times Y$. Note que, $N \cap M = \emptyset$ y $\Gamma(f) \subset N \cup M$. Pero esto contradice que f es una función conexa. Por lo tanto, podemos concluir que $g \circ f$ es una función conexa. \square

Al igual que para las funciones de conectividad, no sabemos si podemos dar alguna condición específica a los espacios para que la composición de funciones conexas sea conexa.

Pregunta 3.10. ¿Existe una familia de continuos \mathcal{L} , tal que la composición de dos funciones conexas definidas en \mathcal{L} , es conexa?

En particular, podemos preguntarnos: ¿Si f y g son funciones conexas definidas entre arcos, entonces la composición $g \circ f$ es conexa?

3.1.4. Funciones de Darboux

Como veremos a continuación, las funciones de Darboux son la única clase, de las que abordamos en este trabajo, que satisface la propiedad de composición.

Teorema 3.11. Sean $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ dos funciones de Darboux, entonces $g \circ f: X \rightarrow Z$ es una función de Darboux.

Demostración. Sea C un conjunto conexo de X , $f(C)$ es un conjunto conexo de Y , porque f es una función de Darboux. Más aún, $g \circ f(C) = g(f(C))$ es un conjunto conexo de Z , porque g es una función de Darboux. De ello que, $g \circ f$ es una función de Darboux. \square

3.1.5. Funciones casicontinuas

En esta subsección, empezamos mostrando un ejemplo de dos funciones casicontinuas tales que la composición entre ellas no es una función casicontinua. Más adelante, veremos que la composición de una función casicontinua con una función continua, si es una función casicontinua.

Ejemplo 3.12. Existen funciones casicontinuas f y g , tales que $g \circ f$ no es una función casicontinua.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } x = 0; \\ (x, \text{sen}(1/x)) & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Veamos que f es una función casicontinua. Sea U un conjunto abierto, tal que $\Gamma(f) \subset U$. Como el punto $(0, 0, 0)$ está en la gráfica de f , existe $\delta > 0$, tal que $[(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta)] \subset U$. Sabemos que existe un valor $k \in (-\delta, \delta)$, tal que $\text{sen}(1/k) = 0$. Consideremos la siguiente función $F: [0, 1] \rightarrow \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } x = 0; \\ (x, 0) & \text{si } 0 < x < k; \\ (x, \text{sen}(1/x)) & \text{si } k \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Claramente F es una función continua. Además, $\Gamma(F) \subset U$. Por lo tanto, f es una función casicontinua. Sea $g: \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}} \rightarrow [0, 1]$, definida como

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{si } (x, y) \in \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}; \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}} \setminus \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}. \end{cases}$$

Probemos que g es una función casicontinua. Sea U un conjunto abierto, tal que $\Gamma(g) \subset U$. De manera similar a como argumentamos para definir F , existe $\delta > 0$, tal que $\{(x - \delta, x + \delta) \times (y - \delta, y + \delta) \times ((1 - |y|) - \delta, (1 - |y|) + \delta) : (x, y) \in \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}\} \subset U$. Sabemos que existe un valor $k \in (-\delta, \delta)$, tal que $\text{sen}(1/k) = 1$. Consideremos la siguiente función $G: \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$G(x, y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{si } (x, y) \in \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}; \\ 1 - |\text{sen}(1/x)| & \text{si } (x, y) \in \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq k\}}; \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \{(x, \text{sen}(1/x)) : k < x \leq 1\}. \end{cases}$$

La función G es una función continua, porque logramos solucionar los problemas de discontinuidad que tenía la función g , en los puntos de la forma $\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$. Además, $\Gamma(G) \subset U$. Por lo tanto, g es una función casicontinua. Finalmente, no es difícil ver que el punto $(0, 1)$ es un punto aislado de $\Gamma(g \circ f)$. Así, la función $g \circ f$ no es conexa. Por lo tanto, $g \circ f$ no es casicontinua por el Teorema 2.7.

Los siguientes dos teoremas muestran que la composición entre una función continua y una función casicontinua, siempre es casicontinua. Las demostraciones de los Teoremas 3.13 y 3.14 fueron tomadas de [19]

Teorema 3.13. *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función casicontinua y $g: Y \rightarrow Z$ una función continua, entonces $g \circ f: X \rightarrow Z$ es una función casicontinua.*

Demostración. Sea N un conjunto abierto de $X \times Z$, tal que $\Gamma(g \circ f) \subset N$. Sea $g_* : X \times Y \rightarrow X \times Z$ definida como $g_*(x, y) = (x, g(y))$. Tenemos que $g_*^{-1}(N)$ es un conjunto abierto de $X \times Y$ y $\Gamma(f) \subset g_*^{-1}(N)$. Como f es una función casicontinua, entonces existe una función continua $F: X \rightarrow Y$ de manera que, $\Gamma(F) \subset g_*^{-1}(N)$. Así, $g \circ F: X \rightarrow Z$ es una función continua y $\Gamma(g \circ F) \subset N$, de ello que, $g \circ f: X \rightarrow Z$ es una función casicontinua. \square

Teorema 3.14. *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función continua y $g: Y \rightarrow Z$ una función casicontinua, entonces $g \circ f: X \rightarrow Z$ es casicontinua.*

Demostración. Primero note que si Y es reemplazado por $f(X)$, entonces $f: X \rightarrow f(X)$ es continua; $g|_{f(X)} : f(X) \rightarrow Z$ es casicontinua por el Teorema 2.3. Así, podemos suponer que f es sobreyectiva. Sea N un conjunto abierto de $X \times Z$ tal que $\Gamma(g \circ f) \subset N$. Sea $f_* : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ definida por $f_*(x, z) = (f(x), z)$. Tenemos que $f_*(\Gamma(g \circ f)) = \Gamma(g)$. Ahora, para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un subconjunto compacto de X . Sean $x \in X$, N_x un conjunto abierto de X que contiene a x y M_x un conjunto abierto de Z que contiene a $(g \circ f)(x) = g(y)$, tal que $N_x \times M_x \subset N$. Como $f^{-1}(y)$ es compacto, entonces existen N_{x_1}, \dots, N_{x_k} que cubren a $f^{-1}(y)$. Sean M_{x_1}, \dots, M_{x_k} los respectivos abiertos de cada N_{x_i} . Sean $U_y = Y - f(X - \cup_{i=1}^k N_{x_i})$ y $W_y = U_y \times [\cap_{i=1}^k M_{x_i}]$. Tenemos que U_y es un conjunto abierto de Y que contiene a y ; así W_y es un subconjunto abierto de $Y \times Z$ que contiene a $(y, g(y))$. Note que $f_*^{-1}(W_y) \subset N$. Sea $W = \cup_{y \in Y} W_y$. Obtenemos que W es un subconjunto abierto de $Y \times Z$ y $\Gamma(g) \subset W$. Más aún, existe una función

continua $G : Y \rightarrow Z$ tal que $\Gamma(G) \subset W$. Tenemos que $G \circ f : X \rightarrow Z$ es continua. $f_*(\Gamma(G \circ f)) = \Gamma(G) \subset W$. Así, $\Gamma(G \circ f) \subset f_*^{-1}(W) \subset N$. De ello que, $g \circ f$ es casicontinua. \square

De la misma manera como terminamos varias secciones en este capítulo, nos preguntamos si bajo alguna condición particular sobre los espacios la composición de funciones casicontinuas siempre es una función casicontinua.

Pregunta 3.15. ¿Existe una familia de continuos \mathcal{L} , tal que la composición de dos funciones casicontinuas definidas en \mathcal{L} , es casicontinua?

3.2. Propiedad del factor

Al igual que hicimos en la sección anterior, desarrollaremos cada clase de funciones en subsecciones, de manera puntual y mostrando ejemplos donde sea necesario.

Definición 3.16. Sea \mathbb{M} una clase de funciones. Si siempre que f sea una función continua y $g \circ f \in \mathbb{M}$, tenemos que $g \in \mathbb{M}$, entonces diremos que la clase \mathbb{M} tiene *la propiedad de factor*.

No es difícil ver que la clase de funciones continuas y la clase de funciones sobreyectivas tienen la propiedad del factor. El orden en que abordamos las diferentes clases de funciones lo cambiamos con respecto a la sección anterior, solamente para facilitar la lectura de los ejemplos que presentamos.

3.2.1. Funciones conexas

A continuación, mostramos un teorema que muestra que la clase de funciones conexas tienen la propiedad del factor.

Teorema 3.17. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva y $g : Y \rightarrow Z$, tal que $g \circ f : X \rightarrow Z$ es una función conexa, entonces $g : Y \rightarrow Z$ es una función conexa.

Demostración. Considere la función continua $H : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ definida como $H((x, z)) = (f(x), z)$. Ahora, como H es continua y $\Gamma(g \circ f)$ es conexo, entonces $H(\Gamma(g \circ f)) = \Gamma(g)$ es conexo. Por lo tanto, $g : Y \rightarrow Z$ es una función conexa. \square

3.2.2. Funciones de Darboux

Empezamos esta subsección mostrando un ejemplo de una función continua f , tal que $g \circ f$ es una función de Darboux y g no es una función de Darboux. Así, la clase de las funciones de Darboux no tiene la propiedad del factor.

