

**ANÁLISIS E IMPLEMENTACIÓN DEL MODELAMIENTO DE FLUJO DE  
FLUIDOS ACOPLADO AL DE DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA EN  
YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS CONSIDERANDO EL  
CASO BLACK OIL**

**CARLOS ANDRES DIAZ PRADA  
JORGE EDWIN ALBA DUARTE**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-QUÍMICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA DE PETRÓLEOS  
BUCARAMANGA**

**2004**

**ANÁLISIS E IMPLEMENTACIÓN DEL MODELAMIENTO DE FLUJO DE  
FLUIDOS ACOPLADO AL DE DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA EN  
YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS CONSIDERANDO EL  
CASO BLACK OIL**

**CARLOS ANDRES DIAZ PRADA  
JORGE EDWIN ALBA DUARTE**

**Proyecto de grado para optar al título de  
Ingeniero de Petróleos**

**Director  
Nicolás Santos Santos**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-QUÍMICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA DE PETRÓLEOS  
BUCARAMANGA**

**2004**

## **AGRADECIMIENTOS**

El autor expresa sus agradecimientos a:

A Todas aquellas personas que aportaron algo durante el desarrollo de este proyecto e hicieron posible la satisfacción de su culminación.

A Mi familia por su apoyo incondicional

A Nicolás Santos Santos, Director de este proyecto, por su paciencia, entrega y preocupación en la prosecución de su desarrollo.

A Sandra, por enseñarme los valores que trascienden la labor humana.

Carlos Andrés

## **AGRADECIMIENTOS**

El autor expresa sus agradecimientos a:

A Todas aquellas personas que aportaron algo durante el desarrollo de este proyecto e hicieron posible la satisfacción de su culminación.

A Mi familia por su apoyo incondicional

A Nicolás Santos Santos, Director de este proyecto, por su paciencia, entrega y preocupación en la prosecución de su desarrollo.

A Sandra, por enseñarme los valores que trascienden la labor humana.

Jorge Edwin

## TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN	10
ABSTRACT	10
INTRODUCCIÓN	12
OBJETIVOS	15
JUSTIFICACIÓN	16
1. MARCO TEÓRICO	17
2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE ACOPLAMIENTO	21
2.1 MODELO FÍSICO	22
2.2 MODELO MATEMÁTICO	22
2.2.1 Modelo de flujo de fluidos	23
2.2.1.1 Conservación de la masa del fluido	24
2.2.1.2 Conservación de la masa del sólido	25
2.2.1.3 Ley de Darcy	25
2.2.1.4 Ecuación de estado	25
2.2.2 Ecuación de porosidad	26
2.2.3 Modelo esfuerzo-deformación	27
2.2.3.1 Ecuaciones de equilibrio	28
2.2.3.2 Ecuaciones de deformación-desplazamiento	29
2.2.3.3 Ecuaciones de Deformación-esfuerzo-presión	29
2.3 MODELO NUMÉRICO	31
2.3.1 Ecuaciones del modelo de flujo de fluidos	31
2.3.2 Ecuación de porosidad	32
2.3.3 Ecuaciones del modelo esfuerzo-deformación	32
2.4 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA	33
2.4.1 Condiciones iniciales	33
2.4.2 Condiciones de frontera	34

2.4.2.1 Condiciones de frontera para el modelo de flujo de fluidos	35
2.4.2.2 Condiciones de frontera para el modelo de esfuerzo-deformación	35
2.5 MODELO DE ORDENADOR	36
2.5.1 Algoritmo	37
2.5.2 Datos de ingreso	39
2.5.2.1 Datos de discretización	39
2.5.2.2 Propiedades del fluido y la roca	40
2.5.2.3 Propiedades mecánicas	40
2.5.3 Datos de salida	40
3. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	42
3.1 EFECTO SOBRE LA PRESIÓN DE PORO Y LOS ESFUERZOS CON LA VARIACIÓN ESPACIAL	42
3.2 EFECTO DEL INCREMENTO DEL ESFUERZO EFECTIVO CON LA VARIACIÓN TEMPORAL	44
3.3 EFECTO SOBRE LA PERMEABILIDAD	45
3.4 VARIACIÓN DE LA PERMEABILIDAD EN LA INTERSECCIÓN DEL ESTRATO PRODUCTOR Y EL PLANO VERTICAL QUE CONTIENE EL POZO PARA EL CASO DE CAUDAL DE PRODUCCIÓN CONSTANTE	47
3.5 VARIACIÓN DE LA PERMEABILIDAD EN LA INTERSECCIÓN DEL ESTRATO PRODUCTOR Y EL PLANO VERTICAL QUE CONTIENE EL POZO PARA EL CASO DE CAUDAL DE PRODUCCIÓN CONSTANTE	48
3.6 EFECTO DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA	50
3.7 VARIACIÓN DE LA PERMEABILIDAD EN LA INTERSECCIÓN DEL ESTRATO PRODUCTOR Y EL PLANO VERTICAL QUE CONTIENE EL POZO PARA EL CASO DE PWF CONSTANTE	52
3.8 EFECTO DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA	53
3.9 VARIACIÓN DE LOS ESFUERZOS CON LOS ESTRATOS EN EL PLANO VERTICAL DEL POZO	55

3.10 VARIACIÓN DE LOS ESFUERZOS CON LOS ESTRATOS EN EL PLANO VERTICAL DEL POZO CONSIDERANDO UNA VARIACIÓN DE LA COMPRESIBILIDAD	57
3.11 VARIACIÓN DE LA PERMEABILIDAD CON LOS ESTRATOS EN EL PLANO VERTICAL QUE CONTIENE EL POZO CONSIDERANDO UNA VARIACIÓN DE LA COMPRESIBILIDAD	59
3.12 VARIACIÓN DE LA PERMEABILIDAD SIN LA CONSIDERACIÓN DE UN DOMINIO EXTERNO	60
3.13 VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA VARIACIÓN DEL CAUDAL, PARA DIFERENTES TIEMPOS	60
3.14 VARIACIÓN DEL CAUDAL DE PRODUCCIÓN MANTENIENDO UNA PRESIÓN EN EL POZO CONSTANTE	60
4. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE FLUJO	62
5. DISCRETIZACION DE LA ECUACIÓN DE ESFUERZOS	75
6. DISCRETIZACIÓN DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA	88
6.1 CONDICIONES PARA EL MODELO DE FLUJO DE FLUIDOS	88
6.2 CONDICIONES PARA EL MODELO DE ESFUERZO DEFORMACIÓN	91
7. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE POROSIDAD	103
8. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO DE FLUIDOS	106
8.1 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN DE LA MASA DE FLUIDO	106
8.2 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN DE MASA SÓLIDA	107
8.3 LEY DE DARCY	108
8.4 ECUACIÓN DE ESTADO	109
8.5 ECUACIONES GENERALES QUE GOBIERNAN EL FLUJO DE FLUIDOS	110
9. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA	114
9.1 ECUACIONES DE EQUILIBRIO	114
9.2 ECUACIONES DE DEFORMACIÓN – DESPLAZAMIENTO	114

9.3 ECUACIONES DE DEFORMACIÓN – ESFUERZO – PRESIÓN.	114
10. MANUAL DE INSTRUCCIONES DE USO DEL SOFTWARE	117
10.1 FUNCIONES DEL PROGRAMA	117
10.2 ENTORNO DEL PROGRAMA	119
10.3 VENTANAS DE INICIALIZACIÓN	123
10.4 VENTANAS DE SALIDA	123
LISTA DE FIGURAS	128
NOMENCLATURA	130
CONCLUSIONES	132
RECOMENDACIONES	134
BIBLIOGRAFÍA	135

## RESUMEN

**TITULO:** ANÁLISIS E IMPLEMENTACIÓN DEL MODELAMIENTO DE FLUJO DE FLUIDOS ACOPLADO AL DE DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS CONSIDERANDO EL CASO BLACK OIL \*

**AUTORES:** CARLOS ANDRÉS DÍAZ PRADA  
JORGE EDWIN ALBA DUARTE \*\*

**PALABRAS CLAVES:** YNF, Geomecánica, Flujo, Acoplamiento, Deformación, Esfuerzo, Desplazamientos.

Este estudio presenta la implementación de un modelo numérico que sirve como herramienta para el análisis del comportamiento de la variación de la presión de poro y el cambio del estado de esfuerzos en yacimientos naturalmente fracturados (YNF), considerando la deformación geomecánica no-lineal del medio sólido; el modelo desarrollado presenta un acoplamiento entre las ecuaciones que describen el flujo de fluidos y la deformación geomecánica, cuya implementación se realiza a través de la solución numérica, en diferencias finitas, de dichas ecuaciones.

La implementación corresponde a la determinación de los cambios que suceden en el yacimiento con la variación de las condiciones, teniendo como marco de referencia su comportamiento espacio-temporal. Las condiciones iniciales y de frontera usadas para la solución de las ecuaciones, corresponden a lo siguiente. Las condiciones iniciales definen que para un tiempo inicial, tanto los desplazamientos como la variación de la presión de poro son iguales a cero. Las condiciones de frontera del modelo de flujo de fluidos son condiciones tipo Dirichlet en el límite exterior; mientras que para el modelo de esfuerzo deformación, se definen condiciones tipo Neumman para el plano superior del yacimiento, y de tipo Dirichlet para los planos restantes.

El análisis corresponde entonces, al establecimiento de la variación de las propiedades mecánicas del medio sólido, la permeabilidad, la anisotropía de esfuerzos y el cambio en las condiciones de límite externo, con el fin describir su incidencia sobre la producción. Para tal efecto se hicieron corridas del programa sobre la base de una variación en el tiempo y en el espacio de las condiciones del yacimiento, y considerando que el acoplamiento se lleva a cabo con las compresibilidades del sistema.

---

\* Tesis

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Químicas, Ingeniería de Petróleos, Dra. Zuly Calderón

## ABSTRACT

**TITLE:** ANALYSIS AND IMPLEMENTATION OF THE MODELING OF COUPLED FLOW OF FLUIDS TO GEOMECHANICS DEFORMATION IN NATURALLY FRACTURED RESERVOIRS CONSIDERING BLACK OIL CASE \*

**AUTHORS:** CARLOS ANDRÉS DÍAZ PRADA  
JORGE EDWIN ALBA DUARTE \*\*

**KEY WORDS:** YNF, Geomechanics, Flow, Coupling, Deformation, Effort, Displacements.

This study presents the implementation of a numeric model that can use for the analysis of the behavior of the variation of the pore pressure and the change of stress state in naturally fractured reservoirs, considering the non-linear geomechanic deformation of the solid medium; the developed model presents a coupling between the equations that describe the flow of fluids and the geomechanical deformation whose implementation is carried out through the numeric solution, in finite differences, of these equations.

The implementation corresponds to the determination of the changes that happen in the reservoir with variation of the conditions, having like reference mark its space-time behavior. The initial and outer boundary conditions used for the solution of the equations correspond to the following thing. The initial conditions define that for an initial time, the displacements and the variation of the pore pressure are equal to zero. The outer boundary conditions for the flow of fluids are conditions type Dirichlet in the outer limit; while for the model of stress deformation, they are defined conditions type Neumann for the superior plane of the reservoir, and type Dirichlet for the remaining planes.

The analysis corresponds then, to the establishment of the variation of the mechanical properties of the solid medium, the permeability, the stress anisotropy and change of the outer boundary conditions, with the purpose to describe its incidence on the production. For such effect runs of the program were done, taking count a variation in the time and space of the conditions of the reservoir, and considering that the coupling is carried out with the compressibilities of the system; being obtained with a variation of this a remarkable incidence on the permeability.

---

\* Thesis

\*\* Phisico-Quimical Ingeniering, Petroleum Ingeniering, Dr. Zuly Calderón

## INTRODUCCIÓN

La necesidad de desarrollos teóricos que se aproximen en mayor medida a la realidad, exige que se tengan en cuenta las diversas relaciones que subyacen a las variables que expresan los procesos.

En el campo de la ingeniería de Petróleos, los elementos que determinan tales relaciones en los procesos que suceden en el yacimiento, son el fluido y el medio sólido, es decir, la roca. Tanto el flujo de fluidos como la geomecánica de la roca, han sido objeto de investigación en el desarrollo de la ingeniería, y se han analizado en conjunto desde la teoría poroelástica propuesta por Biot, en la que se expone las condiciones de posibilidad de los efectos que tienen la deformación de la roca sobre el flujo del fluido.

La explicación de esta teoría condujo a diversos autores a estudiar la incidencia de tales efectos en el comportamiento de las condiciones del yacimiento. Sin embargo, los primeros estudios no tuvieron en cuenta la variación en los esfuerzos que se daban con la producción del fluido, elemento que se muestra como indispensable en la definición de un modelo que explique los cambios acaecidos en el yacimiento durante los procesos que en él se llevan a cabo.

En este contexto, surge entonces la necesidad de considerar el acoplamiento de la deformación geomecánica al flujo de fluidos, asumiendo un comportamiento no-lineal, como principio de expresión de la realidad en el

yacimiento, en donde, a su vez, se solvente la simplificación del problema que se deriva de la suposición de un estado de esfuerzos invariable.

Sumidos en este desarrollo, este trabajo presenta la implementación de un modelo numérico en 3D, desarrollado en diferencias finitas, con un esquema completamente implícito, que hace posible estudiar la variación de la presión de poro y el modo de distribución de los esfuerzos en yacimientos naturalmente fracturados, considerando una deformación geomecánica no-lineal.

La implementación del modelo permite determinar la variación temporal y espacial del estado de esfuerzos, y su relación con propiedades tales como la permeabilidad y las compresibilidades del sistema. Además, presenta la posibilidad de fundamentar estudios que consideren la inclusión de un modelo termodinámico en el que se involucre la temperatura y el cambio composicional de los fluidos.

Para este propósito se emplea el modelo presentado por Osorio para yacimientos naturalmente fracturados, que se basa en las ecuaciones de acoplamiento de flujo de fluidos y deformación geomecánica, presentadas por Chen, Teufel y Lee. Las ecuaciones son desarrolladas bajo la consideración de que la presión y los desplazamientos representan las variables fundamentales que a posteriori, permiten calcular el estado de esfuerzos a tiempos y condiciones de producción diversas. La implementación corresponde así, a la elaboración de un algoritmo que posibilite la labor interpretativa sobre los diversos comportamientos.

Su aplicación se ilustra mediante el uso de diferentes condiciones del yacimiento, por lo cual se implementa un análisis de las variables que tienen

mayor incidencia en el proceso, con el propósito de cualificar el comportamiento del caudal de producción.

A través del análisis de las variables, podemos establecer que las variables que afectan de manera más directa las condiciones del yacimiento, son las propiedades mecánicas de la roca, las condiciones de frontera y el grado de anisotropía de esfuerzos. Tales situaciones se observaron con la evaluación del caudal y la variación de la permeabilidad, con el cambio en el estado de esfuerzos expresado en el cambio del esfuerzo efectivo.

De acuerdo a los resultados obtenidos, la variación en el estado de esfuerzos afecta directamente la permeabilidad del yacimiento y el caudal de producción. Además, la permeabilidad muestra una máxima variación en las cercanías al pozo, así como una dependencia respecto al tiempo.

La consideración de diferentes valores de permeabilidad para cada punto del yacimiento, afecta en mayor grado el caudal de producción, que la consideración de un valor constante e igual al inicial.

Al final, se presenta una guía para el manejo del software de la implementación que facilita la labor de análisis e interpretación de los resultados.

## **OBJETIVOS**

### **Objetivo General**

Acoplar el modelamiento de flujo de fluidos al de deformación geomecánica de yacimientos, para el desarrollo de un software de simulación numérica aplicado a yacimientos naturalmente fracturados, considerando el caso Black oil.

### **Objetivos Específicos**

- Analizar e interpretar los modelos de acoplamiento desarrollados a partir de la teoría poro-elástica de Biot, en los cuales se tiene en cuenta la variación de las propiedades del yacimiento, en función de las propiedades mecánicas de la roca y los cambios en el estado de esfuerzos.
- Desarrollar un modelo numérico que permita calcular la variación temporal del estado de esfuerzos asociada con la producción de fluidos en yacimientos naturalmente fracturados, caracterizado por un comportamiento de doble porosidad, considerando un sistema isotérmico y monofásico.
- Elaboración de un programa que determine la implementación del modelo de flujo de fluidos acoplado a la deformación geomecánica, y permita la estimación de las variables sensibles, como el tensor de permeabilidad, que inciden en el comportamiento del yacimiento.

## JUSTIFICACION

Es manifiesta la necesidad del Estado Colombiano por satisfacer la demanda de hidrocarburos y sus intentos por procurar la autosuficiencia en los próximos años. Esta situación convierte a los Yacimientos Naturalmente Fracturados en punto neurálgico de investigación y trabajo, si se tiene en cuenta que los grandes yacimientos del país son de este tipo, y las posibilidades que plantea la zona de los llanos orientales sobre nuevos hallazgos de reservas se refieren a estos yacimientos. De tal forma, se señala que causales como la complejidad, incertidumbre y el escaso desarrollo de metodologías de modelamiento para la evaluación de yacimientos naturalmente fracturados en Colombia, han impedido un mejor entendimiento y explotación de estos yacimientos.

Por lo tanto, este proyecto irá enfocado hacia la determinación de la forma en que la variación de las propiedades del yacimiento, especialmente la permeabilidad, afecta las tasas de recobro de fluido en yacimientos naturalmente fracturados. Para ello resulta necesario el análisis detallado de los modelos de acoplamiento de flujo de fluidos y deformación geomecánica presentados hasta el momento (Chen y Teufel, 1995; Chen, Teufel y Osorio, 1997), los cuales, basados en la teoría de Biot, permiten considerar el yacimiento como un sistema poro-elástico en donde varía el estado de esfuerzos con el tiempo y enuncian la incidencia de este fenómeno en las tasas de producción de fluidos. Con base en lo anterior se establecerá la implementación del acoplamiento para mejorar el entendimiento de este tipo de yacimientos.

## 1. MARCO TEÓRICO

Diversos estudios se han realizado sobre el análisis e interpretación del comportamiento de los yacimientos naturalmente fracturados. El más representativo de ellos fue presentado en 1963 por Warren y Root<sup>1</sup>, quienes desarrollaron un modelo idealizado para el estudio de este tipo de yacimientos. Éste consistía en un sistema de doble porosidad, compuesto por matriz y fracturas, que significó la posibilidad de establecer una serie de parámetros que diferenciaran a los yacimientos naturalmente fracturados de los de medio poroso homogéneo.

Con base en las ecuaciones por el estudio anteriormente señalado, Kazemi et al.<sup>2</sup>, desarrollaron un simulador tridimensional para flujo mono o bifásico. Sin embargo, este modelo contemplaba una homogenización de los dos medio presentes, para concentrarse en el estudio del modelo de flujo de fluidos.

En el año 1972 Settari y Aziz<sup>3</sup>, introdujeron una forma de aproximar en diferencia finitas, el término  $\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial U_x}{\partial x} \right)$ , usando un espaciamiento irregular

en una dimensión; lo que hizo posible observar que cuando se trata de espaciamiento irregular es de mayor conveniencia recurrir al uso de los

---

<sup>1</sup> Warren, J.E. and Root, P.J., “ The Behavior of Naturally fractured Reservoirs”, SPE, Sept. 1963.

<sup>2</sup> Kazemi et al., “Numerical simulation of Water-Oil flow in Naturally Fractured Reservoirs, SPE, 1976

<sup>3</sup> Settari y Asís, “Use of Irregular Grid in Reservoir Simulation”, SPEJ, April, 1972.

bloques medidos en los nodos, y no ubicados en el centro, como se venía trabajando. Este estudio podría leerse de forma inversa, estableciendo que la variación de las variables representadas en un modelo responden de mejor forma, a la definición de condiciones irregulares para el yacimiento.

Posteriormente Thomas et al<sup>4</sup>., presentaron en 1983 el desarrollo de un modelo trifásico en 3D, usando un sistema de doble porosidad para describir los fluidos presentes en los bloques de la matriz y la fractura. En el mismo año Tatiana Streltsova<sup>5</sup>, analizó el comportamiento de la presión en los yacimientos naturalmente fracturados, con un sistema de flujo entre la matriz y las fracturas, que para el caso, definió la posibilidad de un análisis convencional de tipo Horner.

Sin embargo, estos modelos se distanciaban de la realidad, debido a una consideración estática del medio sólido del yacimiento.

Paralelamente al estudio de los yacimientos naturalmente fracturados con base en estas simplificaciones, se cuenta con estudios sobre la variación del medio sólido del yacimiento.

Esta rama de la investigación parte de los estudios realizados por Biot<sup>6</sup>, sobre la teoría de la elasticidad y consolidación de los materiales porosos. Teoría conocida con el nombre de *teoría de la poroelasticidad*. Investigaciones como las de Greenkorn y Johnson<sup>7</sup>, Vairogs<sup>8</sup>, et al.,

---

<sup>4</sup> Thomas et al., “Fractured Reservoir Simulation”, SPE Journal, February, 1983.

<sup>5</sup> Tatiana Streltsova, “Well Pressure Behavior of a Naturally Fractured Reservoir”, SPE journal, October, 1983.

<sup>6</sup> Biot., “Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid” ,1955.(citado por Cheen et al., 1995).

<sup>7</sup> Greenkorn y Johnson, “Directional Permeability of Heterogeneous Anisotropic Porous Media”, SPEJ, June, 1964.

<sup>8</sup> Vairogs et al., “ Effect of Rock Stress on Gas Production From Low-Permeability Reservoirs”, JPT, September, 1971.

Warpinski y Teufel<sup>9</sup>, y Settari<sup>10</sup>, entre otras, tomaron en consideración la deformación que deviene con la variación de la presión en el yacimiento, determinando que la variación de la presión y el cambio en el estado de esfuerzos, afecta directamente las propiedades mecánicas del medio sólido y el flujo de fluidos.

La alteración espacio – temporal en el estado de esfuerzos fue analizada por Saltz<sup>11</sup>, y Teufel et al.<sup>12</sup>.

De forma tal que la relación causal entre el medio sólido y el flujo de fluido queda establecida. Sin embargo fue en 1995 que Chen, Teufel y Lee<sup>13</sup>, presentaron un modelo de acoplamiento del flujo de fluidos y la deformación geomecánica basado en la teoría poroelástica de Biot. El estudio define un sistema de ecuaciones que describen el flujo de fluidos aunado a los principios básicos de la teoría de la poroelasticidad, encontrando en las comprensibilidades de la matriz y la fractura, así como en el esfuerzo efectivo, las variables críticas para el acoplamiento.

Basado en estas ecuaciones el estudio de Osorio, Chen y Teufel<sup>14</sup>, realiza una simulación numérica de los fenómenos físicos que ocurren durante la producción de yacimientos de capa delgada de gas con permeabilidad sensible a la variación del estado de esfuerzos, mostrando cuantitativamente que la reducción en la permeabilidad, debida a cambios en el estado de

---

<sup>9</sup> Warpinski y Teufel, “Laboratory Measurements of the Effective Stress Law for Carbonate Rocks Under Deformation” 1993 (citado por Cheen et al., 1995)

<sup>10</sup> Settari, A., “Physics and Modelling of thermal flow and soil Mechanics in Unconsolidated Porous Media”, SPEFE, February, 1992.

<sup>11</sup> Saltz, L.B., “Relationship Between Fracture Propagation Pressure and Pore Pressure”, SPE, 1977.

<sup>12</sup> Teufel L.W. et al., “Geomechanical Evidence for Shear Failure of Chalk”, SPE, 1991.

<sup>13</sup> Chen H.Y., Teufel L.W., Lee R.L., “Coupled Fluid Flow and Geomechanics in Reservoir Study. Theory and Governing Equations”, SPE, 1995.

<sup>14</sup> Osorio J.G., Chen H.Y. and Teufel L.W., “Numerical Simulation of Coupled Fluid-Flow/geomechanical Behavior of Tight Gas Reservoirs with Stress Sensitive Permeability”, SPE, 1997.

esfuerzos y la presión de poro, pueden afectar notablemente la producción de este tipo de yacimientos.

Posteriormente Osorio<sup>15</sup>, presento unas ecuaciones de acoplamiento para describir a los yacimientos naturalmente fracturados, en el que diferencia el flujo de fluidos que tiene lugar en la matriz del flujo en las fracturas. Este modelo es el que desarrollamos, para su implementación y análisis, en el presente trabajo.

---

<sup>15</sup> Osorio, José, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Coupled Fluid Flow and Mechanical deformation, Governing equations, 2000.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE ACOPLAMIENTO

El punto de partida del análisis y la implementación del modelo de acoplamiento para yacimientos naturalmente fracturados presentado en este trabajo<sup>16</sup>, involucra cinco puntos esenciales:

- **Un modelo físico**, que describe las condiciones asumidas para el desarrollo del modelo.
- **Un modelo matemático**, en el que se exponen las distintas ecuaciones que conforman el modelo de flujo de fluidos y de esfuerzo – deformación.
- **Un modelo numérico**, que desarrolla las ecuaciones diferenciales del modelo matemático, con el método de diferencias finitas, presentándolas en stencils y en una variación a un tiempo posterior, con el fin de condensar la variación espacio – temporal que pretende desarrollarse.
- **Las condiciones iniciales y de frontera**, por medio de las cuales se determina la posibilidad de implementar una variación de los esfuerzos para una zona cercana al pozo, y una zona en la que el estado de esfuerzos no varían.
- **Modelo de ordenador**, que presenta el algoritmo de la implementación del modelo de acoplamiento, así como los parámetros que pide y arroja el programa.

---

<sup>16</sup> Osorio, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2000.

## **2.1 MODELO FISICO**

Para el presente desarrollo el yacimiento se considera como un sistema poro-elástico, es decir, que presenta deformación elástica no-lineal en la parte sólida, la roca, y que el flujo de fluidos se presenta a través del espacio poroso. Cabe anotar, que para nuestro caso, el flujo se presenta tanto en el sistema de fracturas como en el espacio poroso inicial, por lo cual, se estiman como importantes las variaciones de presión en cada uno de los sistemas.

Para el yacimiento se asume un comportamiento isotérmico y el fluido que ocupa el sistema sólido deformable es monofásico y ligeramente compresible.

Además, se considera que el yacimiento puede representarse como un paralelepípedo que puede tener espaciamiento uniforme respecto a cada una de las direcciones, o variable; opción que se incluye como dato de entrada.

## **2.2 MODELO MATEMÁTICO**

El modelo matemático de acoplamiento de flujo de fluidos a la deformación geomecánica de la roca para yacimientos naturalmente fracturados, tiene en cuenta los distintos componentes del yacimiento, esto es, el sistema de fracturas, el sistema del esqueleto sólido de la roca de porosidad primaria, y el fluido. El acoplamiento tiene en cuenta la variación no-lineal de las propiedades mecánicas de la roca, cuyo punto de encuentro respecto al flujo de fluidos será el comportamiento de las compresibilidades.

Los distintos componentes del yacimiento, se expresan en dos modelos matemáticos<sup>17</sup>:

- **Modelo de flujo de fluidos**, en donde se describe el comportamiento del flujo de fluidos a través del sistema sólido, y cuya variable para la implementación fue la presión.
- **Modelo de esfuerzo – deformación**, en donde se describe la deformación del sistema sólido a medida que cambia la presión y por ende el estado de esfuerzos. En este caso, la variable central para la implementación será los desplazamientos en las distintas direcciones.

### 2.2.1 MODELO DE FLUJO DE FLUIDOS

El modelo de flujo de fluidos describe el comportamiento a través del sistema sólido, tanto de la matriz como de las fracturas. Éste se basa en cuatro relaciones básicas, que fueron presentadas por Chen y Teufel<sup>18</sup>:

- Conservación de la masa del fluido
- Conservación de la masa del sólido
- Ley de Darcy
- Ecuación de estado

---

<sup>17</sup> Chen H.Y., Teufel L.W., Lee R.L., “Coupled Fluid Flow and Geomechanics in Reservoir Study. Theory and Governing Equations”, SPE, 1995.

<sup>18</sup> Chen y Teufel, Op. Cit., Pág 2-3.

### 2.2.1.1 Conservación de la masa del fluido

La ecuación que expresa la conservación de masa se trabaja para cada uno de los dos medios de flujo, la matriz y la fractura:

$$\text{En la matriz: } -\nabla \cdot (\rho_m \phi_m v_m) = \frac{1}{V_b} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \phi_m V_b) + T + \tilde{q} \quad (2-1)$$

$$\text{En la fractura: } -\nabla \cdot (\rho_f \phi_f v_f) = \frac{1}{V_b} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \phi_f V_b) - T + \tilde{q} \quad (2-2)$$

En estas ecuaciones el subíndice  $m$  indica el medio de la matriz y  $f$  el medio de la fractura.  $\nabla$  simboliza divergencia, la  $\rho$  simboliza la densidad,  $\phi$  es la porosidad,  $v$  es el vector de velocidad,  $V$  es el volumen,  $t$  es el tiempo,  $T$  es el término que expresa la transferencia de masa desde la matriz hacia las fracturas y  $q$  es el símbolo para las fuentes o sumideros.

### 2.2.1.2 Conservación de la masa del sólido

La ecuación de la conservación de la masa del sólido es la siguiente

$$-\nabla \cdot (\rho_s (1 - \phi_t) v_s) = \frac{1}{V_b} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1 - \phi_t) V_b) \quad (2-3)$$

### 2.2.1.3 Ley de Darcy

La ecuación de Darcy se expresa tanto para el flujo de fluidos en la matriz como en las fracturas.

$$\text{En la matriz: } \phi_m (v_m - v_s) = -\frac{k_m}{\mu_m} \nabla P_m \quad (2-4)$$

$$\text{En la fractura: } \phi_f (v_f - v_s) = -\frac{k_f}{\mu_f} \nabla P_f \quad (2-5)$$

#### 2.2.1.4 Ecuación de estado

En este caso trabajamos con una derivación de la ecuación de compresibilidad, que de igual modo se aplica para cada uno de los medios por los que acaece el flujo.

$$\text{En la matriz: } C_m = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P_m} \quad (2-6)$$

$$\text{En la fractura: } C_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P_f} \quad (2-7)$$

En las anteriores ecuaciones se mantiene la nomenclatura señalada anteriormente y ahora  $k$  simboliza el tensor de permeabilidad,  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $C$  se refiere a la compresibilidad, y  $P$  a la presión. Además, el término  $v_s$  simboliza el vector de la velocidad del sólido, y se relaciona con los desplazamientos por la ecuación:

$$v_s = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2-8)$$

Que a su vez se relaciona con el esfuerzo volumétrico por:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \nabla \cdot u \quad (2-9)$$

Donde  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  son los esfuerzos normales en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

De lo anterior puede derivarse que el gradiente de esta velocidad del sólido se relaciona con una variación del volumen bruto de la roca, respecto al tiempo.

$$\nabla \cdot v_s = \frac{de_v}{dt} = \frac{1}{V_b} \frac{dV_b}{dt} \quad (2-10)$$

De la relación de estas ecuaciones fundamentales obtenemos las ecuaciones diferenciales generales que describen el flujo de fluidos.

