ABSTRACCIONES SITUADAS EN UN ENTORNO EXPERIMENTAL PARA LA COMPRENSIÓN DE LA LEY DE LOS GRANDES NUMEROS EN NIÑOS DE QUINTO PRIMARIA

JENNYFFER SMITH BOHORQUEZ BARRERA

JUDITH MARCELA ZARATE MANTILLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

LICENCIATURA EN MATEMATICAS

BUCARAMANGA

2009

ABSTRACCIONES SITUADAS EN UN ENTORNO EXPERIMENTAL PARA LA COMPRENSIÓN DE LA LEY DE LOS GRANDES NUMEROS EN NIÑOS DE QUINTO PRIMARIA

Autores

JENNYFFER SMITH BOHÓRQUEZ BARRERA

JUDITH MARCELA ZÁRATE MANTILLA

Trabajo presentado como requisito para optar al título de

Licenciadas en matemáticas

Director:
Ph. D. GABRIEL YÁÑEZ CANAL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

LICENCIATURA EN MATEMATICAS

BUCARAMANGA

2009

AGRADECIMIENTOS

__A nuestro creador__, por haberme dado la vida, la sabiduría y fortaleza para culminar mi carrera y alcanzar este triunfo tan anhelado.

A mis padres, a mi tita Alix y a mis hermanos

Por el apoyo y la confianza que depositaron en mí y la comprensión que me han dado

A la flía de Martrín

Por su apoyo y motivación en el momento indicado,

Permitiéndome notar la belleza de la vida, aún en los momentos difíciles

Al profesor Gabriel Yáñez

Por su dedicación en la orientación del presente trabajo.

Al Carta y a Daniel…a

Por enseñarme el valor de la amistad y demostrarme el significado de la lealtad.

Aunque tomemos caminos separados, siempre recordaré los momentos compartidos

Al parche de Urra, Mis amigos de la U

Por su apoyo emocional en los altibajos vividos a lo largo de mi carrera.

A Julien, mon coeur,

Por entrar en mi vida cuando más lo necesitaba.

Por enseñarme, a cientos de millas de distancia, a ser feliz y a ampliar mi perspectiva del mundo.

Merci beaucoup mon amour.

JUDITH MARCELA ZÁRATE

A mis padres, ***Blanca Marina*** *y* ***Jesús,*** *que con su esfuerzo y confianza hicieron posible esta meta.*

A mis hermanos, ***"Chucho"*** *y* ***Johanna,*** *por sus consejos y cariño incondicional.*

Al ***Parche de Urra****, en especial a nuestro compañero* ***Jaime****, por todos esos buenos momentos que compartimos. Siempre estarán presentes en mi mente y en mi corazón.*

A ***Cristian,*** *quien llegó a mi vida en el momento que más lo necesita, con tu amor y apoyo incondicional has logrado endulzar mi vida.*

A ***Mi Nona Toñita,*** *la razón de mi vida, por ser la mejor abuelita, la mejor mamá y la mas alcahueta.*

Por ultimo, a los profes Julio Carrillo, Gabriel Yáñez, Rafael Isaacs y Edga Mireya Uribe, por su gran colaboración en mi proceso de aprendizaje.

JENNYFFER SMITH BOHORQUEZ

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TITULO: ABSTRACCIONES SITUADAS EN UN ENTORNO EXPERIMENTAL PARA LA COMPRENSIÓN DE LA LEY DE LOS GRANDES NUMEROS EN NIÑOS DE QUINTO PRIMARIA*

AUTORES: JENNYFFER SMITH BOHORQUEZ BARRERA Y JUDITH MARCELA ZÁRATE MANTILLA **

PALABRAS CLAVES: Significados locales y globales, experimentos aleatorios, simulador computacional, abstracciones situadas y ley de los Grandes Números

DESCRIPCIÓN:

Esta investigación presenta una experiencia de aula cuyo objetivo era identificar las abstracciones situadas que surgen en un ambiente experimental físico y computacional relacionadas con la comprensión de la ley de los grandes números en niños de quinto grado. Así, los autores centraron su atención en analizar las modificaciones de los significados locales expresados por los estudiantes en el diagnóstico y reconocer la formación de nuevos significados para la comprensión del comportamiento aleatorio a largo plazo a través del enfoque frecuencial.

Este trabajo incluyó una primera etapa de experimentación física con monedas, dados y ruletas con la totalidad de la población, seguida por una segunda etapa, en la cual se efectuaron simulaciones computacionales de las mismas actividades realizadas anteriormente, con una muestra de la población utilizando el micromundo Chance-Maker, en la que también se invitaron algunos niños a participar de ella sin haber hecho parte de la experimentación física. Finalmente, se realizó una evaluación escrita en la que se incorporó, además de los fenómenos aleatorios antes mencionados, un experimento de urna para evaluar si los estudiantes habían llevado sus significados y abstracciones *más allá* de la experiencia concreta donde fueron formadas.

Del análisis de los resultados se concluye, en términos generales, que los estudiantes lograron transformar sus significados locales, generando además, nuevas intuiciones en forma de abstracciones situadas a partir de la interacción con el micromundo computacional, alcanzando a reconocer la convergencia de los resultados al realizar muchas repeticiones y su relación con la composición del espacio muestral, evidenciado como un significado de la comprensión de la Ley de los Grandes Números.

---

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Licenciatura en Matemáticas. Ph.D. Gabriel Yáñez Canal

ABSTRACT.

TITLE: SITUATED ABSTRACTIONS IN AN EXPERIMENTAL BACKGROUND TO HELP FITH GRADE SCHOOLERS UNDERSTANDING THE LAW OF LARGE NUMBERS*

AUTHORS: JENNYFFER SMITH BOHORQUEZ BARRERA and JUDITH MARCELA ZÁRATE MANTILLA **

KEY WORDS: local and global meanings, random experiences, computing Simulator, situated abstractions, Law of large numbers.

ABSTRACT:
This research presents a classroom experience aiming at identifying situated abstractions which emerge in an experimental physical and computing background related to understanding the law of large numbers by fifth grade schoolers. In this way, the authors focused on analyzing modifications in local meanings expressed by the students during diagnose and recognizing new meanings upcoming for understanding long term random behavior through frequential approach.

This work went through a first stage of physical experience with coins, dices and roulette on population under study; in a second stage, computer simulations using the same previous conditions were played, with a population sample using Chance-Maker microworld, in which some other kids, not participating in the physical experience, were invited to take part into. Finally, a written test was taken where, beyond random phenomena previously mentioned, another experience with balls in an urn was led to asses students' meanings and abstractions progress beyond the concrete experience where these were produced.

Analyzing the results led us to conclude, in general terms, that students were able to transform their local meanings generating new intuitions in the way of situated abstractions from the interaction with computing microworld, recognizing the convergence of results when doing repetitions and their relation with the composition of sample space showed as a meaning of understanding if the Law of large numbers.

---
* Grade work
** Faculty of Sciences. School of Licentiate in Mathematics. Ph.D. Gabriel Yáñez Canal

PRESENTACIÓN

Las investigaciones en educación matemática surgen debido a las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los diferentes temas de esta área. Por tal razón se han realizado estudios que buscan describir y conocer el pensamiento probabilístico y aleatorio tanto de niños como de adultos, para así proponer experiencias de aula que permitan el desarrollo de estos pensamientos.

Estos estudios reconocen que para lograr un aprendizaje significativo es necesaria la realización de experimentos tanto físicos como computacionales con el objetivo de analizar y confrontar las intuiciones, esto quiere decir, que los significados que se van adquiriendo se relacionan con los ya existentes para obtener una mayor comprensión de los fenómenos aleatorios y su comportamiento a largo plazo. Así mismo, se ha demostrado que dicha conexión de significados se puede establecer mediante la interacción con los llamados micromundos computacionales, que son considerados ambientes propicios para que el estudiante explore y construya sus propias ideas.

A nivel local, se han realizado investigaciones que describen cómo los estudiantes desarrollan y conectan significados sobre la aleatoriedad, sin embargo, estos estudios no han tenido en cuenta la escuela primaria[1], etapa en la cual según Fischbein (1975), se puede empezar a crear nuevas intuiciones de probabilidad mediante una adecuada instrucción.

Dada esta situación, es nuestro interés responder el siguiente interrogante: *¿Cómo los estudiantes de quinto grado conectan las concepciones previas con las que adquieren a través de la experimentación tanto física como computacional para la comprensión de la ley de los grandes números?*

Para tal fin, se decidió llevar a cabo la investigación con un grupo de 16 niños de quinto primaria del Colegio Espíritu Santo del Municipio de Girón, con el objetivo de Identificar las abstracciones situadas que surgen en un ambiente

[1] Ciclo que comprende los grado de primero a quinto

experimental físico y computacional relacionadas con la comprensión de la ley de los grandes números.

En esta investigación se realizaron una serie de actividades lúdicas con el uso del micromundo computacional Chance- Maker[2], creado por Dave Pratt (1998) en su trabajo doctoral. Además, se consideró el marco teórico propuesto por este autor, resultado de una experiencia con niños de primaria dirigida a percibir la construcción y conexión de significados para la aleatoriedad en un entorno computacional, el cual fue fundamental para la identificación de los significados y abstracciones situadas emergentes al interactuar con el micromundo.

A diferencia de Pratt, este estudio comprendió un espacio más amplio de investigación, al incluir una primera etapa de experimentación física con monedas, dados y ruletas. Se continuó con una segunda etapa, en la cual se efectuaron simulaciones computacionales de las mismas actividades realizadas en la primera etapa, utilizando el micromundo Chance-Maker, en la que se invitaron algunos niños a participar de ella sin haber hecho parte de la experimentación física. Para finalizar, se realizó una evaluación escrita en la que se incorporó además de los fenómenos aleatorios antes mencionados, un experimento de urna, para evaluar si los estudiantes podrían llevar sus significados y abstracciones *más allá* de la experiencia concreta donde son formados.

Este trabajo está organizado en cinco capítulos que se describen a continuación:

En el primer capítulo *"Marco Teórico"* se presenta la teoría de las abstracciones situadas de Noss & Hoyles (1996), teoría sobre la cual Pratt (1998) apoya su trabajo relacionado con la coordinación de significados para la aleatoriedad. También se presenta el enfoque frecuencial de la probabilidad, algunos sesgos relacionados con este enfoque y por último la ley de los grandes números.

[2] Chance Maker, software libre. Ver detalles en http://people.ioe.ac.uk/dave_pratt

En el segundo capítulo, *“Antecedentes”* se exponen los estudios realizados por Piaget e Inhelder (1951) relacionados con la noción de aleatoriedad en niños, así como las intuiciones presentes en el razonamiento probabilístico descritas por Fischbein (1975) y otras investigaciones relacionadas con el enfoque adoptado en este trabajo.

En el tercer capítulo, *“Metodología”* se describe la población y la muestra con la que se trabajó, igualmente cada una de las actividades realizadas con su respectivo objetivo y justificación, así mismo se presenta las tres categorías utilizadas para analizar el desempeño de los estudiantes.

En el cuarto capítulo*, “Análisis de los resultados”* se presentan las respuestas más sobresalientes por parte de los estudiantes, las cuales fueron analizadas para dar conclusiones a través de las categorías propuestas en la metodología.

En el quinto capítulo, se presentan las conclusiones generales obtenidas a partir del desarrollo de las actividades durante la investigación.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas citadas en este texto, los anexos de los talleres realizados y los resultados grupales obtenidos de la experimentación física.

1. MARCO TEÓRICO

Asumimos como referencia teórica, el trabajo realizado por Noss y Hoyles (1996), que proporciona algunos conceptos básicos para comprender el proceso realizado por los estudiantes al interactuar con un micromundo, teoría sobre la cual Pratt (1998) apoya su trabajo relacionado con la coordinación de significados para la aleatoriedad. Según este último, la construcción de cada significado se basa en uno anterior, formando redes internas de significados iniciales de los que emergen nuevos significados globales sobre los cuales se adquiere un verdadero significado del objeto de estudio, en este caso particular, relacionado con las concepciones aleatorias contenidas en los experimentos y su comportamiento a largo plazo.

Presentamos además, el enfoque frecuencial de la probabilidad, método adoptado para la comprensión de la ley de los grandes números

1.1 Una teoría para la interpretación del pensamiento de los estudiantes al interactuar en un micromundo

Además de ser ambientes para que el estudiante explore y construya sus propias ideas, los micromundos computacionales también pueden servir como herramientas de investigación para que los educadores estudien los procesos de aprendizaje. Al respecto, Noss y Hoyles (1996) señalan que la computadora asume el doble papel de una ventana que permite a los estudiantes expresar su forma de pensar, simultáneamente dándole al profesor la oportunidad de observar sus pensamientos.

Estos mismos autores, proponen un constructo teórico que proporciona algunos conceptos elementales que permiten interpretar las acciones de los estudiantes en un entorno computacional, estudiando así lo que ellos han descrito como "*pensamiento-en-cambio":* en lugar de intentar evaluar el estado mental de un individuo en un momento dado, la idea es poner en movimiento el pensamiento e investigar los cambios que ocurren cuando, por ejemplo, se introducen nuevas nociones, y se observan las formas en que el sujeto hace conexiones y construye significados.

Dichos conceptos son los dominios de abstracción, abstracciones situadas o contextualizadas y redes de significados.

- **Dominios de abstracción**: hacen referencia a un contexto estructurado de enseñanza, que al efectuar acciones con las herramientas que brinda, posibilita la construcción de nuevos significados al tiempo que los relaciona con los ya existentes. Los micromundos son dominios de abstracción en la medida en que se articulan relaciones y se construyen generalizaciones.
- **Abstracciones situadas**: consisten en la creación de un significado producido dentro de un determinado medio, resultando de las acciones del sujeto sobre él. En otras palabras, son todas las ideas que manan del estudiante al moverse dentro de un dominio de abstracción y que le dan confianza para actuar dentro del mismo.
- **Redes de significado**: este concepto está relacionado con la expansión e interconexión de ideas, construidas por un individuo al usar los recursos disponibles en el momento en que se forman. De este modo, describe la unión de las estructuras construidas en el software por el programador y aquellas estructuras mentales forjadas por el estudiante durante la experiencia llevada a cabo.

En esta teoría se fundamenta el trabajo sobre la coordinación de significados para la aleatoriedad realizado por Pratt (1998), el cual se expone a continuación. Este estudio plantea un marco teórico para la construcción y conexión de significados en el entorno computacional Chance Maker, cuyo contexto particular es un dominio estocástico de abstracción.

1.2 Co-ordinación de significados para la aleatoriedad

El propósito del autor era conocer las creencias propias de los niños a cerca del azar y sus posibles modificaciones, al adquirir nuevas intuiciones de su interacción con el micromundo, examinando así la unión de redes entre las intuiciones previas con las herramientas basadas en el computador.

Dichas intuiciones primarias (previas) son denominadas en su estudio como *significados locales* o *iníciales* que se conectan entre sí formando redes de nuevos *significados globales* como resultado de la experimentación y aprehensión al simular situaciones aleatorias en el micromundo, calificando la formación de conexiones como *abstracciones situadas*, heurísticas generalizadas que los estudiantes forjan y aplican dentro del micromundo, al realizar acciones en este dominio de abstracción.

Entre los significados locales identificados durante el estudio se encuentran:

(i) **La impredicibilidad** Si el próximo resultado no es predecible, el niño consideraba el fenómeno como aleatorio.

(ii) **La incontrolabilidad** Si el niño es incapaz de ejercer control físico sobre el resultado de este fenómeno, el experimento podría ser visto como al azar. En la simulación computacional, los niños consideraron que los resultados obtenidos no dependían de la fuerza, ya que no lograron controlar el experimento en el micromundo.

(iii) **La irregularidad** Si no es posible identificar algún patrón de secuencia en los resultados, el niño hace referencia a la experiencia como aleatoria. Durante la práctica, los estudiantes analizan las secuencias aleatorias para tratar de predecir futuros resultados, conjeturando así modelos que no resultan ser estables al simular en el computador.

(iv) **La imparcialidad** En la observación los niños relacionaban este significado con la apariencia física del experimento, así pues, al apreciar un diagrama de tortas con sección desiguales, consideraban el fenómeno como injusto y no aleatorio, ya que también definen la imparcialidad en términos de la aleatoriedad.

Un quinto significado local identificado, es más específico a los ambientes computacionales, al relacionarse con **el control del computador.** En la prueba, los niños cuestionan la naturaleza de los resultados obtenidos con el simulador, conjeturando la existencia de algún algoritmo generador de datos dentro del computador, pero sin llegar a determinar dicho modelo.

Durante la experiencia, Pratt identifica algunas particularidades (características) de estos significados locales como son:

- *Intercambio de significados,* los niños llegan a vincular la incontrolabilidad con la impedecibilidad; el hecho de que si una situación no era controlada entonces no era predecible.
- *El uso contradictorio*, como el control de los resultados y la variabilidad de los mismos, evidenciada al manifestar que la fuerza controla los resultados, negando la aleatoriedad del dispositivo, para luego notar la impredecibilidad de los resultados y considerar el dispositivo como aleatorio.
- *Significados conectados débilmente,* El intercambio de significados sugiere que los significados locales están conectados entre si, sin embargo, el comportamiento del simulador motiva significados contradicctorios entre ellos, donde un significado no implica a otro implicitamente y las nuevas conexiones no son vistas con confianza, lo cual precisa de un proceso prolongado usando las herramientas del dispositivo.
- El *uso indiscriminado de significados*: evidenciado en el uso de los significados locales para predecir el comportamiento de los dispositivos tanto a corto como a largo plazo, por ejemplo, los niños buscaban regularidades locales en los resultados con muchos o pocos ensayos.
- *Aquello que no es determinístico* inicialmente los niños se acercaron al dispositivo conjeturando razones deterministas para su comportamiento, cada una de las cuales era aceptada o rechazada sobre la base de un significado particular, y en caso contrario, el proceso continuó hasta que sus conjeturas se habían agotado y el comportamiento aleatorio del simulador fue aceptado.

Posteriormente, la construcción de nuevos significados enfocados en el comportamiento aleatorio a largo plazo mediado en el micromundo, se evidenció en las actividades de un par de niños; ésta formación de conceptos, se realiza através de fases en las que al conectar significados locales con las herramientas basadas en el computador, se van generando abstracciones situadas como *“el número de pruebas controla la apariencia del gráfico pastel”* o *“ la caja de pesos controla el aspecto del diagrama de torta ”*, que conforme aumentaba la interacción con los recursos computacionales, permitió la coordinación de estas dos abstracciones situadas que se conectaron -como una red- para formar el siguientes significado global: *“El número de pruebas y la caja de pesos controlan la distribución del gráfico de pastel”.*

Esto es un claro ejemplo del surgimiento de significados globales mediado en un micromundo computacional para la comprensión de la ley de los grandes números. Es así, como apartir de esta experiencia con el micromundo Chance Maker, Pratt esquematiza el proceso por medio del cual nuevas conexiones, en forma de abstracciones situadas, son formadas.

Es importante reconocer que los significados iniciales continúan siendo parte de las abstracciones situadas recientemente formadas, los cuales se entrelazan para formar nuevos significados que serán confiables en la medida que se ponen a prueba dentro del micromundo y le permiten usarlas en otras situaciones para explicar el comportamiento aleatorio. La construcción de estos significados globales está sintetizada en el siguiente diagrama.

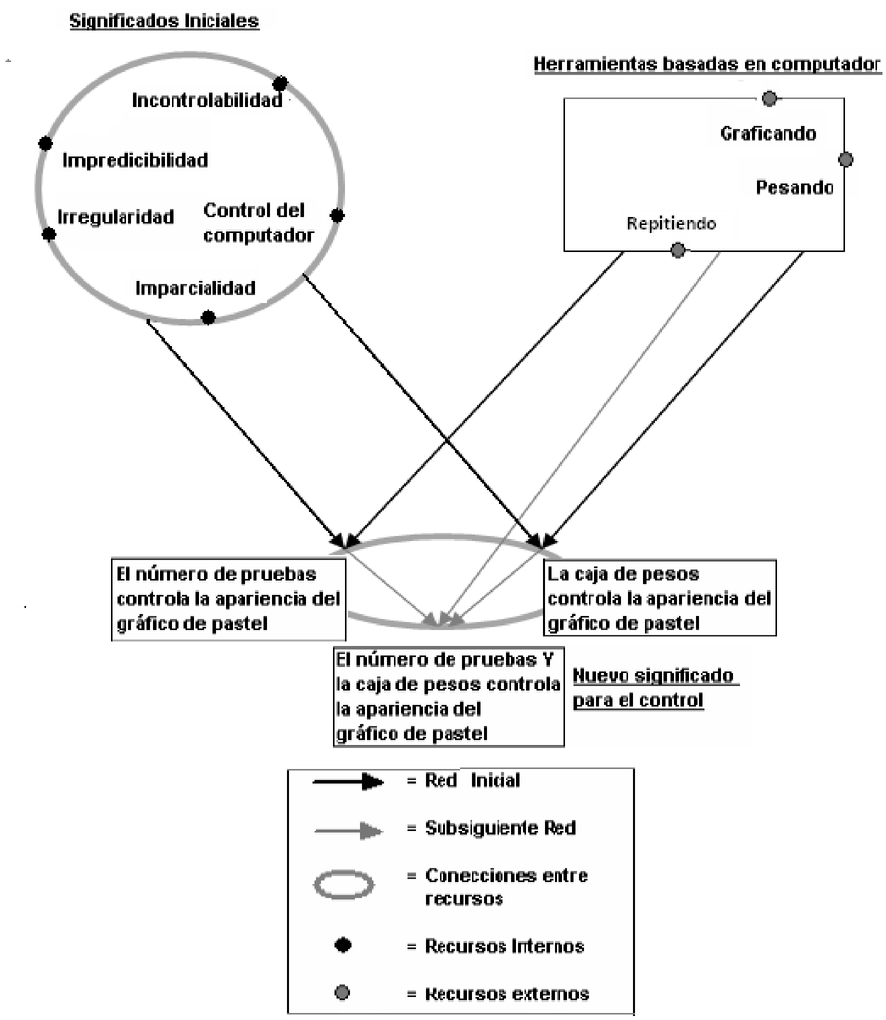


Tabla 1. Construcción de significados globales

1.3Enfoque frecuencial de la probabilidad

Al proponer la experimentación como un medio de exploración de la realidad que permite interpretar resultados teóricos en términos reales, estamos justificando el uso del enfoque frecuencial de la probabilidad.