Ejemplo 3.18. Existen dos funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$, tales que f es continua y sobreyectiva, $g \circ f$ es Darboux, pero g no es Darboux.

Denotemos por \mathcal{C} el conjunto de Cantor. Los intervalos abiertos complementarios de \mathcal{C} , los referenciamos como sigue: $d_{1,1} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $d_{2,1} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $d_{2,2} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, ... Es conocido que los puntos en \mathcal{C} son los puntos en $[0, 1]$ cuya representación en base 3, se puede expresar solamente con 0's y 2's. Dado $x = 0.a_1a_2a_3\dots \in \mathcal{C}$ donde $a_i \in \{0, 2\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, definamos la función $c: \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ por $c(x) = [0.b_1b_2b_3\dots]_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}$, donde $b_i = \frac{a_i}{2}$. No es difícil ver, que la imagen bajo c de los puntos que son extremos de los intervalos $d_{p,k}$, son iguales. Es posible definir una función $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a partir de la función c . La función h será igual a c en los puntos que se encuentran en el conjunto de Cantor y para los puntos que se encuentran en un intervalo $d_{p,k}$ su imagen será la misma que la que tenían los puntos extremos de $d_{p,k}$. La función h es conocida como función de Cantor y es una función continua y creciente. Para ver más detalles acerca de la función de Cantor, consultar [6, pág. 137]. Note además que $h(\mathcal{C}) = [0, 1]$. Sea D el conjunto conformado por los puntos que son extremos de los intervalos complementarios de Cantor y definamos en D la relación dada por la función h , $x \sim y$ si y sólo si $h(x) = h(y)$. Ahora definamos una función continua f de la siguiente manera,

$$f(x) = \begin{cases} (h(x), 0) & \text{si } x \in \mathcal{C}; \\ (h(x), x - y) & \text{si } x \in (y, \frac{y+z}{2}], \text{ donde } y \sim z; \\ (h(x), z - x) & \text{si } x \in (\frac{y+z}{2}, z), \text{ donde } y \sim z. \end{cases}$$

Como h es continua entonces se puede ver fácilmente que f también lo es. Definamos una función $u: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in D; \\ 1 & \text{si } x \in \mathcal{C} \setminus D; \\ \text{sen}(\frac{1}{x-y}) & \text{si } x \in (y, \frac{y+z}{2}], \text{ donde } y \sim z; \\ \text{sen}(\frac{1}{z-x}) & \text{si } x \in (\frac{y+z}{2}, z), \text{ donde } y \sim z. \end{cases}$$

Ahora, veamos que si $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$, tenemos que $u(x_1) = u(x_2)$. Note que si x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera en $[0, 1]$, que cumplen con las condiciones anteriores, entonces solo pueden ocurrir dos casos:

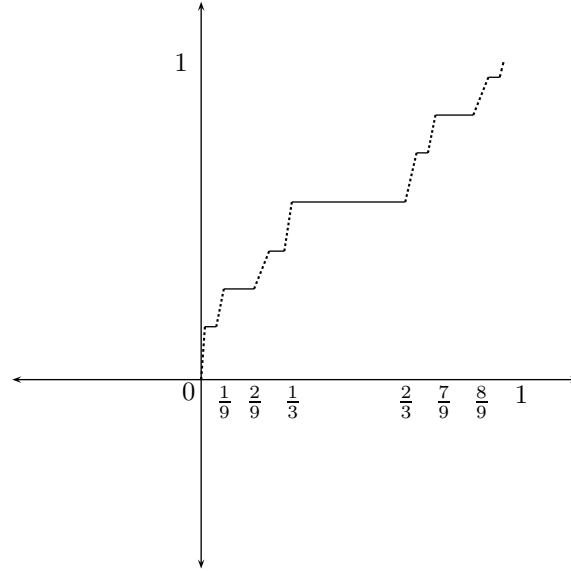
1. $x_1 \sim x_2$,
2. $x_1 \in (y, \frac{y+z}{2}]$ y $x_2 \in (\frac{y+z}{2}, z)$, donde $y \sim z$.

En el primer caso tenemos que $u(x_1) = 0 = u(x_2)$. En el segundo caso obtenemos que $u(x_1) = \text{sen}(\frac{1}{x_1-y}) = \text{sen}(\frac{1}{z-x_2}) = u(x_2)$, porque $f(x_1) = (h(x_1), x_1 - y) = f(x_2) = (h(x_2), z - x_2)$. Por lo tanto, podemos definir una función $g: f([0, 1]) \rightarrow [0, 1]$, tal que $g \circ f = u$. Probemos que g no es una función de Darboux. Consideremos el conjunto conexo $(h(\mathcal{C}), 0) = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \subset f([0, 1])$, tenemos que $g((h(\mathcal{C}), 0)) = \{0, 1\}$, de ello que, g no es una función de Darboux. Finalmente, veamos que $g \circ f$ es una función de Darboux. Para cualquier conexo B de $[0, 1]$ pueden ocurrir las siguientes tres posibilidades:

1. B está contenido en el interior de un intervalo $[x, y]$ donde $x \sim y$,
2. $B = [x, y]$ donde $x \sim y$,
3. B contiene algún punto extremo de los intervalos complementarios del conjunto de Cantor.

En el primer caso se tiene que $g(f(B))$ es conexo, porque $g(f(x))$ es continua en el interior de $[x, y]$. En el segundo y tercer caso se tiene que $g(f(B)) = [-1, 1]$. Por lo tanto, $g \circ f$ es una función de Darboux.

Figura 11: Gráfica de la función de Cantor.



Note que en el ejemplo anterior existía un conjunto conexo $D = \{(x, 0) : x \in [0, 1]\}$, tal que $f^{-1}(D) = C$, donde C es el conjunto de Cantor. Esto es, $f^{-1}(D)$ tenía una cantidad infinita (no numerable) de componentes. En el siguiente teorema probamos que si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua y sobreyectiva, tal que para todo conexo $D \subset X$, $f^{-1}(D)$ tiene un número finito de componentes y $g \circ f$ es una función de Darboux, entonces g es una función de Darboux.

Teorema 3.19. Sean $f: X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva y $g: Y \rightarrow Z$ tales que $g \circ f: X \rightarrow Z$ es una función de Darboux. Si para todo conexo C de Y , $f^{-1}(C)$ tiene un número finito de componentes, entonces g es una función de Darboux.

Demostración. Sea C un conjunto conexo de Y . Observe que si $f^{-1}(C)$ es conexo, tenemos que $(g \circ f)(f^{-1}(C)) = g(C)$ es conexo, porque $g \circ f$ es una función de Darboux, y la demostración quedaría completa. Luego $f^{-1}(C)$ es desconexo.

