

Desarrollo del Pensamiento Espacial en estudiantes de tercer grado: un experimento de enseñanza centrado en las Habilidades de Visualización con el uso del Cubo soma y GeoGebra

Valery Stefany Barajas Soto y Clarysse Alejandra Jiménez Téllez

Trabajo de Grado para Optar el Título de Licenciado en Educación Básica Primaria

Director

Juddy Amparo Valderrama Moreno

Doctora en Ciencias de la Educación

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias Humanas

Escuela de Educación

Licenciatura en Educación Básica Primaria

Bucaramanga

2026

Dedico esta tesis a mi familia, madre, padre, hermana, hermano y sobrina, quienes han sido el apoyo incondicional en cada paso de este camino y lo que falta todavía por recorrer. Por ser ejemplo de resiliencia, amor y confianza.

A mis mascotas, Princesa y Frida que desde su amor incondicional y su presencia auténtica siempre me han regalados momentos felices y de ternura.

A mi mejor amiga Darsy, por ser hogar, cómplice, presencia, sabiduría, amor y risas.

A la selección de fútbol femenino UIS, compañeras y amigas que estuvieron presentes por mi paso en esta etapa, por su entrega incondicional y esfuerzo compartido. Gracias por contribuir a mi formación integral como estudiante y persona, por enseñarme el valor de la resiliencia, el aprendizaje de la derrota y el sabor de la victoria.

Valery.

Dedico esta tesis primero a Dios quien fue y ha sido mi sostén en momentos de incertidumbre y angustia, quien me ha dado sabiduría y fortaleza para cumplir este sueño.

A mis padres y hermanita, quienes cumplieron un papel crucial en este proceso. Por ser mi fuente de inspiración y apoyo incondicional, por ser ejemplo de resiliencia, paciencia y humildad. Al amor quien ha sostenido mi mano en momentos difíciles por ser mi cómplice y

amigo.

Clarysse.

Agradecimientos

A Dios por brindarnos su guía y sabiduría. Por darnos la fortaleza y esperanza en momentos inciertos y de cansancio. Por su compañía silenciosa que nos permitió finalizar esta etapa fundamental en nuestras vidas.

A la Universidad Industrial de Santander por brindarnos las herramientas y espacios necesarios para culminar la carrera de Licenciada en Educación Básica Primaria.

Al cuerpo docente de la Escuela de Educación por las oportunidades de aprendizaje, su guía constante, observaciones y paciencia en cada etapa de nuestro proceso como aporte a nuestro éxito académico y profesional.

Nuestro más sincero agradecimiento a la Dra. Juddy Amparo Valderrama Moreno por su constante acompañamiento, confianza y guía en cada etapa de nuestra formación académica.

Al Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana, su cuerpo docente y niños y niñas de tercero de primaria por permitirnos el espacio pedagógico necesario para culminar con éxito este trabajo investigativo.

Finalmente, agradecemos a todas las personas que de manera directa o indirecta aportaron a nuestra formación integral como profesionales. Este logro no es solo de nosotras sino también de aquellos que creen en la educación como un poder de transformación y crecimiento personal.

Valery y Clarysse.

Tabla de Contenido

		Pág.
Introducción		14
1	Planteamiento y Formulación del Problema	15
	1.1 Análisis y Formulación del Problema.....	15
	1.2 Justificación	23
	1.3 Objetivos.....	27
	1.3.1 Objetivo General.....	27
	1.3.2 Objetivos Específicos.....	27
	1.4 Pregunta de Investigación.....	27
2	Aproximación Teórica	28
	2.1 Antecedentes de Investigación.....	28
	2.1.1 Internacionales	29
	2.1.2 Nacionales.....	33
	2.1.3 Locales	38
	2.2 Marco Teórico.....	43
	2.2.1 Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos	43
	2.2.2 Visualización y Razonamiento Espacial.....	47
	2.2.3 Habilidades de Visualización.....	56
	2.2.4 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje	58
	2.2.5 Uso de la Tecnología en la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría....	61
	2.2.6 Uso de Material Manipulativo y Concreto: Cubo de Soma.....	63
	2.3 Marco Conceptual.....	63

2.3.1	Aprendizaje Basado en Juegos.....	63
2.3.2	Aprendizaje Basado en Problemas.....	65
2.4	Marco Legal	67
3	Aproximación Metodológica	68
3.1	Enfoque, Diseño y Tipo de Investigación.....	68
3.2	Población y Muestra	70
3.3	Método	71
3.3.1	Fase 1: Preparación del Experimento.	76
3.3.2	Fase 2: Experimentación.....	77
3.3.3	Fase 3: Análisis Retrospectivo de los Datos.	77
3.4	Instrumentos y Técnicas	78
3.4.1	Procedimiento	80
3.5	Consideraciones Éticas	80
4	Análisis de Resultados	82
4.1	Preparación del experimento.....	83
4.2	Experimentación	89
4.2.1	Misión 1: Dibujando Planos.....	94
4.2.2	Misión 2: Reconstruyendo	101
4.2.3	Misión 3: Reconstruir a partir de las fotos.....	110
4.2.4	Misión 4 y 5: Las piezas mágicas y Huyendo del Enderman	118
4.2.5	Misión 5: Huyendo del Enderman	125
4.2.6	Misión 5: Huyendo del Enderman	131
4.2.7	Misión 6 y 7: ¿Qué les sucede a las piezas? y la forma olvidada.	137

4.2.8	Misión 8 y 9: La búsqueda del tesoro y Salida del Cubo Mundo.....	143
4.3	Análisis Retrospectivo	154
4.3.1	Habilidades de Visualización.....	154
4.3.2	Aciertos y Desaciertos	160
4.4	Discusión.....	161
5	Conclusiones y recomendaciones	164
	Referencias Bibliográficas	167
	Apéndices.....	180

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1 <i>Cuatro entradas clásicas de la geometría</i> _____	55
Tabla 2 <i>Habilidades de Visualización</i> _____	57
Tabla 3 <i>Criterios de inclusión para la selección de la muestra</i> _____	71
Tabla 4 <i>Instrumentos de recolección de la información</i> _____	78
Tabla 5 <i>Técnicas de análisis de datos</i> _____	79
Tabla 6 <i>Análisis de Consideraciones Éticas Clave</i> _____	81
Tabla 7 <i>Actividades y Habilidades de Visualización propuestas para el diagnóstico</i> _	83
Tabla 8 <i>Descripción general del experimento de enseñanza</i> _____	90
Tabla 9 <i>Habilidades a desarrollar en la misión 1 – THA1</i> _____	96
Tabla 10 <i>Habilidades a desarrollar en la misión 2 – THA 2</i> _____	103
Tabla 11 <i>Habilidades a desarrollar de la misión 3 de la THA 3</i> _____	111
Tabla 12 <i>Habilidades a desarrollar de la misión 4 y 5 de la THA 4</i> _____	120
Tabla 13 <i>Habilidades a desarrollar de la misión 5 de la THA 5</i> _____	126
Tabla 14 <i>Habilidades a desarrollar de la misión 5 de la THA 6</i> _____	133
Tabla 15 <i>Habilidades a desarrollar de la misión 6 y 7 de la THA 7</i> _____	139
Tabla 16 <i>Habilidades a desarrollar de la misión 8 y 9 de la THA 8</i> _____	144
Tabla 17 <i>Diálogos según el rol en la THA 8 de ensamblaje por instrucciones.</i> _____	148
Tabla 18 <i>Aciertos y desaciertos en la aplicación del experimento de enseñanza</i> _____	160

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1 <i>Promedio del Puntaje en Matemáticas en PISA (2006-2022)</i> _____	18
Figura 2 <i>Porcentaje de estudiantes en los niveles de desempeño de la prueba de matemáticas en PISA (2006-2022)</i> _____	19
Figura 3 <i>Subescalas de proceso de matemáticas para Colombia, la OCDE y Latinoamérica</i> _____	20
Figura 4 <i>Matemática: Resultados de Colombia en niveles de desempeño comparados con resultados regionales</i> _____	22
Figura 5 <i>Resultados de Colombia en niveles de desempeño en matemáticas SABER - 11°</i> _____	22
<hr/>	
Figura 6 <i>Procedimiento para el diseño de la THA según Cárcamo et al., 2023; Bocanegra et al., 2021; Amador y Montejo (2016)</i> _____	74
Figura 7 <i>Procedimiento para el diseño de la THA según Clemens y Sarama (2021) y Simon et al., (2004)</i> _____	75
Figura 8 <i>Fases del experimento de enseñanza.</i> _____	76
Figura 9 <i>Procedimiento de desarrollo de la investigación</i> _____	80
Figura 10 <i>Resultados de la THA 1</i> _____	97
Figura 11 <i>Dificultad de exceso de líneas para representar las piezas en el punteado isométrico</i> _____	98
Figura 12 <i>Representación de las piezas V, L y T en diferentes posiciones</i> _____	99
Figura 13 <i>Conservación de la pieza al representarla en el punteado isométrico.</i> ____	100
Figura 14 <i>Resultados de la THA 2</i> _____	104

DESARROLLO DE HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN	10
Figura 15 <i>Omisión o falta de líneas</i> _____	105
Figura 16 <i>Conexión de cubos consecutivos</i> _____	106
Figura 17 <i>Dificultad para identificar la pieza faltante</i> _____	107
Figura 18 <i>Interpretación y representación de la posición de la pieza</i> _____	108
Figura 19 <i>Dificultad con la posición y orientación de la pieza</i> _____	108
Figura 20 <i>Cambio de posición en la pieza</i> _____	109
Figura 21 <i>Resultados de la THA 3</i> _____	112
Figura 22 <i>Primer reto: posibles opciones al observar solo la vista superior.</i> _____	114
Figura 23 <i>Segundo reto: seleccionar la pieza correspondiendo a dos vistas dadas.</i> _	115
Figura 24 <i>Representación de algunas vistas con dificultad y en el punteado isométrico</i> _____	115
<hr/>	
Figura 25 <i>Representación de las vistas con inconsistencias de posición</i> _____	116
Figura 26 <i>Recurso de GeoGebra para la THA 3 de las vistas ortogonales</i> _____	117
Figura 27 <i>Resultados de la THA 3 en el nivel avanzado</i> _____	117
Figura 28 <i>Resultados de la THA 4</i> _____	120
Figura 29 <i>Identificación de la transformación geométrica sufrida por parte de la pieza</i>	121
Figura 30 <i>Dificultad para la noción de la reflexión</i> _____	122
Figura 31 <i>Ubicación de las piezas en el plano</i> _____	123
Figura 32 <i>Resultado de la traslación</i> _____	123
Figura 33 <i>Resultados diferentes</i> _____	124
Figura 34 <i>Triedro</i> _____	127
Figura 35 <i>Cuadrícula Vistas Ortogonales</i> _____	127
Figura 36 <i>Resultados de la THA 5</i> _____	128

Figura 37 <i>Identificación de la vista y su correcta representación</i> _____	129
Figura 38 <i>Identificación de la vista, pero con representación imprecisa</i> _____	130
Figura 39 <i>Resultados de la THA 6</i> _____	133
Figura 40 <i>Dificultad ante la representación en el punteado isométrico de la pieza reflejada en el eje horizontal</i> _____	135
Figura 41 <i>Representación en el punteado isométrico de la reflexión de una pieza sin nivel de precisión frente al eje solicitado</i> _____	135
Figura 42 <i>Representación precisa en el punteado isométrico de la reflexión de las piezas L y Z en el eje horizontal y vertical</i> _____	136
Figura 43 <i>Resultados de la THA 7</i> _____	140
Figura 44 <i>Secuencia inicial y secuencia final respectivamente</i> _____	141
Figura 45 <i>Estructura de los retos en el software de GeoGebra</i> _____	142
Figura 46 <i>En búsqueda del tesoro por medio de la interpretación de instrucciones.</i> _	146
Figura 47 <i>Resultado de la THA 8</i> _____	146
Figura 48 <i>Estructuras solicitadas para el ensamblaje por instrucciones</i> _____	154

Resumen

Título: Desarrollo del Pensamiento Espacial en estudiantes de tercer grado: un experimento de enseñanza centrado en las Habilidades de Visualización con el uso del Cubo soma y GeoGebra*

Autor: Valery Stefany Barajas Soto y Clarysse Alejandra Jiménez Téllez**

Palabras Clave: Pensamiento Espacial, Habilidades de Visualización, cubo soma, software de GeoGebra, educación básica primaria.

Descripción:

El Pensamiento Espacial es fundamental para el aprendizaje en matemáticas, puesto que favorece la interpretación, construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos en el espacio. Sin embargo, algunos procesos de enseñanza distan de la realidad y la necesidad de los estudiantes, por lo que, se evidencia una tendencia al pensamiento numérico y no desde la interdisciplinariedad del pensamiento matemático. Por tal razón, la presente investigación tiene como objetivo transformar el desarrollo de las Habilidades de Visualización en estudiantes de tercero del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana. El diseño metodológico adopta un enfoque cualitativo dentro del modelo epistemológico del pragmatismo, con el método de investigación diseño a través del Experimento de Enseñanza cimentado en las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA), por medio de tres fases: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo de los datos. La recolección de datos se realiza con técnicas como la observación participante, fichas diagnosticas, revisión documental, análisis de contenido y observación sistemática; en los instrumentos se considera notas de campo, matriz de análisis y listas de cotejo. Entre los resultados más relevantes, se establece que los estudiantes muestran avances en el desarrollo de las siete Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande (1990), ligadas a la resolución de problemas con el uso del Cubo soma y el software de GeoGebra, a través de la comprensión de conceptos abstractos como las transformaciones geométricas en el plano, la representación 2D de las piezas 3D en el punteado isométrico y las vistas ortogonales de un objeto 3D.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Director: Juddy Amparo Valderrama Moreno. Doctora en Ciencias de la Educación.

Abstract

Title: Development of Spatial Thinking in Third-Grade Students: a Teaching Experiment Focusing on Visualisation Skills Using the Soma Cube and GeoGebra ^{1*}

Author: Valery Stefany Barajas Soto and Clarysse Alejandra Jiménez Téllez ^{**}

Key Words: Spatial Thinking, Visualization Skills, soma cube, GeoGebra software, basic primary education.

Description:

Spatial thinking is fundamental to learning mathematics as it involves interpreting, constructing and manipulating mental representations of objects in space. However, some teaching methods are far removed from reality and the needs of students, resulting in a tendency towards numerical thinking rather than interdisciplinary mathematical thinking. For this reason, the present research project aims to enhance the visualisation skills of third-year students at the José Elías Puyana Technical Industrial College. Adopting a qualitative approach within the epistemological model of pragmatism, the research method is designed through the Teaching Experiment based on Hypothetical Learning Trajectories (HLT) in three phases: preparation of the experiment, experimentation and retrospective analysis of the data. Data is collected using techniques such as participant observation, diagnostic forms, document review, content analysis and systematic observation, and instruments include field notes, an analysis matrix and checklists. The most relevant results show that students progress in developing the seven Visualisation Skills proposed by Del Grande (1990) when solving problems using the Soma Cube and GeoGebra software. This involves understanding abstract concepts such as geometric transformations in the plane, 2D representations of 3D pieces in isometric projection and orthogonal views of 3D objects.

* Degree Work

** Faculty of Humanities. School of Education. Director: Juddy Amparo Valderrama Moreno. Doctor of Education.

Introducción

En los últimos años de investigación educativa en el campo de la enseñanza de las matemáticas a niñas, niños y adolescentes se ha enfatizado en las necesidades nacionales e internacionales que exigen la formación integral de ciudadanos con el fortalecimiento de competencias en un contexto educativo propicio para el desarrollo de estas a través del andamiaje constructivista.

Por tal razón, en los Lineamientos Curriculares en el área de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias - EBC (2006) proponen cinco procesos generales en las matemáticas: “formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos”. En relación con los conocimientos básicos para que el estudiante potencie y fortalezca habilidades, competencias y pensamientos matemáticos como el pensamiento numérico y sistemas numéricos; Pensamiento Espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medida; pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional, y sistemas algebraicos y analíticos (MEN, 2006).

De manera que, en los currículos escolares se proponen los cinco pensamientos anteriores, sin embargo, existe una tendencia en la práctica docente por el pensamiento numérico y se deja en segundo plano el Pensamiento Espacial y de sistemas geométricos. Además, se tiende a no transverlizar dichos pensamientos con cada uno de los procesos en matemáticas.

Por tal motivo, este trabajo investigativo se enfoca en el abordaje del Pensamiento Espacial y de los procesos matemáticos por medio de la planificación e implementación de un experimento de enseñanza cimentado en Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje como herramienta pedagógica para planificar la transformación del desarrollo de las Habilidades de Visualización propuestas por

Del Grande (1990) con el uso de material manipulativo y de recursos digitales en niños de grado tercero de un colegio público del municipio de Floridablanca, Santander.

En consideración a lo anterior, la presente investigación se aborda en tres capítulos principales; el primer capítulo expone el planteamiento, la formulación y el análisis del problema, la pregunta de investigación, la justificación y los objetivos de investigación. En el segundo capítulo se aborda la aproximación teórica a partir del marco referencial, los antecedentes de investigación internacionales, nacionales y locales; el marco teórico en torno al Pensamiento Espacial, la Visualización y el Razonamiento Espacial y las Habilidades de Visualización; y el marco legal, por el cual se justifica cada una de las acciones a realizar dentro del campo de la investigación e intervención en la educación colombiana. Finalmente, en el tercer capítulo de la aproximación metodológica, se plantea el enfoque, diseño y tipo de investigación. Además, se determina el método, la población y muestra, los instrumentos y técnicas de recolección y análisis de información, y, por último, las consideraciones éticas.

1 Planteamiento y Formulación del Problema

1.1 Análisis y Formulación del Problema

Los procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas se plantean como grandes retos vistos desde las dificultades de tipo conceptual que surgen por la fragmentación del lenguaje y el enfoque hacia lo numérico; en algunos contextos escolares esta tendencia hacia el cálculo y la aritmética podría dejar en un segundo plano el desarrollo de otros pensamientos matemáticos propuesto en los lineamientos curriculares, en específico el Pensamiento Espacial y sistemas geométricos (López y del Valle, 2017). En este sentido, el fortalecimiento de Habilidades de Visualización, son necesarias para la comprensión y aplicación de conceptos geométricos dentro

de la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria, que requieren las representaciones visuales o mentales y el uso de materiales manipulativos y digitales (Camargo y Acosta, 2012).

En efecto, según lo expresan Sandoval y Ortiz (2023) el proceso de Visualización que es entendido como la capacidad de razonar espacialmente al imaginar, transformar y manipular representaciones mentales de objetos bidimensionales o tridimensionales para resolver problemas, tiende a ser poco promovido dentro del aula lo que se traduce en dificultades para establecer relaciones espaciales, interpretar transformaciones geométricas, razonar sobre las propiedades geométricas, representar y entender la información de forma visual, crear imágenes visuales de conceptos matemáticos y la resolución de problemas. Lo que limita su aprendizaje en los primeros grados de Educación Primaria y así el desarrollo de capacidades que requieren áreas como la ingeniería, arquitectura, arte, aviación, geografía, física y matemáticas, que demandan un alto nivel de inteligencia espacial (Zapateiro, et al., 2018).

Según los diferentes estudios realizados en torno al tema se han identificado algunas dificultades comunes que enfrentan los niños y niñas en este ámbito, es el caso de la investigación realizada por (Sarmiento, 2007) que demuestra que una enseñanza centrada en un enfoque tradicional basado en la memorización de fórmulas y procedimientos mediante el material impreso, es un problema común en las aulas; lo que consecuentemente limita el desarrollo de destrezas y competencias requeridas para la Visualización en escolares. En efecto tal como lo indica Näslund (2021) especialista del Banco Interamericano de Desarrollo los estudiantes que aprenden a partir de una enseñanza cimentada en la memorización tienden a tener capacidades limitadas para resolver problemas no rutinarios y emplear conocimientos en situaciones nuevas.

Conjuntamente, se puede decir que las limitaciones en las competencias de los estudiantes parte del tipo de estrategias que utilizan los docentes al momento de enseñar. En efecto, conforme

lo expresa Herrera y Villafuerte (2023) debido a la falta de integración de estrategias didácticas adecuadas por parte de los profesores se presenta una limitación en las oportunidades de los niños para desarrollar Habilidades de Visualización, lo cual puede tener un impacto significativo en su desarrollo cognitivo general y en su éxito académico.

Así mismo, Arroyo y Pallasc (2025) las matemáticas y en especial el desarrollo del Pensamiento Espacial demandan de la comprensión de conceptos abstractos, lo cual puede ser complicado para los niños de primaria, más aún si el docente solo se centra en la memorización de conceptos y fórmulas. Bajo este contexto el Ministerio de Educación Nacional (2018) destaca que “el aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de escolarización debe enfocarse en la manipulación concreta y experiencias sensoriales que les permitan construir progresivamente conceptos abstractos” (p. 12).

Además, de acuerdo con Granados et al. (2020) en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje requiere de un principio tecnológico para mejorar las representaciones visuales y permitir la comprensión de conceptos abstractos de los estudiantes para superar dificultades; sin embargo, normalmente los procesos de enseñanza se dan a través de un enfoque tradicional en los cuales básicamente solo trabajar por medio de dibujos o imágenes impresas, en este contexto se dificulta el desarrollo de la capacidad para analizar visualmente movimientos rígidos en el plano como las transformaciones geométricas.

Adicionalmente, tomando en cuenta a Shiguay et al. (2022) la formación docente llega a ser percibido como insuficiente, al considerar que la capacidad de los docentes para enseñar Pensamiento Espacial de manera efectiva se ve limitada por la falta de preparación en este campo; es decir se tiende a una formación insuficiente en estrategias didácticas que promuevan el desarrollo de Habilidades de Visualización, lo que dificulta que los niños construyan una

comprensión conceptual sólida. Así mismo, la aplicación de estrategias didácticas en el aula se ve limitada por el desconocimiento de los docentes sobre los fundamentos teóricos que las sustentan.

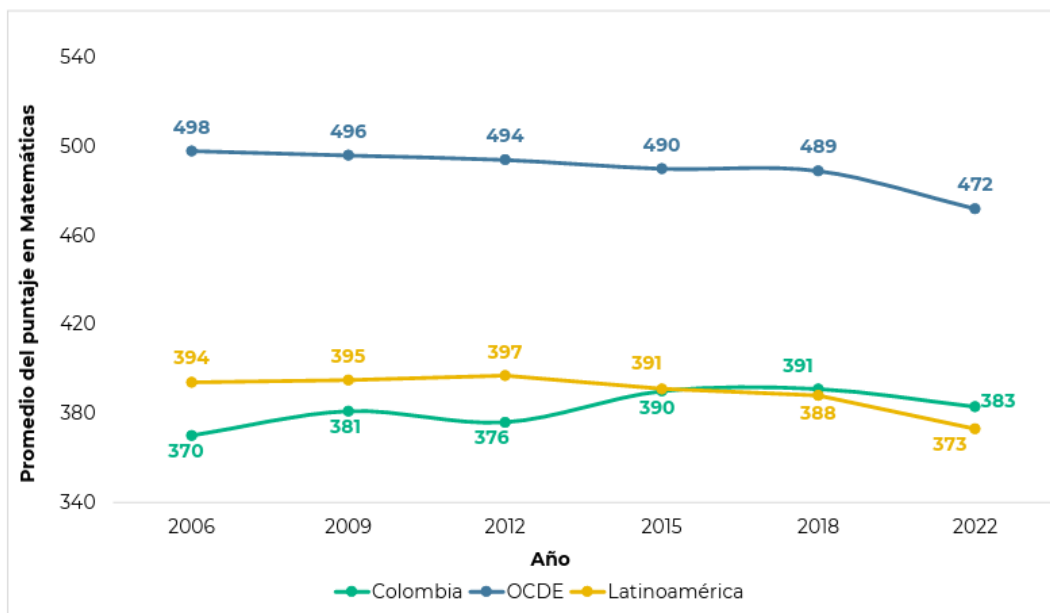
La problemática evidenciada en las diferentes investigaciones se materializa en los resultados que los estudiantes tienen en las diferentes pruebas internacionales y nacionales, como las PISA, las ERCE y las SABER; estas pruebas están enfocadas principalmente en medir el nivel de competencias que los estudiantes adquieren en las áreas básicas de formación (matemáticas, lenguaje y ciencias).

A nivel internacional están las pruebas PISA de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), cuya finalidad es medir y comparar el desarrollo académico de los estudiantes de edades de 15 a 16 años, en las áreas de ciencias, lenguaje y matemáticas. Específicamente en el área de matemáticas estas se enfocan en contenidos relacionados con la cantidad, cambio y relaciones, espacio y forma e incertidumbre y datos; enfocándose a las competencias o habilidades relacionadas con razonamiento, formulación de situaciones, empleo de conceptos y procedimientos, e interpretación, aplicación y evaluación de resultados. (ICFES, 2024)

Según informe del ICFES (2024) sobre la participación de Colombia en las pruebas PISA 2022 se encontró que en el área de matemáticas el promedio nacional fue de 383 puntos, indicando que se mejoró 13 puntos frente al año 2006, pero aún el país se encuentra 89 puntos por debajo del promedio general de la OCDE que fue de 472.

Figura 1

Promedio del Puntaje en Matemáticas en PISA (2006-2022)

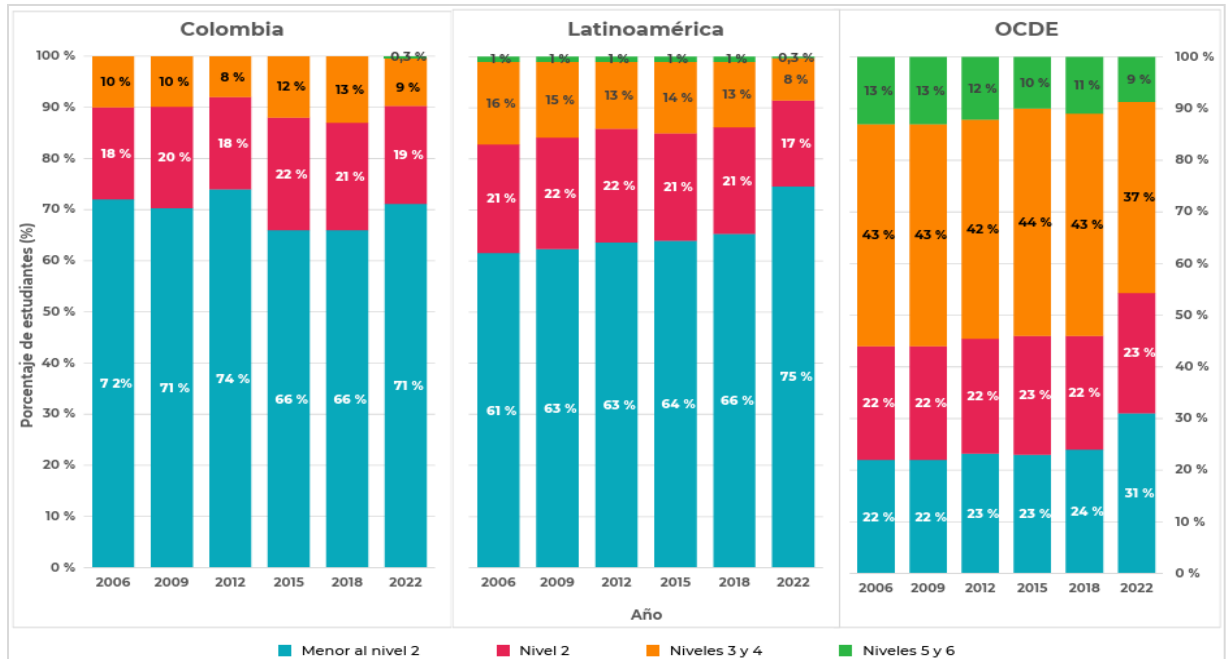


Nota. Tomado de ICFES (2024, p. 26), con base en OCDE (2023)

Tal como se muestra en la Figura 2, en el área de matemáticas el 71 % de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 2 de desempeño, lo que indica que mínimamente están facultados para aplicar conocimientos matemáticos básicos en contextos sencillos, evidenciándose dificultades para resolver problemas más complejos. Además, sólo 0,3 % alcanzó los niveles más altos (5 o 6), es decir, una mínima proporción tiene las habilidades requeridas para desarrollar modelos matemáticos y solucionar problemas abstractos y altamente complejos, mostrando alta capacidad de pensamiento y razonamiento excepcional.

Figura 2

Porcentaje de estudiantes en los niveles de desempeño de la prueba de matemáticas en PISA (2006-2022)

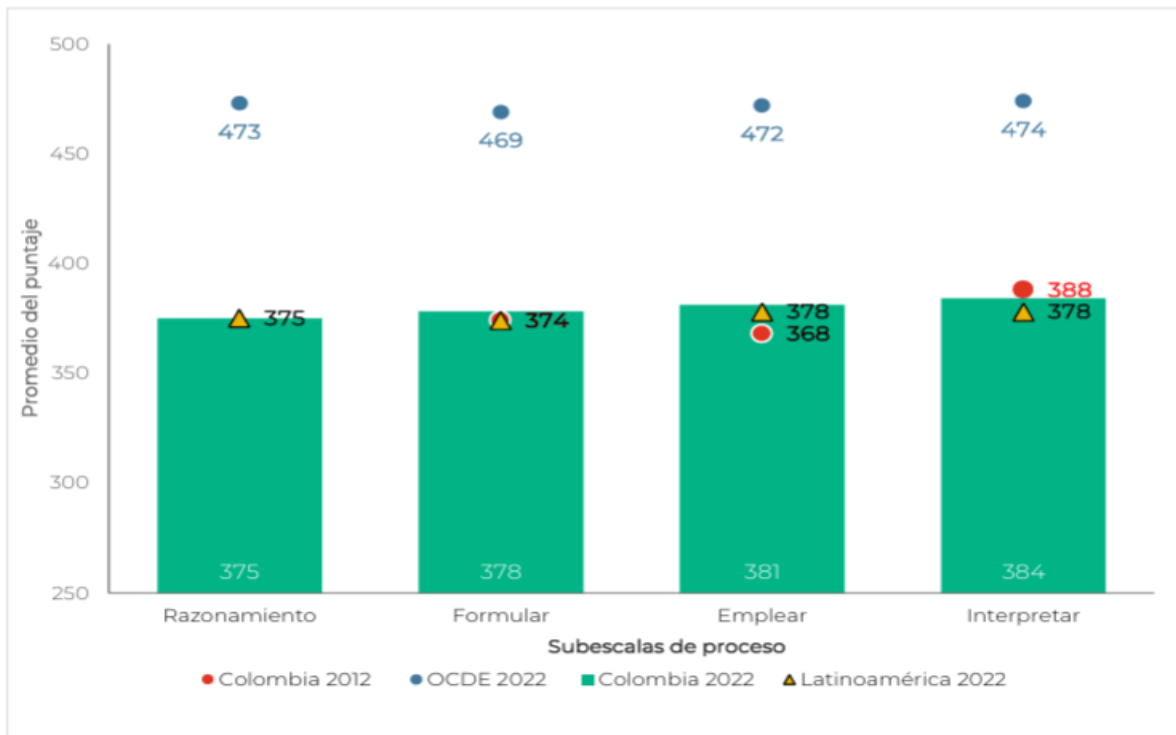


Nota. Tomado de ICFES (2024, p. 29), con base en OCDE (2023)

A su vez Colombia se encuentra por debajo del promedio de la OCDE en los 4 procesos cognitivos de la competencia matemática. Donde el proceso Empleo de conceptos, procedimientos y razonamiento matemático es el segundo más bajo después de Formulación de fenómenos matemáticos de los cuatro procesos evaluados (Ver Figura 3).

Figura 3

Subescalas de proceso de matemáticas para Colombia, la OCDE y Latinoamérica



Nota. Tomado de ICFES (2024, p. 31), con base en OCDE (2023).

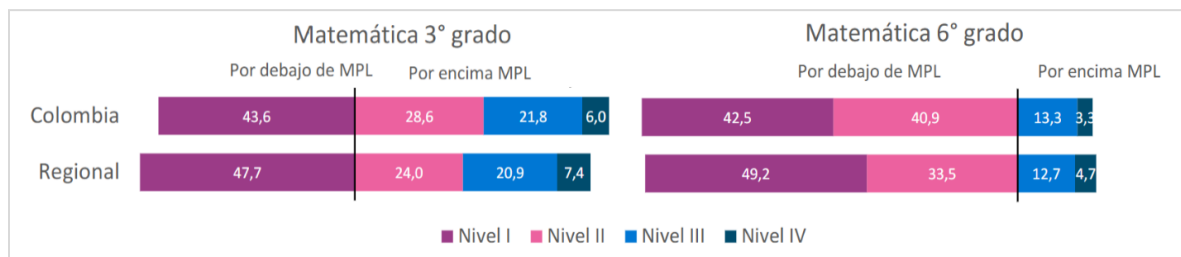
En lo que concierne al contexto regional de América Latina y el Caribe se cuenta con la prueba ERCE aplicada por la UNESCO, la cual busca medir los logros de aprendizaje de estudiantes de 3° y 6° grado de primaria en las áreas de Lectura, Escritura, Matemáticas y Ciencias. Específicamente, esta prueba en el área de matemáticas se enfoca temas relacionados con: comprensión y uso de números naturales, fracciones y decimales; identificación de figuras geométricas, cálculo de perímetros, áreas y volúmenes; interpretación de datos y conceptos básicos de probabilidad y reconocimiento y uso de expresiones algebraicas simples (UNESCO, 2021)

Según informe de la UNESCO (2021), los resultados de la prueba ERCE 2019 para el área de matemáticas muestran que en el caso de los estudiantes de tercer grado el puntaje promedio fue de 698 puntos, ubicándose ligeramente por encima del promedio regional; sin embargo, aproximadamente el 43% de los estudiantes se encuentra en el nivel mínimo de competencias establecido, lo que indica que solo el 57% cuenta con un nivel aceptable de competencias

matemáticas. En el caso del grado sexto el resultado no es diferente y por el contrario tiende a empeorar, pues el 42,5% se encuentra ubicado en el nivel 1 y en total el 83,4% está por debajo de nivel mínimo de competencia establecido para monitorear metas de la Agenda 2030 (Ver Figura 4).

Figura 4

Matemática: Resultados de Colombia en niveles de desempeño comparados con resultados regionales

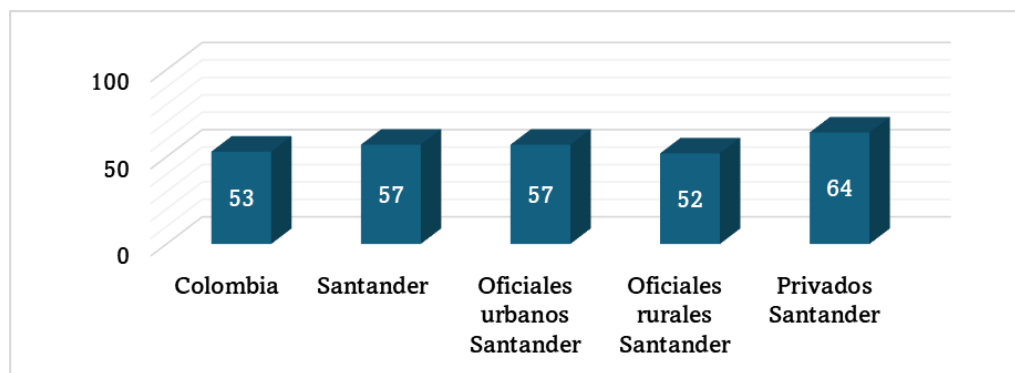


Nota. Tomado de la UNESCO (2021, p. 12-13)

En el caso de las pruebas SABER 11° según reporte del ICFES (2025) sobre un total de 100 puntos posibles, los estudiantes colombianos que presentaron la prueba en el 2024 alcanzaron una media de 53 puntos lo que equivale al 53%; en el caso del departamento de Santander el promedio supera al nacional con 4 puntos (57), tal como se ve en la Figura 5. En términos generales se puede inferir que casi la mitad de los estudiantes carecen de las competencias necesarias para interpretar, argumentar, planear y resolver situaciones que impliquen operaciones matemáticas.

Figura 5

Resultados de Colombia en niveles de desempeño en matemáticas SABER - 11°



Nota. Tomado de pruebas SABER 11 2024. En ICFES (2025)

Ahora bien, con respecto al Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana, específicamente en la población de tercero de primaria, de las sede principal y D, se identifican oportunidades de mejora en el Pensamiento Espacial con relación a las Habilidades de Visualización mediante la aplicación de un diagnóstico. En el cual, se evidencia de manera general las siguientes dificultades: construcción e interpretación de figuras y cuerpos desde diferentes perspectivas visuales y uso de vocabulario geométrico para verbalizar posiciones y relaciones espaciales de objetos tridimensionales. Las cuales, pueden surgir a partir de la falta de espacios en los planes curriculares que permita a los estudiantes tener experiencias significativas, en el desarrollo de Habilidades de Visualización, la manipulación de material concreto y herramientas digitales para potencializar el Pensamiento Espacial desde edades tempranas.

Por esta razón es fundamental contribuir al desarrollo de los procesos de Visualización y de razonamiento espacial, para que incida en la mejora, no solamente en la resolución de problemas matemáticos, sino que a su vez en otras áreas del conocimiento.

1.2 Justificación

En los últimos años, investigadores en el área de matemáticas han destacado la importancia de enseñar y aprender matemáticas por medio de la Visualización para la comprensión de

conceptos geométricos, el fortalecimiento de la capacidad de abstracción y el razonamiento lógico; esto se debe a que, tal como argumenta Gutiérrez (1996) la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas y en especial de la geometría se ha centrado en su mayor parte en el cálculo (sistema numérico), en la geometría plana con libros de texto y en álgebra. En este contexto, conforme lo expresa Escrivà et al., (2018) se debe propiciar un incremento de actividades matemáticas con elementos visuales en diferentes niveles educativos, mediante el uso de material manipulativo y uso de tecnología que le permita al estudiante interpretar relaciones y operaciones mentales.

Además, en los Principios y estándares del The National Council of Teachers of Mathematics -NCTM (2000) se afirma que todos los programas educativos deben fortalecer las Habilidades de Visualización para el desarrollo del razonamiento espacial desde temprana edad con el objetivo de que los estudiantes sean capaces de resolver problemas cada vez más complejos. En este sentido, es importante realizar la presente investigación porque busca diseñar una herramienta que fortalezca las Habilidades de Visualización espacial mediante el uso de material concreto como el Cubo soma y herramientas digitales como GeoGebra, lo que responde a una necesidad concreta en el aula y en la educación matemática.

Razón por la que, la realización de la presente propuesta surge desde la observación directa en las aulas de clases en la que se identifican dificultades relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de la geometría con el uso de modelos bidimensionales en dibujos, guías y libros de texto que no permiten a los estudiantes realizar tareas como transformaciones geométricas y la representación de objetos tridimensionales. Por tal motivo, el Ministerio De Educación Nacional (1998) plantea la necesidad de que, “desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperar el sentido espacial intuitivo en toda la matemática, no sólo en lo que se refiere a la geometría” (p. 37); de modo que, el estudiante sea

capaz de comprender y manipular ideas que van más allá de lo tangible, resolver problemas complejos, establecer conexiones entre diferentes áreas del conocimiento y desarrollar una mayor comprensión del mundo que le rodea.

En este contexto, la presente investigación es conveniente porque ofrece una propuesta didáctica basada en el juego, la resolución de problemas, el uso de material concreto y tecnológico para desarrollar el Pensamiento Espacial, específicamente las Habilidades de Visualización. Lo cual, se alinea a las políticas actuales del MEN, específicamente con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en los que se menciona el uso de metodologías activas y la tecnología.

Además, sirve como una guía de diseño para prácticas pedagógicas que propicien el material manipulativo y uso de la tecnología en la enseñanza de la geometría en educación básica primaria en pro del análisis sobre las estrategias que potencian el Pensamiento Espacial en niñas y niños. De tal manera que los procesos de aprendizaje de los estudiantes se den a partir de experiencias significativas desde los primeros años de escolaridad.

Los principales beneficiarios de esta propuesta son los estudiantes de tercer grado de primaria del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana del municipio de Floridablanca, Santander, quienes a través de la aplicación de un experimento de enseñanza podrán desarrollar las Habilidades de Visualización mediante experiencias lúdicas y con el uso de tecnología.

