

**MODELADO NUMÉRICO 2-D EN MEDIOS ACÚSTICOS
ANISÓTROPAS BASADO EN ECUACIONES DIFERENCIALES
PARCIALES ACOPLADAS Y DESACOPLADAS.**

EDUV FABIÁN CHACÓN HURTADO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2016**

**MODELADO NUMÉRICO 2-D EN MEDIOS ACÚSTICOS
ANISÓTROPAS BASADO EN ECUACIONES DIFERENCIALES
PARCIALES ACOPLADAS Y DESACOPLADAS.**

EDUV FABIÁN CHACÓN HURTADO

**Trabajo de grado como requisito parcial
para optar al título de Físico**

Director

M.Sc JAIRO ALBERTO TORRES PEÑA

Codirector

Dr. RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARIS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2016

Agradecimientos

A mis padres por brindarme el apoyo todo este tiempo, la compañía que me brindaron en todo este proceso, los consejos, los llamados de atención sobre todo por estar hay en todos los momentos las buenas y las malas.

A mi hermano por la compañía todo el tiempo.

A mi novia, por darme enseñanzas de vida y ser mi apoyo en todo este proceso para seguir adelante.

A mi director, el Profesor Jairo Torres, por su apoyo a la realización de este trabajo.

A mi codirector, el Profesor Rafael Torres, de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander, por brindarme la confianza para poder pertenecer al semillero de Geofísica de la Escuela de Física, por su asesoría y apoyo en este proyecto.

Al instituto colombiano del petróleo (ICP), por brindarme la oportunidad de pertenecer en un proyecto de investigación.

Al Grupo de investigación GOTS de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander.

Al Grupo de investigación CPS de la Escuela de Ingeniera Eléctrica y Electrónica de la Universidad Industrial de Santander.

Contenido

	Pág
INTRODUCCIÓN	21
1 ASPECTOS PRELIMINARES	1
1.1 OBJETIVO GENERAL	1
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	1
1.3 METODOLOGÍA	2
1.3.1 Fase 1: Estado del arte	2
1.3.2 Fase 2: Construcción de esquemas numéricos	2
1.3.3 Fase 3: Estabilidad numérica y dispersión numérica	3
1.3.4 Fase 4: Generación de modelos sintéticos	3
1.3.5 Fase 5: Análisis de resultados	3
2 ECUACION DE ONDA ACÚSTICA EN MEDIOS ISÓTROPOS Y EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS	4
2.1 INTRODUCCIÓN A LA ANISOTROPÍA POLAR	4
2.2 TEORÍA DE ANISOTROPÍA POLAR	5
2.3 ANISOTROPÍA DÉBIL	14
2.4 VELOCIDAD DE FASE EXACTA PARA UN MEDIO ELÁSTICO CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL	15
2.5 VELOCIDAD DE FASE EXACTA PARA UN MEDIO ELÁSTICO CON ANISOTROPÍA POLAR INCLINADA	16
2.6 CURVAS DE VELOCIDAD DE FASE EXACTA PARA LAS ONDAS P Y SV EN UN MEDIO ELÁSTICO CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL E INCLINADA	17
2.7 PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS	20
2.7.1 Ondas acústicas	20
2.8 SOLUCIÓN Y PROPAGACIÓN DE LA ONDA ACÚSTICA 1-D	23
2.9 RELACIÓN DE DISPERSIÓN	24

2.10	DIFERENCIAS FINITAS	27
2.11	APROXIMACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA ESCALAR	29
2.12	ESTABILIDAD NUMÉRICA	29
2.13	RELACIÓN DE DISPERSIÓN NUMÉRICA	32
3	ECUACIONES ACOPLADAS PARA MODELADO SÍSMICO EN MEDIOS CON ANISOTROPÍA VTI/TTI	44
3.1	ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA PARA MEDIOS CON ANISOTROPÍA TIPO VTI PROPUESTA POR ALKHALIFAH	45
3.1.1	Aproximación de la velocidad de fase para medios acústicos con anisotropía polar vertical	45
3.1.2	Aproximación de la velocidad de fase para medios acústicos con anisotropía polar inclinada	46
3.1.3	Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar vertical e inclinada	46
3.1.4	Deducción de la ecuación de onda.	46
3.1.5	Esquema numérico de la ecuación de onda.	52
3.1.6	Implementación numérica de la ecuación de onda.	55
3.1.7	Deducción de la estabilidad numérica y dispersión numérica para ecuación de onda	58
3.2	ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA PARA MEDIOS CON ANISOTROPÍA TIPO VTI PROPUESTA POR HUANG	59
3.2.1	Aproximación de la velocidad de fase para medios acústicos con anisotropía polar vertical	60
3.2.2	Curva de velocidad de fase para la onda P en un medio acústico con anisotropía polar vertical	62
3.2.3	Deducción de la ecuación de onda	63
3.2.4	Esquema numérico de la ecuación de onda	66
3.2.5	Implementación numérica	66
3.2.6	Deducción de la estabilidad numérica y dispersión numérica para ecuación de onda	67
3.3	ECUACIÓN DE ONDA PSEUDO-ACÚSTICA PARA MEDIOS CON ANISOTROPÍA TIPO VTI PROPUESTA POR X. DU	67
3.3.1	Aproximación de la velocidad de fase para medios acústicos con anisotropía polar vertical	68

3.3.2	Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar vertical	69
3.3.3	Deducción de la ecuación de onda	69
3.3.4	Esquema numérico de la ecuación de onda	71
3.3.5	Implementación numérica	72
3.3.6	Deducción de la estabilidad numérica y dispersión numérica para ecuación de onda	73
3.4	ECUACIÓN DE ONDA PSEUDO-ACÚSTICA PARA MEDIOS CON ANISOTROPÍA TIPO TTI PROPUESTA POR FLETCHER ET AL. .	78
3.4.1	Aproximación de la velocidad de fase para medios acústicos con anisotropía polar inclinada	79
3.4.2	Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar inclinada	79
3.4.3	Deducción de la ecuación de onda	79
3.4.4	Esquema numérico de la ecuación de onda	84
3.4.5	Implementación numérica	85
3.4.6	Deducción de la estabilidad numérica y dispersión numérica para ecuación de onda	87
4	ECUACIONES DESACOPLADAS PARA EL MODELADO SÍSMICO EN MEDIOS CON ANISOTROPÍA VTI/TTI	88
4.1	APROXIMACIÓN DE LA VELOCIDAD DE FASE PARA MEDIOS ACÚSTICOS CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL (VTI)	89
4.2	APROXIMACIÓN DE LA VELOCIDAD DE FASE PARA MEDIOS ACÚSTICOS CON ANISOTROPÍA POLAR INCLINADA (TTI)	90
4.2.1	Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar vertical	91
4.2.2	Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar inclinada	91
4.2.3	Deducción de la ecuación de onda desacoplada en medios con anisotropía tipo VTI	94
4.2.4	Deducción de la ecuación de onda desacoplada en medios con anisotropía tipo TTI	97
4.2.5	Implementación numérica	99

5	MODELADO NUMÉRICO EN MODELOS SIMPLES PARA LA ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA EN MEDIOS CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL E INCLINADA	101
5.1	ECUACIONES DIFERENCIALES ACOPLADAS PARA MEDIOS ACÚSTICOS CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL	102
5.2	ECUACIONES DIFERENCIALES ACOPLADAS PARA MEDIOS ACÚSTICOS CON ANISOTROPÍA POLAR INCLINADA	113
6	CONCLUSIONES	122
	APÉNDICE	124
	BIBLIOGRAFÍA	143

Lista de Tablas

		Pág.
Tabla 1	Valores efectivos de intervalo de muestreo espacial y temporal para evitar dispersión y estabilidad numérica en medios con anisotropía polar vertical e inclinada.	102

Lista de Figuras

		Pág.
Figura 1	Isotropía transversal en rocas sedimentarias. Cada capa tiene aproximadamente las mismas propiedades en el plano horizontal, pero diferentes en la dirección vertical (arriba) y debajo se muestra un afloramiento con estratos inclinados.	6
Figura 2	Diferencia entre el frente de onda esférico de un medio isótropo y el frente de onda no esférico en un medio anisótropo	13
Figura 3	Velocidad de fase exacta en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$ en un medio VTI.	17
Figura 4	Velocidad de fase exacta en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 30$ en medio TTI.	18

Figura 5	Velocidad de fase exacta en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 45$ en medio TTI.	18
Figura 6	Velocidad de fase exacta en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 60$ en medio TTI.	19
Figura 7	Velocidad de fase exacta en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 90$ en medio TTI.	19
Figura 8	Caso particular de la solución analítica para la ecuación onda acústica 1-D.	24
Figura 9	Solución numérica para la ecuación de onda acústica 1-D, el eje horizontal representa el espacio de la propagación de la onda, el vertical la magnitud de la onda y el eje de profundidad representa la evolución temporal.	25
Figura 10	Superposición de la solución analítica (línea de color verde) y numérica (línea de color rojo).	26
Figura 11	Variación de la velocidad de fase numérica en función de la densidad de muestreo de la grilla para $S = 0,5$ y $N_\lambda _{transic} = 3$, donde la función en rojo es \tilde{k}_{real} y la función en verde representa \tilde{k}_{imag}	38
Figura 12	Porcentaje de error relativo de la velocidad de fase para el espacio libre c contra la velocidad de fase numérica en función de la densidad de muestreo en la malla $3 \leq N_\lambda \leq 80$ para un factor de estabilidad $S = 0,5$	39
Figura 13	Diagrama de dispersión numérica para un esquema de segundo orden.	40
Figura 14	Diagrama de dispersión numérica para un esquema de segundo orden, para distintos valores de Δt	41
Figura 15	Diagrama de dispersión numérica para un esquema de segundo orden, para distintos valores de α	43

Figura 16	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$ en un medio VTI.	47
Figura 17	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 30$ grados en un medio TTI. . . .	47
Figura 18	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 45$ grados en un medio TTI. . . .	48
Figura 19	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 60$ grados en un medio TTI. . . .	48
Figura 20	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 90$ grados en un medio TTI. . . .	49
Figura 21	Esquema de discretización 2-D, donde el subíndice (i, j) varía en cada dirección	55
Figura 22	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P , con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ y $e_c = -0,34$ en un medio VTI.	63
Figura 23	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$ en un medio VTI.	69
Figura 24	Parte real de la función $\sin^{-1}(x)$	76
Figura 25	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 30$ en medio TTI.	80
Figura 26	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 45$ en medio TTI.	80
Figura 27	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 60$ en medio TTI.	81
Figura 28	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 90$ en medio TTI.	81

Figura 29	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$ en un medio VTI.	92
Figura 30	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 30$ en medio TTI.	92
Figura 31	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 45$ en medio TTI.	93
Figura 32	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 60$ en medio TTI.	93
Figura 33	Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 90$ en medio TTI.	94
Figura 34	Campo de onda en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de $2 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Alkhalifah (2000)).	105
Figura 35	Campo de onda en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de $1 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Huang et al., (2011)).	106
Figura 36	Campo de onda P en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de $4 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).	106
Figura 37	Campo de onda Q en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de $4 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).	107
Figura 38	Campo de onda en un medio acústico con anisotropía polar vertical, en un tiempo de $1 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Alkhalifah (2000)).	107

Figura 39	Campo de onda en un medio acústico con anisotropía polar vertical, en un tiempo de 1 (<i>ms</i>). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Huang et al., (2011)).	108
Figura 40	Campo de onda <i>P</i> en un medio acústico con anisotropía polar vertical, en un tiempo de 1 (<i>ms</i>). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).	108
Figura 41	Campo de onda <i>Q</i> en un medio acústico con anisotropía polar vertical, en un tiempo de 1 (<i>ms</i>). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).	109
Figura 42	Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 1 (<i>ms</i>) (aproximación propuesta por Alkhalifah (2000)).	109
Figura 43	Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 1 <i>x</i> (<i>ms</i>) (aproximación propuesta por Huang et al., (2011)).	110
Figura 44	Campo de onda <i>P</i> en un medio acústico estratificado homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 2 (<i>ms</i>) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).	110
Figura 45	Campo de onda <i>Q</i> en un medio acústico estratificado homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 2 (<i>ms</i>) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).	111
Figura 46	Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar vertical (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 2 (<i>ms</i>) (aproximación propuesta por Alkhalifah (2000)).	111
Figura 47	Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar vertical (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 7 (<i>ms</i>) (aproximación propuesta por Huang et al., (2011)).	112

Figura 48	Campo de onda P en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar vertical (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $2 (ms)$ (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).	112
Figura 49	Campo de onda Q en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar vertical (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $2 (ms)$ (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).	113
Figura 50	Campo de onda en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de $3 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Zhang et al. (2005)).	115
Figura 51	Campo de onda P en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de $1 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al. (2008)).	116
Figura 52	Campo de onda Q en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de $1 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al. (2008)).	116
Figura 53	Campo de onda en un medio acústico homogéneo con anisotropía polar inclinada, en un tiempo de $3 (ms)$ para $\phi = 45^\circ$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Zhang et al. (2005)).	117
Figura 54	Campo de onda P en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar inclinada, en un tiempo de $1 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al. (2008)).	117
Figura 55	Campo de onda Q en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar inclinada, en un tiempo de $1 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al. (2008)).	118

Figura 56	<p>Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $1 (ms)$ para $\phi = 45^0$. El valor para la velocidad es obtenido en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Zhang et al. (2005)).</p>	118
Figura 57	<p>Campo de onda P en un medio estratificado acústico homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $2 (ms)$ para $\phi = 45^0$. El valor para la velocidad es obtenido en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al., (2008)).</p>	119
Figura 58	<p>Campo de onda Q en un medio estratificado acústico homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $2 (ms)$ para $\phi = 45^0$. El valor para la velocidad es obtenido en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al., (2008)).</p>	119
Figura 59	<p>Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar inclinada (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $2 (ms)$ para $\phi = 45^0$. El valor para la velocidad es obtenido en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Zhang et al. (2005)).</p>	120
Figura 60	<p>Campo de onda P en un medio estratificado acústico homogéneo con anisotropía polar Inclinada (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $1 (ms)$ para $\phi = 45^0$ (aproximación propuesta por Fletcher et al., (2008)).</p>	120
Figura 61	<p>Campo de onda Q en un medio estratificado acústico homogéneo con anisotropía polar Inclinada (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $1 (ms)$ para $\phi = 45^0$ (aproximación propuesta por Fletcher et al., (2008)).</p>	121

Lista de símbolos y abreviaturas

Símbolo y definición.

$\sigma_{i,j}$ Tensor de esfuerzos

$\varepsilon_{i,j}$ Tensor deformación

ω Frecuencia angular

$V(\theta)$ Velocidad de fase

V_{p0} Velocidad de la onda P

θ Ángulo de fase

ϕ Ángulo de inclinación en un medio TTI

λ Parámetro de Lamé

ν Módulo de rigidez

ε Parámetro de anisotropía definido por Thomsen para la onda P

δ Parámetro de anisotropía definido por Thomsen para la onda P y SV

γ Parámetro de anisotropía definido por Thomsen para la onda SH

η Parámetro de anisotropía definido por Tsvankin

v_n Velocidad NMO

$c_{i,j,k}$ Tensor de elasticidad

$C_{m,n}$ Matriz de elasticidad y parámetros de elasticidad

$G_{i,k}$ Matriz de Christoffel

VTI Siglas en inglés de medio transversalmente isótropo vertical o anisotropía polar vertical

TTI Siglas en inglés de medio transversalmente isótropo inclinado o anisotropía polar inclinado

DF Diferencias finitas

TÍTULO: MODELADO NUMÉRICO 2-D EN MEDIOS ACÚSTICOS ANISÓTROPAS BASADO EN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ACOPLADAS Y DESACOPLADAS.¹

AUTOR: CHACÓN HURTADO, Eduv.²

PALABRAS CLAVES: Anisotropía polar, modelado sísmico, estabilidad numérica, dispersión numérica, método pseudo-espectral.

RESUMEN

El modelado numérico en la sísmica de reflexión ofrece un camino para avanzar en el entendimiento de la estructura del subsuelo, una forma de modelar el subsuelo considerando anisotropía polar vertical e inclinada, es por medio de la ecuación de onda acústica, debido su bajo costo computacional que requiere, por lo tanto, modelar medios anisótropos bajo aproximaciones acústicas conllevar a tener una nueva alternativa para analizar y entender la propagación de las ondas en el subsuelo. Este trabajo presenta el modelado numérico de diversas ecuaciones diferenciales parciales acopladas de onda en medios acústicos 2-D con anisotropía polar vertical e inclinada.

Por otro lado, se presentan las expresiones de velocidades de fase de la onda P y la onda SV para cada caso propuesto, considerando la expresión de velocidad de fase exacta para un medio elástico y las aproximaciones en medios acústicos. En una segunda parte del trabajo se presentan algoritmos numéricos que resuelven cada ecuación de onda en un medio acústico con anisotropía polar vertical e inclinada, en términos de los parámetros de anisotropía ε , δ y η , basados en la técnica de diferencias finitas, se utilizaron operadores espaciales y temporales aproximados con DF de segundo orden, para obtener esquemas de numéricos de segundo orden con el uso del concepto de malla homogénea, donde se estudió y se establecieron las condiciones de estabilidad y dispersión

¹Trabajo de grado

²Escuela de Física. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Jairo Alberto Torres Peña. Codirector: Rafael Ángel Torres Amaris.

numérica para cada esquema numérico propuesto en este trabajo. Dicho algoritmo permite obtener el campo de onda y el sismograma sintético que contribuye a un mejor análisis de la propagación de las ondas en modelos con estos tipos de anisotropía.

TITLE: NUMERICAL MODELING 2D IN ACOUSTIC MEDIA ANISOTROPIC BASED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS COUPLED AND DECOUPLED. ³

AUTOR: CHACÓN HURTADO, Eduv. ⁴

KEY WORDS: Polar anisotropic, seismic modeling, numerical stability, numerical dispersion, pseudo spectral method.

ABSTRACT

The numerical modeling of seismic reflection provides a way to advance the understanding of the subsurface structure, a way of modeling the subsurface considering the vertical and inclined polar anisotropy, it is through the acoustic wave equation, because of its low computational cost it requires, therefore, low acoustic model anisotropic media approaches lead to have a new alternative to analyze and understand the propagation of waves in the subsurface. This paper presents the numerical modeling of various partial differential equations coupled wave acoustic means 2-D vertical and inclined polar anisotropy.

Furthermore, the expressions of phase velocities of P and SV wave proposed for each case are presented, considering the rate expression for accurate phase and an elastic medium approximations acoustic means. In a second part of numerical algorithms that solve every wave equation in an acoustic medium vertical and inclined polar anisotropy in terms of anisotropy parameters ϵ , δ and η are presented, based in the technique of finite differences, spatial and temporal operators approximate with DF second order were used to obtain schemes numerical second order with the use of the concept of homogeneous mesh, where he studied and the conditions of stability and numerical dispersion settled for each numerical scheme proposed in this paper. This algorithm allows for the wavefield synthetic seismogram and contributing to a better analysis dela wave propagation models with these types of anisotropy.