Supongamos que $f^{-1}(C)$ tiene exactamente dos componentes. Sean U_1 y U_2 las componentes de $f^{-1}(C)$. Sabemos que $f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2) = C$. Supongamos que $f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$. Como C es conexo, tenemos que $\overline{f(U_1)} \cap f(U_2) \neq \emptyset$ o $\overline{f(U_2)} \cap f(U_1) \neq \emptyset$. Consideremos primero el caso en que $\overline{f(U_1)} \cap f(U_2) \neq \emptyset$. Note que $\overline{f(U_1)} = f(\overline{U_1})$, porque f es una función continua definida entre continuos, es decir, f es una función cerrada. Tenemos que $C \cap [f(\overline{U_1}) \cap f(U_2)] \neq \emptyset$. Sea $z \in C \cap [f(\overline{U_1}) \cap f(U_2)]$. Como $f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$, existe $y \in \overline{U_1} \setminus U_1$, tal que $f(y) = z$. Tenemos que $U_1 \cup \{y\} \subset f^{-1}(C)$ es conexo, porque $U_1 \cup \{y\}$ está entre el conexo U_1 y su adherencia. Pero esto nos lleva a una contradicción porque U_1 es una componente de $f^{-1}(C)$. Por lo tanto, $f(U_1) \cap f(U_2) \neq \emptyset$. Por otra parte, $g(C) = g(f(U_1) \cup f(U_2)) = g(f(U_1)) \cup g(f(U_2))$ es un conjunto conexo de Z , porque al ser $g \circ f$ una función de Darboux, tenemos que $g(f(U_1))$ y $g(f(U_2))$ son conjuntos conexos, y $g(f(U_1)) \cap g(f(U_2)) \neq \emptyset$, porque $f(U_1) \cap f(U_2) \neq \emptyset$. En el caso en que $\overline{f(U_2)} \cap f(U_1) \neq \emptyset$, también podemos concluir que $g(C)$ es un conjunto conexo. Finalmente, supongamos que $f^{-1}(C)$ tiene n componentes U_1, U_2, \dots, U_n , para algún $n > 2$. Tenemos que $f(U_1 \cup \dots \cup U_n) = f(U_1) \cup \dots \cup f(U_n) = C$. Como C es conexo, tenemos que $\overline{f(U_1)} \cap [\cup_{j \neq 1} f(U_j)] \neq \emptyset$ o $f(U_1) \cap \overline{[\cup_{j \neq 1} f(U_j)]} \neq \emptyset$. Consideremos primero el caso en que $\overline{f(U_1)} \cap [\cup_{j \neq 1} f(U_j)] \neq \emptyset$. Tenemos que $f(\overline{U_1}) \cap f(U_j) \neq \emptyset$ para algún $j \neq 1$. Obtenemos que $f(U_1) \cap f(U_j) \neq \emptyset$ por los argumentos que usamos en el párrafo anterior. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $j = 2$. Por ahora sabemos que, $g(f(U_1)) \cup g(f(U_2))$ es un conjunto conexo. Ahora, $C = [f(U_1) \cup f(U_2)] \cup \dots \cup f(U_n)$, de ello que, $f(U_1 \cup U_2) \cap [\cup_{j \neq \{1,2\}} f(U_j)] \neq \emptyset$, o $f(U_1 \cup U_2) \cap \overline{[\cup_{j \neq \{1,2\}} f(U_j)]} \neq \emptyset$. Consideremos el caso en que $\overline{f(U_1 \cup U_2)} = [f(\overline{U_1}) \cup f(\overline{U_2})] \cap [\cup_{j \neq \{1,2\}} f(U_j)] \neq \emptyset$. Tenemos que $[f(\overline{U_1}) \cup f(\overline{U_2})] \cap f(U_j) \neq \emptyset$. Tenemos que $[f(U_1) \cup f(U_2)] \cap f(U_j) \neq \emptyset$ por lo hecho en el párrafo anterior. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $j = 3$. Así, $g(f(U_1 \cup U_2)) \cup g(f(U_3)) = g(f(U_1)) \cup g(f(U_2)) \cup g(f(U_3))$ es un conjunto conexo. Haciendo un proceso inductivo llegamos a que $g(C) = g(f(U_1)) \cup g(f(U_2)) \cup \dots \cup g(f(U_n))$ es un conjunto conexo. Por lo tanto, g es una función de Darboux. Ahora, consideremos el caso en que $f(U_1) \cap \overline{[\cup_{j \neq 1} f(U_j)]} \neq \emptyset$. Sabemos que $\overline{[\cup_{j \neq 1} f(U_j)]} = \cup_{j \neq 1} \overline{f(U_j)}$. Así, $f(U_1) \cap \cup_{j \neq 1} \overline{f(U_j)} \neq \emptyset$, esto es, $f(U_1) \cap \overline{f(U_j)} \neq \emptyset$ para algún $j \neq 1$. De nuevo, $f(U_1) \cap f(U_j) \neq \emptyset$ por lo hecho en el caso para $n = 2$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $j = 2$. Así, tenemos que $g(f(U_1)) \cup g(f(U_2))$ es un conjunto conexo. El resto de la prueba es similar a lo hecho anteriormente. Finalmente, podemos concluir que g es una función de Darboux. \square

Con los siguientes resultados mostramos algunas condiciones particulares para que tengamos la propiedad del factor en funciones de Darboux.

Definición 3.20. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua definida entre continuos. Decimos que f es una función empalmante si para todo continuo K de Y y para cualesquiera dos componentes C y D de $f^{-1}(K)$, tenemos que $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$.

Proposición 3.21. Sean $f: X \rightarrow Y$ una función empalmante sobreyectiva y $g: Y \rightarrow Z$ una función. Si $g \circ f: X \rightarrow Z$ es Darboux débil, entonces $g: Y \rightarrow Z$ es Darboux débil.

Demostración. Sea C un subcontinuo de Y . Escribamos $f^{-1}(C) = \cup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, donde cada U_α es una componente de $f^{-1}(C)$. Ahora, $f(\cup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha) = \cup_{\alpha \in \Lambda} f(U_\alpha) = C$. Como f es empalmante, tenemos que $f(U_\alpha) \cap f(U_\beta) \neq \emptyset$ para todo $\alpha \neq \beta$. Tomando un $\alpha_0 \in \Lambda$ fijo. Tenemos que $f(U_{\alpha_0}) \cap f(U_\alpha) \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Como $g \circ f$ es Darboux débil, $g(f(U_{\alpha_0}))$ y $g(f(U_\alpha))$ son conjuntos conexos para todo $\alpha \in \Lambda$. Por ende, $g(f(U_{\alpha_0})) \cup (\cup_{\alpha \neq \alpha_0} g(f(U_\alpha))) = g(C)$ es un conjunto conexo, por [6, Teorema 1.14, pág. 20]. Por lo tanto, g es una función Darboux débil. \square

Proposición 3.22. *Sea X una dendrita, si $f: X \rightarrow Y$ es una función Darboux débil, entonces f es una función de Darboux.*

Demostración. Sea C un conjunto conexo de X . Supongamos que $f(C) = A \cup B$, donde $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Sean p y q puntos en C , tales que $f(p) \in A$ y $f(q) \in B$. Sabemos que C es arcoconexo, por [16, Proposition 10.9, pág. 169], de ello, existe un arco $\overline{pq} \subset C$. Como f es Darboux débil, obtenemos que $f(\overline{pq})$ es conexo en Y . Pero esto es absurdo porque A y B son una separación de $f(C)$. Por lo tanto, f es una función de Darboux. \square

Corolario 3.23. *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función empalmante y sobreyectiva, donde Y es una dendrita, y $g \circ f: X \rightarrow Z$ una función de Darboux, entonces $g: Y \rightarrow Z$ es una función de Darboux.*

Demostración. Sabemos que $g \circ f$ es una función de Darboux, por ende, $g \circ f$ también es Darboux débil. Tenemos que g es una función Darboux débil por la Proposición 3.21. Ahora, como Y es una dendrita, tenemos que g es una función de Darboux por la Proposición 3.22. \square

Pregunta 3.24. *¿Si $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función continua sobreyectiva y $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función, tal que $g \circ f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función de Darboux, entonces g es una función de Darboux?*

3.2.3. Funciones de conectividad

La clase de funciones de conectividad no tiene la propiedad del factor.

Ejemplo 3.25. Existen funciones $f: X \rightarrow Y$ continua y $g: Y \rightarrow Z$, tales que $g \circ f$ es de conectividad y g no es de conectividad.

Sean f y g las funciones definidas en el Ejemplo 3.18. Veamos que la función $(g \circ f): X \rightarrow Z$ es de conectividad y la función $g: Y \rightarrow Z$ no es de conectividad.

Sea B un conjunto conexo de $[0, 1]$. Consideremos las siguientes tres posibilidades:

1. B está contenido en el interior de un intervalo $[x, y]$ donde $x \sim y$,
2. $B = [x, y]$ donde $x \sim y$,

3. B contiene algún punto extremo de los intervalos complementarios del conjunto de Cantor.

En el primer caso se tiene que $\Gamma(g \circ f|_B)$ es un conjunto conexo, porque $g(f(x))$ es continua en el interior de $[x, y]$. En el segundo caso se tiene que $\Gamma(g \circ f|_B) \cong \{(0, 0)\} \cup \{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x < 1\} \cup \{(1, 0)\}$, y en el tercer caso se tiene también que $\Gamma(g \circ f|_B) \cong \{(0, 0)\} \cup \{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x < 1\} \cup \{(1, 0)\}$. Por lo tanto, $g(f(x))$ es una función de conectividad. Sabemos que g no es una función de Darboux por lo mostrado en el Ejemplo 3.18. Así, g no es una función de conectividad, por la Proposición 2.4.

Al igual que en el Teorema 3.19 mostrabamos la importancia de que $f^{-1}(D)$ tuviera un número finito de componentes, para un conexo D , en el siguiente teorema usaremos hipótesis parecidas para obtener un resultado similar al logrado en el teorema anterior.

Teorema 3.26. *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva y $g: Y \rightarrow Z$ una función tales que $g \circ f: X \rightarrow Z$ es de conectividad. Si para todo conexo C , $f^{-1}(C)$ tiene un número finito de componentes, entonces $g: X \rightarrow Z$ es una función de conectividad.*

Demostración. Sea C un conjunto conexo de Y . Supongamos primero que $f^{-1}(C)$ es un conjunto conexo. Tenemos que $\Gamma(g \circ f|_{f^{-1}(C)})$ es conexo, porque $g \circ f$ es una función de conectividad. Consideremos la función continua $H: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ definida como $H((x, z)) = (f(x), z)$. Ahora, como H es continua y $\Gamma(g \circ f|_{f^{-1}(C)})$ es conexo, obtenemos que $H(\Gamma(g \circ f|_{f^{-1}(C)})) = \Gamma(g|_C)$ es conexo y g es de conectividad.