Para el sistema de la matriz tenemos la siguiente relación respecto a la presión:

$$\nabla \cdot \left( \rho_m \frac{k_m}{\mu_m} \nabla P_m \right) = \phi_m \rho_m \left[ (c_m + c_{pm} \beta_{pm}) \frac{\partial P_m}{\partial t} + c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_f}{\partial t} - c_{pcm} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} \right] + T + \tilde{q} \quad (2-11)$$

y de forma similar, para el sistema de fractura tenemos:

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{k_f}{\mu_f} \nabla P_f \right) = \phi_f \rho_f \left[ (c_f + c_{pf} \beta_{pf}) \frac{\partial P_f}{\partial t} + c_{pcf} \beta_{pm} \frac{\partial P_m}{\partial t} - c_{pcf} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} \right] - T + \tilde{q} \quad (2-12)$$

### 2.2.2 Ecuación de porosidad

La consideración de un sistema de doble porosidad deviene en la definición de dos porosidades diferentes: una para la matriz y otra para los canales de la fractura. Estas dos porosidades se relacionan por las siguientes ecuaciones<sup>19</sup>:

$$V_b = V_{pm} + V_{pf} + V_s \quad (2-13)$$

$$1 = \phi_m + \phi_f + \frac{V_s}{V_b} \quad (2-14)$$

$$\text{donde, } \phi_m = \frac{V_{pm}}{V_b} \quad (2-15)$$

$$\text{y } \phi_f = \frac{V_{pf}}{V_b} \quad (2-16)$$

---

<sup>19</sup> Osorio, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2000.

entonces, la porosidad efectiva total se define como:

$$\phi_t = \phi_m + \phi_f = \frac{V_{pm} + V_{pf}}{V_b} \quad (2-17)$$

considerando el caso de la porosidad de la matriz, podemos presentar su forma diferencial como:

$$\frac{d\phi_m}{\phi_m} = \frac{dV_{pm}}{V_{pm}} - \frac{dV_b}{V_b} \quad (2-18)$$

y como 
$$\frac{dV_{pm}}{V_{pm}} = -c_{pcm} d\sigma_p^{-d} \quad (2-19)$$

y 
$$\frac{dV_b}{V_b} = -c_{bc} d\sigma_b^{-d} \quad (2-20)$$

entonces

$$\frac{d\phi_m}{\phi_m} = -c_{pcm} d\sigma_p^{-d} + c_{bc} d\sigma_b^{-d} \quad (2-21)$$

La ecuación anterior expresa el incremento de la porosidad de la matriz en términos del incremento de los esfuerzos efectivos y las propiedades (compresibilidades) del sistema de doble porosidad.

Esta ecuación es la que se discretiza, para determinar la variación de la porosidad respecto al tiempo.

### 2.2.3 MODELO ESFUERZO – DEFORMACIÓN

El modelo de esfuerzo – deformación se desarrolla teniendo en cuenta que las operaciones de producción e inyección de fluidos devienen en cambios en el estado de esfuerzos en el yacimiento. Estos cambios conllevan a una deformación de la roca y por tanto, a variaciones en el volumen, porosidad y

permeabilidad del yacimiento. Por tanto, el modelo considera una deformación infinitesimal no-lineal a lo largo de todo el yacimiento<sup>20</sup>.

Para nuestro caso, esa deformación infinitesimal se representa a través de una forma incremental de las variables, lo cual facilita nuestro desarrollo en diferencias finitas con el propósito de determinar las variaciones de la parte sólida con los cambios que se presentan en la presión de poro, así, encontramos relacionadas las variaciones de la presión y de los desplazamientos a lo largo del yacimiento.

El modelo tal y como fue presentado por Chen et al. se basa en tres ecuaciones:

- Ecuaciones de equilibrio
- Ecuaciones de deformación-desplazamiento
- Ecuaciones de Deformación-esfuerzo-presión

### **2.2.3.1 Ecuaciones de equilibrio**

Las ecuaciones de equilibrio tienen el propósito de garantizar el equilibrio de esfuerzos después de una variación del tiempo.

La heterogeneidad del yacimiento respecto a la variación de los esfuerzos se haya representada por el gradiente de esfuerzos, lo cual establece que no puede presuponerse a priori que los esfuerzos permanezcan constantes a lo largo del yacimiento.

Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio están relacionadas con la siguiente expresión<sup>21</sup>:

---

<sup>20</sup> Chen y Teufel, *Ibíd.*, Págs. 510-511

<sup>21</sup> Chen y Teufel, Osorio, Pags. 3-5.

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2-22)$$

En estas ecuaciones  $\sigma_{ij}$  representan los componentes del tensor de esfuerzos.

### 2.2.3.2 Ecuaciones de Deformación- Desplazamiento

En estas ecuaciones se trata de determinar las relaciones que se dan entre los desplazamientos y las deformaciones<sup>22</sup>.

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-23)$$

En este caso,  $\varepsilon$  se refiere a la deformación, mientras que  $u$  se refiere a los desplazamientos incrementales.

El esfuerzo volumétrico  $\Delta \varepsilon_{ij}$  puede expresarse como:

$$\Delta e_v = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \quad (2-24)$$

### 2.2.3.3 Ecuaciones de Deformación- Esfuerzo- Presión

Las ecuaciones que gobiernan la relación entre la deformación, el esfuerzo y la presión, están dadas por la siguiente relación<sup>23</sup>:

$$\Delta \sigma'_{ij} = 2G \Delta \varepsilon_{ij} + \lambda \Delta \varepsilon_v \delta_{ij} \quad (2-25)$$

$$\Delta \sigma'_{ij} = \Delta \sigma_{ij} - \beta_m \Delta p_m \delta_{ij} - \beta_f \Delta p \delta_{ij} \quad (2-26)$$

---

<sup>22</sup> Chen y Teufel, Osorio Pág. 5.

<sup>23</sup> Ibíd., Pág. 6.

Aquí, el término  $G$  se refiere al módulo de cizalladura,  $\lambda$  es el parámetro de Lamé,  $\alpha$  es el parámetro poro-elástico de Biot,  $\varepsilon_v$  es la deformación volumétrica y  $\delta$  es el operador delta de Kronecker, el cual presenta dos valores:

$$\delta_{i\varphi}=1, \text{ si } i=j$$

$$\delta_{i\varphi}=0, \text{ si } i \neq j$$

Antes de presentar la conjunción de estas relaciones para el modelo de esfuerzo-deformación, hay que resaltar que en un medio poroso la deformación se determina por la variación del esfuerzo efectivo, que actúa sobre la roca:

Por tanto, el esfuerzo efectivo  $\Delta\sigma'$  puede entenderse como la carga que soporta realmente la roca. Este se define como la diferencia entre el esfuerzo total y la presión de poro, así:

$$\Delta\sigma'_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \alpha\Delta p\delta_{ij} \quad (2-27)$$

Entonces, la ecuación de deformación – esfuerzo – presión, puede describirse de la siguiente manera:

$$\Delta\sigma'_{ij} = 2G\Delta\varepsilon_{ij} + \lambda\Delta\varepsilon_v\delta_{ij} \quad (2-28)$$

Del acoplamiento de las ecuaciones anteriores, se tienen las ecuaciones generales de deformación geomecánica:

$$\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial z} + \nabla \cdot [G\nabla(\Delta u_x)] + \nabla \left[ G \frac{\partial(\Delta u)}{\partial x} \right] + \frac{\partial[\lambda\nabla(\Delta u)]}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_{bm}\Delta P_m)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_{bf}\Delta P_f)}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(2-29)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{yz}}{\partial z} + \nabla \cdot [G\nabla(\Delta u_y)] + \nabla \left[ G \frac{\partial(\Delta u)}{\partial y} \right] + \frac{\partial[\lambda\nabla(\Delta u)]}{\partial y} + \frac{\partial(\beta_{bm}\Delta P_m)}{\partial y} + \frac{\partial(\beta_{bf}\Delta P_f)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(2-30)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} + \nabla \cdot [G\nabla(\Delta u_z)] + \nabla \left[ G \frac{\partial(\Delta u)}{\partial z} \right] + \frac{\partial[\lambda\nabla(\Delta u)]}{\partial z} + \frac{\partial(\beta_{bm}\Delta P_m)}{\partial z} + \frac{\partial(\beta_{bf}\Delta P_f)}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(2-31)$$

## 2.3 MODELO NUMÉRICO

Las ecuaciones generales obtenidas en el modelo matemático se solucionan por el método de diferencias finitas de segundo orden sobre una malla irregular con nodos distribuidos. Para esto se asume un esquema completamente implícito con el fin de garantizar la máxima estabilidad numérica<sup>24</sup>. Por medio de lo anterior se llevan las ecuaciones a expresiones espacio – temporales de las variables centrales del proceso (P y U).

### 2.3.1 Ecuaciones del modelo de flujo de fluidos

La ecuación de flujo que se obtuvo queda discretizada de la siguiente forma:

Para la matriz

$$\begin{aligned}
 E_{i,j,k} A \Delta P_{m(i+1,j,k)}^{n+1} + W_{i,j,k} A \Delta P_{m(i-1,j,k)}^{n+1} + N_{i,j,k} B \Delta P_{m(i,j+1,k)}^{n+1} + \\
 S_{i,j,k} B \Delta P_{m(i,j-1,k)}^{n+1} + TC_{i,j,k} D \Delta P_{m(i,j,k+1)}^{n+1} - TC_{i,j,k} D P_{m(i,j,k)}^{n+1} + \\
 BC_{i,j,k} D \Delta P_{m(i,j,k-1)}^{n+1} + Ci,j,k \Delta P_{m(i,j,k)}^{n+1} = TI1_{i,j,k}
 \end{aligned} \quad (2-32)$$

y para el sistema de fracturas:

$$\begin{aligned}
 E_{i,j,k} A \Delta P_{f(i+1,j,k)}^{n+1} + W_{i,j,k} A \Delta P_{f(i-1,j,k)}^{n+1} + N_{i,j,k} B \Delta P_{f(i,j+1,k)}^{n+1} + \\
 S_{i,j,k} B \Delta P_{f(i,j-1,k)}^{n+1} + TC_{i,j,k} D \Delta P_{f(i,j,k+1)}^{n+1} - TC_{i,j,k} D \Delta P_{f(i,j,k)}^{n+1} + \\
 BC_{i,j,k} D \Delta P_{f(i,j,k-1)}^{n+1} + Ci,j,k \Delta P_{f(i,j,k)}^{n+1} = TI2_{i,j,k}
 \end{aligned} \quad (2-33)$$

<sup>24</sup> Osorio, Simulación Numérica de Yacimientos, Documento 3: Conceptos básicos sobre aproximación de ecuaciones diferenciales a diferencias finitas, Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín, Medellín, febrero, 2002.

### 2.3.2 Ecuación de porosidad

La ecuación discretizada de porosidad queda de la siguiente manera:

$$\phi_m^{n+1} = \frac{\phi_m^n + \left\{ - \left( c_{bc}^{s\ n+1} - c_s^{s\ n+1} \right) \left( \Delta \sigma_{m(ijk)}^{n+1} \right) - \beta_{pm}^{n+1} \left( \Delta P_{m(ijk)}^{n+1} \right) - \beta_{pf}^{n+1} \left( \Delta P_{f(ijk)}^{n+1} \right) \right\}}{1 - c_{bc}^{d\ n+1} \left( \Delta \sigma_{ijk}^{n+1} \right) - \beta_{bm}^{n+1} \left( \Delta P_{m(ijk)}^{n+1} \right) - \beta_{bf}^{n+1} \left( \Delta P_{f(ijk)}^{n+1} \right)}$$

(2-34)

### 2.3.3 Ecuaciones del modelo esfuerzo – deformación

La ecuación discretizada para el eje x, tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} N_{i,j,k} \Delta Ux_{i,j+1,k}^{n+1} + S_{i,j,k} \Delta Ux_{i,j-1,k}^{n+1} + W_{i,j,k} \Delta Ux_{i-1,j,k}^{n+1} - \\ E_{i,j,k} \Delta Ux_{i+1,j,k}^{n+1} + BC_{i,j,k} \Delta Ux_{i,j,k-1}^{n+1} \\ TC_{i,j,k} \Delta Ux_{i,j,k+1}^{n+1} + 2C_{i,j,k} \Delta Ux_{i,j,k}^{n+1} = TI3_{i,j,k} \end{aligned}$$

(2-35)

De manera análoga, para el eje y:

$$\begin{aligned} N_{i,j,k} \Delta Uy_{i,j+1,k}^{n+1} + S_{i,j,k} \Delta Uy_{i,j-1,k}^{n+1} + W_{i,j,k} \Delta Uy_{i-1,j,k}^{n+1} - \\ E_{i,j,k} \Delta Uy_{i+1,j,k}^{n+1} + BC_{i,j,k} \Delta Uy_{i,j,k-1}^{n+1} \\ TC_{i,j,k} \Delta Uy_{i,j,k+1}^{n+1} + 2C_{i,j,k} \Delta Uy_{i,j,k}^{n+1} = TI4_{i,j,k} \end{aligned}$$

(2-36)

y, finalmente, para el eje z:

$$\begin{aligned}
 & N_{i,j,k} \Delta U_{i,j+1,k}^{n+1} + S_{i,j,k} \Delta U_{i,j-1,k}^{n+1} + W_{i,j,k} \Delta U_{i-1,j,k}^{n+1} - \\
 & E_{i,j,k} \Delta U_{i+1,j,k}^{n+1} + BC_{i,j,k} \Delta U_{i,j,k-1}^{n+1} \\
 & TC_{i,j,k} \Delta U_{i,j,k+1}^{n+1} + 2C_{i,j,k} \Delta U_{i,j,k}^{n+1} = TIS_{i,j,k}
 \end{aligned} \tag{2-37}$$

Cada una de las ecuaciones anteriores está expresada en stencils, de forma tal que las letras iniciales de cada uno de los términos simbolizan la posición en el espacio de las presiones que influyen en la prosecución del programa. Así, N significa norte, S sur, etc. El significado de estos se verá mejor en la deducción de las ecuaciones.

## 2.4 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

La solución de las ecuaciones obtenidas anteriormente, requieren de unas condiciones iniciales tanto para la presión como para los desplazamientos, de la misma forma en que necesita del establecimiento de unas condiciones de límite externo o de frontera. El uso de estas últimas tiene gran importancia en el desarrollo de la implementación del modelo por cuanto nos permiten establecer un dominio externo en donde la deformación no tiene lugar.

Para nuestro caso<sup>25</sup>, usamos condiciones de tipo Dirichlet para la ecuación del modelo de flujo. La ecuación del modelo esfuerzo – deformación usa condiciones tipo Neumann en el plano superior, es decir, para NZ=1, puesto que el efecto del esfuerzo vertical se mantiene constante. Para los planos

---

<sup>25</sup> Osorio J.G., Chen H.Y. and Teufel L.W., “Numerical Simulation of Coupled Fluid-Flow/geomechanical Behavior of Tight Gas Reservoirs with Stress Sensitive Permeability”, SPE, Págs. 6. 1997.

restantes usa condiciones de tipo Dirichlet, que nos permiten mantener una variación del estado de esfuerzos igual a cero, en las posiciones alejadas del pozo. La incidencia de éstas en el desarrollo del programa, pueden verse en la sección de análisis de resultados.

#### **2.4.1.1 Condiciones iniciales**

Con base en lo anterior, las condiciones iniciales que se tuvieron en cuenta son:

Los incrementos en los desplazamientos en las direcciones x, y y z son iguales a cero, es decir:

$$\Delta u_x(x, y, z, 0) = 0 \quad (2-38)$$

$$\Delta u_y(x, y, z, 0) = 0 \quad (2-39)$$

$$\Delta u_z(x, y, z, 0) = 0 \quad (2-40)$$

El incremento en la presión de poro es igual a cero, situación que para nuestro caso se trata de un único valor de presión de poro inicial para todo el yacimiento.

$$p(x, y, z, 0) = p^o(x, y, z, 0), \text{ o } \Delta p(x, y, z, 0) = 0 \quad (2-41)$$

#### **2.4.1.2 Condiciones de frontera**

Como ya se anotó anteriormente, se asumen condiciones de frontera para cada uno de los modelos.

#### 2.4.1.2.1 Condiciones de frontera para el modelo de flujo de fluidos

Para este caso se asume que no hay presencia de flujo de fluidos en los límites externos del yacimiento; situación conocida como la suposición de un yacimiento cerrado. Esto puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Delta p \cdot n = 0 \quad (2-42)$$

En donde  $n$  es el vector normal exterior a cada plano del yacimiento.

#### 2.4.1.2.2 Condiciones de frontera para el modelo de esfuerzo-deformación

Aquí se consideran que el límite superior del yacimiento es deformable, pero el esfuerzo vertical es constante y debido al peso de los estratos superiores. Las ecuaciones son las siguientes<sup>26</sup>:

$$\Delta T_x^\mu = \Delta \sigma_{x0} \mu_x + \Delta \tau_{xy0} \mu_y + \Delta \tau_{xz0} \mu_z \quad (2-43)$$

$$\Delta T_y^\mu = \Delta \tau_{xy0} \mu_x + \Delta \sigma_{y0} \mu_y + \Delta \tau_{yz0} \mu_z \quad (2-44)$$

$$\Delta T_z^\mu = \Delta \tau_{xz0} \mu_x + \Delta \tau_{yz0} \mu_y + \Delta \sigma_{z0} \mu_z \quad (2-45)$$

Pero como ya se dijo anteriormente que en un medio poroso la deformación se determina por la variación del esfuerzo efectivo, las ecuaciones anteriores se modifican para expresarse en términos del esfuerzo efectivo, de forma tal que obtenemos las siguientes expresiones.

---

<sup>26</sup> Osorio, José, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Coupled Fluid Flow and Mechanical deformation, Governing equations, Págs. 25-26, 2000.

$$G\left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} \mu_x + \frac{\partial \Delta u_x}{\partial y} \mu_y + \frac{\partial \Delta u_x}{\partial z} \mu_z\right) + G\left(\frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} \mu_x + \frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} \mu_y + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial x} \mu_z\right) + \lambda \Delta \varepsilon_v \mu_x = 0.$$

.....(2-46)

$$G\left(\frac{\partial \Delta u_y}{\partial y} \mu_y + \frac{\partial \Delta u_y}{\partial z} \mu_z + \frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} \mu_x\right) + G\left(\frac{\partial \Delta u_y}{\partial y} \mu_y + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial y} \mu_z + \frac{\partial \Delta u_x}{\partial y} \mu_x\right) + \lambda \Delta \varepsilon_v \mu_y = 0.$$

.....(2-47)

$$G\left(\frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \mu_z + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial x} \mu_x + \frac{\partial \Delta u_z}{\partial y} \mu_y\right) + G\left(\frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \mu_z + \frac{\partial \Delta u_x}{\partial z} \mu_x + \frac{\partial \Delta u_y}{\partial z} \mu_y\right) + \lambda \Delta \varepsilon_v \mu_z = 0$$

.....(2-48)

De otro lado, para los límites laterales e inferior, se asume que no presentan deformación durante los procesos, para lo cual tenemos las siguientes relaciones:

$$\Delta u_x (x, y, z, t)_{\text{limite exterior yacimiento}} = 0 \quad (2-49)$$

$$\Delta u_y (x, y, z, t)_{\text{limite exterior yacimiento}} = 0 \quad (2-50)$$

$$\Delta u_z (x, y, z, t)_{\text{limite exterior yacimiento}} = 0 \quad (2-51)$$

## 2.5 MODELO DE ORDENADOR

Para el presente trabajo, el modelo se desarrolló en lenguaje VISUAL-BASIC, contando con el entorno gráfico de MATLAB 5.3. El desarrollo de este modelo involucra tres partes:

- Algoritmo
- Datos de ingreso
- Datos de salida

### 2.5.1 ALGORITMO

El algoritmo se fundamenta en las ecuaciones resultantes de la discretización de las expresiones de los modelos de flujo de fluidos y esfuerzo – deformación, las cuales, como ya se señaló, exponen como variables principales a la presión y los desplazamientos en las distintas direcciones. Con base en esto, el algoritmo que se implementó fue el siguiente:

- Se definieron variables como datos de entrada, dentro de los cuales se tienen los términos de discretización, las propiedades iniciales de la roca y del fluido. Dentro de las posibilidades establecidas en los datos de entrada, se tiene la variabilidad de las dimensiones de la malla que representa al yacimiento y se asume un valor de permeabilidad inicial para cada una de las direcciones.
- Con la lectura de estos datos se determinan las compresibilidades que no aparecen registradas en la literatura, y que asumen como de difícil obtención en el campo, a partir de los valores conocidos de la compresibilidad del sólido ( $C_s$ ) y la obtenida de pruebas de variación de volumen debida a la presión de confinamiento ( $C_{bc}$ , o compresibilidad total efectiva de la roca).
- Con los valores de las compresibilidades, calculamos los distintos coeficientes de esfuerzo efectivo incremental con la variación del volumen bruto ( $B_{bf}$ ,  $B_{bm}$ ), con el fin de calcular a posteriori los coeficientes de esfuerzo efectivo incremental con la variación de la presión de poro ( $B_{pm}$ ,  $B_{pf}$ ).

- Luego se calculan para la variación del dimensionamiento de la malla, los valores del módulo de cizalladura y del parámetro de Lamé, que soportaran la no-linealidad de la variación en los desplazamientos.
- Calculamos los coeficientes de las ecuaciones resultantes del proceso de discretización para el modelo de flujo, que dependen de las condiciones iniciales y de los parámetros hallados anteriormente.
- Suponemos valores de las variables principales a un tiempo posterior, y calculamos el incremento respecto al valor inicial,  $\Delta P_m^{n+1}$ ,  $\Delta P_f^{n+1}$ ,  $\Delta P^{n+1}$ ,  $\Delta U_x^{n+1}$ ,  $\Delta U_y^{n+1}$ ,  $\Delta U_z^{n+1}$ , para cada uno de los nodos.
- Definimos las condiciones de frontera para las variables. En este momento se determina un dominio exterior en el que no se presenta variación del estado de esfuerzos. Los cálculos correspondientes al método iterativo (PSOR), corresponden al dominio interno.
- Con los valores anteriores, calculo la matriz de variación de los esfuerzos, de porosidad, y de compresibilidad, las cuales se actualizarán en cada bucle del proceso iterativo.
- Calculo los términos independientes ( $T$ ), de las distintas ecuaciones del modelo numérico, así como la variación del coeficiente del término que define la variación de las presiones para cada nodo ( $C$ ).
- Calculo los nuevos valores del incremento en cada una de las variables  $\Delta P_m^{n+1}$ ,  $\Delta P_f^{n+1}$ ,  $\Delta P^{n+1}$ ,  $\Delta U_x^{n+1}$ ,  $\Delta U_y^{n+1}$ ,  $\Delta U_z^{n+1}$ , y la variación de la permeabilidad con estos valores.

- Comparo los valores calculados con los que determinaron la suposición y aplico el criterio de convergencia, el cual involucra el mismo margen de variación aceptada, para todas las variables.
- Si no se cumple el criterio, asumo los valores calculados como valores iniciales del proceso para el cálculo de las distintas variables, hasta que sea alcanzado el criterio de convergencia.
- Cumplido el criterio se calculan los valores de las presiones para el tiempo estipulado.
- Con los valores anteriores calculo el nuevo estado de esfuerzos y la variación de la permeabilidad respecto al valor inicial.
- Se presenta el listado de las variables y se incluye la opción gráfica respecto a cada uno de los estratos, con el propósito de poder mirar la variación espacial de las variables.

## **2.5.2 Datos de Ingreso**

Los datos de ingreso corresponden a las propiedades del fluido y del medio sólido, así como a los valores que incidirán en la discretización. Los tipos de datos son:

### **2.5.2.1 Datos de discretización**

La lectura de estos corresponde al número de celdas en las direcciones x, y y z, la ubicación del pozo, posición del estrato productor y tiempo de análisis.

Los valores de las dimensiones de las celdas, pueden ser de orden general o particular. La opción se determinó necesaria por cuanto el dimensionamiento influye notablemente sobre el comportamiento del estado de esfuerzos en las posiciones cercanas al pozo, situación que se muestra en el análisis de resultados.

#### **2.5.2.2 Propiedades del fluido y la roca**

Las propiedades iniciales corresponden tanto al fluido como a la roca. Respecto al fluido las variables leídas son la viscosidad, la gravedad API, la temperatura del yacimiento y el factor volumétrico de formación. Para la roca se leen la porosidad inicial, la densidad de la roca (matriz y fractura), la permeabilidad, compresibilidad del sólido y compresibilidad efectiva de la roca.

#### **2.5.2.3 Propiedades mecánicas**

Aquí se leen valores iniciales para el módulo de Young y de Poisson y esfuerzos iniciales resultantes de pruebas de laboratorio.

Dentro de este tipo de datos podemos incluir la permeabilidad, de la cual se presenta la opción de generar una matriz de datos iniciales, correspondiente a las distintas posiciones del pozo (si se cuenta con la información necesaria), o valores iniciales para cada dirección.

#### **2.5.3 Datos De Salida**

El manejo de todas las variables del proceso es matricial, por lo cual, la presentación de los datos de salida obedece a este tratamiento. Las variables que genera un listado corresponde a las presiones del medio sólido

$P_m$  y  $P_f$ , los desplazamientos  $U_x$ ,  $U_y$  y  $U_z$ , la porosidad de la matriz obtenida después de la variación de los esfuerzos, los valores de las permeabilidades en cada una de las direcciones, valores del esfuerzo medio, del esfuerzo efectivo y el incremento para cada una de las posiciones.

Para cada una de estas variables, puede generarse una gráfica en MATLAB 5.3, después de seleccionar un estrato, que permite visualizar en 3D, la variación de las propiedades.

Aunado a lo anterior, es posible generar una tabla de propiedades que corresponde a su variación respecto al plano del estrato productor, lo cual facilitará el análisis pertinente. Las variables que se tomaron en cuenta para esto fueron: el esfuerzo medio, el esfuerzo efectivo y la variación de la permeabilidad, por considerar que estas variables resultan representativas del modelo de acoplamiento. Además, pueden generarse gráficas en 2D de estas propiedades, usando también el entorno gráfico de MATLAB 5.3.

### **3. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

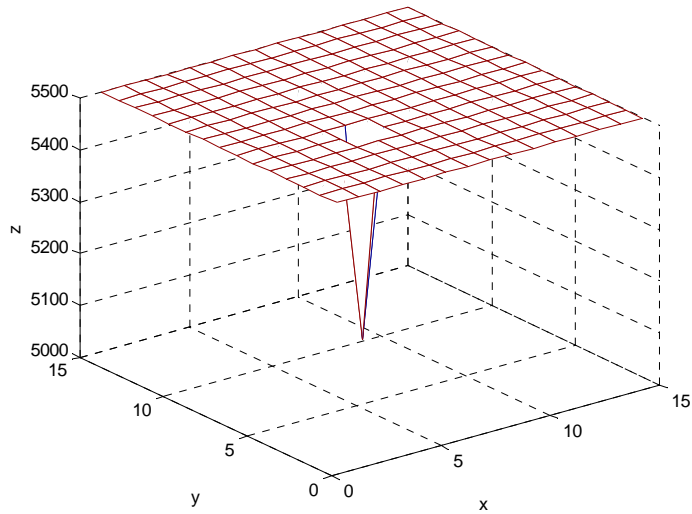
Con la producción e inyección de fluidos varía el estado de esfuerzos en el yacimiento. Inicialmente se considera que el esfuerzo y la presión de poro son constantes a través del yacimiento, pero al empezar a producir, la presión de poro empieza a declinar. Esta reducción causa deformación de la parte sólida de la roca que resulta en la variación del estado de esfuerzos.

Para el análisis de lo anterior se utilizan datos de entrada que involucran tanto las propiedades del fluido como las de la roca, y que aparecen consignadas en la sección correspondiente a los datos de entrada del modelo de ordenador.

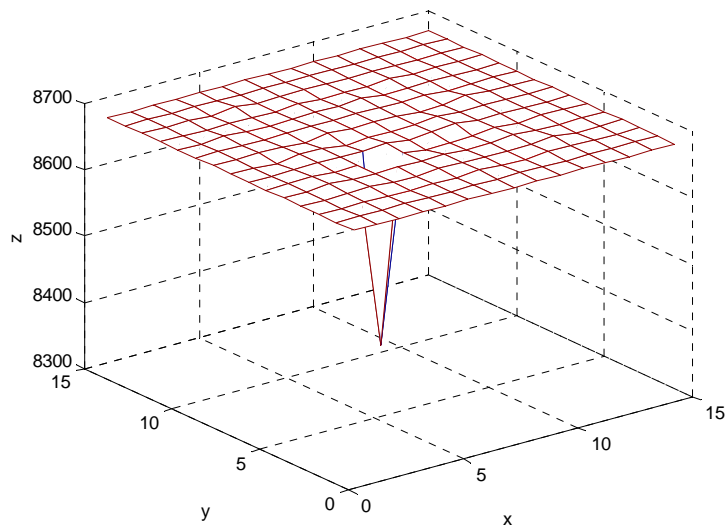
Los efectos que tales cambios tienen para el yacimiento se presentan a continuación.

#### **3.1 Efecto sobre la presión de poro y los esfuerzos con la variación espacial**

Los valores graficados en las figuras a continuación, muestran que el esfuerzo es mínimo en la cercanía al pozo, donde la presión de poro es siempre mínima y por tanto, la deformación de la roca es máxima. A medida que la distancia del pozo incrementa, la presión de poro se aproxima al valor inicial y de igual forma lo hace el estado de esfuerzos.



**Figura 1.** Comportamiento de la presión de poro



**Figura 2.** Comportamiento del esfuerzo efectivo

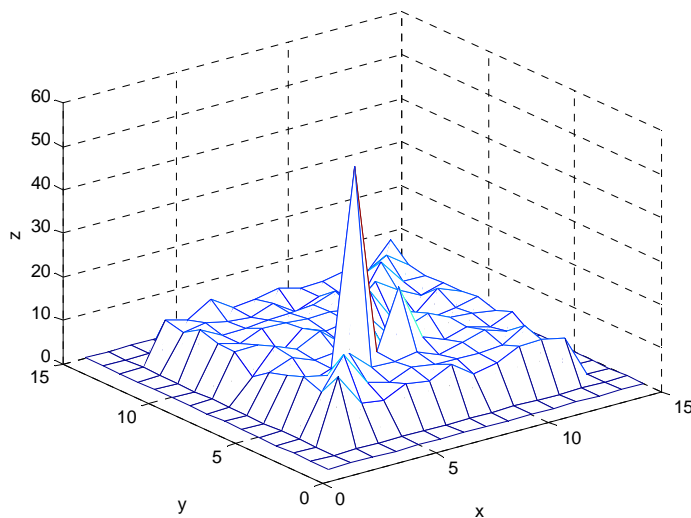
A partir de la definición del esfuerzo efectivo vemos la relación directa con la presión de poro, y para visualizar el efecto en el estado de esfuerzos, debemos tener en cuenta que el esfuerzo efectivo es una medida de los esfuerzos que actúan sobre la roca.