Así mismo, se benefician las docentes autoras de la propuesta al disponer por medio de la investigación el diseño, la reflexión necesaria para mejorar sus prácticas pedagógicas en la enseñanza de la geometría. Puesto que, se pretende abordar dificultades frecuentes en el aprendizaje de la geometría como las transformaciones geométricas (rotación, traslación y reflexión) de cuerpos geométricos tridimensionales, lo cual suele ser complejo de comprender en

su totalidad tanto por los estudiantes de primaria como los docentes al enseñar estos conceptos en beneficio del desarrollo de las Habilidades de Visualización.

Asimismo, este trabajo busca aportar al campo teórico de la educación matemática al enfocarse en el fortalecimiento de las Habilidades de Visualización espacial en la educación primaria, en especial con grados de niveles inferiores como tercero de primaria, lo cual es un aspecto que ha sido poco explorado en investigaciones nacionales: de manera que, ofrece insumos valiosos para futuras investigaciones en este ámbito. Aunque, los resultados serán propios de un contexto determinado, se espera que pueda aportar al diseño de otras investigaciones con objetivos similares y contextos educativos diferentes.

Finalmente, el estudio permitirá observar cómo se desarrollan las Habilidades de Visualización en los estudiantes con el uso de materiales concretos y uso de software dinámico dentro de un ambiente de aula basado en el juego. El cual, según Ferrero (2004) es una actividad innata en los niños, de carácter lúdico, motivante y divertido que al realizarse con objetivos educativos ayuda a estimular el razonamiento lógico y rompe la apatía hacia las matemáticas. Esto aportará evidencia sobre cómo realizar un experimento de enseñanza para potenciar el desarrollo del Pensamiento Espacial de los estudiantes.

Por tanto, los resultados ayudan a reconocer las estrategias que favorecen los procesos de Visualización desde una representación tridimensional de los objetos en el espacio para que los estudiantes por medio de herramientas tecnológicas puedan manipular y transformar estos objetos (Gutiérrez, 1996). Lo cual, permite hacer ajustes en el diseño de experiencias de aprendizaje para que sean más significativas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Transformar el desarrollo de las Habilidades de Visualización en estudiantes de tercer grado de primaria mediante un experimento de enseñanza con el uso de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) como marco metodológico y apoyado en materiales manipulativos como el Cubo soma y recursos digitales como GeoGebra.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Describir las fortalezas, debilidades y oportunidades de mejora en cuanto a la aproximación de las Habilidades de Visualización espacial que presentan los estudiantes de tercer grado del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana del municipio de Floridablanca.

- Analizar los elementos que se deben integrar al experimento de enseñanza cimentado en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, que incluya actividades con el Cubo soma y GeoGebra.

- Proponer la implementación un experimento de enseñanza con base en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, que integre actividades con el Cubo soma y GeoGebra, orientada al desarrollo progresivo de las siete Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande.

- Determinar los cambios obtenidos en el desarrollo de las Habilidades de Visualización de los estudiantes del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana del municipio de Floridablanca mediante el experimento de enseñanza con el Cubo soma y GeoGebra, identificando los aciertos, desaciertos y las recomendaciones para futuras investigaciones en el área de enseñanza de la geometría.

1.4 Pregunta de Investigación

Una vez conocida la problemática de estudio se propone la siguiente pregunta:

¿Qué cambios se producen en las Habilidades de Visualización espacial en estudiantes de tercer grado de primaria con el diseño e implementación de un experimento de enseñanza fundamentado en las siete Habilidades de Visualización de Del Grande, utilizando la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) como marco metodológico y apoyado en materiales manipulativos como el Cubo soma y recursos digitales como GeoGebra?

De esta pregunta se derivan algunas preguntas específicas: ¿Cuáles son las fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora en las Habilidades de Visualización espacial de los estudiantes del grado tercero del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana?, ¿Cuáles serían los elementos que se deben integrar al experimento de enseñanza en la THA que incluya actividades con el Cubo soma y GeoGebra ?, ¿Cómo desarrollar progresivamente las Habilidades de Visualización espacial por medio de la implementación de un experimento de enseñanza cimentado en la THA con actividades del Cubo soma y GeoGebra ? Y ¿Qué cambios se obtuvieron con la implementación del experimento de enseñanza en el desarrollo de las Habilidades de Visualización?

2 Aproximación Teórica

2.1 Antecedentes de Investigación

El desarrollo del Pensamiento Espacial es fundamental para representar y manipular los objetos y sus relaciones en el espacio. De manera que, diversos estudios se han enfocado en la búsqueda de estrategias para fortalecer esta habilidad cognitiva en los estudiantes, en los cuales destaca el material manipulable, el uso de las TIC con software de geometría dinámica y el diseño de experiencias de aprendizaje basadas en la experimentación y la Visualización. La búsqueda de antecedentes se realizó a través de diversas bases de datos como: Dialnet, ResearchGate, Google

académico y repositorios institucionales. De este modo, se utilizaron términos tales como: “Visualización”, “habilidades”, “Pensamiento Espacial”, “Cubo soma”, “material manipulativo”, “educación” y “geometría”.

2.1.1 Internacionales

En Ecuador, Bravo y Panamá (2024) presentaron un estudio que tuvo como objetivo principal “Valorar el impacto de una estrategia didáctica basada en GeoGebra diseñada para contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje de las cónicas en estudiantes de Segundo de Bachillerato Técnico”. A nivel metodológico bajo un paradigma sociocrítico, enfoque mixto (cuantitativo y cualitativo) y diseño cuasiexperimental, se intervino 56 estudiantes (30 en grupo experimental y 26 en grupo control) de Segundo de Bachillerato Técnico, a quienes se les aplicó pretest, posttest, encuestas y análisis documental. Como resultado se obtuvo una mejora significativa en desempeño del grupo experimental en comparación con el grupo control, específicamente los estudiantes intervenidos incrementaron su destreza conceptual en un 28% y la destreza analítica en un 25%. En conclusión, la implementación de estrategias didácticas con base en GeoGebra es eficaz para la mejora de la comprensión de las cónicas tanto a nivel conceptual como procedimental; además, durante el proceso se evidenció un incremento de la motivación, la participación y dominio del contenido.

El estudio anterior, muestra aspectos relevantes en la medida que puede considerarse como modelo de diseño estructural; también, ofrece información relevante sobre aspectos teóricos que pueden ser aplicables a este tipo de estudios, es el caso del conectivismo, diseño instruccional, y el enfoque sociocrítico, que promueven autonomía, motivación y pensamiento crítico. Por otra parte, el estudio es clave porque se enfoca directamente en GeoGebra como estrategia didáctica,

proponiendo igualmente la necesidad de orientar las actividades diseñadas por competencias e integrarlas al currículo.

En Ecuador, Martínez et al. (2023) llevaron a cabo una investigación enfocada a “evaluar el impacto del software GeoGebra como herramienta educativa para fortalecer los conocimientos de geometría en estudiantes de educación básica, a través del análisis de conceptualización, capacidad visual, capacidad interpretativa y resolutive”. Para dar cumplimiento al objetivo propuesto se optó por una metodología con enfoque cuantitativo, de tipo explicativo y diseño experimental, la cual se aplicó a 179 estudiantes de educación básica organizados en 4 grupos, a quienes se les aplicó un pretest y un postest; todo con el fin de evaluar las variables: Conceptualización, capacidad visual, capacidad interpretativa y capacidad resolutive. Según resultados el 45,8% de los estudiantes mejoraron, pues antes del uso de GeoGebra, el 73.7% de los estudiantes se encontraba en nivel insuficiente; mientras que después el 74.3% llegó a nivel regular, el 25.1% a bueno y 0.6% a excelente. En conclusión, GeoGebra es una herramienta efectiva que fortalece el aprendizaje geométrico al permitir la manipulación visual de objetos matemáticos, lo que consecuentemente optimiza la capacidad para conceptualizar, interpretar, visualizar y solucionar problemas.

Este antecedente aporta elementos importantes para el desarrollo de la investigación que se propone, debido a que no solo ofrece una estructura de implementación clara: diagnóstico, intervención y evaluación con herramientas validadas; sino que también, refiere a fundamentos propios del constructivismo, el aprendizaje significativo y la teoría sociocultural de autores como Piaget, Bruner, Ausubel, Vygotsky, etc. por otro lado, muestra la relevancia que tiene la incorporación del software GeoGebra como herramienta de intervención didáctica.

En España, Segade (2022) realizó una tesis doctoral que analizó la evolución de la imagen conceptual del triángulo en estudiantes de educación primaria al utilizar GeoGebra como software de geometría dinámica. A través de la metodología de experimento de enseñanza, es decir investigación basada en el empirismo, en el cual aplicaron una prueba piloto en una institución educativa pública de Coruña y aplicaron el experimento de enseñanza en 6 sesiones en otra institución educativa. De esta manera, la investigadora realizó un estudio detallado sobre la imagen conceptual de los estudiantes basándose en el modelo de Tall y Vinner (1981) al aplicar una secuencia de actividades diseñadas con GeoGebra. Por lo cual, la investigadora corrobora que GeoGebra es una herramienta con la potencialidad de visualizar las características de las figuras en un entorno dinámico, lo cual favorece la exploración de propiedades y así mismo ayuda a comprender para expresar de manera formal la definición de conceptos geométricos.

Esta investigación proporciona un marco de referencia en torno a la importancia y uso de GeoGebra para fortalecer el Pensamiento Espacial de los estudiantes y no caer en las imágenes conceptuales estereotipadas, sino enfocar las actividades a la exploración guiada para que el estudiante sea capaz de comprender, razonar, deducir relaciones y comprobar propiedades.

En España, Berciano et al., (2022) realizaron un estudio que buscó “Evaluar la pertinencia de una trayectoria hipotética de aprendizaje, especialmente diseñada para trabajar nociones geométricas asociadas a objetos tridimensionales (en este caso el cilindro) en el aula de Educación Infantil. Para tal fin, se analizaron: 1. Tipos de razonamiento que manifiestan infantes de cuatro y cinco años y 2. Tipos de aprehensión de infantes de cuatro y cinco años” para lo cual usaron una metodología cualitativa desde un paradigma de Investigación de Diseño, con la aplicación de Trayectorias de Aprendizaje. Como resultados se encontraron que entre niños de 4 y 5 años hay una diferencia en cuanto al desarrollo del razonamiento geométrico. A su vez los estudiantes frente

a la aprehensión perceptiva describen los objetos de manera global y en cuanto a la aprehensión discursiva las justificaciones y argumentos sobre las figuras tridimensionales son lineales, por lo cual se establecen en un nivel 1 y 2 de Van Hile.

La revisión de este antecedente permite evidenciar la necesidad, importancia y relevancia de la enseñanza y el desarrollo de Habilidades de Visualización a partir de cuerpos geométricos desde edades tempranas, lo que facilita la abstracción y resolución de problemas en los niños. Como también la aplicación de trayectorias de aprendizaje permite realizar un seguimiento frente al desarrollo de las Habilidades de Visualización como también en la secuencia didáctica estructurar progresivamente las actividades para favorecer este desarrollo.

En México, Sandoval y Ortiz (2023) realizaron un estudio que buscó “Analizar la evolución de habilidades de razonamiento espacial, en particular lo relacionado con el cambio de dimensión (procesos de codificación y decodificación) en niños de 6-8 años, cuando construyen formas 3D usando materiales manipulables” mediante el uso de la metodología cualitativa con la implementación de un experimento de enseñanza enmarcado en el paradigma investigación de diseño según (Gravemeijer y Cobb, 2006), con la aplicación de Trayectorias de Aprendizaje según (Samara y Clements, 2009). En donde se encontraron como resultados que la aplicación de una secuencia didáctica permitió a los estudiantes desarrollar Habilidades de Visualización, comparación y deconstrucción de formas. Como también el reconocer, representar y reconstruir objetos tridimensionales a partir de diversas representaciones bidimensionales con la implementación de estrategias para identificar elementos ocultos o vacíos dentro de las formas, favoreciendo la Visualización y las rotaciones mentales al construir estructuras tridimensionales y mediante giros y rotaciones, los estudiantes lograron visualizar piezas ocultas y comprender cómo distintas piezas pueden ocupar el mismo espacio.

Esta investigación resalta la importancia de identificar y analizar los procesos de percepción, construcción y razonamiento de los estudiantes en la manipulación de figuras geométricas tridimensionales lo cual es esencial en el momento en que se use el Cubo soma. Así mismo contribuye a demostrar como la implementación de trayectorias con la integración del movimiento corporal y la manipulación de objetos permite además de facilitar la interpretación de rotaciones, traslaciones y semejanza por parte de los estudiantes, favoreciendo la construcción del significado del sistema de referencia. Por último, el presente estudio brinda las herramientas para realizar una adaptación frente a la categorización y análisis del proceso que se da en la transición entre manipulativos físicos (Cubo soma) y representaciones digitales (GeoGebra).

2.1.2 Nacionales

En Bogotá, Colombia, Rodríguez y Velásquez (2023) llevaron a cabo una tesis de maestría para evaluar el desarrollo de habilidades visoespaciales en estudiantes de transición cuando utilizan tres juegos digitales de cuadrícula (sudoku de colores, memoria visual y triki) los cuales fueron adaptados a su edad y desarrollo cognitivo. Por tanto, los investigadores se basaron en un enfoque cualitativo con el estudio de casos para analizar el comportamiento de cuatro niños entre los 5 y 6 años, con la finalidad de comprender cómo solucionan problemas a través del juego y cómo se desarrollan las Habilidades de Visualización desde temprana edad. Como resultado encontraron que no hubo casi errores por parte de los niños, solamente se hallaron en el juego de memoria visual porque los niños no eran capaces de recordar la ubicación de una figura o la cantidad de estas en un inicio, y en el triqui los errores se daban de acuerdo con el nombre de la ubicación de una casilla. Por tanto, concluyen que estos juegos beneficiaron el desarrollo de Habilidades de Visualización como la coordinación motriz ojo, figura, fondo, constancia

perceptual, percepción de la posición en el espacio, discriminación y memoria visual en los estudiantes de preescolar.

Este estudio respalda la idea que pretende también la presente investigación con la importancia de fortalecer las Habilidades de Visualización desde temprana edad, en este caso con el uso de juegos digitales con los que ofrece referentes metodológicos para observar, analizar y evaluar el desarrollo de esas habilidades en estudiantes de primaria. Además, da sustento teórico sobre el uso de juegos, en este caso juegos digitales para la enseñanza de las matemáticas que potencien el desarrollo del Pensamiento Espacial.

En Boyacá, Colombia, González y Díaz (2022) realizaron una maestría para analizar cómo se fortalece el Pensamiento Espacial y los sistemas geométricos con la mediación del software GeoGebra por medio de la investigación acción y dirigido en una secuencia didáctica en estudiantes de grado tercero de una institución educativa de carácter rural. Este estudio evidenció que el software GeoGebra permite que los estudiantes comprendan el plano cartesiano, el recubrimiento de figuras, área y perímetro, simetría, rotación y traslación con actividades prácticas y dinámicas relacionadas a la vida cotidiana de los estudiantes con base a sus conocimientos previos, lo cual permite que el estudiante construya esquemas mentales, se motive e interese por el uso de GeoGebra para aprender.

Por tanto, esta investigación aporta al presente proyecto con respecto al uso de GeoGebra para la enseñanza de diversos conceptos geométricos que hacen parte de las Habilidades de Visualización espacial y que fortalecen el Pensamiento Espacial de los estudiantes. Además, deja entrever la viabilidad y flexibilidad de uso de GeoGebra para el uso de niños de primaria, incluso en un contexto rural.

En el Cerrito Valle del Cauca, Gustin (2021) realizó un estudio que buscó “Identificar y analizar los elementos de la Visualización que favorecen el razonamiento y la construcción de la rotación de figuras geométricas, a través de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en estudiantes de grado séptimo, desde la perspectiva semiótica-cognitiva” para lo cual usó una metodología fundamentada en la Investigación de Diseño mediante la construcción de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) según (Simon, 1995). A su vez, para la selección de la muestra, recolección y análisis de datos, se fundamentó en el estudio de casos según (Stake, 1998). Como resultados se encontraron que es fundamental la enseñanza en el aula de la Visualización geométrica, para que de esta manera los estudiantes discriminen las dimensiones y transformaciones de los cuerpos geométricos. A su vez, se evidencia que la mediación del profesor desempeña un papel crucial y es necesario que en el discurso docente exista congruencia entre el enunciado y la figura presentada a los estudiantes.

Este antecedente permite evidenciar que el implementar Trayectoria Hipotética de Aprendizaje refleja el desarrollo cognitivo de los estudiantes tanto en sus procesos de aprendizaje como en la identificación de dificultades, especialmente en entornos virtuales. A su vez, ratifica la importancia de desarrollar procesos de Visualización, construcción y razonamiento en el pensamiento geométrico en con el uso de GeoGebra, lo cual para la presente investigación se pueden explorar estos procesos de manera práctica agregando la implementación del Cubo soma y de esta manera poder analizar cómo los estudiantes representan, transforman y manipulan objetos en el espacio.

En Bogotá, Colombia, Rojas et al., (2021) realizaron un estudio para diseñar una unidad didáctica basada en la enseñanza y aprendizaje de representaciones bidimensionales de formas tridimensionales y a la superación de dificultades relacionadas con el tema para favorecer estos

procesos. De manera que, se centraron en estudiantes de sexto grado en edades entre los 10 y 14 años para que comprendan la representación gráfica y la construcción de sólidos en perspectiva isométrica. Por lo cual, el enfoque metodológico se basa en la formulación de una secuencia de tareas contextualizadas con objetos cotidianos como las sillas, drones y clasificación de fichas de cubo soma. Como resultados se indica que favoreció la construcción e interpretación de representaciones geométricas de los sólidos, su ubicación espacial y el análisis de vistas en diferentes sistemas gráficos. Asimismo, se identificaron dificultades en la relación entre vistas y sólidos, por lo cual se tuvieron que realizar ajustes en las estrategias de enseñanza. De manera que, se enfatiza en el enfoque progresivo para la enseñanza de la perspectiva isométrica y resalta la importancia de integrar recursos manipulativos y digitales en el proceso.

Este estudio aporta como evidencia sobre cómo una secuencia didáctica que incluye el cubo soma y recursos tecnológicos puede favorecer el desarrollo de Habilidades de Visualización y espaciales en estudiantes, mediante tareas concretas que promueven la construcción e interpretación de representaciones tridimensionales.

En Quindío, Colombia, Gutiérrez et al., (2020) realizaron un estudio que buscó analizar incidencias de los procesos de Visualización apoyados con ambientes TIC en la resolución de problemas de matemáticas en estudiantes de grado tercero de primaria. Por lo cual, utilizaron la metodología cualitativa de tipo interpretativa dentro del marco de investigación acción. El estudio se realizó con la observación de 115 estudiantes de tres instituciones educativas de Quindío por medio de la aplicación de diversas actividades con material tangible como bloques lógicos y el juego barreras y luego actividades con el uso de la tecnología con programas educativos como Sokoban, El reloj, Máquina y Ángulos. Como resultado se evidenció la importancia que tiene el uso de softwares para el proceso de Visualización al momento de resolver problemas porque los

estudiantes prefieren hacer gráficas, construcciones, esquemas sinópticos, transformaciones, y favorecer procesos como conteo, uso del lenguaje, gestos y uso de sistemas de representación. Además, con el uso de las TIC, los estudiantes tuvieron un mayor interés al participar activamente en clase, desarrollar todas las actividades planteadas y la búsqueda de varias soluciones.

La revisión de este antecedente demuestra la importancia de la Visualización para la resolución de problemas matemáticos porque los estudiantes recurren a ese tipo de representaciones visuales y que con el uso de las TIC motiva y genera interés en el aprendizaje de los estudiantes, lo cual se relaciona directamente con la presente investigación que propone uso de material manipulativo y en entornos digitales.

En Valle del Cauca, Colombia, Correa (2020) realizó una tesis de maestría mediante la cual buscó analizar los procesos de Visualización que permiten evidenciar que se está logrando una comprensión del tópico de áreas de figuras planas presentes en las producciones de los estudiantes de séptimo grado. Por lo cual, diseñó una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, es decir, utilizó la investigación de diseño, para guiar el aprendizaje del concepto de área. Este estudio se basó en la teoría semiótica-cognitiva propuesta por Duval mediante la exploración heurística, la descomposición y recomposición de figuras, el uso de trazos suplementarios, y la coordinación entre registros figurales y discursivos. Como resultado se evidenció que la comprensión del concepto de área no se da por la memorización de fórmulas, sino que se apropia favorablemente por medio de la Visualización (comparar, explorar y transformar figuras) para representar semióticamente esa comprensión, lo cual depende del diseño de recursos visuales que realice el profesor para guiar esa comprensión.

Esta investigación resalta la importancia que debe tener la exploración activa de figuras, en este caso de cuerpos geométricos como el cubo, en el que se valore que los niños relacionen lo

visual con lo verbal, es decir, que digan qué ven y cómo lo ven y así fortalecer el Pensamiento Espacial desde diversas edades escolares. También, en el aspecto del diseño progresivo de las actividades para comprender por medio de la trayectoria hipotética de aprendizaje cómo se da ese desarrollo en los procesos de Visualización.

2.1.3 Locales

En Vélez Santander, Niño y Ariza (2024) llevaron a cabo un estudio pedagógico aplicado encaminado a “fortalecer el Pensamiento Espacial y los sistemas geométricos mediante unidades didácticas apoyadas en GeoGebra 3D Realidad Aumentada en estudiantes de grado tercero de la sede Loma Seca”. Este objetivo implicó una metodología con enfoque mixto (cuantitativo y cualitativo), de tipo descriptivo-analítico, con modelo Investigación Basada en Diseño (IBD), orientada a 12 estudiantes de grado tercero de la sede Loma Seca, haciendo uso de instrumentos tales como: pruebas diagnósticas, pruebas finales, encuestas, validación de instrumentos, diario de campo. El proceso efectuado evidenció que antes de la intervención los estudiantes presentaban bajo desempeño en Pensamiento Espacial, poca motivación y problemas en representación geométrica; sin embargo, después de ser intervenidos se vieron mejoras notables en interpretación de figuras, uso de terminología geométrica y resolución de problemas, lo cual estuvo acompañado de una participación activa de los niños. En conclusión, la creación e implementación de unidades didácticas mediadas por GeoGebra 3D aporta al desarrollo efectivo de competencias espaciales y conlleva a la generación de ambientes educativos autónomos, colaborativos e innovadores.

El estudio ofrece diversos elementos metodológicos y valiosos que pueden ser considerados, por ejemplo, precisa de una estructura metodológica (IBD + THA implícita) que es coherente con la secuenciación lógica del aprendizaje; además integra método de enseñanza

aprendizaje integral que involucra el modelo de Van Hiele, la teoría del conectivismo, y el aprendizaje significativo de Ausubel.

En Girón Santander, Barraco et al. (2022) presentaron un estudio de maestría orientado a “fortalecer las competencias matemáticas en el ámbito espacial y geométrico mediante el uso del software GeoGebra para estudiantes de tercer grado del Colegio San Juan de Girón”. Este estudio pedagógico optó por una metodología con enfoque cualitativo y método Investigación Acción Pedagógica, involucró a 28 estudiantes de grado tercero, a quienes se les aplicó diversos instrumentos como entrevistas, cuestionarios, prueba de competencias, diarios de campo. Como resultado se obtuvo que inicialmente solo el 29% de las respuestas eran correctas, mientras que al final la tasa de respuestas correctas ascendió al 86%, por tanto, se hizo evidente una mejora en la comprensión de conceptos geométricos, el uso de representaciones y el desarrollo del Pensamiento Espacial, debido principalmente a un aumento en la motivación y participación generado por el uso de GeoGebra. En conclusión, GeoGebra es una herramienta didáctica valiosa para desarrollar competencias matemáticas, principalmente en Pensamiento Espacial y geométrico, debido a que esta promueve aprendizajes significativos, fomenta el trabajo colaborativo y aumenta el interés por las matemáticas.

Esta investigación es relevante porque proporciona evidencia empírica de que una estrategia similar mejoró significativamente el rendimiento y la comprensión matemática en un contexto escolar colombiano (Santander). Por otra parte, trae a colación teorías importantes como el aprendizaje significativo, y los niveles de Van Hiele para la geometría, lo cual es relevante al diseño de secuencias didácticas como las de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA).

En Bucaramanga, Santander, Bautista (2022) realizó una tesis de maestría en la que buscó establecer y diseñar una estrategia didáctica por medio del uso de GeoGebra para favorecer el

desarrollo del pensamiento geométrico y espacial en estudiantes de grado décimo de una institución educativa de carácter rural. Esta investigación es de corte cualitativo puesto que propicia el análisis de categorías como la innovación educativa, uso GeoGebra, Pensamiento Espacial, Pensamiento Geométrico y Secuencia Didáctica. El investigador hizo uso de pruebas hacia los estudiantes sobre manipulación de GeoGebra y de conocimientos previos sobre las temáticas, también utilizó el portafolio de actividades y el diario de campo para llevar a cabo la investigación. Por tanto, los hallazgos encontrados se relacionan directamente con uso de herramientas tecnológicas para desarrollar experiencias de aprendizaje significativos y mejorar los resultados académicos, en este caso, en matemáticas, debido a que los estudiantes con el software dinámico pueden simular y experimentar, lo cual ayuda a su comprensión práctica y conceptual.

De manera que, este trabajo investigativo aporta al presente proyecto en torno al uso de GeoGebra como una herramienta eficaz para fortalecer el Pensamiento Espacial de los estudiantes desligándose de una enseñanza tradicional, por lo cual, se motiva al estudiante con otras estrategias pedagógicas innovadoras.

En Berlín Santander, Rodríguez (2021) realizó un estudio que buscó “Fortalecer la competencia de razonamiento matemático desde el Pensamiento Espacial y los sistemas geométricos en estudiantes de tercer grado de un centro educativo de un sector rural a través de secuencias didácticas apoyadas con video tutoriales que ayudaron a mejorar el desempeño para el aprendizaje significativo”. Mediante el uso de la metodología de Investigación – Acción según Miguélez (2000) y Elliot (2000) con un paradigma crítico social, debido a que se da una participación y una colaboración por parte de los sujetos involucrados en el estudio. En donde se encontraron como resultados que los estudiantes desarrollaron niveles de Visualización y análisis geométrico según la teoría de Van Hiele. Así mismo, se evidenciaron progresos en cuanto a la

comparación y clasificación de objetos tridimensionales, como en la construcción y descomposición de figuras y sólidos bajo condiciones específicas, mediante el uso de material manipulativo y contenidos didácticos con la aplicación de una secuencia didáctica. Lo que permitió que no solo se diera un aprendizaje significativo si no que a su vez se fortaleciera el razonamiento matemático.

Este estudio aporta a la implementación de una estrategia didáctica en la que se propicia el aprendizaje significativo, ya que los estudiantes no solo adquieren conocimientos geométricos, sino que los interiorizan de manera estructurada. Así mismo, confirma la relevancia de aplicar actividades con el uso de material tangible y manipulativo para facilitar el desarrollo de habilidades espaciales en los estudiantes. Lo cual respalda la presente investigación al utilizar el Cubo soma como material clave para el desarrollo de las Habilidades de Visualización.

En Rionegro Santander, Villamizar (2021) llevó a cabo un estudio de magister para “fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría básica (figuras planas) en estudiantes de cuarto y tercer grado mediante el uso del software educativo GeoGebra en el aula”. La metodología empleada implicó un enfoque cuantitativo, con diseño cuasiexperimental, enfocado a los estudiantes de los grados cuarto y tercero de la I.E. Caña Brava, sede Rural Honduras. Como resultados se evidenció un nivel de mejora del 20% (pasó del del 66% al 86%) según el método de comparación de medias; esto indicó que los estudiantes tuvieron avances en las competencias requeridas para el uso de figuras geométricas, comprensión de área y perímetro. En conclusión, se evidenció que GeoGebra es una herramienta efectiva en el aula, no solo porque permite el aprendizaje visual y significativo de la geometría, sino que favorece su implementación en entornos rurales y puede sobreponerse a las limitaciones pedagógicas tradicionales.

Esta investigación es un referente práctico que muestra el impacto de la intervención con TIC en educación matemática básica. Por otro lado, aporta constructos teóricos valiosos relacionados con el constructivismo y la teoría del aprendizaje significativo (Ausubel), destacando la importancia de los conocimientos previos y la vinculación con lo visual.

En Floridablanca, Santander, Gonzáles (2018) realizó una tesis de maestría en la se propone describir las habilidades del pensamiento espacial desarrolladas a través de la implementación de actividades lúdicas con material manipulativo (logikubo) y tecnológico para el fortalecimiento del pensamiento espacial en niños de quinto grado de primaria. Esta investigación se realizó bajo el paradigma cualitativo por medio de 5 etapas que consistieron en la revisión de antecedentes y literaria; el diseño y la aplicación de actividades; y, el análisis de datos para las conclusiones.

Respecto al diseño y aplicación de las actividades se basaron en la manipulación del logikubo, con el que trabajaron la simetría, armado de cajas, figuras zoomorfas, vistas y estimación de volúmenes con el software de cubos y cubos para el fortalecimiento de las habilidades visuales descritas por Del Grande (1990), además se propuso actividades con punteado isométrico. En los hallazgos se encontró que los estudiantes a medida que juegan con las piezas del logikubo fortalecen las habilidades de visualización espacial, sin embargo es importante recordar el manejo del vocabulario correcto en geometría.

Dentro de los aportes de esta investigación a la presente, se considera este antecedente como una base o punto de partida para considerar a nivel investigativo los grados de escolaridad inferiores a grado quinto, como lo es el grado tercero al cual va dirigida la propuesta. Debido a que, se hace uso del logikubo, el cual se origina a partir del Cubo soma, además, explora un software de geometría dinámica como los es el de cubos y cubos. Por tanto, se da importancia al desarrollo de estas habilidades desde educación primaria y el uso de la tecnología, y así proponer

diferentes estrategias innovadoras para investigar el estado de desarrollo de las habilidades de visualización de los estudiantes.

En síntesis, las anteriores investigaciones propuestas como bases teóricas y didácticas para el presente estudio, concuerdan en los siguientes tres aspectos cruciales. Primero, hacen mención de la importancia desde el punto de vista didáctico al diseño de estrategias pedagógicas que propicien el uso del material manipulable y de recursos tecnológicos que favorezca el desarrollo del Pensamiento Espacial y de las Habilidades de Visualización. Segundo, el diseño de las THA para influir positivamente en la planificación, implementación y reflexión de los procesos de enseñanza - aprendizaje en relación con la investigación educativa. Finalmente, destacan el Pensamiento Espacial como un eje fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y el fortalecimiento de las competencias en los estudiantes.

2.2 Marco Teórico

2.2.1 Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia establece las competencias matemáticas las cuales orientan el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes desde educación básica hasta media; estas competencias se organizan en cinco pensamientos matemáticos fundamentales a saber: pensamiento y sistemas numéricos; Pensamiento Espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; pensamiento variacional y sistemas algebraicos. Dentro de estos pensamientos se da la actividad matemática a través de cinco procesos: 1) formular y resolver problemas; 2) modelar procesos y fenómenos de la realidad; 3) comunicar; 4) razonar, formular y comparar; y 5) ejercitar procedimientos y algoritmos. Todo esto con el objetivo de que los estudiantes sean competentes

matemáticamente al desarrollar habilidades que implican su proceso cognitivo (conocer), actitudinal (ser) y procedimental (saber hacer) (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

En lo que respecta la presente investigación, el objeto de estudio es el Pensamiento Espacial; en este contexto, según los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998) definen el Pensamiento Espacial como el conjunto de procesos cognitivos que desarrolla el estudiante para construir y manipular representaciones mentales de los objetos en el espacio, sus relaciones y sus transformaciones. De igual manera un enfoque más reciente del Ministerio de educación Nacional (2020) como se citó en Moreno (2024) refiere al Pensamiento Espacial como “un conjunto de procesos cognitivos que se encargan de elaborar representaciones mentales desde las acciones enmarcadas en el espacio para generar un acercamiento conceptual que beneficie este tipo de interpretaciones” (p. 116).

Acorde con Díez et al. (2024) el Pensamiento Espacial está constituido por “los conocimientos, habilidades y hábitos de la mente necesarios para organizar el espacio y, por tanto, los sujetos con un amplio dominio del Pensamiento Espacial resultarán miembros más resolutivos” (p. 279); bajo este enfoque, según lo propuesto por Araya (2017) “el conocimiento espacial entraña el aprendizaje y uso combinado de tres elementos claves: los conceptos de espacio, las herramientas de representación y las relaciones entre los elementos, y los procesos de razonamiento” (p. 132). En este contexto, el desarrollo del Pensamiento Espacial es clave para trabajar el pensamiento científico en la resolución de problemas, por lo cual, Howard Gardner lo considera en su teoría de las múltiples inteligencias como “inteligencia espacial” (como se citó en MEN, 1998).

Citando a Moreno (2024) en el desarrollo del Pensamiento Espacial se consideran siete habilidades claves que refieren a: coordinación ojo-mano, percepción figuras-fondo, constancia

perceptiva o de forma, percepción de posición en el Espacio, percepción de relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual. Tomando en cuenta estas habilidades integradoras, el Pensamiento Espacial es una habilidad esencial en la educación matemática que facilita la comprensión de conceptos abstractos y su aplicación en contextos reales.

Por otra parte, Fernández et al. (2012) y Ávila (2011) consideran que dentro de las características principales que precisa el Pensamiento Espacial se tienen: la Visualización mental o habilidad para imaginar figuras y objetos en diferentes posiciones, tamaños o formas; la manipulación y transformación o capacidad de transformar mentalmente objetos; el uso de representaciones gráficas para modelar objetos espaciales; la relación con el entorno o conexión entre las representaciones mentales y las experiencias físicas; y la dimensión cognitiva compleja, relacionada con el desarrollo de conceptos abstractos y la resolución de problemas, especialmente en matemáticas.

Según lo expuesto por autores como Santos (2021) y Carrascal et al. (2017) el Pensamiento Espacial es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en geometría, álgebra y cálculo; debido a que este: contribuye al razonamiento geométrico y visual; permite resolver problemas de la vida cotidiana que implican orientación, estimación y manipulación de formas y espacios; y favorece la construcción de conceptos abstractos a partir de la experiencia perceptual y la manipulación visual.

El desarrollo del Pensamiento Espacial los estudiantes adquieren múltiples beneficios, entre ellos: optimiza la capacidad de abstracción y el avance de lo concreto a lo simbólico; provoca el aprendizaje significativo al enlazar la manipulación de objetos con las nociones matemáticas; fortalece la creatividad y el pensamiento crítico para enfrentar problemas complejos y cambiantes; facilita el empleo de herramientas tecnológicas como GeoGebra, suscitando la innovación

pedagógica y el aprendizaje activo; e incrementa la motivación del alumno, principalmente cuando se utilizan estrategias didácticas apoyadas en TIC (Carrascal et al., 2017).

Según lo expresan Díez et al. (2024) las habilidades de orientación espacial y la construcción del Pensamiento Espacial forman parte de la geometría, que es la ciencia que estudia el espacio, y resultan imprescindibles para que el ser humano pueda desenvolverse en su día a día” (p. 279). En este sentido, “el desarrollo del Pensamiento Espacial y la enseñanza de la geometría en el área de las matemáticas es fundamental, ya que su desarrollo es potencializadora de múltiples y variadas formas de pensamientos” (Gonzáles, 2022, p. 30).

Puntualizando en el concepto propio de la geometría según lo expone Camargo y Acosta (2012) esta constituye una rama multifacética de las matemáticas que se encarga del estudio de las propiedades y relaciones de las figuras en el espacio. Conjuntamente, se piensa como una disciplina que se desarrolla entre dos polos: el empírico, propio de la intuición y Visualización, y el teórico, vinculado a la abstracción y formalización lógica, uno y otro ineludibles para el desarrollo del pensamiento geométrico. En este contexto, se vincula con dimensiones biológicas propias de la percepción y Visualización, físicas relacionadas con las propiedades espaciales del entorno, teóricas inherentes a las estructuras abstractas y aplicadas afines al modelado y resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento.

El aprendizaje de la geometría según lo exponen Martínez et al. (2023) y Aray et al. (2019) es esencial porque: favorece el desarrollo del habilidades de pensamiento lógico, abstracto y espacial, que son necesarias para la comprensión matemática y el razonamiento deductivo coherente; favorece la formación profesional y el desarrollo de soluciones técnicas y científicas; posee aplicaciones en la vida práctica en campos como la arquitectura, el arte, la navegación, el

análisis de datos y el desarrollo tecnológico; fortifica el aprendizaje de otras disciplinas relacionadas con las matemáticas como el álgebra, el cálculo, la física, la topografía, entre otras.

En lo que concierne directamente a los sistemas geométricos tal como argumenta Camargo y Acosta (2012) refieren a estructuras lógicas y formales que organizan el conocimiento geométrico mediante axiomas, definiciones y teoremas. Dentro de estos se incluyen la geometría euclidiana, proyectiva, descriptiva, analítica y las geometrías no euclidianas las cuales amplían el campo conceptual y aplicativo de esta disciplina. Estas permiten abordar diferentes propiedades invariantes bajo transformaciones y modelar realidades abstractas y complejas

Por tanto, desde el Ministerio de Educación Nacional (1998) en la transformación de la educación matemática, propone que la enseñanza y el aprendizaje de la geometría se debe realizar de manera activa a través de la interacción y exploración del individuo con el mundo que lo rodea por medio de sus sentidos al manipular objetos, dibujar, construir, reconocer las propiedades de figuras o cuerpos y las transformaciones que se pueden aplicar a los mismos, es decir, que el estudiante interiorice conceptos y fortalezca habilidades espaciales a través de su experiencia en el contexto escolar y en relación con su vida cotidiana.

2.2.2 Visualización y Razonamiento Espacial

En el campo de la educación matemática, la Visualización y el razonamiento espacial ha sido tema de investigación reciente por su relevancia en la comprensión de concepto geométricos y la resolución de problemas. Por lo cual, la Visualización ayuda a los estudiantes a interpretar, comprender, transformar, crear representaciones mentales de objetos y sus relaciones espaciales para diversas áreas del conocimiento. De manera que, diversos autores han destacado la importancia de desarrollar estas habilidades desde los primeros años de escolaridad para un aprendizaje significativo de las matemáticas en niveles superiores. El estudio de la Visualización

ha sido un campo que ha evolucionado a través del tiempo hasta llegar a perspectivas complejas que implican el procesamiento visual de imágenes. A continuación, se describe un breve recorrido cronológico por los principales aportes al campo de la Visualización y su impacto en la educación matemática.

Un punto de partida en el inicio del estudio de la Visualización se evidencia en la Antigua Grecia con Euclides en el siglo III A.C. quien en su obra *Los Elementos* sistematizó el conocimiento y la práctica de la geometría, con el uso de figuras y construcciones realizadas con regla y compás. Euclides estableció la base para comprender las propiedades geométricas y el pensamiento geométrico a través de 5 postulados: 1) Por dos puntos diferentes se puede trazar una única recta; 2) Las líneas rectas pueden extenderse de manera indefinida en ambas direcciones; 3) Se puede trazar un círculo con cualquier centro y radio; 4) Todos los ángulos rectos son iguales entre sí; 5) Si una línea recta cruza a dos líneas rectas de modo que, los ángulos internos de un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cruzarán de ese lado en el que se encuentran los ángulos menores (Byrne, 1847).

Posteriormente, entre los siglos XVI y XVII con el renacimiento a través de la expresión del arte plástico se realizó una comprensión del espacio en torno a la perspectiva en la pintura. Uno de sus mayores exponentes fue Leonardo da Vinci, en sus estudios sobre la luz y las condiciones atmosféricas en relación con los objetos (Rgó, 2015). Leonardo da Vinci consideró cuatro perspectivas: lineal, del color, desaparición y aérea (Rgó, 2015). Este tipo de estudio en la pintura fue conocido como la geometría proyectiva basándose en la geometría Euclidiana, en la cual los pintores como da Vinci, Rafael Sanzio y Alberto Durero aplicaban estos teoremas matemáticos para plasmar en sus lienzos objetos tridimensionales y así darles profundidad a sus pinturas en un plano (Blanco, 2006). Por tanto, da Vinci y otros artistas concibieron el espacio

desde un punto geométrico en el cual la Visualización se orientó como el estudio de los objetos figurativos dentro de un espacio determinado para plasmar perspectivas dinámicas dentro de la pintura (Vallejo 2012).