Supongamos ahora que $f^{-1}(C)$ tiene exactamente dos componentes U_1 y U_2 . Tenemos que $f^{-1}(C) = U_1 \cup U_2$, esto es, $C = f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$, de ello que, $\Gamma(g|_C) = \Gamma(g|_{f(U_1) \cup f(U_2)}) = \Gamma(g|_{f(U_1)}) \cup \Gamma(g|_{f(U_2)}) = H(\Gamma(g \circ f|_{U_1})) \cup H(\Gamma(g \circ f|_{U_2}))$. Como la función $g \circ f$ es una función de conectividad y H es una función continua, se tiene que $\Gamma(g|_{f(U_1)})$ y $\Gamma(g|_{f(U_2)})$ son conjuntos conexos. Por otra parte, $\Gamma(g|_{f(U_1)}) \cap \Gamma(g|_{f(U_2)}) \neq \emptyset$, por el argumento que usamos en la prueba del Teorema 3.19. Así, $\Gamma(g|_C) = \Gamma(g|_{f(U_1)}) \cup \Gamma(g|_{f(U_2)})$ es un conjunto conexo.

Finalmente, supongamos que $f^{-1}(C)$ tiene n componentes. Así, escribimos $f^{-1}(C) = U_1 \cup \dots \cup U_n$, donde cada U_i es una componente. Esto es, $C = f(\cup_{i=1}^n U_i) = \cup_{i=1}^n f(U_i)$, de ello que, $\Gamma(g|_C) = \Gamma(g|_{\cup_{i=1}^n f(U_i)}) = \cup_{i=1}^n H(\Gamma(g \circ f|_{U_i}))$. Como la función $g \circ f$ es una función de conectividad y H es una función continua, se tiene que cada uno de los conjuntos $\Gamma(g|_{f(U_1)}), \Gamma(g|_{f(U_2)}), \dots, \Gamma(g|_{f(U_n)})$ son conjuntos conexos. Finalmente, podemos concluir que $\cup_{i=1}^n \Gamma(g \circ f|_{U_i}) = \Gamma(g|_C)$ es un conjunto conexo, nuevamente usando la prueba del Teorema 3.19. Así, g es una función de conectividad. \square

Terminamos nuestro estudio de la propiedad del factor en las funciones de conectividad con un resultado que involucra las dendritas.

Teorema 3.27. *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva y $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función tales que $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es de conectividad. Si Y es una dendrita donde cada arco tiene un número finito de puntos de ramificación, entonces g es una función de conectividad.*

Demostración. Por hipótesis $g \circ f$ es una función de conectividad, de ello que, $g \circ f$ es una función conexa. Tenemos que g es una función conexa, por el Teorema 3.17. Así, g es una función de conectividad, por el Teorema 2.15. \square

En el teorema anterior es indispensable que cada arco de Y tenga un número finito de puntos de ramificación, porque en el Ejemplo 3.25 Y tenía un arco con una cantidad infinita de puntos de ramificación.

Pregunta 3.28. ¿Si en el teorema previo cambiamos a \mathbb{R} por cualquier continuo Z , el teorema anterior se sigue teniendo?

3.2.4. Funciones de conectividad local

El siguiente es un ejemplo que muestra que la clase de funciones de conectividad local, no tiene la propiedad del factor.

Ejemplo 3.29. Existen dos funciones f y g , tales que f es una función continua sobreyectiva, $g \circ f$ es una función de conectividad local y g no es una función de conectividad local.

Sean $X = \overline{\{(x, \operatorname{sen}(1/x)) : 0 < x < 1\}}$ y $Y = [0, 1]$. Definimos $f: X \rightarrow Y$ por $f(x, y) = x$. Claramente f es una función continua y sobreyectiva. Sea $g: Y \rightarrow Z$ definida como

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función g no es de conectividad local, porque al considerar cualquier cubierta abierta de $[0, 1]$, tendremos que cualquier conjunto abierto U que contenga al cero, contendrá un conexo no degenerado L tal que $0 \in L \subset U$ y $g(L) = \{0, 1\}$, donde claramente conduce a que $g|_U$ no es de conectividad. Por lo tanto, g no es una función de conectividad local. Veamos que $g \circ f$ es de conectividad local. Sea $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ una cubierta abierta de X , donde $U_1 = [(-1/2, 3/2) \times (1/2, 3/2)] \cap X$ y $U_2 = [(-1/2, 3/2) \times (-3/2, 3/4)] \cap X$. La función $g \circ f|_{U_1}$ es de conectividad, porque para cualquier conexo C de U_1 , se tendrá solo uno de los dos siguientes casos: $(g \circ f)(C) = \{0\}$ o $(g \circ f)(C) = \{1\}$. De ello que, $g \circ f|_{U_1}$ es de conectividad. De manera análoga se demuestra que $g \circ f|_{U_2}$ es de conectividad. Por lo tanto, $g \circ f$ es de conectividad local.

Note que en el anterior ejemplo $f^{-1}(C)$ tiene una cantidad finita de componentes, pero el continuo X no es hereditariamente arcoconexo. El siguiente teorema nos dice que condiciones deben tener las funciones $f: X \rightarrow Y$ y $g \circ f: X \rightarrow Z$, y el espacio X , para que la clase de funciones de conectividad local tenga la propiedad del factor.

Teorema 3.30. Sean $f: X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva y $g: Y \rightarrow Z$ una función tales que $g \circ f: X \rightarrow Z$ es de conectividad local, donde X es un continuo hereditariamente arcoconexo. Si para todo conexo C de Y , $f^{-1}(C)$ tiene un número finito de componentes, entonces g es una función de conectividad local.

Demostración. Por hipótesis $g \circ f$ es de conectividad local. Como X es un continuo hereditariamente arcoconexo, $g \circ f$ es una función de conectividad, por el Teorema 2.19. Sabemos que para todo conexo C de Y , $f^{-1}(C)$ tiene un número finito de componentes, de ello que, g es una función de conectividad, por el Teorema 3.26. Así, g es una función de conectividad local. \square

Como toda dendrita es hereditariamente arcoconexo, el siguiente corolario se sigue del Teorema 3.30.

Corolario 3.31. *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva y $g: Y \rightarrow Z$ una función tales que $g \circ f: X \rightarrow Z$ es de conectividad local, donde X es una dendrita. Si para todo conexo C de Y , $f^{-1}(C)$ tiene un número finito de componentes, entonces g es una función de conectividad local.*

El siguiente teorema nos dice condiciones suficientes sobre los espacios X , Y y Z , para que la clase de funciones de conectividad local tenga la propiedad del factor.

Teorema 3.32. *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva y $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función tales que $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es de conectividad local. Si X es un continuo de Peano o un continuo arcoconexo, y Y es una dendrita donde cada arco tiene un número finito de puntos de ramificación, entonces g es de conectividad local.*

Demostración. Por hipótesis $g \circ f$ es de conectividad local. Como X es un continuo de Peano o un continuo arcoconexo, tenemos que $g \circ f$ es una función conexa, por los Teoremas 2.17 y 2.18, respectivamente. Ahora, la función g es conexa, por el Teorema 3.17. Finalmente, como Y es una dendrita donde cada arco tiene un número finito de puntos de ramificación, obtenemos que g es una función de conectividad, por el Teorema 2.15. Por ende, g es una función de conectividad local. \square

Pregunta 3.33. *Sean $f: X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva y $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ una función tales que $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es de conectividad local. ¿Si X es un continuo de Peano o un continuo arcoconexo, entonces g es de conectividad local?.*

Capítulo 4

Funciones inducidas

Como mencionamos en la introducción, uno de los objetivos de esta tesis es: Dada una de las clases de funciones entre continuos definidas en el Capítulo 2, que denotamos por \mathbb{M} , estudiar las relaciones entre los siguientes tres enunciados:

1. $f \in \mathbb{M}$,
2. $C(f) \in \mathbb{M}$,
3. $2^f \in \mathbb{M}$.

En este capítulo, además de estudiar algunas propiedades generales de estas clases de funciones y funciones inducidas, desarrollamos ejemplos, implicaciones y proponemos preguntas que pueden ser usadas para desarrollar futuras investigaciones en teoría de continuos.

De la misma manera que decimos que dos espacios tienen una estructura topológica equivalente, y los llamamos homeomorfos, podemos dar una noción de equivalencia de funciones.

Definición 4.1. Sean $f: X \rightarrow Y$ y $g: X' \rightarrow Y'$ funciones entre espacios topológicos. Decimos que f y g son *funciones equivalentes*, si existen homeomorfismos $\varphi: X \rightarrow X'$ y $\phi: Y \rightarrow Y'$ tales que, $\phi \circ f = g \circ \varphi$.

El siguiente resultado lo usaremos con frecuencia en este capítulo.

Proposición 4.2. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Entonces, las funciones $2^f|_{F_1(X)}$, $C(f)|_{F_1(X)}$ y f son equivalentes.

Demostración. Como $2^f|_{F_1(X)} = C(f)|_{F_1(X)}$, es suficiente probar que $2^f|_{F_1(X)}$ y f son equivalentes. Para cada continuo X , definimos $\varphi_X: F_1(X) \rightarrow X$ por $\varphi_X(\{x\}) = x$. Es fácil ver que φ_X es un homeomorfismo. Sea $x \in X$. Note que $\varphi_Y(2^f|_{F_1(X)}(\{x\})) = \varphi_Y(\{f(x)\}) = f(x)$ y $f(\varphi_X(\{x\})) = f(x)$. Así, $\varphi_Y \circ 2^f|_{F_1(X)} = f \circ \varphi_X$ y las funciones $f: X \rightarrow Y$ y $2^f|_{F_1(X)}: F_1(X) \rightarrow F_1(Y)$ son equivalentes. \square

El siguiente lema nos será de ayuda para abordar los objetivos propuestos en este capítulo.