### 3.2 EFECTO DEL INCREMENTO DEL ESFUERZO EFECTIVO CON LA VARIACIÓN TEMPORAL.

El punto anterior puede analizarse con la figura 3, que nos muestra el incremento del esfuerzo efectivo para la posición del estrato productor.

Aquí se observa que el cambio en el esfuerzo efectivo es mayor en las cercanías al pozo y disminuye con la distancia al pozo, con lo cual se señala que es cerca al pozo donde ocurre el mayor efecto sobre la permeabilidad.

En la figura observamos la variación porcentual respecto al esfuerzo para tiempos iniciales. El cambio abrupto en el esfuerzo para la posición del pozo significa una reducción de la permeabilidad y, por tanto, en la capacidad de flujo del medio poroso. Dicho de otra forma, y teniendo en cuenta el punto anterior, esto significa que la reducción en la presión de poro en la posición del pozo genera un drawdown menor que en las posiciones restantes.



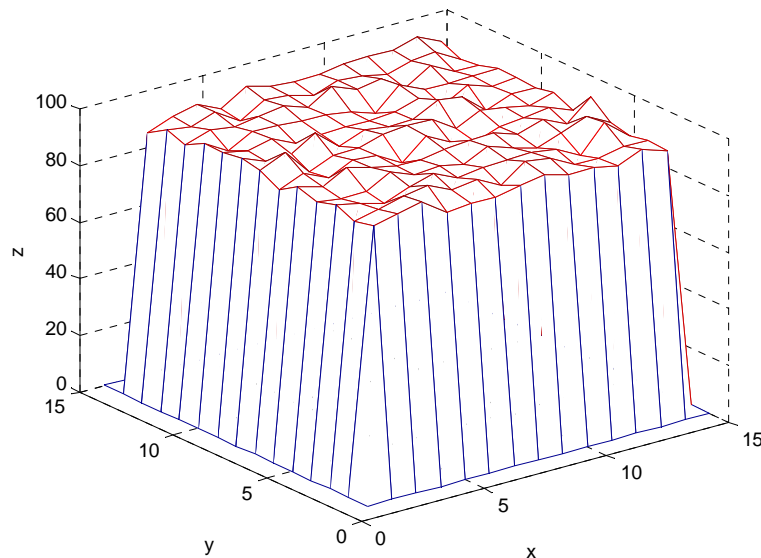
**Figura 3.** Efecto del incremento del esfuerzo efectivo con la variación temporal

### 3.3 EFECTO SOBRE LA PERMEABILIDAD

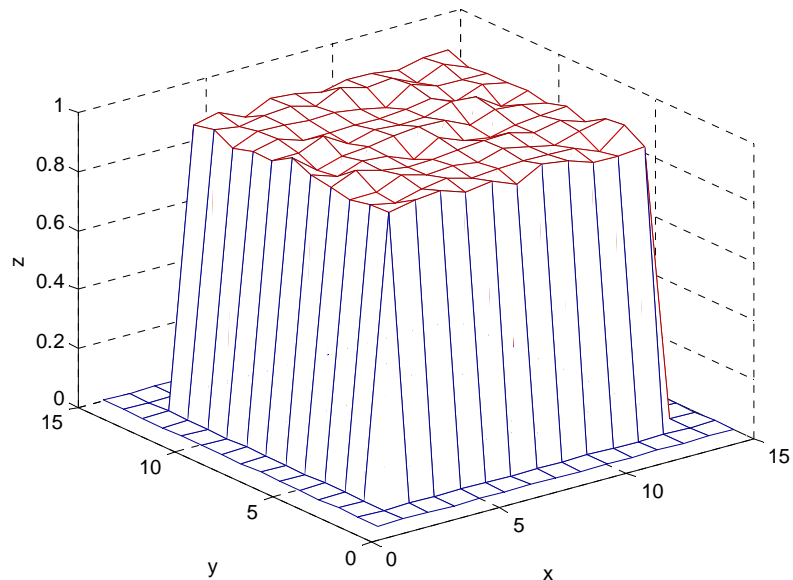
La figura 4, muestra la variación de la permeabilidad y la figura 5 determina el porcentaje de los nuevos valores frente al valor inicial.

La acotación directa surge entonces, de la máxima variación de la permeabilidad en las cercanías al pozo, tendiendo a cero en su proximidad a los límites del yacimiento, en donde, como se vio en la figura 3, el incremento del esfuerzo efectivo es mínimo.

Debido a que para este caso se consideró un tiempo de 200 días, se presenta una variación heterogénea de la permeabilidad para las diferentes posiciones de la malla, pero esta situación cambia para tiempos mayores, en donde parece darse un reordenamiento de los valores y por ello, una variación más uniforme en las posiciones lejanas al pozo.



**Figura 4.** Efecto sobre la permeabilidad



**Figura 5.** Efecto sobre el porcentaje de la permeabilidad

La variación de las propiedades con el tiempo se analizó a partir del comportamiento de la permeabilidad.

Para ello se grafica, para el estrato productor, los valores obtenidos a diferentes tiempos de producción y el análisis se fundamenta en la consideración de las diferentes condiciones internas en el pozo.

La figura 6 muestra la variación de la permeabilidad con el tiempo, cuando el pozo es producido a un caudal constante y la figura 7 muestra tal variación cuando se mantiene la presión constante.

A partir de la variación de las condiciones se determina un cambio con el comportamiento de la presión de poro que a su vez, deviene en una relación con el comportamiento del esfuerzo efectivo.

En ambos casos, se puede establecer que los valores máximos de la permeabilidad, no corresponden a las fronteras del yacimiento, como aparentemente habría de esperarse, sino a posiciones intermedias; situación que se explica por el comportamiento de la figura 3, en donde el incremento del esfuerzo efectivo se reduce considerablemente a medida que nos alejamos del pozo.

La compresión es generada por el diferencial de presión que se obtiene de la reducción de la presión de poro. A medida que la distancia aumenta, respecto al pozo, el diferencial tiende a cero, con lo cual la compresión disminuye.

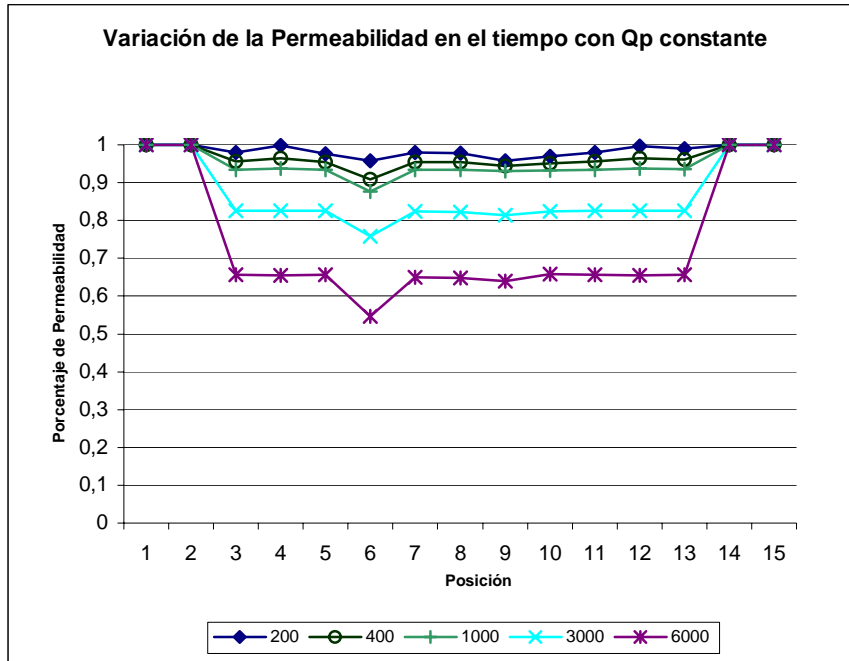
### **3.4 VARIACIÓN DE LA PERMEABILIDAD EN LA INTERSECCIÓN DEL ESTRATO PRODUCTOR Y EL PLANO VERTICAL QUE CONTIENE EL POZO PARA EL CASO DE CAUDAL DE PRODUCCIÓN CONSTANTE.**

Respecto a esta situación se puede determinar un comportamiento de la permeabilidad definido en su reducción gradual con el tiempo.

En este caso, la máxima reducción sigue estando referida a las posiciones cercanas, y tal situación se mantiene con la variación temporal, pero el cambio en el tiempo conlleva a una reducción en las distintas posiciones de forma gradual desde el pozo hasta los límites, en una forma muy parecida para todos los tiempos.

Esto puede explicarse en cuanto que un caudal de producción constante, indica una variación del volumen del yacimiento de igual forma, que genera un acomodamiento de los esfuerzos de manera similar a medida que transcurre el tiempo. Situación que conlleva a la similitud de la variación de la permeabilidad para las distintas posiciones.

A pesar de eso, la caída de los valores para tiempos grandes, se maneja en rangos similares a los de la situación de la  $P_{wf}$  constante.



**Figura 6.** Variación de la permeabilidad en la intersección del estrato productor y el plano vertical que contiene el pozo para el caso de caudal de producción constante

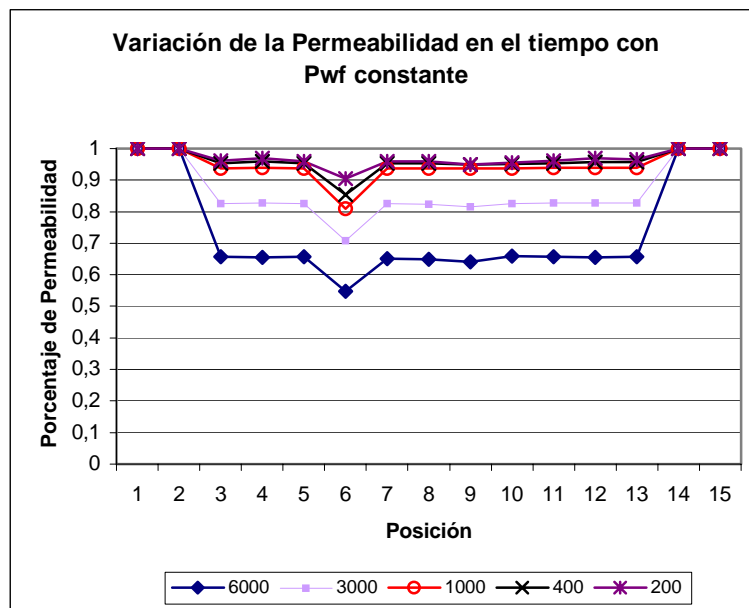
### 3.5 VARIACIÓN DE LA PERMEABILIDAD EN LA INTERSECCIÓN DEL ESTRATO PRODUCTOR Y EL PLANO VERTICAL QUE CONTIENE EL POZO PARA EL CASO DE PWF CONSTANTE

El mantener la  $P_{wf}$ , genera un efecto sobre el reordenamiento del estado de esfuerzos que será notable para los tiempos tempranos, en los que los esfuerzos se empiezan a recomodar en el yacimiento. Por ello para las posiciones cercanas al pozo sucede una mayor variación de los esfuerzos,

que conlleva a una máxima reducción de la permeabilidad con respecto a las posiciones límites del yacimiento.

Sin embargo, al contar con una presión constante, se genera para tiempos posteriores una acomodación de los esfuerzos, que deviene en una reducción similar para las distintas posiciones, con el incremento del tiempo.

A partir de lo anterior, no podría inferirse una tendencia hacia un valor constante de permeabilidad, con un estado final de los esfuerzos, puesto que la producción del fluido, genera un cambio en el volumen del yacimiento, que ocasiona una reorganización constante. Quizá la especulación alcance para decir que la tendencia se da hacia un valor constante en la variación del estado de esfuerzos, para tiempos grandes, con la condición de una  $P_{wf}$  constante; pero esto sobrepasa los propósitos de este trabajo.



**Figura 7.** Variación de la permeabilidad en la intersección del estrato productor y el plano vertical que contiene el pozo para el caso de  $P_{wf}$  constante

En este caso, se hace evidente una reducción de la permeabilidad con el incremento del tiempo. Sin embargo, a medida que transcurre el tiempo, la máxima reducción que ocurre en las cercanías al pozo nunca se hace similar a la reducción en las posiciones cercanas a las fronteras.

Más importante aún es que a medida que incrementa el tiempo, la reducción de la permeabilidad es mayor.

Se nota que los porcentajes de permeabilidad para los tiempos mayores, permanece en valores que llegan a la mitad del valor para tiempos pequeños.

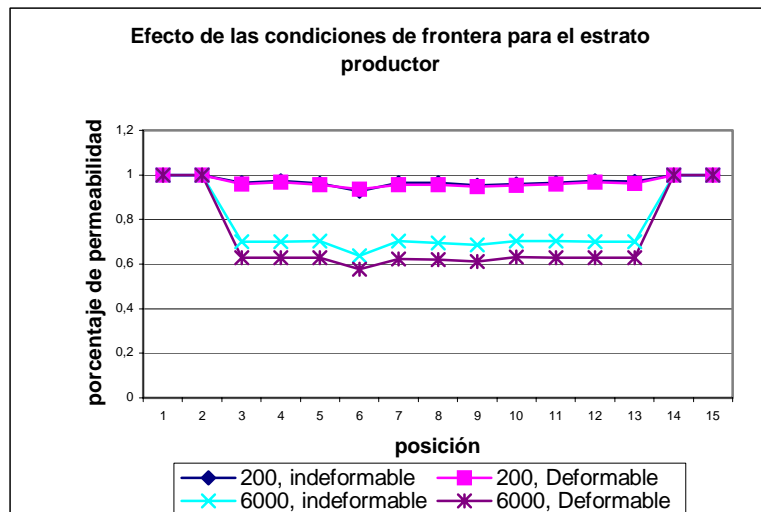
### **3.6 EFECTO DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA**

Cuantitativamente podemos determinar que la incidencia de las condiciones de frontera, va de la mano con la variación en el tiempo, siendo el cambio en el porcentaje de la permeabilidad inicial muy similar para tiempos pequeños.

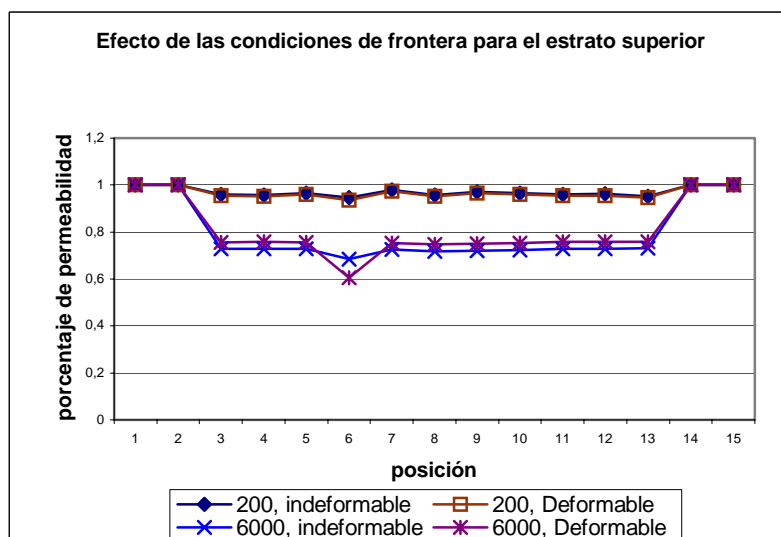
En el caso de tiempos grandes, se nota una mayor reducción de la permeabilidad para el caso del esfuerzo constante en las fronteras, mostrando que los valores de permeabilidad son semejantes para las otras condiciones.

En las tres consideraciones de las condiciones de frontera, se presenta una reducción de permeabilidad cercana al 90 % para tiempos pequeños; siendo en las cercanías al pozo, en donde se presenta una máxima reducción.

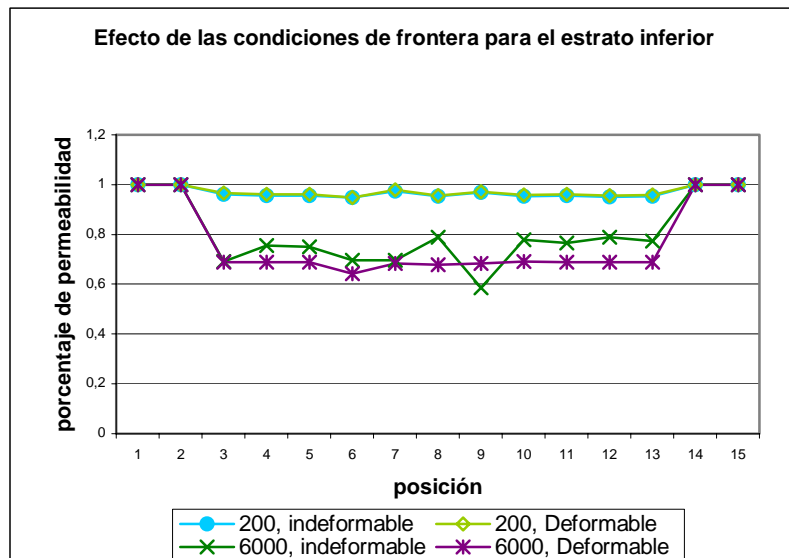
En cambio, la reducción de la permeabilidad para tiempos grandes es mayor, alrededor del 60%, y el valor de máxima reducción se presenta en el pozo y se nivela con las posiciones aledañas.



**Figura 8.** Efecto de las condiciones de frontera para el estrato productor



**Figura 9.** Efecto de las condiciones de frontera para el estrato superior



**Figura 10.** Efecto de las condiciones de frontera para el estrato inferior

### 3.7 VARIACIÓN DE LOS ESFUERZOS CON LOS ESTRATOS EN EL PLANO VERTICAL DEL POZO

Los esfuerzos en el plano vertical están relacionados con la carga de los estratos superiores y la compresión que tiene lugar con la disminución de la presión de poro.

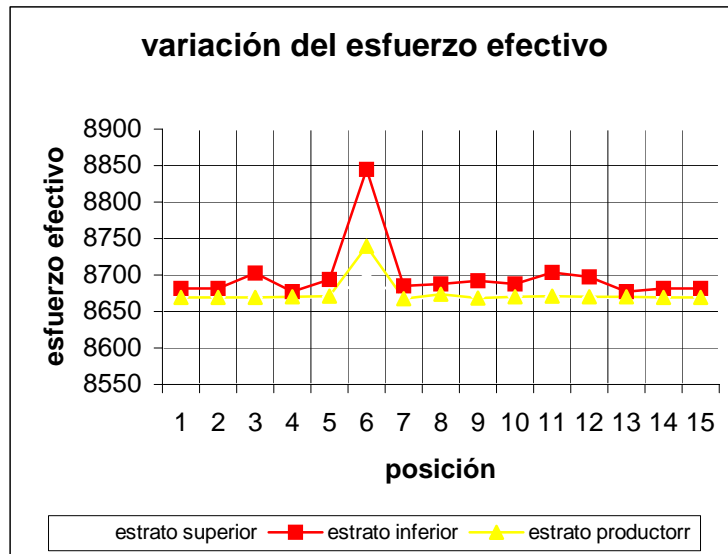
En la gráfica podemos observar el comportamiento regular en los distintos estratos, en donde, para nuestro ejemplo, estaríamos hablando de una variación similar para los distintos puntos.

Sin embargo, cabe anotar que el valor del esfuerzo efectivo se incrementa para los estratos inferiores, en los que se desarrolla con más notoriedad el efecto de *overburden*.

Para los estratos superiores, los valores oscilan en las cercanías al pozo en 8700 psi.

Para los estratos inferiores, el cambio ocurre entre 8850 psi.

Siendo una diferencia aproximada de 150 psi, un valor considerable si tenemos en cuenta que corresponde a un tiempo de 200 días



**Figura 11.** Variación del esfuerzo efectivo con los estratos

### 3.8 VARIACIÓN DE LOS ESFUERZOS CON LOS ESTRATOS EN EL PLANO VERTICAL DEL POZO CONSIDERANDO UNA VARIACIÓN DE LA COMPRESIBILIDAD

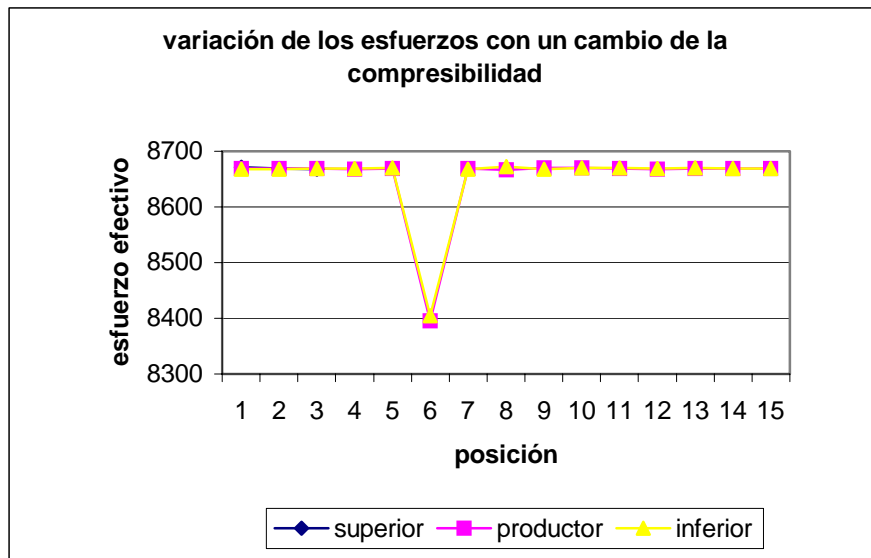
Con base en la gráfica del ítem anterior, consideramos una reducción de la compresibilidad en las zonas distanciadas del pozo, en la que se mantuvieron los valores de la permeabilidad y del tiempo.

El comportamiento nos indica que los esfuerzos efectivos cambian con la variación espacial de los estratos. Es decir, que si en la gráfica anterior, el esfuerzo efectivo aumentaba considerablemente para los estratos inferiores,

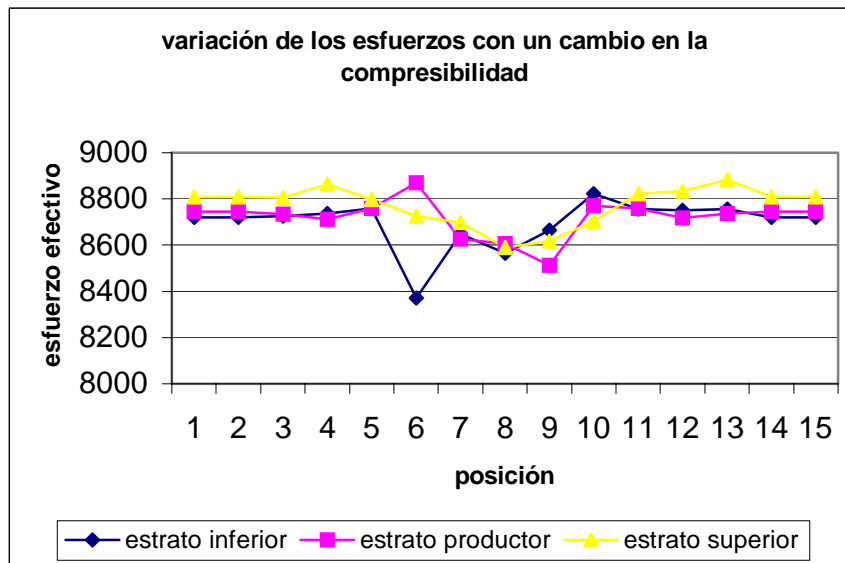
en este caso, el aumento ocurre para los estratos superiores, mientras que en los inferiores ocurre una leve reducción.

Este comportamiento se explica por la acción de acoplamiento del término de la compresibilidad. Si el valor de esta disminuye los esfuerzos aumentan, en cuanto la variación del volumen con el cambio en las condiciones de presión genera una mayor compresión sobre el medio sólido.

Los valores de los estratos superiores aumentaron con la reducción de la compresibilidad a la mitad.



**Figura 12.a.** Variación de los esfuerzos con los estratos en el plano vertical del pozo considerando una variación de la compresibilidad



**Figura 12.b.** Variación de los esfuerzos con los estratos en el plano vertical del pozo considerando una variación de la compresibilidad

### 3.9 VARIACIÓN DE LA PERMEABILIDAD CON LOS ESTRATOS EN EL PLANO VERTICAL QUE CONTIENE EL POZO CONSIDERANDO UNA VARIACIÓN DE LA COMPRESIBILIDAD

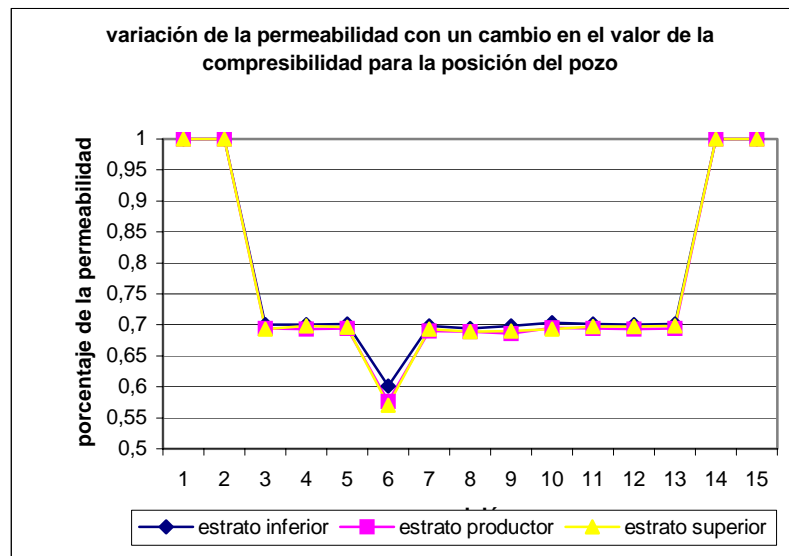
Respecto a la permeabilidad el comportamiento es similar al de los esfuerzos.

La reducción de la compresibilidad en las zonas distanciadas al pozo (dominio externo), conlleva a una reducción notable de la permeabilidad para los estratos superiores. Esto sucede por el aumento de los esfuerzos en la zona, lo que aumenta la compresión y, por tanto, la facilidad de fluir que presenta el medio.

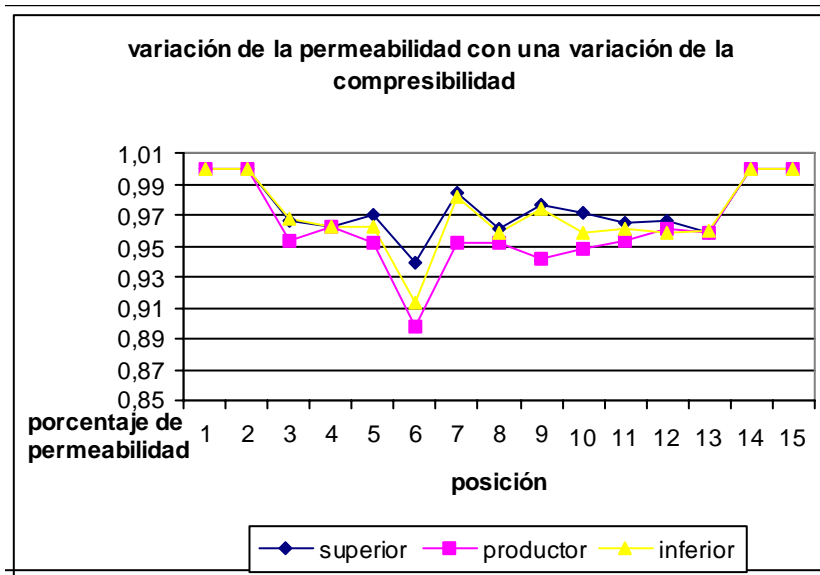
Para el caso de posiciones cercanas al pozo (dominio interno), se presenta una leve reducción de la permeabilidad; situación que se explica por la

interacción de los dominios en el establecimiento de las ecuaciones en los límites de tales posiciones, en donde las variaciones de las posiciones adjuntas del dominio externo, influyen en los esfuerzos de las cercanías al pozo.

Es decir, que ante la variación de los desplazamientos en el dominio externo, sucede una variación de los desplazamientos en el interno, que sin embargo, resulta menor porque el valor de la compresibilidad como parámetro de acoplamiento, es mayor para estas posiciones; con lo cual se presenta una menor reducción de la facilidad que tiene el medio para el flujo de fluidos.



**Figura 13.** Variación de la permeabilidad con un cambio en el valor de la compresibilidad para la posición del pozo



**Figura 14.** Variación de la permeabilidad con una variación de la compresibilidad

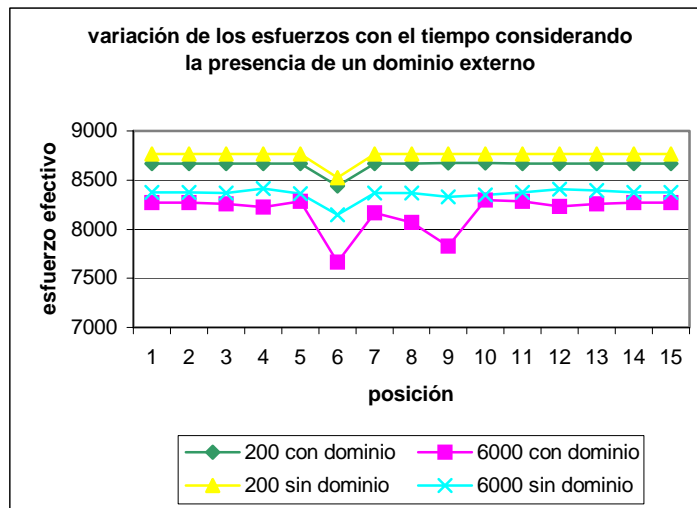
### 3.10 VARIACIÓN DE LA PERMEABILIDAD SIN LA CONSIDERACIÓN DE UN DOMINIO EXTERNO

La ausencia de un dominio externo indica una variación de los esfuerzos uniforme a lo largo del yacimiento, en donde los desplazamientos tendrían una variación sucesiva, lo que explica en parte la similitud de los valores, a lo largo de las distintas posiciones.

