

## Apéndice A. Desarrollo en Matlab del modelo matemático

Se parte de las dos ecuaciones que describen la dinámica del péndulo invertido lineal:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + m * l * \ddot{\theta} * \cos(\theta) - m * l * \dot{\theta}^2 * \sin(\theta) = K_t * \frac{u(t) - K_e * \dot{x}}{R}$$

$$(I + m * l^2)\ddot{\theta} + m * g * l * \sin(\theta) = -m * l * \ddot{x} * \cos(\theta)$$

Donde sus parámetros están dados por:

$M$  = Masa del carro

$I$  = Inercia del pendulo

$m$  = Masa del pendulo

$g$  = Gravedad

$l$  = Longitud del pendulo

$b$  = Fricción viscosa del carro

$K_t$  = Constante de par motor

$K_e$  = Constante de fuerza electromotriz

$R$  = Resistencia electrica del motor

$u$  = Entrada PWM o accion de control

```
syms theta_dot theta_ddot theta x x_dot x_ddot m g l u M b I kt ke R
```

```
eq1 = ((M+m)*x_ddot)+(b*x_dot)+(m*l*theta_ddot*cos(theta))-  
(m*l*(theta_dot)^2*sin(theta))==kt*(u-ke*x_dot)/R
```

eq1 =

$$-l m \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + b \dot{x} + \ddot{x} (M + m) + l m \ddot{\theta} \cos(\theta) = \frac{kt (u - ke \dot{x})}{R}$$

```
eq2 = ((I+m*l^2)*theta_ddot)+(m*g*l*sin(theta))==-m*l*x_ddot*cos(theta)
```

eq2 =  $\ddot{\theta} (m l^2 + I) + g l m \sin(\theta) = -l m \ddot{x} \cos(\theta)$

Solucionando las ecuaciones en términos de los estados:

```
[x1,x2] = solve([eq1,eq2],[x_ddot,theta_ddot]);
x1 = simplify(x1)
```

x1 =

$$\frac{I k t u + k t l^2 m u - I R b \dot{x} - I k e k t \dot{x} + R l^3 m^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - R b l^2 m \dot{x} - k e k t l^2 m \dot{x} + \frac{R g l^2 m^2 \sin(2\theta)}{2} + I R l m \dot{\theta}^2 \sin(\theta)}{R (-l^2 m^2 \cos(\theta)^2 + l^2 m^2 + M l^2 m + I m + I M)}$$

```
x2 = simplify(x2)
```

x2 =

$$\frac{l m (R l m \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + k t u \cos(\theta) + M R g \sin(\theta) - R b \dot{x} \cos(\theta) + R g m \sin(\theta) - k e k t \dot{x} \cos(\theta))}{R (-l^2 m^2 \cos(\theta)^2 + l^2 m^2 + M l^2 m + I m + I M)}$$

```
x3 = x_dot
```

x3 =  $\dot{x}$

```
x4 = theta_dot
```

x4 =  $\dot{\theta}$

El Sistema es linealizado por el método Jacobiano y se sustituyo los valores de los estados para el punto de linealización:

$$\text{Asym} = \text{jacobian}([x1, x2, x3, x4], [x\_dot, \theta\_dot, x, \theta])$$

$$\text{Asym} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-1 R b + 1 k e k t + R b l^2 m + k e k t l^2 m}{R \sigma_1} & \frac{2 R \dot{\theta} \sin(\theta) l^3 m^2 + 2 l R \dot{\theta} \sin(\theta) l m}{R \sigma_1} & 0 & \frac{R \cos(\theta) l^3 m^2 \dot{\theta}^2 + R g \cos(2 \theta) l^2 m^2 + 1 R \cos(\theta) l m \dot{\theta}^2 - \frac{2 l^2 m^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{R \sigma_1^2} \left( 1 k t u + k t l^2 m u - 1 R b \dot{x} - 1 k e k t \dot{x} + R l^3 m^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - R b l^2 m \dot{x} - k e k t l^2 m \dot{x} + \frac{R g l^2 m^2 \sin(2 \theta)}{2} + 1 R l m \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \right)}{R \sigma_1^2} \\ \frac{l m (k e k t \cos(\theta) + R b \cos(\theta))}{R \sigma_1} & \frac{-2 l^2 m^2 \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sigma_1} & 0 & \frac{2 l^3 m^3 \cos(\theta) \sin(\theta) (R l m \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + k t u \cos(\theta) + M R g \sin(\theta) - R b \dot{x} \cos(\theta) + R g m \sin(\theta) - k e k t \dot{x} \cos(\theta))}{R \sigma_1^2} - \frac{l m (M R g \cos(\theta) - k t u \sin(\theta) + R g m \cos(\theta) + R b \dot{x} \sin(\theta) + k e k t \dot{x} \sin(\theta) + R l m \dot{\theta}^2 \cos(\theta)^2 - R l m \dot{\theta}^2 \sin(\theta)^2)}{R \sigma_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = -l^2 m^2 \cos(\theta)^2 + l^2 m^2 + M l^2 m + l m + l M$$

$$\text{Bsym} = \text{jacobian}([x1, x2, x3, x4], u)$$

$$\text{Bsym} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{k t m l^2 + l k t}{\sigma_1} \\ \frac{k t l m \cos(\theta)}{\sigma_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = R (-l^2 m^2 \cos(\theta)^2 + l^2 m^2 + M l^2 m + l m + l M)$$

Asym = subs(Asym,[theta,theta\_dot,x,x\_dot],[pi,0,0,0])

Asym =

$$\begin{pmatrix} -\frac{I R b + I k e k t + R b l^2 m + k e k t l^2 m}{R \sigma_1} & 0 & 0 & \frac{g l^2 m^2}{\sigma_1} \\ -\frac{l m (R b + k e k t)}{R \sigma_1} & 0 & 0 & \frac{l m (M R g + R g m)}{R \sigma_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = M m l^2 + I m + I M$$

Bsym = subs(Bsym,[theta,theta\_dot,x,x\_dot],[pi,0,0,0])

Bsym =

$$\begin{pmatrix} \frac{k t m l^2 + I k t}{R (M m l^2 + I m + I M)} \\ \frac{k t l m}{R (M m l^2 + I m + I M)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los parámetros físicos del modelo fueron remplazados:

Asym =

subs(Asym,[M,m,g,l,b,I,kt,ke,R],[0.2187,0.1449,9.81,0.2295,0.3582,0.0054,14.59,1.891  
1,6.7])

Asym =

$$\begin{pmatrix} -\frac{579024369359683}{36056330253630} & 0 & 0 & \frac{1785767339727}{597949092100} \\ -\frac{16417122118600}{400625891707} & 0 & 0 & \frac{195252981840}{5979490921} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bsym =

subs(Bsym,[M,m,g,l,b,I,kt,ke,R],[0.2187,0.1449,9.81,0.2295,0.3582,0.0054,14.59,1.891  
1,6.7])

Bsym =

$$\begin{pmatrix} 28168252073000 \\ 3605633025363 \\ 7986566000000 \\ 400625891707 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Espacio de estado definido para el estado 3 (posición del carro) :

```
A3 = double(Asym)
```

A3 = 4x4

```
-16.0589      0      0      2.9865
-40.9787      0      0     32.6538
  1.0000      0      0      0
      0     1.0000      0      0
```

```
B3 = double(Bsym)
```

B3 = 4x1

```
 7.8123
19.9352
  0
  0
```

```
C3= [0,0,1,0]
```

C3 = 1x4

```
0      0      1      0
```

```
D3 = 0
```

D3 = 0

función de transferencia del modelo en tiempo continuo:

```
sys3 = ss(A3,B3,C3,D3)
```

sys3 =

A =

	x1	x2	x3	x4
x1	-16.06	0	0	2.986
x2	-40.98	0	0	32.65
x3	1	0	0	0
x4	0	1	0	0

B =

	u1
x1	7.812
x2	19.94
x3	0
x4	0

C =

	x1	x2	x3	x4
y1	0	0	1	0

D =

	u1
y1	0

Continuous-time state-space model.