³Grade work.

⁴School of Physic. Faculty of Sciences. Universidad Industrial de Santander. Director: Jairo Alberto Torres Peña. Co director: Rafael Ángel Torres Amaris.

INTRODUCCIÓN

Debido a las necesidades actuales de la industria de hidrocarburos en cuanto a la exploración en zonas complejas, se requieren obtener imágenes del subsuelo claras con buena resolución y usando computación de alto desempeño considerando los volúmenes actuales de los datos sísmicos, por lo anterior y más, es necesario considerar las propiedades físicas de las rocas en el subsuelo. Es decir, examinar las propiedades como la anisotropía en etapas de la exploración como el modelado sísmico y la migración, dejando a un lado algoritmos convencionales que se apartan de esta idea. Es tradicional en los algoritmos de modelado asumir la ecuación de onda acústica en medios isótropos como el caso más simple, donde comparada con la ecuación de onda elástica consume menor tiempo de computo (Huang et al., 2011). Por otro lado, si se quiere considerar la anisotropía en el caso elástico, se debe tener en cuenta tanto la onda P como la onda S , donde la onda P es una onda longitudinal o compresional, lo cual significa que el medio es sucesivamente comprimido y dilatado en la dirección de la propagación, en cambio la onda S es una onda transversal, de corte o de cizalla, en el cual el movimiento de las partículas es perpendicular al de la propagación del campo, esto conlleva un aumento más significativo de tiempo computacional (Huang et al., 2011), haciendo necesario los valores de la onda S cuando se realiza el modelado con la ecuación de onda elástica, donde en algunos casos se carecen de estos datos. Así, obtener una ecuación que describa el comportamiento de la onda acústica para medios con anisotropía polar vertical o VTI (medio transversalmente isótropo con un eje de simetría vertical) y anisotropía polar inclinada o TTI (medio transversalmente isótropo con eje de simetría inclinado), es esen-

cial para entender el fenómeno de propagación de las ondas en estos tipos de medios con el uso de los datos de la onda P , conllevando a tener modelos más reales del subsuelo. La propagación de las ondas en subsuelo son modeladas mediante la solución numérica de la ecuación de onda elástica, en este caso el campo de onda esta descrito por tres componentes del vector desplazamiento que incluye dos tipos de ondas: compresional y de cizalla (Alkhalifah, 2000). Una desventaja de la hipótesis elástica es que se ignora la inelasticidad de la tierra, esto conduce a tener una deficiencia en la aproximación de la geología del subsuelo (Alkhalifah, 2000). Además, un problema estrictamente computacional es que, debido a que el campo de onda en un medio elástico esta descrito por un vector, cuando se realiza el modelado de la propagación del campo de onda por medio del método de diferencias finitas, esta técnica requiere del mismo tiempo de computación para las tres componentes del campo de onda, resultando un proceso que es computacionalmente más extenso (Huang et al., 2011; Alkhalifah, 2000). De este modo, la reducción del costo computacional, ha llevado a los geofísicos modelar la propagación de la onda P por medio de la aproximaciones de medios acústicos, donde el campo de onda de un medio acústico es descrito solamente por una cantidad escalar en lugar de un vector (Alkhalifah, 2000). En miras de entender el fenómeno de la anisotropía sísmica diferentes autores han atacado el problema con el fin de simplificar las ecuaciones, entre ellas están las de anisotropía débil (Thomsen, 1986; Cohen, 1997), aproximación elíptica (Zhou et al., 2006, Dellinger et al., 1988, Dellinger et al., 1990), y la aproximación de ángulo pequeño (Cohen, 1997). Sin embargo, estas aproximaciones tienen ciertas limitaciones, que en algunos casos son inaceptables en la práctica. La aproximación que se considera en este trabajo principalmente es la hipótesis acústica que ajusta la velocidad de la onda S (V_{s0}) igual a cero, excluyendo datos iniciales de la onda S (Alkhalifah, 2000), esta aproximación es más precisa que las aproximaciones de anisotropía débil o propagación en ángulos pequeños.

Por otro lado, se deriva la relación de dispersión propuesta por Alkhalifah (1998), donde se relacionan las componentes verticales y horizontales del inverso de la velocidad (*slownnes*) para medios VTI y TTI, a partir de esta relación se puede

observar que la simplicidad de la ecuación de onda acústica como resultado directo de asumir la componente vertical de velocidad de la onda $S(V_{s0})$ igual a cero. La exactitud de estas ecuaciones están bien dentro de las precisiones esperadas en aplicaciones en geofísica, la ecuación es exacta dentro de los límites de error de tolerancia de la sísmica (Alkhalifah, 2000). Esta relación de dispersión sirve como punto de partida para el desarrollo de la ecuación de onda acústica que describe la propagación de la onda P en medios VTI.

Las ecuaciones diferenciales parciales que se tratan en este trabajo se derivan a partir de la velocidad de fase exacta para un medio elástico VTI obtenida por primera vez por Thomsen (1986), escrita en función de las constantes elásticas de la matriz de elasticidad por White (1983) y reescrita en función de los parámetros de Thomsen (V_{p0} , V_{s0} , η , δ , γ) por Tsvankin (1996). A partir de esta ecuación se aplica la hipótesis acústica para obtener tres formas de deducir las ecuaciones de onda. Para las ecuaciones diferenciales acopladas, la primera es deducir la relación de dispersión a partir de la aproximación de la velocidad de fase (Alkhalifah, 2000; Zhang et al., 2005; Du et al., 2008; Fletcher et al., 2008), la segunda es una aproximación de la raíz cuadrada (Huang et al., 2011) y por último se hace una aproximación a la raíz cuadrada en series de Taylor, posteriormente se realiza una aproximación con el fin de obtener dos relaciones de velocidad de fase desacopladas (Zhan, 2012).

El siguiente trabajo tiene cuenta con la siguiente estructura. El capítulo uno, presenta los aspectos generales de este documento, en donde se presentan los objetivos y la metodología llevada a cabo. En el segundo capítulo, se presenta la teoría básica para la ecuación de onda acústica en un medio isótropo 1-D, en donde se explica el método numérico en diferencias finitas el cual es aplicado a la ecuación ya mencionada, posteriormente se construye el esquema numérico para obtener la condición de estabilidad numérica y dispersión numérica para este caso. En el tercer capítulo, se presentan los sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas obtenidas por Alkhalifah (2000), Zhang et al. (2005), Du et al. (2008), Fletcher et al. (2008) y Huang et al. (2011), para medios con anisotropía polar vertical (VTI) y anisotropía polar inclinada (TTI). También se muestran

las velocidades de fase para cada ecuación de onda. El cuarto capítulo, presenta la ecuación diferencial desacoplada obtenida por Zhan (2012), para medios con anisotropía VTI y TTI. También se presenta la velocidad de fase tanto para la onda S y la onda P . En el capítulo cinco, se muestran los modelos numéricos sintéticos desarrollados para medios con anisotropía tipo VTI y TTI desarrollados para las ecuaciones diferenciales acopladas con distintos valores de los parámetros de anisotropía. También se presenta el algoritmo de solución al problema, la fuente implementada y condiciones de frontera utilizadas en el código computacional. Finalmente en el capítulo cinco, se presentan los resultados obtenidos para las ecuaciones diferenciales acopladas en el modelado del campo de onda acústico sobre modelos sintéticos 2-D horizontales y la respuesta sísmica para estos modelos desarrollados.

Capítulo

1

ASPECTOS PRELIMINARES

1.1 OBJETIVO GENERAL

Analizar la propagación de las ondas acústicas en medios con anisotropía tipo VTI y TTI a partir del modelado numérico usando diferencias finitas para las ecuaciones diferenciales parciales acopladas 2-D.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Implementar numéricamente las ecuaciones diferenciales parciales acopladas y desacopladas en medios acústicos con anisotropía.

Garantizar las condiciones de estabilidad y dispersión numérica para los esquemas en diferencias finitas.

Obtener el campo de onda acústico y la respuesta sísmica en modelos sintéticos.

1.3 METODOLOGÍA

La metodología llevada a cabo para lograr los objetivos propuestos en este trabajo, involucra varios aspectos que se describen a continuación:

1.3.1. Fase 1: Estado del arte

Esta fase consta de dos etapas las cuales se centran en los dos aspectos importantes de este proyecto. En la primera etapa se realizó una revisión del estado del arte acerca de la ecuación de onda acústica para medios isótropos entendiendo el fenómeno físico y numérico en este medio, analizados los medios isótropos, se prosigue a estudiar los medios con anisotropía, pero en este caso asociado a fenómenos geofísicos, es decir medios con anisotropía sísmica. Estudiada la anisotropía sísmica, se prosigue a la etapa final donde se analizó las propiedades de la anisotropía polar VTI y TTI en el modelado del campo de onda, proveniente ya sea, de ecuaciones diferenciales acopladas o desacopladas. Finalmente, establecidas las ecuaciones diferenciales se hace un análisis en los valores que se le asignan a los parámetros de anisotropía, con fin de implementar un esquema numérico estable y sin dispersión.

1.3.2. Fase 2: Construcción de esquemas numéricos

Esta fase consta de tres etapas importantes, en la primera etapa se hizo un estudio del método numérico en diferencias finitas, para luego aplicarlo a las ecuaciones diferenciales, en este caso a las ecuaciones diferenciales parciales acopladas. La segunda etapa, es que a partir del estudio del método, nos enfocamos en las propiedades de estabilidad numérica, dispersión numérica y convergencia, para la construcción de esquemas numéricos para las ecuaciones diferenciales parciales acopladas. Finalmente, definidos los esquemas numéricos se procede a construir los códigos computacionales para obtener la última

etapa que es determinar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales en medios con anisotropía polar vertical e inclinada.

1.3.3. Fase 3: Estabilidad numérica y dispersión numérica

En la tercera fase se garantiza la estabilidad numérica de los esquemas numéricos de las ecuaciones diferenciales parciales acopladas, haciendo uso del análisis espectral de *Von Neumann*, esto asegura que los errores que se propagan en la malla no crezcan exponencialmente. Por otra parte, la dispersión numérica se garantiza determinando un paso apropiado para cada celda de la malla.

1.3.4. Fase 4: Generación de modelos sintéticos

A partir del desarrollo de los códigos computacionales, donde se garantiza la estabilidad y dispersión numérica, se lleva a cabo la construcción los modelos sintéticos 2-D en medios con anisotropía tipo VTI y TTI, donde se obtiene la información de los campos de presión propagándose en los modelos, en este caso datos de la onda *P*. La generación de los modelos se hace con las herramientas *trimodel*, *unif* del software Seismic Unix de propiedad del centro de Fenómenos Ondulatorios de la Escuela de Minas el cual es de carácter libre, y se visualiza con las herramientas *suxmovie* y *suximage*.

1.3.5. Fase 5: Análisis de resultados

Finalmente se analizará la respuesta sísmica mediante la visualización de la evolución del campo de onda y con la obtención de los datos en el dominio del disparo de las secciones sísmicas con y sin anisotropía.

Capítulo

2

ECUACION DE ONDA ACÚSTICA EN MEDIOS ISÓTROPOS Y EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

En este capítulo se presenta la solución numérica mediante el método en diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) para la ecuación diferencial parcial que describen la propagación de las ondas en medios acústicos, en este caso la ecuación de onda escalar unidimensional. Donde la solución analítica de la propagación de la onda es obtenida a lo largo de esta sección. Por otra parte, se introduce la idea del método en diferencias finitas para luego aplicarlo a la ecuación de onda 1-D obteniendo el esquema numérico el cual será modelado en el desarrollo de este trabajo. Finalmente se introduce el concepto de dispersión desde la parte física, dispersión numérica y estabilidad numérica, esto es basado de Taflove et al. (2000) y Rosa (2010).

2.1 INTRODUCCIÓN A LA ANISOTROPÍA POLAR

Inicialmente en la exploración sísmica se considera que, los estratos que componen la cuenca a explorar son medios isótropos, cuyas velocidades sísmicas no varían con la dirección en la cual se están propagando las ondas, sin embargo

cuando las ondas se propagan en el interior del subsuelo, este exhibe anisotropía. Se define la anisotropía sísmica como la variación de la velocidad con la dirección en la cual se propagan las ondas y esta se presenta en rocas como las arcillas, estratos delgados sobrepuestos y formaciones con alto grado de fracturamiento (Thomsen, 1986; Jones et al., 1981; Johnston et al., 1995; Leslie et al., 1999). Algunas causas de la anisotropía en rocas sedimentarias son:

- Sucesión de capas isótropas con escalas más pequeñas que la longitud de la onda sísmica (Backus, 1962).
- Orientación preferencial de los minerales como por ejemplo las arcillas (Winterstein, 1990)

El tipo de anisotropía más común que se tiene en cuenta en sísmica es la anisotropía polar (ver Figura 1), la cual posee un eje de simetría perpendicular a la dirección en la cual se depositan los sedimentos, y cuyas velocidades en el plano normal a este eje son idénticas. Cuando el eje de simetría es vertical, la anisotropía es llamada Anisotropía Polar Vertical o VTI (vertical transverse isotropy), por lo que la isotropía es limitada al plano horizontal. Si el eje de simetría no es vertical es llamada Anisotropía Polar Inclinada o TTI (tilted transverse isotropy) y finalmente, está el tipo de anisotropía en la cual el eje de simetría es horizontal comúnmente llamado Anisotropía Azimutal o HTI (horizontally transverse isotropy). Según la disposición y el tipo de roca, un medio VTI se asocia típicamente a series de estratos conformados por lutitas y areniscas intercaladas o por un alto contenido arcilloso en el medio (Toldi et al., 1999). En este trabajo solo se estudiara anisotropía VTI y TTI presentadas anteriormente.

2.2 TEORÍA DE ANISOTROPÍA POLAR

La ley de Hooke permite expresar las componentes del tensor de esfuerzos, σ_{ij} , como una combinación lineal de las componentes del tensor de deformación, ε_{ij} ,

Figura 1: Isotropía transversal en rocas sedimentarias. Cada capa tiene aproximadamente las mismas propiedades en el plano horizontal, pero diferentes en la dirección vertical (arriba) y debajo se muestra un afloramiento con estratos inclinados.



Fuente: Tomado de Luca Galuzzi - www.galuzzi.it (arriba). Y debajo tomado de métodos de exploración www.bidi.uam.mx/index.

usando la siguiente ecuación:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (2.1)$$

donde c_{ijkl} son las componentes del tensor de elasticidad o tensor de rigidez, dado que i, j, k, l varían de 1 a 3, el número de componentes del tensor de elasticidad es $3^4 = 81$, pero no todas las 81 componentes son diferentes, debido a la existencia de la simetría de los tensores de esfuerzo ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) y deformación ($\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$), y que además por ser un fenómeno adiabático $c_{ijkl} = c_{klij}$, esto implica que en el tensor c_{ijkl} , las constantes elásticas independientes se reduzcan a 21 (Love, 1927). En vista de esto, se puede expresar como una matriz de 6×6 , si

se toman parejas de los cuatro índices de c_{ijkl} asignando C_{mn} y haciendo corresponder (i, j) con m y (k, l) con n de la siguiente forma según la notación de Voigt (Thomsen, 2001):

$$(1, 1) \rightarrow 1, (2, 2) \rightarrow 2, (3, 3) \rightarrow 3, (2, 3) \rightarrow 4, (1, 3) \rightarrow 5, (1, 2) \rightarrow 6$$

. La ecuación (2.1) se puede expresar de manera matricial como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & SYM & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

El modelo más general de un medio anisótropo está representado por 21 componentes independientes, tal y como se muestra en la matriz (2.2). Un medio con anisotropía polar se caracteriza por 5 constantes independientes, $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}$ y C_{44} (Love, 1927), donde:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

con

$$C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}).$$

En un medio isótropo la matriz (2.3) depende de 2 coeficientes elásticos C_{11} y C_{44} , los cuales se expresan en términos de los parámetros de Lamé; λ y μ (Slawinski, 2003) definidos de la siguiente forma:

$$\lambda := C_{11} - 2C_{44}$$

$$\mu := C_{44},$$

según lo anterior, la matriz queda expresada como:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

A partir de las ecuaciones de movimiento de Cauchy para un elemento infinitesimal del continuo (Aki and Richards, 2002)::

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.5)$$

donde ρ es la densidad del medio, u_i son las componentes del vector desplazamiento, f_i son las fuerzas de cuerpo, t es el tiempo, y x_i son las coordenadas cartesianas, reemplazando la ecuación (2.1) en la ecuación (2.5) se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial c_{ijkl} \varepsilon_{kl}}{\partial x_j} = f_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.6)$$

donde el tensor de deformación ε_{kl} está definido por (Slawinski, 2003)::

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.7)$$

En la ecuación (2.6), despreciando las fuerzas de cuerpo ($f_i = 0$) y si el tensor de elasticidad se considera constante, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = 0 \quad (2.8)$$

Una onda plana tipo armónica se usa para encontrar una solución de prueba de la ecuación (2.8).

$$u_k = U_k e^{i w \left(\frac{n_j x_j}{\nu} - t \right)}, \quad (2.9)$$

donde U_k son las componentes del vector polarización \mathbf{u} , w es la frecuencia angular, ν es la velocidad de propagación de la onda (comúnmente llamada velocidad de fase), \mathbf{n} es el vector unidad, que es ortogonal al plano del frente de onda. Usando (2.9) en la ecuación (2.8), se obtiene a la ecuación de Christoffel de la velocidad de fase ν y el vector polarización \mathbf{U} (Du, 2007):

$$\begin{bmatrix} G_{11} - \rho\nu^2 & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} - \rho\nu^2 & G_{23} \\ G_{13} & G_{32} & G_{33} - \rho\nu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

G_{ik} es la matriz de Christoffel, la cual depende de las propiedades elásticas del medio y de la dirección de propagación:

$$G_{ik} = c_{ijkl} n_j n_l. \quad (2.11)$$

Utilizando estas relaciones en las ecuaciones de movimiento se obtiene una ecuación de onda con tres soluciones independientes, una cuasi-longitudinal (qP), una cuasi-transversal (qSV) y una transversal (SH), las tres ondas son polarizadas en direcciones mutuamente ortogonales. Daley et al. (1977) obtuvieron las relaciones de dispersión para estos tres tipos de onda, mostradas a

continuación:

$$\rho v_p^2(\theta) = \frac{1}{2} \left[C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta + D(\theta) \right] \quad (2.12)$$

$$\rho v_{sv}^2(\theta) = \frac{1}{2} \left[C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta - D(\theta) \right] \quad (2.13)$$

$$\rho v_{sh}^2(\theta) = C_{66} \sin^2(\theta) + C_{44} \cos^2(\theta), \quad (2.14)$$

donde ρ es la densidad y θ es el ángulo entre el frente de onda normal y el eje vertical, $D(\theta)$ es una notación compacta para la combinación cuadrática:

$$D(\theta) \equiv \left\{ (C_{33} - C_{44})^2 + 2 \left[2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44}) \right] \sin^2 \theta + \left[(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})^2 - 4(C_{13} + C_{44})^2 \right] \sin^4 \theta \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) denotan la velocidad de fase para la onda P , la onda SV y la onda SH respectivamente. Cuando la onda se propaga en la dirección vertical paralela al eje de simetría, ($\theta = 0^\circ$) y en la dirección horizontal perpendicular al eje de simetría, ($\theta = 90^\circ$) la velocidad de fase para la onda P está dada por las expresiones:

$$V_p(0^\circ) = V_{p0} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}, \quad (2.16)$$

$$V_p(90^\circ) = V_{p90} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}. \quad (2.17)$$