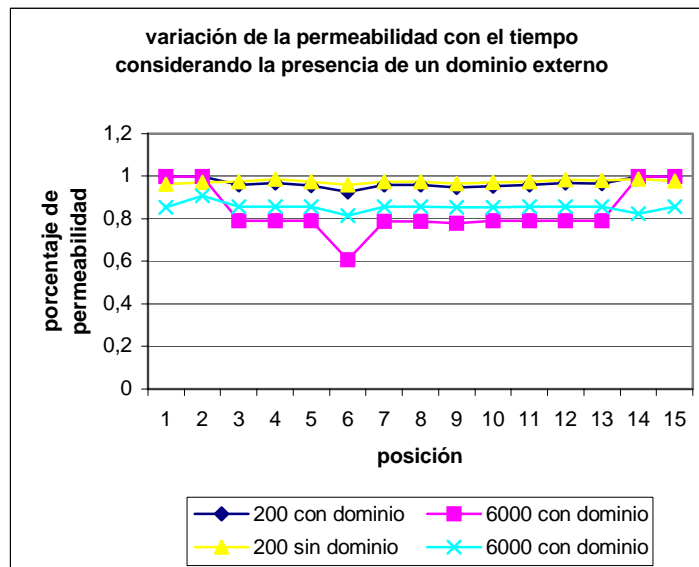
En este caso, las variaciones de la permeabilidad son pequeñas en cuanto una variación de los esfuerzos en las cercanías al pozo, generaría una sucesión de desplazamientos a lo largo del yacimiento, propagando la acción de los esfuerzos a lo largo de las distintas posiciones. Esto significa que aunque se mantiene la tendencia de una mayor reducción para las posiciones cercanas al pozo, en las posiciones siguientes el comportamiento

es similar y próximo a un valor de variación de los desplazamientos constante.

El efecto de propagación genera así, una reducción de la permeabilidad menor a la consideración de un dominio externo, en el que los desplazamientos se mantuvieran constantes, para asegurar que los efectos de deformación describieran con mayor realidad la variación espacio-temporal de las zonas adyacentes al pozo.



**Figura 15.** Variación de los esfuerzos con el tiempo considerando la presencia de un dominio externo



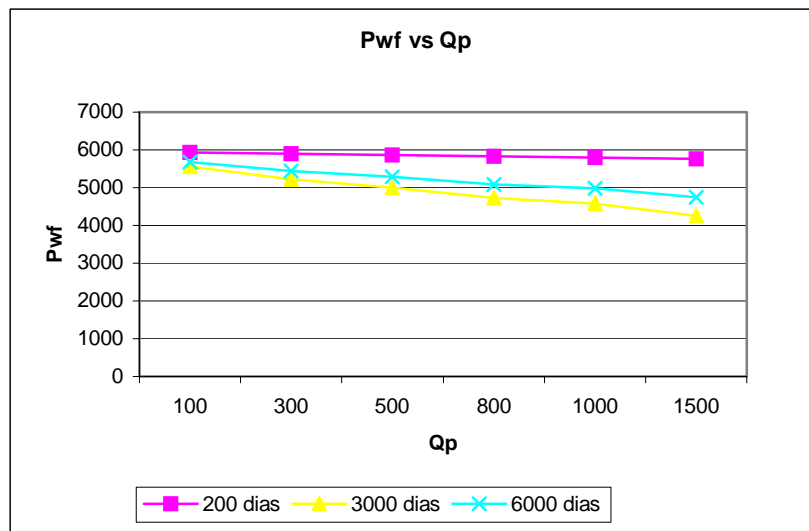
**Figura 16.** Variación de la permeabilidad con el tiempo considerando la presencia de un dominio externo

### 3.11 VARIACIÓN DE LA PRESIÓN CON LA VARIACIÓN DEL CAUDAL, PARA DIFERENTES TIEMPOS

La consideración de flujo natural establece con obviedad que la presión en el pozo disminuirá con el tiempo, pero cabe resaltar que la caída de presión resulta de forma más significativa para caudales de producción mayores.

Otra cosa que debe anotarse es que el modelo exhibe una variación de presión casi lineal con la variación del caudal, mostrando una proporción de variación para cada uno de los distintos tiempos. Sin embargo, la variación de presión no resulta proporcional a la variación del tiempo, pues la caída de presión para el tiempo de 6000 días no es tan abrupta como habría de esperarse en comparación con un tiempo pequeño, como lo es el de 200 días.

Lo anterior permite hacer la conjetura de que la alteración en el estado de esfuerzos, tiene un valor límite después del cual la variación es poco significativa, quizá a través del establecimiento de un estado de “equilibrio” que deviene de la implementación del modelo.

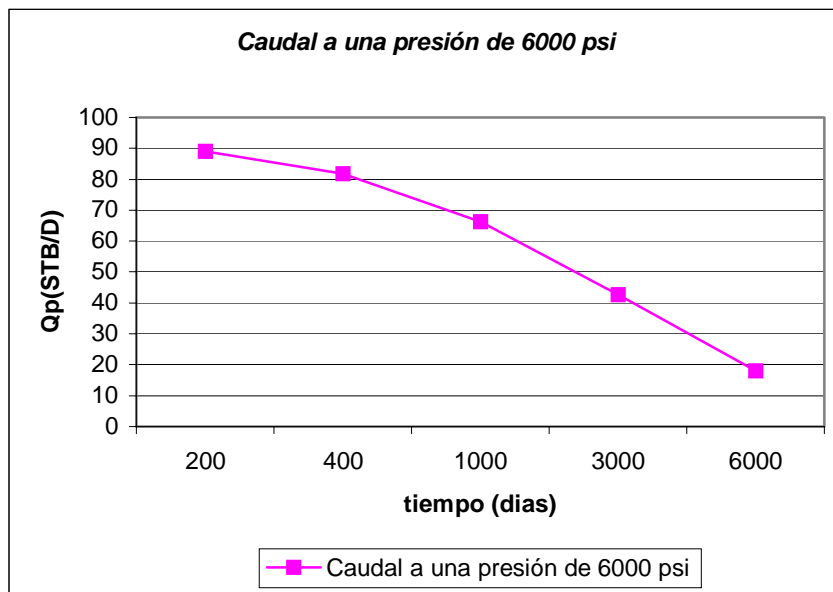


**Figura 17.** Variación de la presión con la variación del caudal, para diferentes tiempos

### 3.12 VARIACIÓN DEL CAUDAL DE PRODUCCIÓN MANTENIENDO UNA PRESIÓN EN EL POZO CONSTANTE

En este caso se trata de mirar que al mantener la presión constante (6000 psi) y al contar con un caudal de producción constante e igual a 100 STB/D, el caudal disminuirá con el tiempo, con lo cual podemos determinar que cerca de los 2000 días el caudal se reducirá a la mitad del inicial.

De otro lado, podemos reevaluar la conjetura inicial, puesto que si se presentara un “equilibrio” posterior la caída de presión en las distintas zonas del yacimiento se mantendrían en un orden similar, llevando a una variación de las compresibilidades mínimas y haciendo posible esperar unos caudales de producción similares.



**Figura 18.** Variación del caudal de producción manteniendo una presión en el pozo constante

#### 4. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE FLUJO

Para la discretización de las ecuaciones diferenciales hemos usado el método de aproximación en diferencias finitas de segundo orden, considerando una malla en 3D con espaciamiento no uniforme, condición que se mantiene en la implementación al posibilitar valores para cada celda<sup>27</sup>.  
 Obtuvimos expresiones para cada una de los medios de flujo, matriz y fractura, pero en este caso presentamos sólo el desarrollo para la matriz pues para la fractura se da de modo análogo.

Para la presión de la matriz habíamos obtenido:

$$\nabla \left( \rho_m \frac{k_m}{\mu_m} \nabla P_m \right) = \phi_m \rho_m \left[ (c_m + c_{pcm} \beta_{pm}) \frac{\partial P_m}{\partial t} + c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_f}{\partial t} - c_{pcm} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} \right] + \Gamma + \tilde{q} \quad (2-11)$$

Expandimos el lado izquierdo:

$$\nabla \left( \rho_m \frac{k_m}{\mu_m} \nabla P_m \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{mx} \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i,j,k} + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{my} \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{i,j,k} + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_{mz} \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{i,j,k} \quad (4-1)$$

---

<sup>27</sup> Cfr., Osorio, Simulación Numérica de Yacimientos, Documento 10: Simulación 3D, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, Medellín, febrero, 2002.

Luego discretizamos el primer término  $\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{mx} \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i,j,k}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{mx} \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i,j,k} = \frac{\left( \frac{\rho_m}{\mu_m} k_{mx} \right)_{i+1/2,j,k} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k} - \left( \frac{\rho_m}{\mu_m} k_{mx} \right)_{i-1/2,j,k} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2,j,k}}{\frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2}} \dots\dots\dots(4-2)$$

donde  $\left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+1/2,j,k} = \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{\Delta x_i} \dots\dots\dots(4-3)$

y  $\left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2,j,k} = \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-1}} \dots\dots\dots(4-4)$

Remplazando los términos anteriores:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_{mx} \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i,j,k} = \frac{\left( \frac{\rho_m}{\mu_m} k_{mx} \right)_{i+1/2,j,k} \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{\Delta x_i} + \left( \frac{\rho_m}{\mu_m} k_{mx} \right)_{i-1/2,j,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2}} \dots\dots\dots(4-5)$$

y para las direcciones y y z tenemos de forma correspondiente:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( k_{my} \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{i,j,k} = \frac{\left( \frac{\rho_m}{\mu_m} k_{my} \right)_{i,j+1/2,k} \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}}{\Delta y_j} + \left( \frac{\rho_m}{\mu_m} k_{my} \right)_{i,j-1/2,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j-1,k}}{\Delta y_{j-1}}}{\frac{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j}{2}} \dots\dots\dots(4-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k_{mz} \frac{\rho_m}{\mu_m} \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{i,j,k} = \frac{\left( \frac{\rho_m}{\mu_m} k_{mz} \right)_{i,j,k+1/2} \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}}{\Delta z_k} + \left( \frac{\rho_m}{\mu_m} k_{mz} \right)_{i,j,k-1/2} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k-1}}}{\frac{\Delta z_{k-1} + \Delta z_k}{2}} \dots\dots\dots(4-7)$$

Llevando todo a la expresión del lado izquierdo de la ecuación general:

$$\begin{aligned} \nabla \left( \rho_m \frac{k_m}{\mu_m} \nabla P_m \right) = & \frac{\left( \frac{\rho_m k_{mx}}{\mu_m} \right)_{i+1/2,j,k} \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{\Delta x_i} + \left( \frac{\rho_m k_{mx}}{\mu_m} \right)_{i-1/2,j,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2}} + \\ & \frac{\left( \frac{\rho_m k_{my}}{\mu_m} \right)_{i,j+1/2,k} \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}}{\Delta y_j} + \left( \frac{\rho_m k_{my}}{\mu_m} \right)_{i,j-1/2,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j-1,k}}{\Delta y_{j-1}}}{\frac{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j}{2}} + \\ & \frac{\left( \frac{\rho_m k_{mz}}{\mu_m} \right)_{i,j,k+1/2} \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}}{\Delta z_k} + \left( \frac{\rho_m k_{mz}}{\mu_m} \right)_{i,j,k-1/2} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k-1}}}{\frac{\Delta z_{k-1} + \Delta z_k}{2}} \end{aligned} \quad (4-8)$$

Para el lado derecho, la discretización se basa en la aproximación progresiva para las derivadas con respecto al tiempo.

Para el diferencial de presión<sup>28</sup>:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n}{\Delta t} \quad (4-9)$$

Para el diferencial de la divergencia de los desplazamientos:

$$\frac{\partial \bar{\nabla} u}{\partial t} = \frac{(\bar{\nabla} u)_{i,j,k}^{n+1} - (\bar{\nabla} u)_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^{n+1} - \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^n \right]_{i,j,k} \quad \dots\dots(4-10)$$

<sup>28</sup> Cfr., Osorio, Simulación Numérica de Yacimientos, Documento 3: Conceptos básicos sobre aproximación de ecuaciones diferenciales a diferencias finitas, Universidad Nacional de Colombia- Sede Medellín, Medellín, febrero, 2002.

Los términos dentro del paréntesis de la ecuación anterior siguen este desarrollo:

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{i,j,k} = \frac{u_{x_{i+1/2,j,k}} - u_{x_{i-1/2,j,k}}}{\frac{\Delta x_{i-1} - \Delta x_i}{2}} = \frac{\left(\frac{u_{x_{i,j,k}} + u_{x_{i+1,j,k}}}{2}\right) - \left(\frac{u_{x_{i-1,j,k}} + u_{x_{i,j,k}}}{2}\right)}{\frac{\Delta x_{i-1} - \Delta x_i}{2}} \quad \dots\dots(4-11)$$

$$\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)_{i,j,k} = \frac{u_{y_{i,j+1/2,k}} - u_{y_{i,j-1/2,k}}}{\frac{\Delta y_{j-1} - \Delta y_j}{2}} = \frac{\left(\frac{u_{y_{i,j,k}} + u_{y_{i,j+1,k}}}{2}\right) - \left(\frac{u_{y_{i,j-1,k}} + u_{y_{i,j,k}}}{2}\right)}{\frac{\Delta y_{j-1} - \Delta y_j}{2}} \quad \dots\dots(4-12)$$

$$\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_{i,j,k} = \frac{u_{z_{i,j,k+1/2}} - u_{z_{i,j,k-1/2}}}{\frac{\Delta z_{k-1} - \Delta z_k}{2}} = \frac{\left(\frac{u_{z_{i,j,k}} + u_{z_{i,j,k+1}}}{2}\right) - \left(\frac{u_{z_{i,j,k-1}} + u_{z_{i,j,k}}}{2}\right)}{\frac{\Delta z_{k-1} - \Delta z_k}{2}} \quad \dots\dots (4-13)$$

reuniendo los términos anteriores obtenemos la expresión para el diferencial de la divergencia de los desplazamientos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}u}{\partial t} = & \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x_{i-1} - \Delta x_i} \left[ \left( u_{x_{i+1,j,k}}^{n+1} \quad -u_{x_{i-1,j,k}}^{n+1} \right) - \left( u_{x_{i+1,j,k}}^n \quad -u_{x_{i-1,j,k}}^n \right) \right] + \\ & \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta y_{j-1} - \Delta y_j} \left[ \left( u_{y_{i,j+1,k}}^{n+1} \quad -u_{y_{i,j-1,k}}^{n+1} \right) - \left( u_{y_{i,j+1,k}}^n \quad -u_{y_{i,j-1,k}}^n \right) \right] + \quad (4-14) \\ & \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta z_{k-1} - \Delta z_k} \left[ \left( u_{z_{i,j,k+1}}^{n+1} \quad -u_{z_{i,j,k-1}}^{n+1} \right) - \left( u_{z_{i,j,k+1}}^n \quad -u_{z_{i,j,k-1}}^n \right) \right] \end{aligned}$$

Y como el esfuerzo efectivo medio y el gradiente de desplazamientos están relacionados por:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \left( \frac{1}{c_{bc}} \right) \frac{\partial(\nabla \cdot u)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial P_m}{\partial t} \quad \dots\dots(4-15)$$

la ecuación general puede expresarse de la siguiente forma:

$$\nabla \left( \rho_m \frac{k_m}{\mu_m} \nabla P_m \right) = \phi_m \rho_m \left[ (c_m + c_{pcm} \beta_{pm}) \frac{\partial P_m}{\partial t} + \alpha \frac{\partial P_m}{\partial t} + c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_f}{\partial t} - \frac{c_{pcm}}{c_{bc}} \frac{\partial(\nabla \cdot u)}{\partial t} \right] + \Gamma + \bar{q} \quad \dots\dots(4-16)$$

Expresada por medio de los términos anteriores:

$$\begin{aligned} & \frac{\left( \frac{\rho_m k_{mx}}{\mu_m} \right)_{i+1/2,j,k} \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{\Delta x_i} + \left( \frac{\rho_m k_{mx}}{\mu_m} \right)_{i-1/2,j,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2}} + \\ & \frac{\left( \frac{\rho_m k_{my}}{\mu_m} \right)_{i,j+1/2,k} \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}}{\Delta y_j} + \left( \frac{\rho_m k_{my}}{\mu_m} \right)_{i,j-1/2,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j-1,k}}{\Delta y_{j-1}}}{\frac{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j}{2}} + \\ & \frac{\left( \frac{\rho_m k_{mz}}{\mu_m} \right)_{i,j,k+1/2} \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}}{\Delta z_k} + \left( \frac{\rho_m k_{mz}}{\mu_m} \right)_{i,j,k-1/2} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k-1}}}{\frac{\Delta z_{k-1} + \Delta z_k}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\phi_m \rho_m) \left( c_m + c_{pcm} \beta_{pm} \right) \frac{\partial P_m}{\partial t} + \alpha \frac{\partial P_m}{\partial t} + c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_f}{\partial t} - \frac{c_{pcm}}{c_{bc}} \\
& \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta x_{i-1} - \Delta x_i} \left[ \left( u_{x_{i+1,j,k}}^{n+1} - u_{x_{i-1,j,k}}^{n+1} \right) - \left( u_{x_{i+1,j,k}}^n - u_{x_{i-1,j,k}}^n \right) \right] + \\
& \frac{c_{pcm}}{c_{bc}} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta y_{j-1} - \Delta y_j} \left[ \left( u_{y_{i,j+1,k}}^{n+1} - u_{y_{i,j-1,k}}^{n+1} \right) - \left( u_{y_{i,j+1,k}}^n - u_{y_{i,j-1,k}}^n \right) \right] + \\
& \frac{c_{pcm}}{c_{bc}} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\Delta z_{k-1} - \Delta z_k} \left[ \left( u_{z_{i,j,k+1}}^{n+1} - u_{z_{i,j,k-1}}^{n+1} \right) - \left( u_{z_{i,j,k+1}}^n - u_{z_{i,j,k-1}}^n \right) \right] + \Gamma + \tilde{q} \\
& \dots(4-17)
\end{aligned}$$

Separando los términos del lado izquierdo y considerando los siguientes términos<sup>29</sup> :

$$C_i = \frac{1}{\Delta X_i (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \dots (4-18)$$

$$C_{i-1} = \frac{1}{\Delta X_{i-1} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \dots (4-19)$$

$$C_j = \frac{1}{\Delta Y_j (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \dots (4-20)$$

$$C_{j-1} = \frac{1}{\Delta Y_{j-1} (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \dots (4-21)$$

$$C_k = \frac{1}{\Delta Z_k (\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} \dots (4-22)$$

$$C_{k-1} = \frac{1}{\Delta Z_{k-1} (\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} \dots (4-23)$$

---

<sup>29</sup> F. Guerra, J. García, Universidad Nacional de Colombia, ACIPET, 2001. Pág. 7 ss.

Obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(\frac{\rho m}{\mu m} k_{mx}\right)_{i+1/2,j,k} \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{\Delta x_i} + \left(\frac{\rho m}{\mu m} k_{mx}\right)_{i-1/2,j,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x_{i-1}}}{\frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2}} + \\
& \frac{\left(\frac{\rho m}{\mu m} k_{my}\right)_{i,j+1/2,k} \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}}{\Delta y_j} + \left(\frac{\rho m}{\mu m} k_{my}\right)_{i,j-1/2,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j-1,k}}{\Delta y_{j-1}}}{\frac{\Delta y_{j-1} + \Delta y_j}{2}} + \\
& \frac{\left(\frac{\rho m}{\mu m} k_{mz}\right)_{i,j,k+1/2} \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}}{\Delta z_k} + \left(\frac{\rho m}{\mu m} k_{mz}\right)_{i,j,k-1/2} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k-1}}{\Delta z_{k-1}}}{\frac{\Delta z_{k-1} + \Delta z_k}{2}} = \\
& \frac{2}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \left(\frac{\rho m}{\mu m} K_{mx}\right)_{i+1/2,j,k} P_{i+1,j,k} - \frac{2}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \left(\frac{\rho m}{\mu m} K_{mx}\right)_{i+1/2,j,k} P_{i,j,k} - \\
& \frac{2}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \left(\frac{\rho m}{\mu m} K_{mx}\right)_{i-1/2,j,k} P_{i,j,k} + \frac{2}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \left(\frac{\rho m}{\mu m} K_{mx}\right)_{i-1/2,j,k} P_{i-1,j,k} \\
& + \frac{2}{\Delta y_j(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)} \left(\frac{\rho m}{\mu m} K_{my}\right)_{i,j+1/2,k} P_{i,j+1,k} - \frac{2}{\Delta y_j(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)} \left(\frac{\rho m}{\mu m} K_{my}\right)_{i,j+1/2,k} P_{i,j,k} - \\
& \frac{2}{\Delta y_{j-1}(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)} \left(\frac{\rho m}{\mu m} K_{my}\right)_{i,j-1/2,k} P_{i,j,k} + \frac{2}{\Delta y_{j-1}(\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)} \left(\frac{\rho m}{\mu m} K_{my}\right)_{i,j-1/2,k} P_{i,j-1,k} \\
& + \frac{2}{\Delta z_k(\Delta z_{k-1} + \Delta z_k)} \left(\frac{\rho m}{\mu m} K_{mz}\right)_{i,j,k+1/2} P_{i,j,k+1} - \frac{2}{\Delta z_k(\Delta z_{k-1} + \Delta z_k)} \left(\frac{\rho m}{\mu m} K_{mz}\right)_{i,j,k+1/2} P_{i,j,k} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\Delta Z_{k-1}(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{mz} \right)_{i,j,k-1/2} R_{i,j,k} + \frac{2}{\Delta Z_{k-1}(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{mz} \right)_{i,j,k-1/2} R_{i,j,k-1} \\
& = \alpha_i \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{mx} \right)_{i+1/2,j,k} R_{i+1,j,k} - 2C_i \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{mx} \right)_{i+1/2,j,k} R_{i,j,k} - 2C_{i-1} \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{mx} \right)_{i-1/2,j,k} R_{i,j,k} \\
& + 2C_{i-1} \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{mx} \right)_{i-1/2,j,k} R_{i-1,j,k} + 2C_j \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{my} \right)_{i,j+1/2,k} R_{i,j+1,k} - 2C_j \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{my} \right)_{i,j+1/2,k} R_{i,j,k} \\
& - 2C_{j-1} \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{my} \right)_{i,j-1/2,k} R_{i,j,k} + \alpha_{j-1} \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{my} \right)_{i,j-1/2,k} R_{i,j-1,k} + 2C_k \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{mz} \right)_{i,j,k+1/2} R_{i,j,k+1} \\
& - 2C_k \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{mz} \right)_{i,j,k+1/2} R_{i,j,k} - 2C_{k-1} \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{mz} \right)_{i,j,k-1/2} R_{i,j,k} + 2C_{k-1} \left( \frac{\rho m}{\mu m} K_{mz} \right)_{i,j,k-1/2} R_{i,j,k-1} \\
& \dots\dots\dots(4-24)
\end{aligned}$$

Ahora debemos aplicar el concepto de transmisibilidad a través de las siguientes ecuaciones<sup>30</sup>:

$$T_{i+1/2,j,k} = \frac{\Delta Y_j \Delta Z_k}{\Delta X_i} \left( \frac{\rho}{\mu} K_x \right)_{i+1/2,j,k} \dots\dots (4-25)$$

$$T_{i-1/2,j,k} = \frac{\Delta Y_j \Delta Z_k}{\Delta X_i} \left( \frac{\rho}{\mu} K_x \right)_{i-1/2,j,k} \dots\dots (4-26)$$

$$T_{i,j+1/2,k} = \frac{\Delta X_i \Delta Z_k}{\Delta Y_j} \left( \frac{\rho}{\mu} K_y \right)_{i,j+1/2,k} \dots\dots (4-27)$$

$$T_{i,j-1/2,k} = \frac{\Delta X_i \Delta Z_k}{\Delta Y_j} \left( \frac{\rho}{\mu} K_y \right)_{i,j-1/2,k} \dots\dots (4-28)$$

---

<sup>30</sup> Cfr., Osorio, Simulación Numérica de Yacimientos, Documento 5: Flujo Bidimensional de un Fluido incompresible, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, Medellín, febrero, 2002.

$$T_{i,j,k+1/2} = \frac{\Delta Y_j \Delta X_i}{\Delta Z_k} \left( \frac{\rho}{\mu} K_z \right)_{i,j,k+1/2} \quad \dots (4-29)$$

$$T_{i,j,k-1/2} = \frac{\Delta Y_j \Delta X_i}{\Delta Z_k} \left( \frac{\rho}{\mu} K_z \right)_{i,j,k-1/2} \quad \dots (4-30)$$

Con lo cual obtenemos una expresión general:

$$\begin{aligned}
& 2C_i T_{i+1/2,j,k} \frac{\Delta X_i}{\Delta Y_j \Delta Z_k} P_{i+1,j,k} - 2C_i T_{i+1/2,j,k} \frac{\Delta X_i}{\Delta Y_j \Delta Z_k} P_{i,j,k} - \\
& 2C_{i-1} T_{i-1/2,j,k} \frac{\Delta X_i}{\Delta Y_j \Delta Z_k} P_{i,j,k} + 2C_{i-1} T_{i-1/2,j,k} \frac{\Delta X_i}{\Delta Y_j \Delta Z_k} P_{i-1,j,k} + \\
& 2C_j T_{i,j+1/2,k} \frac{\Delta Y_j}{\Delta X_i \Delta Z_k} P_{i,j+1,k} - 2C_j T_{i,j+1/2,k} \frac{\Delta Y_j}{\Delta X_i \Delta Z_k} P_{i,j,k} - \\
& 2C_{j-1} T_{i,j-1/2,k} \frac{\Delta Y_j}{\Delta X_i \Delta Z_k} P_{i,j,k} + 2C_{j-1} T_{i,j-1/2,k} \frac{\Delta Y_j}{\Delta X_i \Delta Z_k} P_{i,j-1,k} + \\
& 2C_k T_{i,j,k+1/2} \frac{\Delta Z_k}{\Delta X_i \Delta Y_j} P_{i,j,k+1} - 2C_k T_{i,j,k+1/2} \frac{\Delta Z_k}{\Delta X_i \Delta Y_j} P_{i,j,k} - \\
& 2C_{k-1} T_{i,j,k-1/2} \frac{\Delta Z_k}{\Delta X_i \Delta Y_j} P_{i,j,k} + 2C_{k-1} T_{i,j,k-1/2} \frac{\Delta Z_k}{\Delta X_i \Delta Y_j} P_{i,j,k-1} = \\
& \phi_m \rho_m \left[ (c_m + c_{pcm} \beta_{pm}) \frac{\partial P_m}{\partial t} + \alpha \frac{\partial P_m}{\partial t} + c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_f}{\partial t} - \frac{c_{pcm}}{c_{bc}} \frac{\partial (\nabla \cdot u)}{\partial t} \right] + \Gamma + \tilde{q}
\end{aligned} \quad \dots (4-31)$$

Ahora, trabajando un poco el lado derecho de la igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} & \phi_m \rho_m \left[ (c_m + c_{pcm} \beta_{pm}) \frac{\partial P_m}{\partial t} + \alpha \frac{\partial P_m}{\partial t} + c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_f}{\partial t} - \frac{c_{pcm}}{c_{bc}} \frac{\partial(\nabla \cdot u)}{\partial t} \right] + \Gamma + \tilde{q} = \\ & \phi_m \rho_m \left[ (c_m + c_{pcm} \beta_{pm}) \frac{\partial P_m}{\partial t} + \alpha \frac{\partial P_m}{\partial t} + c_{pcm} \beta_{pf} \frac{\partial P_f}{\partial t} - \frac{c_{pcm}}{c_{bc}} \frac{1}{\Delta t} \Delta \varepsilon_v \right] + \Gamma + \tilde{q} = \\ & \phi_m^{n+1} \rho_m \left[ (c_m^{n+1} + c_{pcm}^{n+1} \beta_{pm}) \frac{P_{mi,j,k}^{n+1} - P_{mi,j,k}^n}{\Delta t} + \alpha^{n+1} \frac{P_{mi,j,k}^{n+1} - P_{mi,j,k}^n}{\Delta t} + c_{pcm}^{n+1} \beta_{pf} \frac{P_{fi,j,k}^{n+1} - P_{fi,j,k}^n}{\Delta t} - \frac{c_{pcm}^{n+1}}{c_{bc}^{n+1}} \frac{\partial(\nabla \cdot u)}{\partial t} \right] + \Gamma + \tilde{q} \end{aligned}$$

.....(4-32)

Debemos considerar la variación de la presión con el tiempo (de n a n+1), que puede ser expresada como:

$$\Delta p^{n+1} = p^{n+1} - p^n \quad \text{..... (4-33)}$$

**y definiendo:**

$$\text{Este: } E_{i,j,k} = 2C_i T_{i+1/2,j,k} \quad \text{..... (4-34)}$$

$$\text{Oeste: } W_{i,j,k} = 2C_{i-1} T_{i-1/2,j,k} \quad \text{..... (4-35)}$$

$$\text{Norte: } N_{i,j,k} = 2C_j T_{i,j+1/2,k} \quad \text{..... (4-36)}$$

$$\text{Sur: } S_{i,j,k} = 2C_{j-1} T_{i,j-1/2,k} \quad \text{..... (4-37)}$$

$$\text{Central superior: } TC_{i,j,k} = 2C_k T_{i,j,k+1/2} \quad \text{..... (4-38)}$$

$$\text{Central inferior: } BC_{i,j,k} = 2C_{k-1} T_{i,j,k-1/2} \quad \text{..... (4-39)}$$

y hacemos los términos que se repiten,

$$\frac{\Delta X_i}{\Delta Y_j \Delta Z_k} = A \quad \dots (4-40)$$

$$\frac{\Delta Y_j}{\Delta X_i \Delta Z_k} = B \quad \dots (4-41)$$

$$\frac{\Delta Z_k}{\Delta X_i \Delta Y_j} = D \quad \dots (4-42)$$

Entonces, la ecuación puede expresarse en stencils:

$$\begin{aligned} & E_{i,j,k} A P_{i+1,j,k}^{n+1} - E_{i,j,k} A P_{i,j,k}^{n+1} - W_{i,j,k} A P_{i,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k} A P_{i-1,j,k}^{n+1} + N_{i,j,k} B P_{i,j+1,k}^{n+1} - \\ & N_{i,j,k} B P_{i,j,k}^{n+1} - S_{i,j,k} B P_{i,j,k}^{n+1} + S_{i,j,k} B P_{i,j-1,k}^{n+1} + TC_{i,j,k} D P_{i,j,k+1}^{n+1} - TC_{i,j,k} D P_{i,j,k}^{n+1} - \\ & BC_{i,j,k} D P_{i,j,k}^{n+1} + BC_{i,j,k} D P_{i,j,k-1}^{n+1} = \\ & \phi_m^{n+1} \rho_m \left[ \left( c_m^{n+1} + c_{pcm}^{n+1} \beta_{pm} \right) \frac{P_{m,j,k}^{n+1} - P_{m,j,k}^n}{\Delta t} + \alpha^{n+1} \frac{P_{m,j,k}^{n+1} - P_{m,j,k}^n}{\Delta t} + c_{pcm}^{n+1} \beta_{pf} \frac{P_{f,i,j,k}^{n+1} - P_{f,i,j,k}^n}{\Delta t} \frac{c_{pcm}^{n+1}}{c_{bc}^{n+1}} \frac{d(\nabla u)}{\bar{a}} \right] + \Gamma + \tilde{q} \dots (4-43) \end{aligned}$$

Y considerando la celda del centro, los términos correspondientes a las coordenadas i,j,k y un término independiente:

$$\begin{aligned} C_{i,j,k} &= \{- E_{i,j,k} A - W_{i,j,k} A - N_{i,j,k} B - S_{i,j,k} B - TC_{i,j,k} D - BC_{i,j,k} D - \\ & \phi_m^{n+1} \rho_m \left[ \left( c_m^{n+1} + c_{pcm}^{n+1} \beta_{pm} \right) + \alpha^{n+1} \right] \} \Delta P_{m,i,j,k}^{n+1} - \phi_m^{n+1} \rho_m \left( c_{pcm}^{n+1} \beta_{pf} \right) \Delta P_{f,i,j,k}^{n+1} \\ & \dots (4-44) \end{aligned}$$

Recordando que<sup>31</sup>

$$\Delta P_{i,j,k}^{n+1} = \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n}{\Delta t} \quad \dots (4-45)$$

<sup>31</sup> Cfr., Osorio, Op. Cit., Documento 3.