En este enfoque los estudiantes realizan experimentos sobre sucesos aleatorios y obtienen datos que pueden agrupar para hacer predicciones sobre la ocurrencia de ciertos eventos en los fenómenos. Lo esencial es que los estudiantes al explorar situaciones probabilísticas, desarrollen intuiciones y conceptos para la construcción de su propio conocimiento frente al azar, que depende en parte de contextos que generen su interés, como lo es la implementación de experimentos con situaciones análogas que ocurren en la vida real.

Por tanto, atendiendo a estas recomendaciones, la metodología de enseñanza propuesta en el presente trabajo consistió en desarrollar en el salón de clase diversos experimentos aleatorios como dados, monedas y ruletas divididas en sectores de diferentes tamaños, estando presente la predicción de resultados y la confrontación de los mismos, obtenidos individual o grupalmente para lograr que la probabilidad experimental se acercara más a la probabilidad teórica.

Se listan a continuación algunas de las inadecuadas concepciones que se presentan en los estudiantes cuando se adopta el enfoque frecuencial de la probabilidad.

1.3.1 El sesgo de los valores recientes

Se presenta cuando los estudiantes creen poder predecir futuros resultados a partir de los recién obtenidos al realizar un experimento. Así, cuando se han dado una serie de valores iguales se asume que el resultado siguiente debe ser igual (llamado sesgo positivo) o, en cambio debe ser diferente (conocido como sesgo negativo o falacia del jugador).

1.3.2 El sesgo de equiprobabilidad

Este sesgo se refiere a la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquellos con un espacio muestral no uniforme. Las personas en las que se evidencia esta mala concepción, atribuyen al azar el resultado del experimento y en consecuencia, todos los posibles resultados son igualmente probables.

1.4 Micromundo Chance Maker (Constructor de Probabilidad)

En este apartado hacemos una descripción del simulador que fue implementado en esta investigación como generador de resultados aleatorios, durante la etapa de experimentación computacional

Chance Maker es un programa creado por el inglés Dave Pratt como parte de su trabajo doctoral, el cual surge como medio para explorar los conceptos de aleatoriedad, distribución y la ley de grandes números.

 Este entorno computacional permite el estudio detallado de las intuiciones de los niños, a través de las articulaciones de estas intuiciones durante la simulación cimputacional, usando un lenguaje de programación convencional, por medio del cual, el autor pudo estudiar y analizar las acciones de los estudiantes a cerca de la estocástica, al tiempo que los niños expresan sus ideas matemáticas en términos computacionales, actuando como una ventana a la luz de Noss y Hoyles (1996).

Este programa contiene una serie de dispositivos y herramientas computacionales, los cuales se comportan en forma similar al de los objetos reales, que permiten observar las intuiciones adquiridas por los niños al manipularlas, y los cambios que experimentaban en sus significados cuando nuevas conexiones son forjadas durante la actividad.

Dichos dispositivos, permiten simular el lanzamiento de monedas, dados y ruletas, en los que el aprendiz puede lanzar estos objetos con fuerzas diferentes, activando la barra de fuerza, la cual hace parte de las herramientas dispuestas por el programa.

Otro de los instrumentos que brinda el paquete es la caja de pesos, la cual contiene una representación explícita del espacio muestral que produce el comportamiento de cada dispositivo.

Así mismo, los estudiantes pueden explorar y usar herramientas como la repetición o las representaciones gráficas, que incluyen gráficos de pastel y pictogramas. Sin embargo, el programa no cuenta con una herramienta que indique el total de los resultados obtenidos para cada posible resultado.

Cada dispositivo por lo tanto, incluye explícitamente una representación matemática de cómo trabaja. Esta representación es a la vez instructiva, en el sentido de que los niños necesitan hacer sentido de esta, y constructiva, respecto a que puede ser modificada y usada como un bloque de construcción para ideas posteriores.

Nuestro propósito al implementar el uso de este programa, era identificar las conexiones entre significados, que se evidenciaron luego de confrontar y modificar las intuiciones propias expresadas en el diagnóstico, con las adquiridas mediante la interacción física o computacional de las situaciones aleatorias presentadas en las actividades.

1.5 Ley de los grandes números

La convergencia estocástica hace posible el estudio de los fenómenos aleatorios en el término largo, ya que individualmente son impredecibles. Para analizar la dificultad de la comprensión de la convergencia, hay que distinguir entre las leyes empíricas de los grandes números (la que se observa al recoger datos estadísticos de cierto fenómeno) y las correspondientes leyes matemáticas deducidas en forma de teoremas por diferentes probabilistas y que pueden ser demostradas formalmente.

La convergencia empírica es observable en la realidad, por ejemplo, la proporción de recién nacidos varones en un hospital a lo largo del año termina equilibrándose alrededor de los dos sexos. Es filosóficamente interesante que una regularidad global surja de la variabilidad local, que parece inherente al curso de la naturaleza "libertad individual bajo restricciones colectivas". Esa correspondencia empírica, hace que las correspondientes leyes matemáticas de los grandes números se justifiquen como un buen modelo para los fenómenos aleatorios, aunque no contesta la pregunta de si los alumnos son capaces de diferenciar entre el modelo y la realidad, ya que con frecuencia se espera una convergencia empírica demasiado rápida o demasiado exacta.

La siguiente es una forma de expresar dicha ley:
Al realizar un experimento aleatorio un gran número de veces, bajo las mismas condiciones, podemos observar que los resultados con pocas pruebas son inestables, es decir, son variables; por el contrario, cuando el número de pruebas aumenta considerablemente, los resultados de ocurrencia de cada

evento se estabilizan poco a poco en torno a un valor. Este valor de ocurrencia respecto al número de pruebas se aproxima al valor teórico de la probabilidad de dicho evento.

2. ANTECEDENTES

La presente propuesta se soporta en los conocidos estudios realizados por Piaget e Inhelder (1951) relacionados con la noción de aleatoriedad en niños, así como las intuiciones presentes en el razonamiento probabilístico descritas por Fischbein (1975).

Así mismo, consideramos como precedentes, los trabajos de Langrall y Mooney (2003), Reátiga (2003), Martínez y Jaimes (2007), finalizando con Villamizar (2008), en los cuales los autores describen características encontradas en sus investigaciones, referentes al pensamiento aleatorio presente en niños de primaria y jóvenes de secundaria.

2.1 PIAGET E INHELDER

Los estudios de Piaget ayudan a entender la evolución del razonamiento probabilístico de los niños, situándola dentro de sus estudios sobre las etapas generales de evolución psicológica. El análisis y resultados acerca del azar, la asociación de probabilidades a determinados sucesos y las capacidades combinatorias de los niños, son posibles a partir de la etapa de las operaciones concretas (7 a 11años), antes de esta, los niños no pueden emitir juicios probabilísticos.

Estos investigadores afirman que la comprensión de lo aleatorio por parte del niño, está asociada a la de la relación causa-efecto. Siendo así, que mientras el niño no comprenda la idea de causa, no reconocerá los fenómenos aleatorios.

A partir de los 7 años y hasta los 11 años, al encontrarse el niño en la etapa de operaciones concretas, empieza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles y a la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. Aunque no alcanza a comprender la idea de azar porque no concibe la independencia de las causas. No obstante, en esta edad el niño es capaz de establecer cierto tipo de comparación entre las posibilidades de un evento. Prueba de ello es que consideran más probable extraer una bola negra de una urna que contiene 3 de este color y 4 de otro, frente a otra urna compuesta de 3 negras de un total de 5.

Entre los 11-12 años, en la etapa de las operaciones formales, al desarrollar el pensamiento combinatorio, es cuando el niño adquiere la idea de azar y probabilidad, logrando asociar a un evento aleatorio cierta medida de su grado de certeza. Además, a esta edad, el niño es capaz de listar todas las posible combinaciones dado un espacio muestral.

Asi mismo, en relación a la concepción de la ley de los grandes números, es posible comprenderla a la edad de los 11 años, al incorporar experimentos con ruletas justas y sesgadas.

La siguiente teoría, contraria a la de Piaget, considera que los niños poseen una noción de probabilidad, por lo que al presentarles situaciones aleatorias acordes con su edad y desarrollo mental, son capaces de concebir los conceptos probabilísticos. En particular, el niño de preescolar presenta nociones de azar que se pueden desarrollar y comprender mejor si recibe una instrucción adecuada.

2.2 FISCHBEIN Y LAS INTUICIONES

Fischbein (1975) concede una gran importancia a la intuición como componente de todo proceso de aprendizaje. Una intuición, según este autor, es aquel conocimiento que se presenta de manera espontánea, luego de realizar repetidamente alguna acción determinada. Dichas intuiciones se distinguen entre primarias y secundarias.

Las *intuiciones primarias* son adquisiciones cognitivas que se derivan directamente de la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Muestra de ello, son las nociones de espacio, que nos impulsan a cruzar una avenida, al calcular la distancia necesaria para atravesarla sin ningún riesgo. Así mismo, estas intuiciones son evidenciadas cuando hacemos juicios sobre el estado del tiempo y alistamos nuestro paraguas cuando el cielo se torna gris, presintiendo la lluvia.

Estas intuiciones primarias son importantes porque influyen en las estructuras lógicas asociadas a los tipos particulares de conocimiento; mediando y facilitando así el aprendizaje. No obstante, una intuición primaria puede obrar recíprocamente en posición al razonamiento lógico. La persistencia de modos causales o deterministas de pensamiento y las ideas falsas que evocan, ilustran este fenómeno.

Por el contrario, las *intuiciones secundarias* son formadas después de un proceso sistemático de enseñanza, principalmente en la escuela. Ejemplo de ellas son la caída de los cuerpos y la ebullición del agua por calentamiento.

Referente a estas últimas, Fiscbein considera que pueden evocarse a partir de una adecuada instrucción, en cuyo proceso intervengan el contexto y las experiencias significativas que posibiliten su asimilación y aceptación, tal como lo expresa a continuación:

"Por ejemplo, para crear nuevas intuiciones correctas de probabilidad el educando debe ser activamente involucrado en un proceso de realización de experimentos aleatorios, de adivinar resultados y evaluar posibilidades, de confrontar resultados individuales y grupales con unas predicciones realizadas a priori, etc. Nuevas intuiciones de probabilidad correctas y potentes no pueden ser producidas simplemente practicando fórmulas de probabilidad. Lo mismo es cierto para la geometría y para toda rama de las matemáticas" (Fischbein, 1982, p.12).

2.3 CARACTERÍSTICAS DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN LA PRIMARIA

Conscientes de la tendencia por parte de los niños a ver el mundo de una manera determinista y a atribuir efectos causales a situaciones de azar; Langrall y Mooney, y Fischbein se cuestionan de cómo orientar la construcción de nuevas intuiciones hacia la razón y el análisis, y la manera para desarrollar el razonamiento probabilístico en los niños.

Es así como este estudio considera en primer lugar, los conceptos y habilidades asociados a este entendimiento y posteriormente se analiza el enfoque teórico de la instrucción, adoptando y discutiendo los principios para la instrucción propuesto por Greer (2001), que reconoce la relevancia de la instrucción en los grados elementales para el desarrollo de las intuiciones y consecuente adquisición de los conceptos probabilísticos.

En síntesis, las investigaciones sobre el conocimiento estocástico presente en niños de primaria, han demostrado que los conceptos probabilísticos como el determinismo e incertidumbre, aleatoriedad espacio muestral y frecuencias relativas; son accesibles en los grados elementales. Sin embargo, las intuiciones que apoyan interpretaciones deterministas, intervienen a menudo en la comprensión de las características de los fenómenos aleatorios y limita su capacidad de razonar probabilísticamente.

También, existe evidencia que el razonamiento probabilístico es influenciado por la naturaleza y la estructura de un problema o experimento particular. Así mismo, experimentos que orientan la atención de los niños a los resultados y los comportamientos a largo plazo de acontecimientos aleatorios, parecen facilitar el desarrollo de la comprensión, al tiempo que van adquiriendo un conocimiento del espacio muestral y patrones de distribución; lo cual es posible implementando el uso de ambientes computacionales que pueden proporcionar el apoyo necesario para promover el entendimiento probabilístico de los niños.

Relacionado con el alcance que posee la instrucción en el desarrollo del pensamiento probabilístico, Greer (2001) identifica tres principios para instruir las intuiciones existentes o las estructuras conceptuales y promover la construcción de nuevas. Estos principios destacan en general la necesidad de (a) proveer experiencias enfocadas en situaciones del contexto (b) crear y utilizar representaciones y modelos generativos (c) diagonalizar (direccionar) el pensamiento determinista. Este último principio subraya la importancia de incluir la instrucción de la probabilidad en el plan de estudios de las matemáticas de la escuela. Los niños (así como los adultos) necesitan reconocer que las situaciones que implican azar se pueden examinar y describir lógica y racionalmente. De hecho, este podría ser un aspecto fundamental para desarrollar una comprensión de la probabilidad.

2.4 OTRAS INVESTIGACIONES

A continuación presentamos las principales características y resultados obtenidos en tres investigaciones relacionadas con nuestro tema de investigación, las cuales fueron realizadas en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander:

En primer lugar, un proyecto de especialización titulado “Confrontación entre realidad y modelo teórico: Una propuesta para desarrollar la intuición probabilística en niños de sexto grado”, efectuado por Alexander Reátiga (2004).

Esta, es una propuesta de aula que tiene como fin posibilitar en el estudiante el desarrollo de las ideas intuitivas de los siguientes conceptos: aleatoriedad, espacio muestral, certeza o incertidumbre de un suceso, frecuencias absolutas, probabilidad de un suceso aleatorio, a través de gráficos de barras y análisis de los mismos en las actividades de carácter lúdico bajo un enfoque frecuencial.

En el transcurso de este estudio, se desarrollaron cuatro talleres con 19 estudiantes del grado sexto del Gimnasio Saucará de Bucaramanga, con edades entre 11 y 12 años, evitando al máximo la intervención del profesor.

Las conclusiones generales a las que llegó el autor sobre el desempeño de los estudiantes en la realización de los talleres, a través de cinco categorías son:

1. **Distinción entre Certeza e Incertidumbre**: al iniciar las actividades los estudiantes creían que podían tener certeza en la predicción de los resultados, pero durante su desarrollo, se pudo establecer la incertidumbre que genera en suceso aleatorio. Esto sirvió para cambiar algunas concepciones erróneas que tenían los estudiantes.
2. **Naturaleza de las Pruebas Experimentales:** los estudiantes creían que podían controlar los resultados al lanzar los dados, es decir, estaban convencidos que el resultado dependía del nivel de la fuerza, la forma como se lanzara y el número de vueltas o giros que se generaban. La experimentación física es necesaria para corregir las concepciones erróneas relacionadas con el azar y la naturaleza de las pruebas experimentales ya que permiten confrontar sus creencias con la realidad.
3. **Relaciones entre resultados individuales y patrones de resultados:** los estudiantes, en la realización de experimentos que involucran espacios no equiprobables como la suma obtenida al lanzar dos dados, no lograron encontrar un modelo que les ayudara a predecir los resultados obtenidos posteriormente. Pero se logró que reconocieran las

relaciones presentes entre resultados individuales y patrones globales. Además, fueron incapaces de construir el espacio muestral teniendo en cuenta la conmutatividad de los eventos.

Para el autor**,** es necesario realizar varias experiencias concretas y simuladas, así los estudiantes pueden observar mejor el comportamiento de los resultados a medida que se aumenta las iteraciones. Al mismo tiempo es necesario determinar el grado de comprensión que tienen los estudiantes con las proporciones.

4. **Estructura de los eventos:** los estudiantes al obtener los resultados en la suma de lanzamiento de dos dados, lograron identificar las posibles sumas a obtener (2,…,12), sin embargo, no tuvieron en cuenta la conmutatividad en algunas formas de generar la mayoría de las sumas posibles del espacio muestral. Lo cual impidió relacionar el espacio muestral

5. **Tratamiento de los residuos:** la diferencia entre el valor esperado y el valor realmente dado, causó muchas dificultades a los estudiantes quienes no pudieron identificar las frecuencias en los resultados, a pesar de todas las experimentaciones realizadas, por lo tanto el autor argumenta que es necesario realizar muchas más experiencias aleatorias las cuales se pueden reforzar con el uso del computador, lo cual puede reducir la búsqueda de regularidades por parte de los estudiantes.

El autor hace referencia a la necesidad de utilizar el medio computacional y de asistir al estudiante con cierta instrucción para modificar sus intuiciones, estas recomendaciones se tuvieron en cuenta en el desarrollo de esta investigación, donde se trabajo de forma conjunta experimentaciones físicas y simuladas, en las cuales el docente toma el papel de mediador, proporcionando las herramientas necesarias para que el estudiante construya de forma adecuada sus conceptos.

Otro trabajo en el que sustentamos el desarrollo de esta investigación, es el realizado por Edgar David Jaimes Carvajal y Jorge Alexander Martínez Silva (2007), como proyecto de especialización en educación matemática: “Probability Explorer: un socio cognitivo en la construcción del significado de la ley de los grandes números con estudiantes de octavo grado en el Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional”.

Este trabajo presenta una experiencia de aula, cuyo objetivo fue estudiar los efectos de la simulación computacional en el aprendizaje significativo de la ley de los grandes números a partir de una situación problema contextualizada y el uso de un simulador aleatorio llamado Probability Explorer.

Se desarrollaron doce actividades, que comenzaron con un análisis diagnóstico de las concepciones de los estudiantes respecto a las secuencias aleatorias y que continuaron a partir de los resultados experimentales obtenidos de una promoción de helados que se realizó en el colegio, la cual giraba en torno a una apuesta relacionada con el lanzamiento de una moneda y la extracción de dos balotas de dos colores al azar donde el objetivo general era que los estudiantes pudieran predecir si la promoción era viable a largo plazo.

La necesidad de mayores datos condujo a los estudiantes a diseñar modelos que representaran la situación real y que permitieran su simulación en el computador. La realización de una gran cantidad de repeticiones, acercó a los estudiantes a la ley de los grandes números y a su interpretación práctica en el contexto de la promoción de helados. Al final del proyecto, hubo estudiantes que lograron generar nuevas intuiciones respecto a los resultados de un experimento real o simulado, como el significado de variabilidad a corto y el de estabilidad a largo plazo, así como modificar algunas malas concepciones relacionadas con el espacio muestral, el valor de probabilidad y la distribución de frecuencias de un experimento, las cuales contribuyeron en la construcción del significado de la ley de los grandes números. El pensamiento determinista fue un gran obstáculo para lograr la comprensión de los fenómenos relacionados con la incertidumbre.

A continuación se presentan en detalle las conclusiones generales a las que llegaron los autores a través de las cinco categorías de análisis propuestas en su metodología.

Modificabilidad de las concepciones previas: Se analizaran las intuiciones de los estudiantes, percibidas en seis momentos distintos del proceso:

• **La controlabilidad y la predicibilidad se relacionan como significados iníciales en forma diferente para cada estudiante.**
En el diagnóstico se pudo observar que los estudiantes creen que pueden predecir y controlar los resultados. Sin embargo, esas malas concepciones, no representaron en si un obstáculo para la construcción del significado de la ley de los grandes números.

• **Los sesgos son posibles de modificar.** En el diagnóstico se pudo notar malas concepciones en cuanto a los sesgos de desorden, de los valores recientes y de equiprobabilidad. El sesgo de desorden pudo ser modificado por algunos estudiantes gracias al análisis que hicieron de las secuencias aleatorias desde el punto de vista frecuencial, a partir de la experimentación con monedas y balotas.

El sesgo de los valores recientes fue modificado por algunos alumnos, al comprender el significado de probabilidad que les permitió justificar los resultados de un fenómeno inmediato, a corto y a largo plazo con coherencia.
El análisis directo con experimentos reales y simulados, permitió a los estudiantes modificar el sesgo de equiprobabilidad cuando debían hacer predicción de secuencias aleatorias teniendo en cuenta el espacio muestral.