Tiempo después, en el año 1913, Poincaré concibe el espacio no solo como la parte física sino también como construcción de la mente, y que esta se forma a partir de la relación con el cuerpo, los movimientos y los sentidos (1913). Puesto que, para este autor el espacio es más allá de concebirlo como tridimensional, es el hecho de como interactuamos con él. Debido a que afirma que nuestros movimientos corporales permiten el surgimiento de la noción de espacio. Debido a que, al llegar ser individuos inmóviles perderíamos la capacidad de percibir el espacio y la geometría (Poincaré, 1913). Por lo tanto, Poincaré resalta la importancia de las experiencias sensoriales como: la visual (percepción del movimiento de los objetos), motora (como se mueve nuestro cuerpo) y coordinación de sentidos (observar y sentir un objeto al mismo tiempo); puesto que estas permiten las construcciones mentales del espacio (Poincaré, 1913).

Más adelante, en 1979, Lohman (1979) definió el concepto de habilidad espacial como la capacidad para generar, retener y manipular imágenes visuales abstractas. Por lo cual, propuso que para desarrollar la habilidad espacial se debe tener en cuenta diferentes procesos activos y complejos como la memoria y la manipulación mental de imágenes para resolver problemas (tareas). De manera que, propone tres factores que se conectan entre sí para el desarrollo de la habilidad espacial: 1) Relaciones espaciales: referido a la comprensión de la posición de los objetos en el espacio y sus relaciones; 2) Orientación espacial: relacionado a la localización y orientación en el espacio; 3) Visualización: asociado a la habilidad para crear y manipular imágenes mentalmente, es decir, imaginar movimientos y transformaciones geométricas. Por tanto, la integración de estos elementos es esencial para resolver tareas geométricas que contribuyan al

fortalecimiento del pensamiento geométrico en el que el estudiante tenga la capacidad de visualizar y manipular imágenes mentales en su mundo tridimensional.

Tiempo después Linn y Petersen en 1985 realizan una investigación con el fin de identificar las diferencias entre hombres y mujeres respecto a la capacidad frente el desarrollo de la habilidad espacial. En este estudio los autores realizan un análisis con la utilización de la perspectiva psicométrica, a través de las siguientes tres categorías: percepción espacial. Busca evaluar la capacidad de los individuos para determinar las relaciones espaciales con respecto a las orientaciones de sus propios cuerpos, a pesar de las distracciones que se encuentren en el problema a resolver; Rotación mental, capacidad de rotar un objeto o figura ya sea en 2D o 3D con precisión y rapidez y Visualización espacial, implica el uso de varios procesos (rotaciones mentales y percepción espacial) para resolver problemas (Linn y Petersen, 1985).

En otra instancia, el trabajo investigativo de Presmeg (1986) especifica el papel que desempeña las imágenes mentales en la Visualización, por lo cual realizó estudios con respecto al tipo de imágenes internas que preferían los estudiantes para resolver problemas y comprender las matemáticas. De manera que, identifica y clasifica diversos tipos de imágenes mentales al reconocer que no toda imagen mental requiere el nivel de abstracción que necesita la Visualización, al respecto Presmeg (1986) las define como:

- Imágenes concretas o pictóricas: Son imágenes en la mente como fotografías mentales que conservan los detalles del objeto.

- Imágenes patrones: Son imágenes que representan relaciones matemáticas en las que el estudiante identifica repeticiones, regularidades y estructuras organizadas.

- Imágenes de fórmulas: Son imágenes mentales en las que el estudiante ve la fórmula en su mente, ya sea porque la vio en el tablero o en el libro de texto.

- Imágenes dinámicas: Son imágenes mentales de la figura en movimiento o transformación.

- Imágenes cinestésicas: Son imágenes mentales que se crean a partir del movimiento corporal o manipulación física.

Estos tipos de imágenes mentales se relacionan entre sí y pueden coexistir dentro del pensamiento del estudiante durante su proceso de Visualización. Lo cual genera que se reconozca el uso de estos tipos de imágenes para el diseño de propuestas didácticas que fortalezcan las Habilidades de Visualización.

Además de los tipos de imágenes mentales, es relevante considerar los procesos de Visualización propuestos por Bishop (1989), quien identifica dos procesos cognitivos que se realizan durante la actividad matemática para comprender cómo los estudiantes utilizan la Visualización, en especial con la resolución de problemas al momento en que el estudiante procesa información externa (verbal, escrita, gráfica) y se relaciona con la información procesada en su mente, es decir la representa de manera visual. El primer proceso es la habilidad para interpretar información figural (IFI): La cual implica que el individuo realice una lectura, comprensión e interpretación de la información de las representaciones visuales y relacionarla con su contexto porque la interpretación depende para qué se usa la imagen y el material presentado. El segundo proceso es la habilidad para el procesamiento visual (VP): es la capacidad para manipular mentalmente las representaciones visuales sin necesidad de tener físicamente el material, por lo cual, permite al estudiante trabajar con información abstracta.

En síntesis, la IFI, depende del material para la interpretación en actividades geométricas y el VP no depende de cómo se presenta, sino de lo que el estudiante puede hacer mentalmente con esa representación.

Además, Bishop (1989) resalta la importancia de las habilidades espaciales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en vista de que la Visualización no solo aporta a la comprensión de conceptos geométricos, sino también a la forma de razonar matemáticamente. Por tanto, señala que la Visualización es un proceso complejo e individual, puesto que cada estudiante usa y genera diferentes tipos de imágenes mentales (basándose en la clasificación de Presmeg). De acuerdo con Bishop (1989), el estudiante usa o aprende a usar con entrenamiento específico ciertos tipos de imágenes mentales para razonar y solucionar problemas matemáticos, pasar de lo abstracto a lo tangible.

Por consiguiente, en las investigaciones realizadas por Gutiérrez (1996) menciona que la Visualización es el razonamiento que requiere de la manipulación de elementos visuales en el espacio, ya sea en la mente o de manera física. Por tanto, “la Visualización está integrada por cuatro elementos principales: Imágenes mentales, representaciones externas, procesos de Visualización y Habilidades de Visualización” (Gutiérrez, 1996 p. 9). Cada uno de esos elementos hacen parte del proceso de Visualización que lleva al estudiante a ser capaz de analizar y comunicar información visual de imágenes procesadas en la mente o las recibidas externamente por parte de compañeros, docente o textos. Además, la Visualización no se limita a observar y analizar, sino también se articula con el lenguaje oral y escrito lo que facilita y enriquece la comprensión en la geometría y las matemáticas.

En concordancia, para definir la Visualización se debe señalar la distinción entre visión y Visualización realizada por Duval (1999) quien indica que la visión hace parte de la sola percepción del objeto espacial puesto que no llega a ser una representación o imagen mental, porque no va más allá de la simple percepción visual que necesita del movimiento físico; en cambio la Visualización es una representación semiótica debido a que, requiere el representar mentalmente

aquello que no es accesible a la visión para una aprehensión visual completa. De manera que, la Visualización comprende la representación semiótica la cual es intencionada al pensar o comunicar en la resolución de problemas, por lo cual, no es lo mismo ver sin saber qué ver, qué visualizar y representarlo de manera interna o externa.

El concepto de Visualización que orienta este estudio corresponde a la propuesta por Arcavi (2003) quien asiente que:

La Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, el uso y la reflexión sobre dibujos, imágenes, diagramas en muestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión (p. 217)

En este sentido, la Visualización que propone Arcavi (2003) es una habilidad compleja que no solo se basa en la formación de imágenes mentales sino también en el uso de representaciones externas como los dibujos o las herramientas digitales. Por lo cual, implica que la Visualización no es un proceso pasivo, por el contrario, requiere de la interpretación, creación y reflexión sobre las representaciones realizadas para favorecer la comprensión geométrica al interactuar con objetos matemáticos abstractos.

Con base en estas definiciones y antecedentes teóricos de la Visualización, se encuentra el trabajo realizado por Van Garderen (2006), quien de acuerdo con Presmeg (1986) sobre los tipos de imágenes visuales, propone en sus investigaciones la resolución de problemas matemáticos para el desarrollo de la Visualización al distinguir dos tipos de imágenes visuales: pictóricas y esquemáticas, es decir, cómo los estudiantes algún tipo de imagen visual para comprender el problema, razonar y llegar a solucionarlo de manera correcta. Por ende, Van (2006) afirma que los estudiantes con habilidades espaciales altas utilizan imágenes esquemáticas, las cuales son

imágenes que representan relaciones espaciales de manera estructurada; mientras que, los estudiantes con habilidades con rendimiento bajo en habilidades espaciales o con dificultades utilizan imágenes pictóricas, que se refieren a representaciones visuales superficiales, es decir, basadas en la apariencia, forma, color.

Esta autora por tanto propone que según el tipo de imagen utilizada por el estudiante tiene un efecto en su rendimiento en Habilidades de Visualización para la resolución de problemas. De manera que, la enseñanza de la geometría y el fortalecimiento del Pensamiento Espacial debe incluirse actividades en las que se pueda desarrollar la habilidad para crear imágenes mentales esquemáticas, en las que el estudiante tenga la capacidad de generar y manipular mentalmente figuras y sus relaciones espaciales, lo cual podría fortalecer la resolución de problemas matemáticos.

Posteriormente, Gal y Linchevski (2010) abordaron las dificultades que enfrentan estudiantes de secundaria en geometría basándose en la percepción visual y la representación basada en la percepción (VPR) y en los procesos de Visualización de Bishop (1989). Estos autores señalan que las dificultades están relacionadas al proceso de percepción visual, al realizar una lectura de las características de las figuras, como la orientación, las relaciones espaciales, la descomposición mental, entre otras, por lo cual, no son errores de tipo conceptual sino de percepción y desarrollo de Habilidades de Visualización. Por tanto, es el docente quien debe propiciar tareas geométricas en la que se pueda mejorar esa percepción visual.

En el enfoque de VPR se considera tres fases: 1) Organización perceptiva: se basa en la información figural que hace el individuo en su percepción visual de las figuras en una etapa superficial como organizar los elementos que la componen; 2) Reconocimiento: es la identificación y procesamiento de las figuras con el uso de material que le permita acceder a esa

información sensorial y en relación a sus conocimientos previos, es decir, que reconozcan aspectos importantes más allá de lo que se ve a simple vista o de manera superficial; 3) Representación del conocimiento basada en la percepción: se refiere a la representación mental de las figuras o conceptos geométricos, sus transformaciones, lo cual es importante para razonar sobre las propiedades geométricas.

Por último, Duval en el año 2016 realiza un estudio con el fin de mirar las condiciones cognitivas de los estudiantes para que se dé, el aprendizaje de la geometría y el desarrollo de la Visualización. Puesto que, la enseñanza de las figuras en la escolaridad se da de manera restringida, al solo limitarse en el aprendizaje de las características más notables. Si embargo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría se hace necesario el uso de una amplia gama de actividades: observación, reproducción, construcción, descripción, definición, etc. (Duval, 2016). Por lo tanto, el autor propone una variación entre la tarea que se va realizar y la modalidad de la actividad, para que los estudiantes trabajen con las figuras o sobre ellas (Duval 2016). Para ello Duval propone cuatro maneras para distinguir las propiedades geométricas que se movilizan en relación con ese tipo de operaciones:

Tabla 1

Cuatro entradas clásicas de la geometría

	Botánico	Agrimensor / geómetra	Constructor	Inventor / artesano
1. Tipo de operación sobre las FORMAS VISUALES, requerida por la actividad propuesta	Reconocer formas a partir de cualidades visuales de un contorno: se privilegia UNA forma particular como TÍPICA.	Medir los bordes de una superficie: sobre un TERRENO o sobre un DIBUJO (variación de escala de magnitud y, por tanto, de	Descomponer una forma en trazos construibles con ayuda de un instrumento. Hay que pasar (a menudo) por TRAZADOS AUXILIARES que no pertenecen a la figura “final”.	Transformar unas formas en otras. Hay que agregar TRAZOS REORGANIZADORES en la figura final para inicializar esas transformaciones.

		procedimiento de medición).		
2. Cómo se movilizan las PROPIEDADES GEOMÉTRICAS con respecto al tipo de operación	No hay relaciones entre las diferentes propiedades (no hay definición matemática posible).	Las propiedades son criterios de selección para las mediciones que se deben hacer. Solo son útiles si remiten a una fórmula que permita un cálculo.	Como restricciones de un orden de construcción. Ciertas propiedades se obtienen mediante una sola operación de trazado, las otras exigen varias operaciones.	Implícitamente mediante remisión a una red más compleja (una trama de rectas para la geometría plana o una trama de intersecciones de planos...) que la figura de partida.

Nota. tomado de Duval (2016).

2.2.3 *Habilidades de Visualización*

Del Grande (1990) propone un conjunto de siete habilidades específicas para el proceso de Visualización que permiten analizar con profundidad los procesos mentales implicados en la comprensión geométrica y el razonamiento espacial. Estas habilidades abarcan desde la percepción básica de formas hasta operaciones mentales complejas como las transformaciones geométricas (rotación, traslación y reflexión), las cuales son fundamentales para el desarrollo del Pensamiento Espacial. Específicamente se refiere a: la coordinación óculo motora como capacidad de sincronizar la vista con los movimientos del cuerpo; percepción figura fondo es la capacidad de reconocer un elemento específico dentro de un entorno visual complejo; constancia perceptual que se refiere a la habilidad de reconocer una figura geométrica en variedad de tamaños, color, textura o posición en el espacio; percepción de la posición en el espacio, es la capacidad de ubicar y relacionar un objeto con respecto a uno mismo; percepción de relaciones espaciales, es la capacidad de reconocer cómo se ubican dos o más objetos en relación a uno mismo o entre sí dentro del espacio; discriminación visual, es la habilidad de observar cuidadosamente para identificar similitudes y diferencias entre objetos o figuras; memoria visual, es la capacidad de

recordar con precisión objetos o figuras que ya no están presentes en el campo visual. Estas habilidades se explican en la Tabla 2.

Tabla 2*Habilidades de Visualización*

Habilidad	Actividades que requieren de la habilidad	Objetivos de las actividades
1- <i>Coordinación óculo motora</i> capacidad de sincronizar la vista con los movimientos del cuerpo	Seguir trayectorias con precisión	Dibujar dentro de límites definidos, donde se siguen pautas, como trazar líneas a lo largo de caminos que pueden ser estrechos, rectos, curvos o angulados.
	Colorear o completar figuras.	Ajustar el movimiento de la mano para no salirse de los límites del espacio bordeado.
	Dibujar libremente, sin guías.	Implica dibujar sin pautas mediante la unión de puntos con líneas de distintas orientaciones (horizontales, verticales, diagonales o curvas).
2- <i>Percepción figura fondo</i> es la capacidad de reconocer un elemento específico dentro de un entorno visual complejo.	Encontrar una figura dentro de un conjunto superpuesto:	Localizar un objeto específico cuando varios elementos están mezclados.
	Completar una figura faltante.	Fortalecer la percepción de patrones y la habilidad de predecir formas
	Ensamblar una figura a partir de sus partes	Desarrollar el Pensamiento Espacial y la capacidad de visualizar la relación entre distintos componentes.
3- <i>Constancia perceptual</i> se refiere a la habilidad de reconocer una figura geométrica en variedad de tamaños, color, textura o posición en el espacio	- Identificar figuras que mantienen la misma forma	Desarrollar la noción de invariancia de la forma.
	- Organizar objetos según su tamaño	Fortalecer la comparación visual.
	- Reconocer figuras que conservan tanto el tamaño como la forma	Fortalecer la precisión en la observación y clasificación.
4- <i>Percepción de la posición en el espacio</i> es la capacidad de ubicar y relacionar un objeto con respecto a uno mismo	Comparar figuras congruentes	Desarrollar la habilidad de reconocimiento más allá de la orientación.
	Emparejar y organizar figuras geométricas	Fortalecer la atención a detalles espaciales como dirección y alineación
	Identificar movimientos	Promover la comprensión de transformaciones geométricas básicas.
5- <i>Percepción de relaciones espaciales</i> es la capacidad de reconocer cómo se ubican dos o más objetos en relación a	Determinar la ubicación de una figura con respecto a otra	Fortalecer el uso de referencias espaciales.
	Describir trayectorias o caminos entre objetos	Promover la interpretación de relaciones espaciales.
	Construir configuraciones con varias figuras	Mantener relaciones de posición y distancia.

Habilidad	Actividades que requieren de la habilidad	Objetivos de las actividades
uno mismo o entre sí dentro del espacio		
6- Discriminación visual es la habilidad de observar cuidadosamente para identificar similitudes y diferencias entre objetos o figuras.	Clasificar y ordenar objetos o figuras geométricas según atributos como el color, la forma, el tamaño	Promover la atención al detalle y la comparación
7- Memoria visual es la capacidad de recordar con precisión objetos o figuras que ya no están presentes en el campo visual	Observar una figura por un tiempo breve y luego reproducirla o compararla con otras	Fortalecer la retención de detalles visuales y la capacidad de evocarlos con precisión.

Nota. Elaboración propia con base en Del Grande (1990)

2.2.4 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

Daro et al. (2011) mencionan que una trayectoria hipotética de aprendizaje constituye un constructo o herramienta de planificación educativa que comprende: primero un camino hipotético o presunto de aprendizaje de los estudiantes cimentado en los niveles de comprensión; y segundo, ejemplos de actividades instruccionales para apoyar y favorecer la progresión en la comprensión. Según lo expuesto por Estrella et al. (2025):

La THA es un concepto que se utiliza para diseñar la enseñanza de disciplinas escolares, como matemáticas o estadística. Consiste en un objetivo de aprendizaje, un conjunto de tareas y una progresión hipotética de aprendizaje. Una THA pretende describir una posible ruta de aprendizaje compartida para la comunidad del aula y entregar una secuencia de patrones de pensamiento cada vez más sofisticados, basados en la teoría y evidencia de la investigación, que se espera que la mayoría de los niños sigan hacia el logro del objetivo de aprendizaje. (p. 17)

En otras palabras, citando a Aranda y Callejo (2010) la THA se expone como un proceso conjeturado o supuesto que describe o narra cómo un estudiante podría progresar o avanzar en la

comprensión de un concepto, a través de la formulación de objetivos de aprendizaje, tareas diseñadas y suposiciones sobre el proceso de aprendizaje. En este contexto, dicho proceso se enfoca al cumplimiento de una meta tomando como base los pensamientos y el aprendizaje (Amador y Montejo, 2016).

En suma, se puede afirmar que una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) es un constructo teórico-didáctico que constituye una herramienta metodológica cuya función principal es guiar el diseño de la enseñanza, es decir, sirve para planificar y orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) tiene sus orígenes en los preceptos de Simon (1995), quien la interpretó como una herramienta para planificar el proceso de aprendizaje enfocándose inicialmente a los conceptos matemáticos; su enfoque se enmarca en el constructivismo como una respuesta a la necesidad de conjugar la enseñanza basada en objetivos con la flexibilidad del aprendizaje. Su surgimiento hace parte de una investigación en Educación Matemática, sobre diseño didáctico y aprendizaje de conceptos complejos (Cárcamo y Fuentealba 2023; Ivars et al. 2020). Posteriormente, Tzur (1999, 2000) amplió la idea, enfocándose en la construcción de conceptos como la fracción, y luego en colaboración con Simon et al., (2004), profundizaron en la importancia de las tareas matemáticas dentro de la THA (Bocanegra et al., 2021).

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) según Simon (1995) como se citó en Cárcamo y Fuentealba (2023) y Aranda & Callejo (2010) cuenta con tres elementos o componentes que son: 1) meta u objetivo de aprendizaje; 2) tareas o actividades de aprendizaje que son diseñadas para promover la comprensión del concepto que se quiere impartir; y 3) el proceso de aprendizaje hipotético, el cual se sustenta en conjeturas realizadas por el docente en

relación a cómo los estudiantes avanzarán hacia la meta de aprendizaje. en conjunto estos tres componentes interactúan entre sí, es decir, las tareas dependen de las hipótesis, y estas a su vez se ajustan a partir de la implementación de las tareas.

El diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) según lo expuesto por autores como Amador y Montejo (2016); Aranda y Callejo (2010) y Bocanegra et al. (2021) se realiza bajo unos supuestos en los cuales se presume que: el aprendizaje es un proceso dinámico y flexible, además de ser progresivo y estar basado en concepciones previas; las tareas diseñadas son guías que deben activar capacidades y generar reflexiones; las dificultades de los escolares son una fuente para interpretar el aprendizaje, la reflexión sobre la relación actividad-efecto es clave para generar nuevas comprensiones, la enseñanza debe ser flexible, el docente debe observar, interpretar y ajustar la trayectoria si así se requiere.

En lo que concierne a la importancia de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, de acuerdo con Cárcamo et al. (2023); Amador y Montejo (2016) e Ivars et al. (2020) esta se consideran relevante debido a los siguientes aspectos: ofrece una estructura para comprender los caminos de aprendizaje y errores; anticipa caminos de aprendizaje, permitiendo al docente planificar, ajustar y guiar la enseñanza, lo que favorece la identificación de los caminos de aprendizaje; facilita la comprensión de conceptos complejos; favorece la reflexión sobre la relación entre actividad y efecto en el aprendizaje; es decir, promueve un aprendizaje más reflexivo, activo y contextualizado; ayuda a los docentes a interpretar las estrategias de los estudiantes y a tomar decisiones pedagógicas fundamentadas, conllevando a generar tareas específicas para cada etapa del aprendizaje; permite diseñar estrategias didácticas basadas en evidencia; y favorece la mejora continua del diseño instruccional mediante ciclos iterativos de experimentación y ajuste.

2.2.5 Uso de la Tecnología en la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría

Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) se refiere al conjunto de herramientas, recursos y programas informáticos que permiten almacenar, procesar y transmitir información por medio de diversos medios (imágenes, videos, voz, entre otros) (Ley 1341 de 2009, art. 6). Esta ley establecida por el Ministerio de Comunicaciones en 2009 creó la promoción al acceso masificado del uso de las TIC. Por lo cual, el uso de las TIC impactó la educación, como una herramienta educativa que permite al docente mejorar la planificación de su enseñanza y así contribuir a un aprendizaje más efectivo y menos tradicional, lo que conlleva a una renovación e innovación del proceso educativo (Hernández, 2019).

Por lo tanto, la UNESCO (2024) enfatiza en que las TIC son una necesidad social que garantiza la calidad y el acceso a la educación, lo cual se puso en descubierto durante la pandemia de COVID-19. En la que se evidenció la importancia de las TIC para transformar la educación en ambientes de aprendizaje inclusivos y abiertos.

En otra instancia, el uso de las TIC en las matemáticas, según Muñoz (2012) “no son por sí solas, agentes de cambio en la enseñanza de las matemáticas, sino que son una herramienta que el docente tiene a su disposición para apoyarse y generar ambientes diferenciados en el aula” (p. 39). De esta manera, el éxito de la enseñanza de las matemáticas con el uso de las TIC depende de la forma en que el docente planea y hace uso de la tecnología en los procesos de aprendizaje-enseñanza para potencializarlos. Por ende, la creación de entornos educativos mediados por la tecnología permite a los estudiantes mejorar su percepción del aprendizaje en apoyo con el saber pedagógico del docente con respecto a las posibles metodologías que puede aplicar con la tecnología (Muñoz, 2012).

Por consiguiente, el uso de tecnologías digitales como software dinámicos se ha convertido en un recurso fundamental en la enseñanza de la geometría. Estas herramientas permiten la representación visual de manera dinámica, lo cual ayuda a comprender conceptos matemáticos complejos. Por tanto, apoya a la representación visual que produce el estudiante al enfrentarse a conceptos geométricos a diferencia del solo dibujo o el uso de libros de texto con figuras planas - estáticas. Su uso en el aula permite que los estudiantes se enfoquen en el análisis y la resolución de problemas, en lugar de centrarse en los procedimientos. Así, la tecnología promueve una participación más activa y significativa en el aprendizaje de las matemáticas, en especial, en el desarrollo del Pensamiento Espacial (NCTM, 2000).

Además, la enseñanza de la geometría en Educación Primaria se fortalece mediante el uso constante de representaciones visuales, tanto físicas como digitales. Estas representaciones, al estar integradas con softwares dinámicos como GeoGebra, potencian la comprensión espacial desde una perspectiva visual e interactiva (Arteaga et al., 2019). En este sentido, la tecnología complementa la enseñanza de la geometría e influye directamente en los contenidos y estrategias pedagógicas que se emplean para la mejora del aprendizaje de los estudiantes (Gutiérrez et al., 2018).

2.2.5.1 GeoGebra.

GeoGebra es un software dinámico que permite explorar conceptos matemáticos de manera interactiva, lo que facilita la Visualización y comprensión de la geometría, el álgebra y el cálculo. Tiene la capacidad para combinar gráficos, álgebra y hojas de cálculo en una sola plataforma lo que proporciona un aprendizaje activo, puesto que permite a los estudiantes experimentar con transformaciones geométricas y propiedades algebraicas de forma visual e inmediata.

Por tanto, es un recurso educativo digital que permite crear figuras bidimensionales y tridimensionales para identificar sus características y propiedades. Fue creado y programado por

Markus Hohenwarter en el marco del desarrollo de su tesis de Maestría, presentada en el año 2002, por lo cual creó el programa para que los docentes tuvieran la facilidad de enseñar conceptos difíciles de aprender (Arteaga et, al. 2019). De manera que, GeoGebra es de acceso libre, gratuito y de fácil manipulación.

2.2.6 Uso de Material Manipulativo y Concreto: Cubo de Soma

Es un rompecabezas geométrico en 3D (3 Dimensiones), con siete piezas formadas con cubos que hay que unir para obtener un cubo mayor (conformado por un total de 27 cubos) además de otras figuras. Fue creado por Piet Hein en los años noventa. Se dice que durante una conferencia de Hein empezó a pensar en los distintos policubos que se podían obtener uniendo varios cubos del mismo tamaño, y comprobó que todos los policubos irregulares formados por cuatro o menos cubos sumaban un total de 27 cubos, y podían unirse en un cubo mayor con tres cubos de arista. Posteriormente, el matemático John Conway comprobó que había 240 formas distintas de resolver el problema principal. Con las piezas del cubo soma se pueden crear otras formas, con diseños geométricos más o menos interesantes o incluso diseños figurativos (Hein, 1969).

Unidad Básica (Cubo). Es un cuerpo formado por seis caras que son cuadradas. La particularidad de estos cuerpos es que todas las caras son congruentes, están dispuestas de forma paralela y de a pares, y tienen cuatro lados.

2.3 Marco Conceptual

2.3.1 Aprendizaje Basado en Juegos

El aprendizaje basado en juegos (ABJ) es una metodología activa que propone tener en cuenta la lúdica como naturaleza del niño para facilitar su aprendizaje en el desarrollo de sus habilidades cognitivas, sociales y emocionales. Por tanto, el (ABJ) potencia la motivación en el proceso de enseñanza - aprendizaje, dado que se convierte en una herramienta eficaz para poner

en juego los conocimientos y desarrollar habilidades esenciales en diversas áreas (Solas et al., 2023). Por lo tanto, se ha evidenciado que el juego en los procesos educativos potencia la participación activa, la autonomía, el interés por aprender y el procesamiento de la nueva información para convertirla en aprendizaje.

Los estudios realizados por Piaget (1962) sobre el juego infantil permite identificar la manera en cómo los niños utilizan el juego como un mecanismo de asimilación que les ayuda a integrar nuevos conocimientos (acomodación) a sus esquemas mentales. En tal sentido, se recalca la importancia del juego simbólico, no como una actividad recreativa sino una manera de interpretar experiencias de la realidad y construir pensamiento con respecto al mundo que les rodea.

Por consiguiente, el juego es de gran valor educativo al ser considerado como recurso didáctico por medio del cual los estudiantes pueden desarrollar técnicas intelectuales que les permitirá tener una mejor actitud positiva frente al trabajo a realizar y, por tanto, facilita la enseñanza (Ferrero, 2004). Además, desde el campo de las matemáticas, el juego se propone como una alternativa ante la apatía de los estudiantes por esta área y puede crear una base inicial para su posterior formalización del pensamiento matemático. Por tanto, no son un conjunto de actividades recreativas, por el contrario, se hacen con una finalidad educativa, ya sea para iniciar un tema, estimular el razonamiento lógico y el pensamiento crítico (Ferrero, 2004).

En complemento con Ferrero, desde años atrás Dienes ya advertía que las matemáticas no se pueden basar en la sola memorización, sino que es importante adoptar un proceso cíclico de aprendizaje que propicie el desarrollo de conceptos a través de la exploración lúdica. Por lo cual, propuso el uso de materiales concretos, como bloques de diferentes bases numéricas, balanzas con ganchos, anillos, tiras, entre otros para enseñar conceptos matemáticos. En este caso, el ABJ utiliza

el juego como una forma lúdica de adquirir conocimientos por medio de la determinación de objetivos académicos que garanticen la transferencia del aprendizaje más allá de la experiencia lúdica, es decir, el contenido se adapta al juego (Solas et al., 2023).

En síntesis, los juegos apoyan el desarrollo de habilidades cognitivas como la resolución de problemas para que los niños sean capaces de enfrentar diversas situaciones aplicadas a su vida cotidiana, y se fomenta la toma de decisiones y el pensamiento crítico, lo cual le será útil dentro y fuera del aula.

2.3.2 Aprendizaje Basado en Problemas

El aprendizaje basado en problemas (ABP) según lo expuesto por Gutiérrez et al. (2012) es una pedagogía activa de aprendizaje que parte de los conocimientos previos de los estudiantes para presentarles un problema o reto en el cual deben buscar diferentes estrategias de solución con el objetivo de desarrollar nuevos conocimientos. Al momento de proponer el problema al estudiante, este tiene la necesidad de formular hipótesis para solucionar el mismo basándose en lo que conoce. Por tanto, es una pedagogía centrada en el estudiante, en la cual el docente basa su enseñanza en los intereses de sus estudiantes y se muestra como una guía para que estos alcancen los objetivos de aprendizaje (Gutiérrez et al., 2012).

A través de la resolución de problemas, los estudiantes desarrollan el razonamiento crítico, porque no se centra en el producto o solución del problema sino en el proceso por el cual tuvo que pasar el estudiante para llegar a solucionarlo (Gutiérrez et al., 2012). Es decir, la toma de decisiones que ejecutó en las cuales razonó en vez de realizar procedimientos memorísticos. Sin embargo, esto depende del éxito en el diseño y planteamiento del problema, en el conocimiento del docente para abordar el contenido a enseñar y cómo lograr los objetivos de aprendizaje a proponer.

El esquema a seguir del ABP comienza según Gutiérrez et al., (2012) desde la presentación del problema en diferentes formatos (texto, mapa, imagen, entre otros) por lo cual se trata de una situación que pone a pensar al estudiante. Por tanto, es una situación que provoca el interés y la búsqueda de soluciones en los estudiantes. Luego, se genera entre todos los estudiantes y el docente una lluvia de ideas, las cuales serán las hipótesis sobre cómo solucionar el problema. A medida que los estudiantes participan en equipos o de manera colaborativa se busca razonar qué camino o estrategia se va a seguir para dar solución a la situación problema. Finalmente, se realiza una validación de las hipótesis hechas por los estudiantes, esto con la guía del docente y se deriva a una discusión de las soluciones planteadas para construir nuevos conocimientos (Gutiérrez et al., 2012).

Desde otra perspectiva, Santos (2007) propone la resolución de problemas como un aspecto importante dentro del proceso educativo, debido a que desarrolla el pensamiento crítico en los estudiantes. En contraste con la enseñanza tradicional en la que se trabaja la resolución de problemas desde la ejemplificación de una sola solución correcta, lo cual, lleva a los estudiantes a pensar que solucionar problemas se refiere a ejecutar el mismo procedimiento.

Santos (2007) menciona a Polya en cuanto al proceso para resolver problemas en tres etapas: 1) Entender el problema: cuáles son los datos, cuál es la pregunta, cuáles son las condiciones; 2) Diseñar un plan, para buscar estrategias, en algunas ocasiones análogas a los problemas que ha trabajado el estudiante y así proponer un plan de resolución; 3) Ejecutar el plan, es decir, resolver el problema y evaluar la solución (como se citó en Santos, 2007). Por consiguiente, Santos (2007) menciona que en una situación problema debe estar compuesta por los siguientes elementos: la existencia del interés por la solución por parte del estudiante para resolver el problema, y que, el enunciado no lleve a una sola solución o de manera inmediata, es

decir, que tenga diversos métodos de solución desde un lenguaje algebraico, geométrico o numérico.

2.4 Marco Legal

En los Estándares Básicos de Matemáticas (2006) proponen los criterios de niveles básicos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En cuanto al Pensamiento Espacial, al igual que en los lineamientos, se propone la geometría activa por medio de la manipulación y la representación de los objetos en el espacio con el uso de softwares dinámicos para el trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales para favorecer la comprensión geométrica respecto a las transformaciones ocurridas y los movimientos en el plano.

Del mismo modo, los principios y estándares para la educación matemática (NCTM) que son el consejo nacional de profesores de matemáticas los encargados de mejorar los estándares de matemáticas (NCTM, 2000) tienen como principio de aprendizaje y enseñanza que los estudiantes aprendan matemáticas a través un modelo constructivista en el que se tenga en cuenta lo que saben, lo que necesitan aprender y cómo lo van a aprender. A diferencia de los lineamientos curriculares de Matemáticas en Colombia proponen el Pensamiento Espacial y sistemas geométricos como el estudio de la geometría, las formas y estructuras geométricas para el análisis de sus propiedades y relaciones. Por tanto, destacan la Visualización para el desarrollo del Pensamiento Espacial, como la referida a la construcción y manipulación de representaciones mentales de objetos bidimensionales y tridimensionales para percibir un objeto en diferentes perspectivas (NCTM, 2000).

Dentro de los estándares de geometría se propicia el análisis de las de las propiedades geométricas en 2D y 3D, el fortalecimiento de la Visualización, el razonamiento espacial y la

resolución de problemas desde temprana edad para el desarrollo de Habilidades de Visualización por medio de experiencias prácticas que involucren el uso de material concreto, manipulativo y tecnológico (NCTM, 2000).

3 Aproximación Metodológica

El presente capítulo se estructura a partir de la necesidad de comprender el desarrollo progresivo del aprendizaje en contextos naturales, en el aula de clase a través del diseño, aplicación y reflexión de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA).

De forma general, se expone una investigación de nivel interactivo, en razón a ello, se ahonda en la relación que existe entre los agentes implicados en el proceso para transformar, proponer cambios y monitorear los resultados como el docente de aula-el investigador y sujetos participantes, es decir los estudiantes. Por ende, se propone bajo un modelo epistémico del pragmatismo, ya que relaciona la teoría con la práctica. Es decir, a la luz de la teoría, dificultades y antecedentes se propone un plan de acción que dé solución a un problema en concreto dentro del aula, en este caso, la transformación del desarrollo de las Habilidades de Visualización y su importancia dentro del Pensamiento Espacial para la formación integral del estudiantes en la búsqueda y solución de problemas de manera creativa en su vida cotidiana en la que hace uso de vocabulario espacial, orientación y dirección, memorización y discriminación de cuerpos tridimensionales.

3.1 Enfoque, Diseño y Tipo de Investigación

A partir de la consolidación del problema, la presente investigación se enmarca en el enfoque cualitativo, que busca comprender fenómenos o problemas desde la “la perspectiva de los

participantes en un ambiente natural y en relación a su contexto” (Hernández et al., 2014, p. 358). Desde esta perspectiva, se pretende analizar la manera en que los sujetos de estudio interactúan y experimentan con el problema a abordar, y así, profundizar en sus interpretaciones y recoger información relevante para la investigación.

Por tal razón, permite al investigador desarrollar de manera flexible hipótesis o preguntas antes, durante y después en relación con los datos recogidos y analizados (Hernández et al., 2014). Desde esta perspectiva, es crucial que el investigador se interese en las vivencias de los sujetos de investigación, sus interacciones con el problema y el plan propuesto, emociones, interpretaciones y experiencias que hacen parte del fenómeno a estudiar. De tal modo que, el investigador pueda recolectar datos y analizarlos para construir conocimiento o apoyarse de teorías que sustentan su trabajo.

A través de este enfoque, permite un constante va y viene de la lectura de referentes bibliográficos, observación, trabajo en campo y análisis del investigador, lo cual facilita la exploración y descripción dentro del contexto para el desarrollo de Habilidades de Visualización en niños de tercer grado del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana, y así, diseñar e implementar una propuesta de trabajo que dé sustento a las conclusiones finales sobre el problema abordado.

En este sentido, el diseño de la presente investigación se aborda desde la dimensión táctica de fuentes vivas, debido a que las investigadoras se encuentran en el contexto natural, en este caso el aula de clases, por lo cual es una investigación de campo y desde una perspectiva temporal contemporánea (Hurtado, 2010). En este estudio se eligió por un diseño cuasiexperimental, por lo que se realiza un experimento de enseñanza en el cual no hay un control rígido de las variables, pero si se manipula la variable independiente para explicar su efecto o cambios que produce en la

variable dependiente (Hurtado, 2010). Además, el grupo seleccionado no son formados al azar, ya que estos se encuentran organizados previamente a la experimentación por el colegio. De manera que, se busca comprender y dar una posible solución al problema a partir de qué cambios se obtienen luego de la implementación del experimento de enseñanza con el uso de la THA, cubo soma y Geogebra en el desarrollo de las Habilidades de Visualización.

Por ende, se realiza la búsqueda de información a través del uso de fuentes primarias y secundarias con el fin de teorizar y fundamentar la metodología. Las fuentes primarias utilizadas son libros, artículos, revistas, tesis, documentos oficiales, pruebas diagnósticas, entre otros; y, las fuentes secundarias usadas se consideraron resúmenes de artículos, libros y tesis, es decir, son creados por terceras personas que utilizaron fuentes primarias (Hurtado, 2010).

Con respecto al corte de la investigación, se enmarca en un diseño transeccional, puesto que se propicia la observación de un grupo de estudiantes en un tiempo escolar definido para determinar los cambios en tornos a las Habilidades de Visualización en el desarrollo del experimento de enseñanza. Por lo cual, el corte transeccional recoge información en un solo momento en el tiempo sobre el problema a abordar, independientemente de la recolección de datos en el diagnóstico, experimento y análisis de los resultados (Hurtado, 2010).

3.2 Población y Muestra

La población de la investigación son estudiantes del grado tercero de primaria del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana, ubicado en la ciudad de Floridablanca - Santander. Este colegio se caracteriza por ser de carácter público y provee de una infraestructura física que posibilita el desarrollo de actividades académicas con normalidad, como salones dotados de recursos tecnológicos, lo que facilita el proceso de enseñanza y aprendizaje. Así mismo, participa

de diferentes Proyectos Institucionales promovidos por el Ministerio de Educación Nacional que promueven el fortalecimiento de competencias y la innovación pedagógica.

La muestra fue seleccionada a partir del muestreo por conveniencia, debido a que las investigadoras optaron por un grupo de estudiantes en específico, por razones de accesibilidad y por características particulares del grupo que facilitan el contexto investigativo. Por tanto, se presenta la siguiente tabla 3 de criterios de inclusión para la selección de la muestra, en este caso, del grupo uno de tercero con un total de 34 estudiantes participantes de la Sede D del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana del municipio de Floridablanca - Santander en el que se encuentran niños y niñas en edades que oscilan entre los 7 y 9 años.

Tabla 3

Criterios de inclusión para la selección de la muestra

Criterios de Inclusión	Descripción / Justificación
<i>Comportamiento</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Actitud y participación para el desarrollo de las actividades. - Habilidades para el trabajo en equipo. - Ambiente de aprendizaje propicio para el contexto investigativo. - Capacidad de escucha activa y percepción de la indicación.
<i>Características cognitivas</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Dificultades en las Habilidades de Visualización que se abordarán en la propuesta. - Dificultad para reconocer una figura desde distintas perspectivas visuales. - Dificultades para construir e imaginar figuras a partir de las piezas del Cubo soma. - Baja capacidad en el uso de vocabulario geométrico para verbalizar relaciones espaciales.
<i>Capacidad de manipular material concreto y herramientas digitales</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Existe interés por el material manipulativo, pero hay inseguridad en el momento de ensamblar las piezas. - No tiene mayor experiencia en el uso de GeoGebra.
<i>Consentimiento informado</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Garantiza la participación y ética de los estudiantes, por parte de sus acudientes.
<i>Asentimiento</i>	<ul style="list-style-type: none"> -Garantiza la participación y ética de los estudiantes.