Lema 4.3. *Sean $f: X \rightarrow Y$ y $g: X' \rightarrow Y'$ funciones equivalentes definidas entre continuos. Entonces las siguientes afirmaciones se tienen:*

1. *Si f es una función de conectividad, entonces g es una función de conectividad.*
2. *Si f es una función de conectividad local, entonces g es una función de conectividad local.*
3. *Si f es una función de Darboux, entonces g es una función de Darboux.*
4. *Si f es una función casicontinua, entonces g es una función casicontinua.*

Demostración. Sean $\varphi: X \rightarrow X'$ y $\phi: Y \rightarrow Y'$ homeomorfismos, tales que $\phi \circ f = g \circ \varphi$. Sea $H: \Gamma(f) \rightarrow \Gamma(g)$ definida por $H((x, f(x)) = (\varphi(x), \phi(f(x))) = (\varphi(x), g(\varphi(x)))$. Como φ y ϕ son homeomorfismos, H es un homeomorfismo. Veamos independientemente la prueba de cada afirmación:

1. Sea C un conjunto conexo de X' . Como φ es un homeomorfismo, $\varphi^{-1}(C)$ es un conjunto conexo de X . Sabemos que f es una función de conectividad. Así, $\Gamma(f|_{\varphi^{-1}(C)})$ es un conjunto conexo. Como H es una función continua, tenemos que $H(\Gamma(f|_{\varphi^{-1}(C)})) = \Gamma(g|_C)$ es un conjunto conexo. Por lo tanto, g es una función de conectividad.

2. Sabemos que f es una función de conectividad local, esto es, existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, tal que $f|_{U_\alpha}$ es una función de conectividad para todo $\alpha \in \Lambda$. Consideremos la cubierta abierta $\{\varphi(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X' . Veamos que $g|_{\varphi(U_\alpha)}$ es una función de conectividad para todo $\alpha \in \Lambda$. Sea C un conjunto conexo de $\varphi(U_\alpha)$. Note que $\varphi^{-1}(C)$ es un conjunto conexo de U_α . Como $\Gamma(f|_{U_\alpha|_{\varphi^{-1}(C)}})$ es un conjunto conexo y H es una función continua, tenemos que, $H(\Gamma(f|_{U_\alpha|_{\varphi^{-1}(C)}})) = H(\Gamma(f|_{\varphi^{-1}(C)})) = \Gamma(g|_{\varphi(U_\alpha)|_C})$ es un conjunto conexo. Por lo tanto, g es una función de conectividad local.

3. Sea C un conjunto conexo de X' . Sabemos que $\varphi^{-1}(C)$ es un conjunto conexo de X . Como f es una función de Darboux, tenemos que, $f(\varphi^{-1}(C)) = \phi^{-1}(g(C))$ es un conjunto conexo de Y . Ahora, como ϕ es una función continua, $\phi(\phi^{-1}(g(C))) = g(C)$ es un conjunto conexo de Y' . De esto, g es una función de Darboux.

4. Sea U un conjunto abierto de $X' \times Y'$, tal que $\Gamma(g) \subset U$. Considerando a U en términos de la base; escribimos $U = \cup_{(x', y') \in U} (U_{x'} \times U_{y'})$. Consideremos el conjunto abierto $V = \cup_{(x', y') \in U} (\varphi^{-1}(U_{x'}) \times \phi^{-1}(U_{y'}))$ de $X \times Y$. Como $\Gamma(f)$ es homeomorfo a $\Gamma(g)$, $\Gamma(f) \subset V$. Sabemos que f es una función casicontinua, de esto, existe una función continua $G: X \rightarrow Y$, tal que $\Gamma(G) \subset V$. Ahora, la función $\phi \circ G \circ \varphi^{-1}: X' \rightarrow Y'$ es continua y además, $\Gamma(\phi \circ G \circ \varphi^{-1}) \subset U$. De lo que, podemos concluir que g es una función casicontinua. \square

4.1. Funciones de conectividad y conectividad local

En esta sección analizaremos las equivalencias que puedan o no existir, entre las funciones de conectividad y conectividad local, y sus respectivas funciones inducidas.

Proposición 4.4. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *Si $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$ es una función de conectividad, entonces $f: X \rightarrow Y$ es una función de conectividad.*
2. *Si $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$ es una función de conectividad local, entonces $f: X \rightarrow Y$ es una función de conectividad local.*

Demostración. Supongamos que 2^f es una función de conectividad. Así, $2^f|_{F_1(X)}$ es una función de conectividad, por el Comentario 2.2. Las funciones f y $2^f|_{F_1(X)}$ son funciones equivalentes, por la Proposición 4.2. De esto, f es una función de conectividad, por el Lema 4.3.

La demostración para la función de conectividad local es similar a la prueba hecha en el párrafo anterior. □

Como la Proposición 4.2 también involucra la función inducida $C(f)$, es claro que en la Proposición 4.4 podemos sustituir 2^f por $C(f)$ y la conclusión es la misma. Por otra parte, $C(f) = 2^f|_{C(X)}$. Así, si 2^f es una función de conectividad o de conectividad local, entonces $C(f)$ será de conectividad o de conectividad local, respectivamente, por el Comentario 2.2. Por ende, es inmediata la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 4.5. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Las siguientes afirmaciones se tienen:*

1. *Si $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función de conectividad, entonces $f: X \rightarrow Y$ es una función de conectividad.*
2. *Si $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función de conectividad local, entonces $f: X \rightarrow Y$ es una función de conectividad local.*
3. *Si $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$ es una función de conectividad, entonces $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función de conectividad.*
4. *Si $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$ es una función de conectividad local, entonces $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función de conectividad local.*

A continuación mostramos un ejemplo donde descartamos algunas implicaciones recíprocas que presentamos en las Proposiciones 4.4 y 4.5.

Ejemplo 4.6. Existe una función de conectividad y conectividad local $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que las funciones inducidas $C(f)$ y 2^f no son de conectividad ni de conectividad local.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(1/x) & \text{si } x \in (0, 1]; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Sabemos que f es una función de conectividad y de conectividad local, por el Ejemplo 2.6. Consideremos el arco $\mathcal{A} = \{[0, t] : 0 \leq t \leq 1\}$ de $C([0, 1])$. Es fácil ver que $C(f)(\mathcal{A}) = \{\{0\}, [-1, 1]\}$ y seguidamente, $C(f)(\mathcal{A})$ no es conexo. Por lo tanto, $C(f)$ no es una función de Darboux. Así, $C(f)$ no es una función de conectividad, por la Proposición 2.4. Observe que esto implica que la función 2^f no es de conectividad, por la Proposición 4.5. Por otra parte, note que $C(f)|_{\mathcal{A}}$ no es una función de conectividad y por tanto, $C(f)|_{\mathcal{A}}$ no es una función de conectividad local, por el Teorema 2.19. De este modo, $C(f)$ no es de conectividad local. Finalmente, 2^f no es una función de conectividad local, por la Proposición 4.5.

Pregunta 4.7. ¿Existe una función $f: X \rightarrow Y$ definida entre continuos tal que $C(f)$ sea de conectividad y 2^f no sea de conectividad?

La siguiente proposición nos da una respuesta parcial a la pregunta planteada anteriormente.

Proposición 4.8. *Sean X un continuo localmente conexo y $f: X \rightarrow Y$ una función definida entre continuos. Si $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función de conectividad, entonces f es una función continua.*

Demostración. Como $C(f)$ es una función de conectividad, $C(f)$ es una función de Darboux, por la Proposición 2.4. De esta manera, $C(f)$ es una función Darboux débil. Más aún, f es una función de conectividad, por la Proposición 4.5. De ello que, f es una función de Darboux, por la Proposición 2.4. Por ende, f es una función de Darboux débil. Pero esto nos lleva a que la función f es continua [7, Teorema 2, pág. 74]. \square

Como toda función continua es de conectividad, el siguiente corolario es consecuencia de la Proposición 4.8.

Corolario 4.9. *Sean X un continuo localmente conexo y $f: X \rightarrow Y$ una función definida entre continuos. Si $C(f)$ es una función de conectividad, entonces f y 2^f son de conectividad.*

Demostración. Sabemos que f es continua, por la Proposición 4.8. De esta forma, 2^f es una función continua, por la Proposición 1.31. Así, tanto f como 2^f son funciones de conectividad, por la Proposición 2.5. \square

Aún no sabemos si la Proposición 4.8 se tenga para la clase de funciones de conectividad local. Por ende, no tenemos respuestas parciales para la siguiente pregunta.

Pregunta 4.10. ¿Existe una función $f: X \rightarrow Y$ definida entre continuos tal que $C(f)$ sea de conectividad local y 2^f no sea de conectividad local?

4.2. Funciones conexas

En esta sección estudiaremos la pregunta planteada al principio del capítulo para la clase de funciones conexas. Además, incluimos algunos resultados relacionados con la función inducida definida entre productos simétricos $F_n(f)$. En particular, destacamos que demostraremos que si f es una función conexas, entonces 2^f también es una función conexas y presentaremos una función conexas f , tal que la función inducida $C(f)$ no es una función conexas.