Donde v_{p0} corresponde a la velocidad de la onda P medida paralela al eje de simetría de un medio VTI y v_{p90} , es la velocidad de la onda P perpendicular al eje de simetría de un medio VTI, similarmente para la componente vertical de la onda S se obtiene:

$$v_{sv}(0^\circ) = V_{s0} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (2.18)$$

$$v_{sv}(90^\circ) = v_{sv90} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (2.19)$$

La velocidad de la onda SV paralela al eje de simetría, V_{s0} y perpendicular, $v_{sv(90)}$ son iguales para la onda SV . Para la onda SH se obtiene:

$$v_{sh}(0^\circ) = v_{sh0} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}, \quad (2.20)$$

$$v_{sh}(90^\circ) = v_{sh90} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}}, \quad (2.21)$$

La velocidad de la onda SH paralela al eje de simetría, v_{sh0} y perpendicular al eje de simetría, v_{sh90} son diferentes. Sí se considera un medio isótropo las componentes del tensor de rigidez $C_{44} = C_{66}$ y $C_{11} = C_{33}$, por lo tanto las velocidades $v_{sh0} = v_{sh90}$ y $V_{p0} = v_{p90}$. Las ecuaciones de la velocidad de fase fueron simplificadas por Thomsen (1986), quien definió tres parámetros ε , γ , y δ^* , los cuales él mismo, escribió apropiadamente como combinaciones de los coeficientes elásticos del tensor, los definió adimensionales y de tal forma que se redujeran a cero en el caso isótropo. Algunos materiales con valores pequeños de anisotropía ($\ll 0.2$) se llaman materiales con anisotropía débil, (ver Tabla 1 en Thomsen (1986)), los parámetros ε y γ son definidos en la forma:

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}}, \quad (2.22)$$

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}}. \quad (2.23)$$

En la ecuación (2.22) y (2.23) estos parámetros ε y γ , permiten describir diferencias entre la velocidad de la onda P y la onda SH en dirección paralela y en dirección perpendicular al eje de simetría del medio respectivamente. El tercer parámetro δ^* carece de significado físico y Thomsen lo definió como:

$$\delta^* \equiv \frac{2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})}{2C_{33}^2} \quad (2.24)$$

Las relaciones de dispersión (2.12), (2.13) y (2.14) fueron escritas por Thomsen incluyendo los tres parámetros ε , δ^* y γ en la forma:

$$\nu_p^2(\theta) = v_{p0}^2 \left[1 + \varepsilon \sin^2 \theta + D^*(\theta) \right], \quad (2.25)$$

$$\nu_{sv}^2(\theta) = v_{sv0}^2 \left[1 + \frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} \varepsilon \sin^2 \theta - \left(\frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} \right) D^*(\theta) \right], \quad (2.26)$$

$$\nu_{sh}^2(\theta) = v_{sv0}^2 \left[1 + 2\gamma \sin^2 \theta \right], \quad (2.27)$$

donde el factor $D^*(\theta)$ está dado por la siguiente expresión:

$$D^*(\theta) \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right) \left\{ \left[1 + \frac{4\delta^* \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left(1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right)^2} + \frac{4\varepsilon \sin^4 \theta \left(1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} + \varepsilon \right)}{\left(1 - \frac{v_{sv0}^2}{v_{p0}^2} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}. \quad (2.28)$$

Es importante tener claridad y distinguir las diferencias entre el ángulo θ , y el ángulo ϕ , el primero se refiere al ángulo que forma la dirección de propagación dada por el vector número de onda (\mathbf{k}) y el eje de simetría, el segundo es el ángulo que forma el vector velocidad para el rayo, por donde la energía se propaga y el eje de simetría. El frente de onda a nivel local es perpendicular al vector de propagación (\mathbf{k}), ya que este apunta en la dirección de la tasa máxima de aumento de la fase, la velocidad de fase ν también se llama velocidad del frente de onda, ya que mide la velocidad del frente de onda a lo largo de \mathbf{k} . En el caso isotropo los ángulos son iguales y por lo tanto se obtienen frentes esféricos (Imagen izquierda de la Figura 2). Para el caso que existen diferencias entre dirección de la velocidad normal (equivalente a la dirección del número de onda) y la velocidad del rayo, se presentan frentes no esféricos (imagen derecha en la Figura 2). Se requiere en ciertos casos expresar la relación de dispersión en términos de la frecuencia w , y el número de onda, para esto se introduce la siguiente notación, el vector número de onda \mathbf{k} representa:

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}, \quad (2.29)$$

con sus componentes en dos dimensiones, dadas por:

$$k_x = k(\theta) \sin \theta \quad y \quad k_z = k(\theta) \cos(\theta), \quad (2.30)$$

y su magnitud :

$$k(\theta) = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \omega/V(\theta). \quad (2.31)$$

En (2.31), donde ω determina la frecuencia angular de la onda, y $V(\theta)$ la velocidad de fase. La velocidad de grupo para el medio dispersivo corresponde a:

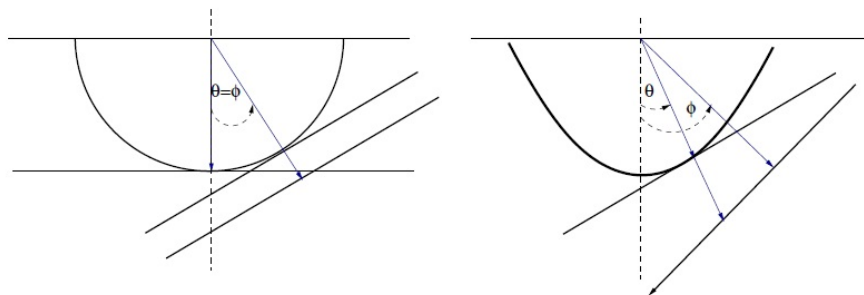
$$\vec{V} = \frac{\partial(kV(\theta))}{\partial k_x} \hat{x} + \frac{\partial(kV(\theta))}{\partial k_z} \hat{z}, \quad (2.32)$$

donde la magnitud escalar de V es expresada en términos de la magnitud de la velocidad de fase $V(\theta)$ en la forma:

$$V^2(\psi(\theta)) = v^2(\theta) + \left(\frac{\partial(v)}{\partial \theta} \right)^2, \quad (2.33)$$

para $\theta = 0$ y $\theta = 90$ el segundo término del lado derecho la ecuación (2.33) desaparece, de tal forma que la velocidad de grupo es equivalente a la velocidad de fase, característica de un medio de no dispersivo.

Figura 2: Diferencia entre el frente de onda esférico de un medio isótropo y el frente de onda no esférico en un medio anisótropo



2.3 ANISOTROPÍA DÉBIL

Thomsen en su artículo de 1986 realizó nuevas consideraciones para obtener unas expresiones más sencillas de las ecuaciones (2.25-2.28), de acuerdo a los resultados experimentales. Él notó que las mediciones de sus parámetros en ciertas rocas sedimentarias, estaban por debajo de 0.2 a lo que él llamo rocas con anisotropía débil, según esto él linealizó las ecuaciones de la velocidad de fase para valores pequeños de ε y δ mediante una expansión en serie de Taylor, y obtuvo las siguientes expresiones:

$$\nu_p(\theta) = V_{p0}(1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^4 \theta) \quad (2.34)$$

$$\nu_{sv}(\theta) = V_{s0} \left[1 + \frac{v_{p0}^2}{v_{sv0}^2} (\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \quad (2.35)$$

$$\nu_{sh}(\theta) = V_{s0} (1 + \gamma \sin^2 \theta), \quad (2.36)$$

donde la nueva expresión para δ (Thomsen, 1986) queda de la forma:

$$\delta \equiv \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})}. \quad (2.37)$$

La aproximación obedece al truncamiento de las series de Taylor, estas expresiones posibilitan el análisis físico correspondiente a la propagación de la onda en el medio anisótropo. Para el caso en que $\theta = 0$, se obtiene

$$\nu_p(0) = v_{p0} \quad (2.38)$$

$$\nu_{sv}(0) = v_{s0} \quad (2.39)$$

$$\nu_{sh}(0) = v_{s0}, \quad (2.40)$$

que son las velocidades de fase en dirección paralela al eje de simetría y corresponden a las velocidades establecidas en un medio isótropo, según las ecuaciones (2.16), (2.18) y (2.20).

2.4 VELOCIDAD DE FASE EXACTA PARA UN MEDIO ELÁSTICO CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL

La ecuación de velocidad de fase escrita en una notación estándar puede encontrarse en White (1983) de la siguiente manera:

$$2\rho V^2(\theta) = (c_{11} + c_{44}) \sin^2 \theta + (c_{33} + c_{44}) \cos^2 \theta \pm \sqrt{[(c_{11} - c_{44}) \sin^2 \theta - (c_{33} - c_{44}) \cos^2 \theta]^2 + 4(c_{13} + c_{44})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}, \quad (2.41)$$

donde θ es el ángulo de fase medido desde el eje de simetría. Para obtener la velocidad de la onda SV, el signo más del radical debe ser cambiado por un menos. Si dividimos ambos lados de la ecuación (2.41) por el cuadrado de la velocidad de la onda primaria y luego se sustituyen los coeficientes de anisotropía ε y δ se obtiene la velocidad de fase exacta expresada en términos de los parámetros de Thomsen (1986) que están dados por las ecuaciones (2.16) - (2.23).

Simplificando se obtiene los coeficientes elásticos en función de las velocidades verticales de la onda P y S, y de los tres parámetros de anisotropía ε , δ y γ .

$$\begin{aligned} c_{33} &= \alpha^2 \rho, & c_{44} &= \beta^2 \rho, & c_{11} &= \alpha^2 \rho(1 + 2\varepsilon), \\ c_{13} &= \rho \left(\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2[2\delta + 1] - \beta^2)} - \beta^2 \right), & & & & (2.42) \\ c_{66} &= 2\gamma c_{44} + c_{44}, & \Rightarrow & & c_{66} &= \beta^2 \rho(2\gamma + 1). \end{aligned}$$

Sustituyendo los coeficientes elásticos en función de los parámetros de *Thomsen* según la ecuación (2.42) en la ecuación (2.41), se obtiene:

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{1 + \frac{4 \sin^2 \theta}{f} (2\delta \cos^2 \theta - \varepsilon \cos 2\theta) + \frac{4\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2}}, \quad (2.43)$$

donde $f = 1 - \frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} = 1 - \frac{c_{44}}{c_{33}}$.

La ecuación (2.43) puede simplificarse mediante la separación del término $(\varepsilon - \delta)$

del radical:

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 2\theta}{f}}. \quad (2.44)$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ y reemplazando en el término de la raíz se obtiene:

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}}. \quad (2.45)$$

Para el caso de anisotropía elíptica se tiene que ($\varepsilon = \delta$), por lo tanto la velocidad de fase de la onda P está dada por:

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = 1 + 2\delta \sin^2 \theta = 1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta. \quad (2.46)$$

deducida la velocidad de fase para un medio VTI en función de los parámetros de Thomsen.

2.5 VELOCIDAD DE FASE EXACTA PARA UN MEDIO ELÁSTICO CON ANISOTROPÍA POLAR INCLINADA

Para obtener las velocidades de fase en un medio con anisotropía polar inclinada, se reemplaza $\theta = \theta - \phi$, en donde ϕ representa la inclinación de los estratos dentro de una configuración con un eje de simetría inclinado TTI, de tal forma que de la ecuación (2.45), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{V^2(\theta, \phi)}{V_{p0}^2} = \pm \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2(\theta - \phi)}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi)}{f}} + 1 + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi) - \frac{f}{2}. \quad (2.47)$$

Para el caso de la anisotropía elíptica en un medio con anisotropía inclinada, se obtiene:

$$\frac{V^2(\theta, \phi)}{V_{p0}^2} = 1 + 2\delta \sin^2(\theta - \phi) = 1 + 2\varepsilon \sin^2(\theta - \phi). \quad (2.48)$$

2.6 CURVAS DE VELOCIDAD DE FASE EXACTA PARA LAS ONDAS P Y SV EN UN MEDIO ELÁSTICO CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL E INCLINADA

Las curvas de velocidad de fase exacta se obtienen según las ecuaciones (2.45) y (2.47), estas curvas son obtenidas para las ondas P y SV en un medio elástico con anisotropía polar vertical (VTI), considerando los siguientes valores para las velocidades $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, los parámetros de anisotropía de Thomsen $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$. Las curvas se presentan para diferentes valores de ϕ , para un ángulo $\phi = 30$, $\phi = 45$, $\phi = 60$ y $\phi = 90$ (ver Figuras 3-7).

Figura 3: Velocidad de fase exacta en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$ en un medio VTI.

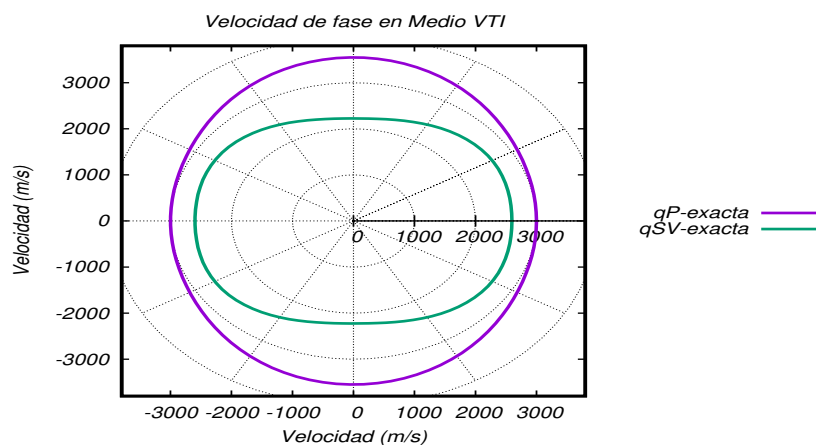


Figura 4: Velocidad de fase exacta en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 30$ en medio TTI.

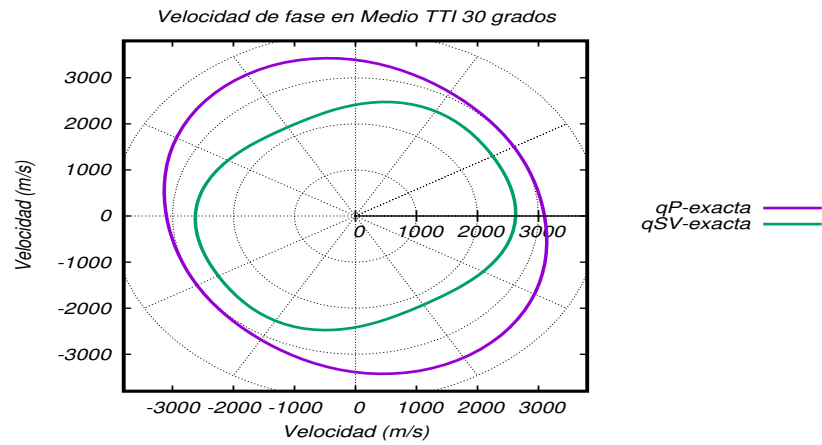


Figura 5: Velocidad de fase exacta en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 45$ en medio TTI.

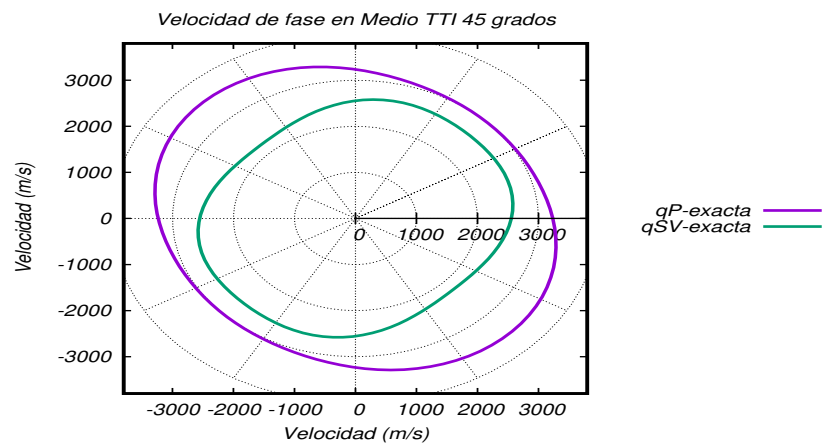


Figura 6: Velocidad de fase exacta en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 60$ en medio TTI.

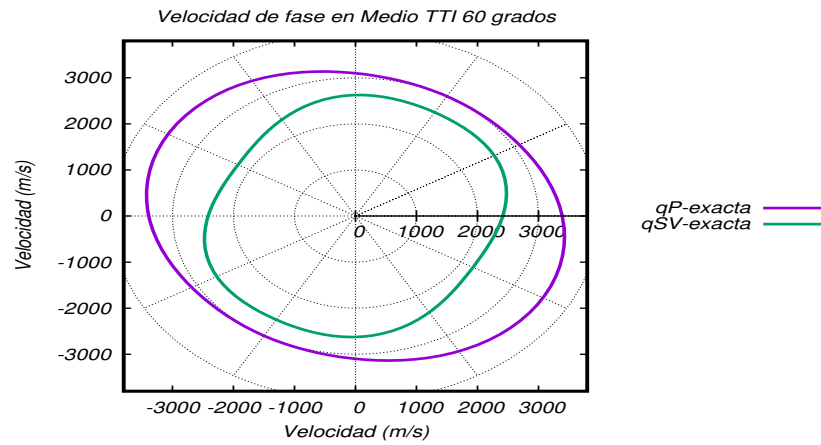
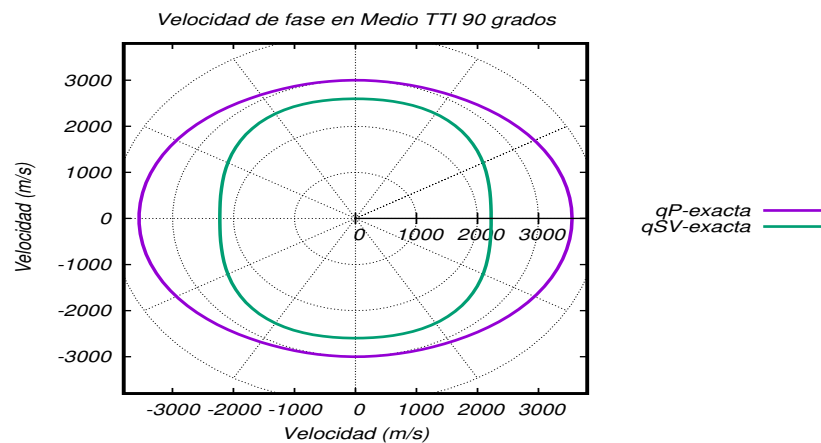


Figura 7: Velocidad de fase exacta en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 90$ en medio TTI.