Al final, el término independiente estaría formado por:

$$\begin{aligned}
 TI1_{i,j,k} = & -E_{i,j,k} P_{i+1,j,k}^n - W_{i,j,k} P_{i-1,j,k}^n + \\
 & (E_{i,j,k} + W_{i,j,k} + N_{i,j,k} + S_{i,j,k} + TG_{i,j,k} + BG_{i,j,k}) P_{i,j,k}^n - \\
 & N_{i,j,k} P_{i,j+1,k}^n - S_{i,j,k} P_{i,j-1,k}^n - TC_{i,j,k} P_{i,j,k+1}^n - BC_{i,j,k} P_{i,j,k-1}^n - \\
 & \phi_m^{n+1} \rho_m \frac{C_{pcm}^{n+1}}{C_{bc}^{n+1}} \frac{\partial(\nabla \cdot u)}{\partial t} + \Gamma + \bar{q} \quad \dots (4-46)
 \end{aligned}$$

y de todo lo anterior resulta expresada en forma de stencil, de esta manera:

$$\begin{aligned}
 & E_{i,j,k} A \Delta P_{i+1,j,k}^{n+1} + W_{i,j,k} A \Delta P_{i-1,j,k}^{n+1} + N_{i,j,k} B \Delta P_{i,j+1,k}^{n+1} + S_{i,j,k} B \Delta P_{i,j-1,k}^{n+1} \\
 & + TC_{i,j,k} D \Delta P_{i,j,k+1}^{n+1} - TC_{i,j,k} D P_{i,j,k}^{n+1} + BC_{i,j,k} D \Delta P_{i,j,k-1}^{n+1} + \\
 & C_{i,j,k} \Delta P_{i,j,k}^{n+1} = TI1_{i,j,k} \quad \dots (4-47)
 \end{aligned}$$

El desarrollo para la presión de fractura se da de forma análoga, obteniendo la ecuación expresada en stencils de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & E_{i,j,k} A \Delta P_{i+1,j,k}^{fn+1} + W_{i,j,k} A \Delta P_{i-1,j,k}^{fn+1} + N_{i,j,k} B \Delta P_{i,j+1,k}^{fn+1} + S_{i,j,k} B \Delta P_{i,j-1,k}^{fn+1} \\
 & + TC_{i,j,k} D \Delta P_{i,j,k+1}^{fn+1} - TC_{i,j,k} D P_{i,j,k}^{fn+1} + BC_{i,j,k} D \Delta P_{i,j,k-1}^{fn+1} + C_{i,j,k} \Delta P_{i,j,k}^{fn+1} = \\
 & TI2_{i,j,k} \quad \dots (4-48)
 \end{aligned}$$

en donde el término independiente  $TI2_{i,j,k}$  será:

$$\begin{aligned}
 TI2_{i,j,k} = & -E_{i,j,k} Pf_{i+1,j,k}^n - W_{i,j,k} Pf_{i-1,j,k}^n + \\
 & (E_{i,j,k} + W_{i,j,k} + N_{i,j,k} + S_{i,j,k} + TG_{i,j,k} + BG_{i,j,k}) Pf_{i,j,k}^n - \\
 & N_{i,j,k} Pf_{i,j+1,k}^n - S_{i,j,k} Pf_{i,j-1,k}^n - TC_{i,j,k} Pf_{i,j,k+1}^n - BC_{i,j,k} Pf_{i,j,k-1}^n - \\
 & \phi_f^{n+1} \rho_f \frac{C_{pcf}^{n+1}}{C_{bc}^{n+1}} \frac{\partial(\nabla.u)}{\partial t} + \Gamma + \tilde{q} \quad \dots (4-49)
 \end{aligned}$$

## 5. DISCRETIZACION DE LA ECUACIÓN DE ESFUERZOS

Las ecuaciones del modelo de esfuerzo – deformación se discretizan siguiendo el método de aproximación en diferencias finitas considerando un espaciamiento de la malla no uniforme<sup>32</sup>.

Por cuestiones de economía, presentamos a continuación la discretización de la ecuación obtenida para la dirección x. Las restantes se obtienen por analogía.

Para la dirección x obtuvimos:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \nabla[G\nabla(\Delta U_x)] + \nabla\left[G\frac{\partial(\Delta U)}{\partial x}\right] + \frac{\partial[\lambda\nabla(\Delta U)]}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_{bm}\Delta P_m)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_{bf}\Delta P_f)}{\partial x} = 0 \quad \text{.....(2-29)}$$

Los tres primeros términos tienen el siguiente desarrollo:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Big|_{i,j,k} = \frac{\sigma_{xx}|_{i+1/2,j,k} - \sigma_{xx}|_{i-1/2,j,k}}{\frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{2}} \quad \text{..... (5-1)}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Big|_{i,j,k} = \frac{\left(\frac{\sigma_{xx}|_{i,j,k} + \sigma_{xx}|_{i+1,j,k}}{2}\right) - \left(\frac{\sigma_{xx}|_{i-1,j,k} + \sigma_{xx}|_{i,j,k}}{2}\right)}{\frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{2}} \quad \text{..... (5-2)}$$

Simplificando,

---

<sup>32</sup> Cfr., Osorio, Ibid., Documento 3.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Big|_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} (\sigma_{xx} \Big|_{i+1,j,k} - \sigma_{xx} \Big|_{i-1,j,k}) \quad \dots (5-3)$$

Y análogamente:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \Big|_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} (\sigma_{xy} \Big|_{i,j+1,k} - \sigma_{xy} \Big|_{i,j-1,k}) \quad \dots (5-4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \Big|_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k} (\sigma_{xz} \Big|_{i,j,k+1} - \sigma_{xz} \Big|_{i,j,k-1}) \quad \dots (5-5)$$

Luego desarrollamos el término  $\nabla[G\nabla(\Delta U_x)]$ <sup>33</sup>:

$$\nabla[G\nabla(\Delta U_x)] = \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \left( G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} i + G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial y} j + G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial z} k \right) \quad \dots (5-6)$$

$$\nabla[G\nabla(\Delta U_x)] \Big|_{i,j,k} = \frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} \right) \Big|_{i,j,k} + \frac{\partial}{\partial y} \left( G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial y} \right) \Big|_{i,j,k} + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial z} \right) \Big|_{i,j,k} \quad \dots (5-7)$$

Como notamos hay derivadas de segundo orden al lado derecho, que pueden desarrollarse así:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} \right) \Big|_{i,j,k} = \frac{G_{i+1/2,j,k} \left( \frac{\Delta U_{xi+1,j,k} - \Delta U_{xi,j,k}}{\Delta X_i} \right) - G_{i-1/2,j,k} \left( \frac{\Delta U_{xi,j,k} - \Delta U_{xi-1,j,k}}{\Delta X_{i-1}} \right)}{\frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{2}} \quad \dots (5-8)$$

Agrupando términos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} \right) \Big|_{i,j,k} = 2 \left[ \frac{G_{i+1/2,j,k}}{\Delta X_i (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} (\Delta U_{xi+1,j,k} - \Delta U_{xi,j,k}) - \frac{G_{i-1/2,j,k}}{\Delta X_{i-1} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} (\Delta U_{xi,j,k} - \Delta U_{xi-1,j,k}) \right] \quad \dots (5-9)$$

Y de igual forma, para los términos restantes que presentan el doble diferencial.

<sup>33</sup> Para el desarrollo de la divergencia, Véase, Osorio, Simulación Numérica de Yacimientos, Documento 2: Ecuaciones fundamentales de flujo en yacimientos de petróleo y gas natural, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, Medellín, febrero, 2002

Para la dirección y:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial y} \right)_{i,j,k} = 2 \left[ \frac{G_{i,j+1/2,k}}{\Delta Y_j (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} (\Delta U_{xi,j+1,k} - \Delta U_{xi,j,k}) - \frac{G_{i,j-1/2,k}}{\Delta Y_{j-1} (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} (\Delta U_{xi,j,k} - \Delta U_{xi,j-1,k}) \right] \dots (5-10)$$

Para la dirección z:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial z} \right)_{i,j,k} = 2 \left[ \frac{G_{i,j,k+1/2}}{\Delta Z_k (\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} (\Delta U_{xi,j,k+1} - \Delta U_{xi,j,k}) - \frac{G_{i,j,k-1/2}}{\Delta Z_{k-1} (\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} (\Delta U_{xi,j,k} - \Delta U_{xi,j,k-1}) \right] \dots (5-11)$$

Ahora desarrollamos el quinto término de la ecuación  $\nabla \left[ G \frac{\partial (\Delta U)}{\partial x} \right]$ <sup>34</sup>:

$$\nabla \left[ G \frac{\partial (\Delta U)}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ G \frac{\partial \Delta U_y}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G \frac{\partial \Delta U_z}{\partial x} \right] \dots (5-12)$$

El primer término queda:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} \right] = \frac{G_{i+1/2,j,k} \left( \frac{\Delta U_{xi+1,j,k} - \Delta U_{xi,j,k}}{\Delta X_i} \right) - G_{i-1/2,j,k} \left( \frac{\Delta U_{xi,j,k} - \Delta U_{xi-1,j,k}}{\Delta X_{i-1}} \right)}{\frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{2}} \dots (5-13)$$

simplificando

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ G \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} \right] = 2 \left[ \frac{G_{i+1/2,j,k}}{\Delta X_i (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} (\Delta U_{xi+1,j,k} - \Delta U_{xi,j,k}) - \frac{G_{i-1/2,j,k}}{\Delta X_{i-1} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} (\Delta U_{xi,j,k} - \Delta U_{xi-1,j,k}) \right] \dots (5-14)$$

<sup>34</sup> Osorio, Ibíd., Documento 2, 2002

Y el segundo y el tercero:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ G \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right] = \frac{G_{i+1/2,j,k} \left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j+1/2,k} - G_{i-1/2,j,k} \left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j-1/2,k}}{\frac{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j}{2}} \dots \quad (5-15)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j+1/2,k} = \frac{\left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j+1,k} - \left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j,k}}{2} \dots \quad (5-16)$$

y,

$$\left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j-1/2,k} = \frac{\left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j,k} - \left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j-1,k}}{2} \dots \quad (5-17)$$

Derivamos el término, para obtener las expresiones sobre las posiciones medias:

$$\left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j+1,k} = \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} (\Delta U_{yi+1,j+1,k} - \Delta U_{yi-1,j+1,k}) \dots \quad (5-18)$$

$$\left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} (\Delta U_{yi+1,j,k} - \Delta U_{yi-1,j,k}) \dots \quad (5-19)$$

$$\left( \frac{\partial \Delta U y}{\partial x} \right)_{i,j-1,k} = \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} (\Delta U_{yi+1,j-1,k} - \Delta U_{yi-1,j-1,k}) \dots \quad (5-20)$$

De lo cual resulta:

$$\left(\frac{\partial \Delta U_y}{\partial x}\right)_{i,j+1/2,k} = \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left( \frac{(\Delta U_{y_{i+1},j,k} - \Delta U_{y_{i-1},j+1,k}) + (\Delta U_{y_{i+1},j,k} - \Delta U_{y_{i-1},j,k})}{2} \right) \dots (5-21)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta U_y}{\partial x}\right)_{i,j-1/2,k} = \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left( \frac{(\Delta U_{y_{i+1},j,k} - \Delta U_{y_{i-1},j,k}) + (\Delta U_{y_{i+1},j-1,k} - \Delta U_{y_{i-1},j-1,k})}{2} \right) \dots (5-22)$$

Por lo tanto, con las nuevas expresiones obtenemos para la segunda y tercera parte del quinto término las siguientes fórmulas:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ G \frac{\partial \Delta U_y}{\partial x} \right]_{i,j,k} = \frac{1}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} * \left\{ G_{i,j+1/2,k} (\Delta U_{y_{i+1},j+1,k} - \Delta U_{y_{i-1},j+1,k} + \Delta U_{y_{i+1},j,k} - \Delta U_{y_{i-1},j,k}) \right. \\ \left. \left[ G_{i,j-1/2,k} (\Delta U_{y_{i+1},j,k} - \Delta U_{y_{i-1},j,k} + \Delta U_{y_{i+1},j-1,k} - \Delta U_{y_{i-1},j-1,k}) \right] \right\} \dots (5-23)$$

y,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ G \frac{\partial \Delta U_z}{\partial x} \right]_{i,j,k} = \frac{1}{(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} * \left\{ G_{i,j,k+1/2} (\Delta U_{z_{i+1},j,k+1} - \Delta U_{z_{i-1},j,k+1} + \Delta U_{z_{i+1},j,k} - \Delta U_{z_{i-1},j,k}) \right. \\ \left. \left[ G_{i,j,k-1/2} (\Delta U_{z_{i+1},j,k} - \Delta U_{z_{i-1},j,k} + \Delta U_{z_{i+1},j,k-1} - \Delta U_{z_{i-1},j,k-1}) \right] \right\} \dots (5-24)$$

Luego tenemos el sexto término:

$$\frac{\partial[\lambda \nabla(\Delta U)]}{\partial x} \Big|_{i,j,k} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} \right]_{i,j,k} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial \Delta U_y}{\partial y} \right]_{i,j,k} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} \right]_{i,j,k} \} \dots (5-25)$$

Por un procedimiento similar al anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} \right]_{i,j,k} &= 2 \left\{ \frac{\lambda_{i+1/2,j,k}}{\Delta X_i (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} (\Delta U_{x_{i+1,j,k}} - \Delta U_{x_{i,j,k}}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_{i-1/2,j,k}}{\Delta X_{i-1} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} (\Delta U_{x_{i,j,k}} - \Delta U_{x_{i-1,j,k}}) \right\} \end{aligned} \dots (5-26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial \Delta U_y}{\partial y} \right]_{i,j,k} &= \frac{1}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j) (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} * \\ &\quad \left\{ \lambda_{i,j+1/2,k} (\Delta U_{y_{i+1,j+1,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j+1,k}} + \Delta U_{y_{i+1,j,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j,k}}) \right\} - \\ &\quad \left\{ \lambda_{i,j-1/2,k} (\Delta U_{y_{i+1,j,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j,k}} + \Delta U_{y_{i+1,j-1,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j-1,k}}) \right\} \end{aligned} \dots (5-27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} \right]_{i,j,k} &= \frac{1}{(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k) (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} * \\ &\quad \left\{ \lambda_{i,j,k+1/2} (\Delta U_{z_{i+1,j,k+1}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k+1}} + \Delta U_{z_{i+1,j,k}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k}}) \right\} - \\ &\quad \left\{ \lambda_{i,j,k-1/2} (\Delta U_{z_{i+1,j,k}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k}} + \Delta U_{z_{i+1,j,k-1}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k-1}}) \right\} \end{aligned} \dots (5-28)$$

Ahora tenemos que desarrollar el séptimo término<sup>35</sup>:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\beta_{bm}\Delta P_m)}{\partial x}\Big|_{i,j,k} &= \frac{\beta_{bm_{i+1/2,j,k}}\Delta P_{m_{i+1/2,j,k}} - \beta_{bm_{i-1/2,j,k}}\Delta P_{m_{i-1/2,j,k}}}{\frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{2}} \\
 &= \frac{\beta_{bm_{i+1/2,j,k}}\left(\frac{\Delta P_{m_{i+1,j,k}} + \Delta P_{m_{i,j,k}}}{2}\right) - \beta_{bm_{i-1/2,j,k}}\left(\frac{\Delta P_{m_{i,j,k}} + \Delta P_{m_{i-1,j,k}}}{2}\right)}{\frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{2}} \\
 &= \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left[ \beta_{bm_{i+1/2,j,k}} (\Delta P_{m_{i+1,j,k}} + \Delta P_{m_{i,j,k}}) - \beta_{bm_{i-1/2,j,k}} (\Delta P_{m_{i,j,k}} + \Delta P_{m_{i-1,j,k}}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{5-29}$$

Y el octavo lo obtenemos de forma similar al anterior:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\beta_{bf}\Delta P_f)}{\partial x}\Big|_{i,j,k} &= \frac{\beta_{bf_{i+1/2,j,k}}\Delta P_{f_{i+1/2,j,k}} - \beta_{bf_{i-1/2,j,k}}\Delta P_{f_{i-1/2,j,k}}}{\frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{2}} \\
 &= \frac{\beta_{bf_{i+1/2,j,k}}\left(\frac{\Delta P_{f_{i+1,j,k}} + \Delta P_{f_{i,j,k}}}{2}\right) - \beta_{bf_{i-1/2,j,k}}\left(\frac{\Delta P_{f_{i,j,k}} + \Delta P_{f_{i-1,j,k}}}{2}\right)}{\frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{5-30}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\beta_{bf}\Delta P_f)}{\partial x}\Big|_{i,j,k} &= \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left[ \beta_{bf_{i+1/2,j,k}} (\Delta P_{f_{i+1,j,k}} + \Delta P_{f_{i,j,k}}) \right. \\
 &\quad \left. - \beta_{bf_{i-1/2,j,k}} (\Delta P_{f_{i,j,k}} + \Delta P_{f_{i-1,j,k}}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{5-31}$$

<sup>35</sup> Osorio, Ibid., Documento 3.

Después de haber expandido los términos, podemos discretizar la ecuación general reemplazando cada una de las expresiones obtenidas anteriormente:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left( \sigma_{xx}|_{i+1,j,k} - \sigma_{xx}|_{i-1,j,k} \right) + \frac{1}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left( \sigma_{xy}|_{i,j+1,k} - \sigma_{xy}|_{i,j-1,k} \right) + \\
& \frac{1}{\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k} \left( \sigma_{xz}|_{i,j,k+1} - \sigma_{xz}|_{i,j,k-1} \right) + \\
& 2 \left[ \frac{G_{i+1/2,j,k}}{\Delta X_i (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( \Delta U_{x_{i+1,j,k}} - \Delta U_{x_{i,j,k}} \right) - \frac{G_{i-1/2,j,k}}{\Delta X_{i-1} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( \Delta U_{x_{i,j,k}} - \Delta U_{x_{i-1,j,k}} \right) \right] + \\
& 2 \left[ \frac{G_{i,j+1/2,k}}{\Delta Y_j (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \left( \Delta U_{x_{i,j+1,k}} - \Delta U_{x_{i,j,k}} \right) - \frac{G_{i,j-1/2,k}}{\Delta Y_{j-1} (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \left( \Delta U_{x_{i,j,k}} - \Delta U_{x_{i,j-1,k}} \right) \right] + \\
& 2 \left[ \frac{G_{i,j,k+1/2}}{\Delta Z_k (\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} \left( \Delta U_{x_{i,j,k+1}} - \Delta U_{x_{i,j,k}} \right) - \frac{G_{i,j,k-1/2}}{\Delta Z_{k-1} (\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} \left( \Delta U_{x_{i,j,k}} - \Delta U_{x_{i,j,k-1}} \right) \right] + \\
& 2 \left[ \frac{G_{i+1/2,j,k}}{\Delta X_i (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( \Delta U_{x_{i+1,j,k}} - \Delta U_{x_{i,j,k}} \right) - \frac{G_{i-1/2,j,k}}{\Delta X_{i-1} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( \Delta U_{x_{i,j,k}} - \Delta U_{x_{i-1,j,k}} \right) \right] + \\
& \left( \frac{1}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \right) \left\{ G_{i,j+1/2,k} \left( \Delta U_{y_{i+1,j+1,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j+1,k}} + \Delta U_{y_{i+1,j,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j,k}} \right) \right\} \\
& \left\{ G_{i,j-1/2,k} \left( \Delta U_{y_{i+1,j,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j,k}} + \Delta U_{y_{i+1,j-1,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j-1,k}} \right) \right\} + \\
& \frac{1}{(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left\{ G_{i,j,k+1/2} \left( \Delta U_{z_{i+1,j,k+1}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k+1}} + \Delta U_{z_{i+1,j,k}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k}} \right) \right\} \\
& \left\{ G_{i,j,k-1/2} \left( \Delta U_{z_{i+1,j,k}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k}} + \Delta U_{z_{i+1,j,k-1}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k-1}} \right) \right\} + \\
& 2 \left[ \frac{\lambda_{i+1/2,j,k}}{\Delta X_i (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( \Delta U_{x_{i+1,j,k}} - \Delta U_{x_{i,j,k}} \right) - \frac{\lambda_{i-1/2,j,k}}{\Delta X_{i-1} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( \Delta U_{x_{i,j,k}} - \Delta U_{x_{i-1,j,k}} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left\{ \lambda_{i,j+1/2,k} \left( \Delta U_{y_{i+1,j+1,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j+1,k}} + \Delta U_{y_{i+1,j,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j,k}} \right) \right\} - \\
& \left\{ \lambda_{i,j-1/2,k} \left( \Delta U_{y_{i+1,j,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j,k}} + \Delta U_{y_{i+1,j-1,k}} - \Delta U_{y_{i-1,j-1,k}} \right) \right\} + \\
& \frac{1}{(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left\{ \lambda_{i,j,k+1/2} \left( \Delta U_{z_{i+1,j,k+1}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k+1}} + \Delta U_{z_{i+1,j,k}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k}} \right) \right\} - \\
& \left\{ \lambda_{i,j,k-1/2} \left( \Delta U_{z_{i+1,j,k}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k}} + \Delta U_{z_{i+1,j,k-1}} - \Delta U_{z_{i-1,j,k-1}} \right) \right\} + \\
& \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left[ \beta_{bm_{i+1/2,j,k}} \left( \Delta P_{m_{i+1,j,k}} + \Delta P_{m_{i,j,k}} \right) - \beta_{bm_{i-1/2,j,k}} \left( \Delta P_{m_{i,j,k}} + \Delta P_{m_{i-1,j,k}} \right) \right] + \\
& \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left[ \beta_{bf_{i+1/2,j,k}} \left( \Delta P_{f_{i+1,j,k}} + \Delta P_{f_{i,j,k}} \right) - \beta_{bf_{i-1/2,j,k}} \left( \Delta P_{f_{i,j,k}} + \Delta P_{f_{i-1,j,k}} \right) \right] = 0 \quad \dots(5-32)
\end{aligned}$$

Lo que haremos ahora es simplificar un poco la ecuación, agrupando los términos comunes:

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{1}{\Delta Z_{k-1}(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} G_{i,j,k-1/2}^{n+1} \Delta U_{x_{i,j,k-1}}^{n+1} + 2 \frac{1}{\Delta Y_{j-1}(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} G_{i,j-1/2,k}^{n+1} \Delta U_{x_{i,j-1,k}}^{n+1} + \\
& 2 \frac{1}{\Delta X_{i-1}(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( 2G_{i-1/2,j,k}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta U_{x_{i-1,j,k}}^{n+1} - \\
& 2 \left[ \frac{1}{\Delta Z_{k-1}(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} G_{i,j,k-1/2}^{n+1} + \frac{1}{\Delta Y_{j-1}(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} G_{i,j-1/2,k}^{n+1} + \frac{1}{\Delta X_{i-1}(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( G_{i-1/2,j,k}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right) \right. \\
& \left. \frac{1}{\Delta X_i(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( G_{i+1/2,j,k}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1} \right) + \frac{1}{\Delta Y_j(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} G_{i,j+1/2,k}^{n+1} \right. \\
& \left. \frac{1}{\Delta Z_k(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} G_{i,j,k+1/2}^{n+1} \right] \Delta U_{x_{i,j,k}}^{n+1} + 2 \frac{1}{\Delta X_i(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( 2G_{i+1/2,j,k}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta U_{x_{i+1,j,k}}^{n+1} + \\
& \frac{1}{\Delta Y_j(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} G_{i,j+1/2,k}^{n+1} \Delta U_{x_{i,j+1,k}}^{n+1} + 2 \frac{1}{\Delta Z_k(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} G_{i,j,k+1/2}^{n+1} \Delta U_{x_{i,j,k+1}}^{n+1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \frac{1}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \left[ (G_{i,j+1/2,k}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i+1,j+1,k}}^{n+1} - \right. \right. \\
& \quad (G_{i,j+1/2,k}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i-1,j+1,k}}^{n+1} + (G_{i,j+1/2,k}^{n+1} - G_{i,j-1/2,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i+1,j,k}}^{n+1} - \\
& \quad (G_{i,j+1/2,k}^{n+1} - G_{i,j-1/2,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i-1,j,k}}^{n+1} - (G_{i,j-1/2,k}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i+1,j-1,k}}^{n+1} + \\
& \quad \left. \left. (G_{i,j-1/2,k}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i-1,j-1,k}}^{n+1} \right] \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \frac{1}{(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} \left[ (G_{i,j,k+1/2}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{z_{i+1,j,k+1}}^{n+1} - \right. \right. \\
& \quad (G_{i,j,k+1/2}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{z_{i-1,j,k+1}}^{n+1} + (G_{i,j,k+1/2}^{n+1} - G_{i,j,k-1/2}^{n+1}) \Delta U_{z_{i+1,j,k}}^{n+1} + \\
& \quad (G_{i,j,k-1/2}^{n+1} - G_{i,j,k+1/2}^{n+1}) \Delta U_{z_{i-1,j,k}}^{n+1} - (G_{i,j,k-1/2}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{z_{i-1,j,k-1}}^{n+1} - \\
& \quad \left. \left. (G_{i,j,k-1/2}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{z_{i-1,j,k+1}}^{n+1} \right] \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \frac{1}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \left[ (\lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i,j+1,k}}^{n+1} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (\lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1} - \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i,j-1,k}}^{n+1} \right] + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \frac{1}{(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} \left[ -(\lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{z_{i,j,k+1}}^{n+1} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (\lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1} - \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{z_{i,j,k-1}}^{n+1} \right] + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left[ (\beta_{bm_{i+1/2,j,k}}^{n+1} - \beta_{bm_{i-1/2,j,k}}^{n+1}) \Delta P_{mi,j,k}^{n+1} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} (\beta_{bm_{i+1/2,j,k}}^{n+1}) \Delta P_{mi+1,j,k}^{n+1} - \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} (\beta_{bm_{i-1/2,j,k}}^{n+1}) \Delta P_{mi-1,j,k}^{n+1} \right] + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left[ (\beta_{bf_{i+1/2,j,k}}^{n+1} - \beta_{bf_{i-1/2,j,k}}^{n+1}) \Delta P_{fi,j,k}^{n+1} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} (\beta_{bf_{i+1/2,j,k}}^{n+1}) \Delta P_{fi+1,j,k}^{n+1} - \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} (\beta_{bf_{i-1/2,j,k}}^{n+1}) \Delta P_{fi-1,j,k}^{n+1} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left( \sigma_{xx}|_{i+1,j,k} - \sigma_{xx}|_{i-1,j,k} \right) + \frac{1}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left( \sigma_{xy}|_{i,j+1,k} - \sigma_{xy}|_{i,j-1,k} \right) + \\ & \frac{1}{\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k} \left( \sigma_{xz}|_{i,j,k+1} - \sigma_{xz}|_{i,j,k-1} \right) \text{]]]} = 0 \end{aligned} \quad \text{.....(5-33)}$$

Y expresando la ecuación en stencils:

$$BC_{i,j,k} = 2 \frac{1}{\Delta Z_{k-1}(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} G_{i,j,k-1/2}^{n+1} \quad \text{....(5-34)}$$

$$TC_{i,j,k} = 2 \frac{1}{\Delta Z_k(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} G_{i,j,k+1/2}^{n+1} \quad \text{....(5-35)}$$

$$Ni,j,k = 2 \frac{1}{\Delta Y_j(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} G_{i,j+1/2,k}^{n+1} \quad \text{....(5-36)}$$

$$Si,j,k = 2 \frac{1}{\Delta Y_{j-1}(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} G_{i,j-1/2,k}^{n+1} \quad \text{....(5-37)}$$

$$Wi,j,k = 2 \frac{1}{\Delta X_{i-1}(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( 2G_{i-1/2,j,k}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right) \quad \text{....(5-38)}$$

$$Ei,j,k = 2 \frac{1}{\Delta X_i(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( 2G_{i+1/2,j,k}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1} \right) \quad \text{....(5-39)}$$

$$Ci,j,k = -2[Ni,j,k + Si,j,k + Wi,j,k + Ei,j,k + BC_{i,j,k} + TC_{i,j,k}] \quad \text{....(5-40)}$$

$$\begin{aligned} TI3_{i,j,k} = & \text{[[[ } \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \frac{1}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} [ (G_{i,j+1/2,k}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i+1,j+1,k}}^{n+1} - \\ & (G_{i,j+1/2,k}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i-1,j+1,k}}^{n+1} + (G_{i,j+1/2,k}^{n+1} - G_{i,j-1/2,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i+1,j,k}}^{n+1} - \\ & (G_{i,j+1/2,k}^{n+1} - G_{i,j-1/2,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i-1,j,k}}^{n+1} - (G_{i,j-1/2,k}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i+1,j-1,k}}^{n+1} + \\ & (G_{i,j-1/2,k}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{y_{i-1,j-1,k}}^{n+1} ] \\ & \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \frac{1}{(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} [ (G_{i,j,k+1/2}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{z_{i+1,j,k+1}}^{n+1} - \\ & (G_{i,j,k+1/2}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1}) \Delta U_{z_{i-1,j,k+1}}^{n+1} + (G_{i,j,k+1/2}^{n+1} - G_{i,j,k-1/2}^{n+1}) \Delta U_{z_{i+1,j,k}}^{n+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( G_{i,j,k-1/2}^{n+1} - G_{i,j,k+1/2}^{n+1} \right) \Delta U_{z_{i-1,j,k}}^{n+1} - \left( G_{i,j,k-1/2}^{n+1} + \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta U_{z_{i-1,j,k-1}}^{n+1} - \\
& \left( G_{i,j,k-1/2}^{n+1} + \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta U_{z_{i-1,j,k+1}}^{n+1} \Big] \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \frac{1}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \left[ \left( \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta U_{y_{i,j+1,k}}^{n+1} - \right. \\
& \left. \left( \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1} - \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta U_{y_{i,j-1,k}}^{n+1} \right] + \\
& \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \frac{1}{(\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k)} \left[ - \left( \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta U_{z_{i,j,k+1}}^{n+1} - \right. \\
& \left. \left( \lambda_{i-1/2,j,k}^{n+1} - \lambda_{i+1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta U_{z_{i,j,k-1}}^{n+1} \right] + \\
& \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left[ \left( \beta_{bm+1/2,j,k}^{n+1} - \beta_{bm-1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta P_{mi,j,k}^{n+1} + \right. \\
& \left. \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( \beta_{bm+1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta P_{mi+1,j,k}^{n+1} - \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( \beta_{bm-1/2,j,k}^{n+1} \right) \Delta P_{mi-1,j,k}^{n+1} \right] + \\
& \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left[ \left( \beta_{bf_{i+1/2,j,k}}^{n+1} - \beta_{bf_{i-1/2,j,k}}^{n+1} \right) \Delta P_{f_{i,j,k}}^{n+1} + \right. \\
& \left. \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( \beta_{bf_{i+1/2,j,k}}^{n+1} \right) \Delta P_{f_{i+1,j,k}}^{n+1} - \frac{1}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \left( \beta_{bf_{i-1/2,j,k}}^{n+1} \right) \Delta P_{f_{i-1,j,k}}^{n+1} \right] + \\
& \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left( \sigma_{xx} | i+1, j, k - \sigma_{xx} | i-1, j, k \right) + \frac{1}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left( \sigma_{xy} | i, j+1, k - \sigma_{xy} | i, j-1, k \right) \\
& + \frac{1}{\Delta Z_{k-1} + \Delta Z_k} \left( \sigma_{xz} | i, j, k+1 - \sigma_{xz} | i, j, k-1 \right) \Big] \Big] \Big]
\end{aligned}$$

....(5-41)

Con lo que la ecuación queda:

$$\begin{aligned}
& N_{i,j,k} \Delta U_{x_{i,j+1,k}}^{n+1} + S_{i,j,k} \Delta U_{x_{i,j-1,k}}^{n+1} + W_{i,j,k} \Delta U_{x_{i-1,j,k}}^{n+1} - E_{i,j,k} \Delta U_{x_{i+1,j,k}}^{n+1} + \\
& BC_{i,j,k} \Delta U_{x_{i,j,k-1}}^{n+1} + TC_{i,j,k} \Delta U_{x_{i,j,k+1}}^{n+1} + 2C_{i,j,k} \Delta U_{x_{i,j,k}}^{n+1} = TI3_{i,j,k}
\end{aligned}$$

.....(5-42)

Los desarrollos en direcciones y y z, se dan de forma análoga.