Model Properties

```
tfsys3 = tf(sys3)
```

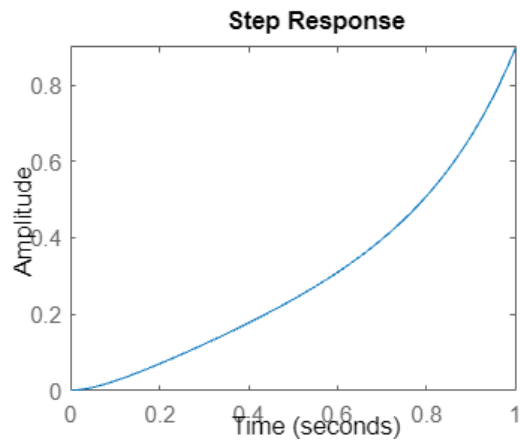
tfsys3 =

$$\frac{7.812 s^2 - 6.939e-15 s - 195.6}{s^4 + 16.06 s^3 - 32.65 s^2 - 402 s}$$

Continuous-time transfer function.

Model Properties

```
step(tfsys3,1)
```



Discretización de las ecuaciones en el espacio de estado en tiempo continuo:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

```
[G3,H3]=c2d(A3,B3,0.01)
```

G3 = 4x4

0.8516	0.0001	0	0.0276
-0.3788	1.0016	0	0.3209
0.0092	0.0000	1.0000	0.0001
-0.0019	0.0100	0	1.0016

H3 = 4x1

0.0722
0.1843

0.0004  
0.0009

Función de transferencia del modelo en tiempo discreto:

```
sysd3 = ss(G3,H3,C3,D3,0.01)
```

sysd3 =

A =

	x1	x2	x3	x4
x1	0.8516	0.0001417	0	0.02761
x2	-0.3788	1.002	0	0.3209
x3	0.009238	4.785e-07	1	0.0001417
x4	-0.001944	0.01001	0	1.002

B =

	u1
x1	0.07218
x2	0.1843
x3	0.0003705
x4	0.0009457

C =

	x1	x2	x3	x4
y1	0	0	1	0

D =

	u1
y1	0

Sample time: 0.01 seconds

Discrete-time state-space model.

Model Properties

```
tfsysd3 = tf(sysd3)
```

tfsysd3 =

$$0.0003705 z^3 - 0.0003908 z^2 - 0.0003328 z + 0.0003512$$

-----

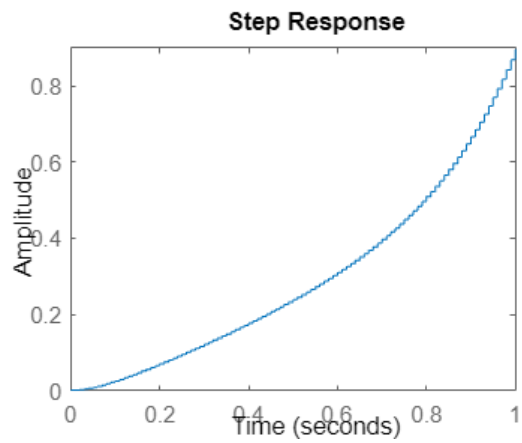
$$z^4 - 3.855 z^3 + 5.561 z^2 - 3.558 z + 0.8516$$

Sample time: 0.01 seconds

Discrete-time transfer function.

Model Properties

```
step(tfsysd3,1)
```



Espacio de estado esta defino para el estado 4 (Angulo del péndulo):

```
A4 = double(Asym)
```

```
A4 = 4x4
```

```
-16.0589      0      0      2.9865
-40.9787      0      0      32.6538
  1.0000      0      0      0
      0      1.0000      0      0
```

```
B4 = double(Bsym)
```

```
B4 = 4x1
```

```
 7.8123
19.9352
  0
  0
```

```
C4= [0,0,0,1]
```

```
C4 = 1x4
```

```
 0      0      0      1
```

```
D4 = 0
```

```
D4 = 0
```

Función de transferencia modelo en tiempo continuo:

```
sys4 = ss(A4,B4,C4,D4)
```

```
sys4 =
```

```
A =
```

	x1	x2	x3	x4
x1	-16.06	0	0	2.986
x2	-40.98	0	0	32.65
x3	1	0	0	0
x4	0	1	0	0

```

B =
      u1
x1  7.812
x2  19.94
x3   0
x4   0

```

```

C =
      x1  x2  x3  x4
y1  0   0   0   1

```

```

D =
      u1
y1  0

```

Continuous-time state-space model.

```
tfsys4 = tf(sys4)
```

```
tfsys4 =
```

```

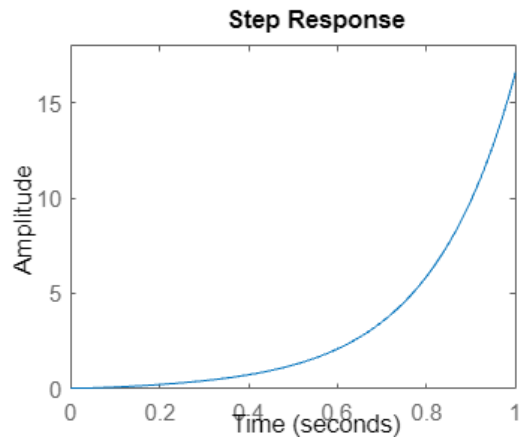
      19.94 s + 7.403e-14
-----
s^3 + 16.06 s^2 - 32.65 s - 402

```

Continuous-time transfer function.

Model Properties

```
step(tfsys4,1)
```



Discretización de las ecuaciones en el espacio de estado en tiempo continuo:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)$$

```
[G4,H4]=c2d(A4,B4,0.01)
```

G4 = 4x4

0.8516	0.0001	0	0.0276
-0.3788	1.0016	0	0.3209
0.0092	0.0000	1.0000	0.0001
-0.0019	0.0100	0	1.0016

H4 = 4x1

0.0722
0.1843
0.0004
0.0009

Función de transferencia del modelo en tiempo discreto:

```
sysd4 = ss(G4,H4,C4,D4,0.01)
```

sysd4 =

A =

	x1	x2	x3	x4
x1	0.8516	0.0001417	0	0.02761
x2	-0.3788	1.002	0	0.3209
x3	0.009238	4.785e-07	1	0.0001417
x4	-0.001944	0.01001	0	1.002

B =

	u1
x1	0.07218
x2	0.1843
x3	0.0003705
x4	0.0009457

C =

	x1	x2	x3	x4
y1	0	0	0	1

D =

	u1
y1	0

```
tfsysd4 = tf(sysd4)
```

```
tfsysd4 =
```

```
0.0009457 z^2 - 4.929e-05 z - 0.0008964
```

```
-----
```

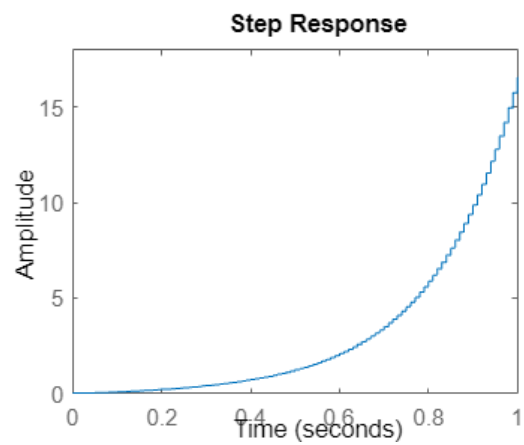
```
z^3 - 2.855 z^2 + 2.706 z - 0.8516
```

```
Sample time: 0.01 seconds
```

```
Discrete-time transfer function.
```

```
Model Properties
```

```
step(tfsysd4,1)
```