2.7 PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS

Uno de los fenómenos más comunes y fundamentales que se presentan en la naturaleza es el movimiento ondulatorio. Como su nombre lo indica, la ecuación de la onda suministra una descripción de sistemas físicos vibratorios y oscilantes. Cuando se lanza una piedra a un tanque la superficie del agua sufre una perturbación, desplazándose las ondas radialmente hacia afuera, cuando se golpea una campana, las ondas sonoras se propagan desde la fuente de sonido. El estudio de ondas acústicas y elásticas que se propagan en el interior de la tierra (subsuelo) y los múltiples fenómenos como la reflexión, transmisión, etc. Hacen de gran el interés por entender la propagación de las ondas.

Se hace referencia a las leyes y principios que dan origen a la propagación de las ondas sísmicas en el caso acústico homogéneo e isótropo, así como en el caso de anisotropía polar vertical e inclinada.

2.7.1. Ondas acústicas

La comprensión de la propagación de una señal sísmica puede ser bien entendida considerando un medio puramente acústico, en el cual no se propagan ondas transversales. En particular, el significado de la ecuación de onda es fundamental para un profundo entendimiento del método sísmico. En el caso de un fluido, la ley de Hooke:

$$\Delta P = -K_b \frac{\Delta V}{V},$$

o

$$\Delta P = -\frac{1}{C_b} \frac{\Delta V}{V},$$

donde K_b es el módulo de volumen, C_b es el módulo de compresibilidad, ΔP es la variación de presión a la cual está sometido el volumen infinitesimal V ,

induciendo una variación del volumen ΔV . Esta ley establece que:

$$P = -K_f \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\delta V}{\Delta V}, \quad (2.49)$$

donde p es la presión ejercida por la onda en un diferencial de volumen δV , resultando una variación en el volumen, mientras ΔV es el volumen original del fluido. La presión corresponde, en efecto a una variación inversa a la presión del ambiente, donde esta puede ser medida por hidrofones. Por otra parte, K_f es el módulo de elasticidad del medio acústico, y está dado por:

$$K_f = v^2 \rho, \quad (2.50)$$

siendo ρ es la densidad y v es la velocidad relativa para el medio original, sin deformaciones. Reescribiendo δV y dividiendo entre ΔV .

$$\frac{\delta V}{\Delta V} = \frac{\delta u_x}{\Delta x} + \frac{\delta u_y}{\Delta y} + \frac{\delta u_z}{\Delta z}. \quad (2.51)$$

Haciendo tender a cero el término ΔV , y reemplazando en la ecuación (2.49), se obtiene una nueva versión de la ley de Hooke:

$$P = -K_f \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad (2.52)$$

y en forma vectorial,

$$P = -K_f \nabla \cdot \vec{u}. \quad (2.53)$$

La aplicación de la ley de Hooke a la propagación de las ondas puede ser contenida en el caso 1-D. Para esto se considera una onda plana viajando a lo largo del eje z . En este caso, la ley de Hooke posee la forma:

$$P = -K_f \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2.54)$$

donde u_z es el desplazamiento de las partículas a lo largo del eje z . Una variación de la presión introducida a la onda se puede relacionar con el desplazamiento de

las partículas a través de la segunda ley de *Newton*. Teniendo en cuenta que la presión es fuerza por unidad de área, se puede escribir:

$$\Delta P S = -p \rho \Delta z \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (2.55)$$

donde S es el área, $\Delta p S$ es la fuerza y $-p S \Delta z$ es la masa desplazada. Reescribiendo los términos y haciendo que Δz tienda a cero, se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (2.56)$$

Para deducir la versión de la ecuación de onda acústica 1-D, aplicado al desplazamiento de las partículas, se sustituye la ecuación (2.56), en la expresión (2.54), resultando:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K_f \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (2.57)$$

Si K_f es constante, entonces se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (2.58)$$

Para obtener la ecuación de onda para la presión, se deriva de la expresión (2.57) con relación a la profundidad y suponiendo que la densidad varía espacialmente, se tiene;

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(K_f \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad (2.59)$$

a continuación se sustituye $-K_f(\partial u_z/\partial z)$ por p , teniendo en cuenta que K_f no varía en el tiempo, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{1}{K_f} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (2.60)$$

En el caso de densidad constante

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\rho}{K_f} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (2.61)$$

donde $\rho/K_f = 1/c^2$, así:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (2.62)$$

2.8 SOLUCIÓN Y PROPAGACIÓN DE LA ONDA ACÚSTICA 1-D

Consideremos la ecuación de onda escalar unidimensional mostrada anteriormente en la ecuación (2.62):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2},$$

donde $P = P(x, t)$ siendo x la posición espacial y t el tiempo. Así, algunas posibles soluciones para la ecuación (2.62) pueden ser del tipo:

$$P(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct), \quad (2.63)$$

donde F y G son funciones arbitrarias. Derivando parcialmente con respecto a t y x , se obtiene una identidad independiente de la elección de las funciones F y G (Ver Apéndice 6), donde F y G se conocen como las soluciones de propagación de las ondas.

$$c^2 F''(x + ct) + c^2 G''(x - ct) = c^2 [F''(x + ct) + G''(x - ct)].$$

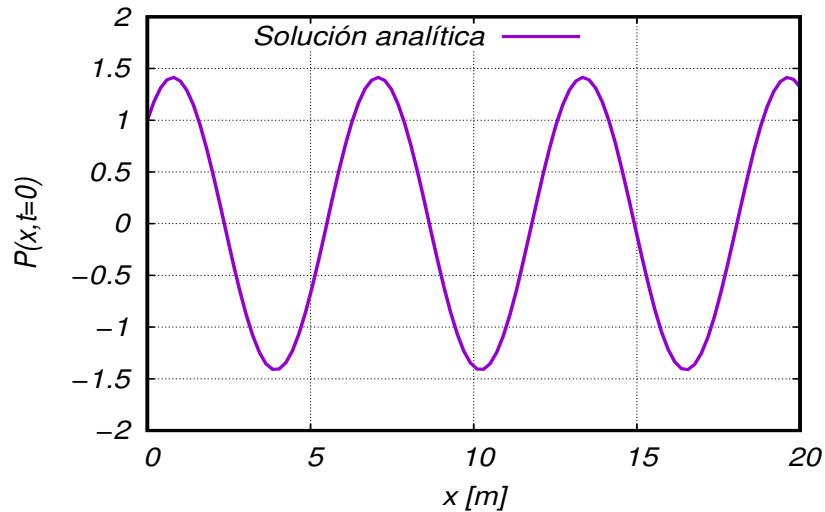
Un tipo de solución analítica puede escribirse de la siguiente manera:

$$P(x, t) = \sin(x + ct) + \cos(x - ct).$$

Por lo tanto para un tiempo ($t = 0$), la gráfica de la solución analítica se puede observar en la figura 8. Por otro lado, la figura 9 muestra la forma de la solución numérica para la ecuación de onda 1-D, obtenida a partir del esquema numérico que se presenta más adelante en la sección (2.11) (ecuación (2.76)). Finalmente, en la figura 10 se muestra la superposición tanto de las soluciones analítica y

numérica para la ecuación de onda 1-D en un medio isótropo.

Figura 8: Caso particular de la solución analítica para la ecuación onda acústica 1-D.

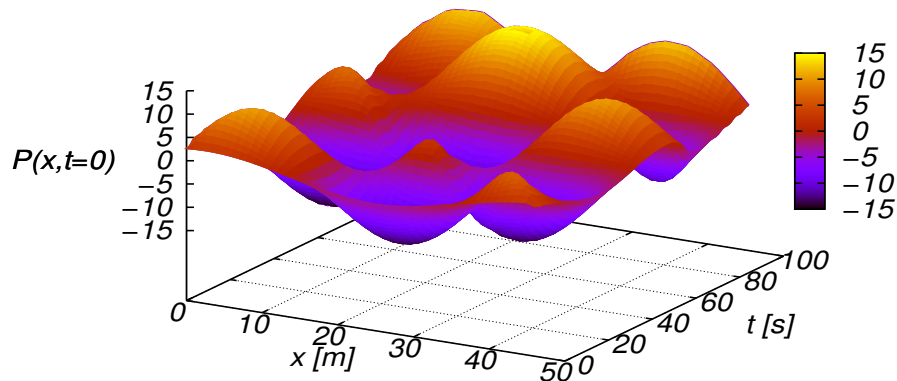


2.9 RELACIÓN DE DISPERSIÓN

En esta sección se introduce el concepto de dispersión desde el punto de vista físico, definida como la variación en la longitud de onda λ con respecto a la frecuencia f . Por conveniencia, la dispersión es frecuentemente representada como la variación en la propagación del número de onda $k = 2\pi/\lambda$ con la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. Para obtener la relación de dispersión de la ecuación (2.62), se considera una solución continua se propaga en el tiempo, escrita de la siguiente forma:

$$P(x, t) = e^{j(\omega t - kx)}, \quad (2.64)$$

Figura 9: Solución numérica para la ecuación de onda acústica 1-D, el eje horizontal representa el espacio de la propagación de la onda, el vertical la magnitud de la onda y el eje de profundidad representa la evolución temporal.



donde ω y k se definieron anteriormente y $j = \sqrt{-1}$. Sustituyendo en la ecuación (2.62) la ecuación (2.64), se obtiene:

$$(j\omega)^2 e^{j(\omega t - kx)} = c^2 (-jk)^2 e^{j(\omega t - kx)}, \quad (2.65)$$

ahora, simplificando ambos lados se obtiene:

$$(j\omega)^2 \cancel{e^{j(\omega t - kx)}} = c^2 (-jk)^2 \cancel{e^{j(\omega t - kx)}},$$

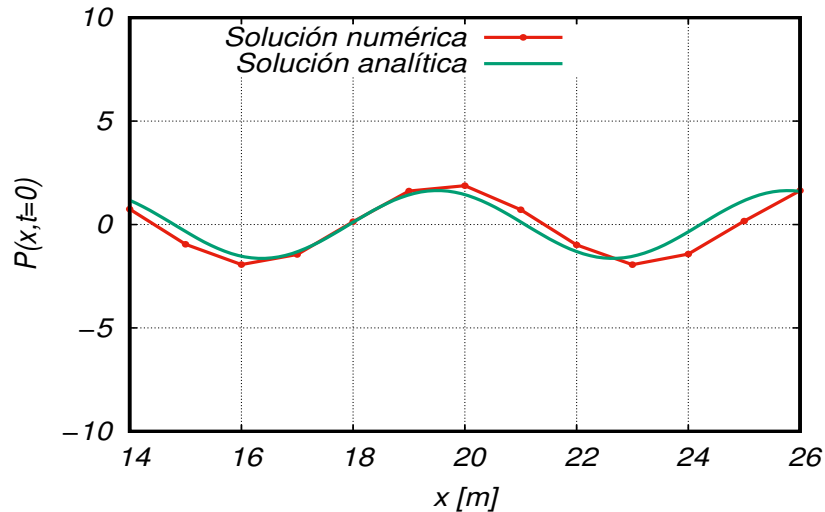
$$-\omega^2 = c^2 \cdot (-k^2),$$

$$\omega^2 = c^2 k^2,$$

$$k = \pm \omega/c. \quad (2.66)$$

De hecho, la ecuación (2.66) es la relación de dispersión para la ecuación de onda escalar unidimensional. Esta es la relación más simple, indicando que el

Figura 10: Superposición de la solución analítica (línea de color verde) y numérica (línea de color rojo).



número de onda es linealmente proporcional a la frecuencia angular. El signo más se le designa al eje x positivo de propagación. De la ecuación (2.66), se puede obtener la expresión clásica para la velocidad de fase, definida como:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \pm c. \quad (2.67)$$

Así, la velocidad de fase es $\pm c$, una constante independientemente de la frecuencia. La propagación de las ondas tiene la relación de dispersión de la forma (2.66), resultando constante la velocidad de fase de la ecuación (2.67), esto es llamado medio no dispersivo. En efecto, su forma de onda permanece sin cambios después de grandes distancias arbitrarias para distintos módulos de paquete o formas de impulso. Además, considerando la frecuencia angular en función del número de onda, es decir ($\omega = \omega(k)$), nosotros podemos diferenciar la ecuación (2.66) con respecto a k obteniendo la velocidad de grupo, definida como

$v_g = d\omega/dk$. Así:

$$\begin{aligned}
 2\omega \frac{d\omega}{dk} &= c^2 \cdot (2k) \\
 v_g = \frac{d\omega}{dk} &= \frac{2c^2 k}{2\omega} \\
 v_g &= \frac{c^2}{\omega} \cdot \left(\pm \frac{\omega}{c} \right), \\
 v_g &= \pm c,
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

por lo tanto, la velocidad de grupo para este caso se observa que es $\pm c$, independiente de la frecuencia.

2.10 DIFERENCIAS FINITAS

En toda la secuencia de expresiones de diferencias finitas se debe entender que P_i^n denota el campo calculado en punto espacial $x_i = i\Delta x$ y en el punto temporal $t_n = n\Delta t$, donde Δx denota el paso espacial en la malla y Δt el paso temporal, i, n corren desde $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, representan la discretización del espacio-tiempo. Consideremos la expansión en series de Taylor de $P(x, t_n)$ desde el punto x_i en el espacio al punto $x_i + \Delta x$, manteniendo el tiempo fijo en t_n :

$$\begin{aligned}
 P(x_i + \Delta x) \Big|_{t_n} &= P \Big|_{x_i, t_n} + \Delta x \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \Big|_{x_i, t_n} \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \Big|_{\xi_1, t_n},
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

el último término es el residuo o el de error, aquí ξ_1 es un punto localizado en el espacio en alguna parte del intervalo $(x_i, x_i + \Delta x)$. Similarmente, se considera la expansión en series de Taylor del punto $x_i - \Delta x$, de nuevo manteniendo el tiempo fijo t_n :

$$\begin{aligned}
 P(x_i - \Delta x) \Big|_{t_n} &= P \Big|_{x_i, t_n} - \Delta x \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \Big|_{x_i, t_n} \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \Big|_{\xi_2, t_n},
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

de nuevo el ultimo termino es el residuo, ξ_2 es un punto localizado en el espacio en un intervalo de $(x_i, x_i - \Delta x)$. Ahora sumando las ecuaciones (2.69) y (2.70), se obtiene

$$P(x_i + \Delta x) \Big|_{t_n} + P(x_i - \Delta x) \Big|_{t_n} = 2P \Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} + \frac{(\Delta x)^4}{12} \cdot \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \Big|_{\xi_3, t_n}, \quad (2.71)$$

por el teorema del valor medio, ξ_3 es un punto en el espacio localizado en el intervalo $(x_i - \Delta x, x_i - \Delta x)$. Reorganizando términos, se obtiene

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} = \left[\frac{P(x_i + \Delta x) - 2P(x_i) + P(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \right]_{t_n} + O[(\Delta x)^2], \quad (2.72)$$

donde $O[(\Delta x)^2]$ la notación del termino de error, que se aproxima a cero cuando el cuadrado del espacio incrementa. La ecuación (2.72) es denominada la aproximación en diferencias centradas de la segunda derivada espacial de P con una precisión de segundo orden. Por conveniencia, se adoptara el subíndice i para la posición y superíndice n para el punto de observación en el tiempo. La ecuación puede ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_n} = \frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]. \quad (2.73)$$

Para la segunda derivada temporal, se mantiene fijo x_i y se expande P en el tiempo hacia adelante y hacia atrás en series de Taylor. Por analogía de la ecuación (2.73), se obtiene la aproximación en diferencias centradas con precisión de segundo orden la segunda derivada parcial en el tiempo de P .

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \Big|_{x_i, t_n} = \frac{P_i^{n+1} - 2P_i^n + P_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2], \quad (2.74)$$

2.11 APROXIMACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA ESCALAR

En esta sección se determina el esquema numérico de la ecuación de onda 1-D, para esto se sustituye los operadores espaciales y temporales en diferencias centradas (2.73) y (2.74) en la ecuación de onda escalar unidimensional (2.62), se obtiene:

$$\frac{P_i^{n+1} - 2P_i^n + P_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2] = c^2 \left(\frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \right). \quad (2.75)$$

Esta es la aproximación de la ecuación de onda escalar con una precisión de segundo orden tanto en espacio y tiempo, $O[(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2]$. Dejando a un lado los términos de error de la serie de Taylor y solucionando para el último valor de P en el punto i de la malla, se logra:

$$P_i^{n+1} \cong (c\Delta t)^2 \left[\frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + 2P_i^n - P_i^{n-1}, \quad (2.76)$$

la ecuación (2.76), representa el esquema numérico para la ecuación de onda acústica 1-D, que se presenta en la figura 9, en donde se utilizaron los siguientes parámetros: un paso espacial de $\Delta x = 0,9[m]$ paso temporal de $\Delta t = 0,8[s]$ velocidad $v = 1[m/s]$ número de *courant* $G = 0,9$ y número de puntos $N = 5000$.

2.12 ESTABILIDAD NUMÉRICA

Logrado el esquema numérico en diferencias finitas descrito en la ecuación (2.76), se debe evitar que los errores en la solución crezcan indefinidamente, para esto se debe realizar este tipo de análisis, para esto se considera una solución del tipo de onda sinusoidal que se propaga en el espacio unidimensional de la siguiente forma:

$$P_i^n = P_0 e^{j(n\omega\Delta t - ik_x\Delta x)}, \quad (2.77)$$

donde $j = \sqrt{-1}$, ω la frecuencia angular, k_x es la componente en el eje x del vector de onda \vec{k} , por otra parte, la frecuencia angular se define como $\omega = \omega_{real} + i\omega_{imag}$, entonces la ecuación (2.77) puede presentar tres fenómenos:

$\omega_{imag} = 0$. Onda con amplitud constante en el tiempo.

$\omega_{imag} > 0$. Onda con amplitud decayendo exponencialmente con el tiempo.

$\omega_{imag} = 0$. Onda con amplitud aumentando exponencialmente con el tiempo.