• **El surgimiento del significado de parcialidad.** Este significado surgió como consecuencia del análisis de los estudiantes de las frecuencias absolutas y fue utilizado como un criterio para determinar la aleatoriedad de un fenómeno.
En la experimentación real con monedas, se notó que el cliente escoge más la cara que el sello y efectivamente gana, lo cual fue un impedimento para que los estudiantes aceptaran la aleatoriedad del fenómeno relacionado con la primera promoción de paletas y más aun le tomaran confianza a la herramienta computacional; lo cual solo pudo ser posible al realizar la experimentación con la nueva promoción de paletas utilizando balotas.

• **Los significados que surgen de la experimentación física influyen en la confiabilidad que tiene el estudiante sobre la herramienta computacional y sus resultados.** Para generar confianza en la herramienta los estudiantes esperan encontrar características similares en el comportamiento de los resultados reales y simulados al comparar las secuencias aleatorias y las frecuencias absolutas y relativas. Lo anterior implica una mayor responsabilidad a la hora de diseñar experimentos físicos que no permitan generar malas concepciones.

• **Los resultados experimentales validan los resultados simulados.** Sin la experiencia física es difícil que los resultados construidos en el ambiente computacional puedan ser considerados por los estudiantes como válidos.

• **La coordinación entre los sistemas de representación.** Es común que a los estudiantes se les dificulte la interpretación y descripción de cualquier tipo de gráficas estadísticas. Por lo tanto es muy importante que ellos conozcan el fenómeno real, interactúen con él y llevela cabo un proceso de abstracción para dar sentido a la simulación computacional. De esta forma el estudiante puede comprender de manera simple los distintos sistemas de representación.

2. Construcción del significado conceptual.
La comprensión de la ley de los grandes números exige la comprensión inicialmente de dos significados el de "variabilidad" y el de "estabilidad" relacionados con las características de las frecuencias relativas a corto y largo plazo, así como el significado de probabilidad y de espacio muestral relacionados con las características superficiales del experimento.

• **El surgimiento del significado de variabilidad.** Para que el estudiante pueda construir el significado claro de "variabilidad" es necesario primero el surgimiento del significado de "estabilidad".

• **El significado de estabilidad.** Se refiere a la capacidad del estudiante para percibir en el resultado de las frecuencias relativas la tendencia hacia un valor específico al repetir el experimento. Este resultado requiere tener en cuenta dos aspectos para su activación: el número de pruebas y la repetición. En general los estudiantes no pudieron establecer este significado ni expresarlo claramente, debido a la influencia de los significados de parcialidad.

• **Relación del espacio muestral y el significado de probabilidad.** Este resultado aparece de manera significativa cuando uno de los niños analiza las condiciones de la nueva promoción con un espacio no equiprobable y de alguna manera predice la probabilidad. Lo cual permite asociar a cada espacio muestral una probabilidad, marcando una diferencia con sus compañeros a la hora de construir el significado de la ley de los grandes números. El estudiante relacionó el espacio muestral con el valor de probabilidad y a su vez el valor de probabilidad con la frecuencia relativa al condicionar "el cumplimiento del valor de la probabilidad al hecho de que dicho valor debía reflejarse en las frecuencias porcentuales, encontrando que este valor solo se cumplía al realizar el experimento a largo plazo como lo pudo constatar en el simulador demostrando una aparente comprensión de la ley de los grandes números".

Los autores hacen referencia a la necesidad de diseñar y aplicar experimentos físicos que no generen malas concepciones a la hora de construir verdaderos significados mediante la simulación computacional, aspecto que se tuvo en cuenta en el momento en que se plantearon las actividades de experimentación física, como orientación para el desarrollo de esta investigación.

El más recién estudio realizado en relación con nuestro enfoque, es el de Viviana Villamizar (2008), llamado "*Concepciones acerca de la probabilidad, presentes en alumnos de octavo grado al ser sometidos a una enseñanza basada en la experimentación física y la simulación computacional".*

El objetivo de este trabajo era identificar y analizar el desarrollo de las concepciones que los estudiantes de octavo grado de un colegio rural poseen acerca de los juegos de azar y la probabilidad, al ser sometidos a una enseñanza basada en la experimentación física y la simulación computacional.

Este trabajo consistió en implementar una serie de actividades en un ambiente de juego, donde los estudiantes debían hacer en primer lugar experimentaciones físicas con monedas, dados y bolas en una urna y después hacer simulaciones computacionales de las mismas, utilizando el Software Probability Explorer. Las actividades con cada uno de los experimentos fueron diseñadas de forma similar, para poder analizar el avance de los estudiantes en cada uno de ellos, dicho análisis fue realizado a partir de Taxonomía SOLO de Biggs y Collis (1991). Taxonomía SOLO, muestra el avance de los estudiantes de la incompetencia hasta la experticia, permitiendo evaluar su desempeño al realizar una tarea específica de determinado tema.
Las conclusiones que presenta la autora de este trabajo en términos generales, a través de las dos categorías de análisis son:

1. Modificabilidad de las concepciones previas
Las malas concepciones presentadas por los estudiantes en el diagnostico, fueron modificadas por la mayoría de ellos mediante la experimentación física, otros estudiantes durante la misma experimentación obtuvieron malas concepciones, como por ejemplo al asignar mayor posibilidad a los resultados más frecuentes en la experimentación física con monedas y con dados, lo cual deja ver claramente la importancia de someter a los estudiantes a actividades que sean de su interés, puesto que las concepciones obtenidas por los estudiantes en esta etapa, validan las simulación computacional y las malas concepciones difícilmente son modificadas.

2. Relación entre el espacio muestral asociado a un experimento, con la distribución de los datos empíricos:

Los estudiantes logran modificar las malas concepciones y sesgos aceptando la variabilidad e impredicibilidad de los resultados, durante la experimentación física; aunque no evidenciaron la estabilidad de los resultados al realizar varias repeticiones, dado el limitado número de lanzamientos realizados.

En contraste, con el uso del simulador, algunos estudiantes empezaran a inferir la convergencia de los patrones de resultados al realizar muchas repeticiones y la relación que tiene con la proporción del espacio muestral, lo que les permitió incluso proceder en sentido contrario, asociando la frecuencia de los resultados con la proporción de bolas en la urna. Estos resultados evidenciaron la presencia de un fuerte significado de la ley de los grandes números y de cierta lógica inductiva.

Respecto a la evolución cognitiva de los estudiantes por medio de la Taxonomía SOLO, el avance de las concepciones de los estudiantes es evidente a lo largo del proceso, puesto que inicialmente la mayoría de estudiantes se encontraban en los niveles preestructural y uniestructural, alcanzando algunos al final de las etapas, los niveles relacional y de abstracción extendida, que fue posible mediante la experimentación de sucesos no equiprobables como el modelo de urnas; lo cual no sucedió frente a situaciones justas como el lanzamiento de monedas o dados.

La autora finaliza cuestionando este hecho: "¿Por qué, si los estudiantes conciben la estabilidad de los resultados al hacer varios lanzamientos y la relación que tiene con el espacio muestral, en un experimento, no son capaz de asociar estos resultados con los demás experimentos?", lo cual es de esperarse ante una verdadera comprensión de la ley de los grandes números, aplicándola a cualquier experimento que se les presente.

Al respecto, en este estudio se analiza la forma en la que los estudiantes lograron trasladar los significados adquiridos dentro de un dominio estocástico de abstracción, a cualquier otro suceso aleatorio.

Estas dos últimas investigaciones reconocen conjuntamente, el efecto del uso de las herramientas computacionales a favor de la construcción de significados como la ley de los grandes números, alrededor de experimentos aleatorios simulados.

3. METODOLOGÍA

Esta es una investigación de tipo cualitativo en el cual se realiza un análisis descriptivo de cómo un grupo de estudiantes conectan las concepciones previas respecto a los fenómenos aleatorios con las adquiridas a través de la experimentación física y la simulación computacional para la comprensión de la ley de los grandes números.

Para analizar los cambios que presentaron los estudiantes en sus formas de pensar durante las actividades aplicadas se realizó un estudio de casos, como método de investigación.

3.1 POBLACIÓN Y MUESTRA

La población a estudiar fue un grupo de 16 estudiantes del grado quinto primaria del Colegio Espíritu Santo, (Girón - Santander), pertenecientes a estratos 2 y 3 cuyas edades oscilaban entre los 9 y 11 años. Además, no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal acerca del tema y no recibieron ningún tipo de instrucción durante el desarrollo de la investigación.

A partir del interés y el desempeño mostrado en las actividades realizadas, se hizo una selección de cuatro niños: Mayra, Yeixon, Juan Camilo y Daniel, quienes hicieron parte de la investigación desde la etapa de experimentación física hasta la evaluación. Además, se escogió una pareja de niños más: Laura y Francisco, los cuales solo realizaron la simulación computacional; esto con el objetivo de confrontar y validar el alcance de la experimentación física y computacional en la comprensión de la ley de los grandes números.

3.2 MEDIOS EMPLEADOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

La recopilación del material utilizado para el análisis de los resultados, fue realizada principalmente a partir de los informes escritos de los talleres, los cuales permitieron evidenciar los cambios en las concepciones de los estudiantes durante todo el proceso.

Igualmente se hicieron grabaciones de audio a las conversaciones sostenidas con los estudiantes, con el objetivo de facilitar el análisis y las conclusiones de cada actividad realizada. Además, al realizar la simulación computacional, se recogieron los gráficos de los resultados obtenidos, generados por parte de los estudiantes al interactuar con el chance Maker.

3.3 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se desarrolló en cuatro etapas para las cuales se diseñaron algunos talleres y juegos de mesa, que permitieron analizar el comportamiento de los niños frente a experimentos aleatorios como el lanzamiento de monedas, dados y ruletas. Asimismo, hicieron posible identificar significados locales para la aleatoriedad como: la Imprevisibilidad, Incontrolabilidad, Irregularidad e Imparcialidad, las conexiones entre ellos y los nuevos significados generados para la comprensión de la ley de los grandes números.

Durante las dos primeras etapas (Etapa I: Diagnóstico y Etapa 2: Experimentación física) participaron todos los estudiantes, sin embargo solo los 4 niños mencionados anteriormente, continuaron con la simulación computacional y la evaluación, por el interés y dedicación mostrada durante los juegos. A continuación se describe cada una de las etapas de la investigación:

ETAPA 1: Diagnóstico "¿Qué tanto sabes?"

Consistió en la aplicación de una prueba escrita, teniendo por objetivo, conocer los significados acerca del azar presentes en los estudiantes, analizando los juicios que hacen frente a situaciones aleatorias con dados, monedas y ruletas.

Estas concepciones previas permitieron establecer el camino a seguir a lo largo de la investigación, posibilitando su modificación para orientar la construcción de nuevos significados para la aleatoriedad.

Esta prueba consta de nueve preguntas tipo interpretativo y argumentativo, las cuales fueron contestadas individualmente durante una hora.

Las siguientes son las preguntas con su justificación correspondiente:

Impredicibilidad

Con la primera y segunda pregunta se quería observar como los estudiantes conciben la aleatoriedad, y como justifican los resultados de los experimentos aleatorios. Se tomó como referencia el dado y la moneda ya que presentan características similares.

1. Imagina que eres el capitán de un equipo de fútbol y que hoy tienes la final. Para decidir el equipo que inicie el juego, deberás escoger uno de los lados de la moneda, que después será lanzada al aire por el árbitro del partido.
   ¿Qué lado de la moneda escogerías? ¿Por qué?

2. ¿Si lanzas un dado qué número crees que saldrá?, ¿por qué?

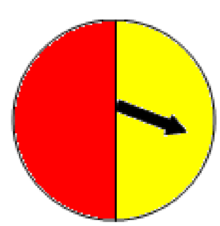
Incontrolabilidad: Con la tercera y cuarta pregunta se quería observar si los estudiantes consideran posible poder controlar los resultados de los experimentos aleatorios como los son el lanzamiento de una dado o de una moneda.

3. ¿Existe alguna forma de lanzar el dado para obtener el número que tú deseas?
4. Carlos uno de los compañeros del salón dice que le da 200 pesos a quien le diga cómo debe lanzar la moneda para obtener sello. ¿tu qué le dirías?

Irregularidad

Con la quinta y sexta pregunta se quería observar si los estudiantes consideran posible que los resultados de un experimento aleatorio conserven un orden o una secuencia. Se tomó como referencia la ruleta uniforme, cuyos sectores representaban el color rojo y el color amarillo.

5. Camila ha tirado una moneda al aire tres veces y obtuvo 3 caras seguidas. Si vuelve a tirar la moneda, ¿saldrá otra vez cara?
Si ó No ¿Por qué?

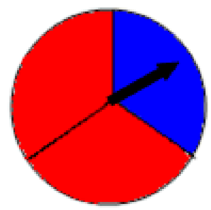


6. Imagina que haces girar 10 veces una ruleta, como la que se muestra en la figura. Escribe los posibles resultados que obtendrías.

Imparcialidad

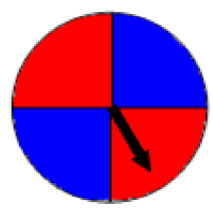
Con la séptima y octava pregunta se quería indagar las concepciones de los niños respecto a la equiprobabilidad y si relacionaban la composición del espacio muestral asociado a un experimento con los resultados que se obtienen al realizarlo.

Para que los estudiantes respondieran estas preguntas sin dificultad alguna, fue necesario explicar el significado de Juego justo: “un juego es justo cuando todos los participantes tienen la misma posibilidad de ganar”



7. Se tiene una ruleta que está dividida en tres partes iguales como se muestra en la figura. Dos de sus divisiones son de color rojo, y una de color azul. Para jugar debes escoger un compañero del salón quien será tu contrincante, cada uno debe escoger uno de estos dos colores, siendo tú el primero en elegir y luego debes hacer girar la ruleta. Ganas si cae el color que escogiste.

a. ¿Cuál color escogerías? ¿Por qué?
b. ¿E l juego es justo? Si ó No ¿Por qué?



8. Si juegas con tu compañero pero con una nueva ruleta que este dividida en cuatro partes iguales, solo que ahora dos de sus divisiones son de color rojo y dos de color azul.

a. ¿Qué color escogerías?
b. ¿El juego es justo? ¿Por qué?

Ley de los grandes números

Con la pregunta nueve, se quería indagar si los estudiantes percibían o presentaban intuiciones acerca de la ley de los grandes números.

9. Si se hace girar 200 veces una ruleta que está dividida en dos partes iguales, una de color negro y la otra de color blanco. ¿Cuántas veces crees que saldrá cada color?

ETAPA 2: Experimentación Física

Durante esta etapa se aplicaron cuatro talleres denominados: Taller 1: ¿Cara o Sello?, Taller 2: Preparados, listos ¡ya! y el Taller 3: El Desafío Parte I y Parte II; los cuales incluían juegos de mesa. Estos talleres fueron diseñados con el fin de conocer las concepciones a cerca de los sucesos aleatorios que los estudiantes adquirieron después de experimentar con monedas, dados y ruletas.

Antes y después de jugar los niños debían responder una serie de preguntas y así poder observar los cambios en la toma de decisiones frente a los experimentos aleatorios antes mencionados.

Taller 1: "¿Cara o Sello?"

Consistió en un juego de mesa similar al parques en el que se necesitaba de el tablero (Ver Anexo 12), dos fichas en forma de monedas que representaban la cara y el sello y una moneda real que haría el mismo papel que los dados en el parques, es decir, si caía cara avanzaba una casilla el estudiante que había escogido la ficha que representaba la cara, y si caía sello, avanzaba una casilla quien había escogido este lado de la moneda. Gana el juego quien logre llegar primero a la meta, la cual estaba a 25 casillas de la Salida.

A continuación se presentan las preguntas con su respectiva justificación:

Con las tres primeras preguntas se quería conocer las preconcepciones de los niños sobre los resultados de la moneda y los cambios que se presentarían en la toma de decisiones al compararlos con los obtenidos después de la experimentación.

a) ¿Cuál lado de la moneda escogió? ¿Por qué?

b) ¿Crees que alguno de los dos tiene mayor posibilidad de ganar? ¿Por qué?

c) ¿Cuál lado de la moneda escogerás ahora? ¿Por qué?

Después de jugar, debían comparar sus resultados con los de una pareja de compañeros, posteriormente completar la tabla con los datos recolectados por todo el grupo para que observaran el comportamiento de los mismos en pocas y varias repeticiones. Así mismo, conocer hasta qué punto los estudiantes, después de haber realizado el experimento, lograban observar alguna regularidad en los resultados obtenidos que les permitiera realizar predicciones al realizar el experimento muchas veces. Por lo tanto debían responder las siguientes preguntas:

d) Compara tus resultados con los de una pareja de compañeros ¿Qué puedes concluir?

e) ¿Qué puedes concluir del juego al reunir los datos de todos tus compañeros?

f) Imagina que lanzas 1000 veces una moneda, ¿podrías predecir los resultados? ¿Por qué?

Taller 2: Preparados, listos ¡ya!”

Para esta actividad los niños fueron trasladados a un parque al aire libre cercano al colegio, donde se formaron dos grupos de seis estudiantes y un grupo de cuatro; a cada uno se entregó un tablero de mesa (Ver anexo 13), seis fichas de diferente color y un dado, además de darles a conocer las instrucciones del juego.

Este taller fue elaborado de manera similar al de la moneda, con el mismo propósito y por tanto, las preguntas contenían el mismo interés.

Enseguida se presenta la actividad y las preguntas realizadas:

Vamos a realizar una carrera con 6 participantes numerados del 1 al 6. Cada uno debe ubicarse en la casilla SALIDA. Para jugar se lanza un dado y avanza una casilla la persona que tenga el numero indicado en el dado, sin importar quien lo haya lanzado. Gana quien primero llegue a la meta. Justo en ese momento se para la carrera: es decir, no se espera a que todos los jugadores alcancen la meta. Al final se anota el número de casillas que avanzó cada uno en el tablero.

- Responde las siguientes preguntas antes de jugar:

a) ¿Qué número escogiste? ¿Por qué?

b) Si lanzas un dado, ¿sabes qué número caerá? Si____ No____ ¿Por qué?

c) Imagina que te corresponde el turno de lanzar el dado y estas a una casilla de llegar a la meta, igual que uno de tus compañeros. Para ganar debes obtener el número que escogiste ¿Qué harías para obtenerlo

d) Al tirar un dado 10 veces nos han salido los siguientes valores: 5, 2, 1, 1, 6, 4, 3, 5, 5 y 4. Si lo lanzamos otra vez, ¿qué número crees saldrá? ¿Por qué?

e) ¿Consideras que conseguir un seis, por ejemplo, es más difícil, más fácil o igualmente posible que obtener los demás números?

Ahora empieza a jugar con tus compañeros la primera partida y escribe los resultados que vas obteniendo en los primeros nueve lanzamientos

RESULTADOS
?

f) ¿Qué número crees que se obtendrá en el lanzamiento

número diez? ¿Por qué?

- Si ya terminaste de jugar la primera partida, responde:

  g) ¿Cuántas veces se lanzó el dado para que por lo menos uno de los jugadores llegara a la meta?

  h) Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos de la primera y segunda partida:

	# de veces que sale 1	# de veces que sale 2	# de veces que sale 3	# de veces que sale 4	# de veces que sale 5	# de veces que sale 6	Total de lanzamientos
Partida 1							
Partida 2							

i) Después de jugar se escogerán los ganadores de cada grupo para la final. Si tú fueras uno de esos ganadores ¿cuál de los números escogerías para ganar?

j) Completa la tabla con los resultados de los grupos que jugaron (Ver Anexo 9)

k) ¿Qué puedes concluir del juego al reunir los datos obtenidos de todos los grupos?

l) Imagina que lanzas 2400 veces un dado ¿Cuántas veces crees que saldrá cada uno de los números? ¿Por qué?

Taller 3: "El Desafío"

Esta taller constó de dos actividades que implicaban juegos con ruletas; la primera de ellas: El Desafío parte I, se realizó en parejas, a cada una de las cuales se les entregó una ruleta dividida en ocho partes, seis de un mismo color y dos de otro (Ver Anexo 14). La segunda actividad: El Desafío parte II, fue realizada formando grupos de tres estudiantes, con una ruleta dividida en seis sectores de tres colores diferentes (Ver Anexo 15). A continuación se presentan las dos actividades, las preguntas y su justificación:

1. Supongamos que se hacen convocatorias para participar en el DESAFÍO, pero esta vez los participantes serán niños entre los 9-11 años por lo que puedes inscribirte y ser seleccionado para participar. En esta versión, el concurso consiste en pruebas que no requieren esfuerzo físico, para que tanto niños como niñas puedan superarlas y no creamos que sean solo para los más fuertes. Así por ejemplo, en la prueba territorial, en la que se define cuál isla habitar, cada jugador debe hacer girar una ruleta como la que se muestra en la figura, dividida en ocho secciones: dos naranjas y seis azules, que representan cada isla. De este modo, si la flecha indica el color naranja, irás a Playa Alta y disfrutarás de todas las comodidades: una cama formidable y toda la comida que desees; en cambio si marca azul, habitarás Playa Baja y no tendrás más que una isla llena de selva, con poca comida y agua.