## Apéndice B: Modelo de caja gris para sintonización de parámetros

A continuación de muestran los modelos

**función del modelo:** Representa la dinámica del péndulo

```
function [dx,y] = funcion(t, x, u, Mc, m, b1, I, Ke, Kt, varargin)

l =0.2295; % longitud
rp =0.02; % radio polea
g =9.81; % gravedad
R =6.7; % resistencia armadura

dx = [-(l*m*(R*l*m*cos(x(3))*sin(x(3)))*x(1)^2 - Ke*Kt*x(2)*cos(x(3)) +
Mc*R*g*sin(x(3)) - R*b1*x(2)*cos(x(3)) + Kt*rp*u(1)*cos(x(3)) +
R*g*m*sin(x(3)))/(R*(I*m + I*Mc + l^2*m^2 - l^2*m^2*cos(x(3))^2 + Mc*l^2*m));
(I*Kt*rp*u(1) - I*R*b1*x(2) - I*Ke*Kt*x(2) + R*l^3*m^2*x(1)^2*sin(x(3)) -
Ke*Kt*l^2*m*x(2) - R*b1*l^2*m*x(2) + Kt*l^2*m*rp*u(1) + (R*g*l^2*m^2*sin(2*x(3)))/2
+ I*R*l*m*x(1)^2*sin(x(3)))/(R*(I*m + I*Mc + l^2*m^2 - l^2*m^2*cos(x(3))^2 +
Mc*l^2*m));
x(1);
x(2);
];

% l =0.37; % longitud
% rp =0.02; % radio polea
% g =9.81; % gravedad
% R =4.8; % resistencia armadura

y = [ 57.2958*(x(3)+pi);
1000* x(4)
];
```

## Identificación de parámetros: Por medio de iteraciones entre datos reales de movimiento

y la función modelo, sintoniza los parámetros físicos del sistema

```
%clear
%clc
%% Carga de datos
z = iddata( y, U, 0.01, 'Name', 'Datos experimentales');
z.InputName = 'Voltaje';
z.InputUnit = 'V';
z.OutputName = {'Desplazamiento', 'Posicion Angular'};
z.OutputUnit = {'m', 'rad'};
z.Tstart = 0;
z.TimeUnit = 's';

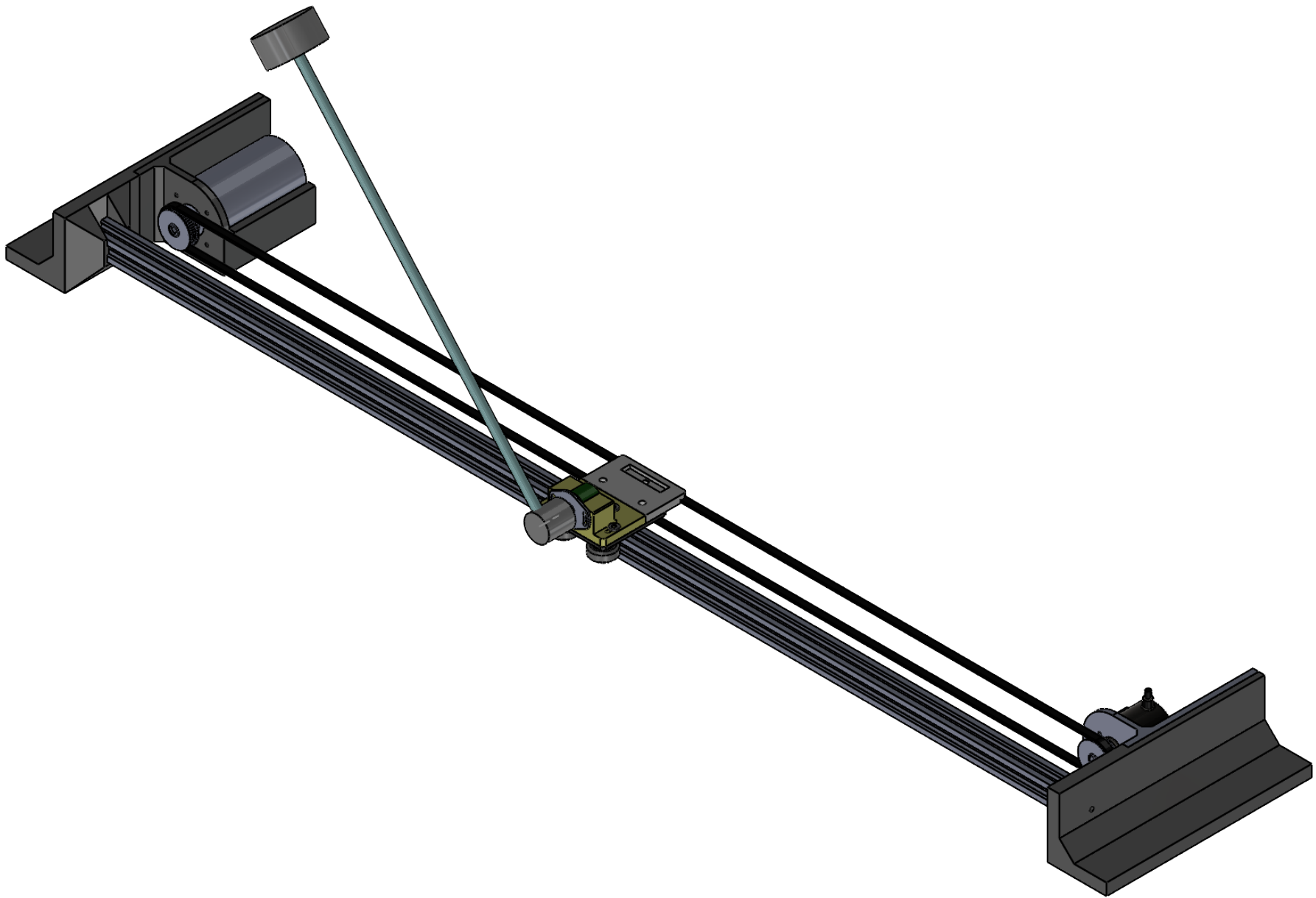
figure('Name', [z.Name ': dx -> lineal velocity output']);
plot(z(:, 1, 1)); % (Voltage -> Posicion angular).
figure('Name', [z.Name ': dt -> Angular velocity output']);
plot(z(:, 2, 1)); % (Voltage -> Velocidad angular).


%% Carga de la funcion
FileName      = 'funcion';    % Descripcion de la estructura del modelo.
Order         = [2 1 4];
Parameters    = [0.2187; 0.1449; 0.3582; 0.0054; 1.8911; 14.59]; % ParametrosOrder
InitialStates = [0; 0; 0; 0];    % Estado inicial
Ts           = 0.01; % Tiempo-Sistema continuo.
nlgr = idnlgrey(FileName, Order, Parameters, InitialStates, Ts, ...
                'Name', 'Modelo matematico');
compare(z, nlgr);

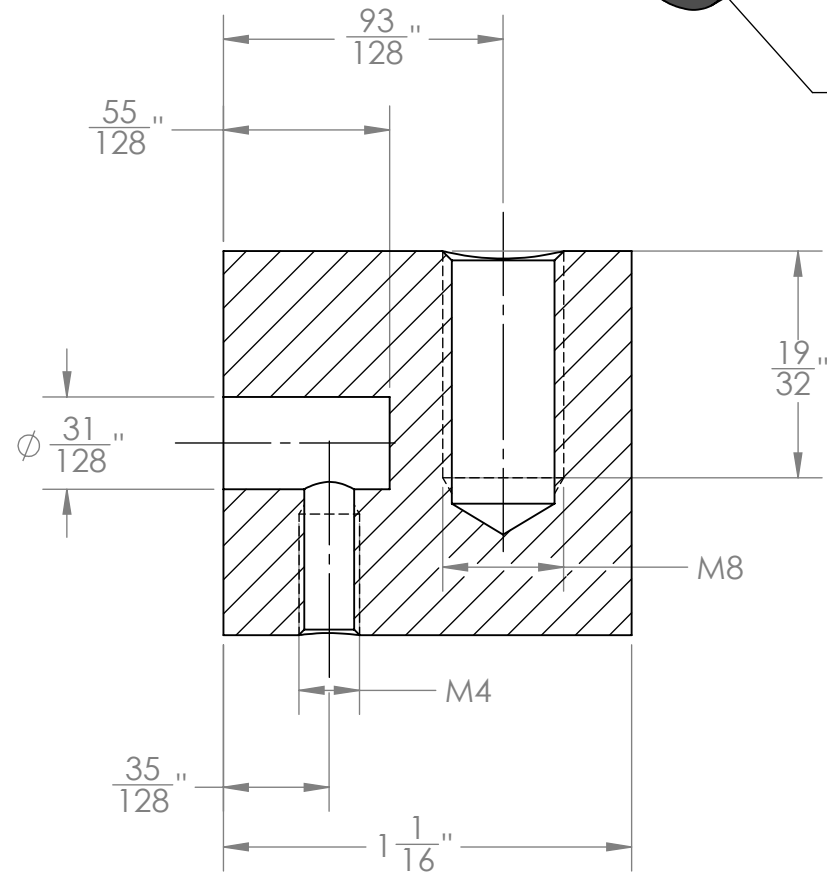
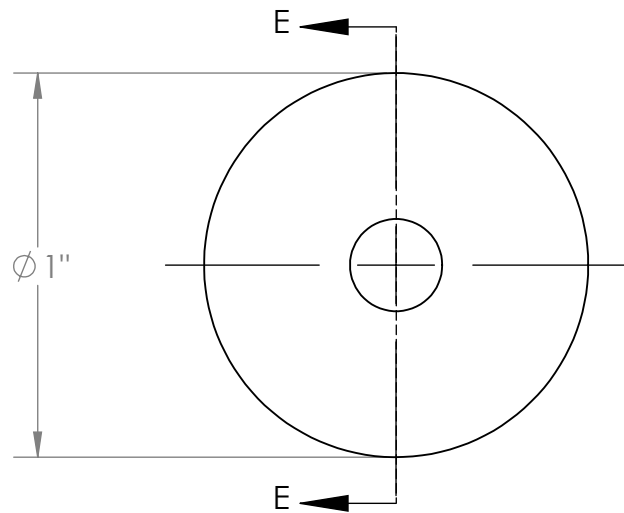
%% Estimacion
nlgr = setinit(nlgr, 'Fixed', {true true true true}); % Estimación de los estados
iniciales.
opt = nlgreyestOptions('Display', 'on');
opt.SearchOptions.MaxIterations =100;
nlgr = nlgreyest(z, nlgr, opt);

compare(z, nlgr);
```