Pensamos, que el siguiente resultado es un teorema conocido en teoría de continuos, sin embargo, no encontramos una prueba y por esta razón, presentamos una demostración sin hacer ninguna referencia.

Proposición 4.11. *Sea Z un espacio métrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Z es conexas;
2. $F_n(Z)$ es conexas, para todo $n \in \mathbb{N}$;
3. $F_n(Z)$ es conexas, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos primero que Z es conexas y probemos 2. Sabemos que Z^n es conexas para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varphi: Z^n \rightarrow F_n(Z)$, definida por $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Claramente φ es una función sobreyectiva. Veamos que φ es continua. Sean $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in Z^n$, y $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \dots, U_m \rangle$ un conjunto abierto cualquiera de $F_n(Z)$ que contiene a $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Sea $V_i = \bigcap \{U \in \{U_1, U_2, \dots, U_m\} : z_i \in U\}$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Considerando el conjunto abierto $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ de Z^n que contiene a (z_1, z_2, \dots, z_n) . Tenemos que, $\varphi(V) \subset \mathcal{U}$. Por lo tanto, φ es una función continua. Finalmente, como $F_n(Z) = \varphi(Z^n)$, podemos concluir que $F_n(Z)$ es conexas, para todo $n \in \mathbb{N}$. La Afirmación 2 implica 3 es inmediata. Finalmente, mostremos que 3 implica 1. Supongamos que Z no es conexas, es decir, $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos de Z diferentes del vacío tales que $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = \emptyset$. Consideremos los siguientes subconjuntos en $F_n(Z)$:

$$\mathcal{A} = \langle Z, A \rangle \cap F_n(Z) \text{ y } \mathcal{B} = \langle B \rangle \cap F_n(Z).$$

Es claro que $F_n(Z) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Sea $D \in \mathcal{B}$, es decir, $D \subset B$. Como $B \cap \overline{A} = \emptyset$, $D \subset Z \setminus \overline{A}$. Sea $\mathcal{U} = \langle Z \setminus \overline{A} \rangle \cap F_n(Z)$. Note que $D \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Así, $D \notin \overline{\mathcal{A}}$ y por tanto, $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. De manera similar podemos probar que $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$. Por lo tanto, $F_n(Z)$ no es conexas. \square

La siguiente proposición nos muestra una relación interesante entre el n -ésimo producto simétrico de la gráfica de una función f y la gráfica de la función inducida $F_n(f)$.

Proposición 4.12. Sean $f: X \rightarrow Y$ una función definida entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Definamos $\varphi: F_n(\Gamma(f)) \rightarrow \Gamma(F_n(f))$ por:

$$\varphi(\{(a_1, f(a_1)), \dots, (a_k, f(a_k))\}) = (\{a_1, \dots, a_k\}, \{f(a_1), \dots, f(a_k)\}),$$

para $a_1, a_2, \dots, a_k \in X$, donde $k \leq n$. Entonces φ es una función sobreyectiva y continua.

Demostración. Claramente φ es una función bien definida y sobreyectiva. Veamos que φ es continua. Sean $\{(a_1, f(a_1)), \dots, (a_k, f(a_k))\}$ un punto de $F_n(\Gamma(f))$ y $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ un abierto de $\Gamma(F_n(f))$, tales que $\varphi(\{(a_1, f(a_1)), \dots, (a_k, f(a_k))\}) = (\{a_1, \dots, a_k\}, \{f(a_1), \dots, f(a_k)\}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Entonces, existen U_1, U_2, \dots, U_n y V_1, V_2, \dots, V_m abiertos de X y Y , respectivamente, tales que $\{a_1, \dots, a_k\} \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$ y $\{f(a_1), \dots, f(a_k)\} \in \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle \subset \mathcal{V}$. Sean $W_i = \bigcap \{U \in \{U_1, U_2, \dots, U_n\} : a_i \in U\}$ y $N_i = \bigcap \{V \in \{V_1, V_2, \dots, V_m\} : f(a_i) \in V\}$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Considerando el conjunto abierto $\mathcal{W} = \langle W_1 \times N_1, W_2 \times N_2, \dots, W_k \times N_k \rangle$ de $F_n(\Gamma(f))$. Observe que por definición, $\{(a_1, f(a_1)), \dots, (a_k, f(a_k))\} \in \mathcal{W}$. Además, es sencillo verificar que $\varphi(\mathcal{W}) \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \times \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle \subset \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ y por tanto, φ es continua. \square

A continuación damos una relación entre la conexidad de las funciones f y $F_n(f)$ para cualquier entero positivo n .

Teorema 4.13. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función definida entre continuos. Si f es una función conexa, entonces $F_n(f)$ es conexa, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La función f es conexa, es decir, $\Gamma(f)$ es un conjunto conexo. El conjunto $F_n(\Gamma(f))$ es conexo, por la Proposición 4.11. Así, $\Gamma(F_n(f))$ es conexa para todo $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 4.12. De ello que, $F_n(f)$ es una función conexa para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Además, dados dos enteros positivos diferentes n y m , podemos relacionar las funciones inducidas $F_n(f)$ y $F_m(f)$.

Teorema 4.14. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función definida entre continuos. Si $F_n(f)$ es una función conexa, entonces $F_k(f)$ es una función conexa, para todo $k \geq n$.

Demostración. Veamos que $F_{n+1}(f)$ es una función conexa. Para cada $a \in X$, consideremos el siguiente subconjunto de $\Gamma(F_{n+1}(f))$,

$$\mathcal{C}_a = \{(\{a, x_1, \dots, x_n\}, \{f(a), f(x_1), \dots, f(x_n)\}) \mid x_1, \dots, x_n \in X\}.$$

Sea $\varphi: \Gamma(F_n(f)) \rightarrow \mathcal{C}_a$, definida por,

$$\varphi(\{x_1, \dots, x_n\}, \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}) = (\{a, x_1, \dots, x_n\}, \{f(a), f(x_1), \dots, f(x_n)\}).$$

Claramente φ es una función sobreyectiva. Probemos que φ es una función continua. Sean $(\{x_1, \dots, x_n\}, \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}) \in \Gamma(F_n(f))$ y $\mathcal{W} = \langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle \times \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle$ un conjunto abierto de \mathcal{C}_a tal que $\varphi(\{x_1, \dots, x_n\}, \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}) \in \mathcal{W}$.

$(\{a, x_1, \dots, x_n\}, \{f(a), f(x_1), \dots, f(x_n)\}) \in \mathcal{W}$. Esto quiere decir claramente que $\{a, x_1, \dots, x_n\} \in \langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle$ y $\{f(a), f(x_1), \dots, f(x_n)\} \in \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle$. Sean $W_i = \bigcap \{U \in \{U_1, U_2, \dots, U_k\} : x_i \in U\}$ y $N_i = \bigcap \{V \in \{V_1, V_2, \dots, V_m\} : f(x_i) \in V\}$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $\mathcal{M} = \langle W_1, W_2, \dots, W_n \rangle \times \langle N_1, N_2, \dots, N_n \rangle$. No es difícil verificar que $(\{x_1, \dots, x_n\}, \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}) \in \mathcal{M}$ y $\varphi(\mathcal{M}) \subset \langle U_1, U_2, \dots, U_k \rangle \times \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle = \mathcal{W}$. Por lo tanto, φ es una función continua. Finalmente, podemos concluir que \mathcal{C}_a es un conjunto conexo, para cada $a \in X$. Ahora, $\Gamma(F_{n+1}) = \bigcup_{a \in X} \mathcal{C}_a$ y $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b \neq \emptyset$, para cualesquiera $a \neq b$ elementos de X . De ello que, $\Gamma(F_{n+1})$ es un conjunto conexo. Así, $F_{n+1}(f)$ es una función conexa. Usando un razonamiento inductivo concluimos que $F_k(f)$ es conexa, para cualquier $k \geq n$. \square

Es importante resaltar que como la restricción de una función conexa no es necesariamente conexa, no podemos afirmar que si $F_n(f)$ es conexa, entonces f es conexa o $F_{n-1}(f)$ sea conexa. De hecho, no hemos podido determinar estas afirmaciones.

Pregunta 4.15. ¿Existe una función $f: X \rightarrow Y$ entre continuos tal que $F_n(f)$ sea conexa, para alguna n , y f no sea conexa?

Pregunta 4.16. ¿Existen una función $f: X \rightarrow Y$ entre continuos y $m < n$, tales que $F_n(f)$ sea conexa y $F_m(f)$ no sea conexa?

Destaquemos que una respuesta negativa a la Pregunta 4.15, nos genera inmediatamente la equivalencia entre la conexidad de las funciones f y $F_n(f)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. El siguiente teorema es el resultado más importante de esta sección.