De esta manera, vas a jugar a la ruleta con uno de tus compañeros 40 veces y al final quien haya ido más veces a Playa Alta, recibirá un premio y su compañero quedará con las manos vacías.

Pero antes de jugar responde las siguientes preguntas individualmente:

Las cuatro primeras preguntas fueron hechas con el propósito de confirmar las intuiciones acerca de la experimentación con ruletas, presentes en los niños y expresadas en el diagnóstico

a) Si haces girar la ruleta una vez, ¿qué color crees resultará? ¿Por qué?

b) Por las comodidades que ofrece Playa Alta, seguramente prefieras ir allá, pero para ello debes obtener el color naranja, ¿existe alguna forma de girar la ruleta para obtener? SI___ NO___ ¿Por qué?

c) ¿Cómo está planteado el juego crees que irás más veces, a Playa Alta o a Playa Baja? ¿Por qué?

d) ¿Crees que la posibilidad de ir a Playa Alta ó a Playa Baja es la misma? SI___ NO___. Explica tu respuesta

Luego debían completar la siguiente tabla en la que registraron el número de veces que salió cada color, marcando **A si es azul, N si es naranja.** Para que observaran el comportamiento de los resultados en pocas repeticiones.

NOMBRE DEL PRIMER JUGADOR _________________

En el numeral f se pretendía confrontar las intuiciones expresadas antes y después de jugar con las ruletas, para así percibir su modificación o afianzamiento.

f) De acuerdo con los resultados conseguidos, ¿crees que la posibilidad de ir a Playa Alta es la misma que la de ir a Playa Baja? SI___ NO___ ¿Por qué?

Además, debían completar una tabla (Ver Anexo 10) con los resultados obtenidos por todo el grupo, para que al igual que en la moneda y el dado, advirtieran alguna regularidad en los resultados obtenidos que les permitiera realizar predicciones al realizar el experimento muchas veces.

g) Si se hicieran 240 giros a la ruleta, ¿aproximadamente, cuántas veces crees resultaría naranja y cuantas azul? ¿Por qué?
Naranja=_____ Azul=______

Con la misma finalidad de la primera parte, se planteó la segunda actividad que consistió en un experimento con ruletas similar al anterior, solo que incluía un color más.

2. Imaginemos ahora que el concurso ha decidido hacer un cambio en el DESAFIO; en adelante los participantes podrán habitar tres playas: Alta, Media y Baja; por lo tanto elaboran una ruleta dividida en seis partes: 3 verdes, 2 azules y 1 naranja. Así, los niños que al hacer girar la ruleta, la flecha indique naranja, irán a Playa Alta, para los que la flecha muestre azul, habitarán Playa Media y a los que señale verde, ocuparán Playa Baja.

A continuación se presentan las preguntas de la actividad:

a) Si haces girar la ruleta una vez, qué color crees resultará? ¿Por qué?
b) Para asegurarte de ir a la playa que prefieres, debes obtener el color que la representa; existe alguna forma de girar la ruleta para conseguirlo? SI___ NO___ ¿Por qué?
c) ¿Cómo está planteado el juego crees que irás más veces, a Playa Alta, Playa Media ó playa Baja? ¿Por qué?
d) ¿Crees que la posibilidad de ir a cualquiera de las tres playas es la misma? SI___ NO___. Explica tu respuesta

Para registrar el número de veces que salió cada color, completa la siguiente tabla marcando cada casilla con **A si es azul, N si es naranja, V si es verde**

NOMBRE DEL PRIMER JUGADOR _________________

Para comparar tus resultados con los de tus compañeros, completa la tabla (Ver Anexo 11)

e) ¿En qué colores crees que caerá la ruleta si se gira 10 veces más?

f) De acuerdo con los resultados conseguidos, ¿crees que la posibilidad de ir a Playa Alta, Media ó Baja es la misma? SI___ NO___ ¿Por qué?

g) Si se hicieran 600 giros a la ruleta, ¿aproximadamente, cuántas veces crees resultaría naranja, azul y verde? ¿Por qué?

Naranja=______ Azul=______ Verde=______

ETAPA 3: Introducción al programa Chance Maker

Para esta etapa, se elaboró una guía a modo de instructivo (Ver Anexo 6), la cual contiene una amplia explicación del funcionamiento y la simulación de experimentos aleatorios con el Chance Maker.

Para el desarrollo de la actividad los estudiantes, bajo nuestra orientación, tuvieron que seguir paso a paso las indicaciones dadas en la guía que fue estructurada con base a tres preguntas:

1. ¿Cómo se abre el programa Chance Maker?

2. ¿Cómo funciona el programa Chance Maker?

3. ¿Cómo simular una situación aleatoria?

Para responder cada una de estas preguntas, los estudiantes atendieron a una serie de instrucciones que les permitió, además de abrir el programa, conocer cada una de las herramientas con las que cuenta el paquete computacional; para finalmente, simular algunas situaciones planteadas.

ETAPA 4: Simulación Computacional

Esta etapa consistió en la experimentación basada en el computador, de las actividades realizadas durante la interacción física con dados, monedas y ruletas, cuyo objetivo fue evaluar la forma en la que los estudiantes representan las situaciones aleatorias dentro del entorno computacional. También se analizó la evolución y evocación de significados en forma de abstracciones situadas a cerca de la aleatoriedad y su comportamiento a largo plazo, al tener contacto con el micromundo Chance maker.

Se diseñaron tres talleres para que los estudiantes simularan cada uno de los experimentos realizados en la etapa experimental. Dichos talleres se realizaron en parejas y las preguntas fueron contestadas individualmente.

Para la simulación computacional se realizaron los mismos experimentos físicos y en el mismo orden, por lo tanto iniciamos con el lanzamiento de una moneda:

Utiliza el Chance Maker para simular el lanzamiento de una moneda.
Explora todas las herramientas que el programa te brinda y guarda los resultados que vas obteniendo al final de cada ejercicio.

La primera pregunta fue con respecto a la impredicibilidad de un experimento aleatorio, en este caso, lanzamiento de monedas, dados y ruletas.

1. Haz click sobre la moneda para hacerla girar.
Antes de lanzar de nuevo, escoge el lado de la moneda que crees resultará esta vez.
¿Qué lado escogiste?

Ahora lanza y observa si acertaste en tu elección.

¿Si vuelves a lanzar, puedes predecir el lado que resultará?
Si__ No__ ¿Por qué?

Con la segunda pregunta se quería observar si los estudiantes creen posible controlar los resultados del experimento aleatorio.

2. Realiza un lanzamiento con el nivel de fuerza 100 y observa el resultado que has obtenido con ella.

¿Crees que si lanzas la moneda con esta misma fuerza el resultado será el mismo de antes?

- Lanza y observa.

- Prueba ahora con tres fuerzas diferentes.

Escoge un lado de la moneda y lanza la moneda con la fuerza que creas lo podrás conseguir.

¿Consideras que la fuerza con la que lanzas la moneda, controla el resultado?

Con la tercera pregunta se quería observar si los niños buscan un orden en la secuencia de los resultados.

Borra todos los resultados.

3. Tira la moneda 6 veces con la fuerza que desees y lee los resultados que obtuviste. Según los resultados que han salido hasta el momento, ¿puedes saber el lado de la moneda que obtendrás en el siguiente lanzamiento?

¿Crees que los resultados salen en algún orden?

Lanza 6 veces más, completando 12 lanzamientos en total y mira si encuentras ese mismo orden.

Con la cuarta pregunta se quería que el niño observara que a corto plazo los resultados son impredecibles, pero que a largo plazo estos se van estabilizando, siendo así predecible.

- *Borrón y cuenta nueva*

4. Realiza 20 lanzamientos de la moneda y genera el gráfico de pastel con los resultados obtenidos.

¿Qué te dice este gráfico de pastel?

Guarda el gráfico de torta obtenido en los 20 lanzamientos y lanza la moneda 20 veces más.

- Ahora lanza 100 veces
- Genera 100 lanzamientos más

Por último, completa 500 lanzamientos de la moneda con el programa, registrando los resultados.

Retoma los gráficos generados y responde:

A medida que aumentas el número de lanzamientos, ¿qué observas?

Ante los resultados mostrados en el gráfico de pastel, ¿Crees que la posibilidad de obtener cara ó sello es igual? ¿Por qué?

En 1000 lanzamientos aproximadamente, ¿cuántas caras y cuántos sellos resultarán? ¿Por qué?

Ahora continuamos con el lanzamiento de un dado:

Realiza los siguientes ejercicios utilizando el Chance Maker para experimentar con un dado de 6 caras.
Haz click sobre el dado para hacerlo rodar.
Antes de lanzar nuevamente, escoge la cara del dado que crees resultará esta vez. ¿Qué lado escogiste?

Ahora lanza y observa si acertaste en tu elección.
Si vuelves a lanzar, ¿puedes predecir el lado que resultará?

b) Realiza un lanzamiento con el nivel de fuerza 100 y observa el resultado que has obtenido con ella.
¿Crees que si lanzas otra vez el dado con esta misma fuerza el resultado será igual que antes?
Lanza y observa.
Escoge una cara y lanza el dado con la fuerza que creas, podrás conseguirlo ¿Siempre resulta el lado que escogiste? ¿Por qué crees que sucede esto? ¿Consideras que la fuerza con la que lanzas el dado controla el resultado?

a) Borra todos los resultados.

Tira el dado 10 veces con la fuerza que desees y lee los resultados que obtuviste, según el orden en que han salido los resultados, ¿sabes el lado que resultará en el siguiente lanzamiento?

¿Consideras que existe algún orden con el que salen los resultados?

Escribe estos 10 resultados y bórralos para lanzar el dado 10 veces más, completando 20 lanzamientos en total y mira si encuentras ese mismo orden

b) Borrón y cuenta nueva

Realiza 60 lanzamientos del dado y genera el gráfico de torta con los resultados obtenidos.
¿Qué te dice este gráfico de pastel?
¿Qué puedes decir de los resultados?
Guarda el gráfico de torta obtenido en los 60 lanzamientos y lanza el dado 60 veces más
Lanza 120 veces.
Genera otros 120 lanzamientos.
Por último, completa 600 lanzamientos del dado con el programa, registrando los resultados.
¿Crees que la posibilidad de obtener cada uno de los lados del dado es la misma? ¿Por qué?

Ahora, retoma los gráficos generados y responde:
¿Qué sucede con el gráfico de torta a medida que aumentamos el número de lanzamientos?

En 1200 lanzamientos aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada número? ¿Por qué?

Finalizamos la experimentación computacional con la simulación de la ruleta:

1. Utiliza las herramientas que el programa te ofrece para construir una ruleta dividida en 8 partes: 6 de un mismo color y 2 de otro.
   ¿Qué puede suceder cuando hago girar la ruleta?
   ¿Qué color crees resultará?
   Entonces, ¿crees que no puede caer en rojo?

2. Escoge un nivel de fuerza de tu preferencia y haz girar la ruleta. ¿Qué color obtuviste?
3. Si haces girar la ruleta con esa misma fuerza, ¿crees que obtendrás el mismo color?
4. Lanza nuevamente la ruleta con esta misma fuerza
5. ¿Consideras que el resultado depende de la fuerza con la que lances la ruleta?

6. Haz girar la ruleta 20 veces y genera el gráfico de pastel

¿Qué te muestra este gráfico?
¿Cómo interpretas el gráfico de los resultados obtenidos?
Realiza 20 giros más
¿Consideras que tienen igual posibilidad de que te salga cada color? ¿Por qué?
Mira la caja de pesos y compárala con el gráfico obtenido. ¿Qué observas??
Compara el gráfico de los resultados obtenidos con la caja de pesos, ¿qué observas?
¿Crees que la elección de la caja de pesos influye en tus resultados?
Si el juego fuera justo, ¿cómo imaginas quedaría el gráfico de pastel?
¿Qué podrías hacer para conseguir que el juego sea justo?

Para el desafío parte II se les pidió construir una ruleta con las siguientes características:

> Utilizando las herramientas del Chance Maker, vamos a construir una ruleta dividida en seis partes: 3 de un color, 2 de un segundo color y 1 de un color distinto a los anteriores.

ETAPA 5: Evaluación, "¿Qué tanto aprendiste?"

Al finalizar la experimentación física y computacional se realizaron dos evaluaciones a los cuatro niños que participaron durante toda la investigación, la primera fue una prueba computacional y la segunda una prueba escrita. El propósito de esta evaluación fue identificar los cambios en los significados adquiridos después de realizar los experimentos aleatorios con dados, monedas y ruletas en el Chance Maker. Además, evidenciar la comprensión de la de la ley de los grandes números y las ventajas o desventajas de la simulación computacional.

I. Prueba escrita

La evaluación escrita se realizó individualmente durante 1 hora, con el propósito de conocer las modificaciones de los significados a cerca del azar en los niños, analizando los juicios que hacen frente a situaciones aleatorias después de haber realizar la experimentación física y computacional. A continuación se presentan cada una de las preguntas con su respectiva justificación:

Con las preguntas 1 y 6 se quería evaluar la impredicibilidad con respecto al dado y a la moneda ya que presentan características similares

1. Imagina que lanzas una moneda al aire ¿Qué resultado obtendrás?
a) cara
b) sello
c) cualquiera de los dos lados de la moneda
¿Por qué?

6. Al lanzar un dado, ¿puedes predecir que número vas a obtener?
Si___ No___ ¿Por qué?

Con la segunda pregunta se quería evidenciar la irregularidad en los experimentos aleatorios o posibles malas concepciones como el sesgo de los valores recientes

2. Si al lanzar una moneda se obtuvieron los siguientes resultados: S-S-C-C-S-S-S-S, al lanzar una vez más la moneda el resultado será:

a) Sello

b) Cara

c) cualquiera de los dos

¿Por qué?

Con la pregunta 3 se quería observar si los estudiantes siguen considerando posible controlar los resultados de los experimentos aleatorios como el lanzamiento de una moneda

3. Monchi, tu compañero de salón, le dará 1000 pesos a quien le diga cómo debe lanzar la moneda para obtener sello, ¿t ú que le dirías?
¿Consideras que el aumentar o disminuir la fuerza con la que lanzas la moneda ayuda a obtener el resultado que deseas?
Si___ No___
¿Por qué?

Con las preguntas 4 y 7 se quería conocer si los estudiantes concebían la estabilidad a largo plazo, es decir, si comprendían la ley de los grandes números

4. Imagina que lanzas una moneda el número de veces que te indican en la tabla, aproximadamente ¿cuántas veces obtendrás cara y cuantas veces sello?

Número de lanzamientos	**Cara**	**Sello**
100		
500		
1000		
5000		

7. Imagina que lanzas un dado el número de veces que te indican en la tabla, aproximadamente ¿cuántas veces obtendrás cada uno de los números que hacen parte de las caras del dado?

Número de lanzamientos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
60						
600						

1200						
2400						

Con la pregunta 5 se quería evidenciar las nuevas concepciones de los niños respecto a la equiprobabilidad y si relacionan la composición del espacio muestral asociado a un experimento con los resultados que se obtienen al realizarlo.

5. Al lanzar un dado, ¿cuál número tiene mayor posibilidad de salir?
a) 1 d) 4
b) 2 e) 5
c) 3 f) 6
h) Todos tienen la misma posibilidad de salir

Con la pregunta 8 y 9 se quería evidenciar si los estudiantes logran llevar sus significados y abstracciones *más allá* de la experiencia concreta donde son formados

8. En una bolsa oscura se depositan 3 bolas, 2 son negras y 1 es roja; supongamos que vas a jugar con un compañero y cada uno debe escoger un color, luego deben sacar una bola de la urna. Ganas si sacas el color que escogiste.

a) ¿Cuál color escogerías? ¿Por qué?
b) ¿Ambos tienen la misma posibilidad de ganar?
c) Si en la urna se depositara otra bola roja ¿Cuál color escogerías?
d) ¿El juego es justo?

9. Si en una bolsa oscura se introducen 2 bolas negras y una roja, al hacer un determinado número de extracciones, aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada color? Completa la siguiente tabla:

Número de extracciones	**Negro**	**rojo**
30		
300		
600		

3.4 CATEGORÍAS PARA EL ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para examinar los resultados obtenidos en esta investigación, se establecieron las siguientes categorías:

Confrontación y modificación de significados locales*.* Se analizaran las transformaciones que experimentan las concepciones previas, expresadas en el diagnóstico, ante el proceso de simulación física y computacional planteada en la metodología.

Surgimiento de nuevos significados en forma de abstracciones situadas*.* Consiste en identificar las concepciones recién adquiridas a partir de la conexión entre los significados locales y las adquiridas en el micromundo computacional.

Construcción de significados globales*.* Los cuales serán establecidos al coordinar y conectar los nuevos significados o abstracciones situadas dentro del ambiente experimental propuesto.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Este capítulo muestra un análisis de cada actividad realizada en la investigación mediante las tres categorías propuestas en la metodología para examinar la información recolectada: Confrontación y modificación de significados locales, surgimiento de nuevos significados en forma de abstracciones situadas y construcción de significados globales. En el análisis presentado enseguida, se exhiben las respuestas más sobresalientes extraídas en cada actividad, y obtenidas en las entrevistas realizadas con los cuatro niños que participaron hasta el final del proyecto, lo que nos permite interpretar su razonamiento aleatorio antes, durante y después de interactuar con el micromundo Chance Maker.

Además, se analizan las acciones expresadas por el par de niños que son invitados a jugar únicamente con el simulador computacional.

En primer lugar, se examinan las respuestas de los niños en la prueba diagnóstica cuyo objetivo era conocer las intuiciones respecto a significados del azar presentes en los 16 estudiantes.

En segundo lugar, se analizan las modificaciones de estos significados locales después de realizar la experimentación física y la simulación computacional.

En tercer lugar, se identifican las concepciones extraídas de la conexión entre significados locales y los adquiridos en el micromundo, que finalmente se unen para describir el comportamiento aleatorio a largo plazo

4.1 Prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica fue diseñada para percibir significados del azar como: la impredicibilidad, la incontrolabilidad, la irregularidad y la imparcialidad, basadas en los juicios emitidos por los niños frente a situaciones aleatorias como lanzamiento de monedas, dados y ruletas.

Respecto a la impredicibilidad

En relación a los experimentos aleatorios con monedas y dados, una característica común en los niños era considerar posible predecir el próximo resultado. Es así como en la primera pregunta relacionada con la moneda (ver Anexo 1) catorce de los dieciséis estudiantes escogieron uno de los lados de la moneda y aseguraban que podrían ganar, bien por su buena suerte o por ser el lado que más cae.
En la segunda pregunta, relacionada con el lanzamiento de un dado, la gran mayoría de los niños predecían el resultado con argumentos similares a los expresados para la moneda. Además, cinco de los estudiantes optaron por escoger el número seis por ser el número mayor.

Tan solo un niño reconoce no saber el número que saldrá al expresar que *"el dado cae a la suerte"*; evidenciando una aparente comprensión de la impredicibilidad del experimento.

Respecto a la Incontrolabilidad

Se pudo comprobar de las respuestas dadas para las preguntas 3 y 4 (Ver Anexo 1), que la mayoría de los niños pretenden ejercer control sobre la situación planteada para obtener el resultado deseado.

Así, para el lanzamiento de una moneda aseguraban poder controlar el resultado, mediante estrategias como: "tirarla al aire por el lado del sello y cuando caiga en la mano, se voltea y aparece el sello" ó "si se lanza por el lado de la cara cae sello" y el caso contrario.

En cuanto al dado, algunos de los métodos que consideraban para poderlo controlar eran: *"agarrarlo con la mano derecha, lanzarlo para la izquierda y cae el 6" ó "soplándolo".*
Tan solo tres niños consideran que no existe ninguna forma de lanzar el dado para tener un resultado específico porque *"podría caer otro número", "de pronto*

no me cae o de pronto me puede caer", "no siempre se obtiene el número que uno quiere".

Respecto a la irregularidad

En cuanto a la moneda, se observó en las respuestas dadas a la pregunta 5 (Ver Anexo 1), que:

- Doce de los dieciséis niños presentaron el *sesgo de los valores recientes* en su forma *negativa* o *falacia del jugador*, al creer que el siguiente resultado sería sello porque en los resultados anteriores solamente habían salido caras.
- Cuatro estudiantes presentaron el *sesgo positivo de los valores recientes*, al considerar posible obtener nuevamente cara.

Así mismo, para el experimento de la ruleta se evidencia una secuencia intercalada en los resultados; lo cual se puede interpretar como una ausencia de la irregularidad y la búsqueda de un orden para hacer predecibles los experimentos. Así por ejemplo, la mayoría de los niños consideraron la siguiente secuencia: R, A, R, A, R, A, R, A R, A e inversamente.