Para la dirección y:

$$\begin{aligned}
 Ni,j,k \Delta U_{x_{i,j+1,k}}^{n+1} + Si,j,k \Delta U_{x_{i,j-1,k}}^{n+1} + Wi,j,k \Delta U_{x_{i-1,j,k}}^{n+1} - Ei,j,k \Delta U_{x_{i+1,j,k}}^{n+1} + \\
 BCi,j,k \Delta U_{x_{i,j,k-1}}^{n+1} + TCi,j,k \Delta U_{x_{i,j,k+1}}^{n+1} + 2Ci,j,k \Delta U_{x_{i,j,k}}^{n+1} = TI4i,j,k
 \end{aligned}
 \dots(5-43)$$

Y finalmente, para la dirección z:

$$\begin{aligned}
 Ni,j,k \Delta U_{x_{i,j+1,k}}^{n+1} + Si,j,k \Delta U_{x_{i,j-1,k}}^{n+1} + Wi,j,k \Delta U_{x_{i-1,j,k}}^{n+1} - Ei,j,k \Delta U_{x_{i+1,j,k}}^{n+1} + \\
 BCi,j,k \Delta U_{x_{i,j,k-1}}^{n+1} + TCi,j,k \Delta U_{x_{i,j,k+1}}^{n+1} + 2Ci,j,k \Delta U_{x_{i,j,k}}^{n+1} = TI5i,j,k
 \end{aligned}
 \dots(5-44)$$

## 6. DISCRETIZACIÓN DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

### 6.1 CONDICIONES PARA EL MODELO DE FLUJO DE FLUIDOS

Las condiciones son de tipo Dirichlet<sup>36</sup>, es decir que se asume un yacimiento cerrado, sin flujo de fluidos en los límites externos del yacimiento, lo cual puede escribirse de la siguiente forma:

$$\Delta P \cdot \eta = 0 \quad \dots(6-1)$$

siendo  $\eta$  el vector normal exterior a cada plano del yacimiento.

Por tanto, desarrollaremos esta condición para los planos en las diferentes direcciones.

La ecuación anterior puede expresarse de forma general como:

$$\frac{\partial P_{i,j,k}}{\partial e} = 0 \quad \text{donde } e = x, y, z \quad \dots(6-2)$$

el incremento en la presión de poro, se trabaja de acuerdo a lo definido para la ecuación de flujo:

$$\Delta P_{i,j,k}^{n+1} = P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n \quad \dots(6-3)$$

---

<sup>36</sup> Osorio, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2000, Pág. 31.

$$P_{i,j,k}^{n+1} = P_{i,j,k}^n + \Delta P_{i,j,k}^{n+1} \quad \dots(6-4)$$

Por tanto, evaluando el aumento de presión para cada uno de los planos obtenemos:

$$\frac{\partial \left( P_{i,j,k}^n + \Delta P_{i,j,k}^{n+1} \right)}{\partial e} = 0 \quad \dots(6-5)$$

Considerando el plano  $x=1$ :

$$\left[ \frac{\partial \left( P_{1,j,k}^n + \Delta P_{1,j,k}^{n+1} \right)}{\partial x} \right]_{1/2,j,k} = 0 \quad \dots(6-6)$$

Expandiéndola de acuerdo a lo anterior:

$$\frac{\left( P_{1,j,k}^n - P_{o,j,k}^n \right) + \left( \Delta P_{1,j,k}^{n+1} - \Delta P_{o,j,k}^{n+1} \right)}{\Delta x} = 0 \quad \dots(6-7)$$

o,

$$P_{o,j,k}^n - P_{1,j,k}^n = \Delta P_{1,j,k}^{n+1} - \Delta P_{o,j,k}^{n+1} \quad \dots(6-8)$$

Entonces, para la condición de tipo Dirichlet<sup>37</sup>:

$$\frac{\partial P_{1,j,k}^n}{\partial x} = \frac{P_{1,j,k}^n - P_{o,j,k}^n}{\Delta x} \quad \dots(6-9)$$

$$P_{e,j,k}^n - P_{o,j,k}^n = 0 \quad \dots (6-10)$$

Con lo cual,

$$-\Delta P_{o,j,k}^{n+1} + \Delta P_{1,j,k}^{n+1} = 0 \quad \dots (6-11)$$

---

<sup>37</sup> Osorio, Ibid., Documento 3

Usando stencils para expresar la ecuación:

$$C_{o,j,k} = -1 \quad \dots (6-12)$$

$$E_{o,j,k} = 1 \quad \dots (6-13)$$

$$W_{o,j,k} = S_{o,j,k} = N_{o,j,k} = BC_{o,j,k} = TC_{o,j,k} = TI_{o,j,k} = 0 \quad \dots (6-14)$$

$$C_{o,j,k} \Delta P_{o,j,k}^{n+1} + E_{o,j,k} \Delta P_{1,j,k}^{n+1} = TI_{o,j,k} \quad \dots (6-15)$$

Para el plano  $y=1$  la discretización deriva en lo mismo:

$$C_{i,o,k} = -1 \quad \dots (6-16)$$

$$N_{i,o,k} = 1 \quad \dots (6-17)$$

$$W_{i,o,k} = S_{i,o,k} = E_{i,o,k} = BC_{i,o,k} = TC_{i,o,k} = TI_{i,o,k} = 0 \quad \dots (6-18)$$

$$C_{i,o,k} \Delta P_{i,o,k}^{n+1} + N_{i,o,k} \Delta P_{i,1,k}^{n+1} = TI_{i,o,k} \quad \dots (6-19)$$

Para el plano  $z=1$ :

$$C_{i,j,o} = -1 \quad \dots (6-20)$$

$$TC_{i,j,o} = 1 \quad \dots (6-21)$$

$$W_{i,j,o} = S_{i,j,o} = E_{i,j,o} = BC_{i,j,o} = N_{i,j,o} = TI_{i,j,o} = 0 \quad \dots (6-22)$$

$$C_{i,j,o} \Delta P_{i,j,o}^{n+1} + TC_{i,j,o} \Delta P_{i,j,1}^{n+1} = TI_{i,j,k} \quad \dots (6-23)$$

Para el plano  $x=nx$

$$C_{nx+1,j,k} = -1 \quad \dots (6-24)$$

$$W_{nx+1,j,k} = 1 \quad \dots (6-25)$$

$$C_{nx+1,j,k} \Delta P_{nx+1,j,k}^{n+1} + W_{nx+1,j,k} \Delta P_{nx,j,k}^{n+1} = TI_{nx+1,j,k} \quad \dots (6-26)$$

Para el plano  $y=n_y$

$$C_{i,n_y+1,k} = 1 \quad \dots (6-27)$$

$$S_{i,n_y+1,k} = 1 \quad \dots (6-28)$$

$$C_{i,n_y+1,k} \Delta P_{i,n_y+1,k}^{n+1} + S_{i,n_y+1,k} \Delta P_{i,n_y,k}^{n+1} = T_{i,n_y+1,k} \quad \dots (6-29)$$

Y para el plano  $z=n_z$

$$C_{i,j,n_z+1} = -1 \quad \dots (6-30)$$

$$BC_{i,,j,n_z+1} = 1 \quad \dots (6-31)$$

$$W_{i,j,n_z+1} = E_{i,,j,n_z+1} = S_{i,,j,n_z+1} = N_{i,,j,n_z+1} = TC_{i,,j,n_z+1} = TI_{i,,j,n_z+1} = 0 \quad \dots (6-32)$$

$$C_{i,,j,n_z+1} \Delta P_{i,j,n_z+1}^{n+1} + BC_{i,,j,n_z+1} \Delta P_{i,j,n_z}^{n+1} = TI_{i,,j,n_z+1} \quad \dots (6-33)$$

## 6.2 CONDICIONES PARA EL MODELO DE ESFUERZO - DEFORMACIÓN

Para desarrollar estas condiciones debemos recordar que la deformación en los límites laterales e inferior del yacimiento es cero.

Condiciones de límite en el plano  $x=1$  para los incrementos de los desplazamientos de direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

$$(\Delta U)_{1/2,j,k}^{n+1} = 0 \quad \dots (6-34)$$

$$\frac{(\Delta U_x)_{0,j,k}^{n+1} + (\Delta U_x)_{1,j,k}^{n+1}}{2} = 0 \quad \dots (6-35)$$

De lo que obtenemos:

$$(\Delta U_x)_{o,j,k}^{n+1} + (\Delta U_x)_{1,j,k}^{n+1} = 0 \quad \dots (6-36)$$

Esta ecuación expresada en forma de stencils queda:

$$C_{o,j,k} = 1 \quad \dots (6-37)$$

$$E_{o,j,k} = 1 \quad \dots (6-38)$$

$$W_{o,j,k} = S_{o,j,k} = N_{o,j,k} = BC_{o,j,k} = TC_{o,j,k} = TI_{o,j,k} = 0 \quad \dots (6-39)$$

$$C_{o,j,k}(\Delta U_x)_{o,j,k}^{n+1} + E_{o,j,k}(\Delta U_x)_{1,j,k}^{n+1} = TI_{o,j,k} \quad \dots (6-40)$$

Considerando para el mismo plano el desplazamiento en y:

$$(\Delta U_y)_{1/2,j,k}^{n+1} = 0 \quad \dots (6-41)$$

$$\frac{(\Delta U_y)_{o,j,k}^{n+1} + (\Delta U_y)_{1,j,k}^{n+1}}{2} = 0 \quad \dots (6-42)$$

O lo que es lo mismo,

$$(\Delta U_y)_{o,j,k}^{n+1} + (\Delta U_y)_{1,j,k}^{n+1} = 0 \quad \dots (6-43)$$

La ecuación anterior quedará:

$$C_{o,j,k}(\Delta U_y)_{o,j,k}^{n+1} + E_{o,j,k}(\Delta U_y)_{1,j,k}^{n+1} = TI_{o,j,k} \quad \dots (6-44)$$

$$C_{o,j,k} = 1 \quad \dots (6-45)$$

$$E_{o,j,k} = 1 \quad \dots (6-46)$$

$$W_{o,j,k} = S_{o,j,k} = N_{o,j,k} = BC_{o,j,k} = TC_{o,j,k} = TI_{o,j,k} = 0 \quad \dots (6-47)$$

Y para los desplazamientos en z:

$$(\Delta U_z)_{1/2,j,k}^{n+1} = 0 \quad \dots (6-48)$$

$$\frac{(\Delta U_z)_{o,j,k}^{n+1} + (\Delta U_z)_{1,j,k}^{n+1}}{2} = 0 \quad \dots (6-49)$$

O, lo que es lo mismo:

$$(\Delta U_z)_{o,j,k}^{n+1} + (\Delta U_z)_{1,j,k}^{n+1} = 0 \quad \dots (6-50)$$

Discretizando quedaría:

$$C_{o,j,k}(\Delta U_z)_{o,j,k}^{n+1} + E_{o,j,k}(\Delta U_z)_{1,j,k}^{n+1} = TI_{o,j,k} \quad \dots (6-51)$$

$$C_{o,j,k} = 1 \quad \dots (6-52)$$

$$E_{o,j,k} = 1 \quad \dots (6-53)$$

$$W_{o,j,k} = S_{o,j,k} = N_{o,j,k} = BC_{o,j,k} = TC_{o,j,k} = TI_{o,j,k} = 0 \quad \dots (6-54)$$

Ahora, haciendo el desarrollo para el plano y=1

Para los desplazamientos en la dirección x:

$$C_{i,o,k}(\Delta U_x)_{i,o,k}^{n+1} + N_{i,o,k}(\Delta U_x)_{i,1,k}^{n+1} = TI_{i,o,k} \quad \dots (6-55)$$

$$C_{i,o,k} = 1 \quad \dots (6-56)$$

$$N_{i,o,k} = 1 \quad \dots (6-57)$$

$$W_{i,o,k} = S_{i,o,k} = E_{i,o,k} = BC_{i,o,k} = TC_{i,o,k} = TI_{i,o,k} = 0 \quad \dots (6-58)$$

Para los desplazamientos en dirección y:

$$C_{i,o,k}(\Delta U_y)_{i,o,k}^{n+1} + N_{i,o,k}(\Delta U_y)_{i,1,k}^{n+1} = TI_{i,o,k} \quad \dots (6-59)$$

$$C_{i,o,k} = 1 \quad \dots (6-60)$$

$$N_{i,o,k} = 1 \quad \dots (6-61)$$

$$W_{i,o,k} = S_{i,o,k} = E_{i,o,k} = BC_{i,o,k} = TC_{i,o,k} = TI_{i,o,k} = 0 \quad \dots (6-62)$$

Para los desplazamientos en dirección z:

$$C_{i,o,k} (\Delta U_z)_{i,o,k}^{n+1} + N_{i,o,k} (\Delta U_z)_{i,1,k}^{n+1} = TI_{i,o,k} \quad \dots (6-63)$$

$$C_{i,o,k} = 1 \quad \dots (6-64)$$

$$N_{i,o,k} = 1 \quad \dots (6-65)$$

$$W_{i,o,k} = S_{i,o,k} = E_{i,o,k} = BC_{i,o,k} = TC_{i,o,k} = TI_{i,o,k} = 0 \quad \dots (6-66)$$

Haciendo el desarrollo para el plano  $x=nx$

Para los desplazamientos en la dirección x:

$$W_{nx+1,j,k} (\Delta U_x)_{nx,j,k}^{n+1} + C_{nx+1,j,k} (\Delta U_x)_{nx+1,j,k}^{n+1} = TI_{nx+1,j,k} \quad \dots (6-67)$$

$$C_{nx+1,j,k} = 1 \quad \dots (6-68)$$

$$W_{nx+1,j,k} = 1 \quad \dots (6-69)$$

$$E_{nx+1,j,k} = S_{nx+1,j,k} = N_{nx+1,j,k} = BC_{nx+1,j,k} = TC_{nx+1,j,k} = TI_{nx+1,j,k} = 0 \quad \dots (6-70)$$

Para los desplazamientos en la dirección y:

$$W_{nx+1,j,k} (\Delta U_y)_{nx,j,k}^{n+1} + C_{nx+1,j,k} (\Delta U_y)_{nx+1,j,k}^{n+1} = TI_{nx+1,j,k} \quad \dots (6-71)$$

$$C_{nx+1,j,k} = 1 \quad \dots (6-72)$$

$$W_{nx+1,j,k} = 1 \quad \dots (6-73)$$

$$E_{nx+1,j,k} = S_{nx+1,j,k} = N_{nx+1,j,k} = BC_{nx+1,j,k} = TC_{nx+1,j,k} = TI_{nx+1,j,k} = 0 \quad \dots (6-74)$$

Para los desplazamientos en la dirección z:

$$W_{nx+1,j,k}(\Delta U_z)_{nx,j,k}^{n+1} + C_{nx+1,j,k}(\Delta U_z)_{nx+1,j,k}^{n+1} = TI_{nx+1,j,k} \quad \dots (6-75)$$

$$C_{nx+1,j,k} = 1 \quad \dots (6-76)$$

$$W_{nx+1,j,k} = 1 \quad \dots (6-77)$$

$$E_{nx+1,j,k} = S_{nx+1,j,k} = N_{nx+1,j,k} = BC_{nx+1,j,k} = TC_{nx+1,j,k} = TI_{nx+1,j,k} = 0 \quad \dots (6-78)$$

Ahora para el plano  $y=ny$

Para los desplazamientos en la dirección  $x$ :

$$C_{i,ny+1,k}(\Delta U_x)_{i,ny+1,k}^{n+1} + S_{i,ny+1,k}(\Delta U_x)_{i,ny,k}^{n+1} = TI_{i,ny+1,k} \quad \dots (6-79)$$

$$C_{i,ny+1,k} = 1 \quad \dots (6-80)$$

$$S_{i,ny+1,k} = 1 \quad \dots (6-81)$$

$$E_{i,ny+1,k} = W_{i,ny+1,k} = N_{i,ny+1,k} = BC_{i,ny+1,k} = TC_{i,ny+1,k} = TI_{i,ny+1,k} = 0 \quad \dots (6-82)$$

Para los desplazamientos en la dirección  $y$ :

$$C_{i,ny+1,k}(\Delta U_y)_{i,ny+1,k}^{n+1} + S_{i,ny+1,k}(\Delta U_y)_{i,ny,k}^{n+1} = TI_{i,ny+1,k} \quad \dots (6-83)$$

$$C_{i,ny+1,k} = 1 \quad \dots (6-84)$$

$$S_{i,ny+1,k} = 1 \quad \dots (6-85)$$

$$E_{i,ny+1,k} = W_{i,ny+1,k} = N_{i,ny+1,k} = BC_{i,ny+1,k} = TC_{i,ny+1,k} = TI_{i,ny+1,k} = 0 \quad \dots (6-86)$$

Para los desplazamientos en la dirección  $z$ :

$$C_{i,ny+1,k}(\Delta U_z)_{i,ny+1,k}^{n+1} + S_{i,ny+1,k}(\Delta U_z)_{i,ny,k}^{n+1} = TI_{i,ny+1,k} \quad \dots (6-87)$$

$$C_{i,ny+1,k} = 1 \quad \dots (6-88)$$

$$S_{i,ny+1,k} = 1 \quad \dots (6-89)$$

$$E_{i,ny+1,k} = W_{i,ny+1,k} = N_{i,ny+1,k} = BC_{i,ny+1,k} = TC_{i,ny+1,k} = TI_{i,ny+1,k} = 0 \quad \dots (6-90)$$

Para el plano  $z=nz$

Para los desplazamientos en la dirección  $x$ :

$$C_{i,j,nz+1}(\Delta U_x)_{i,j,nz+1}^{n+1} + BC_{i,j,nz+1}(\Delta U_x)_{i,j,nz}^{n+1} = TI_{i,j,nz+1} \quad \dots (6-91)$$

$$C_{i,j,nz+1} = 1 \quad \dots (6-92)$$

$$BC_{i,j,nz+1} = 1 \quad \dots (6-93)$$

$$W_{i,j,nz+1} = E_{i,j,nz+1} = S_{i,j,nz+1} = N_{i,j,nz+1} = TC_{i,j,nz+1} = TI_{i,j,nz+1} \quad \dots (6-94)$$

Para los desplazamientos en la dirección  $y$ :

$$C_{i,j,nz+1}(\Delta U_y)_{i,j,nz+1}^{n+1} + BC_{i,j,nz+1}(\Delta U_y)_{i,j,nz}^{n+1} = TI_{i,j,nz+1} \quad \dots (6-95)$$

$$C_{i,j,nz+1} = 1 \quad \dots (6-96)$$

$$BC_{i,j,nz+1} = 1 \quad \dots (6-97)$$

$$W_{i,j,nz+1} = E_{i,j,nz+1} = S_{i,j,nz+1} = N_{i,j,nz+1} = TC_{i,j,nz+1} = TI_{i,j,nz+1} \quad \dots (6-98)$$

Para los desplazamientos en la dirección  $z$ :

$$C_{i,j,nz+1}(\Delta U_z)_{i,j,nz+1}^{n+1} + BC_{i,j,nz+1}(\Delta U_z)_{i,j,nz}^{n+1} = TI_{i,j,nz+1} \quad \dots (6-99)$$

$$C_{i,j,nz+1} = 1 \quad \dots (6-100)$$

$$BC_{i,j,nz+1} = 1 \quad \dots (6-101)$$

$$W_{i,j,nz+1} = E_{i,j,nz+1} = S_{i,j,nz+1} = N_{i,j,nz+1} = TC_{i,j,nz+1} = TI_{i,j,nz+1} \quad \dots (6-102)$$

Como ya se mencionó, en el plano  $z=1$  usamos condiciones de límite tipo Neumann. El desarrollo de estas se presenta a continuación.

$$G\left(\frac{\partial\Delta U_x}{\partial z} + \frac{\partial\Delta U_z}{\partial x}\right) = 0 \quad \dots (6-103)$$

Discretizando:

$$\left(\frac{\partial\Delta U_x}{\partial z}\right)_{i,j,1/2} = \frac{\Delta U_{x_{i,j,1}} - \Delta U_{x_{i,j,0}}}{\Delta Z_o} \quad \dots (6-104)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Delta U_z}{\partial x}\right)_{i,j,1/2} &= \frac{\Delta U_{z_{i+1/2,j,1/2}} - \Delta U_{z_{i-1/2,j,1/2}}}{\left(\frac{\Delta X_{i-1}}{2} + \frac{\Delta X_i}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{\Delta U_{z_{i,j,1/2}} + \Delta U_{z_{i+1,j,1/2}}}{2}\right) - \left(\frac{\Delta U_{z_{i-1,j,1/2}} - \Delta U_{z_{i,j,1/2}}}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{2}\right)} \\ &= \left[\left(\frac{\Delta U_{z_{i,j,0}} + \Delta U_{z_{i,j,1}}}{2}\right) + \left(\frac{\Delta U_{z_{i+1,j,0}} - \Delta U_{z_{i+1,j,1}}}{2}\right) - \left(\frac{\Delta U_{z_{i-1,j,0}} + \Delta U_{z_{i-1,j,1}}}{2}\right) - \left(\frac{\Delta U_{z_{i-1,j,0}} - \Delta U_{z_{i,j,1}}}{2}\right)\right] / (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\Delta U_{z_{i+1,j,0}} + \Delta U_{z_{i+1,j,1}}) - (\Delta U_{z_{i-1,j,0}} + \Delta U_{z_{i-1,j,1}})}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)} \end{aligned} \quad \dots(6-105)$$

Remplazando las expresiones obtenidas tenemos:

$$G\left(\frac{\partial\Delta U_x}{\partial z} + \frac{\partial\Delta U_z}{\partial x}\right) = G\left[\frac{\Delta U_{x_{i,j,1}}^{n+1} - \Delta U_{x_{i,j,0}}^{n+1}}{\Delta Z_o} + \frac{1}{2} \frac{(\Delta U_{z_{i+1,j,0}}^{n+1} + \Delta U_{z_{i+1,j,1}}^{n+1}) - (\Delta U_{z_{i-1,j,0}}^{n+1} + \Delta U_{z_{i-1,j,1}}^{n+1})}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)}\right] \quad \dots(6-106)$$

$$\Delta U_{x_i,j,1}^{n+1} - \Delta U_{x_i,j,0}^{n+1} = \frac{\Delta Z_o}{2} \frac{(\Delta U_{z_{i+1,j,0}}^{n+1} + \Delta U_{z_{i+1,j,1}}^{n+1}) - (\Delta U_{z_{i-1,j,0}}^{n+1} + \Delta U_{z_{i-1,j,1}}^{n+1})}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)}$$

....(6-107)

Y escribiéndola en forma de stencils:

$$TH_{i,j,0} = -\frac{\Delta Z_o}{2} \frac{(\Delta U_{z_{i+1,j,0}}^{n+1} + \Delta U_{z_{i+1,j,1}}^{n+1}) - (\Delta U_{z_{i-1,j,0}}^{n+1} + \Delta U_{z_{i-1,j,1}}^{n+1})}{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)}$$

.... (6-108)

$$C_{i,j,0} = -1$$

.... (6-109)

$$TC_{i,j,0} = 1$$

.... (6-110)

$$W_{i,j,0} = E_{i,j,0} = S_{i,j,0} = N_{i,j,0} = BC_{i,j,0} = 0$$

.... (6-111)

$$C_{i,j,0} \Delta U_{x_i,j,0}^{n+1} + TC_{i,j,0} \Delta U_{x_i,j,1}^{n+1} = TH_{i,j,0}$$

.... (6-112)

Para el plano z=1, pero ahora evaluando el desplazamiento en y:

$$G \left( \frac{\partial \Delta U_y}{\partial z} + \frac{\partial \Delta U_z}{\partial y} \right) = 0$$

.... (6-113)

Discretizando la ecuación anterior:

$$\left( \frac{\partial \Delta U_y}{\partial z} \right)_{i,j,1/2} = \frac{\Delta U_{y_{i,j,1}} - \Delta U_{y_{i,j,0}}}{\Delta Z_o}$$

.... (6-114)

$$\left( \frac{\partial \Delta U_z}{\partial y} \right)_{i,j,1/2} = \frac{\Delta U_{z_{i,j+1/2,1/2}} - \Delta U_{z_{i,j-1/2,1/2}}}{\left( \frac{\Delta Y_{j-1}}{2} + \frac{\Delta Y_j}{2} \right)}$$

$$= \frac{\left( \frac{\Delta U_{z_{i,j,1/2}} + \Delta U_{z_{i,j+1,1/2}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{z_{i,j-1,1/2}} - \Delta U_{z_{i,j,1/2}}}{2} \right)}{\left( \frac{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j}{2} \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \left( \frac{\Delta U_{z_{i,j,o}} + \Delta U_{z_{i,j,1}}}{2} \right) + \left( \frac{\Delta U_{z_{i,j+1,o}} - \Delta U_{z_{i,j+1,1}}}{2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\Delta U_{z_{i,j-1,o}} + \Delta U_{z_{i,j-1,1}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{z_{i,j-1,o}} - \Delta U_{z_{i,j-1,1}}}{2} \right) \right] / (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j) \\
&= \frac{1}{2} \frac{(\Delta U_{z_{i,j+1,o}} + \Delta U_{z_{i,j+1,1}}) - (\Delta U_{z_{i,j-1,o}} + \Delta U_{z_{i,j-1,1}})}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)}
\end{aligned}
\tag{6-115}$$

Y del desarrollo anterior la condición queda:

$$G \left( \frac{\partial \Delta U_y}{\partial z} + \frac{\partial \Delta U_z}{\partial y} \right) = G \left[ \frac{\Delta U_{y_{i,j,1}}^{m+1} - \Delta U_{y_{i,j,o}}^{m+1}}{\Delta Z_o} + \frac{1}{2} \frac{(\Delta U_{z_{i,j+1,o}}^{m+1} + \Delta U_{z_{i,j+1,1}}^{m+1}) - (\Delta U_{z_{i,j-1,o}}^{m+1} + \Delta U_{z_{i,j-1,1}}^{m+1})}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \right] = 0
\tag{6-116}$$

Tenemos así la ecuación:

$$\Delta U_{y_{i,j,1}}^{m+1} - \Delta U_{y_{i,j,o}}^{m+1} = - \frac{\Delta Z_o}{2} \frac{(\Delta U_{z_{i,j+1,o}}^{n+1} + \Delta U_{z_{i,j+1,1}}^{n+1}) - (\Delta U_{z_{i,j-1,o}}^{n+1} + \Delta U_{z_{i,j-1,1}}^{n+1})}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)}
\tag{6-117}$$

Y discretizada quedaría:

$$TI_{i,j,o} = - \frac{\Delta Z_o}{2} \frac{(\Delta U_{z_{i,j+1,o}}^{n+1} + \Delta U_{z_{i,j+1,1}}^{n+1}) - (\Delta U_{z_{i,j-1,o}}^{n+1} + \Delta U_{z_{i,j-1,1}}^{n+1})}{(\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)}
\tag{6-118}$$

$$Ci_{i,j,o} = -1
\tag{6-119}$$

$$TC_{i,j,o} = 1
\tag{6-120}$$

$$Wi_{i,j,o} = Ei_{i,j,o} = Si_{i,j,o} = Ni_{i,j,o} = BC_{i,j,o} = 0
\tag{6-121}$$

$$C_{i,j,o} \Delta U_{y_{i,j,o}}^{n+1} + TC_{i,j,o} \Delta U_{y_{i,j,1}}^{n+1} = TI_{i,j,o}
\tag{6-122}$$

Desarrollando ahora para los desplazamientos en z en z=1

$$\lambda \Delta \varepsilon_V + 2G \left[ \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} \right] = 0 \quad \dots (6-123)$$

El segundo término sigue el desarrollo efectuado anteriormente.