Sustituyendo la ecuación (2.77) en la ecuación (2.76).

$$\begin{aligned} P_0 e^{j(\omega(n+1)\Delta t - \bar{k}i\Delta x)} &= \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[P_0 e^{j(\omega n\Delta t - \bar{k}(i+1)\Delta x)} - 2P_0 e^{j(\omega n\Delta t - \bar{k}i\Delta x)} \right] \\ &+ \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[P_0 e^{j(\omega n\Delta t - \bar{k}(i-1)\Delta x)} \right] \\ &+ 2P_0 e^{j(\omega n\Delta t - \bar{k}i\Delta x)} - 2P_0 e^{j(\omega(n-1)\Delta t - \bar{k}i\Delta x)}, \end{aligned}$$

dividiendo ambos lados de la ecuación por $e^{j(\omega n\Delta t - \bar{k}i\Delta x)}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{j\omega\Delta t} &= \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(e^{-j\bar{k}\Delta x} - 2 + e^{j\bar{k}\Delta x} \right) + 2 - e^{-j\omega\Delta t}, \\ \frac{e^{j\omega\Delta t} + e^{-j\omega\Delta t}}{2} &= \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(\frac{e^{j\bar{k}\Delta x} + e^{-j\bar{k}\Delta x}}{2} - 1 \right) + 1, \end{aligned} \quad (2.78)$$

realizando un desarrollo matemático (ver Apéndice 6), se obtiene:

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = c\Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \right]^{1/2}, \quad (2.79)$$

La ecuación (2.79) es conocida como la relación de dispersión numérica para la ecuación de onda 1-D, se puede reescribir de la siguiente manera, despejando ω de la ecuación (2.79) se obtiene:

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1}(\zeta), \quad (2.80)$$

donde

$$\zeta = c\Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \right]^{1/2}, \quad (2.81)$$

a partir de la ecuación (2.81), se puede concluir que para cualquier valor real del número de onda, se cumple:

$$0 \leq \zeta \leq c\Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \right]^{1/2} \equiv \zeta_S, \quad (2.82)$$

el valor de ζ_S es obtenido cuando cada término del argumento del \sin^2 de la ecuación (2.81) toma su valor máximo, es decir igual a uno. Dependiendo del valor que acompaña a Δt , o el valor de ζ_S puede ser menor a 1, generando valores complejos del \sin^{-1} en (2.80), por tanto los valores de frecuencia angular ω complejos que pueden generar estabilidad numérica. De esta forma se tienen dos opciones:

1. Región estable: $0 \leq \zeta \leq 1$.

Situación en la cual la parte imaginaria de la frecuencia angular compleja es nula, permitiendo que la ecuación (2.77) represente una onda con amplitud constante en el tiempo.

2. Región inestable $1 \leq \zeta \leq \zeta_S$.

Esta situación ocurre cuando:

$$\zeta_S = c\Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \right]^{1/2} > 1. \quad (2.83)$$

Otra forma de definir la inestabilidad numérica es:

$$\Delta t > \frac{1}{c \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \right]^{1/2}} \equiv \Delta t_{estable},$$

$$\Delta t > \frac{\Delta x}{c}. \quad (2.84)$$

La condición de estabilidad significa en este caso, que el paso de tiempo δt , no puede ser mayor que el tiempo necesario para cualquier perturbación al propagarse en un paso espacial δx . Una vez fijado δx , con la condición de estabilidad se escoge δt para que el esquema sea estable.

2.13 RELACIÓN DE DISPERSIÓN NUMÉRICA

El procedimiento usado en la sección 2.9 puede ser aplicado para conocer la condición de dispersión numérica en la aproximación en diferencias finitas para la ecuación de onda escalar unidimensional dada por la ecuación (2.76). Para esto se considera una onda sinusoidal dada por la expresión (2.64) con frecuencia angular ω , discretizada en la malla en espacio y tiempo (x_i, t_n) . Así, $\tilde{k} = \tilde{k}_{real} + j\tilde{k}_{imag}$ es el posible valor numérico complejo del número de onda. Entonces, la ecuación (2.64) se convierte en:

$$P_i^n = e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k} i \Delta x)} = e^{[j\omega n \Delta t (\tilde{k}_{real} + j\tilde{k}_{imag}) i \Delta x]} = e^{\tilde{k}_{imag} i \Delta x} e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k}_{real} i \Delta x)}. \quad (2.85)$$

En general, \tilde{k} difiere del sentido físico de número de onda k . Esta diferencia, es llamada dispersión numérica, puede dar lugar a amplitudes de onda y velocidades que se alejan de los valores exactos. La ecuación (2.85) permite ya sea una onda con amplitud constante en el espacio ($\tilde{k}_{imag} = 0$), un decrecimiento exponencial de la amplitud de la onda respecto a la posición ($\tilde{k}_{imag} < 0$) o un incremento exponencial en la amplitud de la onda en relación con la posición ($\tilde{k}_{imag} > 0$). Para determinar este valor de \tilde{k} se sustituye la ecuación (2.76) en la ecuación (2.85).

$$e^{j(\omega(n+1)\Delta t - \tilde{k} i \Delta x)} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k}(i+1)\Delta x)} - 2e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k} i \Delta x)} + e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k}(i-1)\Delta x)} \right] + 2e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k} i \Delta x)} - 2e^{j(\omega(n-1)\Delta t - \tilde{k} i \Delta x)}, \quad (2.86)$$

factorizando el termino $e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k} i \Delta x)}$ ambos lados.

$$e^{j\omega \Delta t} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(e^{-j\tilde{k}\Delta x} - 2 + e^{j\tilde{k}\Delta x} \right) + 2 - e^{-j\omega \Delta t}, \quad (2.87)$$

agrupando los términos que contienen x y t ambos lados, y dividiendo en 2 se tiene:

$$\frac{e^{j\omega \Delta t} + e^{-j\omega \Delta t}}{2} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(\frac{e^{j\tilde{k}\Delta x} + e^{-j\tilde{k}\Delta x}}{2} - 1 \right) + 1. \quad (2.88)$$

Aplicando la identidad de Euler de los exponenciales complejos, se obtiene la relación de dispersión correspondiente a la (2.76).

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2},$$

así,

$$\cos(\omega\Delta t) = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (\cos(\tilde{k}\Delta x) - 1) + 1, \quad (2.89)$$

despejando \tilde{k} ,

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 [\cos(\omega\Delta t) - 1] \right]. \quad (2.90)$$

Además, la relación de dispersión de la ecuación (2.90) es más complicada que la obtenida en (2.66). Sin embargo, se puede usar la (2.90) para obtener información acerca de la naturaleza de la solución numérica en la malla representada por (2.85). Se pueden considerar tres casos:

Caso 1: Muestreo fino en tiempo y espacio ($\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$)

En este caso, Se parte de la ecuación (2.90) y se asume una condición de fina de muestreo en el tiempo, tal que el argumento del coseno $\omega\Delta t$ se aproxima a cero. Esto permite aplicar series de Taylor al coseno:

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 \left[1 - \frac{(\omega\Delta t)^2}{2} - 1 \right] \right],$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (\Delta x)^2 \right] = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} (k\Delta x)^2 \right], \quad (2.91)$$

donde el número de onda en el espacio libre es definido como $k = \omega/c$. Como $k\Delta x$ también se aproxima a cero bajo la condición de asumir un muestreo fino, se tiene que el término en la aproximación en series de Taylor se aproxima a un

coseno. Por tanto lo que resulta de la ecuación (2.91) es:

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} (k \Delta x) = k \quad (2.92)$$

Se puede observar que el valor numérico del número de onda \tilde{k} en la ecuación (2.92) es exactamente al número de onda en el espacio libre. Esto último proporciona una velocidad de fase (v_f) y una velocidad de grupo (v_g) igual a la velocidad c independiente del valor de ω es decir, un medio sin dispersión. Por tanto, se infiere que la solución numérica es un caso sin dispersión. También se puede intuir que en el límite donde el espacio y el tiempo incrementan, la aproximación en diferencias finitas tiende a cero, es decir la solución numérica se acerca a la solución exacta.

Caso 2: Paso de tiempo y espacio equivalentes ($c\Delta t = \Delta x$)

En este caso, se sustituye el paso de malla en la relación de dispersión dada por la ecuación (2.91).

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \frac{1}{\Delta t} \cos^{-1} [\mathcal{X} + \cos(\omega\Delta t) - \mathcal{X}] \\ \tilde{k} &= \frac{1}{\Delta t} \cos^{-1} [\cos(\omega\Delta t)], \\ \tilde{k} &= \frac{\omega\Delta t}{c\Delta x} = k. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Precisamente como en el caso 1, el número de onda numérico \tilde{k} es exactamente el número de onda en el espacio libre y la solución numérica es exacta. Sin embargo, contrario al caso 1, esto no es intuitivo dado que esto implica que la solución numérica es exacta dependiendo de los cambios en el incremento de espacio y tiempo.

Caso 3: Dispersión en la propagación de la onda

La solución general es la ecuación (2.91) donde el error por dispersión numérica existe. Estableciendo que la resolución en el paso de la malla es directamente

proporcional a la velocidad fase, es muy útil resolver la ecuación (2.91) para un caso en general de Δt y Δx . Por tanto:

$$S = \frac{c\Delta t}{\Delta x}, \quad (2.94)$$

donde S es factor de estabilidad numérica o (número de *Courant*). Además, se define:

$$N_\lambda = \frac{\lambda_0}{\Delta x}. \quad (2.95)$$

Esto significa un muestreo en la malla en las celdas del espacio para una longitud de onda en el espacio libre. Es válido aclarar que N_λ es definido en términos de resolver la longitud de onda física λ_0 y no de la longitud de onda numérica $\tilde{\lambda}$ de la malla del método de diferencias finitas. Entonces la ecuación (2.87) puede ser escrita:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[1 + \left(\frac{1}{S} \right)^2 \left(\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1}(\zeta) \\ \tilde{k} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\zeta) \right] \end{aligned} \quad (2.96)$$

donde ζ es:

$$\zeta = 1 + \left(\frac{1}{S} \right)^2 \left(\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right). \quad (2.97)$$

En este caso, la ecuación (2.97) puede demostrar que los valores de \tilde{k} pueden ser reales o complejos. El valor es complejo cuando $\zeta = -1$. Solucionando esta transición para N_λ , la transición resulta ser:

$$\begin{aligned} -1 &= 1 + \left(\frac{1}{S} \right)^2 \left(\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right) \\ \cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) &= -2S^2 + 1 \\ \frac{2\pi S}{N_\lambda} &= \cos^{-1}(1 - 2S^2), \\ N_\lambda \Big|_{transic} &= \frac{2\pi S}{\cos^{-1}(1 - 2S^2)}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Para un muestreo fino en la malla $N_\lambda > N_\lambda|_{transic}$, \tilde{k} es un número real y la onda numérica no sufre atenuación mientras se propaga en la malla. Aquí, la velocidad de fase numérica \tilde{v}_f es menor que en la velocidad de fase para un espacio libre con velocidad c . Para un muestreo grande $N_\lambda < N_\lambda|_{transic}$, \tilde{k} es un número complejo y la onda numérica sufre un decaimiento exponencial mientras se propaga, donde no tiene sentido físico. Además, en el régimen de malla grande la velocidad de fase v_f puede superar a c . La figura 11, presenta la variación del número de onda numérico (\tilde{k}) y la velocidad de fase v_f con respecto a la densidad de muestreo N_λ tanto por encima como por debajo del número de muestreo de transición y del número de onda complejo. Por lo tanto, si se sustituye la ecuación (2.96) para el valor de $N_\lambda \geq 3$, se obtiene:

$$\tilde{k}_{real} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[1 + 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) - 1 \right) \right], \quad \tilde{k}_{imag} = 0. \quad (2.99)$$

La velocidad de fase numérica está dada por:

$$\tilde{v}_f = \frac{\omega}{\tilde{k}_{real}} = \frac{2\pi f \Delta x}{\cos^{-1} \left[1 + 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) - 1 \right) \right]}, \quad (2.100)$$

donde

$$2\pi f \Delta x = 2\pi f \left(\frac{\lambda_0}{N_\lambda} \right) = c.$$

Reescribiendo la ecuación (2.100),

$$\tilde{v}_f = \frac{2\pi}{N_\lambda \cdot \cos^{-1} \left[1 + 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) - 1 \right) \right]} \cdot c. \quad (2.101)$$

Para la densidad de muestreo $N_\lambda < 3$, se tiene que el número de onda es complejo, resultando ser $\zeta = -1$ en la ecuación (2.96). Entonces la relación para la función $\sin^{-1}(\zeta)$ es:

$$\sin^{-1}(\zeta) = -j \ln(j\zeta + \sqrt{1 - \zeta^2}), \quad (2.102)$$

sustituyendo la ecuación (2.102) en (2.96), se obtiene:

$$\begin{aligned}\tilde{k} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln(j\zeta + \sqrt{1 - \zeta^2}) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln(j\zeta + j\sqrt{\zeta^2 - 1}) \right],\end{aligned}\quad (2.103)$$

factorizando $j = e^{+j\pi/2}$, en el argumento del logaritmo natural, se obtiene:

$$\begin{aligned}\tilde{k} &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\pi}{2} + j \ln \left((\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{+j\pi/2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln \left((-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{+j\pi/2} \right) \right],\end{aligned}\quad (2.104)$$

asumiendo la multiplicación de la función exponencial con el logaritmo natural, se obtiene:

$$\begin{aligned}\tilde{k} &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\pi}{2} + j \ln \left((\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) - j \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\pi + j \ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right],\end{aligned}\quad (2.105)$$

donde:

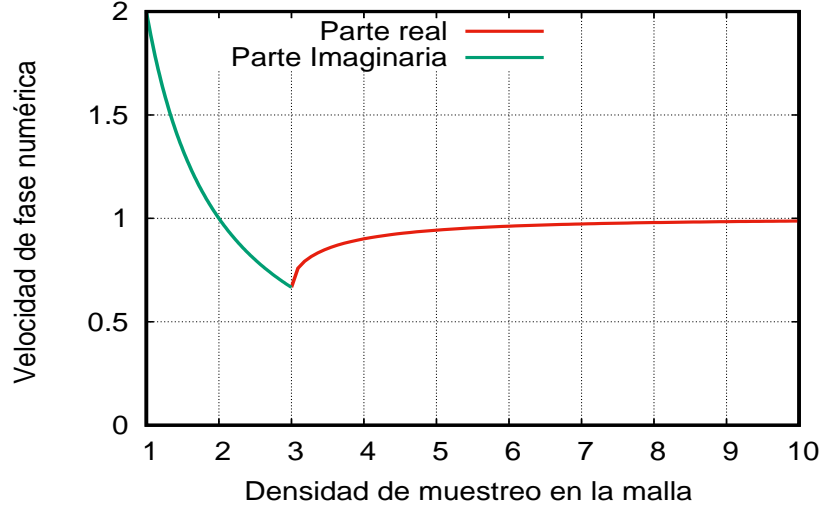
$$\tilde{k}_{real} \frac{\pi}{\Delta x}, \quad \tilde{k}_{imag} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right).$$

Por lo tanto la velocidad de fase para este caso sera:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_f &= \frac{\omega}{\tilde{k}_{real}} = \frac{\omega}{(\pi/\Delta x)}, \\ &= \frac{2\pi f \Delta x}{\pi}, \\ &= \frac{2f \lambda_0}{N_\lambda}, \\ \\ \frac{\tilde{v}_f}{c} &= N_\lambda,\end{aligned}\quad (2.106)$$

La gráfica de error relativo entre la velocidad de fase en un medio no dispersivo c y la velocidad de fase numérica presentada en la ecuación (2.101), para factor de estabilidad $S = 0,5$ es presentada en la figura 12. Por lo tanto, para el caso de la ecuación de onda acústica 1-D, se sustituye la solución propuesta en la ecuación (2.77) y se reemplaza en la ecuación diferencial de onda (2.62), se aplica el operador diferencial en la parte temporal y se deriva de forma estándar

Figura 11: Variación de la velocidad de fase numérica en función de la densidad de muestreo de la grilla para $S = 0,5$ y $N_\lambda|_{transic} = 3$, donde la función en rojo es \tilde{k}_{real} y la función en verde representa \tilde{k}_{imag} .



la parte espacial, obteniendo:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2},$$

$$\frac{P_0 e^{j((n+1)\omega\Delta t - k_x \Delta x)} - 2P_0 e^{j(n\omega\Delta t - k_x \Delta x)} + P_0 e^{j((n-1)\omega\Delta t - k_x \Delta x)}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{\partial P}{\partial(\Delta x)},$$

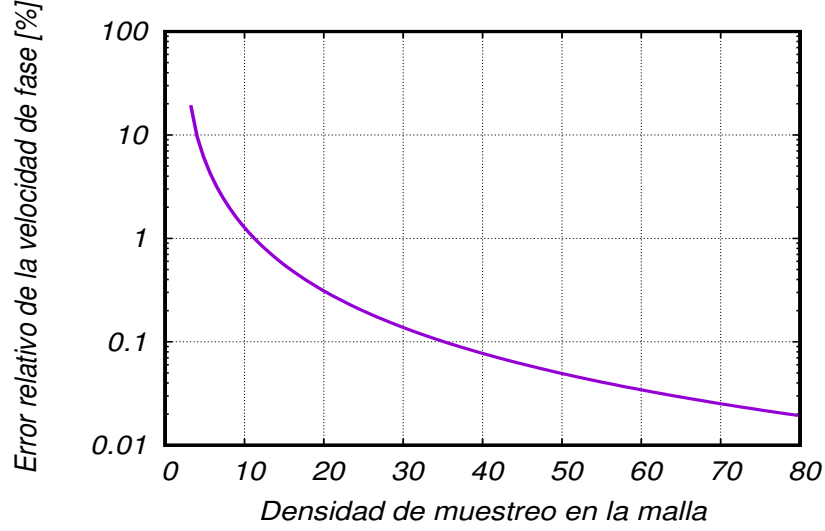
$$\frac{P_0 e^{j((n+1)\omega\Delta t - k_x \Delta x)} - 2P_0 e^{j(n\omega\Delta t - k_x \Delta x)} + P_0 e^{j((n-1)\omega\Delta t - k_x \Delta x)}}{(\Delta t)^2} = -c^2 k_x^2 e^{j(n\omega\Delta t - k_x \Delta x)}.$$

Dividiendo sobre $e^{j(n\omega\Delta t - k_x \Delta x)}$,

$$\frac{2P_0(e^{j\omega\Delta t} + e^{-j\omega\Delta t})}{2(\Delta t)^2} - 2P_0 = -c^2 k_x^2,$$

$$2P_0 \left[\frac{\cos(\omega\Delta t) - 1}{(\Delta t)^2} \right] = -c^2 k_x^2.$$

Figura 12: Porcentaje de error relativo de la velocidad de fase para el espacio libre c contra la velocidad de fase numérica en función de la densidad de muestreo en la malla $3 \leq N_\lambda \leq 80$ para un factor de estabilidad $S = 0,5$.