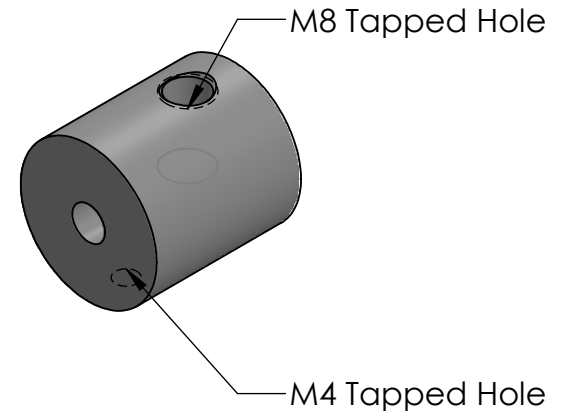
## **Apéndice C: Planos de piezas para mecanizado del Péndulo invertido**

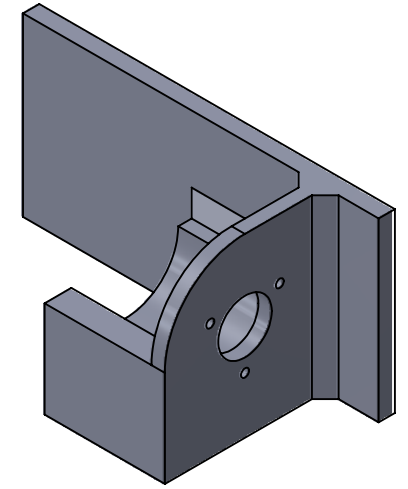
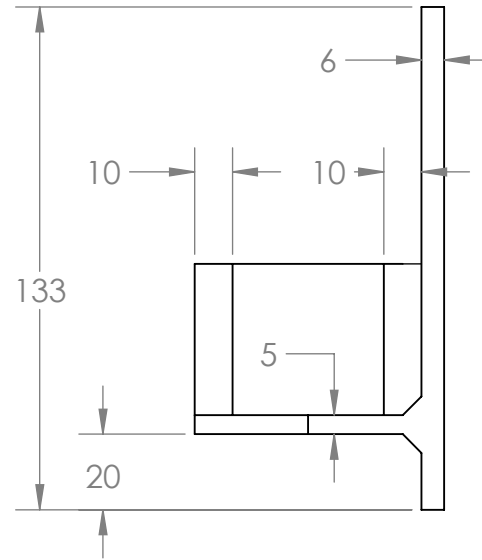


ESCUELA DE INGENIERIA MECÁNICA			Péndulo Invertido Lineal		PIEZA N.	MATERIAL:
ESCALA: 1.4	MEDIDAS EN: mm	FECHA: 20/03/2023	DIBIJADO POR: CARLOS D. ALBARRACIN		HOJA:	PL.:

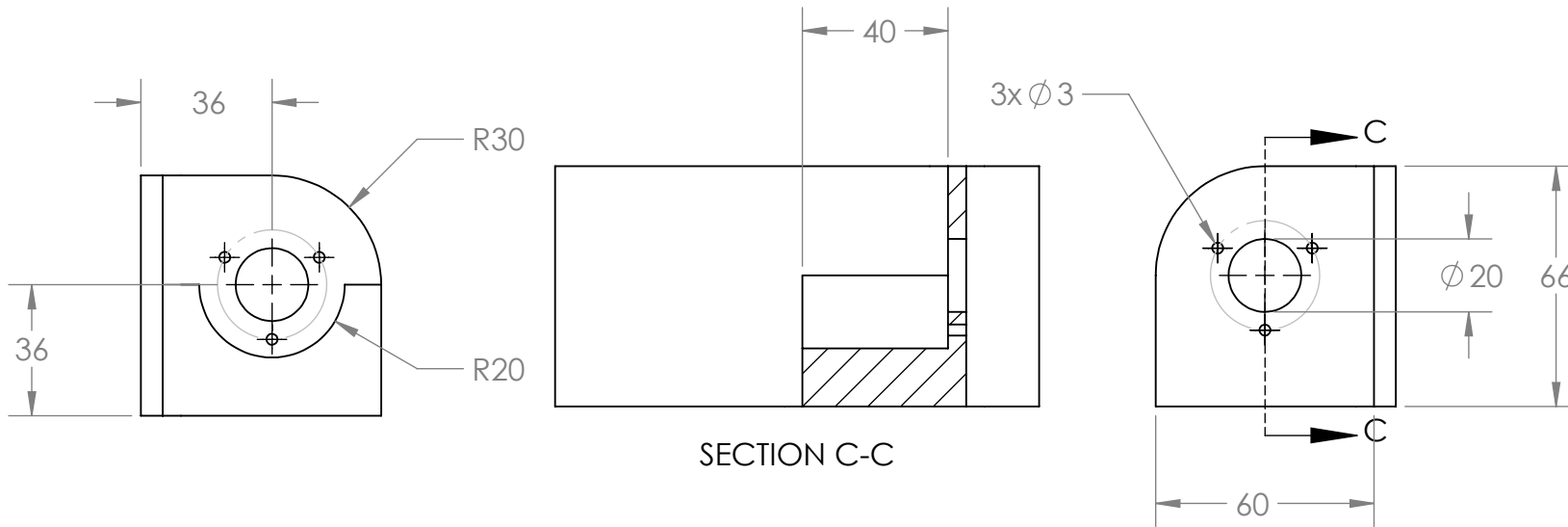


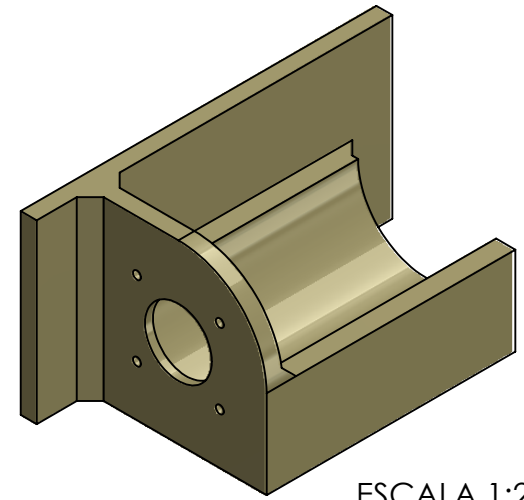
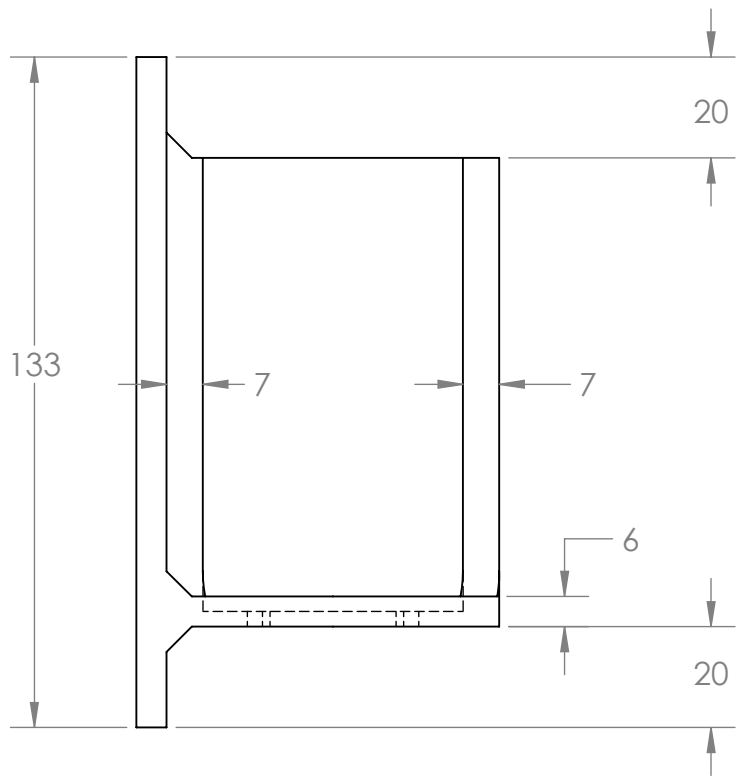
ESCALA 1:1



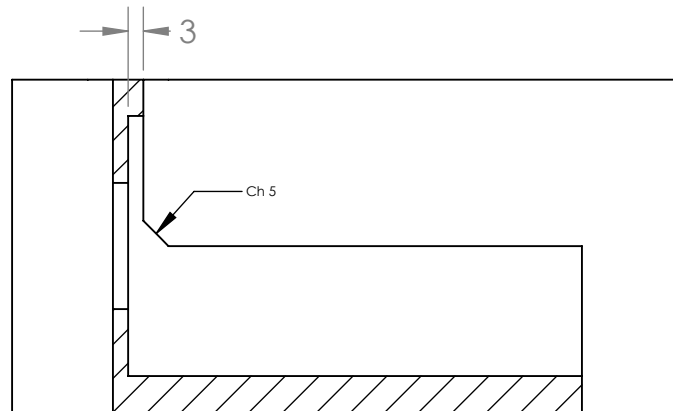
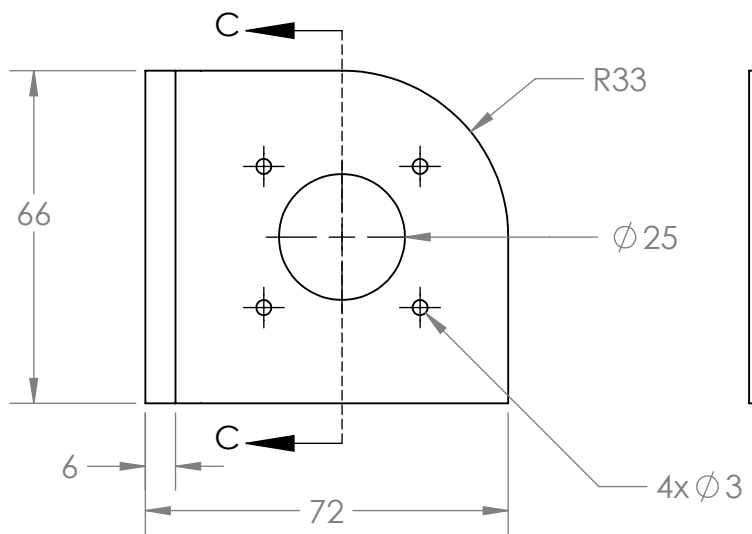