Recordando que la definición de la deformación volumétrica es:

$$\Delta \varepsilon_V = \left( \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \Delta U_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} \right) \quad \dots (6-124)$$

Desarrollamos el primer término discretizando cada una de las partes:

Desplazamientos en z:

$$\left( \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} \right)_{i,j,1/2} = \frac{\Delta U_{z_{i,j,1}} - \Delta U_{z_{i,j,o}}}{\Delta Z_o} \quad \dots (6-125)$$

Desplazamientos en x:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Delta U_x}{\partial x} \right)_{i,j,1/2} &= \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left( \Delta U_{x_{i+1,j,1/2}} - \Delta U_{x_{i-1,j,1/2}} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left[ \left( \frac{\Delta U_{x_{i+1,j,1}} - \Delta U_{x_{i+1,j,o}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{x_{i-1,j,1}} - \Delta U_{x_{i-1,j,o}}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad \dots (6-126)$$

Desplazamientos en y:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Delta U_y}{\partial y} \right)_{i,j,1/2} &= \frac{1}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left( \Delta U_{y_{i,j+1,1/2}} - \Delta U_{y_{i,j-1,1/2}} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left[ \left( \frac{\Delta U_{y_{i,j+1,1}} - \Delta U_{y_{i,j+1,o}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{y_{i,j-1,1}} - \Delta U_{y_{i,j-1,o}}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad \dots (6-127)$$

Con lo cual el término de la deformación volumétrica discretizado queda:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_V = & \frac{1}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left[ \left( \frac{\Delta U_{x_{i+1,j,1}} - \Delta U_{x_{i+1,j,o}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{x_{i-1,j,1}} - \Delta U_{x_{i-1,j,o}}}{2} \right) \right] + \\ & \frac{1}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left[ \left( \frac{\Delta U_{y_{i,j+1,1}} - \Delta U_{y_{i,j+1,o}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{y_{i,j-1,1}} - \Delta U_{y_{i,j-1,o}}}{2} \right) \right] + \\ & \frac{\Delta U_{z_{i,j,1}} - \Delta U_{z_{i,j,o}}}{\Delta Z_o} \end{aligned} \quad \dots(6-128)$$

Reemplazando en la ecuación quedaría:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left[ \left( \frac{\Delta U_{x_{i+1,j,1}} - \Delta U_{x_{i+1,j,o}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{x_{i-1,j,1}} - \Delta U_{x_{i-1,j,o}}}{2} \right) \right] + \\ & \frac{\lambda}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left[ \left( \frac{\Delta U_{y_{i,j+1,1}} - \Delta U_{y_{i,j+1,o}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{y_{i,j-1,1}} - \Delta U_{y_{i,j-1,o}}}{2} \right) \right] + \\ & \frac{\lambda_{i,j,1/2}^{n+1}}{\Delta Z_o} (\Delta U_{z_{i,j,1}}^{n+1} - \Delta U_{z_{i,j,o}}^{n+1}) + \frac{2G_{i,j,1/2}^{n+1}}{\Delta Z_o} (\Delta U_{z_{i,j,1}}^{n+1} - \Delta U_{z_{i,j,o}}^{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad \dots(6-129)$$

Reagrupando los términos:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{i,j,1/2}^{n+1} + 2G_{i,j,1/2}^{n+1}}{\Delta Z_o} (\Delta U_{z_{i,j,1}}^{n+1}) - \frac{\lambda_{i,j,1/2}^{n+1} + 2G_{i,j,1/2}^{n+1}}{\Delta Z_o} (\Delta U_{z_{i,j,o}}^{n+1}) = \\ & - \frac{\lambda}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left[ \left( \frac{\Delta U_{x_{i+1,j,1}} - \Delta U_{x_{i+1,j,o}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{x_{i-1,j,1}} - \Delta U_{x_{i-1,j,o}}}{2} \right) \right] \\ & - \frac{\lambda}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left[ \left( \frac{\Delta U_{y_{i,j+1,1}} - \Delta U_{y_{i,j+1,o}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{y_{i,j-1,1}} - \Delta U_{y_{i,j-1,o}}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad \dots(6-130)$$

Y discretizando la ecuación anterior:

$$C_{i,j,o} = - \left( \frac{\lambda_{i,j,1/2}^{n+1} + 2G_{i,j,1/2}^{n+1}}{\Delta Z_o} \right) \quad \dots(6-131)$$

$$TC_{i,j,o} = \left( \frac{\lambda_{i,j,1/2}^{n+1} + 2G_{i,j,1/2}^{n+1}}{\Delta Z_o} \right) \quad \dots(6-132)$$

$$TI_{i,j,o} = - \frac{\lambda}{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i} \left[ \left( \frac{\Delta U_{x_{i+1,j,1}} - \Delta U_{x_{i+1,j,o}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{x_{i-1,j,1}} - \Delta U_{x_{i-1,j,o}}}{2} \right) \right] - \frac{\lambda}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \left[ \left( \frac{\Delta U_{y_{i,j+1,1}} - \Delta U_{y_{i,j+1,o}}}{2} \right) - \left( \frac{\Delta U_{y_{i,j-1,1}} - \Delta U_{y_{i,j-1,o}}}{2} \right) \right] \quad \dots(6-133)$$

$$C_{i,j,o} \Delta U_{z_{i,j,o}}^{n+1} + TC_{i,j,o} \Delta U_{z_{i,j,1}}^{n+1} = TI_{i,j,o} \quad \dots(6-134)$$

## 7. DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE POROSIDAD

Tomamos paradigmáticamente la ecuación correspondiente a la porosidad de la matriz<sup>38</sup>:

$$\frac{d\phi_m}{\phi_m} = -c_{pcm} d\bar{\sigma}_p^d + c_{bc}^d d\bar{\sigma}_b^d \quad \dots(2-21)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c_{pcm} d\bar{\sigma}_p^d &= c_{pcm} \left( d\sigma_m - \beta_{pm} dP_m - \beta_{pf} dP_f \right) \\ &= \frac{c_{bc}^s - c_s^s}{\phi_m} \left( d\sigma_m - \beta_{pm} dP_m - \beta_{pf} dP_f \right) \quad \dots(7-1) \end{aligned}$$

Además recordando que el diferencial del esfuerzo medio puede expresarse así:

$$d\bar{\sigma}_b^d = d\bar{\sigma} - \beta_{bm} dP_m - \beta_{bf} dP_f \quad \dots(7-2)$$

---

<sup>38</sup> Osorio J.G., Chen H.Y. and Teufel L.W., “Numerical Simulation of Coupled Fluid-Flow/geomechanical Behavior of Tight Gas Reservoirs with Stress Sensitive Permeability”, Pág. 4. SPE, 1997.

Entonces podemos expresar la ecuación general:

$$\frac{d\phi_m}{\phi_m} = -\frac{c_{bc}^s - c_s^s}{\phi_m} (d\sigma_m - \beta_{pm}dP_m - \beta_{pf}dP_f) + c_{bc}^d (d\bar{\sigma} - \beta_{bm}dP_m - \beta_{bf}dP_f) \quad \dots(7-3)$$

Multiplicando por el término de porosidad:

$$d\phi_m = -\left(c_{bc}^s - c_s^s\right) \left(d\sigma_m - \beta_{pm}dP_m - \beta_{pf}dP_f\right) + \phi_m c_{bc}^d \left(d\bar{\sigma} - \beta_{bm}dP_m - \beta_{bf}dP_f\right) \quad \dots(7-4)$$

Y ahora, respecto a dos estados definidos en el tiempo tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_{m_{ijk}}^{n+1} - \phi_{m_{ijk}}^n = & \left\{ \left( c_{bc_{ijk}}^{sm+1} - c_{s_{ijk}}^{sm+1} \right) \left( \sigma_{m_{ijk}}^{n+1} - \sigma_{m_{ijk}}^n \right) - \right. \\ & \left. \beta_{pm_{ijk}}^{n+1} \left( P_{m_{ijk}}^{n+1} - P_{m_{ijk}}^n \right) - \beta_{pf_{ijk}}^{n+1} \left( P_{f_{ijk}}^{n+1} - P_{f_{ijk}}^n \right) \right\} + \\ & \left\{ \phi_{m_{ijk}}^{n+1} c_{bc_{ijk}}^{dn+1} \left( \bar{\sigma}_{ijk}^{n+1} - \bar{\sigma}_{ijk}^n \right) - \right. \\ & \left. \beta_{bm_{ijk}}^{n+1} \left( P_{m_{ijk}}^{n+1} - P_{m_{ijk}}^n \right) - \beta_{bf_{ijk}}^{n+1} \left( P_{f_{ijk}}^{n+1} - P_{f_{ijk}}^n \right) \right\} \quad \dots(7-5) \end{aligned}$$

Ahora debemos despejar el término que me permite hallar la porosidad de la matriz en un tiempo n+1

$$\phi_{m_{ijk}}^{n+1} = \frac{\phi_{m_{ijk}}^n + \left\{ - \left( c_{bc_{ijk}}^{sn+1} - c_{s_{ijk}}^{sn+1} \right) \left( \sigma_{m_{ijk}}^{n+1} - \sigma_{m_{ijk}}^n \right) - \beta_{pm_{ijk}}^{n+1} \left( P_{m_{ijk}}^{n+1} - P_{m_{ijk}}^n \right) - \beta_{pf_{ijk}}^{n+1} \left( P_{f_{ijk}}^{n+1} - P_{f_{ijk}}^n \right) \right\}}{1 - c_{bc_{ijk}}^{dn+1} \left( \bar{\sigma}_{ijk}^{n+1} - \bar{\sigma}_{ijk}^n \right) - \beta_{bm_{ijk}}^{n+1} \left( P_{m_{ijk}}^{n+1} - P_{m_{ijk}}^n \right) - \beta_{bf_{ijk}}^{n+1} \left( P_{f_{ijk}}^{n+1} - P_{f_{ijk}}^n \right)}$$

...(7-6)

Podemos expresarlo en diferenciales, considerando variaciones determinadas:

$$\phi_{m_{ijk}}^{n+1} = \frac{\phi_{m_{ijk}}^n + \left\{ - \left( c_{bc_{ijk}}^{sn+1} - c_{s_{ijk}}^{sn+1} \right) \left( \Delta \sigma_{m_{ijk}}^{n+1} \right) - \beta_{pm_{ijk}}^{n+1} \left( \Delta P_{m_{ijk}}^{n+1} \right) - \beta_{pf_{ijk}}^{n+1} \left( \Delta P_{f_{ijk}}^{n+1} \right) \right\}}{1 - c_{bc_{ijk}}^{dn+1} \left( \Delta \bar{\sigma}_{ijk}^{n+1} \right) - \beta_{bm_{ijk}}^{n+1} \left( \Delta P_{m_{ijk}}^{n+1} \right) - \beta_{bf_{ijk}}^{n+1} \left( \Delta P_{f_{ijk}}^{n+1} \right)}$$

....(7-7)

## 8. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO DE FLUIDOS<sup>39</sup>

### 8.1 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN DE LA MASA DE FLUIDO

La velocidad del fluido en la matriz puede definirse así:

$$v_m = \frac{V_m}{\phi_m A_T \Delta t} \quad \dots(8-1)$$

O,

$$\phi v_m = \frac{V_m}{A_T \Delta t} \quad \dots(8-2)$$

además, la rata de flujo másico en la matriz puede ser expresada así:

$$V_m \rho_m = A_T \Delta t \phi_m v_m \rho_m \quad \dots(8-3)$$

realizando un balance de masa de la fase fluido en la matriz

$$\left[ \begin{matrix} \text{masa} \\ \text{entrada} \end{matrix} \right]_{\Delta t} - \left[ \begin{matrix} \text{masa} \\ \text{salida} \end{matrix} \right]_{\Delta t} = \left[ \begin{matrix} \text{masa} \\ \text{acumulada} \end{matrix} \right]_{\Delta t} \quad \dots(8-4)$$

$$A_T \Delta t (\rho_m \phi_m v_m) - A_T \Delta t [(\rho_m \phi_m v_m) + \Delta(\rho_m \phi_m v_m)] = [masa]_{t+\Delta t} - [masa]_t \quad \dots(8-5)$$

$$- A_T \Delta t \Delta(\rho_m \phi_m v_m) = [\rho_m V_m]_{t+\Delta t} - [\rho_m V_m]_t \quad \dots(8-6)$$

$$- A_T \Delta t \Delta(\rho_m \phi_m v_m) = [\rho_m \phi_m V_b]_{t+\Delta t} - [\rho_m \phi_m V_b]_t \quad \dots(8-7)$$

---

<sup>39</sup> Osorio, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2000, Pág. 37 ss.

además, Dividiendo por  $\Delta t \Delta x A_T$  y tomando límites:

$$\frac{\partial(\rho_m \phi_m v_m)}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x A_T} \frac{\partial(\rho_m \phi_m V_b)}{\partial t} \quad \dots\dots(8.8)$$

$$\frac{\partial(\rho_m \phi_m v_m)}{\partial x} = \frac{1}{V_b} \frac{\partial(\rho_m \phi_m V_b)}{\partial t} \quad \dots\dots(8.8a)$$

En general:

$$\nabla \cdot (\rho_m \phi_m v_m) = \frac{1}{V_b} \frac{\partial(\rho_m \phi_m V_b)}{\partial t} \quad \dots\dots(8-9)$$

que representa la relación general para obtener las ecuaciones 2-1 y 2-2.

## 8.2 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN DE MASA SÓLIDA

Siguiendo un razonamiento similar:

$$v_s = \frac{Vol.sol}{A_{solid} \cdot Time} = \frac{V_s}{(A_T - A_P)\Delta t} = \frac{V_s}{A_T \left(1 - \frac{A_P}{A_T}\right)\Delta t} \quad \dots\dots(8-10)$$

$$v_s = \frac{V_s}{(1 - \phi_t)A_T \Delta t} \quad \dots\dots(8-11)$$

$$\text{Así: } (1 - \phi_t)v_s = \frac{V_s}{A_T \Delta t} \quad \dots\dots(8-12)$$

$$\text{donde: } masa.solida = V_s \rho_s = A_T \Delta t (1 - \phi_t) v_s \rho_s \quad \dots\dots(8-13)$$

haciendo un balance de mas para la fase sólida:

$$\left[ \begin{matrix} \text{masa} \\ \text{entrada} \end{matrix} \right]_{\Delta t} - \left[ \begin{matrix} \text{masa} \\ \text{salida} \end{matrix} \right]_{\Delta t} = \left[ \begin{matrix} \text{masa} \\ \text{acumulada} \end{matrix} \right]_{\Delta t} \quad \dots(8-14)$$

$$A_T \Delta t (1 - \phi_t) v_s \rho_s - A_T \Delta t [(1 - \phi_t) v_s \rho_s + \Delta [(1 - \phi_t) v_s \rho_s]] = [Acum.]_{\Delta t} \quad \dots(8-15)$$

$$- A_T \Delta t [(1 - \phi_t) v_s \rho_s] = [m_{solid}]_{t+\Delta t} - [m_{solid}]_t \quad \dots(8-16)$$

$$- A_T \Delta t [(1 - \phi_t) v_s \rho_s] = [V_s \rho_s]_{t+\Delta t} - [V_s \rho_s]_t \quad \dots(8-17)$$

$$- A_T \Delta t [(1 - \phi_t) v_s \rho_s] = [(V_b - V_p) \rho_s]_{t+\Delta t} - [(V_b - V_p) \rho_s]_t \quad \dots(8-18)$$

$$- A_T \Delta t [(1 - \phi_t) v_s \rho_s] = [V_b (1 - V_p / V_b) \rho_s]_{t+\Delta t} - [V_b (1 - V_p / V_b) \rho_s]_t \quad \dots(8-19)$$

$$- A_T \Delta t [(1 - \phi_t) v_s \rho_s] = [V_b (1 - \phi_t) \rho_s]_{t+\Delta t} - [V_b (1 - \phi_t) \rho_s]_t \quad \dots(8-20)$$

Dividiendo por  $A_T \Delta x \Delta t$  y tomando límites:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho_s (1 - \phi_t) v_s] + \frac{1}{A_T \Delta x} \frac{\partial (\rho_s (1 - \phi_t) V_b)}{\partial t} \quad \dots(8-21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho_s (1 - \phi_t) v_s] + \frac{1}{V_b \Delta x} \frac{\partial (\rho_s (1 - \phi_t) V_b)}{\partial t} \quad \dots(8-22)$$

En general:

$$\nabla \cdot [\rho_s (1 - \phi_t) v_s] = \frac{1}{V_b} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1 - \phi_t) v_s) \quad \dots(2-3)$$

### 8.3 LEY DE DARCY

$$v_{rm} = v_m - v_s = \frac{q}{\phi_t A_T} \quad \dots(8-23)$$

Por ley de Darcy

$$q = -\frac{kAT}{\mu} \nabla p \quad \dots(8-24)$$

así:

$$\frac{q}{AT} = -\frac{k}{\mu} \nabla p$$

....(8-25)

y la ecuación 8-23, se puede escribir como sigue:

$$v_{rm} = v_m - v_s = \frac{1}{\phi_t} \frac{-k}{\mu} \nabla p \quad \dots(8-26)$$

o,

$$\phi(v_m - v_s) = \frac{-k}{\mu} \nabla p \quad \dots(2-4)$$

## 8.4 ECUACIÓN DE ESTADO

De la definición de compresibilidad:

$$c = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad \dots(8-27)$$

siempre que T = constante

$$c = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad \dots(8-28)$$

Teniendo en cuenta que:  $V = \frac{m}{\rho}$  y si  $m =$  constante, tenemos:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad \dots(2-6)$$

## 8.5 ECUACIONES GENERALES QUE GOBIERNAN EL FLUJO DE FLUIDOS

De la ecuación 8-4.

$$\phi v_m = \phi v_s - \frac{k}{\mu} \nabla p \quad \dots(8-29)$$

Reemplazando la ecuación 8-29 en la ecuación 8-9:

$$\nabla \cdot \left( \rho_m \phi_t v_s - \rho_m \frac{k}{\mu} \nabla p \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\phi_t \rho_m) = \tilde{q}_v \quad \dots(8-30)$$

así:

$$\tilde{q}_v + \nabla \cdot \left( \rho_m \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_t \rho_m) + \nabla \cdot (\rho_m \phi_t v_s) \quad \dots(8-31)$$

$$\nabla \cdot \left( \rho_m \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_t \rho_m) + \bar{v}_s \cdot \nabla (\rho_m \phi_t) + \rho_m \phi_t \bar{\nabla} \cdot \bar{v}_s - \tilde{q}_v \quad \dots(8-32)$$

en términos de la derivativa material, podemos escribir:

$$\left. \frac{d(\phi_t \rho_m)}{dt} \right|_{\substack{\text{particula} \\ \text{movimiento}}} = \left( \frac{\partial(\phi_t \rho_m)}{\partial t} \right)_{\substack{\text{localizacion} \\ \text{fixed} \\ \text{(punto.en.el.espacio)}}} + \bar{v}_s \cdot \nabla (\phi_t \rho_m) \quad \dots(8-33)$$

$\bar{\nabla}(\phi_t \rho_m)$ : representa la variación de  $(\phi_t \rho_m)$  a lo largo de la ruta seguida por la partícula.

$\bar{v}_s$ : representa la velocidad instantánea en un punto dado.

tomando la ecuación 8-33 en la ecuación 8-32

$$\nabla \cdot \left( \rho_m \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \frac{d}{dt} (\phi_t \rho_m) + [\rho_m \phi_t \nabla \cdot \bar{v}_s]_{\substack{\text{en.un.punto.en} \\ \text{el.espacio}}} - \tilde{q}_m \quad \dots(8-34)$$

expandiendo la parte derecha de la ecuación:

$$\nabla \cdot \left( \rho_m \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \left[ \phi_t \rho_m \left( \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} + \frac{1}{\phi_t} \frac{d\phi_t}{dt} \right) \right]_{\substack{\text{particula.en} \\ \text{movimiento}}} + [\rho_m \phi_t \nabla \cdot \bar{v}_s]_{\substack{\text{en.un.punto.en} \\ \text{el.espacio}}} - \tilde{q}_m \quad \dots(8-35)$$

$$\nabla \cdot \left( \rho_m \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \phi_t \rho_m \left( \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} + \frac{1}{\phi_t} \frac{d\phi_t}{dt} + \nabla \cdot \bar{v}_s \right) - \tilde{q}_m \quad \dots(8-36)$$

expandiendo el primer término de la ecuación 8-9:

$$\nabla \cdot [\rho_s (1 - \phi_t) \bar{v}_s] = \nabla \cdot [\rho_s (1 - \phi_t)] \cdot \bar{v}_s + \rho_s (1 - \phi_t) \nabla \cdot \bar{v}_s \quad \dots(8-37)$$

Tomando la ecuación 8-37 en la 8-9:

$$\nabla \cdot [\rho_s (1 - \phi_t)] \cdot \bar{v}_s + \rho_s (1 - \phi_t) \nabla \cdot \bar{v}_s + \frac{\partial [\rho_s (1 - \phi_t)]}{\partial t} = 0 \quad \dots(8-38)$$

en términos de la derivativa material tenemos:

$$\frac{d[(1 - \phi_t) \rho_s]}{dt} \Big|_{\substack{\text{particula.en} \\ \text{movimiento}}} = \frac{\partial [(1 - \phi_t) \rho_s]}{\partial t} \Big|_{\text{punto}} + \bar{v}_s \cdot \nabla [(1 - \phi_t) \rho_s] \quad \dots(8-39)$$

tomando la ecuación 8-39 en la ecuación 8-38:

$$\frac{d[\rho_s (1 - \phi_t)]}{dt} + \rho_s (1 - \phi_t) \nabla \cdot \bar{v}_s = \tilde{q}_s \quad \dots(8-40)$$

así:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v}_S = -\frac{1}{\rho_S(1-\phi_t)} \cdot \frac{d[(1-\phi_t)\rho_S]}{dt} + \frac{\tilde{q}_S}{\rho_S(1-\phi_t)} \quad \dots(8-41)$$

Para una masa constante de sólido y teniendo en cuenta que

$$\frac{\tilde{q}_S}{\rho_S(1-\phi_t)} = \frac{Q_S}{\Delta V_b(1-\phi_t)} \quad \dots\dots\dots(8-42)$$

mediante la ecuación 8-41 tenemos:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v}_S = -\frac{1}{\frac{m_s}{V_s}(1-\phi_t)} \cdot \frac{d\left[\frac{(1-\phi_t)m_s}{V_s}\right]}{dt} + \frac{Q_S}{\Delta V_b(1-\phi_t)} = -\frac{V_s}{1-\frac{V_P}{V_b}} \cdot \frac{d\left[\frac{1}{V_s}\left(1-\frac{V_P}{V_b}\right)\right]}{dt} + \frac{Q_S}{\Delta V_b(1-\phi_t)} \quad \dots(8-43)$$

así:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v}_S = -\frac{1}{V_b} \cdot \frac{dV_b}{dt} + \frac{Q_S}{\Delta V_b(1-\phi_t)} \quad \dots(8-44)$$

La divergencia de la velocidad del sólido refleja el cambio en el volumen. Esto es un estado del balance de masa de sólido.

$$\text{Ahora, } \phi_t = \frac{V_P}{V_b} ; \quad \dots(8-45)$$

Así:

$$\frac{d\phi_t}{dt} = \frac{1}{V_b} \frac{dV_P}{dt} - \frac{V_P}{V_b^2} \frac{dV_b}{dt} \quad \dots(8-46)$$

$$V_b \frac{d\phi_t}{dt} = \frac{dV_P}{dt} - \frac{V_P}{V_b} \frac{dV_b}{dt} \quad \dots(8-47)$$

reemplazando la ecuación 8-44 y la 8-47 en la ecuación 8-36 tenemos:

$$\nabla \cdot \left( \rho_m \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \phi_t \rho_m \left( \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} + \frac{1}{V_P} \frac{dV_P}{dt} - \frac{1}{V_b} \frac{dV_b}{dt} + \frac{1}{V_b} \frac{dV_b}{dt} + \frac{Q_s}{\Delta V_b (1 - \phi_t)} \right) - \tilde{q}_m$$

$$\nabla \cdot \left( \rho_m \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \phi_t \rho_m \left( \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} + \frac{1}{V_P} \frac{dV_P}{dt} + \frac{Q_s}{\Delta V_b (1 - \phi_t)} \right) - \tilde{q}_m \quad \dots\dots(8-48)$$

La cual representa la ecuación que se utiliza para describir el flujo en cada uno de los sistemas, matriz y fractura, en las ecuaciones 2-11 y 2-12.

## 9. DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DE DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA<sup>40</sup>

La deducción trata de la acoplamiento de las tres relaciones principales que encontramos en el modelo esfuerzo – deformación, a saber: de equilibrio, de deformación – desplazamiento, y de deformación – esfuerzo – presión.

### Ecuaciones De Equilibrio

Recordando que las ecuaciones de equilibrio se expresan de la siguiente forma (véase ecuación 2-23):

$$\sum_{J=1}^3 \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} + F_i \right) = 0 \quad \text{.....(9-1)}$$

donde  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  para  $i, j = x, y, z$ .

Si  $\sigma_{ij}^0$  es el esfuerzo inicial, después de un tiempo de producción  $\Delta t$  se tiene:

$$\sigma_{ij}^0 = (\sigma_{ij})_{t+\Delta t} - (\sigma_{ij})_{t+\Delta t} \quad \text{.....(9-2)}$$

Entonces, las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse como:

$$\sum_{J=1}^3 \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial X_j} + F_i \right) = 0 \quad \text{.....(9-3)}$$

---

<sup>40</sup> Masters et al., Coupling temperature to a double-porosity model of deformable porous media, Págs. 425 ss., John Wiley & Sons, Ltd. 2000.

Donde  $\sigma_{ij}$  son los componentes del tensor de esfuerzos,  $F_i$  las fuerzas de campo, que son despreciadas.

### Ecuaciones De Deformación-Desplazamiento

Estas ecuaciones están expresadas así:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots(2-24)$$

En donde  $\varepsilon$  es la deformación de la roca y  $u$  el desplazamiento.

### Ecuaciones De Deformación-Esfuerzo-Presión

Esta ecuación tiene la forma (véase ecuación 2-26):

$$\Delta \sigma_{ij} = 2G\Delta \varepsilon_{ij} + \lambda\Delta \varepsilon_v \delta_{ij} + \alpha\Delta p \delta_{ij} \quad \dots(9-4)$$

$\delta_{ij}$  es el operador de Kronecker, igual a 1 para  $i=j$  y a 0 para todo  $i < > j$ .

Con estas tres relaciones la deducción puede hacerse de la siguiente forma:  
Reemplazando la ecuación de Deformación-Esfuerzo-Presión (9-3) en la de equilibrio (9-1) tenemos:

$$\sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + \frac{\partial (2G\Delta \varepsilon_{ij} + \lambda\Delta \varepsilon_v \delta_{ij} + \alpha\Delta p \delta_{ij})}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \dots(9-5)$$

Considerando la anterior para las tres dimensiones:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^0}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (2G\Delta \varepsilon_{xx} + \lambda\Delta \varepsilon_v + \alpha\Delta p) + \frac{\partial}{\partial y} (2G\Delta \varepsilon_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (2G\Delta \varepsilon_{xz}) = 0 \quad \dots(9-6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^0}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^0}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (2G\Delta \varepsilon_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (2G\Delta \varepsilon_{yy} + \lambda\Delta \varepsilon_v + \alpha\Delta p) + \frac{\partial}{\partial z} (2G\Delta \varepsilon_{yz}) = 0 \quad \dots(9-7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^0}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^0}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(2G\Delta\varepsilon_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(2G\Delta\varepsilon_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(2G\Delta\varepsilon_{zz} + \lambda\Delta\varepsilon_v + \alpha\Delta p) = 0 \quad \dots(9-8)$$

Reemplazando (9-5) en (9-6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^0}{\partial z} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( G \frac{\partial \Delta u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_x}{\partial z} \right) \right] + \\ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial \Delta u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( G \frac{\partial \Delta u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial(\lambda\Delta\varepsilon_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha\Delta p)}{\partial x} = 0 \quad \dots(9-9) \end{aligned}$$

El incremento de la deformación volumétrica,  $\Delta\varepsilon_v$ , se define como la sumatoria de incrementos de las deformaciones en las direcciones x, y y z, y expresado en términos de gradiente sería:

$$\Delta\varepsilon_v = \Delta u_x + \Delta u_y + \Delta u_z = \nabla \cdot (\Delta u) \quad \dots(9-10)$$

Y reemplazando la relación para el esfuerzo volumétrico 9-10 en la ecuación 9-9 y aplicando la noción de gradiente y divergencia:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^0}{\partial z} + \nabla \cdot [G\nabla(\Delta u_x)] + \nabla \left[ G \frac{\partial(\Delta u)}{\partial x} \right] + \frac{\partial[\lambda\nabla \cdot (\Delta u)]}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha\Delta p)}{\partial z} = 0 \quad \dots(9-11)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^0}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^0}{\partial z} + \nabla \cdot [G\nabla(\Delta u_y)] + \nabla \left[ G \frac{\partial(\Delta u)}{\partial y} \right] + \frac{\partial[\lambda\nabla \cdot (\Delta u)]}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha\Delta p)}{\partial y} = 0 \quad \dots(9-12)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^0}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^0}{\partial z} + \nabla \cdot [G\nabla(\Delta u_z)] + \nabla \left[ G \frac{\partial(\Delta u)}{\partial z} \right] + \frac{\partial[\lambda\nabla \cdot (\Delta u)]}{\partial z} + \frac{\partial(\alpha\Delta p)}{\partial z} = 0 \quad \dots(9-13)$$

Entonces se trabajan con estas tres ecuaciones, ya en la matriz de roca ó en la fractura de acuerdo a las propiedades específicas de cada medio físico.

## **10. MANUAL DE INSTRUCCIONES DE USO DEL SOFTWARE**

El programa fue realizado en Visual Basic 6.0 con un desarrollo gráfico en MATLAB 5.3. Su manejo consiste en un manejo de ventanas de información que se requieren para la prosecución del modelo, y de una exposición de los datos en forma de un listado correspondiente a las distintas posiciones de la malla además de gráficas en 3D para visualizar la variación general y en 2D para el análisis del cambio en la permeabilidad y la variación consecuente del estado de esfuerzos.

De forma sintética podemos decir que las funciones del software desarrollado son las siguientes:

- Establecer condiciones no – lineales a partir del modelo desarrollado y de la posibilidad de trabajar con propiedades variables con el espacio.
- Determinar la incidencia de las variables en el desarrollo de las condiciones del yacimiento seleccionado.
- Visualizar el comportamiento de las propiedades con la variación espacial y temporal.
- Analizar el cambio en el estado de esfuerzos y propiedades como la permeabilidad.