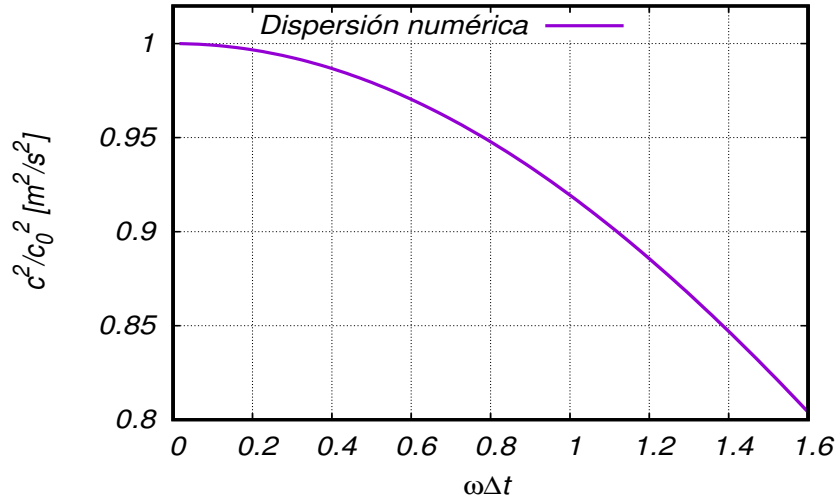


Recordando la identidad $\cos(\theta) - 1$, y sustituyendo la expresión $k_x^2 = \omega^2/c_0^2$, se logra:

$$\begin{aligned} \frac{2P_0(e^{j\omega\Delta t} + e^{-j\omega\Delta t})}{2(\Delta t)^2} - 2P_0 &= -c^2 k_x^2, \\ 2P_0 \left[\frac{\cos(\omega\Delta t) - 1}{(\Delta t)^2} \right] &= -\frac{c^2 \omega^2}{c_0^2}, \\ 4P_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{(\omega\Delta t)^2} &= \frac{c^2}{c_0^2}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Finalmente, se presenta el diagrama de dispersión numérica para cualquier valor de Δt (Ver figura 13), y el diagrama para distintos valores de Δt (Ver figura 14). Igualmente, se puede obtener un nuevo diagrama de dispersión pero esta vez en función del cociente entre la velocidad del fase y la velocidad del medio $\frac{v_f}{c}$ para un medio isótropo contra el producto del número de onda con el paso espacial en la malla ($k_x \Delta x$). Para obtener este diagrama sustituye la ecuación (2.81) en la

Figura 13: Diagrama de dispersión numérica para un esquema de segundo orden.



ecuación (2.80).

$$\omega = \frac{2}{\delta t} \sin^{-1} \left(c\Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right]^{1/2} \right). \quad (2.108)$$

Dividiendo sobre k y la velocidad del medio c , la anterior ecuación y recordando la relación entre la velocidad de fase con la frecuencia angular, se sustituye la velocidad de fase en la ecuación (2.108).

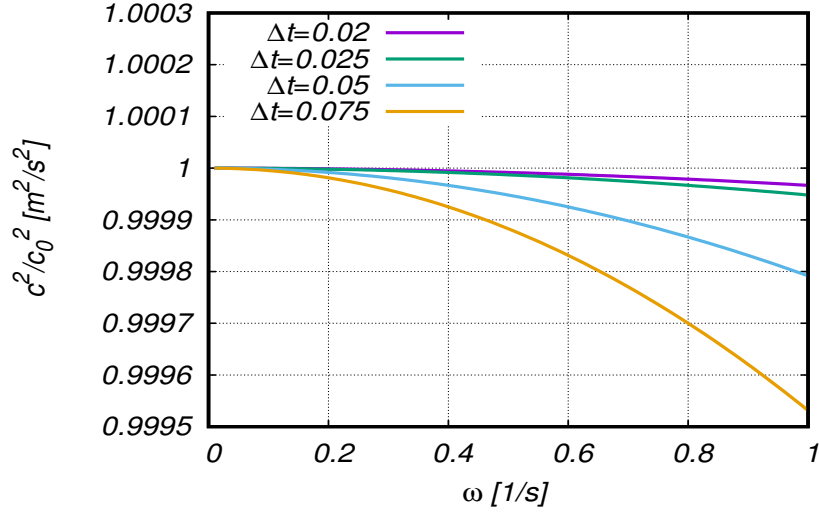
$$v_f = \frac{\omega}{k},$$

$$\frac{v_f}{c} = \frac{\omega}{c \cdot k}$$

$$\frac{v_f}{c} = \frac{2}{ck \cdot \Delta t} \sin^{-1} \left(c\Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right]^{1/2} \right).$$

Logrando finalmente la relación entre la velocidad de fase y la velocidad del medio v_f/c para la ecuación de onda unidimensional, la ecuación que se presenta a

Figura 14: Diagrama de dispersión numérica para un esquema de segundo orden, para distintos valores de Δt .



continuación fue previamente obtenida por Kosloff et al. (1990).

$$\frac{v_f}{c} = \frac{2}{ck \cdot \Delta t} \sin^{-1} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right),$$

$$\frac{v_f}{c} = \frac{2}{ck \cdot \Delta t} \sin^{-1} \left(\alpha \sin \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right), \quad (2.109)$$

pero el término $c \cdot \Delta t = \Delta$, por lo tanto.

$$\frac{v_f}{c} = \frac{2}{k\Delta x} \sin^{-1} \left(\alpha \sin \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right), \quad (2.110)$$

donde

$$\alpha = \frac{c\Delta t}{\Delta x}. \quad (2.111)$$

La gráfica 15, presenta el comportamiento de la velocidad de fase normalizada para distintos valores del parámetro α al variar $k_x \Delta x$. Se refiere por velocidad normalizada el cociente entre la velocidad de fase para cualquier valor ($k_x \Delta x$)

con el valor mínimo de la velocidad de fase, como se presenta a continuación.

$$\frac{\left| \frac{v_f(k_x \Delta x)}{c} \right|}{\left| \frac{v_f(0)}{c} \right|} = \frac{v_f(k_x \Delta x)}{\frac{c}{v_f(0)}}.$$

Para conocer el valor de $v_f(0)/c$, se aplica el limite cuando $k_x \Delta x \rightarrow 0$. Por tanto:

$$\frac{v_f(0)}{c} = \lim_{k_x \Delta x \rightarrow 0} \frac{v_f(k_x \Delta x)}{c},$$

$$\lim_{k_x \Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{k \Delta x} \sin^{-1} \left(\alpha \sin \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right).$$

Pero cuando el argumento $k_x \Delta x$ la función resulta indeterminada, es decir 0/0, por tanto se le aplica *L'Hopital* para remover la indeterminación.

$$\lim_{k_x \Delta x \rightarrow 0} \frac{d}{d(k \Delta x)} \left[\frac{2 \sin^{-1} \left(\alpha \sin \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right)}{k \Delta x} \right],$$

$$\lim_{k_x \Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\sqrt{1 - \alpha \sin \frac{k_x \Delta x}{2}} \right)^{-1} \cdot \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right)}{1},$$

evaluando el límite resulta:

$$\lim_{k_x \Delta x \rightarrow 0} \frac{v_f(k_x \Delta x)}{c} \approx \alpha,$$

así,

$$\frac{v_f(0)}{c} = \alpha.$$

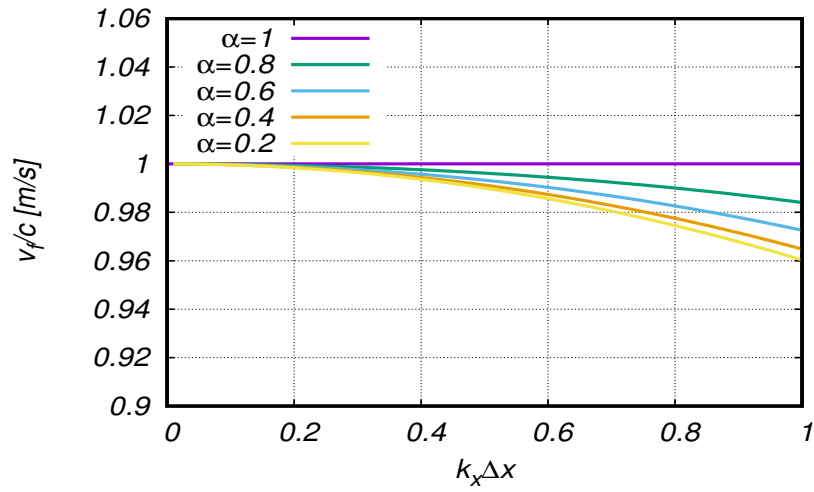
Por lo tanto, la velocidad de fase normalizada se define de la siguiente manera y se gráfica a continuación:

$$v_f(k_x \Delta x)_{norm.} = \frac{2}{\alpha \cdot k \Delta x} \sin^{-1} \left(\alpha \sin \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right). \quad (2.112)$$

De este modo, se puede observar que para el valor $\alpha = 1$ no existe dispersión numérica (Ver figura 15), dado que la velocidad de fase es igual a la velocidad

del medio $v_f = c$, para valores ($\alpha < 1$) la velocidad de fase normalizada decrece a medida que $k_x \Delta x$ aumenta resultando dispersión numérica para estos casos.

Figura 15: Diagrama de dispersión numérica para un esquema de segundo orden, para distintos valores de α .



Capítulo

3

ECUACIONES ACOPLADAS PARA MODELADO SÍSMICO EN MEDIOS CON ANISOTROPÍA VTI/TTI

Este capítulo presenta las ecuaciones diferenciales parciales acopladas para medios acústicos con anisotropía polar vertical (VTI) e inclinada (TTI) presentadas por distintos autores como Alkhalifah (2000), Zhang et al. (2005), Huang et al. (2011), Du et al. (2008) y Fletcher et al. (2008). Al inicio de este capítulo se deduce la ecuación de onda para medios acústicos con anisotropía polar o VTI, obtenida a partir de la relación de dispersión para un medio elástico con anisotropía VTI (ver Apéndice 6), en el caso de Fletcher et al. (2008), la ecuación se determina aplicando una rotación al vector de onda por medio de la matriz de rotación R , donde se obtiene una nueva relación de dispersión para deducir finalmente la ecuación de onda acústica acoplada, pero en este caso en un medio con anisotropía polar inclinada.

3.1 ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA PARA MEDIOS CON ANISOTROPÍA TIPO VTI PROPUESTA POR ALKHALIFAH

La ecuación de onda se deduce partiendo de la hipótesis acústica para la onda P en medios con anisotropía polar vertical o VTI (Isotropía transversalmente vertical) y anisotropía polar inclinada o TTI (Isotropía transversalmente inclinada), adquiriendo una buena aproximación, similar a la de la ecuación de onda elástica en un medio VTI. Las soluciones del campo de onda que se obtienen utilizando la ecuación de onda acústica en medios VTI, son independientes de ondas de corte, es decir de ondas S . Por lo tanto, las ecuaciones que asumen la hipótesis acústica, es decir, donde la velocidad de la onda de corte es igual a cero, son más simples que las ecuaciones en medios elásticos, adquiriendo una mejor descripción de la onda en el tiempo de viaje y amplitudes.

3.1.1. Aproximación de la velocidad de fase para medios acústicos con anisotropía polar vertical

La ecuación (2.45) se puede reescribir considerando $V_{s0} = 0$, y de esta forma obtener la velocidad de fase para un medio acústico homogéneo con anisotropía tipo VTI, en términos de los parámetros de Thomsen y la componente de la onda P en dirección paralela al eje de simetría vertical (Du, 2007):

$$\frac{V(\theta)}{V_{p0}} = \frac{1}{2} + \varepsilon \sin^2 \theta \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta)^2 - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}. \quad (3.1)$$

3.1.2. Aproximación de la velocidad de fase para medios acústicos con anisotropía polar inclinada

Similarmente para un medio TTI según la ecuación (2.47) se obtiene:

$$\frac{V(\theta, \phi)}{V_{p0}^2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2(\theta - \phi))^2 - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi)} + \frac{1}{2} + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi). \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) esta expresada en términos del ángulo θ , el ángulo de inclinación ϕ de los parámetros de anisotropía y la velocidad de la onda P en dirección paralela al eje de simetría V_{p0} .

3.1.3. Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar vertical e inclinada

Las curvas de aproximación de velocidad de fase para medios acústicos se obtienen según las ecuaciones (3.1) y (3.2), estas curvas son obtenidas para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar vertical (VTI), considerando los siguientes valores para las velocidades $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, los parámetros de anisotropía de Thomsen $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$. Las curvas se presentan para diferentes valores de ϕ , para un ángulo $\phi = 30$, $\phi = 45$, $\phi = 60$ y $\phi = 90$ (ver Figuras 16-20).

3.1.4. Deducción de la ecuación de onda.

Se deriva la ecuación de onda acústica a partir de la velocidad de fase para un medio elástico VTI, donde esta fue deducida en el capítulo (3) en la ecuación (2.45) (Tsvankin, 1996), donde se relacionan las componentes verticales del *slowness* p_z con las componentes horizontales p_r para un medio VTI, basándose

Figura 16: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$ en un medio VTI.

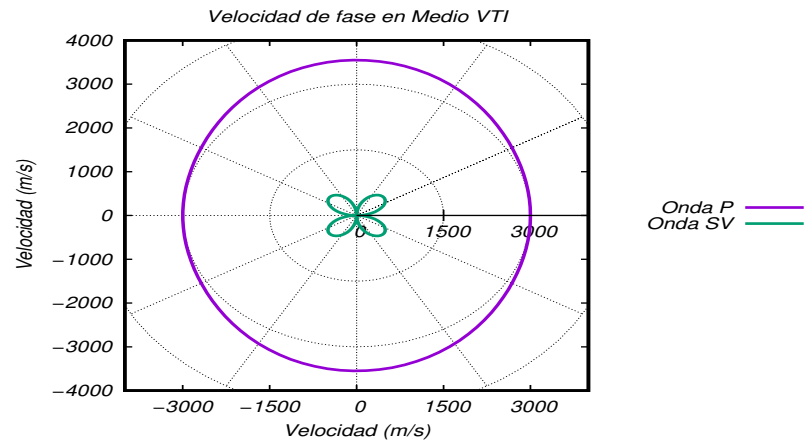
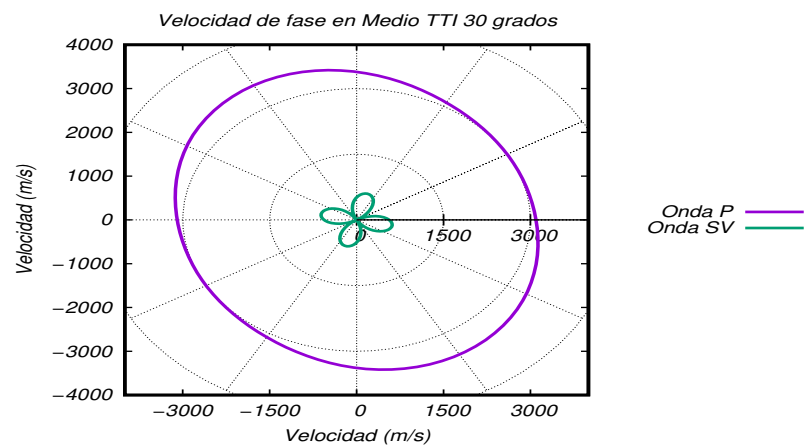


Figura 17: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 30$ grados en un medio TTI.



en el ajuste de la velocidad de la onda de corte ($V_{s0} = 0$) (White, 1983). Como resultado en la ecuación (22), se obtiene la relación de dispersión en migración

Figura 18: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 45$ grados en un medio TTI.

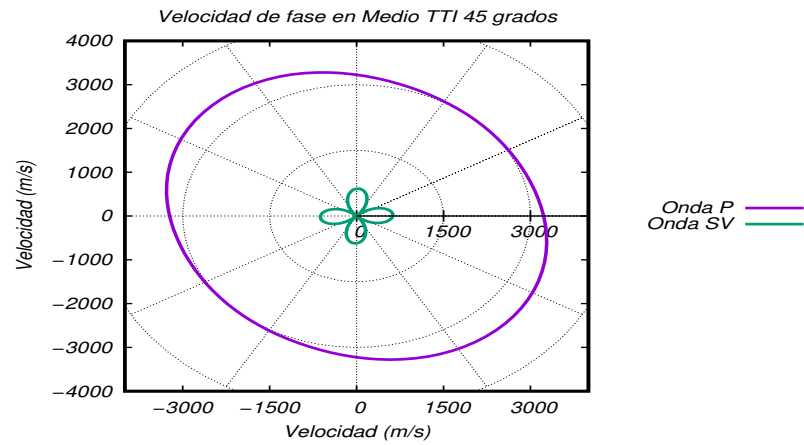


Figura 19: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 60$ grados en un medio TTI.