Escala 1:2

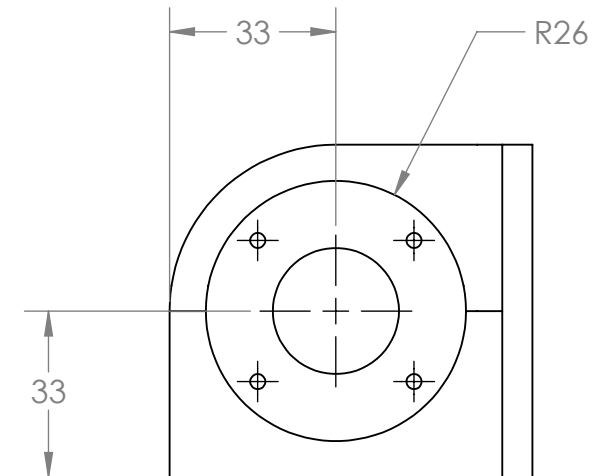


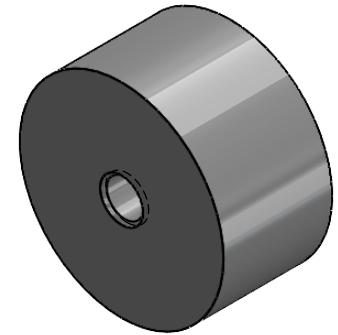


ESCALA 1:2

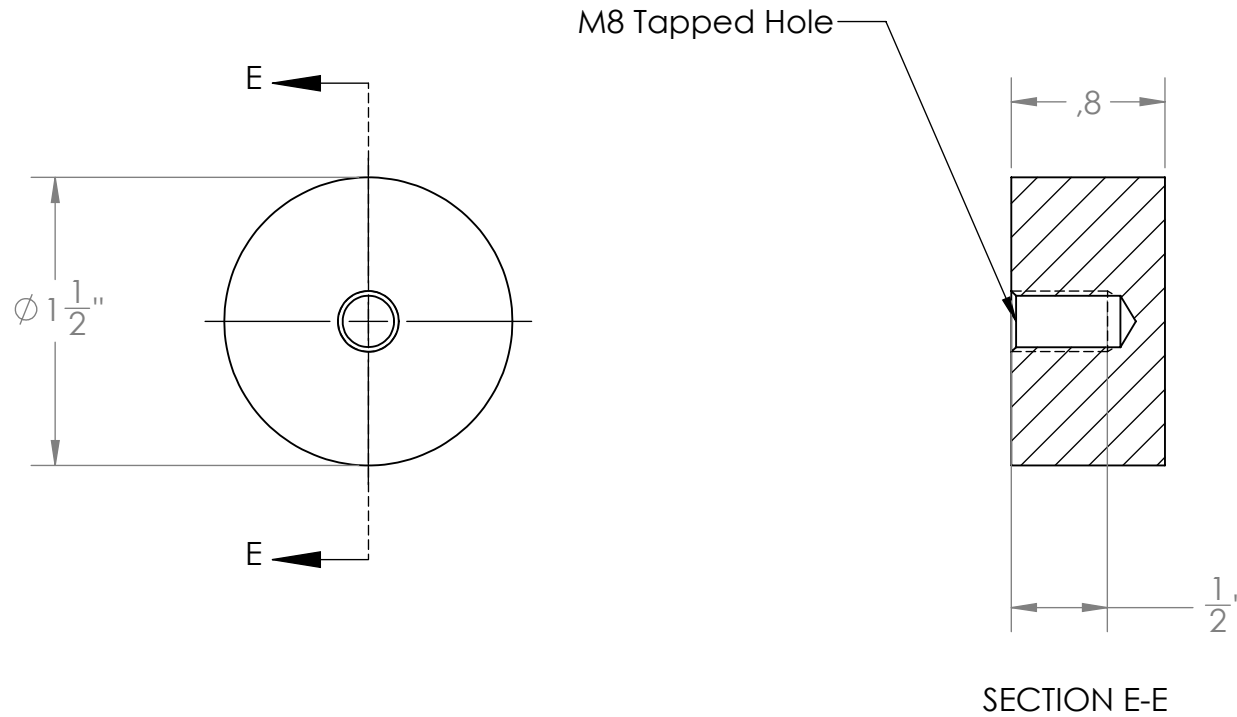


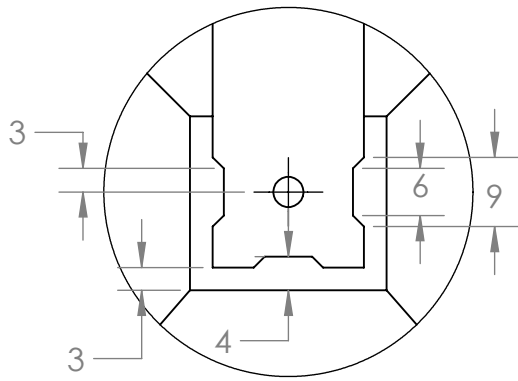
SECTION C-C  
SCALE 1 : 1.5



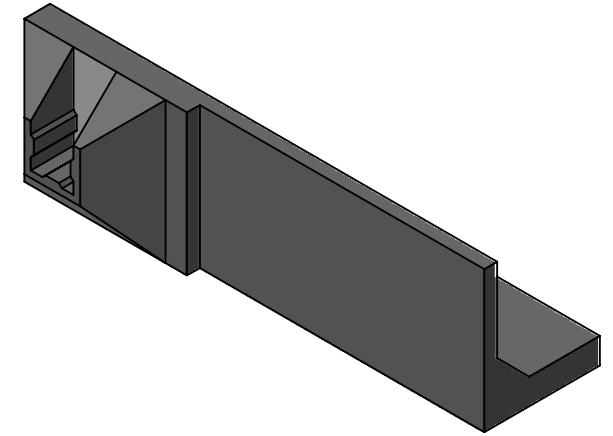
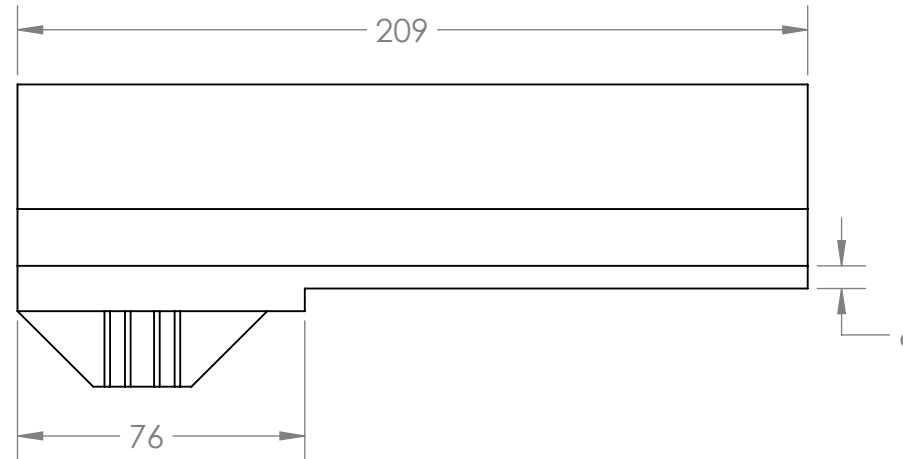


ESCALA 1:1

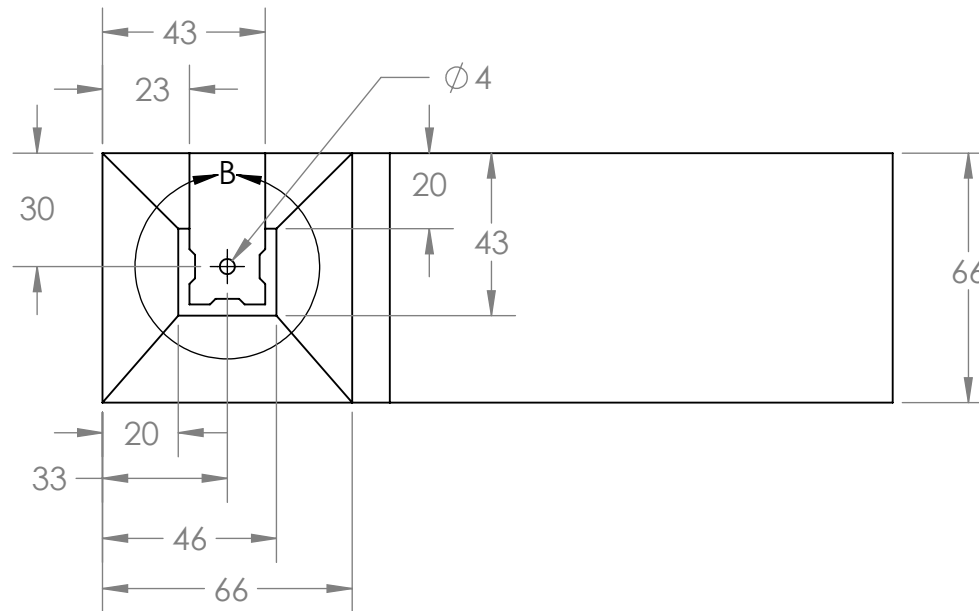
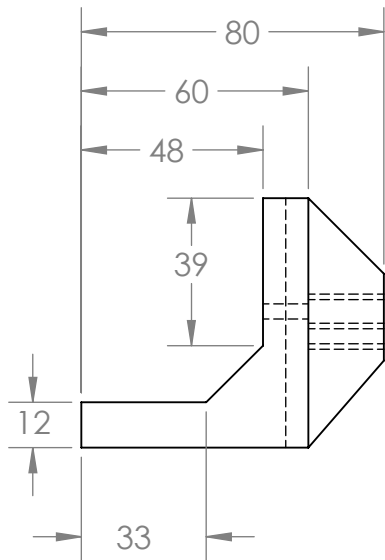




DETAIL B  
SCALE 1 : 1



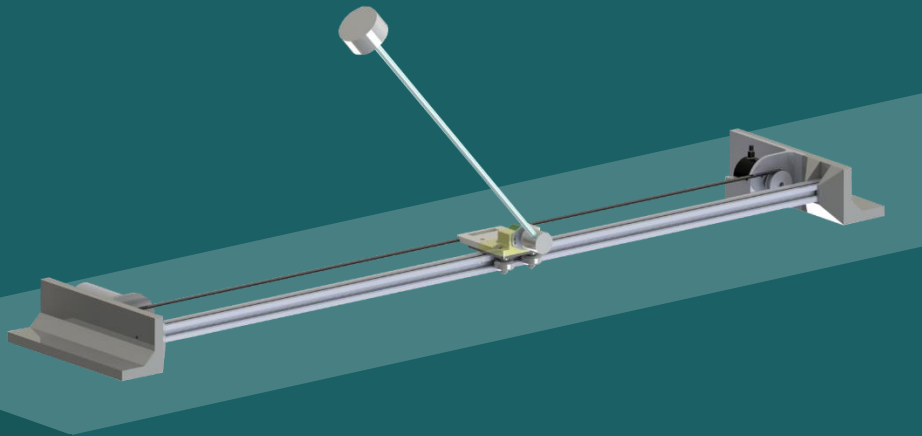
SCALE 1 : 2,5



## **Apéndice D: Material de apoyo didáctico: Manual de uso y mantenimiento del Péndulo**

### **Invertido**

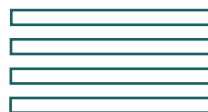
# MANUAL DE USO PÉNDULO INVERTIDO LINEAL PARA EL LABORATORIO DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS



**AUTOR:** Carlos David Albarracín Ortiz

**DIRECTOR:** Carlos Borrás Pinilla

**CODIRECTOR:** Helio Sneyder Esteban Villegas



# MANUAL DE USO PÉNDULO INVERTIDO LINEAL PARA EL LABORATORIO DE CONTROL Y SISTEMAS DINÁMICOS

Este manual fue diseñado para el uso y mantenimiento del péndulo invertido lineal dispuesto como parte del desarrollo del proyecto de grado titulado "Diseño y construcción de un péndulo invertido lineal como banco de experimentación para el Laboratorio de Control y Sistemas Dinámicos de la Escuela de Ingeniería Mecánica", este dispositivo se encuentra adecuado en el laboratorio mencionado y se deja a disposición de docentes y estudiantes que requieran de su uso.

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas  
Escuela de Ingeniería Mecánica

2023

## Componentes

El péndulo invertido lineal funciona gracias a varios componentes que interactúan en sincronía para mover, controlar y estabilizar el péndulo en su posición de equilibrio inestable, utilizando diferentes técnicas de control. El banco de laboratorio cuenta con los siguientes componentes:

### Subsistema Estructura:

- Bases y soporte de los elementos del equipo.
- Elementos de sujeción del banco a la mesa de laboratorio.

### Subsistema Desplazamiento:

- Perfil de recorrido del carro y carro móvil (tipo V-Slot).
- Poleas y correa.
- Motor CC de 12v (Buhler).
- Péndulo (varilla y peso concentrado).

### Subsistema de control:

- Controlador Arduino Due.
- Controlador de motor, puente H (BTS7960).

### Subsistema de lectura y recolección de datos:

- Encoder rotativo incremental (E6B2-CW/Z3E).
- Sensor de ángulo (P3022).

Los diagramas de conexión y componentes se muestran a continuación:

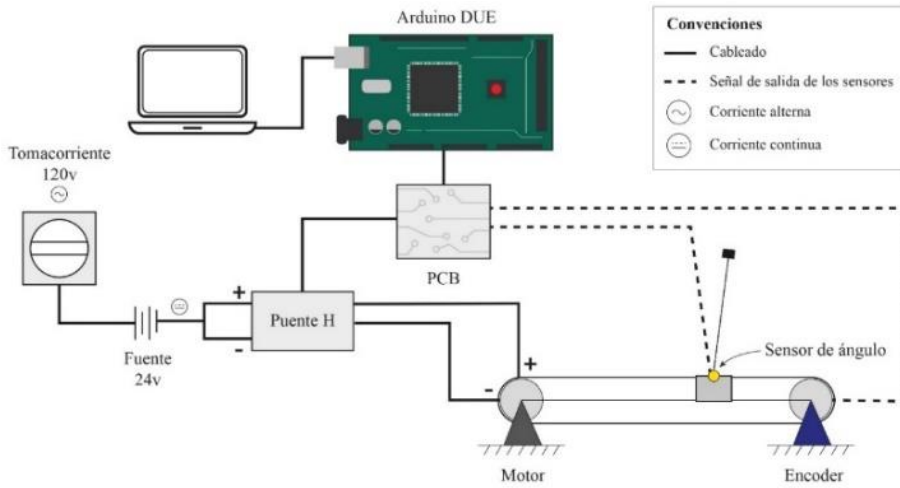


Figura 1: Diagrama de conexión.

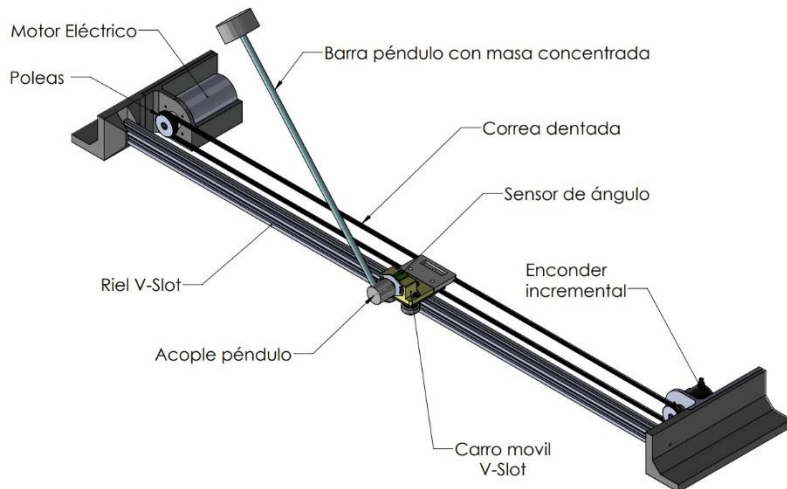


Figura 2: Diagrama de componentes del péndulo.

## Péndulo invertido lineal

El péndulo invertido ha sido uno de los ingenios más populares a la hora de comenzar a estudiar técnicas de control, su construcción consta de una varilla recta que funciona como péndulo, articulada a una base rectilínea estable y móvil como se puede ver en la figura 2; consta de dos grados de libertad lo que lo hace un sistema inestable. su funcionamiento es similar a apoyar una vara de madera erguida perpendicular la palama de la mano y tratar de mantenerla en equilibrio, volver este simple proceso algo automático sin intervención humana, es una labor de la *Ingeniería de Control*, para la cual el péndulo invertido lineal ofrece una base para comenzar a experimentar y probar diferentes técnicas de control clásico y moderno.

## Propósito del Péndulo Invertido Lineal

El propósito del banco de laboratorio es servir como herramienta pedagógica y de experimentación en el área de dinámica, control y automatización de la *Escuela de Ingeniería Mecánica*.

### Principios de operación

El objetivo principal del péndulo invertido es mantener la barra erguida a  $90^\circ$  medidos desde la horizontal, esto se logra aplicando una fuerza de control al carro móvil, la cual lo desplaza únicamente de derecha a izquierda o viceversa en el rango de acción del riel, esta fuerza viene transmitida desde un motor eléctrico por una transmisión de banda dentada flexible.

En este banco de laboratorio se implementan dos sensores, el primero un encoder rotativo encargado de medir la posición del motor y por lo tanto la posición del carro móvil, el segundo sensor que esta sobre la base del péndulo es el encargado de medir el ángulo en el que se encuentra la barra en cada momento. Estos sensores van conectados a la placa de circuitos al igual que el actuador (motor eléctrico), el controlador (Arduino Due) y la fuente de energía, en conjunto estos elementos dan control al péndulo invertido lineal.

La dinámica del péndulo invertido lineal se rige bajo las leyes de la física clásica de Newton para traslación y rotación, de las cuales a través de ecuaciones diferenciales se obtiene un modelo matemático que describe el comportamiento del péndulo. El diagrama de cuerpo libre, las dos ecuaciones gobernantes y sus parámetros se muestran a continuación:

Diagrama de cuerpo libre:

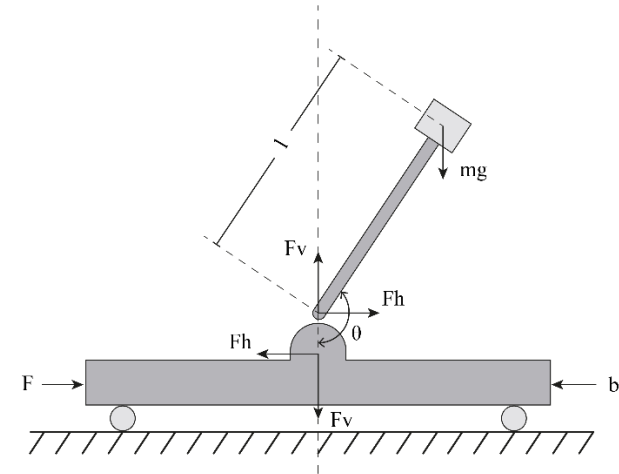


Figura 3: Diagrama de cuerpo libre del péndulo.