Nota. Elaboración propia

3.3 Método

Esta investigación se caracteriza por ser interactiva que según Hurtado (2010) hace referencia a las acciones que realiza el investigador para modificar el evento de estudio. En este caso, se aplica un experimento de enseñanza cimentado en las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) para transformar las Habilidades de Visualización. Para la realización de una investigación interactiva se parte de los siguientes procesos: la descripción, el análisis y la explicación para diseñar un experimento de enseñanza y llevarlo a cabo.

De manera que, adopta el método de investigación de diseño, con el objetivo de analizar por medio del diseño y de manera sistemática el aprendizaje y la enseñanza en congruencia con la evaluación (Molina et al., 2011). Este método, permite la relación mutua entre el diseño instruccional y la investigación educativa, por lo cual el investigador crea ambientes de aprendizaje que le permita obtener información para el análisis continuo y así, realizar mejoras al diseño propuesto inicialmente. Por tanto, se concentra en realizar ciclos iterativos en los cuales, los docentes-investigadores experimentan y refinan conjeturas sobre el fenómeno de aprendizaje a abordar (Molina et al., 2011).

De manera que, en la investigación de diseño se crean experimentos de enseñanza definidos como una secuencia de clases aplicada dentro de una ecología de aprendizaje (tareas, discurso, interacciones, normas y ambiente del aula) en la que participan, en este caso, el docente-investigador y un pequeño grupo de estudiantes (Cobb et al., 2003). Es decir, se trata de identificar y explicar los esquemas mentales progresivos de los estudiantes mediante las tareas propuestas y el material utilizado. Con el objetivo de generar un desarrollo progresivo del aprendizaje de los estudiantes a través de la experimentación, postulación de hipótesis y reformulación de las mismas de ser necesario (Molina et al., 2011). Por ende, se trata de buscar y mejorar la intervención

educativa mediante propuestas innovadoras que concuerden con la generación actual y digital (Cobb et al., 2003).

Cabe resaltar que es importante conocer que los experimentos de diseño deben ser evaluados a través de la “fiabilidad, replicabilidad, capacidad de generalización y utilidad” (Cobb et al., 2003, p. 78). Lo que significa que debe tener la posibilidad de que los docentes puedan replicar y adaptar el experimento en otros contextos y sean útiles para la investigación educativa en la didáctica matemática.

Es por ello que, la investigación de diseño por experimentos educativos se crea a partir de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) como instrumento iterativo, que se refiere al desarrollo progresivo de aprendizaje de los estudiantes con respecto a un dominio matemático en específico. Es decir, es la construcción de una ruta de enseñanza-aprendizaje que contiene hipótesis y el diseño de tareas instruccionales sobre cómo promover esos procesos mentales o acciones que los estudiantes deben realizar de manera progresiva en el pensamiento con el objetivo de lograr que los estudiantes tengan ese dominio matemático propuesto (Estrella et al., 2025).

Por tal razón, la THA permite al docente planificar y guiar la enseñanza de conceptos matemáticos al tener en cuenta los saberes previos de los estudiantes y comprender el progreso de aprendizaje de los sujetos involucrados (Cárcamo et al., 2023).

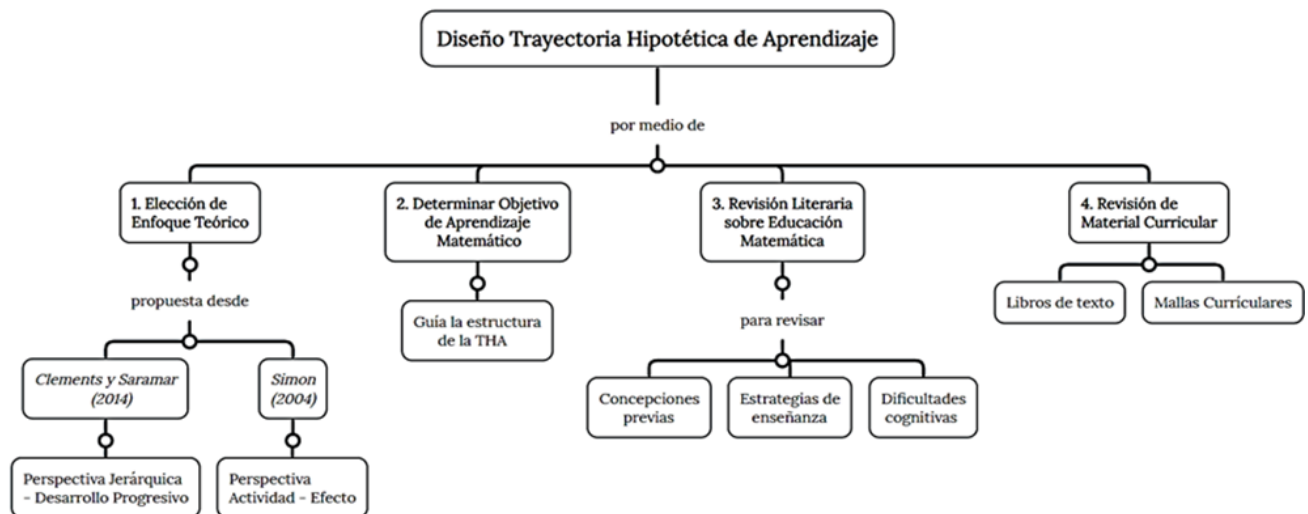
Por tanto, una THA se propone como un camino instructivo y pedagógico que orienta el desarrollo progresivo de aprendizaje de los estudiantes desde unos puntos de partida (concepciones previas, revisión literaria y curricular) hasta unos puntos finales (metas, objetivos de aprendizaje). Por ende, la secuenciación de tareas planteadas está establecida por un orden jerárquico de niveles de pensamiento, de menor a mayor grado de complejidad, y así, los estudiantes puedan progresar y completar la trayectoria hipotética (Aranda y Callejo, 2010). Las THA responden a diversas

preguntas: ¿Cuál es la meta a alcanzar? ¿Por dónde se empieza? ¿A dónde ir después? ¿Cómo llegar a la meta? (Clemens y Sarama, 2021). Estas preguntas son cruciales para que el docente comprenda las THA como un camino de enseñanza y conocimiento sobre cómo sus estudiantes aprenden. De modo que, sea capaz de construir ambientes de aprendizaje adecuados para que sus estudiantes desarrollen y fortalezcan capacidades y competencias matemáticas.

Por consiguiente, según Cárcamo et al., 2023; Bocanegra et al., 2021; Amador y Montejo (2016) el modelo para el diseño de una THA debe basarse en los pasos que se muestran en la Figura 6.

Figura 6

Procedimiento para el diseño de la THA según Cárcamo et al., 2023; Bocanegra et al., 2021; Amador y Montejo (2016)



Nota. Elaboración propia

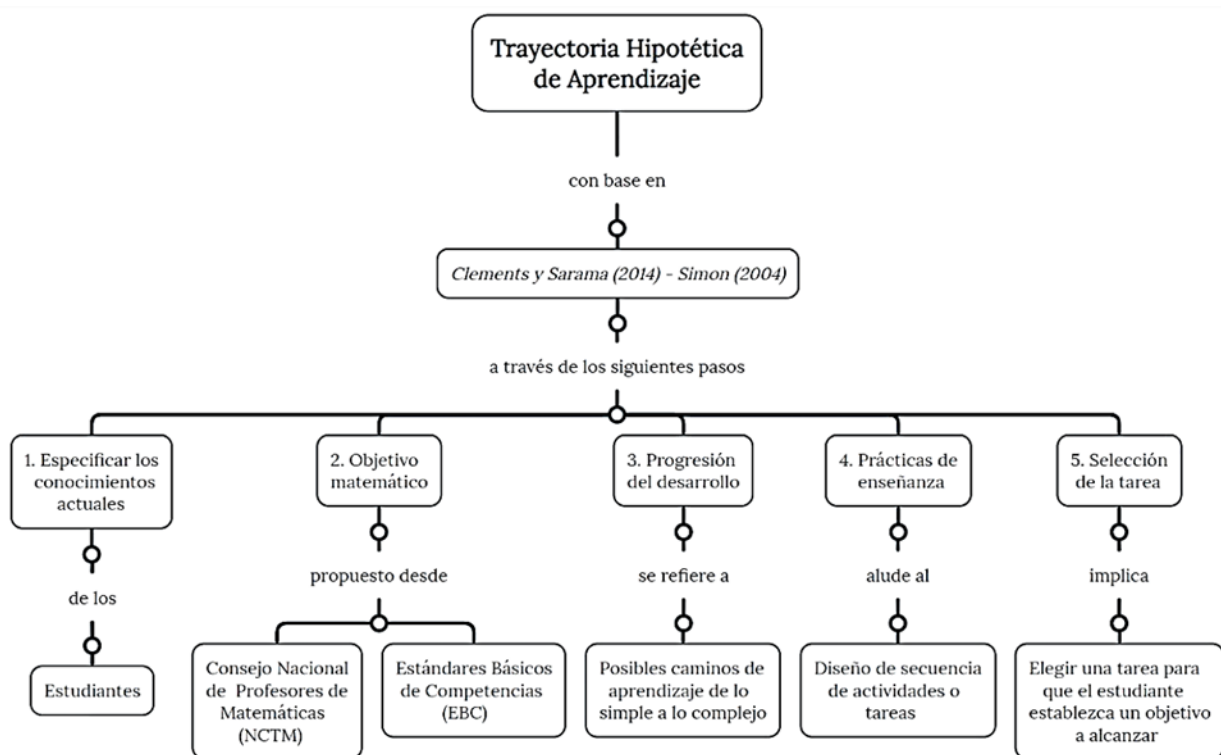
Estos pasos para la construcción de THA, fundamentan la importancia del conocimiento que debe tener el docente para crear ambientes de aprendizaje en los que se propicie un desarrollo progresivo tanto en los niveles de pensamiento como en las tareas a proponer. De esta manera, se busca favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes al abarcar desde los

elementos o ideas matemáticas con los que cuenta hasta reconocer las posibles dificultades y estrategias para abordar el contenido que permita movilizar el pensamiento matemático de los estudiantes.

Por consiguiente, desde el enfoque teórico seleccionado por las investigadoras, las trayectorias de aprendizaje se organizan en los siguientes pasos propuestos por Clemens y Sarama (2021) y Simon et al., (2004): 1) Especificar los conocimientos actuales de los estudiantes; 2) Objetivo matemático; 3) Progresión del desarrollo; 4) Prácticas de enseñanza; 5) Selección de una tarea. (Ver Figura 7).

Figura 7

Procedimiento para el diseño de la THA según Clemens y Sarama (2021) y Simon et al., (2004)



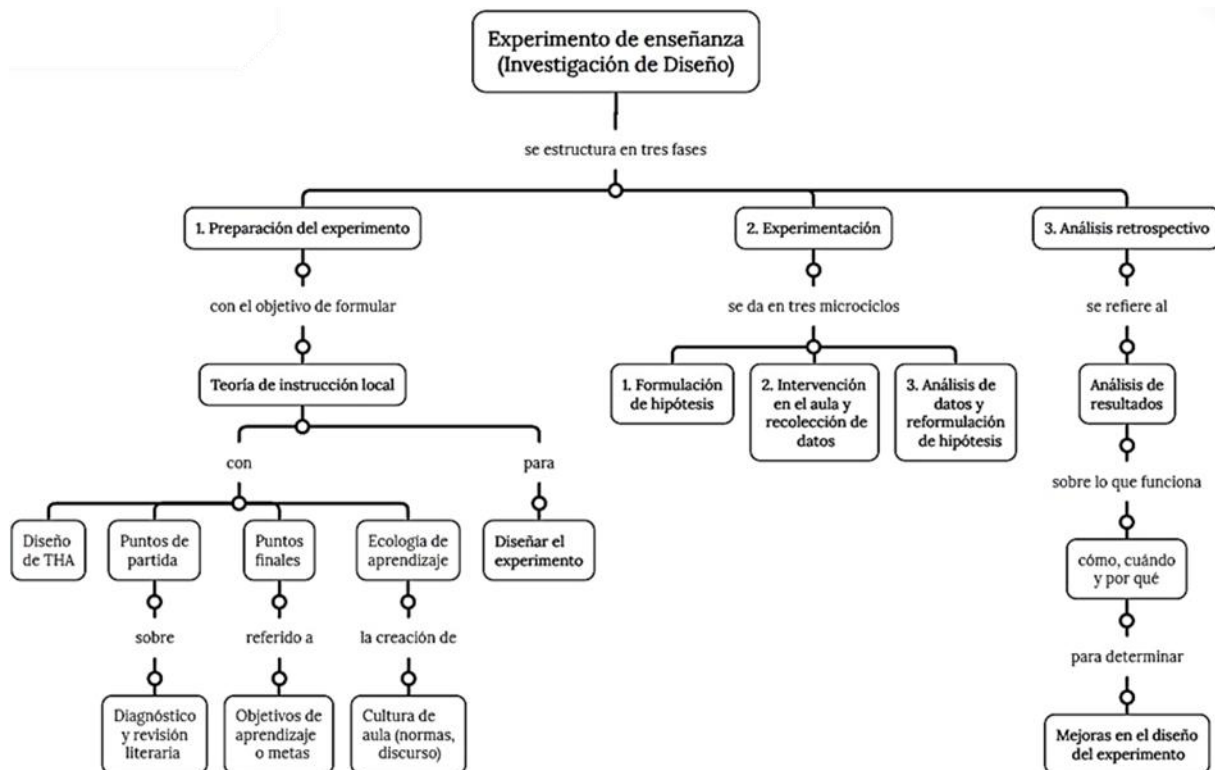
Nota. Elaboración propia

En este sentido, la presente investigación se estructura en tres fases del experimento de enseñanza: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo propuestas por

Gravemeijer y Cobb (2006). La fase de experimentación se encuentra dividida en subfases como los ciclos iterativos en tres pasos: 1) Formulación de hipótesis; 2) intervención en el aula y recolección de datos; y 3) análisis de datos, revisión y reformulación de hipótesis (Molina et al., 2011).

Figura 8

Fases del experimento de enseñanza.



Nota. Elaboración propia

A continuación, se describe cada una de estas fases y sus técnicas e instrumentos para la recolección de datos:

3.3.1 Fase 1: Preparación del Experimento.

Tiene como objetivo formular una teoría de instrucción local (Gravemeijer y Cobb, 2006), la cual consiste en plantear hipótesis sobre cómo desarrollar las Habilidades de Visualización en

estudiantes de grado tercero con el apoyo de recursos manipulativos como el Cubo soma y digitales como GeoGebra en una secuencia de actividades. Se tiene en cuenta tanto los puntos de partida (diagnóstico y revisión de literatura) como los puntos finales (objetivos de aprendizaje) para orientar el diseño del experimento de enseñanza, su aplicación y posterior análisis. También, el rol proactivo del docente y la ecología de aprendizaje (cultura del aula de clases) (Gravemeijer y Cobb, 2006) para revisar y refinar la secuencia de actividades en pro del desarrollo de Habilidades de Visualización. De manera que, los investigadores en esta fase deben anticiparse al desarrollo progresivo del aprendizaje de los estudiantes y así esta teoría local pueda guiar el diseño de la secuencia.

3.3.2 Fase 2: Experimentación.

Se trata de la formulación y aplicación del experimento de enseñanza. Allí se dan microciclos como: 1) Formulación de hipótesis; 2) intervención en el aula y recolección de datos; y 3) análisis de datos, revisión y reformulación de hipótesis. Por tanto, al aplicar los microciclos, se realiza un análisis continuo a los estudiantes, para la creación y aplicación de nuevos experimentos lo cual puede llevar a modificar los objetivos de aprendizaje. El diseño se hace a partir de conjeturas que sean razonables y comprobables por medio de las actividades propuestas para analizar si los medios utilizados (material manipulativo y digital) realizaron cambios en el razonamiento de los estudiantes o sino realizar un rediseño de estas actividades (Gravemeijer y Cobb, 2006).

3.3.3 Fase 3: Análisis Retrospectivo de los Datos.

Se tiene por objetivo organizar la información recopilada para analizar los resultados sobre lo que funciona, cómo, cuándo y por qué (Cobb et al., 2003). De manera que se analiza el conjunto

de datos para revisar si los objetivos e hipótesis planteadas fueron alcanzados durante el experimento y determinar mejoras en el diseño del experimento de ser necesario.

3.4 Instrumentos y Técnicas

La tabla 4 y 5 reúne los instrumentos de recolección de la información y técnicas de análisis de los datos propuestos para la presente investigación en correspondencia a cada uno de los cuatro objetivos específicos y su propósito.

Tabla 4

Instrumentos de recolección de la información

Objetivo Específico	Técnicas de Recolección de Datos	Instrumentos	Forma de Aplicación
Describir las fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora en las Habilidades de Visualización espacial que presentan los estudiantes de tercer grado del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana del municipio de Floridablanca.	Cualitativos (observaciones, fichas diagnósticas, registros descriptivos).	Registro del diagnóstico realizado Fichas de diagnóstico	Se realizan sesiones de juego y resolución de problemas utilizando material concreto (Cubo soma) y GeoGebra. Se observa cómo los estudiantes interactúan, resuelven tareas y se identifican dificultades, fortalezas y oportunidades de mejora. Los datos se registran en fichas de diagnóstico y guías de observación.
Analizar los elementos que se deben integrar al experimento de enseñanza cimentado en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, que incluya actividades con el Cubo soma y GeoGebra.	Cualitativos Revisión documental Análisis de contenido Diseño del experimento metodología THA, validación por expertos	Matriz de análisis documental	Se analizan las fuentes teóricas y se identifican elementos clave para el diseño de la THA. Se realizan sesiones de grupo focal con docentes para validar la propuesta de actividades y obtener retroalimentación.
Proponer la implementación de un experimento de enseñanza con base en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, que integre actividades	Observación participante Observación sistemática	Guía de observación Lista de cotejo	Se diseña e implementa el experimento de enseñanza como una secuencia progresiva.

Objetivo Específico	Técnicas de Recolección de Datos	Instrumentos	Forma de Aplicación
con el Cubo soma y GeoGebra, orientada al desarrollo progresivo de las siete Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande.			
Determinar los cambios obtenidos en el desarrollo de las Habilidades de Visualización de los estudiantes del Instituto Técnico Industrial José Elías Puyana del municipio de Floridablanca mediante el experimento de enseñanza con Cubo soma y GeoGebra, identificando los aciertos y desaciertos y las recomendaciones para futuras investigaciones en el área de enseñanza de la geometría.	Observación sistemática.	Rubrica Análisis de contenido comparativo	Se utiliza una rubrica para registrar cambios en el desempeño durante la ejecución de las tareas.
<i>Nota.</i> Elaboración propia			

Tabla 5*Técnicas de análisis de datos*

Objetivo Específico	Técnicas de Análisis de Datos
Describir las fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora en las Habilidades de Visualización espacial que presentan los estudiantes de tercer grado del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana del municipio de Floridablanca.	<ul style="list-style-type: none"> - Análisis de contenido de los diagnósticos para identificar patrones de dificultad. - Clasificación de la información obtenida - Categorización basada en las Habilidades de Visualización de Del Grande.
Analizar los elementos que se deben integrar al experimento de enseñanza cimentado en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, que incluya actividades con el Cubo soma y GeoGebra.	<ul style="list-style-type: none"> - Análisis documental para identificación de elementos clave en la literatura y marcos teóricos. - Extracción de los datos requeridos para la construcción del experimento de enseñanza cimentado en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. - Análisis de coherencia interna de diseño: alineación entre metas, tareas e hipótesis - Matriz de validación (valoraciones de expertos sobre claridad, pertinencia, aplicabilidad).
Proponer la implementación de un experimento de enseñanza con base en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, que integre actividades con el Cubo soma y GeoGebra, orientada al desarrollo progresivo de las siete Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande.	<ul style="list-style-type: none"> - Sistematización de la información observada y contenida en los diarios de campo y de las listas de cotejo.

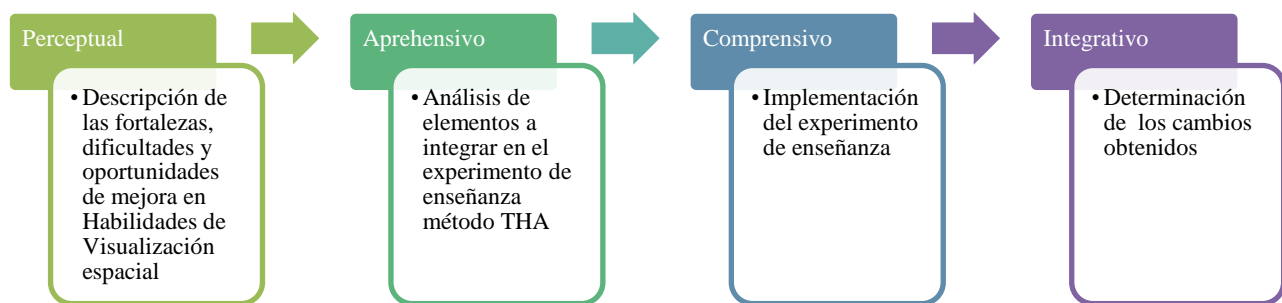
Objetivo Específico	Técnicas de Análisis de Datos
<p>Determinar los cambios obtenidos en el desarrollo de las Habilidades de Visualización de los estudiantes del Instituto Técnico Industrial José Elías Puyana del municipio de Floridablanca mediante el experimento de enseñanza con Cubo soma y GeoGebra, identificando los aciertos y desaciertos y las recomendaciones para futuras investigaciones en el área de enseñanza de la geometría.</p>	<p>- Extracción de datos del análisis de contenido para registrar cambios en la rúbrica de análisis en torno a las Habilidades de Visualización.</p>

Nota. Elaboración propia

3.4.1 Procedimiento

Figura 9

Procedimiento de desarrollo de la investigación



Nota. Elaboración propia, con base en Hurtado (2010)

3.5 Consideraciones Éticas

En las investigaciones que implican población menor de edad, es necesario ser garantes del cumplimiento de principios éticos esenciales que protejan la dignidad, los derechos y el bienestar de los participantes. Por esta razón tal como se muestra en la Tabla 6, se toma en cuenta aspectos preponderantes como: consentimiento informado, confidencialidad y anonimato, autonomía, evitar daño, justicia en la selección, transparencia y comunicación, responsabilidad, integridad académica y respeto a la cultura.

Tabla 6*Análisis de Consideraciones Éticas Clave*

<i>Consideración Ética</i>	<i>Objetivo</i>	<i>Aplicación en el Proyecto</i>	<i>Estrategias para Garantizar el Cumplimiento Ético</i>
Consentimiento Informado	Obtener autorización explícita y voluntaria de los padres o tutores de los estudiantes que van a participar en la investigación.	Se solicitará consentimiento por escrito a los acudientes de los estudiantes de tercer grado (Ver Apéndice F)	Explicar propósito, procedimientos, beneficios y riesgos antes de iniciar. Uso de formulario explícito con lenguaje entendible para los padres.
Confidencialidad y Anonimato	Garantizar la protección de la identidad y privacidad de los menores participantes.	No se usará ningún dato personal identificable en la presentación de resultados.	Se asignan códigos a los estudiantes como E1, E2, E3... Se restringe el acceso a registros, solo al equipo investigador.
Autonomía	Reconocer las distintas habilidades, capacidades e intereses de los estudiantes dentro del proceso.	Pese a que a que las docentes investigadoras y los padres son los responsables del proceso de intervención, se respeta los aportes, intereses y puntos de vista de los estudiantes	Se ofrece a los estudiantes la posibilidad de aportar ideas al proceso o de retirarse de este, si así lo consideran.
Evitar Daño	Prevenir cualquier tipo de afectación física, emocional o psicológica que pudiese darse en el desarrollo de las estrategias.	Todas las actividades estuvieron diseñadas para cumplir con su objetivo de manera segura.	Monitorear reacciones emocionales durante la aplicación. Asegurar acompañamiento docente y la toma de acciones ante cualquier incomodidad.
Justicia en la Selección	Garantizar que todos los participantes tengan igual oportunidad de ser elegidos para participar en el desarrollo de la propuesta.	Todos los estudiantes del grado tercero tienen la misma oportunidad de participar.	Emplear criterios de inclusión explícitos. Asegurar condiciones equitativas para estudiantes en condiciones especiales de aprendizaje.
Transparencia y Comunicación	Mantener informados constantemente a los participantes y sus familias sobre las actividades que se desarrollan y los logros que obtenidos.	Se brinda información permanente a los padres sobre el avance de sus hijos en el proceso.	Realizar reuniones informativas para compartir los resultados y experiencias que se tienen en el proceso.

<i>Consideración Ética</i>	<i>Objetivo</i>	<i>Aplicación en el Proyecto</i>	<i>Estrategias para Garantizar el Cumplimiento Ético</i>
Responsabilidad	Responder ética y pedagógicamente por cada acción efectuadas dentro del proyecto.	Las docentes investigadoras asumen la responsabilidad de la planificación, desarrollo, seguimiento y resguardo de toda la información que se maneja durante el proyecto.	Documentar todo el proceso. Atender cualquier inquietud o situación no favorable que se presente durante el estudio.
Integridad Académica	Conducir la investigación con honestidad, con datos verídicos, fuentes teóricas y metodológicas confiables.	Se citarán todos los autores que se tomen en cuenta en la investigación teórica y se reportarán los resultados obtenidos de manera transparente.	Aplicar normas APA y evitar plagio. Registrar el proceso de análisis de forma ética y fiable.
Respeto a la Cultura	Respetar los contextos culturales y sociales de los estudiantes y sus familias.	Las actividades diseñadas y aplicadas tienen presente en contexto, entorno escolar y cultural del municipio de Floridablanca.	Prevenir estereotipos o enfoques que desconozcan la identidad cultural. Adaptar los recursos empleados a los referentes conocidos por los estudiantes.

Nota. Elaboración propia.

4 Análisis de Resultados

Este apartado se enfoca en el diseño del experimento de enseñanza a partir de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA); de esta forma se toma en cuenta las tres fases inherentes a esta metodología las cuales comprenden preparación del experimento (diagnóstico), experimentación y análisis retrospectivo. Específicamente, el proceso parte de un diagnóstico de las concepciones previas y las dificultades que presentan los estudiantes, para posteriormente proseguir con el diseño de las THA, su implementación que implica actividades propuestas y validadas para el desarrollo de las Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande (1990) mediante el uso del Cubo soma y GeoGebra; y finalmente, se realiza un análisis retrospectivo de los datos y resultados obtenidos.

4.1 Preparación del experimento

En este apartado del estudio se busca describir las fortalezas, dificultades y oportunidades de mejora en las Habilidades de Visualización espacial que presentan los estudiantes de tercer grado del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana del municipio de Floridablanca; para cumplir con dicho propósito se recurrió al análisis de información proveniente de un diagnóstico realizado a través del juego y la resolución de problemas.

En esta primera fase del proceso participaron los seis grados de tercero, como parte de una muestra no probabilística. La estructura del diagnóstico general se presenta en la Tabla 7, en la cual hay cuatro actividades, cada una con dos o más habilidades a analizar aplicadas durante 5 jornadas escolares en las que se pasaba por cada grado alrededor de una hora aproximadamente.

Tabla 7

Actividades y Habilidades de Visualización propuestas para el diagnóstico

Actividades	Descripción	Habilidades de Visualización
Exploración y reconocimiento del cubo soma	Se aplicaron situaciones problema por medio del juego, sobre el conteo de cubos por las 7 piezas del cubo soma y por cuántos cubos en total está conformado este material.	Coordinación óculo motora
	Se propuso una situación de reconocimiento de algunas piezas del cubo soma en diferentes posiciones y tamaños para la observación, clasificación y noción de invariancia de la forma.	Constancia perceptual
	Se realizó la construcción libre del cubo soma con las 7 piezas y luego con instrucciones.	Discriminación visual
Construcción de figuras tridimensionales	Se aplicaron tres situaciones de ensamblaje de piezas para construir figuras 3D con apoyo de problemas del calendario matemático propuesto por Colombia Aprendiendo – Matemática recreativa. Se usaron variables didácticas como la no manipulación de piezas para revisar el procesamiento mental.	Percepción figura fondo
Ensamblaje por instrucciones	Se propuso reconocer el vocabulario matemático espacial de los estudiantes por medio de una situación en parejas, en la cual un estudiante debe tener el rol de dar las instrucciones de ubicación de las piezas para construir la figura de la imagen y el otro estudiante debe escuchar las	Percepción de la posición en el espacio

	instrucciones y construir usando las piezas (representación verbal, codificación y decodificación). Las imágenes son vistas desde diferentes ángulos de la figura.	Percepción de las relaciones en el espacio
Exploración de las vistas con GeoGebra	Se propuso identificar las seis vistas de un objeto 3D (casa) y su representación por medio del dibujo de cada una de las vistas.	Coordinación óculo motora Memoria visual Percepción de la posición en el espacio, Percepción de las relaciones en el espacio

Nota. Elaboración propia

La aplicación del diagnóstico se realizó bajo un mismo eje temático, en este caso, se propuso el juego de Minecraft enfocado a una nueva dimensión “Cubo Mundo” para presentar el material del Cubo soma, como cubos unidos que forman varias piezas (debido a que era la primera vez que manejaban el material manipulable del Cubo soma). Así mismo, se usó este juego para generar motivación entre los estudiantes, por tanto, las investigadoras diseñaron un sistema de recompensas, en el cual por cada misión había ciertos logros que si se cumplían podrían obtener puntos para competir sanamente por un premio al final de cada misión.

Por otro lado, para el manejo del aula se usó un tablero de vidas con temática de Minecraft, en el cual cada grupo contaba con 5 vidas (a menos de que incumplieran las normas establecidas). De manera que, el análisis del diagnóstico se realizó a través de guías para el registro por parte de los estudiantes según las actividades planteadas, que contenían dos partes principales: las misiones a realizar y al final una caja de comentarios sobre lo que aprendió y cómo se sintió el alumno durante la clase, si le gustó o no le gustó. También, se usó el registro fotográfico para analizar la manipulación de las piezas y su trabajo en equipo. Además, las investigadoras realizaron una guía de observación y rúbrica general de indicadores como registro y toma de datos de las características a observar en los estudiantes en relación con las Habilidades de Visualización (Ver Apéndice C y D). También, cabe resaltar que la población total de estudiantes del grado Tercero es de 201

estudiante. Además, se encuentra el Apéndice A, el cual expone los resultados del diagnóstico de manera detallada para su respectivo análisis.

A continuación, se describen de manera general los resultados obtenidos por cada Trayectoria Hipotética de Aprendizaje Preliminar (THAp).

En la THAp 1, se halló que los estudiantes en su vocabulario espacial mencionan cuadrado para indicar el cubo, por lo cual, al comenzar con las actividades de conteo de cubos por cada pieza, algunos estudiantes lo hacen por conteo de cuadrados. También, en la habilidad de percepción figura fondo y coordinación óculo motora, con la representación 2D de las piezas, a los estudiantes se les complica inferir la cantidad de cubos o de cubos ocultos que puede tener la pieza, en especial la pieza P. Además, la mayoría de estudiantes consideran que dos piezas con igual tamaño y posición (pieza L y V) son las mismas, lo cual demuestra bajos niveles de desarrollo de las habilidades de constancia perceptual y discriminación visual, sin embargo, solo algunos de estos estudiantes hacen uso del lenguaje matemático para hacer descripciones con conceptos como “ángulos” y “posición” para clasificar diferencias y similitudes.

También, se propuso como reto final la construcción del cubo con las 7 piezas, en el que solo 18 estudiantes de 183 participantes alcanzaron a construir este cubo, lo que deja entrever un bajo nivel para la percepción figura fondo, percepción de la posición en el espacio y de relaciones espaciales. Por otra parte, demostraron fortalezas en torno al conteo de cubos con la manipulación física de las piezas y al corregir nociones entre cubo – cuadrado y de interés por el juego del cubo soma en relación con la narrativa propuesta para resolver problemas y retos.

Con respecto a la THAp 2, se halla que en la Habilidad de Visualización de percepción figura fondo, la mayoría de estudiantes presentan dificultades para inferir las dos piezas que conforman una estructura tridimensional, sin que pudieran usar las piezas en físico. Por tanto,

debían rotar mentalmente cada posible pieza para verificar su configuración dentro de la estructura representada en una imagen 2D. Sin embargo, cuando se les daba las dos opciones de piezas posibles para construir la estructura, en su mayoría infieren la pieza correspondiente que hace falta con el uso de las piezas en físico. Lo que deja entrever que, los estudiantes presentan oportunidades de mejora como el proceso de Visualización, en el cual, memoriza cada una de las piezas, pueda ser capaz de rotarla mentalmente e inferir la posición correspondiente para ensamblarse a una estructura 3D.

En relación a la THAp 3, de ensamblaje por instrucciones, participaron 97 parejas de estudiantes, es decir, 194 estudiantes, teniéndose que solo 38 parejas finalizaron la actividad e intercambiaron roles. Los resultados específicos de cada una de las habilidades evaluadas con esta actividad se exponen a continuación:

En la percepción de la posición en el espacio, las instrucciones de posición que dieron los estudiantes se basaron en el siguiente vocabulario: “atrás”, “voltéalo”, “acostada”, “róta”, “póngala a este lado”, “póngala parada”, “así, pero al revés”, “que se vea hacia arriba”, “hacia adelante” y otras sin contexto como: “palito de abajo”, “corrala para allá”, “súbela”, “pon la negra como si fuera un corazón”, “ahí”, “así”, “pirueta”. De igual manera, se encontró que solo 2 estudiantes reconocían el efecto espejo en el cual se situaban frente a frente, por lo cual, las indicaciones se basan en vocabulario como: “a tu derecha”, “para usted la derecha es esta y mi derecha es esta”, “su derecha es la contraria de mi derecha”.

De manera general, se percibe que los estudiantes dan instrucciones con un vocabulario espacial limitado y poco técnico, puesto que, requieren del apoyo del movimiento de sus manos, gestos y material para indicar la ubicación de la pieza. También, la mayoría de los estudiantes se confundieron según el punto de vista en el que se encontraban “mi derecha” vs “tu derecha”, lo

que les implicó una ineficiencia en el gasto de tiempo que usaron para reformular y repetir las instrucciones para que su compañero comprendiera la posición de la pieza.

Además, se evidenció que la mayoría los estudiantes al dar indicaciones no las describían de manera precisa, por esto solo reconocían que una pieza estaba mal rotada cuando ya la figura estaba avanzada. Así como sucedió en una situación en la que una pareja de estudiantes preguntaba seguido a las investigadoras: “¿Así está bien? ¿Qué le digo? ¡Ayúdame!”, es decir, les costaba reformular las instrucciones, puesto que hacían comentarios como “no, no es así”, pero sin explicar con claridad la manera correcta de ubicar.

En la Percepciones de Relaciones Espaciales, se evidenció que la mayoría de los estudiantes al intentar dar las indicaciones con respecto a las relaciones entre piezas y referencias claras de ubicación, lo hacían de manera incompleta o ambigua con frases como: “ahí”, “así”, “en la roja” y en varias ocasiones el estudiante que daba las instrucciones esperaba a que su compañero moviera la pieza hasta que encajara sobre la otra con palabras como: “ahí”, “así está bien”.

Sin embargo, también hubo estudiantes que lograban relacionar las piezas con frases como: “coloca la pieza en este huequito de la pieza negra”, “el cuadrado del medio lo pone sobre el azul”, “encima de la pieza roja”, “en medio de la t”, “meta la ficha entre la azul y verde”, “la ficha z va delante de esta”; estas instrucciones, aunque no manejaron un vocabulario especial técnico si indicaron un reconocimiento de la posición de una pieza en relación con otra. En suma, a nivel general el estudiante reconoce relaciones espaciales cuando observa detenidamente la figura construida y se da cuenta de los errores. De manera que, como oportunidades de mejora se propone en la experimentación volver a realizar esta THA con el fin de determinar cambios en el vocabulario espacial de los estudiantes.

Finalmente, en la aplicación de la THAp4, en las Habilidades de Visualización de coordinación óculo motora y percepción de la posición en el espacio, los estudiantes debían observar y explorar con GeoGebra las diferentes vistas de la casa para saber cómo se ve desde arriba, abajo, de frente o atrás y un lado, derecho o izquierdo para hacer los dibujos correspondientes de cada vista. Se evidenció un resultado favorable ya que la mayoría de los estudiantes fueron capaces de comprender para qué servían los botones, de coordinar la vista con lo que observaba en la pantalla para dibujar cada una de ellas como una información parte-todo.

En las Habilidades de Visualización de percepción de relaciones espaciales y memoria visual, las cuales implica que el estudiante sea capaz de reconocer cómo las vistas de un objeto 3D se relacionan y dibujarlo sin problema al recordar cada una de sus partes, es decir, la figura en conjunto. Se encontró que menos de la mitad de los estudiantes fueron capaces de representar la casa al tener en cuenta las dos vistas presentadas (frontal y lateral derecha), es decir, hicieron el dibujo de manera completa y le dieron profundidad a la casa con trazos en diagonales, lo que corresponde a concepciones de tridimensionalidad y profundidad de un objeto en su representación gráfica.

También, otros estudiantes realizaron dibujos de la casa con una sola vista como la frontal. Es decir, la representación la hacen desde una comprensión plana del objeto, sin considerar que el objeto a dibujar es tridimensional, tiene profundidad y la relación con las demás vistas. Además, algunos estudiantes hicieron el dibujo de cada vista dada por aparte, es decir, la frontal y la lateral derecha separadas, lo que deja entrever la inexistencia de cómo se relacionan las vistas de un objeto 3D como una casa o puede que no hayan comprendido la actividad.

Luego, en el recurso de GeoGebra se hicieron preguntas para el razonamiento espacial como: ¿qué vista te ayuda a saber qué alta es la casa? En la que se les daba las seis opciones de

vistas. Sin embargo, por fallas en el internet de la sala de informática, no todos pudieron realizar la actividad así que tocó socializar la pregunta y verificar el razonamiento de los estudiantes. Solo dos niños pudieron contestar la pregunta de manera correcta explicando el por qué, puesto que señalaban lo siguiente: “la vista de al lado porque puedo ver la altura”, “también la vista del frente porque se ve que tiene dos pisos. Lo que deja entrever una fortaleza con respecto a las dimensiones de un objeto tridimensional, en la cual, la altura es clave para comprender el espacio en 3D. Por tanto, se demuestra como oportunidad de mejora el aprendizaje de las vistas para reconocer el punto de vista desde el cual se observa, de esta manera comprender la posición y las relaciones espaciales que existen de la representación plana de los objetos tridimensionales.

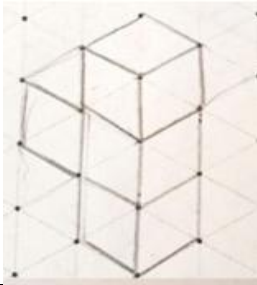
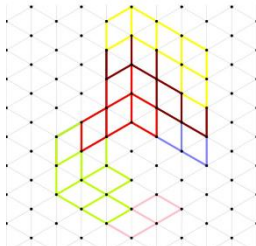
4.2 Experimentación

En esta segunda fase, se busca describir los resultados de la aplicación del experimento de enseñanza propuesto para el grado tercero, particularmente del grupo 1 con 34 estudiantes del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana. Para tal fin, se presenta el análisis de la aplicación de la secuencia de la THA mediadas didácticamente con el juego y la resolución de problemas.

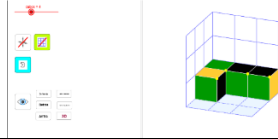
La estructura del experimento de enseñanza se presenta en la tabla 8, en la cual, se describe lo propuesto en nueve misiones en las que se aborda las siete Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande (1990). Este experimento se ejecutó en diez jornadas escolares con una duración de dos horas aproximadamente. Al planear el experimento se tuvo en cuenta la realización de una tabla de chequeo sobre el análisis de los elementos que debe llevar el experimento (Ver Apéndice B) con el fin de que haya coherencia general entre lo que se quiere lograr y cómo se va a proceder.