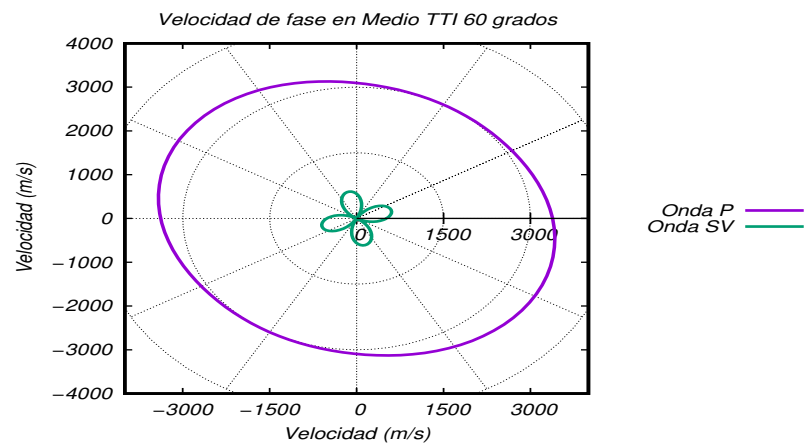
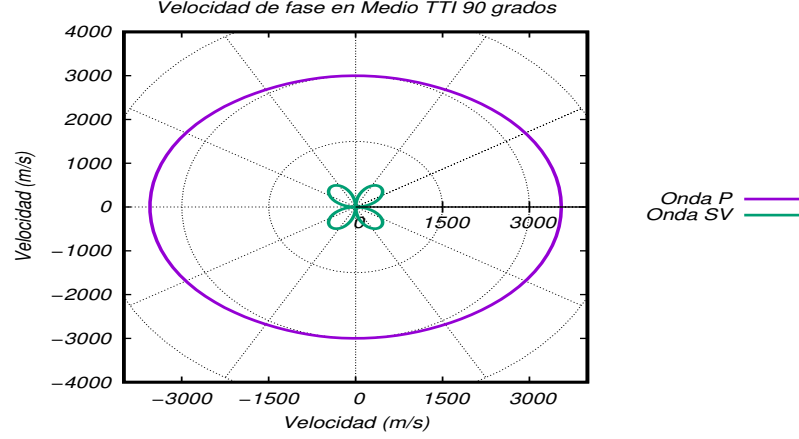


Figura 20: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 90$ grados en un medio TTI.



en medios 2-D, deducida en el capítulo (6).

$$p_z^2 = \frac{V_{p0}^2(1+2\delta)}{V_{p0}^2} \left[\frac{1}{V_{p0}^2(1+2\delta)} - \frac{p_x^2}{1-2V_{p0}^2(\varepsilon-\delta)p_x^2} \right]$$

de forma equivalente,

$$p_z^2 = \frac{v_n^2}{V_{p0}^2} \left(\frac{1}{v_n^2} - \frac{p_x^2}{1-2v_n^2\eta p_x^2} \right). \quad (3.3)$$

Asumiendo que cada parámetro v_n , V_{p0} y η son constantes y utilizando $k = \frac{\omega}{v}$, donde $\vec{\mathbf{k}}$ es el vector de onda con componentes cartesianas (k_x, k_y, k_z) y ω es la frecuencia angular, se logra reescribir la ecuación (3.3) en función de k_x , k_z y ω como se describe en la ecuación (15):

$$k_z^2 = \frac{V_{p0}^2(1+2\delta)}{V_{p0}^2} \left[\frac{\omega^2}{V_{p0}^2(1+2\delta)} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2V_{p0}^2(\varepsilon-\delta)k_x^2} \right].$$

La anterior ecuación puede ser escrita en función de los parámetros v_n , η , así:

$$k_z^2 = \frac{v_n^2}{V_{p0}^2} \left(\frac{\omega^2}{v_n^2} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2v_n^2 \eta k_x^2} \right). \quad (3.4)$$

Obtenida la relación de dispersión en función de las componentes del número de onda k_x y k_z , se reduce a la ecuación (18).

$$\omega^4 - [(2\eta + 1)v_n^2 k_x^2 + V_{p0}^2 k_z^2] \omega^2 + 2V_{p0}^2 v_n^2 \eta k_x^2 k_z^2 = 0,$$

A partir de esta relación en el dominio de frecuencia angular y numero de onda (k_x, k_z, ω) se procede a llevar a un dominio espacio y tiempo (x, z, t) , por medio de la aplicación de la transformada de Fourier inversa y se multiplica ambos lados por el campo de onda $F(x, z, t)$. Por lo tanto, las representaciones son de la siguiente forma:

$$k_x \rightarrow -i\partial/\partial x, \quad k_y \rightarrow -i\partial/\partial y, \quad k_z \rightarrow -i\partial/\partial z.$$

Así, la ecuación queda reescrita:

$$V_{p0}^2 \omega^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2\eta v_n^2 V_{p0}^2 \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} \right) + (1 + 2\eta) v_n^2 \omega^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + \omega^4 F = 0. \quad (3.5)$$

Ya que los parámetros del medio v_n , η y V_{p0} son independientes de k_x y k_z cuando $\omega \rightarrow \infty$, la ecuación de onda acústica en medios VTI es válida para medios heterogéneos como para medios homogéneos. La variación de v_n , V_{p0} y η respecto a la posición, como en el caso de isotropía (Aki et al., 1980) agregará términos en la ecuación (3.5). Estos términos para las longitudes de onda utilizadas en sismica influyen en los campos de onda, y estas se eliminan totalmente cuando $(\omega \rightarrow \infty)$ en medios homogéneos. Finalmente se aplica la transformación de Fourier inversa a $(\omega \rightarrow i\partial/\partial t)$, obteniendo la ecuación de onda acústica para un medio VTI.

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4} - (1 + 2\eta) v_n^2 \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = V_{p0}^2 \frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial t^2} - 2\eta v_n^2 V_{p0}^2 \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} \right), \quad (3.6)$$

La anterior es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden en el tiempo t . Ahora si se toma $\eta = 0$, se obtiene la ecuación acústica para un medio anisótropo elíptico con eje de simetría vertical, es decir cuando

$$\varepsilon = \delta$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - v_n^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - V_{p0}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = 0$$

Para reducir el orden de la derivada para una mayor simplicidad se sustituye por:

$$P = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

Así, la ecuación de onda acústica familiar de segundo orden para un medio anisótropo elíptico con eje de simetría vertical es:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v_n^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + V_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

Para un medio isótropo, V_{p0} es igual a v_n , por lo tanto la ecuación anterior se reduce a la ecuación de onda acústica para un medio isótropo.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = V_{p0}^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right)$$

Reescribiendo la ecuación (3.6) en términos de $P(x, z, t)$ en lugar de $F(x, z, t)$.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = (1 + 2\eta)v_n^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + V_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2\eta v_n^2 V_{p0}^2 \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} \right) \quad (3.8)$$

donde

$$F(x, y, z, t) = \int_0^t \int_0^{t'} P(x, y, z, t) d\tau d\tau' \quad (3.9)$$

Finalmente, las ecuaciones que se implementan numéricamente son presenta-

das a continuación:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= (1 + 2\eta)v_n^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + V_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2\eta v_n^2 V_{p0}^2 \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} \right) \\ P &= \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \end{aligned}} \quad (3.10)$$

Para el caso de la ecuación diferencial parcial en un medio acústico considerando anisotropía polar inclinada con ángulo ϕ (TTI) (Zhang et al., 2005) está dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= [V_{p0}^2 \sin^2 \phi + (1 + 2\eta) v_n^2 \cos^2 \phi] v_n^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \\ &+ [V_{p0}^2 \cos^2 \phi + (1 + 2\eta) v_n^2 \sin^2 \phi] \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \\ &+ [V_{p0}^2 - (1 + 2\eta) v_n^2] \sin(2\phi) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \\ &- V_{p0}^2 v_n^2 \eta (2 - 3 \sin^2(2\phi)) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} \\ &- \frac{1}{2} V_{p0}^2 v_n^2 \eta \sin^2(2\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} + v_{p0}^2 v_{nmo}^2 \eta \sin(4\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial z^3} \\ &- V_{p0}^2 v_n^2 \eta \sin(4\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial z} - \frac{1}{2} V_{p0}^2 v_n^2 \eta \sin^2(2\phi) \frac{\partial^4 F}{\partial x^4}, \end{aligned}} \quad (3.11)$$

donde v_{p0} , es la componente de la velocidad de la onda P en dirección del eje de simetría del medio, v_n es la velocidad NMO, η es el parámetro de anisotropía definido por Alkhalifah (ver ecuación 16), ϕ , es el ángulo de inclinación, θ , es el ángulo que forma el eje de simetría con la dirección de propagación, F es un campo auxiliar (ver ecuación 3.9), ε y δ son los parámetros de anisotropía (Thomsen, 1986).

3.1.5. Esquema numérico de la ecuación de onda.

Para construir los esquemas numéricos de la ecuación (3.10), se parte de los operadores derivadas deducidos en las ecuaciones(2.73) y (2.74). Sustituyendo los operadores en las ecuaciones (3.7) y (3.8) se logra para la ecuación (3.7),

$$\boxed{F_{i,j}^{n+1} = 2F_{i,j}^n - F_{i,j}^{n-1} + (\Delta t)^2 P_{i,j}^n.} \quad (3.12)$$

Para la ecuación (3.8),

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \underbrace{(1 + 2\eta)v_n^2}_a \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + \underbrace{V_{p0}^2}_b \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \underbrace{2\eta v_n^2 V_{p0}^2}_c \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} \right)$$

Llamaremos a , b y c a las constantes subrayadas para mayor simplicidad. Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + b \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - c \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} \right).$$

El operador para la segunda derivada cruzada es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} &= \frac{4F_{i,j}^n - 2(F_{i+1,j}^n + F_{i,j+1}^n + F_{i-1,j}^n + F_{i,j-1}^n) + F_{i+1,j+1}^n}{(\Delta x)^2 (\Delta z)^2} \\ &+ \frac{F_{i-1,j-1}^n + F_{i-1,j+1}^n + F_{i+1,j-1}^n}{(\Delta x)^2 (\Delta z)^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por lo tanto reemplazando en la ecuación (3.8), los operadores derivadas se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{P_{i,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} &= a \left(\frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + b \left(\frac{P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) \\ &+ c(4F_{i,j}^n - 2(F_{i+1,j}^n + F_{i,j+1}^n + F_{i-1,j}^n + F_{i,j-1}^n) + F_{i+1,j+1}^n \\ &+ F_{i+1,j-1}^n + F_{i-1,j+1}^n + F_{i-1,j-1}^n) \cdot \frac{1}{(\Delta x)^2 (\Delta z)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n-1} &= \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 [a \cdot (P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n)] \\ &+ \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 [b \cdot (P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n)] \\ &+ \left(\frac{c\Delta t}{(\Delta x)(\Delta z)} \right)^2 (4F_{i,j}^n - 2(F_{i+1,j}^n + F_{i,j+1}^n + F_{i-1,j}^n + F_{i,j-1}^n)) \\ &+ \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (F_{i+1,j+1}^n + F_{i+1,j-1}^n + F_{i-1,j+1}^n + F_{i-1,j-1}^n) \end{aligned}$$

Despejando el termino $P_{i,j}^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
P_{i,j}^{n+1} = & 2P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 [a \cdot (P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n)] \\
& + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 [b \cdot (P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n)] \\
& + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(\frac{c}{(\Delta z)^2}\right) (4F_{i,j}^n - 2(F_{i+1,j}^n + F_{i,j+1}^n + F_{i-1,j}^n + F_{i,j-1}^n)) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (F_{i+1,j+1}^n + F_{i+1,j-1}^n + F_{i-1,j+1}^n + F_{i-1,j-1}^n)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Similarmente, se realiza el mismo proceso para obtener el esquema numérico, pero esta vez en un medio acústico con anisotropía polar inclinada (TTI). Obteniendo:

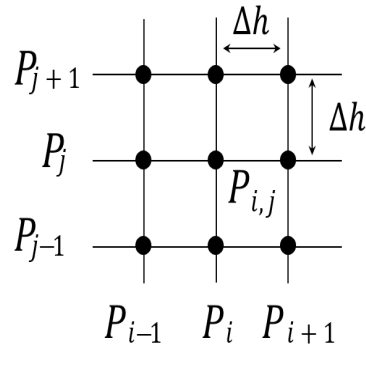
$$\begin{aligned}
P_{i,j}^{n+1} = & b_1 C [P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n] + b_2 C [P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n] \\
& + \frac{b_3 C}{4} (P_{i+1,j+1}^n - P_{i+1,j-1}^n - P_{i-1,j+1}^n + P_{i-1,j-1}^n) \\
& - \frac{b_4 C}{\Delta h^2} [4F_{i,j}^n - 2(F_{i-1,j}^n + F_{i,j-1}^n + F_{i+1,j}^n + F_{i,j+1}^n) \\
& \quad + F_{i-1,j-1}^n + F_{i+1,j-1}^n + F_{i+1,j+1}^n + F_{i-1,j+1}^n] \\
& - b_5 C [F_{i,j+2}^n - 4F_{i,j+1}^n + 6F_{i,j}^n - 4F_{i,j-1}^n + F_{i,j-2}^n] \\
& + \frac{b_6 C}{\Delta h^2} (F_{i+1,j+2}^n - 2F_{i+1,j+1}^n + 2F_{i+1,j-1}^n - F_{i+1,j-2}^n \\
& \quad - F_{i-1,j+2}^n + 2F_{i-1,j+1}^n - 2F_{i-1,j-1}^n + F_{i-1,j-2}^n) \\
& - \frac{b_6 C}{4\Delta h^2} (F_{i+2,j+1}^n - F_{i+2,j-1}^n + 2F_{i+1,j+1}^n + 2F_{i+1,j-1}^n \\
& \quad + F_{i-1,j+1}^n - 2F_{i-1,j-1}^n - F_{i-2,j+1}^n - F_{i-2,j-1}^n) \\
& - b_5 C [F_{i+2,j}^n - 4F_{i+1,j}^n + 6F_{i,j}^n - 4F_{i-1,j}^n + F_{i-2,j}^n]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Donde $b_1 = [V_{p_0}^2 \sin^2 \phi + (1 + 2\eta) v_n^2 \cos^2 \phi] v_n^2$, $b_2 = [V_{p_0}^2 \cos^2 \phi + (1 + 2\eta) v_n^2 \sin^2 \phi]$, $b_3 = [V_{p_0}^2 - (1 + 2\eta) v_n^2] \sin(2\phi)$, $b_4 = V_{p_0}^2 v_n^2 \eta (2 - 3 \sin^2(2\phi))$, $b_5 = \frac{1}{2} V_{p_0}^2 v_n^2 \eta \sin^2(2\phi)$, $b_6 = V_{p_0}^2 v_n^2 \eta \sin(4\phi)$, y $C = \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta h^2}\right)$

3.1.6. Implementación numérica de la ecuación de onda.

Representando los valores numéricos del campo de onda en los nodos malla (ver Figura 21), se obtiene:

Figura 21: Esquema de discretización 2-D, donde el subíndice (i, j) varía en cada dirección



$$\begin{aligned}
 P_{i,j}^{n+1} &= P3 \quad y \quad P_{i\pm 1,j}^n = P2(i \pm 1, j), \\
 P_{i,j}^n &= P2 \quad y \quad P_{i\pm 1,j\pm 1}^n = P2(i \pm 1, j \pm 1), \\
 P_{i,j}^{n-1} &= P1 \quad y \quad P_{i,j\pm 1}^{n-1} = P2(i, j \pm 1).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

De forma análoga se realiza para los distintos campos auxiliares utilizados en las siguientes aproximaciones acústicas, donde se obtiene finalmente el esquema numérico, en este caso para la ecuación diferencial parcial acoplada propuesta por Alkhalifah (2000).

$$\begin{aligned}
 P3(i, j) &= c * (eta1(i, j) * (P2(i + 1, j) + P2(i - 1, j))) \\
 &+ v2(i, j) * (P2(i, j + 1) + P2(i, j - 1))) \\
 &+ 2 * (1 - (eta1(i, j) + v2(i, j)) * c) * P2(i, j) - P1(i, j) \\
 &- \frac{2 * eta(i, j) * v1(i, j) * v2(i, j) * c}{(\Delta h * \Delta h)} (4 * F2(i, j))
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& -2 * (F2(i - 1, j) + F2(i, j - 1) + F2(i + 1, j) + F2(i, j + 1)) \\
& + F2(i - 1, j - 1) + F2(i + 1, j - 1) + F2(i + 1, j + 1) + F2(i - 1, j + 1)),
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
v1(i, j) &= v_n \\
v2(i, j) &= V_{p0} \\
\eta(i, j) &= \eta \\
eta1(i, j) &= (1 + 2\eta)v_n^2 \\
c &= \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2.
\end{aligned}$$

Realizando el mismo procedimiento que se realizó para la ecuación (3.1.6), se logra obtener el esquema numérico para la ecuación (3.7).

$$F3(i, j) = 2 * F2(i, j) - F1(i, j) + (\Delta t * \Delta t) * P2(i, j). \quad (3.18)$$

donde se escogió un paso de malla homogéneo, es decir $\Delta x = \Delta y = \Delta h$ y se ha reemplazado las constantes a , b , y c .

En el caso de anisotropía polar inclinada (TTI) obtenido en la ecuación (3.15) se logra:

$$\begin{aligned}
F3(i, j) &= 2 * F2(i, j) - F1(i, j) + (dt * dt) * P2(i, j); \\
P3(i, j) &= c * (A(i, j) * (P2(i + 1, j) - 2 * P2(i, j) + P2(i - 1, j)) \\
& + B(i, j) * (P2(i, j + 1) - 2 * P2(i, j) + P2(i, j - 1)) \\
& + C(i, j) * (P2(i + 1, j + 1) - P2(i + 1, j - 1) - P2(i - 1, j + 1) \\
& + P2(i - 1, j - 1))/4 - D(i, j) * (4 * F2(i, j) \\
& - 2 * (F2(i - 1, j) + F2(i, j - 1) + F2(i + 1, j) + F2(i, j + 1)) \\
& + F2(i - 1, j - 1) + F2(i + 1, j - 1) + F2(i + 1, j + 1) \\
& + F2(i - 1, j + 1))/(dx * dx) - E(i, j) * (F2(i, j + 2)
\end{aligned} \quad (3.19)$$

$$F3(i, j) = 2 * F2(i, j) - F1(i, j) + (dt * dt) * P2(i, j);$$

$$\begin{aligned}
P3(i, j) = & c * (A(i, j) * (P2(i + 1, j) - 2 * P2(i, j) + P2(i - 1, j))) \\
& + B(i, j) * (P2(i, j + 1) - 2 * P2(i, j) + P2(i, j - 1)) \\
& + C(i, j) * (P2(i + 1, j + 1) - P2(i + 1, j - 1) - P2(i - 1, j + 1) \\
& + P2(i - 1, j - 1))/4 - D(i, j) * (4 * F2(i, j) \\
& - 2 * (F2(i - 1, j) + F2(i, j - 1) + F2(i + 1, j) + F2(i, j + 1)) \\
& + F2(i - 1, j - 1) + F2(i + 1, j - 1) + F2(i + 1, j + 1) \\
& + F2(i - 1, j + 1))/(dx * dx) - E(i, j) * (F2(i, j + 2) \\
& - 4 * F2(i, j + 1) + 2 * F2(i, j) - 4 * F2(i, j - 1) + F2(i, j - 2))/(dx)^2 \\
& + F(i, j) * (F2(i + 1, j + 2) - 2 * F2(i + 1, j + 1) \\
& + 2 * F2(i + 1, j - 1) - F2(i + 1, j - 2) - F2(i - 1, j + 2) \\
& + F2(i - 1, j + 1) - 2 * F2(i - 1, j - 1) + F2(i - 1, j - 2))/4 * (dx)^2 \\
& - F(i, j) * (F2(i + 2, j + 1) - F2(i + 2, j - 1) - 2 * F2(i + 1, j + 1) \\
& + 2 * F2(i + 1, j - 1) + 2 * F2(i - 1, j + 1) \\
& - 2 * F2(i - 1, j - 1) - F2(i - 2, j + 1) + F2(i - 2, j - 1))/4 * (dx)^2 \\
& - E(i, j) * (F2(i + 2, j) - 4 * F2(i + 1, j) \\
& + 2 * F2(i, j) - 4 * F2(i - 1, j) + F2(i - 2, j))/(dx * dx) \\
& + 2 * P2(i, j) - P1(i, j);
\end{aligned}$$

donde,

$$eta(i, j) = 0,0;$$

$$A(i, j) = Vp0(i, j) * Vp0(i, j) * sin(phi) * sin(phi)$$

$$+ Vnmo(i, j) * Vnmo(i, j) * (1 + 2 * eta(i, j)) * cos(phi) * cos(phi);$$

$$B(i, j) = Vp0(i, j) * Vp0(i, j) * cos(phi) * cos(phi)$$

$$+ Vnmo(i, j) * Vnmo(i, j) * (1 + 2 * eta(i, j)) * sin(phi) * sin(phi);$$

$$\begin{aligned}
C(i, j) &= (Vp0(i, j) * Vp0(i, j) \\
&\quad - Vnmo(i, j) * Vnmo(i, j) * (1 + 2 * eta(i, j))) * sin(2 * phi); \\
D(i, j) &= Vp0(i, j) * Vp0(i, j) * Vnmo(i, j) * Vnmo(i, j) \\
&\quad * eta(i, j) * (2 - 3 * sin(2 * phi) * sin(2 * phi)); \\
E(i, j) &= (0,5) * Vp0(i, j) * Vp0(i, j) * Vnmo(i, j) \\
&\quad * Vnmo(i, j) * eta(i, j) * sin(2 * phi) * sin(2 * phi); \\
F(i, j) &= Vp0(i, j) * Vp0(i, j) * Vnmo(i, j) * Vnmo(i, j) \\
&\quad * eta(i, j) * sin(4 * phi);
\end{aligned}$$