### **10.1 ENTORNO DEL PROGRAMA**

La aplicación tiene dos ventanas de ingreso de datos y una general de datos de salida, que se despliega en otras dependiendo de la opción elegida como respuesta. Dentro de esta última contamos entonces con una ventana de

datos para la matriz, una de datos para el perfil de la variación de las propiedades, y las respectivas gráficas en 3D y 2D para cada una de las variables.

En cada una de las ventanas se exhibe la simplicidad del programa, cosa que podemos denotar por la presencia de opciones claras y directas para su manejo. Así tenemos dos tipos de cuadros:

- Cuadros de llenado: son los espacios en blanco que reciben los datos necesarios para el programa. Estos datos son de tres tipos: de discretización, propiedades del fluido y de la roca y propiedades mecánicas.
- Cuadros de control: estos cuadros corresponden a las opciones que permiten tomar las decisiones en torno a la aplicación, sobre la aceptación de los datos introducidos (cuadro **seguir**), así como el llenado de las matrices de los distintos datos que pueden variar para cada posición, con el propósito de simular un comportamiento no-lineal (opción **ingresar**).
- Cuadros de selección: son cuadros que se presentan en la ventana de salida de datos y que nos permiten seleccionar el estrato para el que se quiere realizar el análisis, así como la variable sobre la que quiere determinarse el comportamiento.
- Cuadros de entorno gráfico: estos cuadros cuya opción es **graficar**, se refieren al despliegue de las gráficas en entorno MATLAB 5.3. La opción de que las gráficas sean en 2D o 3D, viene dada por la posición del cuadro al lado del listado correspondiente.

## 10.2 VENTANAS DE INICIALIZACIÓN

Las ventanas de inicialización corresponden a los espacios para ingresar los datos necesarios para el programa. Consideramos que la implementación de un modelo específico, como el modelo de acoplamiento desarrollado para yacimientos naturalmente fracturados, presenta datos de tipo necesario, por lo cual los espacios deben llenarse para cumplir con la prosecución de la aplicación.

Los datos de entrada involucran los valores que incidirán en la conservación de la no –linealidad del tratamiento al sistema de ecuaciones, así como a las propiedades del fluido y del medio sólido, es decir, matriz y fractura. Podemos clasificarlos en los siguientes grupos:

- Datos de discretización: que corresponden al número de celdas en las direcciones x, y y z; a las dimensiones de las celdas en cada una de las direcciones, la ubicación del pozo, la posición del estrato productor y tiempo de análisis.
- Propiedades del fluido y la roca: datos que para el fluido corresponden a las variables leídas sobre la viscosidad, la gravedad API, la temperatura del yacimiento y el factor volumétrico de formación. Para la roca se leen la porosidad inicial, la densidad de la roca (matriz y fractura), la permeabilidad, compresibilidad del sólido y compresibilidad efectiva de la roca.
- Propiedades mecánicas: aquí se leen valores iniciales para el módulo de Young y de Poisson y esfuerzos iniciales resultantes de pruebas de laboratorio. Además, la permeabilidad, de la cual se presenta la opción de generar una matriz de datos iniciales, correspondiente a las distintas posiciones del pozo (si se cuenta con la información necesaria), o valores iniciales para cada dirección.

La primera ventana contiene una parte de estos datos, seleccionados como de necesario conocimiento para el desarrollo de la implementación, por lo que todas los datos deben ingresarse. Tras el llenado de la primera ventana se selecciona la opción *seguir* en la primera ventana y se despliega la *ventana 2*. La segunda ventana complementa los datos necesarios para que el programa pueda arrojar resultados.

Los valores de las dimensiones de las celdas, pueden ser de orden general o particular. La opción se determinó necesaria por cuanto el dimensionamiento influye notablemente sobre el comportamiento del estado de esfuerzos en las posiciones cercanas al pozo, situación que se muestra en el análisis de resultados.

The screenshot shows a software window titled "Método PSOR" with a sub-header "VALORES INICIALES". The interface contains several input fields arranged in two columns. A "Seguir >>" button is located at the bottom center.

VALORES INICIALES	
Numero de Celdas en X	15
Numero de Celdas en Y	15
Numero de Celdas en Z	6
Densidad de la Matriz	0,8
Densidad de Fracturas	1
Viscosidad	5
Porosidad de la Matriz Inicial	0,04
Porosidad de Fracturas Inicial	0,3
Modulo de Poisson	0,3
Modulo de Young	0,3
Permeabilidad en X	100
Permeabilidad en Y	100
Permeabilidad en Z	100
Presion de Poro Inicial	6000
Ubicación del Pozo	
X	6
Y	6
Z	4
Dt	200
q	100
rw	0,5
Bo	1,5

Seguir >>

**Figura 19.** software - VENTANA 1

**Valores Matriz (X, Y, Z)**

Bbf	10	Pf	5500
Bbm	10	Sxx	8000
Ux	0	Syy	8000
Uy	0	Szz	10000
Uz	0	Compresividad de Sólido	0,0000001
Pm	6000	Cbc	0,0000002

Dxi	6	DYi	6	DZk	2
-----	---	-----	---	-----	---

**Figura 20.** software - VENTANA 2

Cuando se cuentan con datos suficientes para los distintos puntos del yacimiento, podemos ingresar los datos para cada una de las posiciones de la malla. Esto suplirá la necesidad de conservar el carácter no-lineal del modelo y la urgencia de que el desarrollo se asemeje en mayor medida a la situación real del yacimiento.

*Grosso modo*, la forma de ingresar los datos para cada punto es el siguiente: Posterior al ingreso de los datos iniciales, se pregunta si se cuenta con la información detallada para cada una de las celdas.

The screenshot shows a software window titled "Form1" with a standard Windows-style title bar. The window contains a "Frame1" area with several input fields and a button. The fields are arranged in two columns. The left column contains: "Numero de Celdas en X" (8), "Numero de Celdas en Y" (8), "Numero de Celdas en Z" (5), "Densidad de la Matriz" (0.8), "Densidad de Fracturas" (1), "Viscosidad" (5), "Porosidad de la Matriz Inicial" (0.04), "Porosidad de Fracturas Inicial" (0.3), "Modulo de Poison" (0.3), and "Modulo de Young" (0.3). The right column contains: "Permeabilidad en X" (0.5), "Permeabilidad en Y" (0.4), "Permeabilidad en Z" (0.2), "Presion de Poro Inicial" (3000), and a section titled "Ubicación del Pozo" with sub-fields for X (3), Y (3), and Z (2). Below these fields is a checkbox labeled "Cuenta con Información detallada para cada una de las celdas?" which is currently unchecked. At the bottom right of the frame is a button labeled "Seguir".

**Figura 21.** software – VENTANA 3

Ante una respuesta afirmativa, se inicia un despliegue de ventanas correspondientes a cada una de las propiedades que coadyuvarían a la conservación de la no-linealidad del modelo.

De tal forma, para el caso de las dimensiones de las celdas, aparecerá una ventana en la que se pregunta si cuenta con valores para cada celda o si prefiere usar valores uniformes en cada una de las direcciones.

Este procedimiento se aplica para cada una de las variables que pueden incidir en la simulación real de las condiciones del yacimiento. Dentro de ellas, tenemos:

- Valores de permeabilidad para cada una de las posiciones.
- Presiones
- Pruebas mecánicas en distintos puntos del campo (compresibilidades).

Form1

Frame3

Dimensiones Iguales

Dt 100      q 100

DXi 6

DYj 6

DZk 2

Ingresar

Dimensiones Irregulares

DXi      DYj      DZk

Text1      Text1      Text1

Ingresar      Ingresar      Ingresar

Continuar

**Figura 21.** software – VENTANA 4

### 10.3 VENTANAS DE SALIDA

Con el ingreso de los datos el programa aplica el método PSOR para solucionar iterativamente las ecuaciones y tras un tiempo de espera, se exhibe una ventana de resultados que presenta las siguientes opciones.

En la parte izquierda aparecen las opciones de control de resultados.

El listado superior corresponde a los datos de todas y cada una de las posiciones de la malla.

Tras oprimirlo se despliega una lista en el recuadro adjunto, empezando con las variables centrales del proceso de simulación, con un botón guía que permite desplazarnos para buscar las posiciones que deseemos analizar.

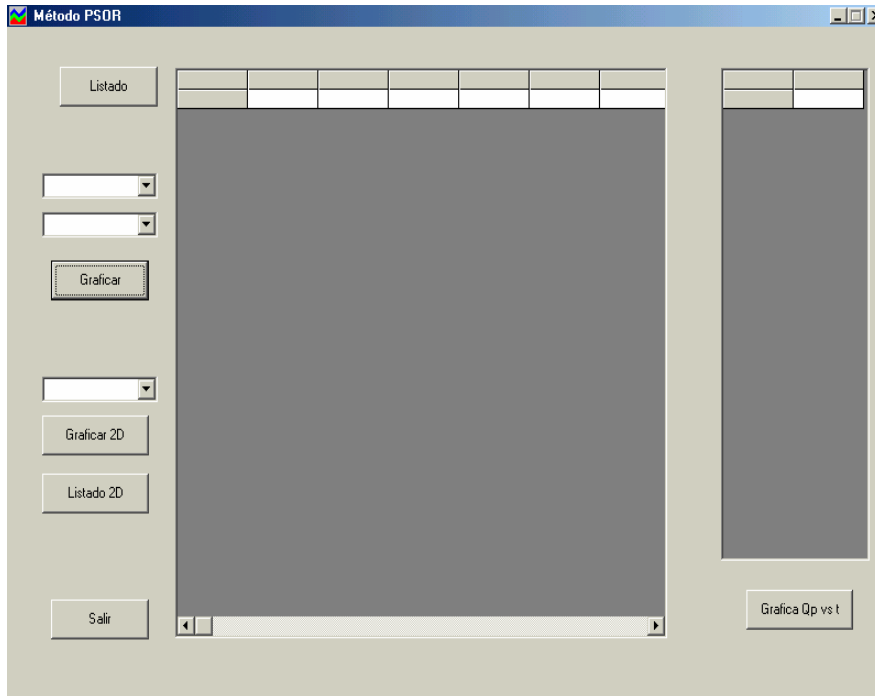


Figura 22.a. Ventana de salida

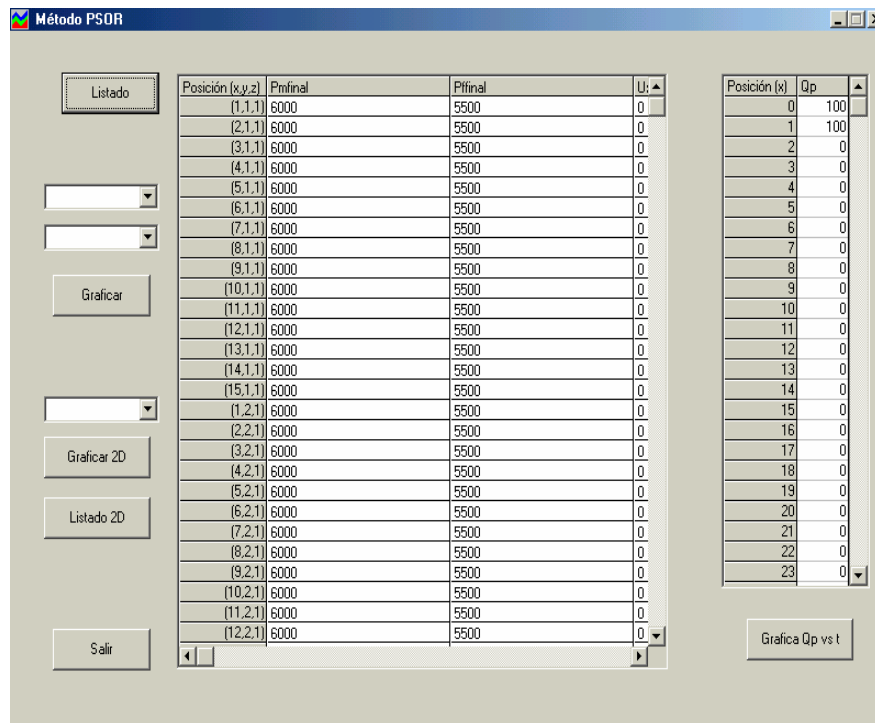
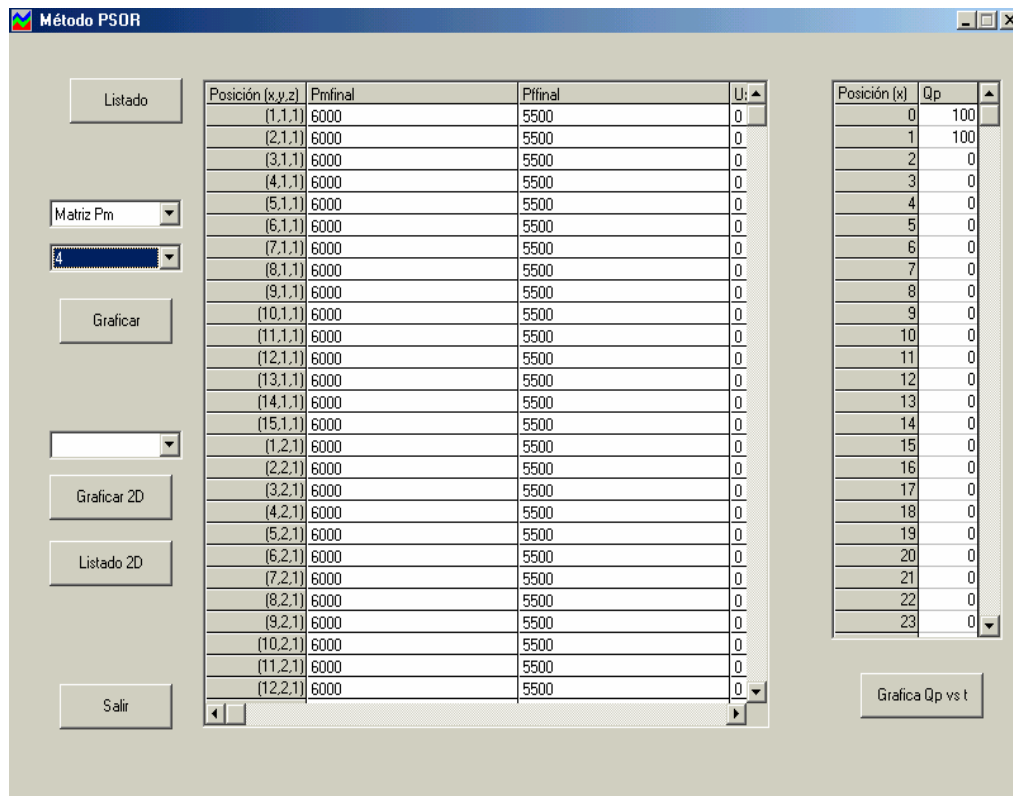


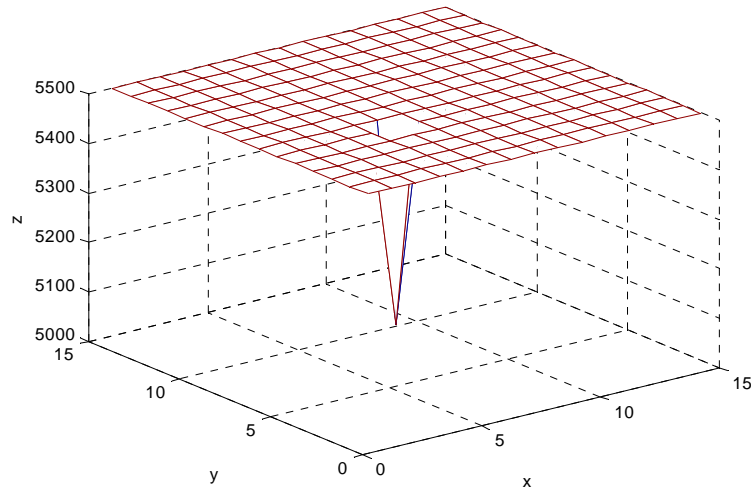
Figura 22.b. Ventana de salida

Los recuadros blancos inferiores se usan para seleccionar el estrato y la variable que desee graficarse, así a manera de ejemplo, seleccionamos el estrato 4 correspondiente al estrato productor y la variable que deseemos determinar el comportamiento.



**Figura 22.c.** Ventana de salida

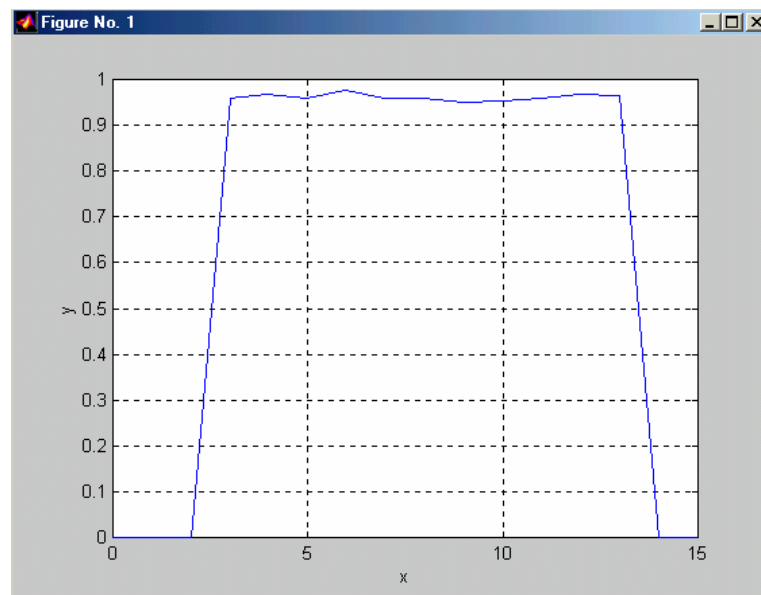
Seleccionado lo anterior, hacemos clic en la opción Graficar, del cuadro inmediatamente inferior y se despliega el resultado en MATLAB (recordemos que MATLAB ofrece la posibilidad de rotar las gráficas con lo cual podemos variar el ángulo de observación de las propiedades):



**Figura 23.** Entorno gráfico 3D desarrollado en MATLAB 5.3

De igual forma, la opción de **Graficar 2D**, permite visualizar la distribución de una variable en las distintas posiciones, a través del entorno gráfico de MATLAB.

Las gráficas presentadas son del orden siguiente:



**Figura 24.** Entorno gráfico 2D desarrollado en MATLAB 5.3

Para ver el listado de estos datos, que corresponden al perfil de las variaciones sobre el eje horizontal del pozo, selecciono la opción **listado 2D**, después del cual se abrirá una ventana como la siguiente.

Posición (x,Yp,Zp)	Esfectivo	Porcentaje	IncEst
(1,6,4)	8668,73548775948	0	0
(2,6,4)	8668,73548775948	0	0
(3,6,4)	8668,44257778615	0,952791203978828	7,84703184845949
(4,6,4)	8667,80344729194	0,962440554738107	6,86126877265353
(5,6,4)	8669,031408726	0,951331054243743	7,81857184185565
(6,6,4)	8395,23281001311	0,897678967847333	53,3571649348422
(7,6,4)	8668,89430631041	0,952394489549502	7,65392320295851
(8,6,4)	8666,63764869432	0,952197377323726	11,9390526063695
(9,6,4)	8670,04040020438	0,942293612503618	8,72118655404842
(10,6,4)	8669,63064826808	0,94766988667281	8,22087745947192
(11,6,4)	8669,05107464939	0,953127460226195	7,56567366910398
(12,6,4)	8667,96274740845	0,961624299631274	6,82220754830582
(13,6,4)	8668,47884801233	0,958262958197062	7,03875636159
(14,6,4)	8668,73548775948	0	0
(15,6,4)	8668,73548775948	0	0

**Figura 25.** Ventana final del software

El análisis partirá entonces de los resultados, y la posibilidad de valorar la variación de las distintas propiedades del yacimiento va de la mano con la interpretación que se genere de aquellos.

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Pag.</b>
<b>Figura 1.</b> Comportamiento de la presión de poro	41
<b>Figura 2.</b> Comportamiento del esfuerzo efectivo	41
<b>Figura 3.</b> Efecto del incremento del esfuerzo efectivo con la variación temporal	42
<b>Figura 4.</b> Efecto sobre la permeabilidad	43
<b>Figura 5.</b> Efecto sobre el porcentaje de la permeabilidad	44
<b>Figura 6.</b> Variación de la permeabilidad en la intersección del estrato productor y el plano vertical que contiene el pozo para el caso de caudal de producción constante	46
<b>Figura 7.</b> Variación de la permeabilidad en la intersección del estrato productor y el plano vertical que contiene el pozo para el caso de Pwf constante	47
<b>Figura 8.</b> Efecto de las condiciones de frontera para el estrato productor	49
<b>Figura 9.</b> Efecto de las condiciones de frontera para el estrato superior	49
<b>Figura 10.</b> Efecto de las condiciones de frontera para el estrato inferior	50
<b>Figura 11.</b> Variación del esfuerzo efectivo con los estratos	51
<b>Figura 12.</b> Variación de los esfuerzos con los estratos en el plano vertical del pozo considerando una variación de la compresibilidad	52
<b>Figura 12.a.</b> Variación de los esfuerzos con los estratos en el plano vertical del pozo considerando una variación de la compresibilidad	52
<b>Figura 12.b.</b> Variación de los esfuerzos con los estratos en el plano vertical del pozo considerando una variación de la compresibilidad	53
<b>Figura 13.</b> Variación de la permeabilidad con un cambio en el valor de la compresibilidad para la posición del pozo	54
<b>Figura 14.</b> Variación de la permeabilidad con una variación de la compresibilidad	55

<b>Figura 15.</b> Variación de los esfuerzos con el tiempo considerando la presencia de un dominio externo	56
<b>Figura 16.</b> Variación de la permeabilidad con el tiempo considerando la presencia de un dominio externo	57
<b>Figura 17figuras.</b> Variación de la presión con la variación del caudal, para diferentes tiempos	58
<b>Figura 18.</b> Variación del caudal de producción manteniendo una presión en el pozo constante	59
<b>Figura 19.</b> software - VENTANA 1	118
<b>Figura 20.</b> software - VENTANA 2	119
<b>Figura 21.</b> software – VENTANA 3	120
<b>Figura 21.</b> software – VENTANA 4	121
<b>Figura 22.a.</b> Ventana de salida	122
<b>Figura 22.b.</b> Ventana de salida	122
<b>Figura 22.c.</b> Ventana de salida	123
<b>Figura 23.</b> Entorno gráfico 3D desarrollado en MATLAB 5.3	124
<b>Figura 24.</b> Entorno gráfico 2D desarrollado en MATLAB 5.3	124
<b>Figura 25.</b> Ventana final del software	125

## NOMENCLATURA

### SIMBOLOS

$c$  = compresibilidad

$e$  = Deformación volumétrica

$E$  = Módulo de Young

$G$  = Módulo de cizalladura

$k$  = Permeabilidad

$P$  = Presión

$t$  = Tiempo

$u$  = Desplazamiento

$v$  = Velocidad

$V$  = Volumen

$x, y, z$  = Distancia

$\alpha$  = Constante poroelastica

$\beta$  = Constante dependiente del esfuerzo efectivo

$\delta_{ij}$  = Delta de Kronecker

$\varepsilon$  = Deformación

$\phi$  = Porosidad

$\lambda$  = Constante de Lamé

$\mu$  = Viscosidad

$\nu$  = Relación de Poisson

$\rho$  = Densidad

$\sigma$  = Esfuerzo

$B$  = Factor volumétrico de formación

## SUBINDICES

$b$  = Total, Bruto

$b_c$  = Volumen constante con relación al cambio en el esfuerzo

$b_p$  = Volumen constante con relación al cambio en la presión de poro

$m$  = Matriz

$f$  = Sistema de fracturas

$s$  = Sólido

$x, y, z$  = x-,y-,z- direcciones, respectivamente

$i, j, k$  = Indices que denotan la posición de la celda en las direcciones x-,y-,z-  
respectivamente

0 = Referencia

$t$  = Total

## SUPERINDICES

$n$  = Indice que denota el nivel del tiempo

(0) = Estado inicial

' = Efectivo

## CONCLUSIONES

- El proyecto desarrolla la implementación y el análisis de un modelo de acoplamiento de flujo de fluidos a la deformación geomecánica, cuyo desarrollo numérico se hizo en 3D, con el método de diferencias finitas y nodos distribuidos, que hace posible evaluar el comportamiento de los yacimientos naturalmente fracturados (YNF). El modelo considera algunas suposiciones básicas sobre la posibilidad de contar con información detallada sobre las distintas posiciones del yacimiento. Obviamente, la información tendrá una incidencia importante sobre la posibilidad de que el análisis realizado soporte unas condiciones que se aproximan en mayor medida a la situación real del yacimiento.
- El análisis de los resultados obtenidos permite establecer que la mayor variación de las propiedades se da en la posición correspondiente al pozo, y que la variación del estrato conserva las mismas tendencias para la posición señalada.
- Bajo el análisis de la variación de las condiciones internas del pozo, es decir, bajo la consideración de un caudal de producción constante o una presión constante, la reducción de la permeabilidad se hace mayor para la situación de un caudal de producción constante aunque la diferencia resulta notoria en los tiempos de simulación mayores.
- El efecto de las condiciones de frontera, bajo el supuesto de fronteras deformables o indeformables, se expresa como una mayor incidencia sobre la permeabilidad para el caso de fronteras deformables, diferencia que cobra gran notoriedad para los tiempos mayores.

- La definición de la compresibilidad como variable que posibilita el acoplamiento del modelo de flujo de fluidos y esfuerzo-deformación, demostró que genera una mayor reducción de la permeabilidad para la zona del pozo, en la medida en que se considera una variación en su valor.
  
- La implementación de un dominio externo, como zona en donde no ocurre la deformación en el yacimiento, trae por consecuencia una menor reducción de la permeabilidad respecto al valor inicial, que la sucedida bajo la consideración de una deformación a lo largo de todo el yacimiento.
  
- Bajo la aproximación a la posibilidad de asignar distintas dimensiones a las celdas, podemos aproximarnos a la conservación de la no-linealidad exigida para la simulación de la deformación geomecánica del yacimiento, con lo cual pueden conseguirse mejores resultados.

## RECOMENDACIONES

- El presente trabajo intenta conservar la no-linealidad del modelo a través de la asignación de distintos valores en el dimensionamiento de la malla, con lo cual podemos aproximarnos en mayor medida a la geometría real del yacimiento conservando la geometría del paralelepípedo. Sin embargo, para futuros trabajos se recomienda la consideración de otras geometrías como aproximación a la forma real del yacimiento.
- El trabajo considera el caso Black Oil, lo que conlleva un fluido levemente compresible y una composición invariable del fluido. Para futuros trabajos puede asumirse la variación de la composición y la determinación del funcionamiento del modelo para fluidos compresibles.
- El modelo se fundamenta en las ecuaciones de conservación de masa del fluido y del sólido. Para futuros trabajos, puede determinarse la incidencia del desprendimiento de sólidos aun cuando esto suponga una alteración del modelo en su acoplamiento.
- La interpretación está sujeta a la cantidad de información que se tenga sobre las condiciones del yacimiento, y sin embargo tenemos la posibilidad de abogar por la simplicidad de la herramienta software diseñada en el análisis del comportamiento de los Yacimientos Naturalmente fracturados.
- Para próximos trabajos, consideramos necesario implementar la comparación de este con otros modelos propuestos por otros software de uso reconocido en la industria del petróleo.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Aguilera, R.: "Naturally Fractured Reservoir s (Second Edition)," PennWell Publishing Company, Tulsa, Oklahoma, 1995.
2. Osorio, José, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Coupled Fluid Flow and Mechanical deformation, Governing equations, 2000.
3. Osorio, Simulación Numérica de Yacimientos, Documento 3: Conceptos básicos sobre aproximación de ecuaciones diferenciales a diferencias finitas, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín, Medellín, febrero, 2002.
4. Chen H.Y., Teufel L.W., Lee R.L., "Coupled Fluid Flow and Geomechanics in Reservoir Study. Theory and Governing Equations", SPE, 1995.
5. Warren, J.E. and Root, P.J., " The Behavior of Naturally fractured Reservoirs", SPE, Sept. 1963.
6. Kazemi et al., "Numerical simulation of Water-Oil flow in Naturally Fractured Reservoirs, SPE, 1976
7. Settari y Asís, "Use of Irregular Grid in Reservoir Simulation", SPEJ, April, 1972.
8. Thomas et al., "Fractured Reservoir Simulation", SPE Journal, February, 1983.

9. Thomas et al., "Threshold Pressure Phenomena in Porous Media", SPEJ, June, 1968, Págs. 174-184.
10. Tatiana Streltsova, "Well Pressure Behavior of a Naturally Fractured Reservoir", SPE journal, October, 1983.
11. Biot., "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid", 1955.(citado por Cheen et al., 1995).
12. Greenkorn y Johnson, "Directional Permeability of Heterogeneous Anisotropic Porous Media", SPEJ, June, 1964.
13. Vairogs et al., " Effect of Rock Stress on Gas Production From Low-Permeability Reservoirs", JPT, September, 1971.
14. Warpinski y Teufel, "Laboratory Measurements of the Effective Stress Law for Carbonate Rocks Under Deformation" 1993 (citado por Cheen et al., 1995)
15. Settari, A., "Physics and Modelling of thermal flow and soil Mechanics in Unconsolidated Porous Media", SPEFE, February, 1992.
16. Saltz, L.B., "Relationship Between Fracture Propagation Pressure and Pore Pressure", SPE, 1977.
17. Teufel L.W. et al., "Geomechanical Evidence for Shear Failure of Chalk", SPE, 1991.

18. Osorio J.G., Chen H.Y. and Teufel L.W., "Numerical Simulation of Coupled Fluid-Flow/geomechanical Behavior of Tight Gas Reservoirs with Stress Sensitive Permeability", SPE, 1997.
19. Warpinski, N.R. and Teufel, "Determination of the Effective Stress Law for Permeability and Deformation in Low-Permeability Rocks", SPEFE, June 1992, 123-131.
20. F. Guerra, J. García, Universidad Nacional de Colombia, ACIPET, 2001. Pág. 7 ss
21. Masters et al., Coupling temperature to a double-porosity model of deformable porous media, Págs. 425 ss., John Wiley & Sons, Ltd. 2000.
22. Rossen, R.H., "Simulation of Naturally Fractured Reservoirs with Semi-implicit Source Terms", SPEJ, June 1977, 201-210.
23. Coats et al., "Simulation of Three-Dimensional, Two phase flow in Oil and Gas reservoirs", SPEJ, March, 1971, Págs. 63-71.
24. Parsons, R., "Permeability of Idealized Fractured Rock", SPEJ, June 1966, 126-136.