Tabla 8

Descripción general del experimento de enseñanza

Misión	Objetivo	Descripción	Habilidades de Visualización a desarrollar
Misión 1: THA 1. Dibujando planos	Representar un modelo de una pieza tridimensional por medio del trazo en el punteado isométrico.	<p>Material: Diapositivas (narrativa), punteado isométrico, piezas del Cubo soma.</p> <p>Instrucción: Dibujar un cubo al seguir un modelo, luego dibujar dos cubos continuos de manera vertical-horizontal y finalmente dibujar las piezas V, L y T en diferentes posiciones.</p> 	Coordinación óculo motora Percepción figura fondo Constancia perceptual Percepción de la posición en el espacio Percepción de relaciones espaciales
Misión 2: THA 2. Reconstruyen do	Identificar la posición de la pieza, sus trazos internos y su respectiva representación con el uso del software de GeoGebra.	<p>Material: Diapositivas (narrativa), punteado isométrico del software de GeoGebra, piezas del Cubo soma.</p> <p>Instrucción: Dibujar la posición en la que se encuentra la pieza faltante de la estructura (silla, con una imagen dinámica en GeoGebra. Las piezas usadas fueron la Z, V y T.</p> 	Coordinación óculo motora Percepción figura fondo Percepción de la posición en el espacio Percepción de relaciones espaciales Discriminación visual
Misión 3: THA 3. Reconstruir a partir de las fotos	Inferir la representación de las seis vistas ortogonales de una pieza en la cuadrícula y en el punteado isométrico.	<p>Material: Diapositivas (narrativa), recursos dinámicos del software de GeoGebra, cuadrícula de vistas, punteado isométrico y pieza L del Cubo soma con caras cuadradas de color verde, amarillo y negro.</p> <p>Instrucción: Reconstruir un objeto</p>	Coordinación óculo motora Percepción de la posición en el espacio

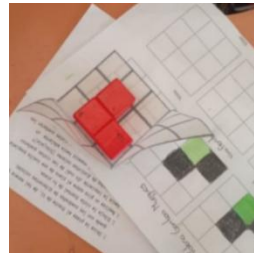
	<p>3D (pieza del cubo soma) a partir de las vistas ortogonales (superior, inferior, frontal, posterior, lateral derecha, lateral izquierda), su respectiva representación en la cuadrícula y de la posición de la pieza en el punteado isométrico.</p>	<p>Percepción de relaciones espaciales</p> <hr/> <p>Discriminación visual</p>
<p>Misión 4: THA 4. Las piezas mágicas (Actividad Inicial)</p> <p>Interpretar la posición final de una posición inicial para la identificación de la transformación realizada de la pieza (traslación, rotación, reflexión).</p> <p>Misión 5: THA 4. Huyendo del Enderman (Traslación)</p>	<p>Material: Diapositivas (narrativa), piezas del Cubo soma, plano de cuadrícula, guía de clasificación y de instrucciones.</p> <p>Instrucción: Identificar el movimiento que sufre la pieza (transformaciones geométricas) al coincidir la respuesta con la posición final de la pieza.</p> <p>Luego, reconocer la transformación geométrica de la traslación con las piezas del cubo soma y el plano de la cuadrícula para la interpretación de instrucciones hacia diferentes direcciones (arriba, abajo, derecha, izquierda).</p>	<p>Coordinación óculo motora</p> <hr/> <p>Percepción de la posición en el espacio</p> <hr/> <p>Percepción de relaciones espaciales</p> <hr/> <p>Discriminación visual</p>
<p>Misión 5: THA 5. y 6. Huyendo del Enderman (Rotación y Reflexión)</p> <p>Inferir las instrucciones de rotación para la identificación de la nueva posición de la pieza y su representación de la vista ortogonal correspondiente.</p>	<p>Material: Diapositivas (narrativa), piezas del Cubo soma con una parte de la pieza con caras cuadradas de colores, cuadrículas de las vistas, triedro y guía de instrucciones.</p> <p>Instrucción: Interpretar instrucciones de manera secuenciada para la rotación de la</p>	<p>Coordinación óculo motora</p>



pieza; rotación en el espacio = cuando la pieza se levanta del plano, o rotación en el plano = cuando la pieza no se levanta del plano. Además, relacionar con las fracciones para el recorrido de la rotación: un cuarto de vuelta o medio vuelta en sentido horario (derecha) o sentido antihorario (izquierda), hacia adelante o hacia atrás. Así mismo, cada vez que se realiza una rotación debe relacionarse con la representación de la vista que corresponde a la parte de la pieza con las caras cuadradas de colores.

Percepción de la posición en el espacio

Percepción de relaciones espaciales

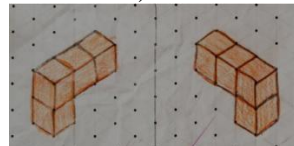


Representar la reflexión de una pieza en el punteado isométrico.

Material: Diapositivas (narrativa), piezas del Cubo soma y punteado isométrico.

Instrucción: Dibujar en el punteado isométrico la reflexión de una pieza según el eje indicado (vertical/horizontal).

Constancia perceptual



Misión 6. THA 7. ¿Qué les pasa a las piezas? (Refuerzo)

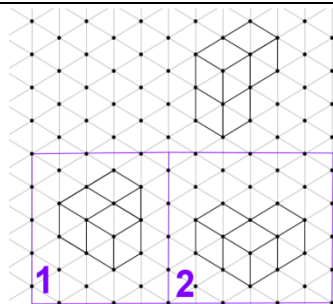
Inferir la posición final de la pieza a posteriori a una transformación.

Material: Diapositivas (narrativa), recursos y retos en el software de GeoGebra y piezas del Cubo soma.

Instrucción: Responder ante los retos propuestos en GeoGebra para reforzar los temas vistos sobre las transformaciones geométricas en el plano.

Memoria visual

Misión 7. THA
7. Recuperar
el equilibrio de
las piezas del
Cubo Mundo
(Actividad
Memoria)

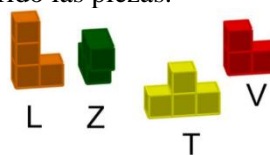


Percepción de la
posición en el espacio

Material: Diapositivas (narrativa), software de GeoGebra y piezas del Cubo soma.

Instrucción: Memorizar la posición de la pieza en una secuencia y luego mencionar las transformaciones geométricas que han sufrido las piezas.

Percepción de
relaciones espaciales



Misión 8:
THA 8. La
Búsqueda del
tesoro

Interpretar las posiciones de las piezas, con el uso de vocabulario espacial, por tanto, realiza una descripción de instrucciones claras y la construcción de la estructura solicitada (imagen).

Misión 9:
THA 8.
Salida del
CuboMundo
(Ensamblaje
por
instrucciones)

Material: Diapositivas (narrativa), piezas del Cubo soma, tarjeta de la estructura (imagen).

Instrucción: En parejas, un estudiante tiene el rol de dar instrucciones claras a su compañero para que este arme la imagen de la estructura solicitada, por lo cual, interpreta posiciones y relaciones espaciales entre piezas.

Percepción de la
posición en el espacio



Percepción de
relaciones espaciales

Nota. Elaboración propia

La aplicación de este experimento sigue el mismo eje temático propuesto en el diagnóstico (THA preliminar) del juego del Minecraft en la nueva dimensión del CuboMundo, en la cual, los estudiantes transitan por una serie de retos a través de misiones que requieren del Pensamiento Visual del estudiante, quien cumple con el rol de jugador. Por tanto, se hace uso de un sistema de recompensas en la cual existe dos tipos de Tokens acumulables: dorado (2 puntos) y azul (1 punto)

con el objetivo de reclamar un premio al finalizar las nueve misiones. Además, los jugadores por cada misión cuentan con tres vidas, para regular la disciplina dentro del aula, debido a que, podrían perder alguna vida si incumplen las reglas establecidas o no sigue indicaciones.

En este sentido, para el análisis del experimento de enseñanza se hace uso de guías de observación con el objetivo de analizar el desarrollo de las Habilidades de Visualización planteadas. Además, se hizo uso del registro fotográfico y audiovisual para la recolección de datos específicos como: manipulación de las piezas, trabajo en equipo, razonamiento espacial por parte de los estudiantes, vocabulario espacial usado, etc. También, se creó un libro dentro del software de GeoGebra, el cual contiene cada una de las THA propuestas tanto en el diagnóstico como en la experimentación y sus posibles mejoras a cada THA (Ver Apéndice E).

A continuación, se describen los resultados obtenidos por cada misión en la que se haya una THA.

4.2.1 Misión 1: Dibujando Planos

Esta misión corresponde a la THA 1, en la cual, los estudiantes exploran el punteado isométrico de manera manual, es decir, con papel y lápiz, para representar objetos tridimensionales.

Conocimientos previos de los jugadores (estudiantes)

Algunos de los estudiantes del grupo 1 de tercero reconocen el cubo como un cuerpo tridimensional y otros aún siguen con la confusión entre cubo y cuadrado, puesto que para algunos de ellos el cubo es un cuadrado. Otra dificultad es al dibujar el cubo y que su representación pictórica conserve la proporcionalidad y su regularidad.

Objetivo de la misión 1 de la THA1 (NCTM y EBC)

Desarrollar las Habilidades de Visualización espacial de Del Grande (1990) como la coordinación óculo motora, percepción figura fondo, constancia perceptual, percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales; al representar objetos tridimensionales como las piezas del cubo soma en el punteado isométrico (bidimensional), al reconocer las relaciones de dirección, distancia y posición para dar una perspectiva isométrica coherente en el dibujo.

Objetivo del jugador en la misión 1 de la THA1

Representar en el punteado isométrico los cubos y las piezas para cumplir con la misión y ganar puntos acumulables.

Análisis a Priori de la Misión 1 de la THA 1: Formulación de hipótesis.

Para el desarrollo de la primera misión se procede a explicitar la progresión de desarrollo que se propone a modo de formulación de hipótesis de cómo el estudiante avanza a medida que se aplica cada reto o actividad, por lo cual, se comienza desde lo simple hasta lo complejo:

- 1) Al representar un cubo en el punteado isométrico, con base en el modelo propuesto, los estudiantes siguen el modelo y lo representan por medio del trazo. Por lo cual, el punteado isométrico facilita los dibujos de objetos 3D a su representación en 2D con profundidad, lo que fortalece la habilidad de coordinación óculo motora y la percepción figura fondo.
- 2) Al representar en el punteado isométrico dos cubos continuos en diferente dirección, los estudiantes comprenden la correspondencia entre cubos según la posición de la pieza, lo que fortalece la habilidad de coordinación óculo motora, la percepción figura fondo y la posición en el espacio. Aun así, se observan dificultades de orientación, continuidad y de proporción de los cubos.

3) Al representar en el punteado isométrico las piezas L, Z, T y V, los estudiantes entran en conflicto sobre la continuidad de los cubos con las líneas a trazar, por lo que necesita apoyo constante para comprender las relaciones espaciales y la posición de la pieza, lo que fortalece la percepción de relaciones espaciales. Además de que deja rastros de líneas diagonales que son innecesarias (aristas invisibles) o carencia de estas.

4) Al representar de manera fiel un objeto 3D a 2D en diferentes posiciones, demuestra un dominio del punteado isométrico, lo que fortalece la habilidad de constancia perceptual.

Proceso de Desarrollo de la Misión 1 de la THA1

Tabla 9

Habilidades a desarrollar en la misión 1 – THA1

Retos	Habilidades para desarrollar
1) Dibujar un cubo y luego dos cubos continuos en vertical y horizontal	Coordinación óculo motora: Representar un modelo de una pieza tridimensional por medio del trazo en el punteado isométrico.
2) Dibuja las piezas V, L y T en el punteado isométrico con diferentes posiciones.	<p>Percepción figura fondo: Interpretar la posición de una pieza tridimensional observada y su representación por medio del trazo en el punteado isométrico mediante la distinción de la pieza del fondo visual.</p> <p>Constancia perceptual: Representar en el punteado isométrico una pieza tridimensional con la conservación del tamaño y la proporción de cada cubo, sin deformar su estructura original.</p> <p>Percepción de la posición en el espacio: Representar un modelo por medio del trazo en el punteado isométrico de una pieza tridimensional al mantenerse la posición relativa de cada cubo (arriba/abajo, delante/detrás, izquierda/derecha).</p> <p>Percepción de relaciones espaciales: Representar un modelo de una pieza tridimensional por medio del trazo en el punteado isométrico la posición de cada cubo con precisión y su conexión con otros.</p>

Nota. Elaboración propia

Análisis de Datos de la Misión 1 THA1

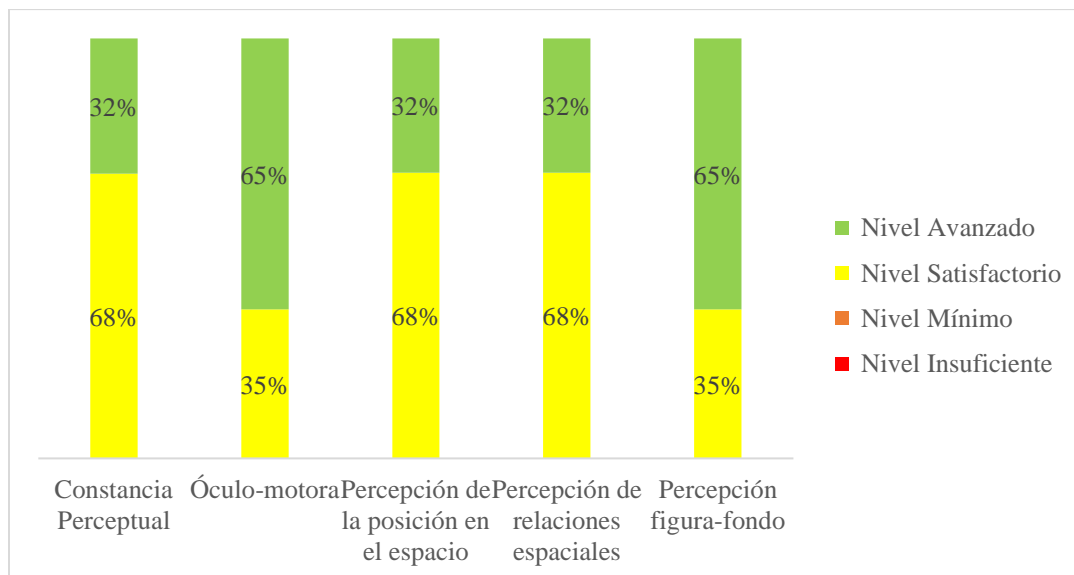
En la aplicación de la THA1 se propuso el punteado isométrico como una herramienta para que los estudiantes representen objetos tridimensionales en un plano bidimensional con una perspectiva isométrica. Por tanto, se realizaron dos retos: en el primer reto se representa un cubo a partir de un modelo de este en la hoja de punteado isométrico, luego se hace lo mismo con dos cubos continuos en dirección vertical y horizontal. En el segundo reto, los estudiantes representan las piezas del Cubo soma L, V y T en el punteado isométrico en la posición que elijan.

De manera que, en el análisis de los datos se usa como base el diseño de una guía de observación con cuatro niveles (insuficiente, mínimo, satisfactorio, avanzado) y sus respectivos descriptores en torno a cada habilidad de Visualización trabajada (Anexo#).

A continuación, se visualizan los resultados obtenidos de la THA 1 por cada Habilidad de Visualización y el nivel de desarrollo obtenido en cada una de ellas, Figura 10.

Figura 10

Resultados de la THA 1



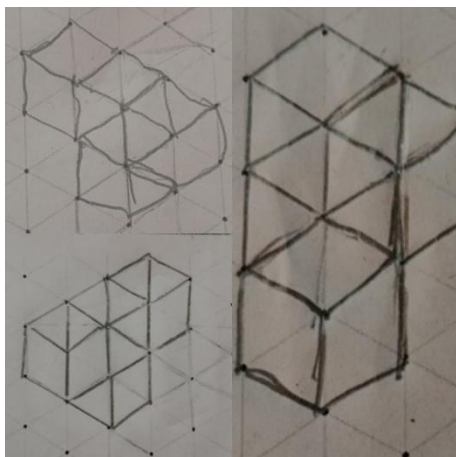
Nota. Elaboración propia

Como se observa en la figura 10, los estudiantes tienen un manejo parcial o total del trazo de piezas en el punteado isométrico, por lo que el 100 % de los participantes están ubicados en los niveles avanzado y satisfactorio, por su parte, ningún estudiante presenta desempeños en los niveles de mínimo e insuficiente.

En la habilidad coordinación óculo motora y percepción figura fondo se obtuvieron resultados congruentes, en los cuales, el 35% de los estudiantes se encuentran en un nivel satisfactorio, lo que significa que evidencian la capacidad de representar la pieza al seguir puntos y líneas apoyados en un modelo, aunque todavía no presentan precisión en detalles como: línea en exceso (aristas no visibles) o carencia de estas, lo que se puede evidenciar en la figura 11. Lo cual implica que el uso de las líneas innecesarias evidencia la imprecisión y deja entre ver que hace falta claridad para identificar la pieza y su representación. Esto sucedió en su mayoría con la pieza T, la cual por su estructura era más compleja que la pieza L y V, que se les facilitó dibujarlas sin líneas innecesarias. Por otra parte, el 65% de los estudiantes se encuentra en el nivel avanzado, debido a que son capaces de representar y trazar de manera precisa y completa los objetos tridimensionales en el punteado isométrico, al ignorar líneas o aristas que no son visibles en las piezas en físico, lo que implica que la mayoría de los estudiantes respondieron de manera correcta ante el manejo del punteado isométrico y realizaron una traducción correspondiente de información visual (3D - 2D).

Figura 11

Dificultad de exceso de líneas para representar las piezas en el punteado isométrico

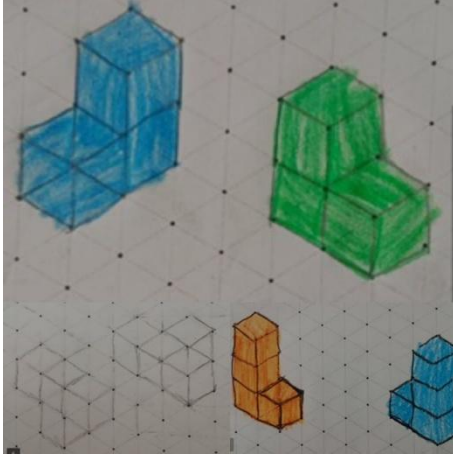


Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Así mismo, en la habilidad de percepción de la posición en el espacio y relaciones espaciales con resultados congruentes. El 68% de los estudiantes se encuentran en el nivel satisfactorio, puesto que, representan en el punteado isométrico una pieza tridimensional al mantener la posición relativa de cada cubo (arriba/abajo, delante/detrás, izquierda/derecha), pero realizan trazos en exceso (aristas no visibles) al conectar cada uno de los cubos por medio de líneas (ver Figura 11). Además, con la pieza T, al realizar trazos en el punteado isométrico se les dificulta interpretar la posición del cubo sobrante en relación con la línea de tres cubos que tiene la pieza T, por lo que requieren del apoyo para identificar cómo se grafica ese cubo, ya que algunas partes como sus caras cuadradas iban ocultas. Así mismo, mantienen dificultad para representar la pieza en diferentes posiciones por medio del uso de líneas correspondientes a la pieza en físico. Por otra parte, el 32% de los estudiantes se hallan en el nivel avanzado, por lo que ubican y relacionan con precisión cada cubo de la pieza dentro del punteado isométrico al usar las líneas adecuadas, incluso representan la pieza en diferentes posiciones (ver Figura 12).

Figura 12

Representación de las piezas V, L y T en diferentes posiciones

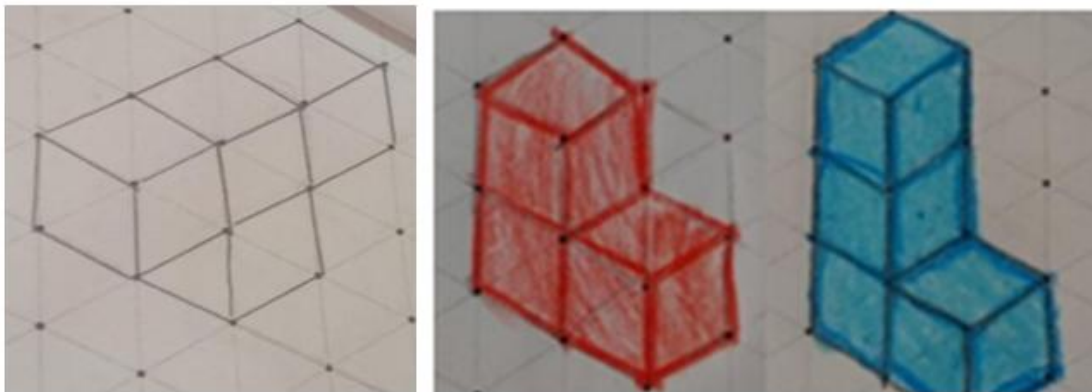


Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes

En la habilidad de constancia perceptual, el 68% de los estudiantes se encuentran en el nivel satisfactorio, puesto que, representan en el punteado isométrico una pieza tridimensional con la conservación del tamaño y la proporción de cada cubo de manera parcial, sin deformar su estructura original, como se muestra en la figura 13. Sin embargo, no alcanzaron a demostrar esta noción de constancia perceptual al graficar la misma pieza en otra posición, en la que el 32% de los estudiantes si dibujan la pieza en diferentes posiciones, lo cual demuestra que se encuentran en un nivel avanzado, como se evidencia en las imágenes anteriores de la figura 12.

Figura 13

Conservación de la pieza al representarla en el punteado isométrico.



Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Reformulación de hipótesis

A partir de la aplicación, se reformula las hipótesis mencionadas sobre el desarrollo progresivo de los estudiantes, puesto que, en el desarrollo de la THA 1 se necesitó de un apoyo constante para representar la tridimensionalidad de una pieza, la bidimensionalidad de una cara, la dirección del trazo de las caras y las aristas visibles en la pieza 3D. Por lo cual, se requiere generar otra THA en la que se relacione con el punteado isométrico.

4.2.2 Misión 2: Reconstruyendo

Esta misión corresponde a la THA 2, en la cual, los estudiantes exploran el punteado isométrico en el software de GeoGebra para representar una pieza tridimensional en una posición determinada.

Conocimientos previos de los jugadores (estudiantes)

Los estudiantes del grupo 1 de tercero reconocen el punteado isométrico y en su mayoría realizan con facilidad trazos a partir de un modelo tridimensional. Sin embargo, algunos presentan dificultad para conectar por medio de las líneas los cubos consecutivos, en otros casos trazan líneas en exceso. De igual forma exploran con propiedad y ejecutan con destreza una simulación en Software de GeoGebra de vistas y construcción de piezas, aunque en algunas ocasiones se les complica su uso.

Objetivo de la Misión 2 de la THA 2 (NCTM y EBC)

Desarrollar las Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande (1990) como la coordinación óculo motora, percepción figura fondo, constancia perceptual, percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales; al representar la posición de una pieza tridimensional en el punteado isométrico con el software de GeoGebra.

Objetivo del jugador en la Misión 2 de la THA 2

Identificar la pieza que falta en la silla, completarla con trazos y graficar la pieza en la posición que se encuentra en la silla para ganar puntos acumulables.

Análisis a Priori de la Misión 2 de la THA 2: Formulación de hipótesis.

Para el desarrollo de la segunda misión se explicita la progresión de desarrollo que se propone a modo de formulación de hipótesis:

- 1) Al identificar visualmente la pieza faltante en el modelo de la silla con el apoyo de la imagen dinámica en GeoGebra (silla completa) fortalece la coordinación óculo motora, percepción figura fondo y la discriminación visual.
- 2) Al interpretar la posición y orientación de la pieza dentro del modelo de la silla con relación a las otras piezas, fortalece la percepción de la posición en el espacio y la percepción de relaciones espaciales.
- 3) Al representar la posición de la pieza faltante dentro del modelo de la silla en el punteado isométrico en el software de GeoGebra, fortalece percepción figura fondo, percepción en el espacio y percepción de relaciones espaciales. Aunque, puede presentar trazos de líneas imprecisas en la conexión de cubos.
- 4) Al interpretar entre aristas visibles y ocultas, le permite realizar trazos precisos de la pieza, lo que fortalece la coordinación óculo motora y percepción figura fondo.
- 5) Al representar en el punteado isométrico de manera precisa con el software de GeoGebra la pieza faltante en la posición y orientación que se encuentra en el modelo de la silla, fortalece la coordinación óculo motora, percepción figura fondo, percepción de relaciones espaciales y discriminación visual.

Proceso de Desarrollo de la Misión 2 de la THA 2

Tabla 10*Habilidades a desarrollar en la misión 2 – THA 2*

Retos	Habilidades para desarrollar
1) Identificar la posición de la pieza y sus trazos internos.	Coordinación óculo motora: Identifica la posición de la pieza, sus trazos internos y su respectiva representación con el uso del punteado isométrico con el software de GeoGebra.
2) Trazar la pieza faltante de la silla en el punteado isométrico en el software de GeoGebra.	Percepción figura – fondo. Interpreta la posición de una pieza tridimensional observada y su representación por medio del trazo en el punteado isométrico mediante la distinción de la pieza del fondo visual en el punteado isométrico del software de GeoGebra. Percepción de la posición en el espacio. Representa la posición por medio del trazo de una pieza tridimensional en el punteado isométrico con el software de GeoGebra, al mantenerse la posición relativa de cada cubo.
3) Representa la pieza faltante en la misma posición y orientación que aparece en el modelo de la silla en el punteado isométrico en el software de GeoGebra.	Percepción de relaciones espaciales. Interpretar la posición relativa de una pieza de acuerdo con la posición que ocupa en una estructura y su representación precisa en el punteado isométrico en el software de GeoGebra. Discriminación visual. Identificar la pieza faltante dentro de la estructura propuesta y su representación en el punteado isométrico en el software de GeoGebra.

Nota. Elaboración propia.**Análisis de Datos de la Misión 2 de la THA 2**

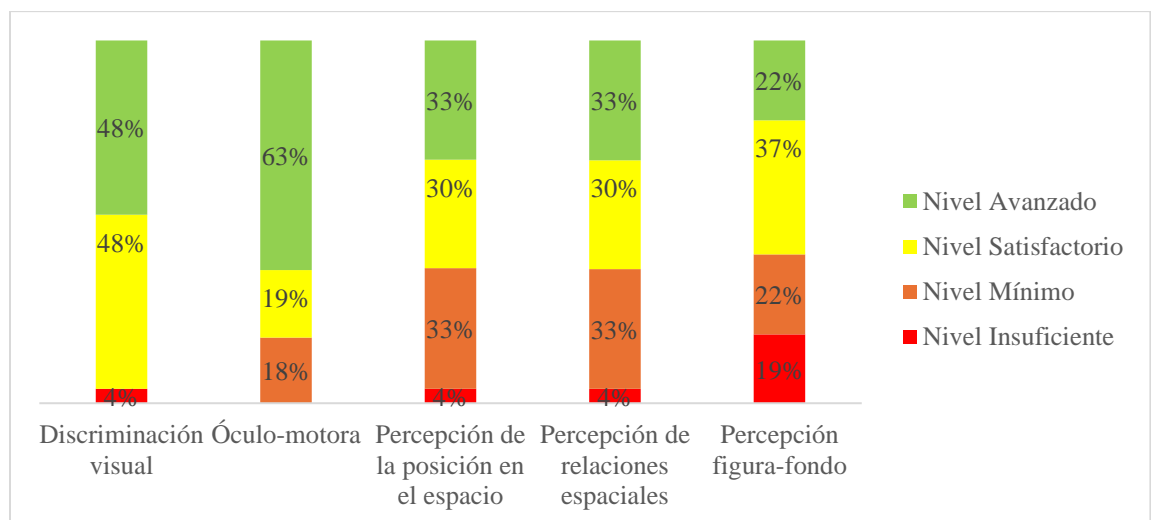
En la aplicación de la THA 2 se prosigue con el trabajo del punteado isométrico, esta vez con el software de GeoGebra. Por tanto, se realizan seis retos: en el primer reto los estudiantes identifican la pieza faltante de la silla, la cual primero aparece completa en un modelo dinámico 3D en escalas de grises y seguidamente se visualiza en un modelo 2D en el punteado isométrico de la silla con la pieza faltante. De manera que, los estudiantes eligen entre las siete piezas del Cubo soma la pieza faltante. En el segundo reto, completan la silla del modelo 2D en el punteado isométrico al realizar trazos de líneas correspondientes a la pieza faltante. En el tercer reto, representan la pieza faltante en la posición que se encuentra en la silla con el punteado isométrico en GeoGebra. En el cuarto reto, se presenta la misma estructura de la silla, pero con las piezas en otro orden de ensamblaje, es decir, identifican que es la misma silla, pero con las piezas del Cubo

soma en diferente posición al modelo inicial. Para ello, se presenta un modelo dinámico de la silla completa en 3D en escala de grises y un modelo 2D de la silla con la pieza faltante en el punteado isométrico. En el quinto reto, realiza lo mismo que el segundo reto, completar el modelo de silla en el punteado isométrico. Por último, en el sexto reto, representan la pieza faltante en la posición que se encuentra en el nuevo modelo de la silla al realizar trazos en el punteado isométrico.

A continuación, se visualizan los resultados obtenidos de la THA 2 por cada Habilidad de Visualización y los niveles obtenidos en cada una de ellas Figura 14.

Figura 14

Resultados de la THA 2



Nota. Elaboración propia

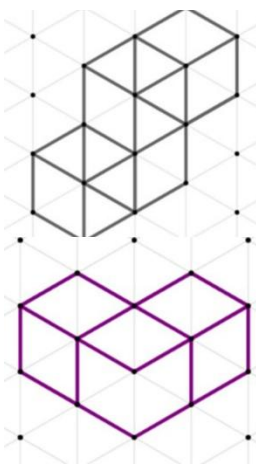
De manera general, como se observa en la figura 14, se puede deducir lo siguiente: en la Habilidad de Visualización de discriminación visual existe una tendencia general del 96% de los estudiantes en los niveles satisfactorio y avanzado, lo que implica un dominio para reconocer formas y detalles al comparar la información visual que recibe con la manipulación física de las piezas. Por otra parte, en las habilidades de percepción de la posición en el espacio, percepción de

relaciones espaciales y percepción figura – fondo, se halla más del 59% de los estudiantes en nivel satisfactorio y avanzado a excepción de la coordinación óculo motora, en la que el 82% se halla en estos niveles. Sin embargo, se halla una parte de estudiantes menor al 37% en nivel mínimo e insuficiente, lo cual evidencia una brecha significativa con la THA 1 en la que se trabajó el punteado isométrico de manera manual y los estudiantes en su 100% se encuentran entre los niveles satisfactorio y avanzado. A continuación, se describe los resultados obtenidos por cada Habilidad de Visualización en esta THA 2.

En la habilidad de coordinación óculo motora el 19% de los estudiantes se encuentran en un nivel satisfactorio, debido a que, identifican la posición de la pieza, pero al momento de representar la pieza en el punteado isométrico realizan algunas líneas en exceso u omisión de las mismas, como se evidencia en la Figura 15. A diferencia del 63% de los estudiantes que consiguen el nivel avanzado, ya que identifican la posición de la pieza y la representan de manera precisa en el punteado isométrico del software de GeoGebra, por lo cual, no se evidencia omisión de líneas o exceso de las mismas.

Figura 15

Omisión o falta de líneas

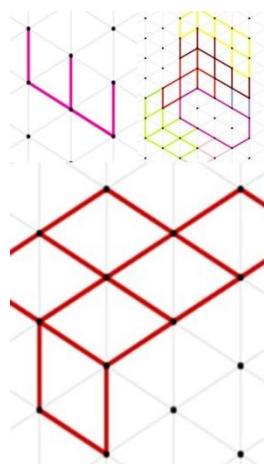


Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

En el nivel mínimo, se halla el 18% de los estudiantes, puesto que, identifican la posición de la pieza, y algunos de sus trazos internos que la componen, pero sin conectar con el trazo de líneas cubos consecutivos (ver Figura 16).

Figura 16

Conexión de cubos consecutivos



Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

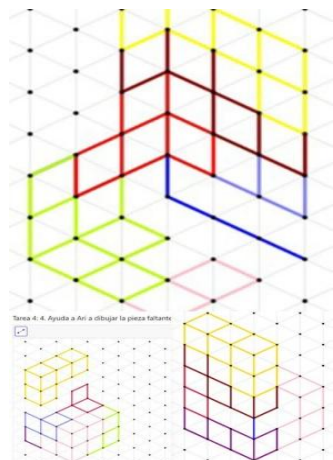
Con respecto a la Habilidad de Visualización de percepción figura fondo, se halla el 37% de los estudiantes en el nivel satisfactorio debido a que, interpretan la posición de una pieza tridimensional observada (L, Z o V) y la representan por medio del trazo en el punteado isométrico del Software de GeoGebra de manera parcial, al realizar líneas en exceso que no corresponden a la identificación de la pieza tridimensional (aristas no visibles). A diferencia del 22% de estudiantes que se encuentran en el nivel avanzado, quienes interpretan con precisión la posición y la representan en el punteado isométrico.

Por otro lado, el 22% de los estudiantes se hallan en el nivel mínimo, debido a que, interpretan sin nivel de precisión la posición de la pieza, por lo tanto, al momento de representar la pieza solo realizan algunos trazos. Con respecto al nivel insuficiente, se halla el 19% de los

estudiantes, por lo cual, no interpretan la posición de la pieza en el fondo visual en el punteado isométrico de GeoGebra y no traza líneas en el modelo de la silla 2D para completarla (ver Figura 17).

Figura 17

Dificultad para identificar la pieza faltante

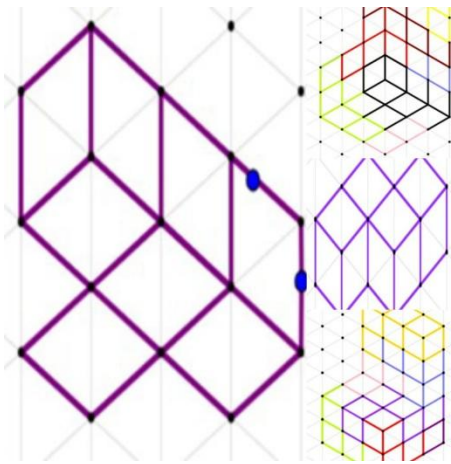


Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

En cuanto a las Habilidades de Visualización de percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales, se obtuvieron resultados congruentes por nivel. Por consiguiente, el 33% de los estudiantes se encuentran en un nivel avanzado debido a que, interpretan y representan la posición y la orientación de la pieza en la silla, por ejemplo: la pieza T se encuentra ubicada en la parte de abajo o en la base de la silla, en la esquina derecha. Así mismo, en la representación de la pieza se mantiene la posición relativa (encima, debajo, al lado o en medio) de cada cubo, como se observa en la Figura 18. Por otra parte, el 30% de los estudiantes se hallan en un nivel satisfactorio, ya que interpreta la posición de la pieza dentro de la estructura, pero al representarla en el punteado isométrico realizan trazos en exceso (aristas no visibles) o carencia de estos y mantienen dificultad en la orientación de la pieza (ver Figura 19).

Figura 18

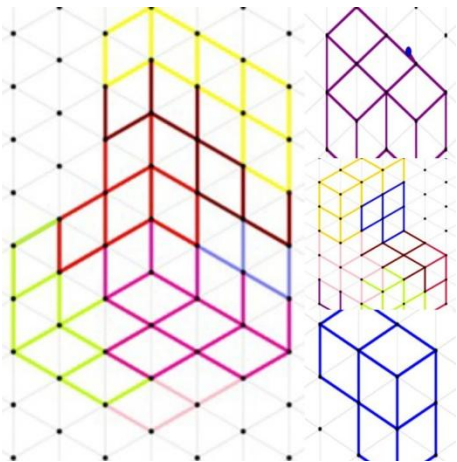
Interpretación y representación de la posición de la pieza



Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Figura 19

Dificultad con la posición y orientación de la pieza



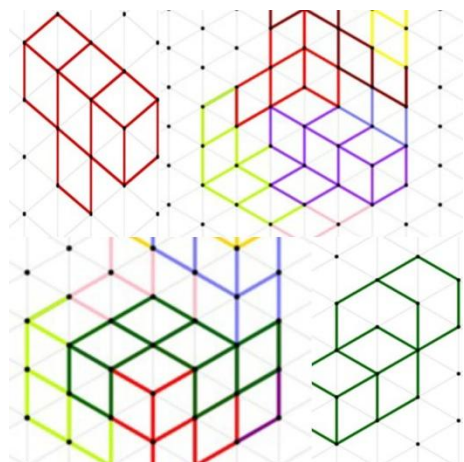
Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Por otro lado, el 33% de los estudiantes se encuentra en un nivel mínimo puesto que diferencia de los estudiantes de un nivel satisfactorio, representan en el punteado isométrico sin nivel de precisión la posición correspondiente de la pieza de acuerdo al modelo de la silla en su representación 2D y 3D, como se observa en la Figura 20. Por último, se encuentra el 4% de estudiantes en el nivel insuficiente, al no interpretar ninguna posición relativa de la

pieza (encima, debajo, al lado, en medio), por lo cual, no realiza su representación en el punteado isométrico y su posición correspondiente en la estructura.

Figura 20

Cambio de posición en la pieza



Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Por último, en la habilidad de discriminación visual, el 48% de los estudiantes identifica cuál es la pieza que falta dentro de la estructura y la posición en la que se encuentra. Por lo tanto, representa de manera precisa la pieza en el punteado isométrico sin excesos u omisión de líneas. Al igual que los estudiantes del nivel avanzado, el 48% de los estudiantes se hallan en un nivel satisfactorio, puesto que, identifican la posición y la pieza que falta, pero mantienen dificultad en el momento de representar la pieza en el punteado isométrico con trazos de líneas en exceso u omisión de las mismas (ver Figura 20). Por último, en el 4% se encuentran en el nivel insuficiente aquellos estudiantes que no identifican la pieza faltante dentro de la estructura, por lo que no representan en el punteado isométrico.

Reformulación de hipótesis

A partir de la aplicación, se reformula las hipótesis mencionadas sobre el desarrollo progresivo de los estudiantes, puesto que, en el desarrollo de la THA 2 se necesitó de un apoyo

constante frente al manejo del punteado isométrico en el software de GeoGebra, ya que, a los estudiantes se les dificultó el trazo en el mismo. También, se necesitó este constante apoyo para representar la tridimensionalidad de una pieza, la bidimensionalidad de una cara, la dirección del trazo de las caras y las aristas visibles en la pieza 3D. Por lo cual, se requiere generar otra THA en la que se relacione con el punteado isométrico en el software de GeoGebra.

4.2.3 Misión 3: Reconstruir a partir de las fotos

Esta misión corresponde a la THA 3, en la cual, los estudiantes exploran las vistas ortogonales de un objeto tridimensional y las representa en la cuadrícula.

Conocimientos previos de los jugadores (estudiantes)

Los estudiantes del grupo 1 de tercero reconocen parcialmente que un objeto tridimensional se puede observar desde diferentes perspectivas, de frente, detrás, del lado derecho e izquierdo, desde arriba y abajo, debido a que en el diagnóstico se realizó una THA similar en torno a las vistas de una casa mediante la exploración con GeoGebra. También, reconocen el uso de la cuadrícula para representar las caras cuadradas de los cubos, debido a que en GeoGebra se trabajó una THA de aproximación a las vistas y su representación en la cuadrícula.

Objetivo de la Misión 3 de la THA 3 (NCTM y EBC)

Desarrollar las Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande (1990) en estudiantes de grado tercero de primaria como la coordinación óculo motora, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales y discriminación visual; al representar las seis vistas ortogonales de una pieza del Cubo soma con el uso del software dinámico de GeoGebra.

Objetivo del jugador en la Misión 3 de la THA 3.

Interpretar la pieza que corresponde a las fotos dadas, representar cada una de sus fotos (vistas ortogonales) en una cuadrícula y en el punteado isométrico, de esta manera acumular puntos para ganar.

Análisis a Priori de la Misión 3 de la THA 3: Formulación de hipótesis

Para el análisis de la misión 3 se propone a modo de hipótesis la siguiente progresión de desarrollo:

- 1) Al reconocer que un objeto tridimensional cuenta con seis vistas ortogonales, fortalece la coordinación óculo motora y percepción de la posición en el espacio.
- 2) Al interpretar dos vistas (fotos) de una misma pieza, los estudiantes infieren la pieza correspondiente con base en colores por cada cara cuadrada del cubo, por lo que fortalece la discriminación visual, la posición en el espacio y las relaciones espaciales. Aunque, puede que algunos estudiantes desde su posición elijan otra correspondiente a una sola vista dada.
- 3) Al inferir la representación en la cuadrícula las seis vistas de la pieza, los estudiantes traducen la información bidimensional a la representación en el punteado isométrico de la pieza para que coincida con las vistas y la posición de las caras cuadradas, lo que fortalece la percepción de relaciones espaciales y la posición en el espacio. Aunque, puede existir complejidad para posicionar cada cara cuadrada en la orientación adecuada.