Respecto a la imparcialidad

En cuanto a la experimentación con ruletas, para las preguntas 7 y 8 (Ver Anexo 1):

- Dos niños escogieron un color, admitiendo duda en su elección, mediante expresiones como: *puede caer y de pronto cae*.
- Otros dos niños analizaron la composición de la ruleta para tomar su decisión, optando por el color de mayor sector; esto ocurrió en el caso de la ruleta no equiprobable, pues para la uniforme, admitieron cualquier color; lo cual se puede interpretar como una buena intuición de la parcialidad de los resultados aleatorios, es decir, de la relación entre espacio muestral y la distribución de los resultados.

- Doce estudiantes prefirieron un determinado color por motivos subjetivos, como *color favorito* o porque les representa *buena suerte,* presentando nuevamente el subjetivismo en los resultados del azar.

- La mayoría del grupo interpretó la justicia del juego como la oportunidad de participar en él, no obstante que en la guía se dio la definición.

Respecto a la ley de los grandes números

Con respecto a la ley de los grandes números, pregunta 9 (ver anexo 1), se encontró que la mayoría de los niños, esperaban obtener la misma cantidad de cada color: “100 blancas y 100 negras porque está dividida en dos”.

Dando a entender una concepción completamente determinista, no reconociendo la variabilidad y aleatoriedad del experimento.

4.2 CONFRONTACIÓN Y MODIFICACIÓN DE SIGNIFICADOS LOCALES.

En esta categoría se analizaron las modificaciones de los cuatro significados locales evidenciados en el diagnóstico, después de realizar la experimentación física y la simulación computacional.

4.2.1 Respecto a la impredicibilidad

En relación con el lanzamiento de la moneda, al realizar la experimentación física (Ver Anexo 2), dos de los cuatro niños reconocieron este significado tras varios intentos fallidos al intentar predecir el resultado, argumentando que es suerte saber el lado de la moneda que pueda caer; mediante expresiones como: *“la moneda cae a la suerte”*

Mayra y Juan Camilo manifestaron poder predecir el resultado al controlar el lanzamiento de la moneda, como lo expresaron en su respuesta: si quieres cara, tiras la moneda por el lado del sello y cae en cara.

En la simulación computacional, estos dos estudiantes aparentemente habían aceptado la incontrolabilidad del experimento; Sin embargo en la evaluación, Mayra retoma esta mala concepción, expresando: *si quiere sello, ponemos la moneda con la cara hacia arriba";* debido a que retomó la experiencia física, olvidando la simulación computacional.

En el caso de Laura y Francisco, quienes interactuaron con el micromundo sin tener contacto previo con el experimento físico, argumentaron de manera similar a Mayra. En ambos casos, una prueba simple para hacer notar su error consistió en repetir varias veces el experimento con la misma fuerza, con lo cual acabaron por reconocer que sin importar la fuerza, cualquier lado de la moneda puede resultar. Evidenciando una transformación de las concepciones expresadas inicialmente.

En cuanto a los dados, después de la simulación física (Ver Anexo 3), los cuatro niños calificaron el experimento como impredecible al señalar que cualquier número puede caer.

Frente al simulador computacional, reafirman la imprevisión del experimento, luego de pedirles predecir el próximo resultado, una y otra vez, sin obtener éxito en la mayoría de intentos; considerando como suerte el hecho de predecir y acertar.

Laura y Francisco, igual que con la moneda, atribuían el resultado a la fuerza con la que lanzaban el dado, llegando a categorizar los resultados de acuerdo con la intensidad. Así, a mayor fuerza, mayor será el número a obtener. Concepción que fue modificada después de cambiar varias veces la fuerza, sin acertar en el resultado; luego de lo cual reconocieron que el resultado no depende de la fuerza porque cae cualquier número.

En la experimentación física con ruletas(Ver Anexo 4), inicialmente todos los niños escogieron el color azul porque correspondía al sector de mayor área, olvidando completamente el factor azar, no obstante, después de jugar reconocieron "*no saber que va a caer"* en pocas veces que se gire la ruleta, conclusión a la que llegan al presenciar una apuesta entre dos de sus compañeros, en la cual uno le apuesta al otro que al girar la ruleta no obtendría naranja, pues él estaba convencido que siempre resultaría azul; tanto que perdió $100 no una, sino dos veces.

De aquí analizamos que la seguridad de obtener azul llevó a este niño a apostar que su compañero perdería, sin la condición de recibir nada si él gana; además no exigió una cantidad limitada de giros a la ruleta, lo cual facilitó la obtención del color naranja después de algunos giros.

Una vez frente al computador, la concepción de impredicibilidad y variabilidad es completamente percibida por los seis niños, al admitir posible obtener en pocas repeticiones del experimento (20, por ejemplo), un gráfico de torta con sectores iguales aún cuando la composición de la ruleta no sea equiprobable, pues reconocieron que era posible, pero no igualmente probable obtener cualquier color.

Conclusión respecto a la Impredicibilidad

En general, después de la experiencia física con monedas, dados y ruletas, se reconoció la impredicibilidad de los experimentos aleatorios realizados, pues cuando los niños intentaban predecir, la mayoría de las veces no acertaban, modificando así las concepciones antes expresadas en el diagnóstico.

Algunos niños asociaron este significado con la falta de control, de tal modo que si no podían controlar el experimento entonces no podrían predecir el resultado, como se muestra a continuación:

4.2.2 Respecto a la Incontrolabilidad

Como veíamos anteriormente, en la experimentación física frecuentemente los niños consideraban poder controlar los resultados más fácilmente en el lanzamiento de la moneda que en el dado, considerando que entre más lados tuvieran los objetos a lanzar (6 por ejemplo en el dado), más difícil de controlar era el experimento, pensamiento que lograron modificar tres de los cuatros niños al interactuar con el Chance Maker.

En cuanto a la experimentación con dados y ruletas, a continuación se muestran algunos ejemplos de la modificación de este significado, al analizar los casos de Daniel y Juan Camilo:

El primero de ellos antes de la experiencia física, consideraba que *"tirando el dado al aire suavecito y con mucho cuidado podía obtener el número que deseaba";* idea que logró transformar, luego de jugar con el dado (Ver Anexo 3), ya que reconoció no poder controlar el resultado porque según él, *"cae otro número y a mí me molesta eso*", con lo cual dejó de suponer poder controlar el experimento, tal como lo manifestó al simular con el dado en el micromundo.

El segundo de ellos, creía posible predecir el color que se obtendría en la ruleta, pues consideraba que dependía de la fuerza con la que se hiciera girar.
Así, al jugar El Desafío Parte I (Ver Anexo 4), Juan Camilo creía que existía una forma de conseguir el color de menor sector. Aquí su explicación*: "si tiras la ruleta suave para que te caiga naranja, te cae"*; lo cual le coincidió la mayoría de veces y en adelante lo daba por hecho.

Así, al interactuar con el Chance Maker puso a prueba su método, pero no resultó la mayoría de las veces, acabando por reconocer la Incontrolabilidad; tal como se observa en la siguiente conversación:

P: Probemos con fuerza 1, que es la menor. ¿Qué crees que va a resultar?
JC: Naranja
Se obtuvo la siguiente secuencia N, A, A, A, N, N, N, A, N, N.
P: ¿Siempre nos cayó naranja como decías?
JC: No.
Quien no convencido todavía, intenta con otras fuerzas de poco valor, tratando de probar su método; sin embargo, sus intentos fueron fallidos
P:…Entonces, ¿será que de la fuerza con la que hagamos girar la ruleta, depende el resultado?
JC: No porque también le tiene que caer al azul

Notamos de lo anterior que la creencia de ejercer control durante la experiencia física con la ruleta, lo había llevado a creer que no era al azar, pero al interactuar con el simulador, no logró controlar el dispositivo y se convenció que era aleatoria.

En el caso de Laura y Francisco, quienes no realizaron la experimentación física, inicialmente mostraron tener sentido de controlabilidad al simular con el dado; pero luego de lanzar repetidas veces con una misma fuerza, obtuvieron resultados diferentes a los que estimaban, llevándolos a aceptar la incontrolabilidad al observar que así se cambie la fuerza del lanzamiento, siempre es posible obtener todos los números.

Conclusión a partir del significado de Incontrolabilidad

- Después de la experiencia física, la mayoría de los niños lograron transformar el sentido de controlabilidad que creían tener sobre los experimentos realizados, puesto que cuando ponían a prueba sus métodos para tratar de controlar los resultados, no obtenían éxito la mayoría de las veces. Experiencia que resulta valiosa en la medida que sí creen poder controlar el resultado con sus propias acciones, después no consideraran el experimento como aleatorio.
- Con respecto a Mayra, en quien persistió la idea de poder controlar el lanzamiento de la moneda, es una muestra de cómo la experiencia física puede influenciar desfavorablemente en las intuiciones de los niños, impidiéndoles reconocer, por ejemplo, la incontrolabilidad en cuanto a la moneda.

4.2.3. Respecto a la irregularidad

Si bien en el diagnóstico habían expresado la existencia de un patrón en la secuencia de resultados, después de realizar la experimentación física, ninguno de los estudiantes presentó esta concepción, debido a que no percibieron algún orden en los resultados.
En la interacción con el micromundo, frecuentemente los datos generados no aparecían ordenados, sin embargo, cuando se apreciaba cierta regularidad,

reconocían que no aplicaba a todos los resultados obtenidos. Así por ejemplo, Daniel consideró:

En 6 lanzamientos se obtuvieron los siguientes resultados: CSCCCS

P: ¿Hay algún orden?
D: No, debe caer CSCSCS
P: ¿Tú crees que ese sería un orden?
D: Si
P: Bueno y si le vuelves a dar 6 veces más, ¿de pronto nos sale lo mismo?
D: Uhm. No
P: ¿Por qué?
D: Porque es suerte si sale así

En el caso de Laura y Francisco, los niños que no hicieron parte de la experiencia física, consideraban que este significado dependía de la fuerza con la que la moneda fuera lanzada, pero ante la falta de un evidente patrón, acabaron por reconocer la aleatoriedad en las secuencias de resultados.

Conclusión referente a la irregularidad

La experiencia física y computacional con monedas, permitió evidenciar el cambio en las percepciones de los niños respecto al sesgo de los valores recientes mostrado en el diagnóstico, debido a que cuando los estudiantes trataban de predecir a partir de los últimos resultados obtenidos, generalmente fallaban al experimentar, reconociendo de este modo, la ausencia de algún patrón u orden en las secuencias de resultados y advirtiendo la irregularidad.

4.2.4 Respecto a la imparcialidad

Entre las actividades realizadas por los estudiantes en todas las etapas de la investigación, se encuentra la experimentación con ruletas, en las cuales el espacio muestral no es equiprobable.

En el juego del Desafío Parte I (Ver Anexo 4), inicialmente tres de los cuatro niños evidenciaron el sesgo de equiprobabilidad, pues creyeron igualmente posible ir a ambas playas, por razones subjetivas como tener buena suerte que les permitiría ganar.

Después de la experiencia física, estos tres estudiantes, ya no consideran el juego equiprobable, llegando a reconocer la impredicibilidad y la variabilidad de los resultados, advirtiendo además, poder ir más veces a playa baja que a playa alta debido a la apariencia física de la ruleta.

En la actividad de playa alta, playa media y playa baja (Ver Anexo 5), todos los niños consideraron que el juego no era justo porque tenían más posibilidad de ir a playa baja que a las otras playas, concepción percibida al observar la desigualdad en la composición de la ruleta, siendo una muestra del alcance de la experimentación física en la modificación de significados que antes habían sido mal concebidos.

En la simulación computacional de la moneda y el dado, la comprensión de este significado se evidenció por parte de los seis niños que participaron en ella, al percibir que todos los posibles resultados, tenían la misma posibilidad de caer, si el gráfico de sectores quedaba uniforme.

En el caso de la ruleta, para determinar la injusticia del experimento, Laura y Francisco, consideraron la falta de uniformidad en el aspecto físico de la ruleta, en la caja de pesos, en los resultados y en la desigualdad de los sectores del gráfico de torta. El siguiente es un ejemplo de cómo esta pareja de niños al interactuar con el micromundo, reconocieron un experimento no equiprobable y lo repararon para conseguir un juego justo.

P: ¿Qué nos muestra la caja de pesos?
L: Los números que pueden caer
P:…y una como esta [1 1 1 2 1 1 1 2], ¿qué nos dice?
F: Que hay más amarillo en el gráfico de torta porque hay más 1s aquí en la caja
P: ¿Qué harías para que el gráfico nos quede igual?
F: Poner más 2s
Luego de editar la caja de pesos eligiendo [1 1 1 2 1 1 1 2 2 2 2 2], la ruleta queda dividida en partes iguales
P:… y ¿Por qué quedó así?
F: Porque puse los mismos números
L: La misma cantidad
P: ¿Cómo creen que va a quedar el gráfico?
F: Igual que acá
P: ¿Entonces piensan que va a parecerse a la ruleta?
L: Si

Esta conexión entre la imparcialidad de la caja de pesos y el aspecto de la ruleta evidenció una comprensión de este significado, entendido aún mejor, al obtener un gráfico de sectores uniforme lo cual requirió de un gran número de repeticiones del experimento, permitiendo, además de relacionar el espacio muestral con la distribución de los resultados, intuir y comprender el comportamiento aleatorio a largo plazo por parte de los niños, tal como se describe en la siguiente categoría.

Conclusión respecto a la imparcialidad

- Después de realizar las actividades físicas y simuladas con monedas, dados y ruletas, fue evidente la transformación de las intuiciones de los estudiantes respecto a este significado, quienes en la prueba diagnóstica consideraban, por ejemplo, el experimento de la ruleta como equiprobable, pero a medida que fueron realizando cada una de las actividades, empezaron a consideran la falta de uniformidad en su aspecto físico y los efectos que causa en los resultados.

- Se pudo observar cómo la formulación y aplicación de diferentes actividades, permitieron a los niños además de hacer parte de ellas, modificar las percepciones equivocadas antes adquiridas.

4.3 SURGIMIENTO DE NUEVOS SIGNIFICADOS EN FORMA DE ABSTRACCIONES SITUADAS.

En esta categoría se identifican las concepciones adquiridas a partir de la conexión entre significados iníciales y los percibidos en la simulación computacional.

Los nuevos significados que emergieron tras repetidos ensayos empíricos, son descritos en detalle a continuación y fueron evidenciados al hacer un seguimiento del trabajo realizado por los seis niños que realizaron toda la etapa experimental.

(i) A medida que aumenta el número de veces, la diferencia entre los sectores del gráfico disminuye

Cuando Daniel y Juan Camilo jugaron con el dispositivo de la moneda sucedió que después de lanzarla 250 veces, el gráfico de torta mostró los sectores casi iguales (Fig. 1).

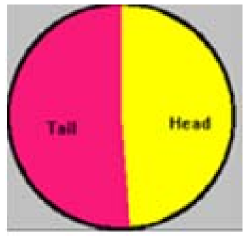


Fig. 1

Antes de mostrar el gráfico de tortas Daniel intuyó la igualdad, ya que en los gráficos anteriores había centrado su atención en la diferencia notando que a medida que se aumentaba el número de pruebas la diferencia entre los sectores disminuía. Sin embargo, ante la desigualdad de los sectores decidió aumentar a 400 el número de veces.

Con el gráfico de las 400 pruebas (Fig. 2), Daniel empezó a aumentar su confianza en lo que pensaba, más aún al observar la distribución de los resultados para 600 y 1000 pruebas, abstrayendo la noción de que *a mayor número de veces, los sectores del gráfico se van igualando.*

P: Después de estos 600 lanzamientos, ¿crees que es más difícil que salga cara ó sello?
D: No, es igual
P: …y con **1000** ensayos
D: Quedamos empatados
P: Retomemos los gráficos, ¿qué pasa a medida que aumentamos el número de pruebas?
D: La diferencia disminuye
P: ¿Crees que la posibilidad de salir cara es la misma que sello?
D: Si porque hay dos, cara y sello

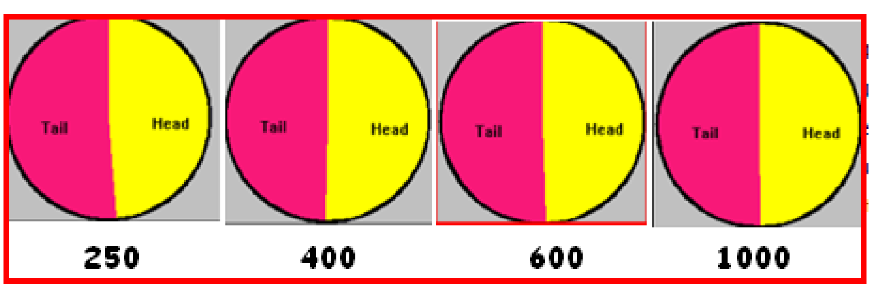


Fig. 2

Al interactuar con el dado Laura y Francisco, la pareja de niños que entraron directamente a la simulación computacional, se evidenció mayor facilidad en la concepción de esta abstracción.

Después de 360 lanzamientos de un dado, el gráfico de torta reveló una aparente igualdad de los sectores (Fig. 3)

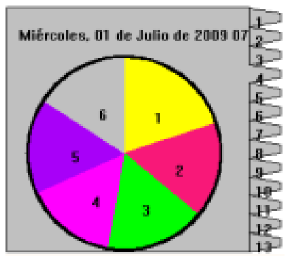


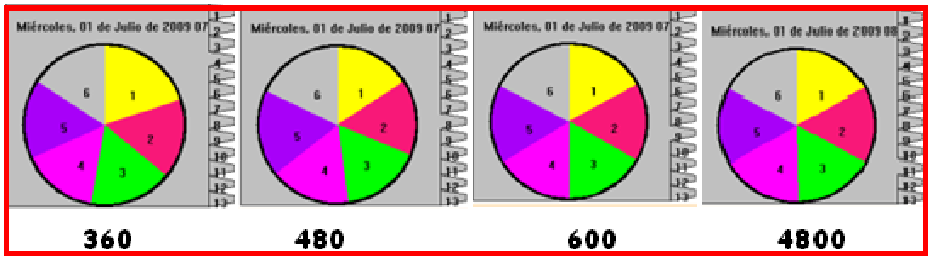
Fig. 3

Entonces al preguntarles por la gráfica a medida que iban aumentando el número de lanzamientos, intuyeron la igualdad de los sectores, tal como lo muestra el siguiente diálogo:

P. Con 600 lanzamientos, ¿cómo quedará el gráfico?
F. Un poco…no es mucha la diferencia que se observar ahí
L: Muy parecidos
P: Si lanzamos hasta 1200, ¿cómo quedará el gráfico?
F: No es nada, no se va a notar tanto la diferencia
P: Completemos ahora 1800 veces; qué…
F: Van a emparejar ahí
L: No cambian quedan iguales

Laura completó esta abstracción en el sentido de que cuando son pocos los lanzamientos, los sectores del gráfico no son parejos

P: ¿Qué pasaba a medida que lanzaban más veces?
F: Iban aumentando y disminuyendo y cada vez se parecían más
L: Son todos iguales
P: …y con pocas veces
L: No son iguales



Esta abstracción que se situó en el dispositivo de la moneda y el dado, se extrajo a partir del uso de herramientas como la repetición de muchas pruebas y la representación gráfica de los resultados, lo que permitió generar y comparar gráficos de torta para observar sus transformaciones mientras aumentaban el número de veces.

Como veremos en la siguiente categoría, esta abstracción facilitó la cuantificación de los resultados a largo plazo, pues al notar la uniformidad de los sectores, dividían el total de pruebas realizadas entre la cantidad de posibles sucesos.

(ii) Si los sectores del gráfico de torta son iguales entonces todos tiene la misma posibilidad

Esta abstracción puede considerarse como complemento de la anterior, ya que se fue formando a medida que iban aumentando los lanzamientos y comparando los gráficos de pastel, pues, además de que percibieron la diferencia entre los sectores, determinaban las posibilidades de cada evento, intuyendo que si todos han caído igual número de veces, los eventos son igualmente probables.

Esta noción se evidenció por parte de Laura y Francisco cuando jugaban con el dado en el Chance Maker, ya que al realizar pocos lanzamientos comparaban el tamaño de los sectores del gráfico para determinar cuál de los números había caído más veces, pero a medida que aumentaban los lanzamientos, fueron intuyendo que todos los sectores resultarían iguales.
Así por ejemplo, cuando observaron el gráfico de torta para 600 lanzamientos (Fig. 4) ellos consideraron:

F: Cambiaron, ya quedaron todos con la misma posibilidad
L: No, el 1 tiene un poco más. Si nosotros lo ponemos más veces, el 1 ya queda como el 3 digamos

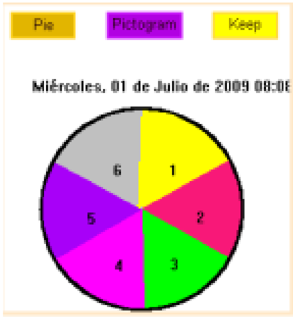


Fig. 4

(iii) La caja de pesos muestra cómo quedará el gráfico de torta

Hasta el momento, los niños no habían necesitado manipular la caja de pesos, ya que los dispositivos de la moneda y el dado antes trabajados, se comportaban como en la realidad. No obstante, al interactuar con el dispositivo de la ruleta (Fig. 5) si tuvieron que hacer uso de ella, pues el espacio muestral no era equiprobable, ya que estaba dividida en cuatro sectores: tres amarillos y uno rojo.