Teorema 4.17. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función definida entre continuos. Si f es conexa, entonces 2^f es conexa.*

Demostración. Sabemos que f es una función conexa. Esto es, el conjunto $\Gamma(f)$ es conexo. Por ende, la función $F_n(f)$ es conexa para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 4.13. De este modo, $\Gamma(F_n(f))$ es un conjunto conexo para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\Gamma(F_n(f)) \subset \Gamma(F_{n+1}(f))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f))$ es un conjunto conexo. Veamos que $\Gamma(2^f) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f))}$. Sean $(A, f(A)) \in \Gamma(2^f)$ y $\mathcal{W} = \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle \times \langle V_1, V_2, \dots, V_m \rangle$ un abierto cualquiera de $2^X \times 2^Y$ que contiene a $(A, f(A))$. Seleccionamos puntos $f(a_i) \in f(A) \cap V_i$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, y $\widehat{a}_i \in A \cap U_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Así,

$$(\{\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n, a_1, \dots, a_m\}, \{f(\widehat{a}_1), \dots, f(\widehat{a}_n), f(a_1), \dots, f(a_m)\}) \in \mathcal{W} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f)).$$

Por lo tanto, $\Gamma(2^f) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f))}$. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f)) \subset \Gamma(2^f) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f))}$. Entonces $\Gamma(2^f)$ es un conjunto conexo. De esta forma, 2^f es una función conexa. \square

Con el siguiente ejemplo mostramos respuesta negativa a algunas de las implicaciones que nos propusimos estudiar en esta sección.

Ejemplo 4.18. Existe una función conexa f tal que 2^f es conexa y $C(f)$ no es conexa.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función de Césaro-Vietoris definida en la Sección 1.3 del Capítulo 1. La función f es casicontinua por [2, Teorema, pág. 186]. Por ende, f es una función conexa, por el Teorema 2.7. Además, la función 2^f es conexa, por el Teorema 4.17.

Demostremos que $C(f): C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ no es conexa. Consideremos los conjuntos $\mathcal{A} = \{([a, b], [0, 1]) \in \Gamma(C(f)) : 0 \leq a < b \leq 1\}$ y $\mathcal{B} = \{(\{x\}, \{f(x)\}) : x \in [0, 1]\}$. Claramente $\Gamma(C(f)) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ y $(\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}}) = \emptyset$. Por lo tanto, $\Gamma(C(f))$ no es un conjunto conexo. Así, $C(f)$ no es una función conexa.

Las siguientes preguntas complementan lo que hemos desarrollado y todas las implicaciones que podemos estudiar relacionadas con las funciones conexas y sus funciones inducidas.

Pregunta 4.19. ¿Existe una función $f: X \rightarrow Y$ definida entre continuos tal que $C(f)$ sea conexa y f no sea conexa?

Pregunta 4.20. ¿Existe una función $f: X \rightarrow Y$ definida entre continuos tal que $C(f)$ sea conexa y 2^f no sea conexa?

Pregunta 4.21. ¿Existe una función $f: X \rightarrow Y$ definida entre continuos tal que 2^f sea conexa y f no sea conexa?

Terminamos esta sección con dos proposiciones muy particulares donde mostramos casos en los cuales la función inducida $C(f)$ no es de conexidad.

Proposición 4.22. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función Darboux débil y no conexa. Si existen A y B subconjuntos no vacíos de $X \times Y$, tales que:*

1. $\Gamma(f) = A \cup B$;
2. $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$;
3. $\pi_1(A)$ o $\pi_1(B)$ no tienen componentes no degeneradas.

Entonces $C(f)$ no es conexa.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\pi_1(A)$ no tiene componentes no degeneradas. Consideremos los siguientes conjuntos no vacíos

$$\mathcal{A} = \{(C, \overline{f(C)}) : C \in C(X) \cap \pi_1(A)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \Gamma(C(f)) \setminus \mathcal{A}.$$

Claramente $\Gamma(C(f)) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Probemos que $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$. Sea $(C, \overline{f(C)}) = (\{x\}, \{f(x)\}) \in \mathcal{A}$. Como $\overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{A} = \emptyset$, existen abiertos U y V , de X y Y , respectivamente, tales que $(x, f(x)) \in U \times V$ y $(U \times V) \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Tomando el conjunto abierto $\langle U \rangle \times \langle V \rangle$ de $C(X) \times C(Y)$, tenemos que $(\{x\}, \{f(x)\}) \in \langle U \rangle \times \langle V \rangle$ y $(\{y\}, \{f(y)\}) \notin \langle U \rangle \times \langle V \rangle$ para todo $(y, f(y)) \in \mathcal{B}$. Así, podemos concluir que $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$.

Veamos que $\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{A}} = \emptyset$. Para todo $(C, \overline{f(C)}) \in \mathcal{B}$, pueden ocurrir dos casos: C es un subcontinuo degenerado de $\pi_1(B)$ o C es un continuo no degenerado de $\pi_1(B)$.

Consideremos primero el caso en que C es degenerado. Sea $(\{y\}, \{f(y)\}) \in \mathcal{B}$. Como $\overline{A} \cap B = \emptyset$, entonces haciendo un procedimiento similar al usado anteriormente, podemos decir que $(\{y\}, \{f(y)\}) \notin \overline{\mathcal{A}}$. Ahora, sea C un subcontinuo no degenerado de $\pi_1(B)$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\text{diám}(C) = \delta$. Así, considerando el abierto $B_H(C, \delta/3) \times B_H(f(C), \delta/3)$ de $C(X) \times C(Y)$, es claro que $(C, \overline{f(C)}) \in B_H(C, \delta/3) \times B_H(f(C), \delta/3)$. Ahora, supongamos que $[B_H(C, \delta/3) \times B_H(f(C), \delta/3)] \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Sea $(\{x\}, \{f(x)\}) \in [B_H(C, \delta/3) \times B_H(f(C), \delta/3)] \cap \mathcal{A}$, tenemos que, $d(x, y) < \delta/3$ para todo $y \in C$. Sean y_1 y y_2 puntos cualesquiera de C , $d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x) + d(x, y_2) < 2\delta/3$, pero esto es absurdo porque $\text{diám}(C) = \delta$. Así, $[B_H(C, \delta/3) \times B_H(f(C), \delta/3)] \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Por lo tanto, podemos concluir que $C(f)$ no es una función conexa. \square

Proposición 4.23. *Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función Darboux débil y no conexa. Si existen conjuntos no vacíos A y B de $X \times Y$, tales que:*

1. $\Gamma(f) = A \cup B$;
2. $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$;
3. $\pi_1(A)$ o $\pi_1(B)$ tienen una cantidad finita de componentes no degeneradas.

Entonces $C(f)$ no es una función conexa.

Demostración. Supongamos que $\pi_1(A)$ tiene una cantidad finita de componentes no degeneradas. Denotemos las componentes de $\pi_1(A)$ por A_1, A_2, \dots, A_n . Veamos que cada componente es un intervalo cerrado en $[0, 1]$. Supongamos que alguna componente no degenerada es de la forma $(a, b]$, para algunos a y b en $[0, 1]$. Entonces $(a, f(a)) \in B$. Como $B \cap \overline{A} = \emptyset$, entonces existe $\delta > 0$, tal que $[B(a, \delta) \times B(f(a), \delta)] \cap A = \emptyset$. Así, si consideramos el subcontinuo $K = [a, a + \delta/2]$, tenemos que $f(K)$ no es un conjunto conexo, pero esto es absurdo porque f es una función Darboux débil. Así, las componentes de $\pi_1(A)$ son intervalos cerrados.

Ahora, tomemos dos componentes $A_1 = [a_1, b_1]$ y $A_2 = [a_2, b_2]$ de $\pi_1(A)$. Supongamos que $b_1 < a_2$. Como $(b_1, f(b_1)) \in A$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$, tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $[B(b_1, \epsilon) \times B(f(b_1), \epsilon)] \cap B = \emptyset$. Además, como f es Darboux débil, existe al menos un $x \in (b_1, b_1 + \epsilon/2) \cap \pi_1(A)$. Luego, como en el intervalo (b_1, a_2) no hay componentes no degeneradas de $\pi_1(A)$, entonces existen puntos $y_1 < x < y_2$, tales que $(y_1, f(y_1))$ y $(y_2, f(y_2))$ están en B . Consideremos los siguientes conjuntos no vacíos:

$$\mathcal{A} = \{(C, \overline{f(C)}) : C \in C([0, 1]) \cap \pi_1(A) \cap (y_1, y_2)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \Gamma(C(f)) \setminus \mathcal{A}.$$