Proceso de Desarrollo de la Misión 3 de la THA 3

Tabla 11

Habilidades a desarrollar de la misión 3 de la THA 3

Retos	Habilidades para desarrollar
1) Reconocer las vistas ortogonales como parte de un todo que brinda información visual sobre una parte del objeto tridimensional.	Coordinación óculo motora: Inferir la representación de las seis vistas ortogonales de una pieza en la cuadrícula a partir de la identificación de dos vistas ortogonales dadas.
2) Inferir cuál es la pieza a la que le corresponden dos vistas dadas (fotos) con el uso de las piezas en físico.	Percepción de la posición en el espacio: Inferir la posición de las seis vistas ortogonales de una pieza tridimensional y su representación en las cuadrículas, a partir de la interpretación de dos vistas ortogonales dadas.
3) Construir la pieza correspondiente (L) en el recurso de GeoGebra.	Percepción de relaciones espaciales: Inferir la representación de las seis vistas ortogonales y en el punteado isométrico de una pieza tridimensional por medio de la interpretación de relaciones espaciales entre vistas.
4) Inferir las seis vistas ortogonales mediante la representación en la cuadrícula guiándose del recurso en GeoGebra y la representación de la pieza en el punteado isométrico.	Discriminación visual: Inferir la pieza tridimensional a partir de dos vistas ortogonales dadas.

Nota. Elaboración propia.

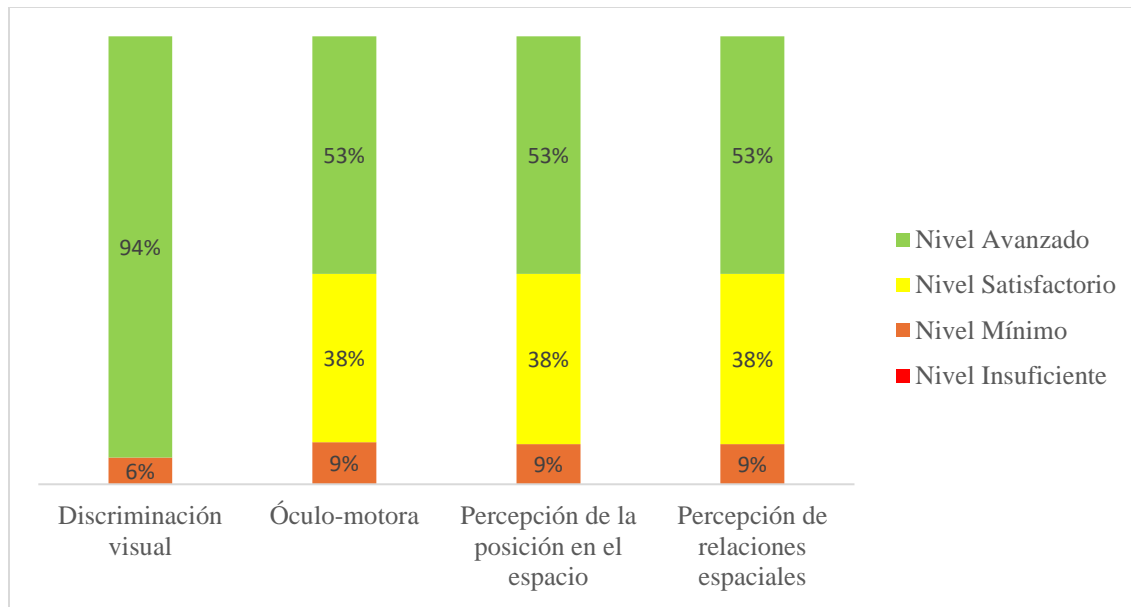
Análisis de Datos de la Misión 3.

En esta misión 3 se propuso el trabajo con las vistas ortogonales con el objetivo de comprender la posición en el espacio al usar referencias espaciales desde el punto de vista en el que se posiciona y observa el objeto tridimensional. Por tanto, a cada pieza del Cubo soma se le integró a sus caras cuadradas diferentes colores como verde, amarillo y negro, con el fin de que el estudiante visualice la información que recibe de cada proyección ortogonal (frontal, posterior, lateral derecha, lateral izquierda, superior e inferior) y la represente en la cuadrícula.

De manera que, se obtienen los siguientes resultados como se evidencia en la Figura 21.

Figura 21

Resultados de la THA 3



Nota. Elaboración propia

Como se observa figura 21, los estudiantes tienen un manejo parcial o total al inferir la representación de las vistas ortogonales de una pieza a partir de la identificación de dos vistas dadas y su respectiva representación en el punteado isométrico, por lo que más del 90% de los participantes están ubicados en los niveles avanzado y satisfactorio para las cuatro Habilidades de Visualización analizadas, por su parte, menos del 9% de los estudiantes se hallan en el nivel mínimo, lo que significa que, ningún estudiante presenta desempeños en el nivel insuficiente.

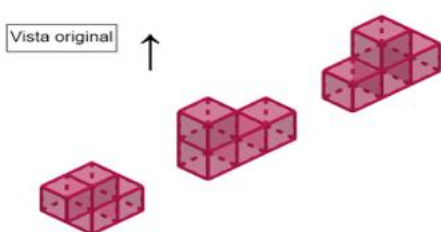
En la habilidad de discriminación visual se analizó a través de dos retos, en los cuales el estudiante infiere de cuál pieza se trata. En el primer reto, se da una sola vista de una pieza, en este caso la vista superior sin colores, por lo cual deben reconocer si necesitan más vistas (información visual) para identificar de cuál pieza se trata o si con una sola vista es suficiente. En el segundo reto, se da como pistas dos vistas ortogonales (lateral derecha y frontal), por lo cual, los estudiantes observan las piezas en físico e identifican cada lado de cada pieza hasta inferir la pieza que corresponde a esas fotos (vistas). Es decir, manipulan la pieza, se posiciona a observar según el punto de vista que indica cada foto (frontal y lateral derecha) y discriminan por medio de los

colores y la posición de las caras cuadradas de colores cada una de las piezas hasta hallar la pieza correspondiente.

Durante el primer reto, los estudiantes describen que necesitan más de una foto para inferir visualmente de cuál pieza se trata, lo que deja entrever que las vistas es una representación bidimensional que brinda información visual según la posición en la que encuentre el observador y la pieza, por lo cual, puede haber tres piezas que coincidan con la vista superior dada, como se evidencia en la figura 22.

Figura 22

Primer reto: posibles opciones al observar solo la vista superior.



Task 2

Si yo solo veo una foto desde arriba, ¿puedo saber cuál es la pieza?

Answer

NO PORQUE HAY MUCHAS PIESAS QUE TIENEN LA MISMA FORMA TOMADAS DESDE ARRIBA

Task 2

Si yo solo veo una foto desde arriba, ¿puedo saber cuál es la pieza?

Answer

NO PORQUE SE CONFUNDEN CON OTRAS PIESAS

Task 2

Si yo solo veo una foto desde arriba, ¿puedo saber cuál es la pieza?

Answer

ENESITAMOS MUCHAS FOTO PARA DE FINIR LA PIESA QUE ES

Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Ahora bien, en el segundo reto, solo el 6% que corresponde a una pareja estudiantes se encuentra en un nivel mínimo de la habilidad de discriminación visual, debido a que seleccionaron otra pieza no correspondiente, aunque infieren al menos una vista ortogonal dada de la pieza tridimensional, por lo que consideran que es otra pieza que coincide su vista con alguna foto dada mas no con las dos fotos propuestas. Por otra parte, el 94% de los estudiantes, infieren que la pieza

tridimensional correspondiente a las dos vistas ortogonales dadas es la pieza L (respuesta A), como se observa en el gráfico que arroja las respuestas de los estudiantes en el software de GeoGebra (ver Figura 23).

Figura 23

Segundo reto: seleccionar la pieza correspondiendo a dos vistas dadas.

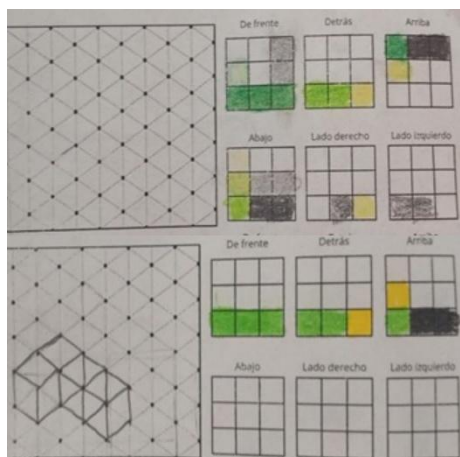


Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

En la habilidad de coordinación óculo motora, la percepción de la posición en el espacio y la percepción de relaciones espaciales se obtuvieron resultados congruentes, ya que son interdependientes para la representación de las vistas de la pieza L del Cubo soma en la cuadrícula y en el punteado isométrico. Por tanto, en el nivel mínimo se halla el 9% de los estudiantes, debido a que, infieren la representación de al menos una vista ortogonal de la pieza L en la cuadrícula, pero, mantienen dificultad con la posición adecuada de las caras cuadradas en la representación de las vistas como se evidencia en la figura 24. Además, representan o no la pieza en el punteado isométrico sin nivel de precisión y la posición adecuada de cada cara cuadrada en la cuadrícula.

Figura 24

Representación de algunas vistas con dificultad y en el punteado isométrico

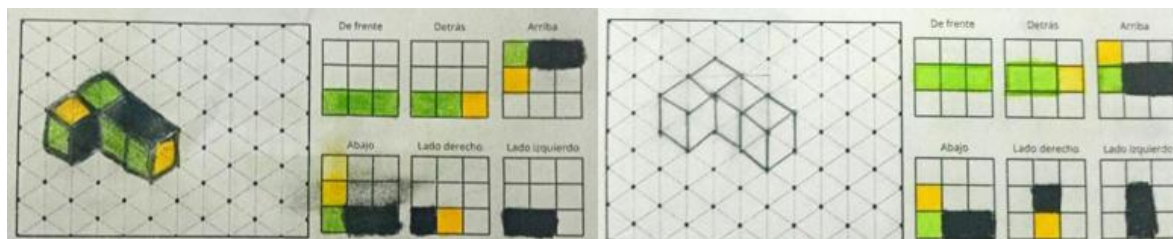


Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Por otra parte, un el 38% de los estudiantes se encuentra en un nivel satisfactorio, el cual exige inferir la representación de las seis vistas ortogonales, pero presenta inconsistencia con la posición adecuada de algunas caras cuadradas en la cuadrícula, lo cual deja entrever que, es un reto complejo para los estudiantes comprender la representación de las vistas en relación a una posición determinada, por lo que, debe rotar mentalmente la pieza para inferir la proyección ortogonal y la posición de cada cara cuadrada, como se evidencia en la figura 25.

Figura 25

Representación de las vistas con inconsistencias de posición



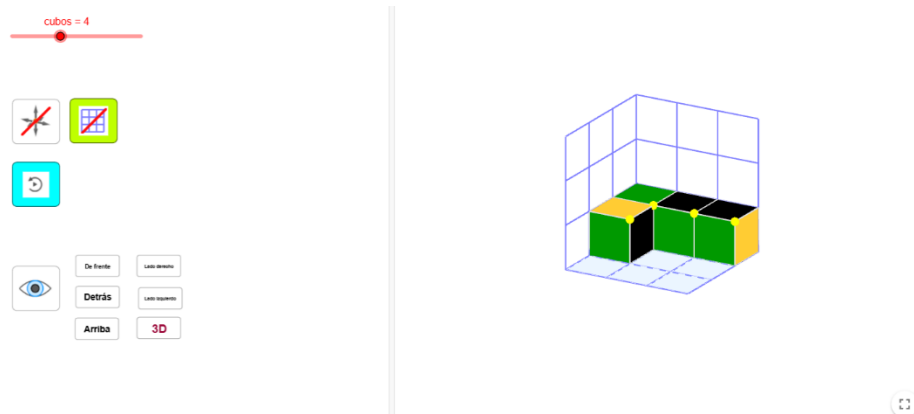
Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Sin embargo, este grado de complejidad se maneja con apoyo de la tecnología en el momento en que los estudiantes exploran los botones de las vistas con el recurso propuesto en GeoGebra en el que visualizan las cinco vistas ortogonales de la pieza L, una vez hay sido

construida cubo por cubo por los estudiantes, como se evidencia en la figura 26. De manera que, solo observan la pieza L en físico para visualizar la vista inferior.

Figura 26

Recurso de GeoGebra para la THA 3 de las vistas ortogonales

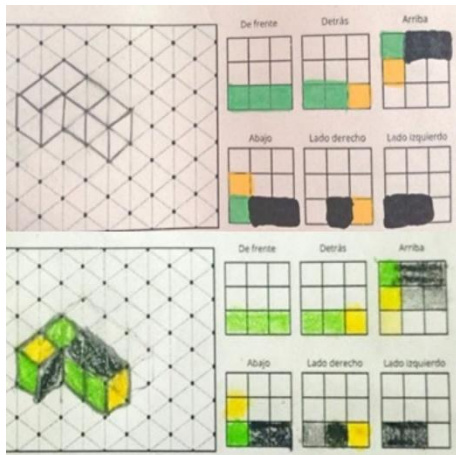


Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

En consecuencia, el 53% de los estudiantes se halla en el nivel avanzado, por lo cual, infieren con precisión la representación de las seis vistas ortogonales al posicionar dentro de la cuadrícula las caras cuadradas y su relación con la representación en el punteado isométrico, incluso al agregar colores, como se evidencia en la figura 27. Por ende, demuestra la capacidad de los estudiantes para realizar proyecciones ortogonales del objeto tridimensional (pieza), al inferir que las vistas son fotos que se toman según la posición en la cual se ubique tanto el observador como el objeto. Así pues, el estudiante se pregunta: ¿qué observo desde arriba?, ¿qué observo desde abajo?, ¿qué observo desde el lado derecho e izquierdo? ¿Qué observo desde el frente? y ¿qué observo desde atrás?}

Figura 27

Resultados de la THA 3 en el nivel avanzado



Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Reformulación de hipótesis

A partir de la aplicación, se reformula las hipótesis mencionadas sobre el desarrollo progresivo de los estudiantes, puesto que, en el desarrollo de la THA 3 los estudiantes tienen el apoyo constante a través del uso del recurso en el software de GeoGebra en el cual se observa la rotación que se realiza para representar cada una de las vistas. Sin embargo, se observan dificultades con la posición de las caras cuadradas dentro de la cuadrícula, es decir, la orientación de la vista al rotarla mentalmente o físicamente para inferir la posición cada cara cuadrada. Por tanto, se requiere otra THA en la que se construya un proceso manual con los estudiantes para que infieran las vistas ortogonales de un objeto tridimensional e interpretar la posición de cada cara cuadrada.

4.2.4 Misión 4 y 5: Las piezas mágicas y Huyendo del Enderman

Estas misiones corresponden a la THA 4, en las que, los estudiantes reconocen las transformaciones geométricas en el plano a través de sus conocimientos previos y se centran en comprender la traslación.

Conocimientos previos de los jugadores (estudiantes)

Los estudiantes del grupo 3-1 reconocen que para armar una estructura con las piezas del Cubo soma deben realizar ciertos movimientos con la pieza como rotar, girar, derecha, izquierda, arriba, abajo, delante y atrás. Sin embargo, no reconocen el nombre de estos movimientos o transformaciones geométricas en el plano como la traslación, rotación y reflexión.

Objetivo de la Misión 4 y 5 de la THA 4 (NCTM y EBC)

Desarrollar las Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande (1990) como la percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales y discriminación visual; al reconocer que existen ciertas transformaciones geométricas que sufren las piezas tridimensionales del Cubo soma (traslación, rotación y reflexión).

Objetivo del jugador en la Misión 4 y 5 de la THA 4

Identificar que la pieza se mueve y cambia de posición. También, realizar traslaciones con las piezas del Cubo soma para armar la estructura en el plano y así acumular la mayor cantidad de puntos.

Análisis a Priori de la Misión 4 y 5 de la THA 4: Formulación de hipótesis.

Para el desarrollo de la segunda misión se explicita la progresión de desarrollo que se propone a modo de formulación de hipótesis:

1) Al reconocer que una pieza cambia de posición y de dirección, puede interpretar la posición final y el nombre de la transformación geométrica ocurrida. De manera que, fortalece las Habilidades de Visualización de percepción de relaciones espaciales, percepción de la posición en el espacio y discriminación visual.

2) Al interpretar las instrucciones de traslación, puede conseguir la estructura solicitada al trasladar dentro del plano, por lo que fortalece la percepción de relaciones espaciales y percepción de la posición en el espacio.

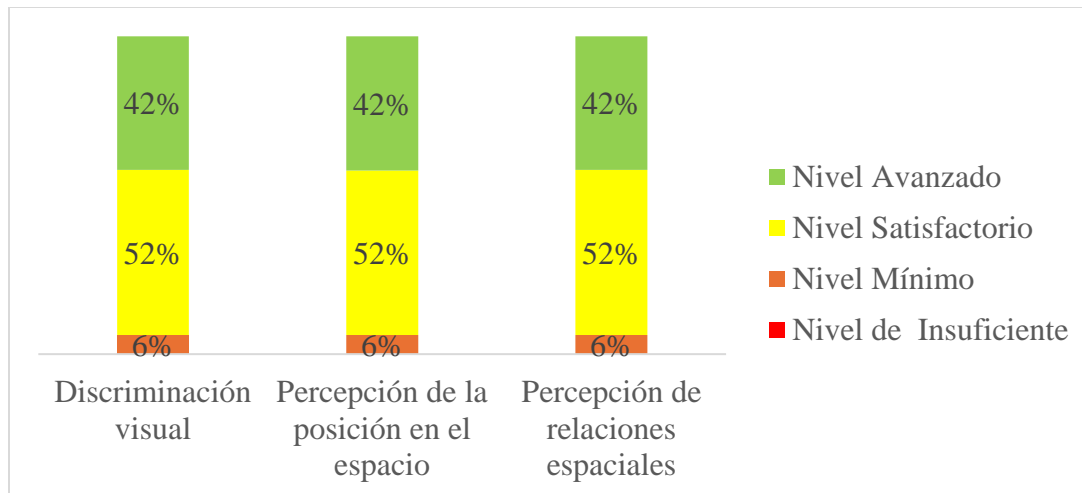
Proceso de Desarrollo de la Misión 4 y 5 de la THA 4**Tabla 12***Habilidades a desarrollar de la misión 4 y 5 de la THA 4*

Retos	Habilidades para desarrollar
1) Identificar la pieza correspondiente a la imagen y seleccionar si realizó la transformación propuesta o no.	Percepción de la posición en el espacio: Interpreta la posición final de una posición inicial para la identificación de la transformación realizada de la pieza. Percepción de relaciones espaciales: Reconoce la transformación geométrica aplicada a la pieza de su posición inicial a una posición final. Discriminación visual: Identifica los cambios que sufre una pieza tridimensional de una posición inicial a una posición final al realizarse transformaciones geométricas.
2) Ubicar en el plano las cuatro piezas (L, T, Z, y V) según las instrucciones de desplazamiento y ubicación dadas.	

Nota. Elaboración propia.**Análisis de Datos de la Misión 4 y 5 de la THA 4**

En la aplicación de la misión 4 de la THA 4 se les presenta una actividad inicial con el objetivo de identificar nociones previas frente a las transformaciones geométricas en el plano. Por tanto, se realizan dos retos: en el primer reto, el estudiante debe seleccionar de las siete piezas del Cubo soma la pieza que aparece en la secuencia de imágenes y posicionar la pieza en la misma posición que aparece en la secuencia de imágenes. En el segundo reto, debe interpretar si la pieza se giró, se movió o reflejó como si estuviera en un espejo (el estudiante debía marcar sí o no en una tabla dada por la docente). A continuación, se visualizan los resultados obtenidos de la THA 4 (Actividad inicial) por cada Habilidad de Visualización y los niveles obtenidos en cada una de ellas Figura 28.

Figura 28*Resultados de la THA 4*



Nota. Elaboración propia

Como se observa en la figura 28, se obtienen resultados congruentes en las habilidades de discriminación visual, percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales. Por tanto, se deduce lo siguiente: el 94% de los estudiantes se halla en el nivel satisfactorio y avanzado, por lo que, identifican que la pieza se traslada al moverse dentro del plano y que se rota al girar la pieza para posicionarla en la posición final solicitada, sin embargo, el 52% de estos estudiantes se les dificulta la noción de reflejo. Por otra parte, solo el 6% se hallan en el nivel mínimo, debido a que, identifican al menos la rotación que se realiza a una pieza para llegar a la posición final, pero mantienen dificultad para la noción de traslación y reflexión.

En el nivel avanzado se halla el 42% de los estudiantes, quienes interpretan la posición final de la pieza tridimensional y reconocen la transformación geométrica ocurrida, sea traslación, rotación y reflexión, con apoyo de la docente, como se evidencia en la figura 29.

Figura 29

Identificación de la transformación geométrica sufrida por parte de la pieza

Contesta las cuatro preguntas marcando Si o No de acuerdo al ejercicio realizado anteriormente

Versión de la pieza	¿Lograste ubicar la pieza de la misma forma?		¿Tuviste que girarla?		¿La moviste?		¿Se veía como al reflejarla en un espejo?	
	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
A	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
B	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
C	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Por otra parte, el 52% de los estudiantes se encuentra en un nivel satisfactorio, puesto que a pesar de interpretar la posición en la cual queda la pieza tridimensional después de sufrir alguna transformación, solo identifican la rotación y la traslación que ocurre en la pieza, pero no identifican la reflexión de las piezas, como se observa en la figura 30. Finalmente, solo el 6% de los estudiantes se encuentran en un nivel mínimo, ya que identifican que la pieza ha cambiado de posición y dirección, pero no reconoce qué tipo de transformación sufrió.

Figura 30

Dificultad para la noción de la reflexión

¿Se veía como al reflejarla en un espejo?	
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No
<input checked="" type="checkbox"/> Si	<input checked="" type="checkbox"/> No

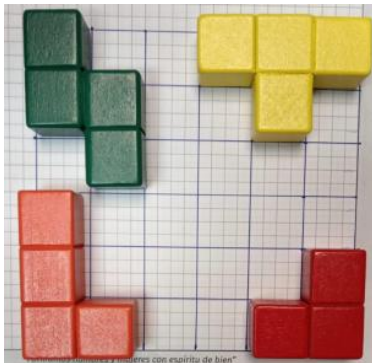
Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

En la aplicación de la misión 5, se les propone a los estudiantes interpretar instrucciones de traslación para conseguir una estructura final dentro del plano, por lo cual, se inició con la ubicación de las cuatro piezas (Z, T, L y V) en el plano de la cuadrícula, como se muestra en la

Figura 31. Además, se les entregaba un papel con una serie de instrucciones que indicaban las traslaciones a realizar para dar como resultado la estructura (ver Figura 32).

Figura 31

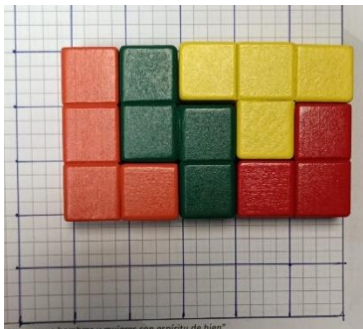
Ubicación de las piezas en el plano



Nota. Imágenes tomadas del material de clases

Figura 32

Resultado de la traslación



Nota. Imágenes tomadas del material de clases

Frente a la actividad planteada para trabajar la traslación, la gran mayoría de los estudiantes la realiza con éxito y efectividad, lo que evidencia la comprensión de lo que significa trasladar una pieza tridimensional. Sin embargo, un pequeño grupo de estudiantes obtuvieron un resultado diferente al resultado propuesto en la figura 32. Lo cual, no se interpreta como una dificultad para comprender la noción de trasladar, sino mantenían dificultad para la dirección a la cual debían trasladar la pieza con el número de cuadros correspondientes (ver Figura 33). Por

consiguiente, se evidencia que en general los estudiantes interpretan la noción de trasladar una pieza tridimensional, por lo que implica moverla sobre un plano en diferentes direcciones: hacia la derecha, izquierda, arriba, abajo, adelante y atrás.

Figura 33

Resultados diferentes



Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Reformulación de hipótesis

A partir de la aplicación, se reformula las hipótesis mencionadas sobre el desarrollo progresivo de los estudiantes, puesto que, en el desarrollo de la THA 4 en la cual lo estudiantes entendieron de que trataba la traslación de piezas tridimensionales, pero se les dificultaba algunos estudiantes la dirección hacia la cual debían mover la pieza. Por lo cual, se requiere generar otra THA en la que se trabaje más la direcciones (derecha, izquierda, atrás y adelante) y se realicen más ejercicios de traslación con piezas tridimensionales para que los estudiantes se apropien de este concepto.

4.2.5 Misión 5: Huyendo del Enderman

Esta misión corresponde a la THA 5, en la cual, se busca que los estudiantes comprendan la transformación geométrica de la rotación a través de la interpretación de instrucciones y representación de vistas ortogonales.

Conocimientos previos de los jugadores (estudiantes)

Los estudiantes del grupo 3-1 reconocen que para armar una estructura con las piezas del Cubo soma deben realizar ciertos movimientos con la pieza, pero solo reconocen la traslación, aun no identifican las otras transformaciones geométricas en el plano como la Rotación en 2D y 3D.

Objetivo de la Misión 5 de la THA 5 (NCTM y EBC)

Desarrollar las Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande (1990) como la coordinación óculo motora, constancia perceptual, percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales; al inferir las instrucciones de traslación y rotación y la representación de la vista ortogonal de posición final de la pieza en la cuadrícula con el apoyo de un triedro en físico.

Objetivo del jugador en la Misión 5 de la THA 5

Realizar rotaciones con las piezas del cubo soma para dibujar la vista a la que corresponde a la posición final de las caras cuadradas de colores y así obtener la mayor cantidad puntos.

Análisis a Priori de la Misión 5 de la THA 5: Formulación de hipótesis

Para el desarrollo de la misión 5 se explicita la progresión de desarrollo que se propone a modo de formulación de hipótesis:

- 1) Al inferir las instrucciones de rotación en el plano o en el espacio, su recorrido y dirección, los estudiantes fortalecen sus habilidades de percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales. Aunque, a veces confunda

rotación en el plano con rotación el espacio, un cuarto de vuelta o media vuelta, derecha e izquierda.

2) Al identificar la posición final de la pieza en la que quedan las caras cuadradas de colores y la representa en la vista ortogonal correspondiente, los estudiantes fortalecen las Habilidades de Visualización de coordinación óculo motora, percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales.

3) Al identificar que la pieza sigue siendo la misma a pesar de las transformaciones ocurridas como traslación y rotación, los estudiantes fortalecen su Habilidad de Visualización de constancia perceptual.

Proceso de Desarrollo de la Misión 5 de la THA 5

Tabla 13

Habilidades a desarrollar de la misión 5 de la THA 5

Retos	Habilidades para desarrollar
1) Identificar cuándo se debe realizar una rotación en el espacio o rotación en el plano.	Coordinación óculo motora: Identifica la posición final de la pieza y su representación en la cuadrícula posteriori a una rotación.
2) Identificar cuánto debe rotar la pieza (una vuelta, media vuelta o un cuarto de vuelta)	Constancia perceptual: Identifica la posición final de la pieza y su representación de las vistas ortogonales en la cuadrícula posteriori a una rotación, con el reconocimiento de que la pieza no cambia sus propiedades.
3) Identificar hacia qué dirección realizar la rotación (derecha, izquierda, adelante o atrás)	Percepción de la posición en el espacio: Infiere las instrucciones de rotación para la identificación de la nueva posición de la pieza y su representación de la vista ortogonal correspondiente.
4) Seguir instrucciones para rotar las piezas (en el espacio o en el plano) y luego dibujar su vista correspondiente de las caras cuadradas de colores.	Percepción de relaciones espaciales: Infiere las instrucciones de rotación para la identificación de la nueva posición de la pieza y su relación con la representación de la vista ortogonal correspondiente.

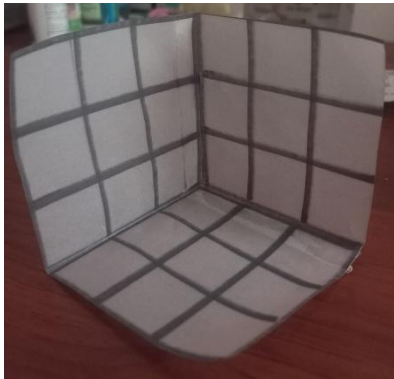
Nota. Elaboración propia.

Análisis de Datos de la Misión 5 de la THA 5

En la aplicación de la THA 5 se propuso a los estudiantes la rotación en el plano (2D) y rotación en el espacio (3D), el recorrido del giro en relación con las fracciones como un cuarto de vuelta y media vuelta, y, su dirección, derecha (sentido horario) e izquierdo (sentido antihorario). De manera que, los estudiantes en esta misión 5 interpretan una serie de instrucciones en secuencia y las piezas del Cubo soma L, V y Z solo contiene una parte con caras cuadradas de colores, por lo que, cada estudiante tiene una pieza diferente. Además, se apoyan de un triedro en físico, como se observa en la figura 34, en el cual ubican la pieza dentro de este y realizan las rotaciones correspondientes para que una vez finalicen, grafiquen la vista ortogonal en la que quedan las caras cuadradas de colores (ver Figura 35).

Figura 34

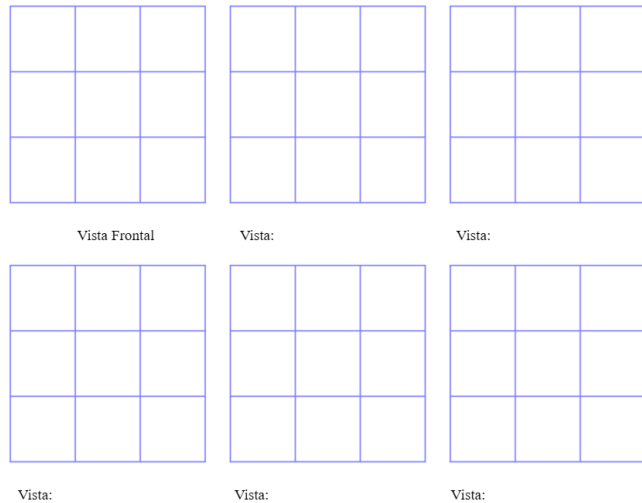
Triedro



Nota. Imágenes tomadas del material de clase

Figura 35

Cuadrícula Vistas Ortogonales

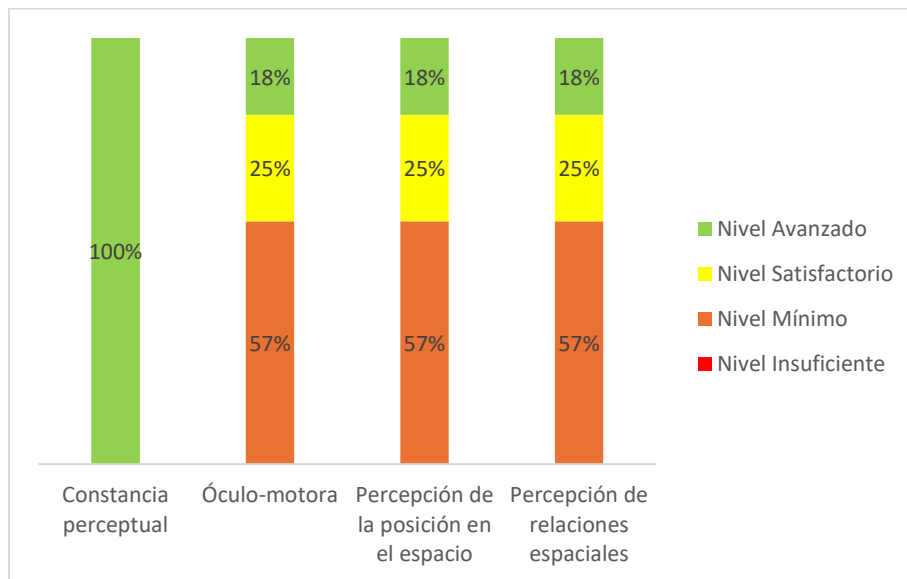


Nota. Elaboración propia

A continuación, se visualizan los resultados obtenidos de la THA 5 por cada Habilidad de Visualización y los niveles obtenidos en cada una de ellas, como se evidencia en la figura 36.

Figura 36

Resultados de la THA 5



Nota. Elaboración propia

Como se observa en la figura 36, el 100% de los estudiantes se hallan en nivel avanzado de la Habilidad de Visualización de constancia perceptual, por tanto, se deduce que los estudiantes

identifican la posición final de la pieza y su representación de las vistas ortogonales en la cuadrícula posteriori a una rotación, con el reconocimiento de que la pieza no cambia sus propiedades. Puesto que, todos los estudiantes dibujaron la parte de la pieza que contiene las caras cuadradas después de seguir alguna instrucción, lo que quiere decir que no se analiza en este punto si quedó en la vista correspondiente a la rotación, sino la comprensión del estudiante para identificar que la pieza sigue siendo la misma a pesar de las transformaciones geométricas sufridas en la pieza como la traslación y la rotación (ver Figura 37).

Por otra parte, se observa el 18% de los estudiantes en el nivel avanzado en las Habilidades de Visualización de coordinación óculo motora, percepción de posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales. Por tanto, identifican en cuál de las vistas quedan las caras cuadradas de colores de la pieza, por lo tanto, representan de manera completa y precisa la vista ortogonal correspondiente en la cuadrícula posteriori a una rotación, es decir, infieren las instrucciones dadas (rotación 2D-3D, recorrido y dirección) de la posición nueva de la pieza y su relación con la vista en la que queda, como se evidencia en la figura 37.

Figura 37

Identificación de la vista y su correcta representación



Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

En el nivel satisfactorio, se halla el 25% de los estudiantes que, a diferencia de los estudiantes del nivel avanzado, identifican la posición final de la pieza posteriori a una rotación, pero sin precisión en la orientación de las caras cuadradas. Es decir, infieren las instrucciones dadas para la identificación de la nueva posición de la pieza, pero mantiene confusión con la dirección de rotación de la pieza (derecha e izquierda), por lo cual, al momento de representar las caras cuadradas no quedan en la orientación adecuada. Esto se evidencia en la figura 38, que muestra que identifican las vistas, pero mantienen dificultad para su representación precisa.

Figura 38

Identificación de la vista, pero con representación imprecisa



Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Por otro lado, el 57% de los estudiantes se encuentran en el nivel mínimo en las Habilidades de Visualización de coordinación óculo motora, percepción de posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales. Lo cual, deja entrever que identifican qué es la rotación, pero no infieren todas las instrucciones de rotación, por lo tanto, mantienen confusión entre rotación en el plano (cuando la pieza no se levanta del plano) y rotación en el espacio (cuando la pieza se levanta del plano), su recorrido (un cuarto de vuelta y media vuelta y la orientación de la pieza, derecha o

izquierda. Además, en la Habilidad de Visualización de coordinación óculo motora identifican la posición final de la pieza sin el reconocimiento de la vista en la que queda, por lo cual, realizan de manera incompleta su representación en la cuadrícula posteriori a una rotación.

Reformulación de hipótesis

A partir de la aplicación, se reformula las hipótesis mencionadas sobre el desarrollo progresivo de los estudiantes, puesto que, en el desarrollo de la THA 5 se necesitó de un apoyo constante frente al tipo de rotación (en el plano o en el espacio), cuanto debí rotarse la pieza (media vuelta o un cuarto de vuelta) y la dirección hacia de la rotación (derecha, izquierda, adelante o atrás). Por lo cual, se requiere generar otra THA compuesta por varias sesiones, en la cual se trabaje de manera específica la rotación en el plano o en el espacio, cuanto se debe rotar la pieza y la dirección de la rotación, para después relacionar en una sesión de clases estos tres componentes de la rotación.

4.2.6 Misión 5: *Huyendo del Enderman*

Esta misión corresponde a la THA 6, en la cual, se busca que los estudiantes comprendan la transformación geométrica de la reflexión a través de su representación en el punteado isométrico.

Conocimientos previos de los jugadores (estudiantes)

Los estudiantes del grupo 1 de tercero reconocen el cuerpo geométrico del cubo y sus propiedades al representarlo dentro del punteado isométrico con base en modelos como las piezas tridimensionales del Cubo soma. Además, reconocen los ejes de simetría en figuras bidimensionales, lo que conlleva a que interpreten la transformación de la reflexión como la inversión del cuerpo geométrico según el eje horizontal o vertical, También, por medio de su vocabulario se reconoce que tienen el uso intuitivo de la noción de voltear.

Objetivo de la Misión 5 de la THA 6 (NCTM y EBC)

Desarrollar las Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande (1990) en estudiantes de grado tercero de primaria como coordinación óculo motora, constancia perceptual, percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales; al representar transformaciones geométricas como la reflexión con las piezas del cubo soma mediante el punteado isométrico.

Objetivo del jugador en la Misión 5 de la THA 6.

Reconocer la reflexión como la inversión de la pieza al representar dos piezas tridimensionales por medio de trazos (dibujo) sea en el eje horizontal o en el vertical para obtener puntos acumulables.

Análisis a Priori de la Misión 5 de la THA 6: Formulación de hipótesis.

- 1) Al interpretar que el efecto espejo hace que se invierta la posición de la pieza sin cambiar su forma o tamaño, fortalece las Habilidades de Visualización de coordinación óculo motora, la constancia perceptual, percepción de la posición en el espacio de relaciones espaciales.
- 2) Al reconocer patrones para la correspondencia punto a punto como todo lo que está en un lado aparece invertido en el otro lado, fortalece la habilidad de la posición en el espacio y la coordinación óculo motora para representar en el punteado isométrico.
- 3) Al comprender que la reflexión ocurre respecto a un eje vertical u horizontal, fortalece la percepción de relaciones espaciales.
- 4) Al representar la pieza reflejada en el eje indicado por medio del punteado isométrico fortalece la coordinación óculo motora, la constancia perceptual, percepción de la posición en el espacio y de relaciones espaciales.

Proceso de Desarrollo de la Misión 5 de la THA 6

Tabla 14

Habilidades a desarrollar de la misión 5 de la THA 6

Logros	Habilidades para desarrollar
1) Realizar la reflexión de dos piezas del Cubo soma L y Z al dibujarlo en el punteado isométrico (eje vertical, eje horizontal).	<p>Coordinación óculo motora: Representar la reflexión de una pieza en el punteado isométrico.</p> <p>Constancia perceptual: Representar la reflexión de una pieza tridimensional por medio del trazo en el punteado isométrico, con el reconocimiento de que la pieza no cambia sus propiedades.</p> <p>Percepción de la posición en el espacio: Interpretar la posición reflejada de la pieza por medio de la representación en el punteado isométrico.</p> <p>Percepción de relaciones espaciales: Representar la reflexión por medio del trazo en el punteado isométrico de las piezas tridimensionales, mediante la correspondencia de punto a punto de la pieza inicial a su imagen reflejada.</p>

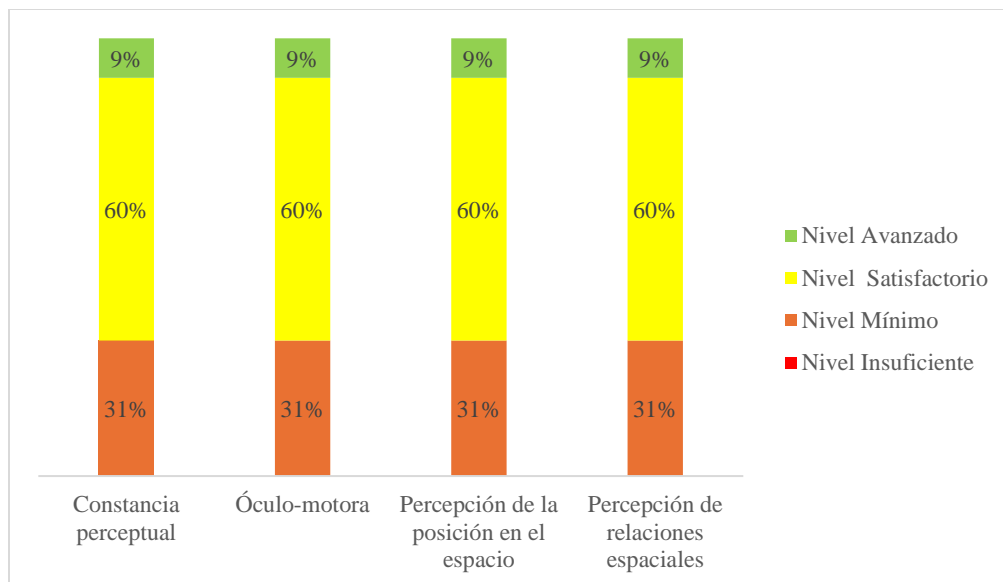
Nota. Elaboración propia.