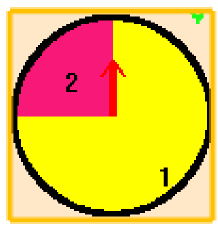


Fig.5

Daniel y Juan Camilo consiguieron abstraer este significado cuando observaron que conforme aumentaban el número de veces, el gráfico de torta era igual a la ruleta mostrada, de donde reconocieron que el juego no era justo ya que los sectores del gráfico no quedaron iguales.

P: ¿Será que el gráfico de torta está indicando que cada color ha salido el mismo número de veces?
D: No
P: ¿Cómo debería quedar el gráfico si los dos colores tuvieran la misma posibilidad?
JC: Por la mitad
D: Iguales

Se les pidió que utilizando las herramientas del Chance Maker, consiguieran un juego justo, por lo que Juan Camilo decidió aumentar a 1000 el número de veces para obtener la igualdad del gráfico. Daniel por su parte, consideró que la caja de pesos estaba causando la injusticia y decidió ajustarla, escribiendo finalmente la misma cantidad de 1(unos) que de 2 (dos). (Fig. 6)

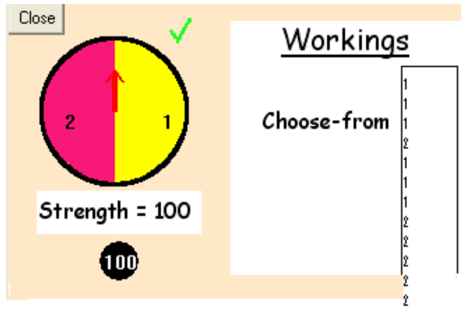


Fig. 6

P:... y tú Daniel ¿Qué harías?
D: Arreglar acá (señalando la caja de pesos)
P: ¿Cómo lo arreglarías?
D: Borrándoles los 1(unos) y que caigan solo 2 (dos)
P: ¿Cómo crees que quedaría el gráfico?
D: Igual
P: ¿El 1 igual al 2?
D: Ah no, me va a quedar solos 2.
P: ¿Qué nos muestra esta caja?
D: Los números que pueden caer
P: ¿Cómo la arreglarías para que el gráfico resulte igual?
D: Poner igual 1 (unos) que 2(dos)

Sin embargo, Daniel generaba pocos resultados, consiguiendo un gráfico uniforme con tan solo 180 lanzamientos, por lo que no consideró realizar más pruebas.

Vemos cómo Daniel alcanzó a percibir que de *la elección que hiciera de la caja de pesos, dependía el gráfico de torta*, aunque no consiguió trasladar la abstracción situada de la moneda que *"a mayor número de veces se obtiene la uniformidad del gráfico".* En cambio Juan Camilo, quien si la recordó, falló al aplicarla porque no estaba considerando la no uniformidad de la caja de pesos.

Laura y Francisco, al igual que Juan Camilo, presentaron el sesgo de equiprobabilidad, cuando al interactuar con el dispositivo de la ruleta (Fig. 7), esperaban que se comportara igual que en el dado, sin embargo después de lanzar varias veces, consiguieron asociar la caja de pesos con la apariencia del gráfico de torta.

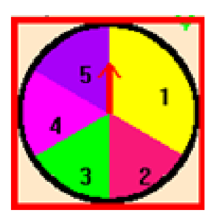


Fig. 7

Los primeros gráficos de torta al hacer girar la ruleta, hicieron que esta pareja de niños se preguntara por qué el 1 resultaba más veces, como se muestra en la conversación:

P: ¿Por qué crees que siempre ha ganado el 1?
F: Porque tiene más posibilidades de caer
P: ¿Y por qué crees eso?
F: Mire los resultados, cuando el 1 cae dos veces, simplemente los otros aumentan una vez.
L: Además, en el total de veces, cuando más grande digamos 200, esto no va a ser igual sino va a ser como esta (indicando la ruleta)
P: ¿La gráfica nos estará diciendo que todos han caído el mismo número de veces?
L: No. Como iba diciendo, iban subiendo las veces y estos se iban bajando (refiriéndose a los sectores)
L: Recuerdo que en el dado no se movían, entonces de pronto en este tampoco se van a mover de a mucho.

Vemos como Francisco relacionó correctamente los resultados con la composición de la ruleta, mientras Laura, por su parte, intuyó que el gráfico se estabilizaría.

Finalmente, encontraron como razón principal la caja de pesos y la arreglaron dejando exactamente una vez cada posible resultado. (Ver Fig. 8).

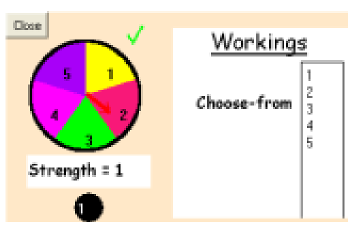


Fig. 8

A pesar de que Francisco expresaba que para obtener una gráfica de torta similar a la ruleta se deberían realizar 500 lanzamientos, Laura no siguió esta recomendación y optó por hacer pocas pruebas aumentando en 20 cada vez, sin llegar a conseguir un gráfico uniforme.

De lo anterior, se observó que para llegar a comprender la relación existente entre el espacio muestral y la distribución de los resultados, los niños debieron conectar los significados locales con los adquiridos durante la simulación computacional, percibiendo de esta unión, cierta intuición de la ley de los grandes números como parte del proceso hacia su comprensión, descrito en la siguiente categoría.

4.4 CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS GLOBALES.

Esta categoría permitió analizar si la metodología aplicada había resultado valiosa para que los niños exploraran el carácter imprevisible del azar en pocos resultados y advirtieran la previsibilidad de los experimentos aleatorios al aumentar el número de repeticiones, determinando así la ley de los grandes números.

Para ello, se hará un seguimiento de las intuiciones presentes en los estudiantes respecto a este concepto, a través de toda la etapa experimental, prestando especial atención a las tres parejas de niños que interactuaron con el simulador computacional.

Para el lanzamiento de una moneda

Después de la experiencia física, correspondiente a la primera actividad: ¿Cara o Sello? (Ver Anexo 2); de la pregunta i, referente a las intuiciones presentes en los niños respecto al comportamiento aleatorio a largo plazo, se evidenció que:

- Daniel y Yeixon no hacen aproximación alguna de los resultados, pues consideran la impredicibilidad de los mismos, sin percibir la convergencia existente al realizar muchas repeticiones.
- Mayra no cree posible que resulten empatados.
- Tan solo Juan Camilo considera la igualdad en los resultados, respondiendo: *"yo creo que pueden quedar empatados, pero no estoy seguro".*

En la simulación computacional, cinco de los seis niños que hicieron parte de la actividad, evidenciaron la regularidad en los resultados obtenidos después de varios lanzamientos.

Así en el caso de Daniel consideraba que:

En 1000 pruebas: *van a quedar 550 sellos y 450 caras.*
En 2000 lanzamientos: *Vamos empatados, por ahí 1001 sellos y 999 caras*

Para 5000 lanzamientos, afirmó la igualdad en los resultados y la relacionó con el espacio muestral, con lo cual se evidenció la comprensión del comportamiento aleatorio a largo plazo, tal como se muestra en el siguiente dibujo que él mismo realizó de la gráfica de torta que esperaba obtener si se hicieran 5000 pruebas (Fig. 9):

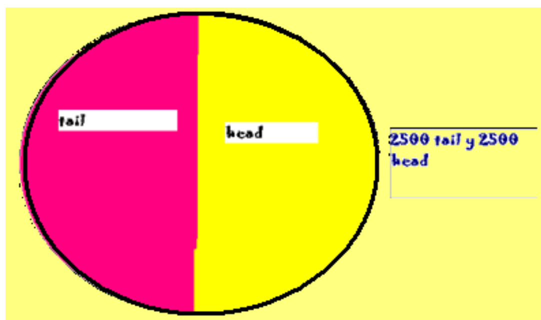


Fig. 9

P: Entonces cuando dices 2500 sellos, 2500 caras, ¿tú crees que es más difícil obtener cara que sello o sello que cara?
D: Igual porque tiene dos lados
P: Si un amigo te invita a jugar y ofrece darte una paleta si sacas cara. ¿Tú que le dirías? ¿Jugarías o no?
D: Si, porque a la suerte me podría caer
P: ¿Será que él acaso tiene más posibilidades de ganar?
D: No, lo mismo porque hay cara y sello.

Reconociendo además, la impredicibilidad y la variabilidad cuando se realizan pocos lanzamientos (Fig. 10)

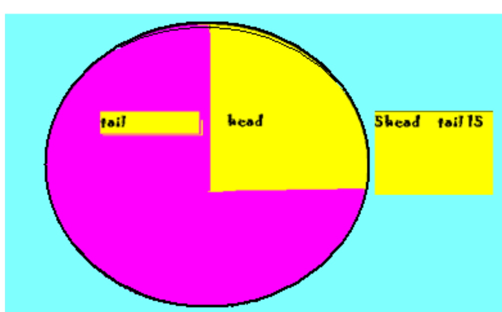


Fig. 10

Juan Camilo y Yeixon expresaban que la diferencia era muy pequeña, sin embargo se les dificultaba el manejo de valores aproximados, prediciendo 2400 sellos y 2600 caras, entonces al preguntarles por la diferencia de 100, cambian por ejemplo, a 2450 sellos y 2550 caras.

Mayra no llegó a reconocer la equiprobabilidad de los eventos, pues según ella "*siempre va a haber un lado de la moneda (cara) que cae más veces",* por lo tanto los sectores del gráfico de torta seguirían presentando una considerable diferencia, aún cuando se aumentara el número de veces.

Esto se debió a que en los datos grupales de la experimentación física con monedas (Ver Anexo 8), aunque la diferencia fue mínima, la cara obtuvo más resultados que el sello.

En el caso de los niños que no realizaron la experiencia física, se observó que:

Francisco consideró para 1000 pruebas: "*puede ser 520 0 530 para uno de los lados de la moneda. No es mucha la diferencia que se va a notar ahí*", y para 1500 pruebas: "*unas 750 caras, 750 sellos porque la mitad de 1500 es 750"*

Laura por su parte, reconoció la igualdad de los resultados pero se abstiene de dar respuestas exactas, por ejemplo, para 1000 pruebas respondió: "*490 y algo cada uno* y para 1500 pruebas contestó*: "un poquitico más de 740 para uno y el resto para el otro".*

En la evaluación, de la pregunta 4(Ver Anexo 7), se encontró que:

Daniel y Yeixon conciben la estabilidad a largo plazo pero reconocen que no pueden dar valores exactos para pocos lanzamientos, debido a las diferencias que observaban en las gráficas de torta cuando interactuaba con el Chance Maker.

Juan Camilo hizo distribuciones exactas para los dos lados de la moneda a medida que aumentaba el número de lanzamientos, reconociendo la estabilidad de los resultados pero dejando de lado la variabilidad.

Mayra en cambio, al hacer la distribución de los resultados no tuvo en cuenta la regularidad existente al realizar varios lanzamientos ya que continúo considerando poder predecir el resultado al creer controlar la moneda.

Conclusiones extraídas de la experimentación con monedas:

- Una vez realizada la etapa experimental con monedas, se evidenció el progreso de las intuiciones presentes en los niños relacionadas con el comportamiento aleatorio, puesto que en la simulación física no percibieron la convergencia de los resultados, lo cual, no fue impedimento para que en la simulación computacional, después de generar un gran número de lanzamientos, algunos estudiantes advirtieran la relación existente entre el espacio muestral y la distribución de los resultados sin olvidar la variabilidad.

- Sin embargo, existen niños que aunque advierten la estabilidad de los resultados a largo plazo, olvidan la variabilidad y determinan frecuencias exactas de los resultados.
- Se observó en uno de los niños (Mayra) que las abstracciones adquiridas durante la experimentación física, difícilmente logran ser modificadas. Esta estudiante aún después de simular con el computador, sigue considerando que uno de los lados de la moneda tiene mayor posibilidad de salir.

En la experimentación con dados

Después de la experimentación física, en la pregunta n de la Actividad 2 (Ver Anexo 3) relacionada con la intuición de la ley de los grandes números, se observó que:

- Daniel no creía poder predecir los resultados absteniéndose de hacer alguna aproximación, además no observó ningún patrón en los resultados después de realizar varios lanzamientos.
- Los otros tres niños intentaron predecir los resultados, no consideraron la regularidad a largo plazo influenciados por los resultados grupales

- obtenidos (ver anexo 9), expresando que algunos números tienen más posibilidad de salir que otros, en este caso el 5, el 6 y el 4.
- No se evidenció la equiprobabilidad de los resultados por parte de ningún niño

Después de la simulación computacional, los seis niños participantes de la actividad, advirtieron la estabilidad de los resultados al hacer varios lanzamientos. A continuación se muestran sus respuestas:

En 1200 pruebas: 200 veces cada número
En 3000 ensayos: 500 de cada uno porque todos van a quedar iguales (Daniel)

Para 6000 lanzamientos reconoce la equidad de los resultados pues espera obtener la igualdad del gráfico de sectores, tal como lo expresa en el siguiente dibujo: (Fig. 11)

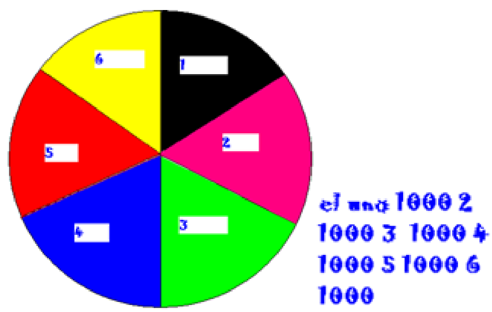


Fig. 11

En el caso de Laura y Francisco, ellos llegan a percibir la ley de los grandes números al relacionar la caja de pesos, que muestra el espacio muestral del experimento, con la apariencia del gráfico de torta en muchos lanzamientos, tal como se muestra a continuación:

P: En 1200 veces, ¿cuántas veces creen que saldrá cada número?
F: Como son 6 números, en 1200 lanzamientos salen 200 veces cada uno.
P: ¿Por qué dices eso?
L: Porque ahí mismo lo dice (señalando la caja de pesos), *hay 6 y son 1200.*
P: Si lanzamos hasta 1800 veces, ¿cómo creen que va a resultar el gráfico?
F: En 1800, 300 cada uno porque 300x6=1800.
P: Con 6000 lanzamientos ¿cómo quedará el gráfico?
L: Una mínima diferencia, no es que uno diga ¡qué cambio!.

Vemos como Francisco hace predicciones deterministas, olvidando la variabilidad de los resultados, consideración que si tiene presente Laura.

Al analizar la evaluación, la pregunta 7 (Ver Anexo7) orientada específicamente a la ley de los grandes números, mostró que:

Juan Camilo, Daniel y Yeixon distribuyeron los resultados en relación con el número de lanzamientos, considerando así la irregularidad en pocas pruebas y la estabilidad en muchas repeticiones, interpretado como una muestra clara de la concepción del comportamiento aleatorio.

Conclusiones respecto a la experimentación con dados

- Se pudo constatar el mejoramiento de las percepciones respecto a la estabilidad de los resultados a largo plazo, no percibidas al experimentar físicamente.

- Es evidente el reconocimiento por parte de los niños de la impredicibilidad y variabilidad de los resultados, ya que no se atrevían a hacer una estimación de los resultados, sin embargo, este hecho no quiere decir que no posean una intuición del comportamiento aleatorio a largo plazo ya que como se observó antes, son capaces de hacer un análisis cualitativo como lo es la relación espacio muestral- distribución de los resultados para muchas repeticiones del experimento.

En la experimentación con ruletas

Después de jugar El Desafío Parte I (ver Anexo 4), se pudo apreciar de las respuestas dadas a la pregunta g, correspondiente a la ley de los grandes números que:

- Yeixon consideraba que resultaría más veces azul que naranja, luego de hacer una aproximación a partir de los resultados grupales obtenidos (ver Anexo 10), pero sin referencias a la composición de la ruleta.

- Juan Camilo creía posible obtener más veces el color naranja, porque considera poder controlar el resultado. Aún persiste en él la idea de que los resultados de los fenómenos aleatorios son controlables.
- Mayra y Daniel advirtieron que obtendrían más azul, pero no hicieron ninguna distribución de los resultados.

De la actividad 4: El Desafío Parte II (Ver Anexo 5) se encontró que:

- Mayra, Juan Camilo y Yeixon afirmaron que resultaría más veces el color azul que el verde, debido a que durante el juego, cae más veces en azul generalizando los resultados obtenidos de un experimento.

- Daniel hizo las distribuciones de modo que obtiene más verdes que azules y más azules que naranja, pero no los relaciona con el espacio muestral.

Durante la simulación computacional, no se les pidió hacer aproximaciones numéricas de la distribución de los resultados, debido a que para el dispositivo de la ruleta ellos intuyeron la ley de los grandes números cuando lograron inferir que después de muchas repeticiones, el gráfico de torta resultaría igual a la ruleta presentada, logrando percibir así la relación cualitativa entre el espacio muestral y las frecuencias de los resultados a largo plazo.

En el caso de Daniel y Juan Camilo, se les pidió crear una ruleta en la cual, la posibilidad de obtener amarillo fuera mayor que la posibilidad de obtener rojo, y la posibilidad de obtener rojo fuera mayor que la posibilidad de obtener verde, fucsia y morado. Además, que la posibilidad de obtener los tres últimos colores fuera igual.

Daniel, quien de la actividad anterior había abstraído la noción de que *"el gráfico de torta dependía de la elección que se hiciera en la caja de pesos"* decidió ajustarla de modo que se obtuvieran los resultados pedidos, tal como se muestra en la Figura 12

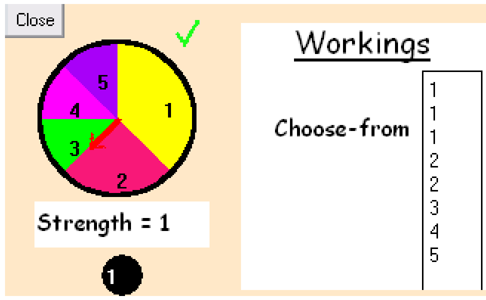


Fig. 12

Después de que el gráfico de torta para 100 pruebas mostrara una aparente igualdad con la ruleta, ellos predijeron que si la ruleta volviera a girar otras 100 veces, no resultaría el mismo gráfico. Entonces, para comprobar su predicción se les pidió realizar el experimento 100 veces, resultando el gráfico diferente a la ruleta, lo cual generó una discusión entre ellos. Sin embargo, lograron acordar que el número de lanzamientos debía ser mayor a 1000 pruebas para que el gráfico y la ruleta quedaran igual.

Finalmente realizaron 1980 lanzamientos (Fig. 13), comprobando la estabilidad de los resultados a largo plazo.

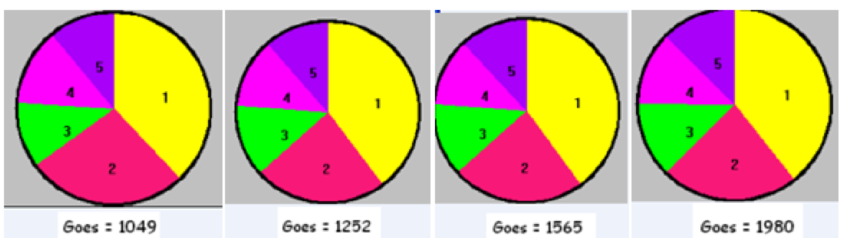


Fig. 13

Cuando se les pidió hacer el juego justo mostraron mayor comprensión del comportamiento aleatorio, ya que procedieron a dibujar un gráfico de torta (Fig. 14), de sectores iguales, aclarando que para obtenerlo debían ajustar la caja de pesos colocando el mismo número de veces cada color y realizar 2000 veces el experimento.

El ejercicio de construir una nueva ruleta fue también realizado por Laura y Francisco, en cuyo caso se les pidió construir una ruleta en la que la posibilidad de obtener amarillo fuera mayor que la posibilidad de obtener rojo, la de obtener rojo mayor que la verde, la de verde mayor que la de morado claro y la morado claro mayor que la de morado oscuro.

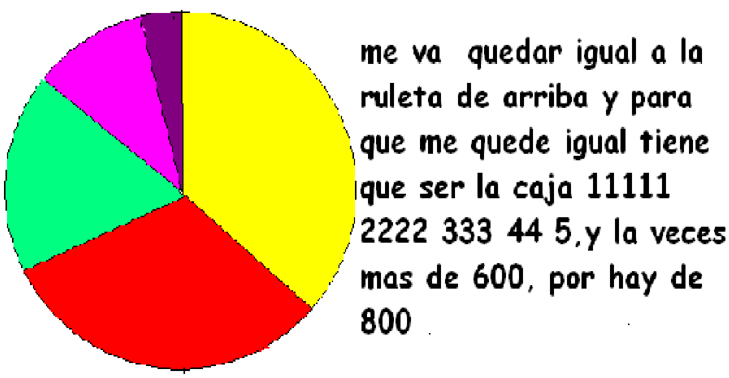


Fig. 15

En la evaluación final se buscaba determinar si los niños serian capaces de trasladar las nociones adquiridas en la etapa experimental, para lo cual se planteó un experimento de urna con un espacio muestral no uniforme (Ver Anexo 7, pregunta 9), donde se les pedía dar el número de veces que saldría cada color, si en una bolsa oscura se introdujeran 2 bolas negras y una roja, realizando un determinado número de extracciones.