Claramente $\Gamma(C(f)) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Veamos que $\overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Sea $(\{x\}, \{f(x)\}) \in \mathcal{A}$. Como $\overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{A} = \emptyset$ y $x \in (y_1, y_2)$, existen abiertos U y V , de $[0, 1]$, tales que $(x, f(x)) \in U \times V$ y $(U \times V) \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Tomando el conjunto abierto $\langle U \rangle \times \langle V \rangle$ de $C(X) \times C(Y)$, tenemos que $(\{x\}, \{f(x)\}) \in \langle U \rangle \times \langle V \rangle$ y $(\{y\}, \{f(y)\}) \notin \langle U \rangle \times \langle V \rangle$ para todo $(y, f(y)) \in \mathcal{B}$, y $(\{z\}, \{f(z)\}) \notin \langle U \rangle \times \langle V \rangle$ para todo $z \in \pi_1(A) \setminus (y_1, y_2)$. Así, podemos concluir que $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$. Mostremos que $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Si $(C, \overline{f(C)}) \in \mathcal{B}$, donde $C \subset \pi_1(B)$, entonces al igual que hicimos en la prueba anterior, podemos encontrar un abierto de $(C, \overline{f(C)})$ que

no intercepta al conjunto \mathcal{A} . Ahora, si $(\{x\}, \{f(x)\}) \in \mathcal{B}$, donde $x \in \pi_1(A)$. Entonces $x \notin (y_1, y_2)$, Así, podemos encontrar un conjunto abierto $U \times V$ de $[0, 1] \times [0, 1]$, tal que $(x, f(x))$ pertenece a $U \times V$, y $(y, f(y)) \notin U \times V$ para todo $(\{y\}, \{f(y)\}) \in \mathcal{A}$. Así, $\langle U \rangle \times \langle V \rangle$ es un conjunto abierto de $C([0, 1]) \times C([0, 1])$, que contiene al punto $(\{x\}, \{f(x)\})$, tal que $(\{y\}, \{f(y)\}) \notin \langle U \rangle \times \langle V \rangle$. Si $(C, \overline{f(C)}) \in \mathcal{B}$, donde $C \subset \pi_1(A) \setminus F_1([0, 1])$ y cuyo diámetro es δ . Entonces, considerando el abierto $B_H(C, \delta/3) \times B_H(\overline{f(C)}, \delta/3)$ de $C(X) \times C(Y)$, es claro que $(C, \overline{f(C)}) \in B_H(C, \delta/3) \times B_H(\overline{f(C)}, \delta/3)$. Tenemos que $(\{x\}, \{f(x)\} \notin B_H(C, \delta/3) \times B_H(\overline{f(C)}, \delta/3)$ para todo $(\{x\}, \{f(x)\}) \in \mathcal{A}$. Finalmente, podemos concluir que $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Por lo tanto, $C(f)$ no es una función conexa. \square

La respuesta a la siguiente pregunta nos ayudaría a dar una solución completa al problema para las funciones conexas por lo menos, para funciones definidas del intervalo $[0, 1]$ en si mismo.

Pregunta 4.24. ¿Si $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ no es conexa, entonces existe una separación de su gráfica $\Gamma(f) = A \cup B$ tal que exista un intervalo no degenerado $[a, b]$ donde el conjunto $[a, b] \cap \pi_1(A)$ no tenga componentes no degeneradas?

4.3. Funciones de Darboux

Ser función de Darboux, es una propiedad hereditaria, es decir, si $f: X \rightarrow Y$ es de Darboux y Z es un subespacio de X , entonces $f|_Z: Z \rightarrow f(Z)$ es nuevamente una función de Darboux, como mostramos en el Capítulo 2. Esta propiedad, junto con el Lema 4.3, generan una demostración sencilla del siguiente resultado, como lo hicimos en las Proposiciones 4.4 y 4.5. Por esa razón, su prueba será omitida.

Proposición 4.25. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Las siguientes afirmaciones se tienen:*

1. *Si $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$ es una función de Darboux, entonces $f: X \rightarrow Y$ es una función de Darboux.*
2. *Si $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$ es una función de Darboux, entonces $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función de Darboux.*
3. *Si $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función de Darboux, entonces $f: X \rightarrow Y$ es una función de Darboux.*

La función usada en el Ejemplo 4.6, es una función de conectividad. Por ende, f es una función de Darboux, por la Proposición 2.4. Más aún, en el Ejemplo 4.6 se probó que $C(f)$ no es una función de Darboux. Así, 2^f no es una función de Darboux por la Proposición 4.25.

Pregunta 4.26. ¿Existe una función $f: X \rightarrow Y$ definida entre continuos tal que $C(f)$ sea Darboux y 2^f no sea Darboux?

De la Proposición 4.8, se sigue que si X es un continuo localmente conexo y $f: X \rightarrow Y$ es tal que $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función de Darboux, entonces 2^f es de Darboux. Con lo anterior tenemos una respuesta afirmativa a la Pregunta 4.26 cuando el dominio es un continuo localmente conexo.

4.4. Funciones casicontinuas

En esta sección veremos que todas las implicaciones que puedan, o no puedan presentarse entre las funciones f , $C(f)$ y 2^f quedarán completamente resueltas cuando tomamos la clase de funciones casicontinuas.

Proposición 4.27. *Si $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$ es una función casicontinua, entonces $f: X \rightarrow Y$ es una función casicontinua.*

Demostración. Como 2^f es una función casicontinua, tenemos que la restricción $2^f|_{F_1(X)}$ es una función casicontinua, por el Teorema 2.3. Además, como lo hemos usado continuamente en este capítulo, las funciones f y 2^f son equivalentes, por la Proposición 4.2. De esta manera, obtenemos que f es una función casicontinua, por el Lema 4.3. \square

El mismo argumento que usamos en las demostraciones de las Proposiciones 4.4 y 4.5, se puede implementar en la prueba del siguiente resultado.

Proposición 4.28. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre continuos. Los siguientes enunciados son verdaderos:*

1. *Si $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$ es una función casicontinua, entonces $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función casicontinua.*
2. *Si $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ es una función casicontinua, entonces $f: X \rightarrow Y$ es una función casicontinua.*

Con los siguientes ejemplos descartamos cualquier implicación recíproca que pueda ser considerada.

Ejemplo 4.29. Existe una función casicontinua f , tal que la función inducida $C(f)$ no es casicontinua.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función de Césaró-Vietoris definida en la Sección 1.3 del Capítulo 1. La función f es una función casicontinua, por [2, Teorema, pág. 186]. Además, $C(f)$ no es una función conexa, por el Ejemplo 4.18, y seguidamente, $C(f)$ no es una función casicontinua, por el Teorema 2.7.

Ejemplo 4.30. Existe una función casicontinua f tal que $C(f)$ es casicontinua y 2^f no es casicontinua.

Sea H el abánico armónico definido por

$$H = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2 \text{ y } \text{Arg}(z) \in \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\}\}.$$

Existe una función continua y sobreyectiva $g: X \rightarrow H$, donde X es un continuo no localmente conexo, ver [1]. Sea $h: H \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \geq 1 \text{ y } \text{Arg}(z) = 0; \\ ||z| - 1| & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Finalmente, sea $f = h \circ g: X \rightarrow [0, 1]$. Las funciones f y $C(f)$ son casicontinuas, por [7, Teorema 3]. Supongamos que 2^f es casicontinua. Entonces f y 2^f son funciones Darboux débil, por [7, Lema 1, pág. 70]. Así, la función f es continua por [7, Teorema 1, pág. 72]. Pero esto es absurdo porque f no es una función continua por lo mostrado en [7, Teorema 3, pág. 74]. Por lo tanto, $2^f: 2^X \rightarrow 2^{[0,1]}$ no es una función casicontinua.

Bibliografía

- [1] Bellamy D. P., “Continuous mappings between continua”, *in: Topology Conference.*, (1979), 101-111.
- [2] Brown Jack B., “Almost continuity of the Cesaro-Vietoris function”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 49 (1975), 185-188.
- [3] Dugundji J., *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1966.
- [4] Engelking R., *Outline of general topology*, North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1968.
- [5] Garrett B. D., “When almost continuity implies connectivity”, *Topology Proc.*, 13 (1988), 203-210.
- [6] Hocking J. G. and Young G.S., *Topology*, Adisson-Wesley, Reading, MA, 1961.
- [7] Illanes Alejandro., “Induced almost continuous functions on Hyperspaces”, *Colloquium Mathematicum.*, Vol 105 (2006), 69-76.
- [8] Illanes A. y S. B. Jr. Nadler, *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, New York, 1999.
- [9] Jordan F., “Connectivity and almost continuous images of I^m ”, *Topology and its Appl.*, 153 (2006), 1759-1774.
- [10] Kellum K. R., and H. Rosen, “Compositions of continuous functions and connected functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 115 (1992), 145-149.
- [11] Kuratowski K., *Topology*, Vol II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.
- [12] Macías S., *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman, Hall-CRC, Taylor, Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005
- [13] Munkres J. R., *Topology*, 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall 2000.
- [14] Nadler S. B. Jr., “Continua on which all real-valued connected functions are connectivity functions”, *Topology Proc.*, 28 (2004), 229-239.

- [15] Nadler S. B. Jr., "Local connectivity functions on arcwise connected spaces and certain continua", *Topology Appl.*, 153 (2006), 1279-1290.
- [16] Nadler S. B. Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York 1992.
- [17] Nadler S. B. Jr., *Hyperspaces of sets, A text with research questions*, Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textsbooks, vol. 49, Marcel Dekker, Inc. New York, 1978.
- [18] C. W. Patty, *Foundations of Topology*, 2nd ed. Jones and Bartlett Publishers, Sudbury Massachusetts, 2009.
- [19] Stallings J., "Fixed point theorems for connectivity maps", *Fund. Math.*, 47, (1959), 249-263.
- [20] Willard S., *General Topology*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1998.