Análisis de Datos de la Misión 5 de la THA 6

En esta misión 5 de la THA 6, se propuso que los estudiantes reconocen otra transformación geométrica en el plano como la reflexión en cuerpos tridimensionales con su representación bidimensional en el punteado isométrico. En un primer momento, se muestra a los estudiantes por medio de la tecnología cómo sucede el efecto espejo en las cámaras a través de la herramienta que proporciona la aplicación Zoom. Luego, en una hoja de punteado isométrico dibujan la reflexión de la pieza L en el eje vertical y la pieza Z en el eje horizontal, esto con apoyo en las piezas en físico para su manipulación. De manera que, se obtienen los siguientes resultados como se evidencia en la Figura 39.

Figura 39

Resultados de la THA 6



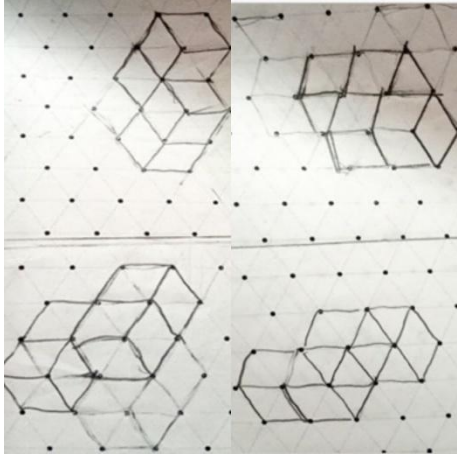
Nota. Elaboración propia.

Como se observa figura 39, los resultados son congruentes en las cuatro habilidades analizadas, debido a que, los estudiantes hacen uso de cada una de ellas para representar las dos piezas en el punteado isométrico. Por tanto, se tiene el siguiente análisis:

Los estudiantes tienen un manejo parcial o total de la noción de invariancia de un cuerpo geométrico y su representación en el punteado isométrico, es decir, en la habilidad de constancia perceptual el 69% de los estudiantes están ubicados en un nivel satisfactorio y avanzado. Lo cual deja entrever que los estudiantes del grupo 1 de tercero comprenden que la representación de la reflexión que realiza la pieza sigue siendo la misma pieza indiferentemente si se reflexionó, por lo que representan la pieza con el mismo tamaño y forma al mantener una correspondencia punto a punto. Sin embargo, el 60% de estos estudiantes se les dificultó mantener una correspondencia punto a punto con respecto al eje horizontal como se observa en la figura 40. Solamente el 31% de los estudiantes intentan representar la reflexión de una pieza sin nivel de precisión al seguir el patrón de puntos y líneas, pero lo realizan en un eje diagonal (el cual no se solicitó), con la interpretación de que la pieza conserva su forma (ver Figura 41).

Figura 40

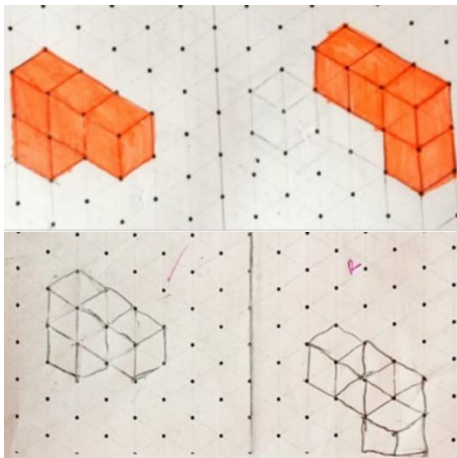
Dificultad ante la representación en el punteado isométrico de la pieza reflejada en el eje horizontal



Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Figura 41

Representación en el punteado isométrico de la reflexión de una pieza sin nivel de precisión frente al eje solicitado



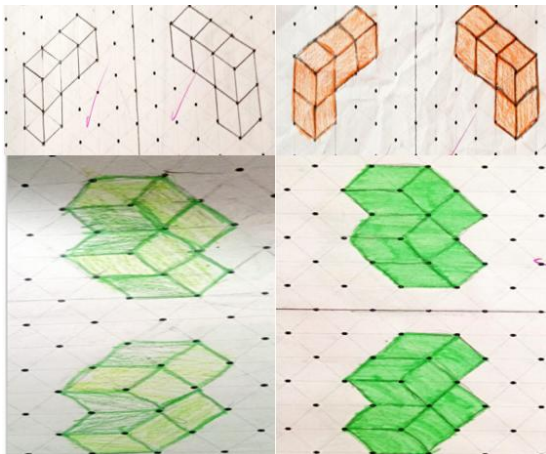
Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Por tanto, en las Habilidades de Visualización de la coordinación óculo motora, percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales del 100% de los estudiantes el 69% de estos se encuentran ubicados en el nivel satisfactorio y avanzado. En el nivel satisfactorio, con el 60% se encuentran aquellos que representaron la pieza L o Z en el punteado isométrico de acuerdo al eje indicado, sin embargo, no alcanzan un nivel avanzado, debido a que mantienen dificultades al momento de tener en cuenta el eje de reflexión horizontal y la equidistancia entre el eje. Es decir, comprende la noción de reflexión al interpretar la posición de una pieza al reflejarla y representarla en el punteado isométrico con el eje vertical, pero se le dificulta representar otra pieza (Z) en el eje horizontal.

De manera que, solo el 9% de los estudiantes se encuentran en un nivel avanzado al representar la reflexión de cada una de las dos piezas indicadas de manera precisa en el punteado isométrico (ver Figura 42). Por tanto, comprenden la noción de reflexión al interpretar la posición de la pieza reflejada, sea en el eje vertical u horizontal y la representa de manera precisa en el punteado isométrico.

Figura 42

Representación precisa en el punteado isométrico de la reflexión de las piezas L y Z en el eje horizontal y vertical



Nota. Imágenes tomadas de los trabajos realizados por los estudiantes.

Ahora bien, en el nivel mínimo se halla el 31% de los estudiantes para las cuatro habilidades analizadas. A causa de que los estudiantes intentan interpretar la posición y la representación de la reflexión de las piezas, pero sin mantener una orientación de la pieza al invertirse y sin tener en cuenta el eje indicado. Por lo cual, varios estudiantes realizan la representación de la reflexión como si fuese en un eje diagonal, lo que demuestra que pueden tener la noción de reflexión, pero mantienen la dificultad al momento de interpretar el eje indicado y la equidistancia al eje, como se puede evidenciar en la figura 42.

Reformulación de hipótesis

A partir de los resultados, se propone reformular las hipótesis sobre el desarrollo progresivo de los estudiantes en esta THA 6 en torno a la reflexión. Se evidenció un manejo intuitivo y parcial de los ejes, por lo cual, se requiere de una THA con el tiempo suficiente para que los estudiantes comprendan los ejes de reflexión y la equidistancia que debe existir entre la pieza, el eje y su imagen reflejada. Además, que el estudiante comprenda de manera gradual cómo se reflexiona cada pieza en el eje vertical y horizontal, de los cuales, el eje horizontal es el que demanda mayor complejidad cognitiva para su representación en el punteado isométrico.

4.2.7 Misión 6 y 7: ¿Qué les sucede a las piezas? y la forma olvidada.

Estas misiones corresponden a la THA 7, en las que los estudiantes memorizan una secuencia de piezas para inferir la transformación geométrica que le sucede en otra secuencia de piezas. Además, infiere la posición final de una pieza luego de interpretar una serie de instrucciones que sufre la pieza en una posición inicial.

Conocimientos previos de los jugadores (estudiantes)

Los estudiantes reconocen las transformaciones geométricas en el plano como la traslación, la rotación y la reflexión. Además, cuentan con trayectoria en la manipulación de recursos digitales en el software de GeoGebra para responder ante los retos con apoyo en las piezas del cubo soma en físico.

Objetivo de la Misión 6 y 7 de la THA 7 (NCTM y EBC)

Desarrollar las Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande (1990) en estudiantes de grado tercero de primaria como percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales y memoria visual; al inferir la posición final de la pieza posteriori a una transformación geométrica (traslación, rotación, reflexión).

Objetivo del jugador en la Misión 6 y 7 de la THA 7.

Inferir por medio de la memorización e interpretación de instrucciones la transformación que sufre las piezas del cubo soma para ganar puntos acumulables.

Análisis a Priori de la Misión 6 y 7 de la THA 7: Formulación de hipótesis.

1) Al interpretar las instrucciones los estudiantes infieren la posición final de la pieza y selecciona la transformación ocurrida lo cual fortalece las habilidades de percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales.

2) Al memorizar una secuencia inicial de pieza requieren un tiempo prudente mayor a 3 minutos para identificar la posición de las piezas. Luego, en la segunda secuencia de piezas, las cuales han sufrido alguna transformación geométrica. Por tanto, deben inferir de cuál transformación se trata, su dirección y recorrido lo cual fortalece las habilidades de memoria visual, percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales. Aunque pueden presentar confusión entre rotación 2D y 3D (en el plano o en el espacio) y su recorrido (un cuarto de vuelta o media vuelta).

Proceso de Desarrollo de la Misión 6 y 7 de la THA 7**Tabla 15***Habilidades a desarrollar de la misión 6 y 7 de la THA 7*

Logros	Habilidades para desarrollar
1) Inferir la transformación que sufre la pieza (Z, L, T y V) en su posición inicial, cuál sería su posición final y cuál es el nombre que recibe dicha transformación. 2) Dibujar la posición final en el punteado isométrico al seguir la secuencia de rotación de un cuarto de vuelta de la pieza L. 3) A la posición final anterior realizar media vuelta en el espacio hacia la derecha y seleccionar la posición en la que queda la pieza L. 4) Inferir las transformaciones que ocurren en la segunda secuencia de la primera secuencia memorizada, seleccionar la transformación correspondiente, su dirección y recorrido.	Percepción de la posición en el espacio: Inferir la posición final de la pieza posteriori a una transformación. Percepción de relaciones espaciales: Inferir la posición final de la pieza posteriori a una transformación, por lo cual, realiza una interpretación de la instrucción dada a partir de una pieza en una posición inicial. Memoria visual: Inferir la transformación geométrica que sufre la pieza, su recorrido y dirección, con la memorización de una secuencia inicial y una secuencia final.

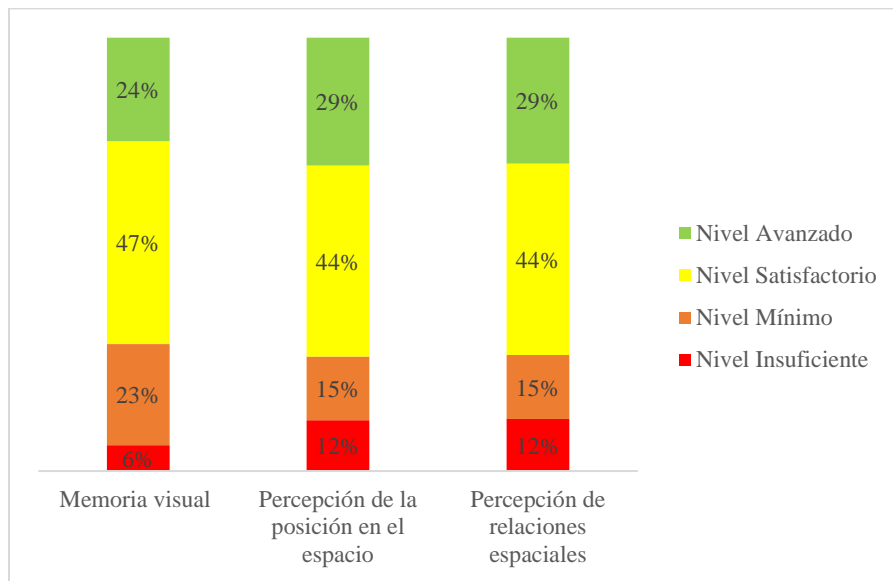
Nota. Elaboración propia**Análisis de Datos de la Misión 6 y 7 de la THA 7**

En la misión 6 se propuso analizar la habilidad de Visualización de la memoria visual, por medio de la presentación de una primera secuencia con cuatro piezas del cubo soma (L, V, T, Z) en determinada posición para que los estudiantes la observaran por un tiempo aproximado de tres minutos. Luego, se les presentó una segunda secuencia en la cual las piezas han sufrido una serie de transformaciones geométricas, por lo cual los estudiantes infieren la transformación que sufrió cada pieza, en qué dirección y cuánto de vuelta (recorrido). Por otra parte, en la misión 7 se propuso a los estudiantes por medio del software de GeoGebra responder algunos ejercicios en lo que deben interpretar instrucciones para inferir la posición final de una pieza de acuerdo con su posición

inicial y mencionar la transformación que ocurrió. Por tanto, se obtienen los siguientes resultados que se evidencian en la figura 43.

Figura 43

Resultados de la THA 7



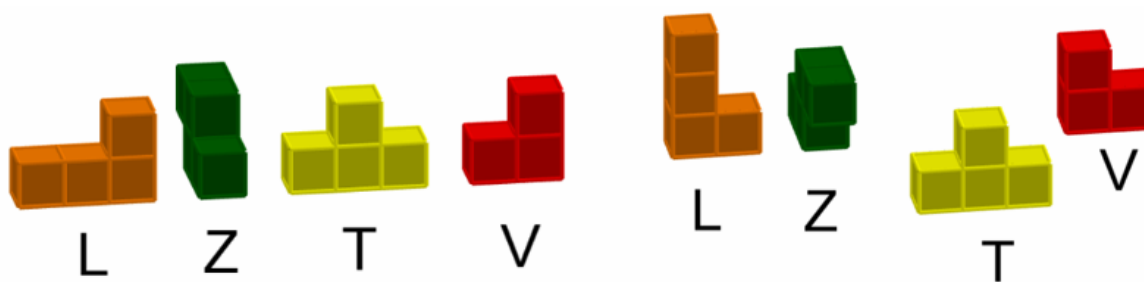
Nota. Elaboración propia

Como se observa en la figura 43, el 100% de los estudiantes se encuentran en los diferentes niveles de desarrollo de tres Habilidades de Visualización. Con respecto a la habilidad de memoria visual, se halla el 47% de los estudiantes en un nivel satisfactorio referido a que el estudiante infiere de manera parcial la transformación geométrica que sufre la pieza (traslación, rotación y reflexión), su recorrido (un cuarto de vuelta o media vuelta) y dirección (derecha o izquierda), con la memorización de una secuencia inicial y una secuencia final, es decir, memoriza las transformaciones de algunas piezas o por lo menos tres piezas de las cuatro presentes en la secuencia. Por otra parte, el 24% de los estudiantes se hallan en un nivel avanzado, puesto que infieren con precisión de su memoria visual la transformación que sufre cada una de las cuatro piezas en la secuencia final. Sin embargo, el 23% de los estudiantes que se ubican en el nivel

mínimo, por lo cual, infieren al menos una o dos transformaciones geométricas ocurridas de las cuatro piezas presentes en la secuencia. Por último, solo el 6% de los estudiantes se encuentra en un nivel insuficiente al no memorizar con precisión las transformaciones ocurridas en las cuatro piezas, de manera que no infiere ninguna transformación geométrica que sufre alguna pieza. La estructura de la secuencia se muestra en la figura 44.

Figura 44

Secuencia inicial y secuencia final respectivamente



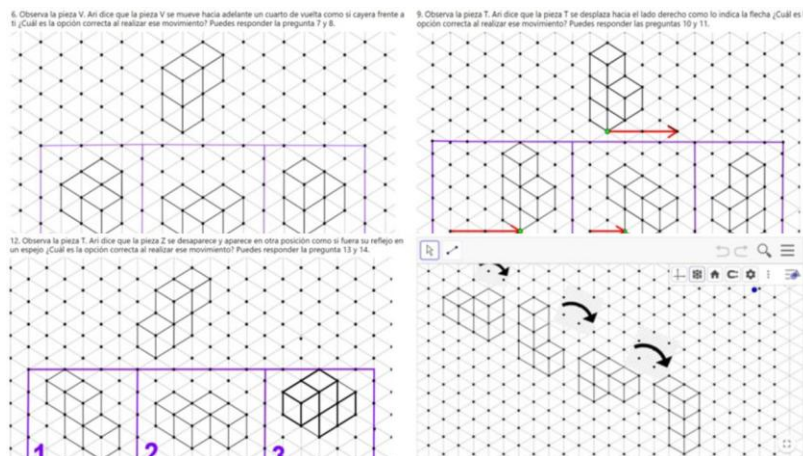
Nota. Elaboración propia.

Ahora bien, en la misión 7 con el análisis de desarrollo de las habilidades de percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales, se halla el 100% de los estudiantes distribuidos en los cuatro niveles. En el nivel satisfactorio se halla el 44% de los estudiantes, por lo cual, infieren la posición final de la pieza posterior a una transformación (traslación, rotación, reflexión), al interpretar la instrucción, su dirección y recorrido, pero mantiene dificultad para la identificación de la transformación ocurrida, es decir, identifica en qué posición queda la pieza de acuerdo con la instrucción, pero no es seguro al momento de describir qué transformación geométrica ocurrió, por lo que confundían los nombres de las transformaciones, en especial la traslación con la rotación. La estructura de los retos se muestra en la figura 45. Por otra parte, el 29% de los estudiantes se hallan en un nivel avanzado, puesto que, infieren la posición final de la

pieza posteriori a una transformación geométrica (traslación, rotación, reflexión), por lo cual, realiza una interpretación precisa de la instrucción dada, es decir, selecciona la posición final y menciona de qué transformación se trata.

Figura 45

Estructura de los retos en el software de GeoGebra



Nota. Elaboración propia.

En el nivel mínimo se halla el 15% de los estudiantes, lo cual deja entrever que, infieren solo algunas posiciones finales de al menos una pieza posteriori a una transformación (traslación, rotación, reflexión), por lo que mantiene dificultad para la interpretación de la instrucción de la rotación (en el plano 2D o en el espacio 3D), su recorrido (un cuarto de vuelta o media vuelta) y su dirección (derecha o izquierda). Finalmente, 12% de los estudiantes se encuentra en el nivel insuficiente, por lo cual no infieren la posición final de alguna pieza posteriori a una transformación (traslación, rotación, reflexión), por tanto, no realiza una interpretación de las instrucciones sobre las transformaciones, por tanto, confunde la dirección, el recorrido y el tipo la rotación (2D, 3D).

Reformulación de hipótesis

A partir de la aplicación de esta THA 7 se propone reformular las hipótesis de desarrollo progresivo de los estudiantes, debido a que en la habilidad de memoria visual la mayor parte en un 71% de los estudiantes llega a recordar la posición inicial de al menos tres piezas y relacionarlo con la transformación geométrica, pero hay un 29% de estudiantes que aún requieren potenciar esta habilidad. Además, en la percepción de la posición en el espacio y relaciones espaciales, algunos estudiantes que corresponden al nivel satisfactorio, mínimo e insuficiente persisten en la confusión del tipo de rotación, en el plano o en el espacio, su recorrido con un cuarto de vuelta o media vuelta y su dirección a la izquierda o la derecha. De manera que, se requiere de otra THA con el objetivo de mejorar y afianzar estas nociones.

4.2.8 Misión 8 y 9: La búsqueda del tesoro y Salida del Cubo Mundo

Estas misiones corresponden a la THA 8, en las que, los estudiantes guían a su compañero con instrucciones para la búsqueda de un tesoro. Luego, en parejas realizan la actividad aplicada en el diagnóstico de ensamblaje por instrucciones para construir una estructura tridimensional con el uso de vocabulario espacial.

Conocimientos previos de los jugadores (estudiantes)

Los estudiantes usan vocabulario espacial con conceptos como rotar, trasladar y reflejar, arriba, abajo, al lado, detrás, izquierda, derecha, rotación en el plano, rotación en el espacio, un cuarto de vuelta o media vuelta. Además de que se trabajó esta THA en el diagnóstico, por lo cual, reconocen la dinámica de la actividad, su experiencia en el ensamblaje de piezas del cubo soma y la interpretación de posiciones y sus relaciones espaciales.

Objetivo de la Misión 8 y 9 de la THA 8 (NCTM y EBC)

Desarrollar las Habilidades de Visualización propuestas por Del Grande (1990) en estudiantes de grado tercero de primaria como percepción de la posición en el espacio y percepción

de relaciones espaciales al interpretar las posiciones de las piezas que se encuentran en una estructura (imagen) para dar instrucciones e interpretarlas hasta finalizar con la construcción de estructuras tridimensionales con el uso de material manipulativo como el cubo soma.

Objetivo del jugador en la Misión 8 Y 9 de la THA 8.

Dar e interpretar instrucciones para armar la estructura con las piezas del cubo soma en el menor tiempo posible y así poder acumular los últimos puntos.

Análisis a Priori de la Misión 8 y 9 de la THA 8: Formulación de hipótesis.

1) Al interpretar y dar instrucciones, puede que algunos estudiantes lo hagan sin precisión o de manera parcial, por lo que pueden confundir la izquierda con la derecha de su compañero al estar cada pareja frente a frente; también, confundir rotación en el espacio y rotación en el plano, como su recorrido en un cuarto de vuelta o media vuelta. Aun así, puede que haya parejas que interpretan las posiciones y sus relaciones al dar instrucciones claras y así construir la estructura propuesta en el menor tiempo posible. Lo cual, fortalece sus Habilidades de Visualización en percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales.

Proceso de Desarrollo de la Misión 8 y 9

Tabla 16

Habilidades a desarrollar de la misión 8 y 9 de la THA 8

Logros	Habilidades para desarrollar
1) Dar instrucciones de manera precisa usando el vocabulario espacial (arriba, abajo, encima, debajo, derecha tuya, izquierda tuya, rotar en el espacio, rotar en el plano, trasladar, reflejar, un cuarto de vuelta, media vuelta).	<p>Percepción de la posición en el espacio: Interpretar las posiciones de las piezas, con el uso de vocabulario espacial, por tanto, realiza una descripción de instrucciones claras y la construcción de la estructura solicitada (imagen).</p> <p>Percepción de relaciones espaciales: Interpretar con precisión las posiciones de las piezas y sus relaciones, con el uso de vocabulario espacial, por tanto, describe</p>

-
- | | |
|--|--|
| 2) Interpretar las instrucciones para armar la figura. | instrucciones claras y construyen la estructura solicitada (imagen). |
|--|--|
-

Nota. Elaboración propia.

Análisis de Datos de la Misión 8 y 9.

En la misión 8 se propuso a los estudiantes jugar a la búsqueda del tesoro, por lo cual, hay un explorador (jugador) quien no puede ver y sus compañeros deben guiarlo hasta encontrar el tesoro. Por lo cual, el mapa del tesoro era el salón y las sillas simulaban los obstáculos. El explorador es el jugador Ghast16 quien muestra un interés genuino por aprender. Los demás jugadores son compañeros del explorador, por lo cual, cada uno debe ponerse de acuerdo para hablar y guiar a su compañero con el uso de vocabulario espacial o, por el contrario, el explorador no puede interpretar las instrucciones. Esta misión permite evidenciar de manera general si los estudiantes hacen uso del vocabulario que se ha aprendido a través de todo el experimento de enseñanza, además de que pone en juego la competencia de la comunicación, las Habilidades de Visualización de percepción de la posición en el espacio y de las relaciones espaciales al reconocer la posición del explorador y la posición en la que se encuentra cada compañero para mencionar la derecha o la izquierda, hacia adelante o atrás y dar una aproximación de pasos para que no se choque con algún obstáculo. De manera general, se evidencia que los estudiantes muestran un interés por el juego, todos quieren participar, así que toman turnos delegados por la docente como intermediadora para que el explorador pueda interpretar las instrucciones y actuar con base a esas indicaciones. También, en algunas ocasiones se confundían desde el punto de vista en el que se encontraban con la derecha o la izquierda y sobre cuánto de vuelta debe dar el explorador al rotar en el plano, por lo cual, se afianzó estas nociones con este juego práctico que simula una situación problema real, el cual promovió conflicto cognitivo para los estudiantes, quienes reformulan cada vez la instrucción para darla de manera más precisa y clara (ver Figura 46).

Figura 46

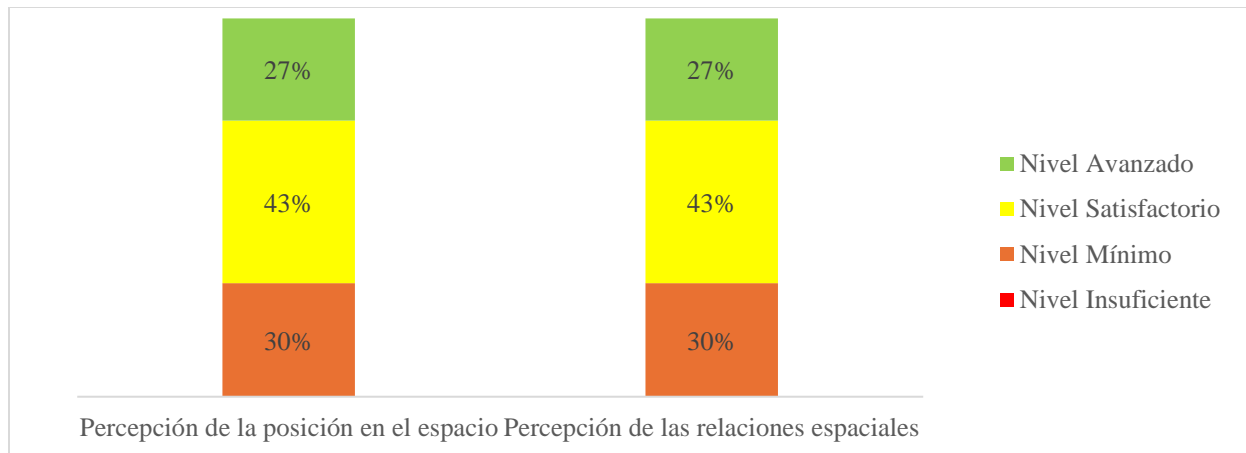
En búsqueda del tesoro por medio de la interpretación de instrucciones.



Nota. Elaboración propia

Una vez se finalizó el juego, se procedió a pasar a cada una de las parejas para la videograbación de la misión 9, en la cual los estudiantes se encuentran frente a frente, un estudiante tiene el rol de dar instrucciones con base en la estructura (imagen) que observa y el otro estudiante interpreta esas instrucciones para armar la estructura solicitada. Los resultados se hallan en la figura 47, con las Habilidades de Visualización de percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales. Además, se muestra en la tabla 17 los diálogos usados según el rol de cada estudiante y el tiempo que usan para finalizar la estructura armada.

Figura 47**Resultado de la THA 8**



Nota. Elaboración propia.

Como se puede evidenciar en la figura 47, el 100% de los estudiantes se encuentran ubicados en los niveles avanzado, satisfactorio y mínimo en las habilidades de percepción de la posición en el espacio y percepción de relaciones espaciales, por lo cual, no hay estudiantes en un nivel insuficiente, ya que todos mencionan al menos una referencia espacial para interpretar la posición y dar las instrucciones. De manera que, el 27% de estos, se hallan en un nivel avanzado, por lo cual, interpretan con precisión las posiciones de las piezas con el uso de vocabulario espacial variado y preciso (ej. “gira en el espacio hacia la izquierda un cuarto de vuelta”), por tanto, realiza una descripción detallada de instrucciones claras y la construcción de la estructura solicitada (imagen). Por otra parte, el 43% de los estudiantes se hallan en un nivel satisfactorio, por lo que interpreta con cierta precisión las posiciones de las piezas, con el uso de vocabulario espacial variado (ej. rota en el espacio un cuarto de vuelta), pero mantiene confusión con la dirección derecha-izquierda al estar frente a frente, por tanto, da instrucciones parciales y construyen la estructura solicitada (imagen) con alguna dificultad de dirección.

Por otro lado, el 30% de los estudiantes, se encuentran en el nivel mínimo, debido a que, al poner en acción el vocabulario aprendido durante el experimento de enseñanza interpretan sin nivel de precisión las posiciones de las piezas, con el uso de vocabulario espacial básico al

reconocer posiciones simples como arriba/abajo, delante/atrás, pero se les dificulta el uso de más de una referencia espacial para la descripción de la instrucción y por tanto, la interpretación de las instrucciones para la construcción de la estructura solicitada (imagen).

Estos resultados se pueden evidenciar en la tabla 17 en la cual se describe los diálogos usados por lo estudiantes con énfasis en el uso de vocabulario espacial para dar las instrucciones y para interpretarlas.

Tabla 17

Diálogos según el rol en la THA 8 de ensamblaje por instrucciones.

# pareja	Código	Observación (dar instrucciones)	Observación (interpretar instrucciones)	Tiempo de finalización de la figura
1	Dragones17-18	Dragones18: “la z, gírala hacia la derecha” Menciona instrucciones con dirección, pero le falta nombrar el recorrido: un cuarto, media vuelta.	Dragones17: “pero hacia el espacio o en el plano”	Castillo: 3:27 min
2	Humano19- Abejas32	Humanos19: “Ahora póngala encima de la v y de la z, ahí” Menciona por pasos cada pieza y cómo debe ir posicionada para encajar con otras piezas al trasladarla. Sin embargo, no nombraba hacia qué dirección debía rotar la pieza, puesto que había confusión entre derecha e izquierda.	32: Sigue instrucciones de manera precisa, aunque en una ocasión dio un cuarto de vuelta de más, pero de manera inmediata fue corregido por su compañero.	Muro: 2:50
3	Endermen7-8	Endermen7: “Rotela en el espacio media vuelta hacia tu derecha”, “rotala en el plano hacia la derecha, media vuelta”, “Ahora traslada al lado de la L”, “Ahora, rótela en el espacio hacia su derecha”	8: interpreta de manera precisa las instrucciones y confirma con su compañero si ha quedado bien.	Muro: 3 min
4	Ovejas26- Vex34	Ovejas26: “debajo, pero...” instrucciones imprecisas “así”, “derecha (como de frente”, “la L va dormida”, “no, pero al otro	Vex34: Como no hay instrucciones claras, comienza a hacer diferentes movimientos	Castillo: 9:54 min

		<p>lado, hacia allá”, “volteála hacia aquí, que se vea solo un cuadro” (pieza L y señala con las manos la dirección), “a la izquierda, pero está como hacia allá, como hacia acá”</p> <p>Mantiene confusión sobre el tipo de rotación e interpreta la estructura y la posición de las piezas de manera parcial, tampoco se da cuenta de la equivocación.</p> <p>Cambio de roles Vex34: “gírala para arriba” (señala con las manos la dirección). Necesita apoyo constante para mencionar dirección y cuánto de vuelta debe dar.</p>	<p>con las piezas y preguntar si así está bien</p> <p>Ovejas26: No interpreta cuarto de vuelta ni media vuelta, por tanto, adivina todas las piezas.</p>	<p>Muro: 2:30 min</p>
5	<p>Endercon22- Hoglin28</p>	<p>Hoglin28: “gírala en el plano al frente”, luego corrige y menciona: “gírala en el plano a la izquierda” (sin mencionar cuánto de vuelta, solo hasta que se le recuerda menciona: “un cuarto”). Siempre busca ayuda, apoyo para que se le explique la imagen. También, se confunde derecha e izquierda, pero sabe que su compañera le dirá cuál es su derecha y cuál es su izquierda.</p> <p>Cambio de roles: Endercon22: “la z, póngala en una posición y de media vuelta en el plano hacia la derecha y póngala encima de la v”. Menciona las instrucciones por pasos y es precisa con las instrucciones. Por tanto, reconoce que es un cuarto y media vuelta.</p>	<p>Endercon22: interpreta las instrucciones de su compañera y pide que sea más clara en las rotaciones. Siempre coloca cada pieza en una posición para que su compañera indique cómo debe posicionarse.</p> <p>Cambio de roles: Hoglin28: interpreta las instrucciones y recibe ayuda de su compañera para reconocer derecha e izquierda o si se confundió entre un cuarto y media vuelta, por lo cual corrigen rápido.</p>	<p>Castillo: 9 min</p> <p>Muro: 2:25 min</p>
6	<p>Plinguis6 -</p>	<p>Arañas31: “posición inicial” (haciendo referencia que la</p>	<p>Plinguis6: Interpreta de las instrucciones, incluso</p>	<p>Castillo: 3:12 min</p>

	<p>Arañas31 pieza debe tener una posición inicial para empezar a dar instrucciones), “un cuarto de vuelta hacia su izquierda”, “coge la pieza z y la pone al lado”. Menciona las instrucciones al interpretar la estructura de la imagen, pero se olvida de ser precisa al mencionar si rota en el espacio o el plano, cuánto de vuelta y hacia dónde.</p> <p>Cambio de roles: Plinguis6: “coge la v y la pones en la posición inicial”, “que quede un cuadrado más alto que la v”, “cuál es su derecha”, “trasládala al lado de la v”</p>	<p>pide más información para seguir de manera precisa las instrucciones.</p> <p>Cambio de roles: Arañas31: interpreta de manera parcial las instrucciones, pero en varias ocasiones quiere adivinar cómo van encajadas las piezas, aun así, sigue instrucciones y comprende un cuarto, media vuelta, derecha e izquierda.</p>	<p>Muro: 3:37</p>
<p>7</p>	<p>Dennis13-14 Dennis14: “primero saca la pieza L y la colocas al revés” “saca la letra v, y la colocas encima de la L. Como su compañero no entendía “encima” le menciona de nuevo: “levanta la v, ahora colócala encima de la L”. Luego, “da un cuarto de vuelta en el espacio hacia el frente”. Se confunde entre derecha e izquierda y da las instrucciones de acuerdo a su posición y no la del compañero. Si su compañero no sigue las instrucciones “no te dije que la volteara”, “no le he dicho que saque esa pieza”</p>	<p>Dennis13: no comprende la instrucción “encima de la pieza L”, ubica la pieza por delante. Hace más giros de los que se les indicó. No sigue instrucciones claras, es decir, no estaba concentrado.</p>	<p>Castillo: 8:13 min</p>
<p>8</p>	<p>Héroes1-2 Héroes1: “Coge la pieza v, levanta la ficha, ahí” “saca la z” “róta la hacia la izquierda en el espacio”, “gírala hacia tu derecha” (no menciona si un cuarto o media vuelta), “róta la de nuevo, un poco más” (sin mencionar direcciones).</p>	<p>Héroes2: comprende con ayuda lo de rotar en el espacio y en el plano. En varias ocasiones adivina cuánto gira y cómo encaja.</p>	<p>Muro: 6 min</p>

		Se confunde entre derecha e izquierda por lo que pide ayuda.		
9	! Llagers3 -4	<p>Llagers3: “saque la v, colócala en la posición inicial”, “Saque la T y póngala arriba de la V” (señala con la mano el giro). No mencionó rotación en el espacio o en el plano, un cuarto de vuelta y tampoco media vuelta debido a que su compañera sacaba las piezas ya en la posición que era lo cual no dio oportunidad para intervenir y terminaron rápido.</p> <p>Cambio de roles: Llagers4: “saque la letra T” (señala con las manos el giro) “atrás, otra vuelta, una media vuelta, otra media vuelta”, “ponga la v que quede como una L” (espera que su compañero haga movimientos aleatorios y adivinar la posición) “así, pero póngala en el huequito”. La interpretación de la figura de Llagers4 no es la correcta y empieza a cambiar todas las piezas de posición cuando solo le había quedado mal posicionada la V. Por lo cual, se tuvo que intervenir para que la profesora diera las instrucciones.</p>	<p>Llagers4: adivinó cada una de las instrucciones, cómo iba encajada, giraba la pieza si era necesario o si la sacaba tal cual era, así la colocaba encima de las otras hasta que diera la figura.</p> <p>Cambio de roles: Llagers3: Sigue las indicaciones, pero adivinando los giros ya que no recibe más información precisa. No comprende media vuelta, un cuarto de vuelta, rotación en el espacio o rotación en el plano.</p>	<p>Muro: 1:54 min</p> <p>Castillo: 9:34 min</p>
10	! Plinguis 5- Mineros 12	<p>Minero12: “¿Ponla un cuarto hacia arriba?”, “ponla en posición inicial”, “ahora gírala hacia la derecha”, “espacio, no en el plano”, “media vuelta, no no te pasaste”, “desplázala hacia la derecha”, “ahora rócala en el espacio un cuarto”, “ponla encima de la V, ahora la L”.</p>	<p>Plinguis5: Al evidenciar que las instrucciones que recibe son muy ambiguas pregunta constantemente ¿La muevo en el plano o en el espacio?, ¿cuánto?, ¿qué pieza coja?, ¿así?, ¿o así? (cambia la pieza de posición), ¿en el</p>	<p>Muro: 2:48 min</p> <p>Castillo: 7:23 min</p>

			plano o en el espacio?, ¿cuánto?	
		Ambos estudiantes confunden rotación y traslación al mencionar las instrucciones. También, al principio confunden rotación en el plano y rotación en el espacio, recorrido y dirección.		
11	Fantasma9-10	Fantasma10: En el momento de dar instrucciones en momento solo indica la dirección en la cual debe mover la pieza mas no menciona si se debe realizar una rotación o traslación. Constantemente menciona “no sé”, por tanto, no reconoce la rotación en el espacio o en el plano, su recorrido y dirección. Fantasma10: “no sé”, “a la izquierda”, “no mentiras a la derecha”, “ay no sé, ¿arriba?”, “la z está mal”, “la v a la izquierda”.	Fantasma9: al evidenciar que las instrucciones que recibe son muy ambiguas pregunta constantemente ¿dónde va la pieza? ¿así o así? Se confunde con la dirección a la cual debe girar la pieza (derecha-izquierda). Así mismo para rotar la pieza en el espacio o en el plano. Fantasma 9: “¿cuál?”, “¿la roto, la traslado?”, “¿a la derecha o allá?”.	Muro: 2:16 min Castillo: 8:23 min
12	Golems11-Redstonia21	Golems11: “coja la pieza verde, la z y haga una rotación en el plano, póngala normal y haga una rotación para la izquierda, para nuestra izquierda”. “no, voltéela, hágale de nuevo, otra vez” (sin reconocer si un cuarto de vuelta o media vuelta), “póngala, échela para la derecha en el espacio, ahora sí”. Se confunde con la dirección hacia donde debe moverse la pieza (derecha-izquierda) al estar frente a frente.	Redstonia21: En pocos momentos confunde rotar en el espacio con rotar en el plano, pero interpretar con claridad las instrucciones	Muro: 1:27 min Castillo: 1:59 min
13	Zombies15-16	Zombies15: “rótela en el espacio hacia derecha”, “muévala más, un poco más” “ahora mueve esa pieza (señala la pieza z) en el espacio, parada”, “ahora que quede la línea más larga para la izquierda”, “rótela entonces en el espacio, hacia la izquierda,	Zombies16: ¿qué? ¿rotación en el plano a la izquierda?, ¿hacia dónde? Identifica en qué momentos debe rotar una pieza en el espacio o en el plano, así mismo hacia qué dirección y su	Muro: 8:36 min Castillo: 5:28 min

		<p>hacia la derecha (pero señala la izquierda), un cuarto de vuelta” “ahora la T, rotación en el espacio hacia la derecha, hacia atrás”.</p> <p>Por tanto, identifica con dificultad cuándo se debe realizar una rotación en el espacio y cuando se debe realizar una rotación en el plano. Se confunde con el recorrido, un cuarto de vuelta o media vuelta.</p>	recorrido, media vuelta y un cuarto de vuelta.	
14	Bancoto wn20 - Brujas2 3	<p>Bancotown20: “gírala en el espacio media vuelta hacia atrás”, “un cuarto de vuelta en el espacio hacia adelante”</p> <p>En algunos momentos se le olvida indicar si la rotación debe realizarse en el espacio o en el plano.</p>	<p>Brujo23: Se le dificulta identificar hacia qué dirección debe rotar la pieza, le indican que debe rotarla en el espacio hacia atrás y la rota hacia la derecha. Así mismo, se confunde en el recorrido un cuarto de vuelta o media vuelta.</p>	Castillo: 11:35 min
15	OrdenD ePiedra2 4-25	<p>OrdenDePiedra24-25: solo interpretaron instrucciones, es decir, no ejercieron el rol de dar instrucciones.</p>	<p>OrdenDePiedra24-25: En algunas ocasiones confunden media vuelta y un cuarto de vuelta. Rotación en el plano y en el espacio y la dirección lo comprenden de manera precisa ya que las instrucciones que dio la docente fueron claras.</p>	Castillo: 1:23 min

Nota. Elaboración propia.