A continuación presentamos las respuestas dadas por los estudiantes.

En el caso de Daniel y Juan Camilo, aún cuando la evaluación fue individual, llegaron a considerar la misma distribución de los resultados, la cual coincidió con el espacio muestral para las primeras 300 extracciones. Al considerar 600 extracciones, respondieron colocando mayor número de veces al color que tiene dos bolas en la urna, teniendo en cuenta la relación cualitativa del espacio muestral (mayor cantidad de bolas negras que rojas) pero no la proporción entre las bolas de cada color. A continuación se presentan los argumentos dadas por estos niños en la entrevista:

P: ¿Por qué la diferencia en los resultados para las 600 extracciones?
D: Yo suponía que las bolas negras eran caras y que a mí me salían más caras.

P: Juan Camilo, ¿cómo podrías saber si en verdad te dan esos resultados que escribiste?
JC: Jugando
P: ¿Qué harías para no tener que sacar 600 bolas de la urna, por ejemplo con el Chance Maker?
JC: Con la ruleta, colocando más negras que rojas.
P: ¿Cómo escribirías la caja de pesos?
JC: [2, 2, 1]. Por ejemplo, los 2s son las negras y el 1 es la roja.

Se puede percibir la manera en que los estudiantes asocian adecuadamente los experimentos antes realizados con el modelo de urna recién presentado, incluso cómo Daniel transforma el experimento de la moneda en otro no equiprobable para representar la nueva situación planteada.

Mayra, presentó el sesgo de equiprobabilidad, al hacer la distribución de frecuencias colocando igual número de resultados a cada color.

Durante todo el proceso realizado por Mayra, se evidenció que cuando los resultados son equiprobables, como en el caso de la moneda, no los considera como tales dados los resultados de la experimentación física, sin embargo, para el juego de la ruleta o el experimento de urna, afirma que todos los eventos son igualmente posibles.

Conclusiones a partir de la experimentación con ruletas

- Se pudo observar un avance significativo de las intuiciones acerca de la experimentación con ruletas y por tanto en la concepción de la ley de los grades números, desde sus respuestas en el diagnóstico hasta la evaluación.
- La experiencia física permitió que la mayoría de los niños concibieran la no equiprobabilidad, pero la imposibilidad de hacer bastantes pruebas por falta de tiempo, no permite que los estudiantes adviertan alguna relación con los posibles resultados, significado que adquieren al interactuar con el simulador computacional, en donde infieren la convergencia de los resultados de acuerdo con la distribución del espacio muestral al realizar muchas repeticiones.

5. CONCLUSIONES

Este capítulo muestra una síntesis de los resultados obtenidos en la investigación cuyo objetivo era identificar las abstracciones situadas que surgen en un ambiente experimental físico y computacional relacionadas con la comprensión de la ley de los grandes números en niños de quinto grado. Las conclusiones se presentan a través de las tres categorías propuestas en nuestra metodología.

CONFRONTACIÓN Y MODIFICACIÓN DE SIGNIFICADOS LOCALES

A través de esta categoría se analizaron las modificaciones de las concepciones presentes en los niños:

- Antes de la etapa experimental, era común entre los niños conjeturar causas deterministas que les permitieran comprender el comportamiento de fenómenos aleatorios como el lanzamiento de la moneda, el dado o hacer girar la ruleta; sin embargo, la experiencia física y computacional, condujo a la mayoría a rechazar dichas explicaciones permitiendo el reconocimiento de la aleatoriedad a partir de cuatro significado locales: la impredicibilidad, la incontrolabilidad, la irregularidad y la imparcialidad.

- A menudo, estos significados fueron asociados unos con otros, para ser explicados entre sí, sin encontrar más causa fuera de ellos que la suerte o el azar para ser justificados, es así, como la incontrolabilidad conduce a la imprevisión y por tanto a la irregularidad.

- Respecto a la incontrolabilidad, la mayoría de los niños lograron transformar esta intuición que creían tener sobre los experimentos realizados, experiencia que resulta valiosa en la medida que sí creen poder controlar el resultado con sus propias acciones, después no consideraran el experimento como aleatorio. Sin embargo, a pesar del intenso trabajo computacional Mayra siguió sosteniendo que ella sí era capaz de controlar el resultado de la moneda, bastaba colocar la moneda sobre el dorso de la mano de tal forma que la cara visible fuese la que no se quería obtener, luego se lanzaba la moneda y listo se obtenía el resultado deseado. Esta idea se afirmó en ella dado que en la mayoría de las veces que lanzó la moneda de esta forma obtuvo el resultado deseado. Esta intuición persistió y no fue modificada aun después de interactuar con el simulador computacional pues en la evaluación, vuelve a expresarla. Situación que permite ver el efecto de la experimentación física, pues si bien esta permite confrontar las intuiciones con la realidad, también puede conllevar a afianzar concepciones equívocas que después son muy difíciles de cambiar.

- Respecto a la irregularidad, el sesgo de los valores recientes expresados en el diagnóstico, fue modificado por ejemplo al reconocer que cualquier lado de la moneda puede resultar, sin tener en cuenta los resultados obtenidos anteriormente, no encontrando un patrón evidente en los resultados.

- Respecto a la imparcialidad, este significado fue concebido después de la simulación computacional, donde lograron advertir la igualdad de los resultados a largo plazo, lo que demuestra la importancia de la interacción con el micromundo Chance Maker

- Los niños que únicamente participaron en la simulación computacional, mostraron comprender más fácilmente los significados descritos, ya que si bien se acercaron inicialmente a los experimentos presentando intuiciones inapropiadas, van siendo modificadas sin mayor limitación al interactuar con el micromundo. Esto se presentó debido quizá, a la ausencia de antecedentes previos o resultados anteriores que actúen como un referente del comportamiento irregular e inestable de los experimentos aleatorios analizados. No obstante, reconocemos la riqueza de la experiencia física a través de la cual el niño puede adquirir nociones probabilísticas de la manera más natural: actuando sobre ellas.

SURGIMIENTO DE NUEVOS SIGNIFICADOS EN FORMA DE ABSTRACCIONES SITUADAS

En esta categoría se identificaron las conexiones entre significados expresadas en forma de abstracciones situadas:

- Reconocemos el valioso aporte de las herramientas del software que permite a los niños ser partícipes de todo el proceso de simulación, desde la construcción de nuevos significados hasta la comprensión del comportamiento aleatorio, al permitir la repetición de un experimento un gran número de veces y observar el espacio muestral y su efecto en la distribución de los resultados obtenidos. Adicionalmente, la disposición de diversas representaciones como el gráfico de torta ó la apariencia física de cada dispositivo, permiten visualizar mejor los resultados obtenidos generando una comprensión totalizadora de la experiencia que se lleva a cabo.

- Al Implementar conjuntamente la experimentación física y computacional, se permitió a los niños enriquecer sus percepciones y conectar através de fases los significados locales con las herramientas computacionales, construyendo nuevos significados en forma de tres abstracciones situadas: "*A medida que aumenta el número de veces, la diferencia entre los sectores del gráfico disminuye y resultan iguales" , "Si los sectores del grafico de torta son iguales entonces todos tiene la misma posibilidad"* y *"La caja de pesos muestra cómo quedará el gráfico de torta".*

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS GLOBALES

El aumentar la interacción con las herramientas computacionales permitió la coordinación de las abstracciones situadas antes mencionadas, que se unieron entre sí y formaron el siguiente significado global: *"la apariencia del gráfico de* *torta depende del número de veces y de la composición de la caja de pesos";* construyendo así una intuición del comportamiento aleatorio a largo plazo.

Se evidenció, además, la manera en la que algunos niños ponen a prueba las abstracciones situadas recientemente formadas dentro del micromundo y logran trasladarlas a otras situaciones como el experimento con urnas, para explicar el comportamiento aleatorio.

Una vez validados los alcances de la experimentación física y computacional nos surge una inquietud, ¿qué tan significativa puede resultar la simulación computacional para los niños que no realizaron la experiencia física?, es decir, si los estudiantes que solo realizaron la simulación computacional logran trasladar las abstracciones situadas adquiridas en el micromundo al realizar la experiencia física.

ANEXOS

ANEXO 1

¿QUÉ TANTO SABES?

1. Imagina que eres el capitán de un equipo de fútbol y que hoy tienes la final. Para decidir el equipo que inicie el juego, deberás escoger uno de los lados de la moneda, que después será lanzada al aire por el árbitro del partido. ¿Qué lado de la moneda escogerías? ¿Por qué?

____

____

2. ¿Si lanzas un dado qué número crees que saldrá?, ¿por qué?

____

____

3. ¿Existe alguna forma de lanzar el dado para obtener el número que tú deseas?

____

____

4. Carlos uno de tus compañeros del salón dice que le da 200 pesos a quien le diga cómo debe lanzar la moneda para obtener sello. ¿tú qué le dirías?

____

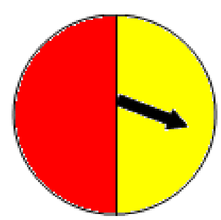
____

5. Camila ha tirado una moneda al aire tres veces y obtuvo 3 caras seguidas. Si vuelve a tirar la moneda, ¿saldrá otra vez cara?
Si ó No ¿Por qué?

____

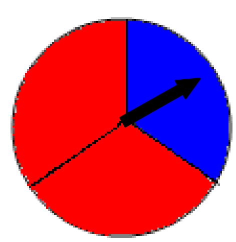
____

6. Imagina que haces girar 10 veces una ruleta compuesta por dos sectores iguales, uno amarillo y el otro rojo como lo indica el dibujo. Escribe los diez posibles resultados que obtendrías. Recuerda que el color que la flecha indica será el resultado



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

7. Se tiene una ruleta que está dividida en tres partes iguales como se muestra en la figura. Dos de sus divisiones son de



color rojo, y una de color azul. Para jugar debes escoger un compañero del salón quien será tu contrincante, cada uno debe escoger uno de estos dos colores, siendo tú el primero en elegir y luego debes hacer girar la ruleta. Ganas si cae el color que escogiste.

a) ¿Cuál color escogerías? ¿Por qué?

____

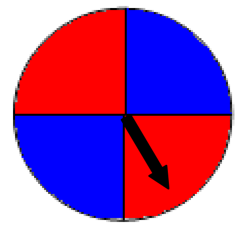
____

b) ¿E l juego es justo? Si ó No ¿Por qué?

____

____

8. Si juegas con tu compañero pero con una nueva ruleta que este dividida en cuatro partes iguales, solo que ahora dos de sus divisiones son de color rojo y dos de color azul.



a) ¿Qué color escogerías?

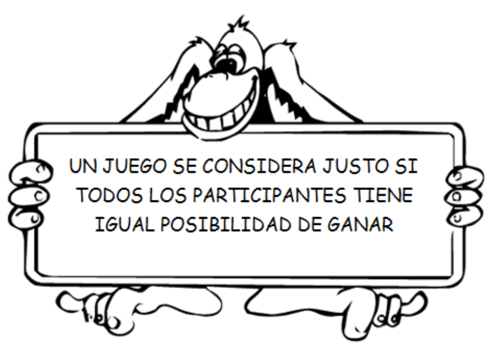
____

b) ¿El juego es justo? ¿Por qué?

____

____

9. Si se hace girar 200 veces una ruleta que está dividida en dos partes iguales, una de color negro y la otra de color blanco. ¿Cuántas veces crees que saldrá cada color?



ANEXO 2

¿Cara o Sello?

MATERIAL:

- Tablero de juego (Ver Anexo 12)
- Fichas (en forma de moneda, una representa la cara y la otra el sello)
- Moneda

COMO JUGAR

Solo pueden participar dos personas, cada uno debe escoger una ficha y ubicarla en la casilla de SALIDA. Después se lanza una moneda 20 veces cada jugador teniendo en cuenta que: si cae CARA se avanza una casilla hacia la izquierda y si cae SELLO se avanza una casilla hacia la derecha. Se realizarán dos partidas del juego y el ganador de cada una será quien haya avanzado más casillas en el total de lanzamientos.

➢ Responde las siguientes preguntas antes de jugar

a)¿Cuál lado de la moneda escogiste? ¿Por qué?

____

____

b) ¿Crees que alguno de los dos tiene mayor posibilidad de ganar? ¿Por qué?

____

____

c) Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos en la primera partida

# de lanzamientos	#de caras	#de sellos

Realicemos otra partida del juego, pero ahora escoge primero el lado de la moneda, quien antes no lo hizo.

d) ¿Cuál lado de la moneda escogerás ahora? ¿Por qué?

____

____

e) Compara los resultados obtenidos en las dos partidas

# de partida	# caras obtenidas	# sellos obtenidos
1		
2		
Total		

f)¿Qué puedes concluir de los resultados obtenidos?

g)En la siguiente tabla escribe los resultados obtenidos por todos tus compañeros y responde las siguientes preguntas:

GRUPO	Número de veces que ha salido cara	Número de veces que ha salido sello
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
Suma todos los lanzamientos:	Suma las veces que salió cara:	Suma las veces que salió sello:

h) ¿Qué puedes concluir del juego al reunir los datos de todos tus compañeros?

i) Imagina que lanzas 1000 veces una moneda, ¿podrías predecir los resultados? ¿Por qué?

- Considerando los resultados que obtuviste al jugar con la moneda e imaginando que el juego se realizará de nuevo, responde las siguientes preguntas:

10. Si volvieras a jugar, qué lado de la moneda escogerías? ¿Por qué?

11. Crees que existe alguna manera de lanzar la moneda para obtener el lado de la moneda escogido? ¿Por qué?

12. Puedes predecir el orden en el que saldrán los resultados al tirar la moneda? ¿Por qué?

____

____

13. Piensas después de jugar, que alguno de los dos tiene mayor posibilidad de ganar? ¿Por qué?

____

____

ANEXO 3

El siguiente es un juego en el debes utilizar un dado y es muy parecido a una carrera de atletismo, solo que la velocidad con la que avances no depende de tu estado físico sino del dado. Lee con atención las instrucciones:

Preparados, listos, ¡ya!

Vamos a realizar una carrera con 6 participantes numerados del 1 al 6. Cada uno debe ubicarse en la casilla SALIDA. Para jugar se l[redacted]dado y avanza una casilla la persona que tenga el numero indicado en el dado, sin importar quien lo haya lanzado. Gana quien primero llegue a la meta. Justo en ese momento se para la carrera: es decir, no se espera a que todos los jugadores alcancen la meta. Al final se anota el número de casillas que avanzó cada uno en el tablero.

- Responde las siguientes preguntas antes de jugar:

a) ¿Qué número escogiste? ¿Por qué?

____

____

b) Si lanzas un dado, ¿sabes qué número caerá? Si____ No____ ¿Por qué?

____

____

c) Imagina que te corresponde el turno de lanzar el dado y estas a una casilla de llegar a la meta, igual que uno de tus compañeros. Para ganar debes obtener el número que escogiste ¿Qué harías para obtenerlo?

d) Al tirar un dado 10 veces nos han salido los siguientes valores: 5, 2, 1, 1, 6, 4, 3, 5, 5 y 4. Si lo lanzamos otra vez, ¿qué número crees saldrá? ¿Por qué?

e) ¿Consideras que conseguir un seis, por ejemplo, es más difícil, más fácil o igualmente posible que obtener los demás números?

Ahora empieza a jugar con tus compañeros la primera partida y escribe los resultados que vas obteniendo en los primeros nueve lanzamientos

RESULTADOS
?

f) ¿Qué número crees que se obtendrá en el lanzamiento número diez? ¿Por qué?

- Si ya terminaste de jugar la primera partida, responde:

g) ¿Cuántas veces se lanzó el dado para que por lo menos uno de los jugadores llegara a la meta?

h) Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos de la primera y segunda partida:

	# de veces que sale 1	# de veces que sale 2	# de veces que sale 3	# de veces que sale 4	# de veces que sale 5	# de veces que sale 6	Total de lanzamientos
Partida 1							
Partida 2							

i) Después de jugar se escogerán los ganadores de cada grupo para la final. Si tú fueras uno de esos ganadores ¿cuál de los números escogerías para ganar? ¿Por qué?
____
____

j) Completa la siguiente tabla con los resultados de los grupos que jugaron:

GRUPO	Número de veces que sale 1	Número de veces que sale 2	Número de veces que sale 3	Número de veces que sale 4	Número de veces que sale 5	Número de veces que sale 6	Número de lanzamientos
1							
1							
2							
2							
3							
3							
TOTAL							

k) ¿Qué puedes concluir del juego al reunir los datos obtenidos de todos los grupos?
____
____

l) Después de haber jugado, ¿Crees que puedes controlar el resultado al lanzar un dado? SI___ NO____ ¿Por qué?
____
____

m) ¿Crees que algún número es más difícil de obtener que los otros? SI ___ NO___ ¿Por qué

n) Imagina que lanzas 2400 veces un dado ¿Cuántas veces crees que saldrá cada uno de los números? ¿Por qué?

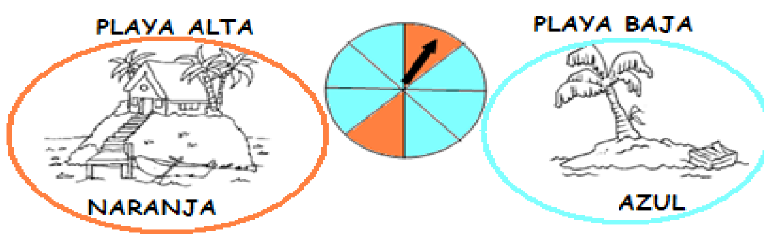
____

ANEXO 4

Actividad 3

EL DESAFÍO

Parte I



1. Supongamos que se hacen convocatorias para participar en el DESAFÍO, pero esta vez los participantes serán niños entre los 9-11 años por lo que puedes inscribirte y ser seleccionado para participar. En esta versión, el concurso consiste en pruebas que no requieren esfuerzo físico, para que tanto niños como niñas puedan superarlas y no creamos que sean solo para los más fuertes. Así por ejemplo, en la prueba territorial, en la que se define cuál isla habitar, cada jugador debe hacer girar una ruleta como la que se muestra en la figura, dividida en ocho secciones: dos naranjas y seis azules, que representan cada isla. De este modo, si la flecha indica el color naranja, irás a Playa Alta y disfrutarás de todas las comodidades: una cama formidable y toda la comida que desees; en cambio si marca azul, habitarás Playa Baja y no tendrás más que una isla llena de selva, con poca comida y agua.

De esta manera, vas a jugar a la ruleta con uno de tus compañeros 40 veces y al final quien haya ido más veces a Playa Alta, recibirá un premio y su compañero quedará con las manos vacías.

Pero antes de jugar responde las siguientes preguntas individualmente:

a) Si haces girar la ruleta una vez, qué color crees resultará? ¿Por qué?

____

____

b) Por las comodidades que ofrece Playa Alta, seguramente prefieras ir allá, pero para ello debes obtener el color naranja, existe alguna forma de girar la ruleta para obtener? SI___ NO___ ¿Por qué?

____

____

c) ¿Cómo está planteado el juego crees que irás más veces, a Playa Alta o a Playa Baja? ¿Por qué?

____

____

d) ¿Crees que la posibilidad de ir a Playa Alta ó a Playa Baja es la misma? SI___ NO___. Explica tu respuesta

____

____

Ahora, juega con un compañero haciendo girar la ruleta 20 veces cada uno y al final, cuenta las veces que fuiste a Playa Alta y a Playa Baja.

Para registrar el número de veces que salió cada color, completa la siguiente tabla marcando cada casilla con **A si es azul, N si es naranja.**

NOMBRE DEL PRIMER JUGADOR __________________

Número de veces que ha salido naranja_______________

Número de veces que ha salido azul__________________

¿Qué playa te corresponde?_______________________

NOMBRE DEL SEGUNDO JUGADOR __________________

Número de veces que ha salido naranja_______________

Número de veces que ha salido azul__________________

¿Qué playa te corresponde?_______________________

e) Observas algún orden en las respuestas obtenidas? SI____ NO____

f) De acuerdo con los resultados conseguidos, ¿crees que la posibilidad de ir a Playa Alta es la misma que la de ir a Playa Baja? SI___ NO___ ¿Por qué?