Del DCL del sistema y luego integrar el modelado del motor CC, se llega a las ecuaciones gobernantes para el modelo matemático del péndulo invertido:

$$K_t \cdot \frac{u(t) - K_e \cdot \dot{x}}{R} = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = -ml\dot{x} \cos(\theta)$$

**Requerimientos de uso**

- El banco de laboratorio debe ser instalado en una mesa o superficie de trabajo limpia, seca y bien nivelada con espacio suficiente para desplegar sus componentes.
- Se debe disponer de un área libre alrededor del equipo que permita el desplazamiento ininterrumpido del carro móvil y la rotación completa del péndulo en todo su recorrido, además espacio para las líneas de alimentación e interconexión con otros dispositivos como computadores.
- Se estima un área para la mesa de  $180 \times 80 \text{ cm}^2$  y un área libre alrededor del banco de  $20 \times 180 \text{ cm}^2$ , además, se debe contar con una toma eléctrica entre (100-120) [v] AC, a 60[Hz].
- Es indispensable disponer de un equipo de cómputo con capacidad adecuada para ejecutar programas como Arduino IDE, Matlab-Simulink, y demás complementos necesarios.

Parámetros utilizados			
M	Masa del carro	$u(t)$	Voltaje de entrada del motor o señal PWM
m	Masa del péndulo	L	Inductancia del motor
b	Coefficiente de fricción del carro	R	Resistencia eléctrica del motor
l	Longitud del péndulo al centro de masa	Ke	Cte de fuerza electromotriz
I	Momento de inercia del péndulo	Kt	Cte de par motor
F	Fuerza aplicada al carro	Fh	Reacción horizontal en el péndulo
x	Posición del carro	Fv	Reacción vertical en el péndulo
$\theta$	Ángulo del péndulo desde la vertical	g	Fuerza de gravedad
$\dot{x}$	Velocidad lineal del carro	$i(t)$	Corriente de armadura del motor
$\dot{\theta}$	Velocidad angular del péndulo	$e(t)$	Fuerza contraelectromotriz del motor
$\ddot{x}$	Aceleración lineal del carro	$w_m$	Velocidad angular eje del motor
$\ddot{\theta}$	Aceleración angular del péndulo	$r_p$	Radio de las poleas

### Rutinas de mantenimiento

Estas rutinas están enfocadas principalmente en mantener un buen ensamble del equipo y eliminar contaminantes que puedan depositarse sobre las superficies de los mecanismos.

Advertencia: Desconectar el banco de la toma de alimentación eléctrica y cable de datos del Arduino al PC, antes de iniciar los procesos de limpieza y mantenimiento.

#### ***Limpieza de las superficies exteriores***

##### **Frecuencia: Cada 30 días**

Se recomienda limpiar las superficies exteriores utilizando un trapo limpio humedecido con alcohol isopropílico.

Advertencia: Evitar que la humedad inunde el compartimiento de los componentes eléctricos o electrónicos.

#### ***Ajuste y puesta a punto del equipo***

##### **Frecuencia: Antes de cada uso**

1. Revisar el correcto ajuste de la tornillería del equipo, en las uniones del motor, los sensores, las poleas, las prensas, el acople del péndulo y su contrapeso, ya que, debido a las vibraciones propias de su uso, se pueden desajustar.

posición angular del péndulo, y su rango de trabajo es 15 grados alrededor del *set point* del sistema, el péndulo debe estar sobre este rango en su condición de inicio.

### Aplicabilidad del Péndulo Invertido Lineal en la Ingeniería de Control

Un péndulo invertido lineal es un sistema que se utiliza en la ingeniería de control como un modelo simplificado para estudiar y comprender los conceptos fundamentales de control y estabilidad. Se puede entender como un modelo simplificado de situaciones del mundo real, por ejemplo, el sistema de propulsión de un cohete saliendo hacia el espacio, un robot equilibrándose o siguiendo una referencia y muchas otras aplicaciones más.

**Estudio de la estabilidad:** El péndulo invertido es inherentemente inestable, lo que significa que tiende a caer si no se aplica un control adecuado. Al diseñar un sistema de control para estabilizar el péndulo, los ingenieros pueden estudiar y aplicar conceptos de estabilidad, como la retroalimentación negativa, para mantener el sistema en una posición deseada.

**Control en tiempo real:** Mantener un péndulo invertido en el punto de equilibrio inestable se realiza utilizando algoritmos de control. Esto proporciona una plataforma práctica para implementar y probar controladores en tiempo real, como los controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) en tiempo continuo o tiempo discreto, entre muchos otros.

**Aplicación a sistemas más complejos:** Aunque el péndulo invertido es un sistema relativamente simple, los principios de control que se aprenden se pueden aplicar a sistemas más complejos y diversos. Los conceptos de control de posición y velocidad, así como el control de sistemas multivariables, se pueden extrapolar de un péndulo invertido a aplicaciones del mundo real.

**Investigación en robótica:** Muchos robots y dispositivos autónomos utilizan principios de control derivados del estudio del péndulo invertido. Esto incluye robots de equilibrio, drones estabilizados, y otros sistemas que requieren control preciso para funcionar de manera efectiva.

2. Revisar el correcto posicionamiento del carro móvil, y su ajuste con el riel, este debe ser lo suficientemente fuerte para evitar el descarrilamiento de las ruedas y permitir su giro continuo y fluido.
3. Verificar que la tensión de la correa sea óptima para conseguir una respuesta instantánea en el movimiento del carro.
4. Verificar que el péndulo gire con libertad 360° a lo largo de todo el recorrido del riel, esto significa, que no golpee con ningún otro objeto o la misma estructura, si no es el caso, ajustar la posición de las prensas y las bases del banco para lograr una movilidad completa del banco.
5. Comprobar alimentación, cables y conexiones del equipo, estos deben estar en las posiciones preestablecidas para su adecuado uso.
6. Para completar la puesta a punto del banco de laboratorio, se debe el sintonizar *set point* del sistema, es decir, su posición de equilibrio inestable, con el sensor de ángulo del péndulo.
7. Antes de ingresar un algoritmo de control, verificar que se cumplan las condiciones iniciales o de operación preestablecidas en las variables de control, por ejemplo, para un controlador PID, si una variable de control es la

**Formación y educación:** El péndulo invertido lineal es una herramienta educativa efectiva para enseñar a estudiantes los conceptos fundamentales de la ingeniería de control.

Los laboratorios y proyectos relacionados con péndulos invertidos se utilizan comúnmente en cursos de control automático y sistemas dinámicos.

## BIBLIOGRAFÍA

Albarracín C. (2023). *Diseño y construcción de un péndulo invertido lineal como banco de experimentación para el Laboratorio de Dinámica y Control de la Escuela de Ingeniería Mecánica*. (Tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Control Tutorials Matlab and Simulink. (2017). Inverted Pendulum: System Modeling. (umich.edu)

Nise, N. S. (2007). *Control systems engineering, fifth edition with wileyplus set (5a ed.)*. John Wiley & Sons.

Ogata, K. (1995). *Discrete-time control systems: International edition (2a ed.)*. Pearson.

Ogata. (1998). *Ingeniería De Control Moderna (Hispan) (3a ed.)*. Prentice-Hall.

Organización Panamericana de la Salud. (2005). *Manual de mantenimiento para equipo de laboratorio*. Disponible en ([www.exactas.unlp.edu.ar](http://www.exactas.unlp.edu.ar))