Como se observa en la tabla 17, a los estudiantes se les dificultó armar la estructura del castillo, la cual implica mayor complejidad cognitiva para interpretar las posiciones y sus relaciones espaciales con un promedio de tres a once minutos, mientras que el muro con un promedio de un minuto y medio a ocho minutos. Las estructuras solicitadas se muestran en la figura 48.

Figura 48

Estructuras solicitadas para el ensamblaje por instrucciones



Nota. Elaboración propia.

Reformulación de hipótesis

De acuerdo con la aplicación de la THA 8, se evidencian dificultades para dar instrucciones completas sobre la rotación, su recorrido y dirección para la pieza. Por tanto, se requiere de otra THA que se encargue de afianzar los conceptos de rotación en el plano y en el espacio, un cuarto de vuelta y media vuelta. Así mismo, abordar con más detalle el punto de vista al estar frente a frente. Por ende, se podría iniciar el ensamblaje por instrucciones con la ubicación de la pareja al lado, es decir, en la misma posición, para que los estudiantes comprendiesen el punto de vista con la derecha e izquierda y posteriormente, frente a frente.

4.3 Análisis Retrospectivo

4.3.1 Habilidades de Visualización

En esta tercera fase, se propone el análisis retrospectivo correspondiente a los cambios obtenidos en el desarrollo de las siete Habilidades de Visualización con la aplicación del experimento de enseñanza y sus posibles mejoras al experimento de enseñanza. Así mismo, se describe a modo de reflexión los aciertos y desaciertos de dicha aplicación en torno a las siguientes componentes: uso del material manipulativo y de recursos digitales, metodología propuesta, gestión del tiempo y tareas de aprendizaje.

A continuación, el análisis retrospectivo del desarrollo de cada una de las siete Habilidades de Visualización con base en los resultados descritos en la segunda fase de la experimentación.

Coordinación óculo motora: Se evidenciaron avances progresivos de manera satisfactoria a lo largo de la experimentación, puesto que, las tareas de aprendizaje propuestas exigen el uso de la vista con el movimiento del cuerpo, específicamente al momento de representar piezas tridimensionales por medio del dibujo en el punteado isométrico o en la representación de las vistas ortogonales. Por tanto, los estudiantes hacen uso de su percepción visual para ejecutar con el movimiento de sus manos (al usar material manipulativo y digital) las transformaciones geométricas como la rotación, la traslación y la reflexión. De esta manera, intentan representar con exactitud los modelos observados, aunque se puede observar desaciertos en un porcentaje mínimo de estudiantes, que al momento de graficar en el punteado isométrico realizan líneas en exceso (aristas no visibles) y se les dificulta también reconocer la posición exacta de las caras cuadradas de las piezas en su representación bidimensional con las vistas ortogonales, lo cual es complejo aún para estudiantes de tercero de primaria, pues requiere un grado de cognición alto para la rotación mental. Por ende, se requiere de más tiempo para abordar de manera detallada los elementos físicos que se observan en la pieza tridimensional y de esta manera, el estudiante se percate de la dirección de los trazos a realizar para representar en el punteado isométrico con nivel de precisión.

Percepción figura fondo: Se evidencia mejoras en el desarrollo de esta habilidad en torno a la traducción que realiza el estudiante con la información tridimensional que recibe de la pieza en físico y su representación en el punteado isométrico, es decir, el estudiante identifica ciertos elementos de la pieza para representarla dentro del fondo del plano del punteado isométrico. Además, se propuso que el estudiante interprete la pieza y la posición en la que se encuentra dentro

de un conjunto de más piezas que forman la estructura de una silla con la Visualización de un modelo dinámico en GeoGebra y su representación en el punteado isométrico. Por tanto, solo el 19% de los estudiantes se halló en un nivel insuficiente al no interpretar la pieza correspondiente y su posición dentro de la estructura. Sin embargo, solo el 22% de los estudiantes llegó a un nivel avanzado en el que interpretan cuál es la pieza que hace falta y la representan de la posición correspondiente. Lo que deja entrever que, esta Habilidad de Visualización requiere de un trabajo preciso para mejorar su desarrollo en los estudiantes a través de tareas de aprendizaje de representación mental de las piezas, por grados de complejidad en cuanto al uso de estas, es decir, primero dos piezas, luego tres y así sucesivamente hasta conseguir planear un entrenamiento en el que el estudiante memorice la estructura de las piezas, la rotación mental de estas para inferir la posición exacta y su posible configuración dentro de una estructura tridimensional.

Constancia perceptual: Se evidencia mejoras en el progreso de esta Habilidad de Visualización, puesto que el estudiante comprende que independientemente de la posición o transformación geométrica sufrida en la pieza, esta sigue siendo la misma y no otra pieza. Lo cual, se demuestra a través de la representación en el punteado isométrico de las piezas tridimensionales, al mantener la proporción de los cubos, la correspondencia punto a punto para la reflexión y la representación plana de las vistas ortogonales de una pieza tridimensional al mantener la misma secuencia de colores de las caras cuadradas de la pieza independientemente de la posición posteriori a una rotación.

Percepción de la posición en el espacio: Se evidencia avance progresivo a lo largo del experimento, ya que esta Habilidad de Visualización se encuentra en las ocho THA propuestas, por lo cual, el estudiante en todo momento hace uso de percepción de la posición en el espacio para comprender la posición en la que se encuentra la pieza con respecto a su punto de observación.

Por tanto, a través del punteado isométrico representa piezas en determinada posición y la reflexión de estas al seguir una correspondencia punto a punto en el eje vertical, aunque se presentan dificultades para inferir la posición de la pieza al reflexionarla en el eje horizontal. Además, la representación de vistas ortogonales exige a los estudiantes interpretar la posición de las caras cuadradas posterior a una rotación, es decir, inferir las instrucciones de rotación, su recorrido y dirección para determinar la posición final de la pieza. Así mismo, la tarea de aprendizaje de ensamblaje por instrucciones, permite a los estudiantes interpretar posiciones por medio del vocabulario espacial, lo cual fortalece su habilidad de posición en el espacio a través del proceso de razonamiento y la comunicación. Aunque, puede hallarse estudiantes que confunden algunas instrucciones de rotación en el espacio o en el plano y recorrido con un cuarto de vuelta o media vuelta. Por ende, se requiere más tiempo de abordaje para el afianzamiento de los conceptos de transformaciones geométricas, para diferenciar cada uno de los movimientos en el plano y apropiarse del lenguaje matemático, en especial con la rotación (en el plano o en el espacio, un cuarto de vuelta o media vuelta, izquierda o derecha). Por tanto, se propone en primer lugar abordar la rotación de manera secuenciada, es decir, comenzar con la rotación en el plano y luego con la rotación en el espacio, para que, los estudiantes practiquen cada uno de los conceptos hasta que se apropien de ellos y finalmente, realizar más retos de armado con el seguimiento de instrucciones. También, en la reflexión, abordarla a través del uso de la tecnología con el software de GeoGebra, en la que el estudiante comprenda la equidistancia entre ejes y la correspondencia punto a punto en el eje horizontal.

Percepción de relaciones espaciales: Se evidencia mejoras de manera progresiva, puesto que al igual que en la habilidad de percepción de posición en el espacio, el estudiante debe interpretar la posición, pero esta vez de dos o más objetos entre sí. Por tanto, las relaciones

espaciales se manejan con la representación en el punteado isométrico a través del dibujo de cada cubo y la conexión entre estos, al interpretar su posición relativa arriba o abajo, a la derecha o la izquierda. Además, en la representación de vistas ortogonales comprende que cada vista es una información parcial de un objeto tridimensional, es decir, una parte del todo visualmente. También, al momento de dar instrucciones para la tarea de aprendizaje de ensamblaje por instrucciones, el estudiante infiere por medio de su vocabulario espacial, la posición de las piezas y su relación con otras: encima o debajo, derecha o izquierda según el punto de vista y la traslación de la pieza. Sin embargo, se hallan estudiantes en niveles mínimo e insuficiente al no interpretar instrucciones para indicar la posición final de la pieza posterior a una transformación o se les dificulta representar la reflexión en el eje horizontal. Por ende, se propone el refuerzo con más retos y tareas de aprendizaje para que diferencien la rotación de la traslación, la reflexión en el eje horizontal y la dirección al estar frente a frente (derecha o izquierda) por medio de problemas cotidianos con el movimiento del cuerpo.

Discriminación visual: Se evidenció mejoras en el desarrollo de esta Habilidad de Visualización, puesto que, al principio los estudiantes confundían la pieza V con la L o por engaños visuales con colores y tamaños. Sin embargo, los estudiantes al finalizar las tareas de aprendizaje, discriminan visualmente para identificar la pieza que hace falta o con la que se va a trabajar, ya sea en un conjunto de más piezas, a partir de dos vistas ortogonales dadas o que la pieza esté de diferente color, tamaño y posición. Los estudiantes demuestra un dominio en esta Habilidad de Visualización, la cual requiere de complejidad en menor grado para su etapa de cognición, ya que son capaces de comparar y observar con detalle las piezas para reconocer sus propiedades y las transformaciones geométricas que pueden sufrir las piezas, aunque a veces algunos estudiantes no indican con nombre propio lo que le ocurre a una pieza, por lo que deja entrever una necesidad de

afianzamiento sobre los nombres de las transformaciones geométricas. Como se ha mencionado anteriormente, se propone tareas de aprendizaje que requieran el conteo de cubos, la memorización de la estructura de las piezas y así mismo de los nombres de cada transformación geométrica. También, comparar al describir diferencias y similitudes para entrenar aún más el detalle visual.

Memoria visual: A pesar de que se analizó en una sola THA, los estudiantes mostraron mejoras, puesto que, a lo largo del experimento memorizaron la estructura de cada una de las piezas y sus colores e interpretaron las transformaciones geométricas que podrían sufrir las piezas tridimensionales. Por lo cual, la mayoría de estudiantes infiere al menos dos piezas y describe los cambios que ocurren luego de memorizar una secuencia inicial. Sin embargo, solo el 24% memoriza las cuatro piezas presentes y describen las transformaciones ocurridas en la segunda secuencia y el 43% de los estudiantes consigue memorizar tres de las cuatro piezas. Solamente el 6% de los estudiantes llega a un nivel insuficiente al no memorizar ninguna pieza en la secuencia inicial. Aunque, los resultados son favorables, se requiere de su continuo desarrollo con tareas de aprendizaje cada vez más complejas que entrenen la memoria de manera progresiva, lo cual, podría favorecer otras habilidades como la percepción figura fondo y la discriminación visual con procesos como la rotación y la representación mental. Por ende, se propone el uso de más secuencias de piezas del cubo soma, primero describir su posición ya sea por medio del dibujo o de instrucciones con el uso de vocabulario espacial; segundo, memorizar progresivamente de 1 a 7 piezas; tercero, hacer la comparación de dos secuencias en las que las piezas sufren transformaciones geométricas. Finalmente, se puede mostrar estructuras de 2 piezas para que el estudiante memorice por cierto tiempo y replique su armado, y así sucesivamente con 3, 4, 5, 6 y 7 piezas.

4.3.2 Aciertos y Desaciertos

Ahora bien, se describe en la tabla 18 los aciertos y desaciertos de la aplicación del experimento de enseñanza.

Tabla 18

Aciertos y desaciertos en la aplicación del experimento de enseñanza

Componente a reflexionar	Aciertos	Desaciertos
Uso de material manipulativo (Cubo soma)	Favorece la comprensión de transformaciones geométricas (rotación, traslación, reflexión) al ser un material 3D.	Falta de control exacto para indicar un cuarto de vuelta o media vuelta
	Favorece la Visualización y el razonamiento espacial, por lo que el material físico apoya a la construcción de imágenes mentales para el desarrollo de las Habilidades de Visualización.	Dependencia con el material manipulativo para solucionar las tareas de aprendizaje.
	Favorece la participación y la motivación	Material distractor para el desarrollo de la actividad, es decir, jugar a construir otras cosas que no se les había solicitado.
Uso de recursos digitales en el software de GeoGebra	Facilita la comprensión de las vistas ortogonales al tener un recurso dinámico, lo que favorece la Visualización y el razonamiento espacial.	Dependencia del recurso digital para representar las vistas ortogonales.
	Permite la exploración y aprendizaje autónomo.	Disponibilidad de equipos, por lo cual, se trabajó en parejas por cada computador. Así mismo, la conectividad a internet para su uso a veces era intermitente.
Metodología propuesta (ABJ y ABP por problemas)	Favorece el aprendizaje de los estudiantes, por lo cual, permitió transformar el desarrollo de las Habilidades de Visualización.	La diversidad de ritmos de aprendizaje hace que algunos estudiantes avancen con facilidad y otros necesiten más tiempo para finalizar cada tarea de aprendizaje.
	Permite planear una narrativa atractiva al contexto de los estudiantes, en este caso, el juego	Exige tiempo de planeación pedagógica y de explicación hacia los estudiantes, lo cual

	de Minecraft en el que deben superar 9 misiones.	reduce el tiempo de actividad de los estudiantes.
	Estimula el trabajo en equipo y la colaboración.	Algunos estudiantes no se involucran de manera activa en el desarrollo de cada tarea de aprendizaje, solo esperan que su compañero de la respuesta.
Gestión de tiempo	Se organiza momentos de socialización que favorecen la argumentación y la comunicación matemática.	Falta de tiempo para que los estudiantes comprendan y afiancen conceptos con respecto a las transformaciones geométricas.
	Se organiza momentos para manipular y representar, lo cual permitió observar el desarrollo de las Habilidades de Visualización.	El tiempo asignado para cada actividad a veces resultaba insuficiente para que los estudiantes completen la tarea con precisión.
Tareas de aprendizaje	Se propuso un análisis a priori en cada THA por medio de hipótesis sobre el desarrollo progresivo.	En algunas ocasiones, la THA exigía un mayor nivel de complejidad cognitiva hacia los estudiantes, en especial, la representación de vistas ortogonales, rotación y la reflexión en el punteado isométrico.
Emocional	Regulación de comportamiento al seguir indicaciones, también la identificación de emociones al momento de realizar cada tarea de aprendizaje.	Algunos estudiantes presentaban un mal manejo de la frustración frente a la pérdida de puntos o al no poder realizar la actividad con efectividad hasta el punto de no querer seguir con la actividad.

Nota. Elaboración propia.

4.4 Discusión

A partir de la aplicación del experimento de enseñanza cimentado en la THA se demuestra que los 34 estudiantes participantes exploraron conceptos abstractos como las transformaciones geométricas en el plano, la representación de la tridimensionalidad de un objeto en el punteado isométrico y su representación bidimensional con las vistas ortogonales. Por tanto, los estudiantes

realizaron acciones ligadas al uso de las Habilidades de Visualización, lo que permitió un avance significativo en el desarrollo de estas y el uso implícito de procesos de Visualización como la creación de imágenes físicas y manipulación de representaciones mentales con la rotación mental, el análisis de información visual y la comunicación verbal o gráfica; lo que coincide con la definición de Visualización de Gutiérrez (1996).

De manera que, el trabajo propuesto bajo el uso de material manipulativo del cubo soma y de recursos digitales como el software de geometría dinámica de GeoGebra, permitió transformar el desarrollo de las Habilidades de Visualización, a través de la representación visual de los conceptos abstractos como traslación, rotación y reflexión, la percepción del cuerpo del cubo y sus propiedades, la comunicación de posiciones y relaciones espaciales según el punto de vista. Por un lado, el uso de colores para cada cara cuadrada de los cubos que conforman cada pieza del cubo soma permitió al estudiante diferenciar las vistas de un objeto y la necesidad de posicionarse de acuerdo a la información visual recibida o punto de vista (arriba o abajo, al lado derecho o izquierdo, de frente o detrás). Es decir, que los estudiantes se vean en la necesidad de observar el objeto desde distintas posiciones y que “adopte una posición” en concreto para representar dicha posición, de acuerdo con De Moor (como se citó en Dindyal, 2015).

Por otra parte, el uso del punteado isométrico, permitió ahondar en los estudiantes el concepto de profundidad en el dibujo bidimensional a través del trazo de líneas que representan las aristas de la pieza. Por tanto, favoreció la transición de información visual 3D a su representación 2D, así mismo, suscitó la necesidad en el estudiante de posicionar la pieza en físico para realizar su representación en el punteado isométrico de acuerdo con la dirección correspondiente y representar también la conexión entre cubos, lo cual, favoreció las Habilidades de Visualización de percepción de posición en el espacio y de las relaciones espaciales. Sin

embargo, al solicitarse una posición determinada para representarla en el punteado isométrico con el software de GeoGebra, los estudiantes presentan dificultades para interpretar la posición, imaginarla y representarla. Es decir, transformar mentalmente la imagen visual de la pieza para que coincida con la posición dentro de una estructura dada, lo que se refiere a una habilidad de mayor complejidad como la rotación mental, que requiere de la representación mental de un objeto en movimiento, lo que coincide con Escrivà et al., (2018).

Por otro lado, la construcción de estructuras 3D a partir de la descripción verbal y oral dada entre parejas de estudiantes, favoreció el uso de conceptos como la rotación en el plano y en el espacio, el recorrido al girar la pieza como un cuarto de vuelta o media vuelta y la dirección del giro hacia la derecha o izquierda, delante o atrás. En otras palabras, promovió el uso de vocabulario espacial, de movimientos corporales y gestos para comunicar relaciones espaciales, lo que construye un conocimiento geométrico en los estudiantes a partir de su lenguaje. De modo que, todos los estudiantes finalizaron sus construcciones, lo cual evidencia la interpretación de lectura de imágenes físicas y o de representaciones mentales sobre el movimiento a ejecutar con la pieza, lo que concuerda con los resultados expuestos por Sandoval y Ortiz (2023).

A modo de cierre, la enseñanza de la geometría en Educación Primaria en torno al fortalecimiento del Pensamiento Espacial, debe hacer uso de material manipulativo que permita al estudiante representar visualmente conceptos y la manipulación de recursos digitales que promuevan imágenes dinámicas para favorecer las Habilidades de Visualización (Escrivà et al., 2018). Así como lo describe el MEN (2006), “las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos” p.49.

5 Conclusiones y recomendaciones

A partir del análisis de información en las tres fases de la presente investigación, se concluye que el experimento de enseñanza planificado e implementado contribuye a transformar el desarrollo de las Habilidades de Visualización en estudiantes del grupo 1 de tercero del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana. En este sentido, la propuesta articulada entre el uso del cubo soma y GeoGebra favorece el Pensamiento Espacial al fortalecer el proceso de Visualización en el cual el estudiante crea y manipula representaciones mentales sobre objetos en el espacio. Por ende, se precisa la importancia por abordar capacidades como la Visualización mental para imaginar objetos en diferentes posiciones, sus relaciones espaciales y la comprensión de conceptos abstractos como las transformaciones geométricas y la capacidad para representar el modelo del objeto a través del dibujo o con herramientas tecnológicas.

En un primer acercamiento, el diagnóstico es el punto inicial para transformar el desarrollo de las Habilidades de Visualización, puesto que, permite identificar aquellas Habilidades de Visualización que requieren de un trabajo arduo para su desarrollo, como la percepción de la posición en el espacio y de relaciones espaciales, la discriminación visual y la percepción figura fondo. De esta manera, orientar la selección de tareas de aprendizaje dentro de la creación de cada THA en el experimento de enseñanza.

Por ende, la THA se propone como herramienta pedagógica constructivista, que permite al docente planear el proceso de enseñanza y aprendizaje de manera progresiva, de lo simple a lo complejo, a través de la formulación de hipótesis sobre el aprendizaje de los estudiantes. Lo que favorece la reflexión pedagógica en torno a los conceptos matemáticos a enseñar, qué puede funcionar, cómo, cuándo y por qué. De manera que, el docente cumple el rol de investigador, ya

que el diseño de las THA exige identificar las posibles dificultades de aprendizaje y cómo se pueden abordar.

Ahora bien, para la planificación del experimento de enseñanza se realiza un análisis de los elementos a abordar en cada THA como la meta de aprendizaje, los conocimientos previos, las tareas de aprendizaje, la progresión hipotética de aprendizaje, la interacción pedagógica, la evaluación formativa y final, el uso de recursos y la coherencia general del diseño. De esta manera, se proyecta la implementación del experimento de enseñanza en aras de garantizar el cumplimiento de la meta de aprendizaje basada en el desarrollo de las Habilidades de Visualización, lo cual favorece al docente investigador reconocer e identificar qué necesita para cumplir con el objetivo y cómo va a analizar la información recolectada.

En este sentido, en la intervención pedagógica se propuso el trabajo por medio de metodologías activas como el Aprendizaje Basado en el Juego (ABJ) y el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), las cuales contribuyen a la creación de un ambiente de aula dinámico, en el cual el estudiante es el centro de su proceso de aprendizaje a través de la resolución de problemas por medio de la narrativa del juego y la manipulación de recursos concretos como el cubo soma. Sin embargo, la gestión del tiempo se presenta como un desacierto, debido a que, algunos conceptos y actividades requieren de un espacio prudente para su formalización y reflexión.

En consecuencia, de la implementación del experimento de enseñanza, se destaca la narrativa del juego de Minecraft, el cual favorece la motivación en los estudiantes y el trabajo en equipo para comunicar las ideas, delegar responsabilidades y el manejo de conflictos o de emociones. Por tanto, los estudiantes durante la aplicación del experimento demuestran avances significativos en su proceso de Visualización al momento de construir y manipular representaciones mentales de las piezas del Cubo soma para la representación tridimensional por

medio del punteado isométrico y de la representación bidimensional con las vistas ortogonales. Además de comprender nociones en torno a las transformaciones geométricas en el plano como la traslación, rotación y reflexión. Situación que favorece la transformación del desarrollo de las Habilidades de Visualización, lo que implica que, sin la intervención pedagógica necesaria, las condiciones en las que estas Habilidades de Visualización progresan son nulas o poco favorables.

Finalmente, desde una perspectiva pedagógica se puede señalar que las Habilidades de Visualización son de suma importancia para fortalecer el Pensamiento Espacial desde los primeros años de escolaridad. Con el fin de que los estudiantes sean capaces de solucionar problemas cada vez más complejos con el uso de su razonamiento espacial y visual, que favorece el pensamiento creativo y fortalece competencias matemáticas como la representación y la comunicación. En consideración a lo anterior, este trabajo investigativo se constituye como una base sólida para futuras investigaciones en torno al desarrollo de Habilidades de Visualización en la que se destaque el uso de material manipulativo y de la tecnología con software de geometría dinámica que favorezcan el Pensamiento Espacial y la Visualización en los estudiantes.

Por tanto, se recomienda profundizar la intervención con las vistas ortogonales en relación con el punteado isométrico, que requieran de manera progresiva cierta complejidad cognitiva hacia el estudiante al estimular la anticipación de la posición del objeto frente a las transformaciones geométricas que puede sufrir, es decir, potenciar la capacidad de la rotación mental. Así mismo, seguir la exploración de trabajos investigativos en torno al desarrollo de Habilidades de Visualización en los primeros grados de escolaridad y sus determinadas adaptaciones al contexto.

Referencias Bibliográficas

Amador, V., & Montejo, J. (2016). Una trayectoria hipotética de aprendizaje para las expresiones algebraicas basada en análisis de errores. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 33(2), 7-30. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1163850/Amador2016Una.pdf>

Aranda, C., & Callejo, M. (2010). Diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la construcción del concepto de dependencia lineal. *Investigación en Educación Matemática*, XIV, 199-210. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3629217.pdf>

Aray, C., Párraga, O., & Chun, R. (2019). La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí. *REUSO: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales*, 4(1), 23-36. <http://scielo.senescyt.gob.ec/pdf/rehuso/v4n1/2550-6587-rehuso-4-01-00023.pdf>

Araya, F. (2017). *Desarrollo del Pensamiento Geográfico: Aportes para la vinculación entre Investigación y Docencia*. Santiago de Chile: Editorial Universidad de La Serena. https://books.google.com.co/books?id=4JBxDwAAQBAJ&newbks=1&newbks_redir=0&dq=importancia+del+pensamiento+espacial&source=gbs_navlinks_s

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241. https://www.researchgate.net/publication/225216743_The_role_of_visual_representations_in_the_learning_of_mathematics_Educational_Studies_in_Mathematics_523_215-241

Arroyo, L., & Pallasco, M. (2025). Habilidades cognitivas en el aprendizaje de la Matemática. *Revista Científica de Innovación Educativa y Sociedad Actual "ALCON"*, 5(1), 81-93.

https://www.researchgate.net/publication/387890227_Habilidades_cognitivas_en_el_aprendizaje_de_la_Matematica

Arteaga, E., Medina, J., & Del Sol, J. (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Gestión, Innovación & Publicación*, 15(70), 102-108. <https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/1112>

Ávila, I. (2011). Percepción y Pensamiento Espacial. *Ideas y Valores*, LXIV (157), 191-214. <http://dx.doi.org/10.15446/ideasyvalores.v64n157.43027>

Barraco, C., Hernández, j., Díaz, M., & Santander, S. (2022). *Fortalecimiento de las competencias matemáticas enmarcadas en el Pensamiento Espacial y los sistemas geométricos para estudiantes del grado tercero mediante el uso aplicativo del software GeoGebra del Colegio San Juan de Girón*. [Tesis de Maestría]: Universidad de Cartagena. <https://repositorio.unicartagena.edu.co/server/api/core/bitstreams/e78fdb22-d6ff-4fd5-864f-89998376815a/content>

Bautista, J. (2022). *El aprendizaje de las matemáticas mediante Software dinámico: una estrategia didáctica para estudiantes del sector rural*. [Tesis de Maestría]: Universidad Pontificia Bolivariana. [https://repository.upb.edu.co/bitstream/handle/20.500.11912/11884/479_1%20\(1\).pdf?sequence=1](https://repository.upb.edu.co/bitstream/handle/20.500.11912/11884/479_1%20(1).pdf?sequence=1)

Berciano, A., Jiménez, C., & Salgado, M. (2022). Razonamiento y aprehensión ante una tarea geométrica: análisis de la pertinencia didáctica de una trayectoria de aprendizaje en educación infantil. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 36(72), 332-357. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/h4F5X43HzVQSj3yxvjYdNdG/?format=pdf&lang=es>

Bishop, A. J. (1989). *Review of research on visualization in mathematics education*. Focus on learning problems in mathematics, 11(1), 7-16.

Blanco, H. (2006). *Un cambio en el paradigma de la geometría*. Buenos Aires (Argentina): Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”.

Bocanegra, I., Devia, M., & Camargo, L. (2021). Trayectoria hipotética de aprendizaje para promover la generalización de una propiedad geométrica en educación básica. *Noria: Investigación Educativa*, 2(8), 1-22.
<https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/NoriaIE/article/view/17922/17055>

Bravo, L., & Panamá, G. (2024). GeoGebra en la Enseñanza-Aprendizaje de las Cónicas. *Revista Scientific*, 9(32), 289-319. <https://doi.org/10.29394/Scientific.issn.2542-2987.2024.9.32.14.298-319>

Byrne, O. (1847). *The first six books of The Elements of Euclid: In which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. William Pickering.

Camargo, L., & Acosta, M. (2012). Editorial: La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED* (32), 5-8. <http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n32/n32a01.pdf>

Cárcamo, A., & Fuentealba, C. (2023). Un modelo para la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje preliminares. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 37(76), 577-601.
<https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a10>

Carrascal, H., Cháves, J., & Cabellos, M. (2017). GeoGebra para el fortalecimiento del Pensamiento Espacial en cálculo diferencial. *Revista Ingenio UFPSO*, 13, 106-112.
<https://revistas.ufps.edu.co/index.php/ingenio/article/view/2145/2086>

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
<https://www.jstor.org/stable/3699928?origin=JSTOR-pdf>

Correa, M. (2020). *Los procesos de Visualización en la comprensión del área de figuras planas: una trayectoria hipotética de aprendizaje en grado séptimo*. [Tesis de Maestría]: Universidad Nacional de Colombia.
<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/78182/1115072930-2020.pdf?sequence=4&isAllowed=y>

Cundy, M. (1961). *The Mathematical Gazette*. The Mathematical Association.
<https://www.jstor.org/stable/3614639>

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*. Filadelfia: CPRE.
<https://doi.org/10.12698/cpre.2011.rr68>

Del grande, J. (1990). Spatial Sense. *The Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
<https://www.jstor.org/stable/41193837>

Díez, M., Martínez, S., Bogdan, R., Dies, M., Ramírez, R., & García, E. (2024). *Sobre la educación científica y el cuidado de la casa común; necesidades y perspectivas*. Madrid: Editorial Dykinson.
https://www.google.com.co/books/edition/Sobre_la_educaci%C3%B3n_cient%C3%ADfica_y_e1_cui/zuMREQAAQBAJ?hl=es-419&gbpv=1&dq=pensamiento+espacial&pg=PA297&printsec=frontcover

Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: A commentary. *ZDM*, 47(3), 519-529.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning Learning*. París Francia: DuvalUniversite du Littoral Cote.

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la Visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (págs. 13-60). Bogotá Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

El Congreso de la República de Colombia. (30 de Julio de 2009). *Ley 1341*. <https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma.php?i=36913>

Escrivà, M., Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (2018). Uso de software 3D para el desarrollo de Habilidades de Visualización en Educación Primaria. *Educación Matemática en la Infancia*, 7(1), 42-62. <http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6>

Estrella, S., Morales, S., Méndez, M., Vidal, P., Ramírez, B., & Moncada, A. (2025). Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para introducir la inferencia estadística inFormal en priMaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 27(1), 11-42. <https://doi.org/10.12802/relime.24.2711>

Fernández, t., Díaz, J., & Cajaraville, J. (2012). Razonamiento Geométrico y Visualización Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiótico. *Bolema, Rio Claro*, 26(42a), 39-63. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100004>

Ferrero, L. (2004). *El Juego y la Matemática* (4a ed.). Madrid: La Muralla S.A.

Gal, H., & Liora, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163-183. <https://www.jstor.org/stable/40603201>

González, E. (2022). Déficit en el Pensamiento Espacial y su repercusión en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de básica primaria Colegio Integrado La llana, Tibú – Norte de Santander. *REvista AiBi*, 10(1). <http://dx.doi.org/10.15649/2346030X.2537>

González, S., & Díaz, M. (2022). *Fortalecimiento del Pensamiento Espacial y sistemas geométricos a través de GeoGebra en estudiantes de grado tercero del Colegio La cabaña*. [Tesis de Maestría en Recursos Digitales Aplicados a la Educación]: Universidad de Cartagena. <https://repositorio.unicartagena.edu.co/server/api/core/bitstreams/1749e290-73f1-40bf-9184-01fef8440dfb/content>

Granados, M., Romero, S., Rengifo, R., & García, G. (2020). Tecnología en el proceso educativo: nuevos escenarios. *Revista Venezolana de Gerencia*, 25(92), 1809-1823. <https://www.redalyc.org/journal/290/29065286032/html/>

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). *Design research from a learning design perspective*. Routledge. https://www.researchgate.net/publication/46676722_Design_research_from_a_learning_design_perspective

Gustin, C. (2021). *Propuesta de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para Identificar los Elementos de la Visualización que Favorecen el Aprendizaje de la Rotación de acuerdo a una Perspectiva Semiótica-Cognitiva*. [Tesis de Maestría]: Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/81007>

Gutiérrez, Á. (1996). Visualización en geometría tridimensional: en busca de un marco. *DGICYT*, 1-19.

Gutiérrez, H., Aristizabal, J., & Rincón, J. (2020). Procesos de Visualización en la resolución de problemas de matemáticas en el nivel de básica primaria apoyados en ambientes de

aprendizaje mediados por TIC. *Sophia*, 16(1), 120-132.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7764830>

Gutiérrez, J., De la Puente, G., Martínez, A., & Piña, E. (2012). *Aprendizaje Basado en Problemas: un camino para aprender a aprender*. México: DR©2012 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
https://www.researchgate.net/publication/314209905_Aprendizaje_Basado_en_Problemas_Un_camino_para_aprender_a_aprender

Hein, P. (1969). *Parker Brothers Trademark for its Cube Puzzle Game Equipment. The World's Finest Cube Puzzle Game*. Salem, Massachusetts: Parker Brothers.

Hernández, Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta ed.). México: Mc Graw Hill.

Hernández, K. (2019). *Importancia de las tecnologías de la información y la comunicación (Tic) en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación básica primaria*. [Tesis de Pregrado]: Universidad nacional abierta y a distancia.
<https://repository.unad.edu.co/handle/10596/27378>

Herrera, C., & Villafuerte, C. (2023). Estrategias didácticas en la educación. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 17(28), 758 - 772.
<https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v7i28.552>

Hurtado, J. (2010). *Metodología de la Investigación: Guía para la comprensión holística de la ciencia* (Cuarta edición ed.). QUIRÓN.

ICFES. (2024). *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA)*. Bogotá D.C: ICFES. https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-421217_recurso_03.pdf

ICFES. (2025). *Resultados en la prueba de matemáticas*.
<https://resultados.icfes.edu.co/resultados-saber2016>

[web/pages/publicacionResultados/agregados/saber11/resultadosSecretarias.jsf#No-back-button](https://resultados.icfes.edu.co/resultados-saber2016/web/pages/publicacionResultados/agregados/saber11/resultadosSecretarias.jsf#No-back-button)

Ivars, P., Fernández, C., & Salvador, L. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las ciencias: investigaciones didácticas*, 38(3), 105-124. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947>

Linn, M., & Petersen, A. (1985). Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A Meta-Analysis. *Child Development*, 56(6), 1479-1498. <https://www.jstor.org/stable/1130467>

Lohman, D. (1979). *Spatial ability: a review and reanalysis of the correlational literature*. New York: the United States Government.

Lohman, D. (1994). Spatially gifted, verbally, inconvenienced. En S. Colangelo, Assouline, & Ambrosion, *Talent development*. Dayton: Ohio Psychology Press.

López, W., & del Valle, W. (2017). Las dificultades conceptuales en el proceso de aprendizaje de la Matemática en el segundo año de Educación Media. *Educere*, 21(70), 653-667. <https://www.redalyc.org/journal/356/35656000013/html/#:~:text=En%20el%20proceso%20de%20ense%C3%B1anza,otros%2C%20que%20se%20exponen%20en>

Martínez, M., Pérez, A., & Apolinario, O. (2023). Explorando la geometría con GeoGebra: estrategias para reforzar el aprendizaje en estudiantes de niveles intermedios. *Universidad, Ciencia y Tecnología*, 28(122), 62-72. <https://doi.org/10.47460/uct.v28i122.766>

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie lineamientos curriculares en matemáticas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. República de Colombia. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2018). *Lineamientos pedagógicos para el aprendizaje de las matemáticas en educación básica primaria*. Bogotá, Colombia: MEN.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *investigación didáctica*, 29(1), 75-88. <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v29-n1-molina-castro-molina-et-al/435-pdf-es>

Moreno, G. (2024). La importancia del Pensamiento Espacial en la Educación Básica Primaria. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 17(1), 115-117. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/56587/59170>

Muñoz, O. (2012). *Diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la función lineal modelando situaciones problema a través de las TIC: Estudio de caso en el grado noveno del Colegio la Salle de Campoamor*. [Tesis de Maestría]: Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/items/044017be-a89f-44b1-9040-54965f848b92>

Näslund, E. (19 de octubre de 2021). *La memorización obstaculiza el aprendizaje – El Premio Superhéroes del Desarrollo reconoce una forma alternativa de enseñar*. <https://blogs.iadb.org/educacion/es/la-memorizacion-obstaculiza-el-aprendizaje-el-premio-superheroes-del-desarrollo-del-bid-reconoce-una-forma-alternativa-de-ensenar/>

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. United States of America: Association Drive, Reston.

Niño, J., & Ariza, S. (2024). *Fortalecimiento del Pensamiento Espacial y sistemas geométricos a través de la implementación de unidades didácticas apoyadas en la aplicación GeoGebra 3D realidad aumentada en los niños y niñas de grado tercero del Colegio Caño Bonito, sed.* [Tesis de Maestría]: Universidad de Cartagena. <https://repositorio.unicartagena.edu.co/server/api/core/bitstreams/76179da1-b281-4c6a-9b50-6577e445030f/content>

Piaget, J. (1962). *Play, Dreams and Imitation*. London: ROUTLEDGE: Taylos & Francis Group.

Poincaré, H. (1913). *El valor de la ciencia*. The Science Press.

Presmeg, N. (1986). Visualisation in High School Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.

Rgó, C. (02 de septiembre de 2015). *Los ojos y la pespectiva en la obra de Leonardo Da Vinci*. <https://aion.mx/arte/los-ojos-de-leonardo-da-vinci/>

Rodríguez, M., & Velásquez, L. (2023). *Análisis de habilidades visoespaciales en estudiantes de transición a través de juegos digitales basados en cuadrículas*. [Tesis de Maestría]: Universidad Pedagógica Nacional. <http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/18659>

Rodríguez, W. (2021). Los videos tutoriales para el fortalecimiento del razonamiento matemático en la escuela rural. *Espiral*, 11(2), 55-71. <https://revistas.ustabuca.edu.co/index.php/ESPIRAL/article/view/2813>

Rojas, N., Santana, O., Pérez, F., & Parra, S. (2021). *Perspectivas Isométrica*. [Tesis de Maestría]: Universidad de los Andes. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/perspectiva-isometrica/>

Sandoval, I., & Ortiz, A. (2023). Representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales y su relación con el desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas (6-8 años). *Perfiles educativos*, 45(180), 71-90. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982023000200071

Santos, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos, L. (2021). GeoGebra y el desarrollo del Pensamiento Espacial: una oportunidad de innovación en la práctica educativa. *Ciencia Latina: Revista Multidisciplinar*, 5(4), 1-18. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v5i4.627

Sarmiento, M. (2007). *La enseñanza de las matemáticas y las tic una estrategia de formación permanente*. [Tesis de Doctorado]: UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI.

Segade, M. (2022). *El desarrollo de la imagen conceptual del triángulo en el alumnado de Educación Primaria utilizando GeoGebra*. [Tesis de Doctorado]: Universidade da Coruña (España). <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=307358>

Shiguay, G., Hu, G., & De La Cruz, R. (2022). El Pensamiento Matemático: los 5 pilares de la formación docente en ciencias. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 6(23), 713 – 724. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i23.371>

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for research in mathematics education*, 305-329.

Solas, J., Suárez, S., Martínez, T., & Ruiz, A. (2023). *Aprendizaje Basado en Juegos como metodología activa en la etapa de Educación Primaria*. Madrid: Wanceulen S.L.

The National Council of Teachers of Mathematics -NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Printed in the United States of America.

UNESCO. (2021). *Estudio Regional comparativo y explicativo (ERCE 2019): reporte nacional de resultados para Colombia*. Santiago, Chile.: UNESCO.
<https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000382849?posInSet=13&queryId=N-EXPLORE-e2e7ee6a-fcd7-4531-b414-89aa64f70388>

UNESCO. (06 de febrero de 2024). *Qué necesita saber acerca del aprendizaje digital y la transformación de la educación*. <https://www.unesco.org/es/digital-education/need-know?hub=84636>

Vallejo, A. C. (2012). Una consideración sobre el espacio en Leonardo da Vinci, desde la ciencia, el arte y la filosofía. *Análisis. Revista Colombiana de Humanidades* (81), 23-39.
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=515551761002>

Van, D. (2006). Spatial Visualization, Visual Imagery, and Mathematical Problem Solving of Students With Varying Abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39(6), 496-506.
https://www.researchgate.net/publication/6633596_Spatial_Visualization_Visual_Imagery_and_Mathematical_Problem_Solving_of_Students_With_Varying_Abilities

Villamizar, M. (2021). *Propuesta Metodológica para el uso de GeoGebra en Geometría Básica, es decir, figuras planas en los grados cuarto y tercero*. [Tesis de Maestría]: Universidad de Santander – UDES. <https://repositorio.udes.edu.co/server/api/core/bitstreams/9a5462c6-459d-461f-bfcd-c7a0e33f5c8f/content>

Zapateiro, J., Poloche, S., & Camargo, L. (2018). Orientación espacial: una ruta de enseñanza y aprendizaje centrada en ubicaciones y trayectorias. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED* (43), 119-136. <http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n43/0121-3814-ted-43-119.pdf>

Apéndices

“Los apéndices están adjuntos y pueden consultarse en el Repositorio Institucional”

Apéndice A. Resultados Diagnóstico – THAp.

Apéndice B. Lista de chequeo – Diseño del experimento.

Apéndice C. Rúbrica general de indicadores.

Apéndice D. Rejillas de indicadores.

Apéndice E. Libro El CuboMundo.

Apéndice F. Consentimiento informado.