Para comparar tus resultados con los de tus compañeros, completa la siguiente tabla:

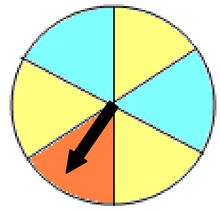
Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Naranja									
Azul									

g) Si se hicieran 240 giros a la ruleta, ¿aproximadamente, cuántas veces crees resultaría naranja y cuantas azul? ¿Por qué?
Naranja=_____ Azul=_____

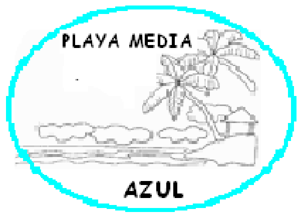
ANEXO 5

Actividad 4

EL DESAFÍO



Parte II



2. Imaginemos ahora que el concurso ha decidido hacer un cambio en el DESAFIO; en adelante los participantes podrán habitar tres playas: Alta, Media y Baja; por lo tanto elaboran una ruleta dividida en seis partes: 3 verdes, 2 azules y 1 naranja. Así, los niños que al hacer girar la ruleta, la flecha indique naranja, irán a Playa Alta, para los que la flecha muestre azul, habitarán Playa Media y a los que señale verde, ocuparán Playa Baja.

a)Si haces girar la ruleta una vez, qué color crees resultará? ¿Por qué?

____

____

b) Para asegurarte de ir a la playa que prefieres, debes obtener el color que la representa; ¿existe alguna forma de girar la ruleta para conseguirlo? SI___ NO___ ¿Por qué?

____

____

c) ¿Cómo está planteado el juego crees que irás más veces, a Playa Alta, Playa Media ó Playa Baja? ¿Por qué?

____

d) ¿Crees que la posibilidad de ir a cualquiera de las tres playas, es la misma? SI___ NO___. Explica tu respuesta

____

Ahora, forma con tus compañeros grupos de tres, haciendo girar la ruleta 20 veces cada uno, contando cuantas veces fuiste a Playa Alta, cuantas a Playa Media y cuantas a Playa Baja. Al final, los premios se repartirán para quienes hayan ido más veces a cada isla y dependerán según el lugar que les corresponda.

Para registrar el número de veces que salió cada color, completa la siguiente tabla marcando cada casilla con **A si es azul, N si es naranja, V si es verde**

NOMBRE DEL PRIMER JUGADOR ________________

Número de veces que ha salido naranja_____________

Número de veces que ha salido azul________________

Número de veces que ha salido verde________________

¿Qué playa te corresponde?______________________

NOMBRE DEL SEGUNDO JUGADOR ________________

Número de veces que ha salido naranja_____________

Número de veces que ha salido azul________________

Número de veces que ha salido verde________________

¿Qué playa te corresponde?______________________

NOMBRE DEL TERCER JUGADOR ________________

Número de veces que ha salido naranja_____________

Número de veces que ha salido azul________________

Número de veces que ha salido verde________________

¿Qué playa te corresponde?______________________

Para comparar tus resultados con los de tus compañeros, completa la siguiente tabla:

Grupo	1	2	3	4	5	6	Total
Naranja							
Azul							
Verde							

e) ¿En qué colores Cómo crees que caerá la ruleta si se gira otras 10 veces?

f) De acuerdo con los resultados conseguidos, ¿crees que la posibilidad de ir a Playa Alta, Media ó Baja es la misma? SI___ NO___ ¿Por qué?

g) Si se hicieran 600 giros a la ruleta, ¿aproximadamente, cuántas veces crees resultaría naranja, azul y verde? ¿Por qué?

Naranja=_____ Azul=______ Verde=______

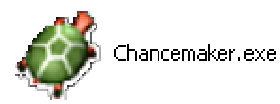
ANEXO 6

Conozcamos el Chance Maker

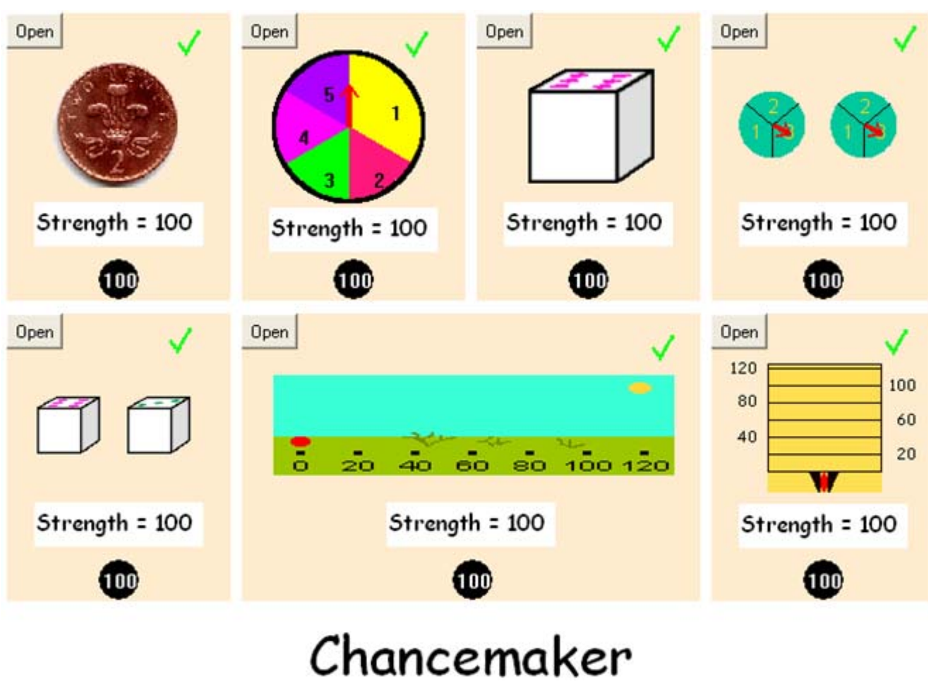
Esta guía nos enseñará cómo usar el programa y nos mostrará todas las herramientas que el sistema brinda.

1. ¿Cómo se abre el programa?

Para cargar el programa hacemos doble clic sobre el icono en forma de tortuga que aparece en el escritorio



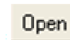
Después que la descarga se completa, veremos una pantalla como esta:



En donde encontrarás siete dispositivos que podrás explorar:

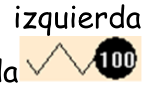
Una moneda: Para experimentar con una moneda, donde **H** es cara y **T** es sello.
Un dado: Para experimentar con un dado de seis caras (1, 2, 3, 4, 5,6).
Una ruleta: Para simular el giro de una ruleta.
Dos ruletas: para hacer girar dos ruletas a la vez

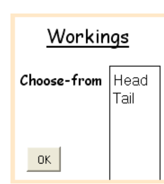
Dos dados: Para simular el lanzamiento de dos dados
Frisbee: Para simular el lanzamiento horizontal de un disco
Roll-a-penny: Para simular el lanzamiento vertical de una pelota.

Para activar el dispositivo que desees explorar, debes hacer clic en  y se desplegará la correspondiente pantalla del dispositivo que escogiste. Cuando desees abandonar el dispositivo y volver a la pantalla principal, seleccionas el botón .

2.¿Cómo funciona el programa ?

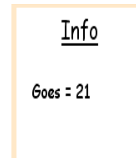
Cada dispositivo contiene herramientas que podemos utilizar con tan solo mover el mouse; así por ejemplo:

- **Para animar el lanzamiento de los objetos** (moneda, dados, ruletas…), hacemos clic en ; si en cambio desea cancelar la animación, de nuevo selecciona este símbolo, con lo que aparecerá este otro .
- **Para cambiar la fuerza del tiro**, movemos el cursor del mouse sobre el símbolo , y lo arrastramos hacia la izquierda o derecha hasta que muestre la fuerza deseada , después lo dejamos ir, y un tiro será realizado.
- **Caja de peso o de funcionamiento:** muestra los posibles resultados que se pueden obtener al realizar el experimento y permite simular una moneda, dado ó ruleta cargado. Esta puede ser modificada, ubicándonos con el mouse sobre el cuadro y editando los sucesos deseados. Para confirmar nuestra opción, presionamos el botón OK.

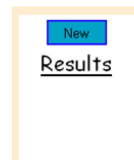


- **Número de pruebas:** Para generar rápidamente gran cantidad de resultados, usamos el botón . En un solo clic podemos generar 10 resultados; si queremos detener los resultados que son generados, seleccionamos otra vez este ícono. Para cambiar el número de resultados producidos cada vez, hacemos clic sobre el número 10 y escribimos dentro el valor deseado.

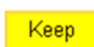
- **Total de pruebas:** Es una ventana que controla el conteo del total de pruebas realizadas en el experimento. Por ejemplo, si ejecutamos primero 11pruebas, luego 10 pruebas, entonces en esta barra se muestra un total de 21 pruebas realizadas.

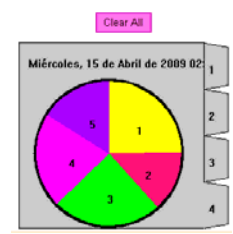


- **Ventana de resultados:** aquí se muestran los resultados de la simulación tal como van apareciendo al realizar cada lanzamiento. Para generar un nuevo conjunto de datos, hacemos clic en ; Esto eliminará todos los resultados y el gráfico actual (si se muestra uno).

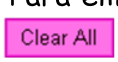


- **Gráfico de torta**: Al hacer clic en el botón , se produce un gráfico circular de los resultados recién obtenidos. Este gráfico aparecerá con la hora actual y la fecha, lo cual es útil si deseamos comparar múltiples gráficos.

- **Guardar:** Seleccionando el ícono  podemos guardar interesantes gráficos. El gráfico se almacena entonces en la última ventana de la pantalla de cada dispositivo, donde



  Cada gráfico es numerado por aparte y podemos retomarlos con tan solo hacer clic sobre la lengüeta numerada.

  Para eliminar todos los gráficos recolectados, hacemos clic en 

3.¿Cómo simular un experimento?

- Para realizar lanzamientos o pruebas de cada dispositivo, hacemos clic en el icono "Open", para abrir la ventana correspondiente al dispositivo elegido.

- Para cambiar la velocidad con que se lanzan los objetos en cada dispositivo, vamos al icono "Fuerza" y moviendo el mouse hacia los lados, seleccionamos la velocidad deseada.
- Empezamos generando 10 pruebas una por una. Para hacer 10 pruebas adicionales solo deben hacer clic en este número, modificamos el valor de "times" (veces) y hacemos clic en "Click Gadget", para hacer correr el programa. De tal forma, los resultados se suman a los obtenidos en las 10 pruebas anteriores.

- Para completar 100 pruebas en la misma simulación solo deben tener en cuenta el número de "goes" (total de pruebas) que ya se han realizado y escribir en el cuadro "times" (veces) el número que hace falta para completar.

- Para graficar los datos en un diagrama de torta, hacemos clic en el icono respectivo y observemos como cambia la forma del gráfico a medida que aumenta el número de ensayos.

- Guardamos los resultados obtenidos hasta ahora, para generar otros nuevos y continuamos de esta manera cuantas veces se requieran

- Para usar el historial de resultados vamos a la última ventana de la pantalla y haga clic sobre el número del resultado que deseamos revisar que aparecen en el orden en que fueron generados.

- Para borrar los resultados y empezar de nuevo el experimento, seleccionamos el botón "New", asegurándonos que el contador del total de pruebas quede en O.

- Para cambiar de experimento. Vamos al icono "Closet" y hacemos clic sobre él, desplegando la pantalla principal del programa, de donde podremos escoger el nuevo experimento que deseamos simular.

ANEXO 7

¿QUÉ TANTO APRENDISTE?

1. Imagina que lanzas una moneda al aire ¿Qué resultado obtendrás?

a) cara

b) sello

c) cualquiera de los dos lados de la moneda

¿Por qué?

____

____

2. Si al lanzar una moneda se obtuvieron los siguientes resultados: S-S-C-C-S-S-S-S, al lanzar una vez más la moneda el resultado será:

a) Sello

b) Cara

c) cualquiera de los dos

¿Por qué?

____

____

3. Monchi, tu compañero de salón, le dará 1000 pesos a quien le diga cómo debe lanzar la moneda para obtener sello, ¿tú que le dirías?

____

____

¿Consideras que el aumentar o disminuir la fuerza con la que lanzas la moneda ayuda a obtener el resultado que deseas?

Si___ No___

¿Por qué?

____

____

4. Imagina que lanzas una moneda el número de veces que te indican en la tabla, aproximadamente ¿cuántas veces obtendrás cara y cuantas veces sello?

Número de lanzamientos	**Cara**	**Sello**
100		
500		
1000		
5000		

5. Al lanzar un dado, ¿cuál número tiene mayor posibilidad de salir?

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5 f) 6

h) Todos tienen la misma posibilidad de salir

6. Al lanzar un dado, ¿puedes predecir qué número vas a obtener?

Si___ No___

¿Por qué?

____

____

6. Imagina que lanzas un dado el número de veces que te indican en la tabla, aproximadamente ¿cuántas veces obtendrás cada uno de los números que hacen parte de las caras del dado?

Número de lanzamientos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
60						
600						
1200						
2400						

8. En una bolsa oscura se depositan 3 bolas, 2 son negras y 1 es roja; supongamos que vas a jugar con un compañero y cada uno debe escoger un color, luego deben sacar una bola de la urna. Ganas si sacas el color que escogiste.

e) ¿Cuál color escogerías? ¿Por qué?

____

____

f) ¿Ambos tienen la misma posibilidad de ganar?

____

____

g) Si en la urna se depositara otra bola roja ¿Cuál color escogerías?

____

____

h) ¿El juego es justo?

____

____

9. Si en una bolsa oscura se introducen 2 bolas negras y una roja, al hacer un determinado número de extracciones, aproximadamente ¿Cuántas veces saldrá cada color? Completa la siguiente tabla:

Número de extracciones	**Negro**	**Rojo**
30		
300		
600		

ANEXO 8

Resultados grupales de la experiencia física con monedas

Grupo	Número de caras	Número de sellos	Número de lanzamientos
1	37	44	81
2	47	41	88
3	46	43	89
4	48	37	85
5	34	40	74
6	48	46	94
TOTAL	260	251	511

ANEXO 9

Datos obtenidos después de la experimentación con dados

GRUPO	1	2	3	4	5	6	Número de lanzamientos
1	17	12	12	20	18	21	100
1	12	8	6	9	21	12	68
1	14	11	16	17	21	15	94
2	17	17	14	15	17	21	101
2	15	21	17	18	19	15	105
2	14	19	16	17	15	20	101
3	18	10	16	21	13	13	91
3	15	16	15	12	21	15	94
TOTAL	122	114	112	129	145	132	754

ANEXO 10

Resultados grupales de la experiencia física con ruleta

ACTIVIDAD: El DESAFIO PARTE I

Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Naranja	9	9	11	10	18	15	9	18	99
Azul	31	31	29	30	22	25	31	57	256
Total	40	40	40	40	40	40	40	75	355

ANEXO 11

Resultados grupales de la experiencia física con ruleta

ACTIVIDAD: El DESAFIO Parte II

Grupo	1	2	3	4	5	Total
Naranja	17	14	11	13	16	71
Azul	30	18	20	19	44	131
Verde	32	27	29	22	60	170
Total	79	59	60	54	120	372

ANEXO 12

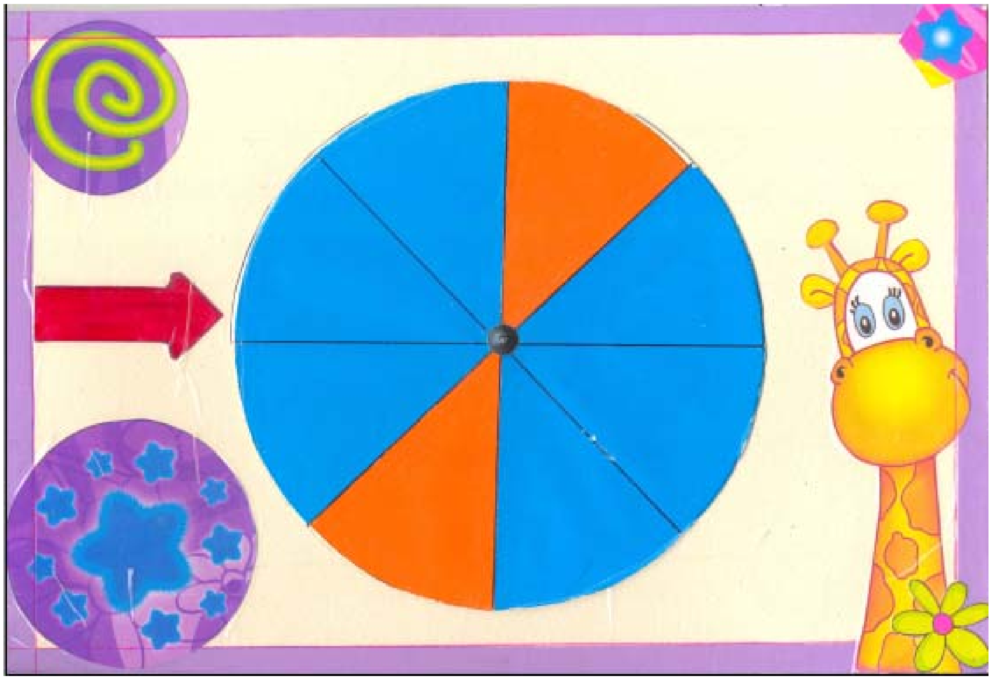
Tablero de mesa para la experimentación con monedas

Anexo 13

TABLERO DE JUEGO PARA LA EXPERIMENTACIÓN CON DADOS

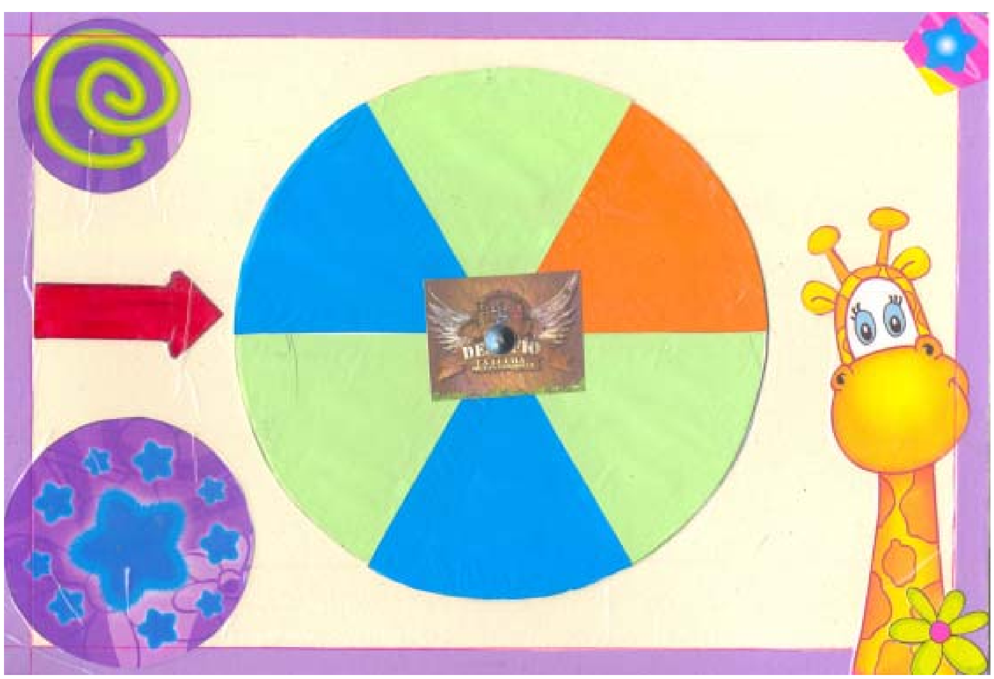
ANEXO 14

TABLERO DE JUEGO PARA LA ACTIVIDAD 3: EL DESAFÍO Parte I



ANEXO 15

TABLERO DE MESAPARA LA ACTIVIDAD 4: EL DESAFÍO Parte II



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Collis, K.F., & Biggs, J.B. (1991). Multimodal learning and the Qualiti of Intelligent Behavior. En H.A.H. Rowe (ed) Intelligence Reconceptualization and Measurement(pp.57-75). New Jersey.

- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

- Noss, R., Hoyles, C., (1996). *Windows on Mathematical Meaning*. Kluwer Academic Publishers.

- Pratt, D., (1998). The Co-ordination of Meanings for Randomness. *For the Learning of Mathematics* 18 (3), 2-11.

- Langrall, C., Mooney, E., (2005). Characteristics of Elementary School Student's Probabilistic Reasoning. En Jones, G. A. (editor), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning,* p. 95-119. Kluwer Academic Publishers.

- Reátiga, A. (2004). Confrontación entre realidad y modelo teórico: una propuesta para desarrollar la intuición probabilística en niños de sexto grado. Trabajo de grado no publicado en la Especialización en Educación Matemática, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

- Jaimes, E., Martinez, J. (2007). Probability Explorer: un socio cognitivo en la construcción del significado de la ley de los grandes números con estudiantes de octavo grado en el Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional. Trabajo de grado no publicado en la Especialización en Educación Matemática, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

- Villamizar, V. (2008). Concepciones acerca de la probabilidad presentes en alumnos de octavo grado del colegio Luz de la Esperanza de Berlín, al ser sometidos a una enseñanza basada en la experimentación física y la simulación computacional. Trabajo de grado no publicado Licenciatura

en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.