3.1.7. Deducción de la estabilidad numérica y dispersión numérica para ecuación de onda

Basados en lo que se realizó en la sección (2.13), y con la idea de evitar la dispersión numérica y la inestabilidad numérica, se utiliza las condiciones y reglas usadas en caso el caso isótropo. Donde el paso de la malla de satisfacer:

$$\Delta d_{max} \leq \frac{v_{min}}{\beta f_{max}}, \quad (3.20)$$

donde β es el número de muestras por la mínima longitud de onda y v_{min} es la velocidad mínima. Se logra que el esquema numérico sea estable en un esquema de diferencias finitas, cuando el paso de tiempo es lo suficientemente pequeño para satisfacer la condición de estabilidad (Jin et al., 2010).

$$\Delta t \leq \frac{\Delta d_{min}}{v_{max}} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}}, \quad (3.21)$$

donde a , es:

$$a = W(a_1 + a_2) \quad (3.22)$$

$$a_1 = (1 + 2\varepsilon_{max})(2 - b),$$

$$a_2 = \sqrt{1 + 2\delta_{max}(1 + b)},$$

$$b = \cos^2 \theta \sin(2\phi) + \sin(2\theta)(\sin \phi + \cos \phi).$$

donde W es la suma absoluta de los valores de los coeficientes del esquema en diferencias finitas en este caso $W = 4$, θ el ángulo de fase y ϕ el ángulo de inclinación en un medio con anisotropía polar inclinada (TTI). Cuando $\phi = 0$ grados esto se reduce a un medio con anisotropía polar vertical (VTI). Por lo tanto, para los esquemas numéricos presentado en las ecuaciones (3.12) y (3.14), las correspondiente condición de dispersión y estabilidad es:

$$\Delta x \leq 0,694 \quad (3.23)$$

$$\Delta t \leq 0,00017 \quad (3.24)$$

Para el caso del esquema numérico de la ecuación (3.15), se obtienen las siguientes condiciones:

$$\Delta x \leq 1,088 \quad (3.25)$$

$$\Delta t \leq 0,00031 \quad (3.26)$$

3.2 ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA PARA MEDIOS CON ANISOTROPÍA TIPO VTI PROPUESTA POR HUANG

A partir de la ecuación de velocidad de fase para un medio elástico con anisotropía tipo VTI deducida en la ecuación (2.45), se realiza una nueva aproximación a la raíz cuadrada para obtener la ecuación diferencial para medios con anisotropía tipo VTI propuesta por Huang et al. (2011).

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{po}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} + \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}}.$$

3.2.1. Aproximación de la velocidad de fase para medios acústicos con anisotropía polar vertical

Aplicando lo asumido por Alkhalifah (2000), donde el parámetro $f = 1$ y sustituyendo este valor en la ecuación (2.45), se consigue:

$$\begin{aligned}\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &= 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{1}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1}}, \\ \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &= 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta)^2 - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}, \\ \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &= \frac{1}{2} + \varepsilon \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta)^2 - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}, \\ 2 \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &= 1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta + \sqrt{(1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta)^2 - 8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}. \quad (3.27)\end{aligned}$$

Para simplificar la ecuación (3.27), denotaremos

$$\begin{aligned}A &= 1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta, \\ B &= \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ C &= 1 + \varepsilon \sin^2 \theta.\end{aligned} \quad (3.28)$$

Simplificando, las ecuaciones (2.45) y (3.27), se escribe en términos de las constantes anteriores.

$$\begin{aligned}\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &= 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} + \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta - 1}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}}, \\ \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &= C - \frac{f}{2} + \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{A - 1}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta)B}{f}}, \quad (3.29)\end{aligned}$$

$$2 \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = A + \sqrt{A^2 - 8(\varepsilon - \delta)B}. \quad (3.30)$$

Para obtener la ecuación de onda acústica, se necesita eliminar la raíz de la ecuación (3.30), por lo tanto se eleva ambos lados al cuadrado. Por ejemplo en Alkhalifah (2000), Zhang et al. (2003) y Zhou et al. (2006), deducen la ecuación

(3.30) basados en el método de elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación. Por tanto, se necesita encontrar un polinomio en términos de A y B para aproximar la raíz cuadrada de la ecuación (3.30). Con el fin de mantener la periodicidad de $V(\theta)$ con respecto al ángulo de fase, por lo tanto se supone que e es un número real, e que satisface:

$$\sqrt{A^2 - 8(\varepsilon - \delta)B} = A + 2e\sqrt{2|\varepsilon - \delta|B}. \quad (3.31)$$

El próximo paso es determinar el valor de e realizando dos suposiciones:

- Si $\sqrt{2|\varepsilon - \delta|B} = 0$, en este caso $B = 0$ o $(\varepsilon - \delta) = 0$. En este caso la ecuación (3.31) quedaría expresada $A = A$. Así todo valor e puede satisfacer la ecuación (3.31). Pero por conveniencia se tomará $e = 0$.
- Si $\sqrt{2|\varepsilon - \delta|B} \neq 0$, se puede despejar e de la ecuación (3.31) entonces:

$$e = \frac{\sqrt{A^2 - 8(\varepsilon - \delta)B} - A}{2\sqrt{2|\varepsilon - \delta|B}}. \quad (3.32)$$

Combinando las ecuaciones (3.28) y (3.32), se puede observar que e es función de los parámetros de Thomsen (ε y δ). Así como del ángulo de fase θ . Para cualquier posición en el espacio los dos parámetros de Thomsen son conocidos previamente, por lo tanto e solo depende de θ . A fin de derivar la ecuación de onda acústica, se necesita saber el valor de e pero este valor debe ser independiente de θ . Por lo tanto se necesita encontrar una constante e_c , que sea independiente de θ y un promedio de e .

$$e_c = \bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e(\theta_i) \quad (3.33)$$

donde N es un entero positivo y $0 \leq \theta_i \leq 2\pi$. Aproximando el valor e en e_c , se sustituye en la ecuaciones (3.31), por lo tanto:

$$\sqrt{A^2 - 8(\varepsilon - \delta)B} = A + 2e_c\sqrt{2|\varepsilon - \delta|B}. \quad (3.34)$$

Para determinar el valor e_c se le hará un micro ajuste al valor corriente, es decir se le cambia el valor e_c a un intervalo que contiene el valor corriente y selecciona la mínima diferencia entre los valores de ambos lados de la ecuación (3.34), este proceso se implementa de la siguiente manera:

Primero cambiando los N e_i valores ($i=1, 2, 3, \dots, N$) donde N es un numero entero positivo en $[e_c - d, e_c + d]$ ($d > 0$) con igual espaciamento y computando la correspondiente diferencia entre los valores de ambos lados para cada valor e_i . Se selecciona el mínimo valor de diferencia de e_i y luego se determina e_c . Una vez el valor e_c sea determinado, se sustituye la ecuación (3.34) en (3.30), resultando:

$$2 \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = A + A + 2e_c \sqrt{2|\varepsilon - \delta|} B,$$

$$2 \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = 2A + 2e_c \sqrt{2|\varepsilon - \delta|} B,$$

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = A + e_c \sqrt{2|\varepsilon - \delta|} B, \quad (3.35)$$

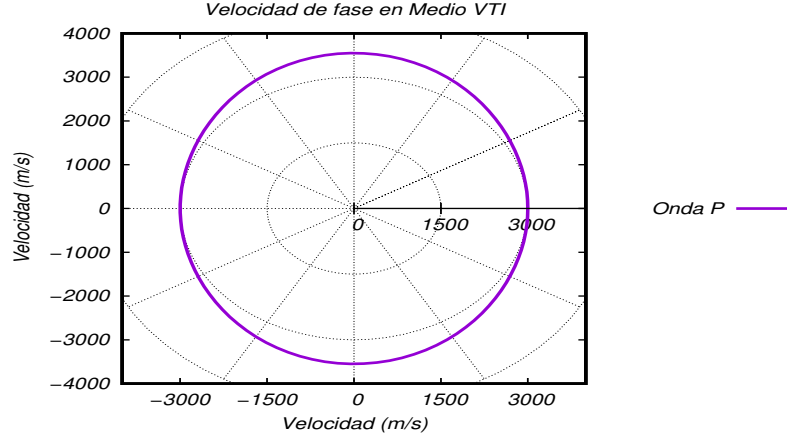
sustituyendo las variables A y B en términos de los parámetros de *Thomsen* y los coeficientes de anisotropía (ε, δ) en la ecuación (3.35), se obtiene *la aproximación de la velocidad de fase para un medio con anisotropía tipo VTI 2-D*.

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = 1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta + e_c \sqrt{2|\varepsilon - \delta|} \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (3.36)$$

3.2.2. Curva de velocidad de fase para la onda P en un medio acústico con anisotropía polar vertical

Las curvas de aproximación de velocidad de fase para medios acústicos se obtienen según la ecuación (3.36), esta curva es obtenida para la onda P en un medio acústicos con anisotropía polar vertical (VTI), considerando los siguientes valores para las velocidades $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, los parámetros de anisotropía de Thomsen $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ y $e_c = -0,34$ la constante propuesta por Huang (2011).

Figura 22: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P , con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ y $e_c = -0,34$ en un medio VTI.



3.2.3. Deducción de la ecuación de onda

A partir de la ecuación (3.36) se puede derivar la ecuación de onda acústica en un medio con anisotropía polar vertical (VTI) 2-D. Recordando la identidad trigonométrica

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\varepsilon \sin^2 \theta + e_c \sqrt{2|\varepsilon - \delta|} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = \underbrace{(1 + 2\varepsilon)}_{c_1} \sin^2 \theta + \underbrace{1}_{c_2} \cdot \cos^2 \theta + \underbrace{e_c \sqrt{2|\varepsilon - \delta|}}_{c_3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (3.37)$$

Para simplificar, se define:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 + 2\varepsilon \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= e_c \sqrt{2|\varepsilon - \delta|}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por lo tanto la ecuación (3.37) puede escribirse como:

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = c_1 \sin^2 \theta + c_2 \cos^2 \theta + c_3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (3.39)$$

Por otra parte, una onda armónica se dice que es plana si la fase de la amplitud compleja está dada por la ecuación de un plano.

$$\phi(r') = k \cdot r' = 0,$$

donde $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma)$ son los números de onda, $\alpha = \sin \theta_x$ y $\gamma = \cos \theta_z$. Si se reemplaza las anteriores relaciones en función del seno y del coseno se obtendrá:

$$\sin \theta_x = \frac{\lambda k_x}{2\pi},$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{V(\theta)}{f}, \\ \sin \theta_x &= \frac{V(\theta)k_x}{2\pi f}, \\ \sin \theta_x &= \frac{V(\theta)k_x}{\omega}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

igualmente para el coseno,

$$\begin{aligned} \cos \theta_z &= \frac{\lambda k_z}{2\pi}, \\ \cos \theta_z &= \frac{V(\theta)k_z}{2\pi f}, \\ \cos \theta_z &= \frac{\lambda k_z}{2\pi}, \\ \cos \theta_z &= \frac{V(\theta)k_z}{2\pi f}, \\ \cos \theta_z &= \frac{V(\theta)k_z}{\omega}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

La ecuación (3.39) se puede reescribir como:

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = c_1 \frac{V^2(\theta)k_x^2}{\omega^2} + c_2 \frac{V^2(\theta)k_z^2}{\omega^2} + c_3 \frac{V^4(\theta)k_x^2 k_z^2}{\omega^4}. \quad (3.42)$$

Eliminando $V^2(\theta)$ de la ecuación anterior y simplificando, se llega:

$$\frac{1}{V_{p0}^2} \omega^2 (k_x^2 + k_z^2) = c_1 k_x^4 + c_2 k_z^4 + (c_1 + c_2 + c_3) k_x^2 k_z^2. \quad (3.43)$$

Representando los campo de onda en los dominios de (frecuencia angular - número de onda) y (espacio - tiempo) como $p(k_x, k_z, \omega)$ y $P(x, z, t)$, se multiplica a ambos lados de la Ecuación (3.43) por el campo de onda $p(k_x, k_z, \omega)$ y aplicando la transformada de Fourier inversa para $k_x \rightarrow -i\partial/\partial x$, $k_z \rightarrow -i\partial/\partial z$ y finalmente $\omega \rightarrow i\partial/\partial t$. Se obtiene la ecuación de onda acústica para un medio VTI en el dominio de (espacio - tiempo).

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_{p0}^2} \omega^2 (k_x^2 + k_z^2) \cdot p(k_x, k_z, \omega) &= c_1 k_x^4 \cdot p(k_x, k_z, \omega) + c_2 k_z^4 \cdot p(k_x, k_z, \omega) \\ &+ (c_1 + c_2 + c_3) k_x^2 k_z^2 \cdot P(k_x, k_z, \omega), \\ \frac{1}{V_{p0}^2} \left(\frac{\partial^4 P(x, z, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 P(x, z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} \right) &= c_1 \frac{\partial^4 P(x, z, t)}{\partial x^4} + c_2 \frac{\partial^4 P(x, z, t)}{\partial z^4} \\ &+ (c_1 + c_2 + c_3) \frac{\partial^4 P(x, z, t)}{\partial x^2 \partial z^2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Por simplicidad del modelo numérico se define un campo auxiliar:

$$S = \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial t^2}. \quad (3.45)$$

Así la ecuación (3.44) se transforma en:

$$\frac{1}{V_{p0}^2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right) = c_1 \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} + c_2 \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} + (c_1 + c_2 + c_3) \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2}. \quad (3.46)$$

Donde c_1, c_2 y c_3 son calculados por medio de la ecuación (3.38). Se puede observar que el valor e_c es función de los parámetros de Thomsen, ε y δ . Pero, dado un medio, los valores de e_c pueden ser pre-calculados es decir, pueden ser conocidos de manera inmediata. Por lo tanto, todos los coeficientes de la ecuación de onda acústica (3.46) son determinados a través de la ecuación (3.38). Así el cálculo de los valores de e_c no logran consumir tiempo computacional en la secuencia del modelado del campo de onda. Por tanto, las ecuaciones a modelar

son:

$$\frac{1}{V_{p0}^2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right) = c_1 \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} + c_2 \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} + (c_1 + c_2 + c_3) \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2},$$

$$S = \frac{\partial^2 p(x, z, t)}{\partial t^2}.$$
(3.47)

3.2.4. Esquema numérico de la ecuación de onda

Los esquemas numéricos para las ecuaciones (3.45) y (3.46) se realiza del mismo modo como se hizo para las expresiones (3.1.6) y (3.18). Por tanto, para la ecuación (3.1.6) se obtiene:

$$P_{i,j}^{n+1} = 2P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1} + (\Delta t)^2 S_{i,j}^n$$
(3.48)

Para la ecuación (3.18), se escoge ($\Delta x = \Delta z = \Delta h$) obteniendo:

$$S_{i,j}^n = \frac{1}{4} (S_{i,j+1}^n + S_{i,j-1}^n + S_{i+1,j}^n + S_{i-1,j}^n)$$

$$- (V_{p0}^2 c_1) \left(\frac{P_{i+2,j}^n - 4P_{i+1,j}^n + 6P_{i,j}^n - 4P_{i-1,j}^n + P_{i-2,j}^n}{4(\Delta h)^2} \right)$$

$$- (V_{p0}^2 c_2) \left(\frac{P_{i,j+2}^n - 4P_{i,j+1}^n + 6P_{i,j}^n - 4P_{i,j-1}^n + P_{i,j-2}^n}{4(\Delta h)^2} \right)$$

$$- V_{p0}^2 (c_1 + c_2 + c_3) \left(\frac{4P_{i,j}^n - 2(P_{i+1,j}^n + P_{i,j+1}^n + P_{i-1,j}^n + P_{i,j-1}^n)}{4(\Delta h)^2} \right)$$

$$- V_{p0}^2 (c_1 + c_2 + c_3) \left(\frac{P_{i+1,j+1}^n + P_{i+1,j-1}^n + P_{i-1,j+1}^n + P_{i-1,j-1}^n}{4(\Delta h)^2} \right).$$
(3.49)

3.2.5. Implementación numérica

Para implementar numéricamente la ecuación (3.48) y (3.49), se discretizan los campos del mismo modo como se realizó en la expresión de la ecuación (3.16). Logrando:

$$P3(i, j) = 2 * P2(i, j) - P1(i, j) + (\Delta t * \Delta t) * S2(i, j);$$
(3.50)

$$S2(i, j) = \frac{1}{4} [S2(i + 1, j) + S2(i - 1, j) + S2(i, j + 1) + S2(i, j - 1)] - V_{p0}^2 \left(c_1 \left[\frac{A}{(4\Delta h)^2} \right] + c_1 \left[\frac{B}{(4\Delta h)^2} \right] + (c_1 + c_2 + c_3) \left[\frac{C}{(4\Delta h)^2} \right] \right), \quad (3.51)$$

donde,

$$\begin{aligned} A &= P2(i + 2, j) - 4P2(i + 1, j) + 6P2(i, j) - 4P2(i - 1, j) + P2(i - 2, j) \\ B &= P2(i, j + 2) - 4P2(i, j + 1) + 6P2(i, j) - 4P2(i, j - 1) + P2(i, j - 2) \\ C &= (4 \cdot P2(i, j) - 2 \cdot (P2(i - 1, j) + P2(i, j - 1) + P2(i + 1, j) + P2(i, j + 1))) \\ &\quad + P2(i - 1, j - 1) + P2(i + 1, j - 1) + P2(i + 1, j + 1) + P2(i - 1, j + 1)) \end{aligned} \quad (3.52)$$

3.2.6. Deducción de la estabilidad numérica y dispersión numérica para ecuación de onda

En analogía, como se realizó en la sección (3.1.7) se determina la condición de dispersión y estabilidad numérica a partir de las ecuaciones (3.20) y (3.21).

$$\Delta x \leq 0,694 \quad (3.53)$$

$$\Delta t \leq 0,00010 \quad (3.54)$$

3.3 ECUACIÓN DE ONDA PSEUDO-ACÚSTICA PARA MEDIOS CON ANISOTROPÍA TIPO VTI PROPUESTA POR X. DU

La anisotropía sísmica en muchas áreas de observación, por ejemplo en el mar del norte, las colinas canadienses y el golfo de México, los métodos de migración convencionales para la obtención de imágenes sísmicas son insuficientes en estas áreas debido a que son tratadas como medios isótropos. Los científicos han implementado dos maneras de realizar modelado de la ecuación de onda

y migración en medios con anisotropía, pero esto se realiza bajo aproximaciones pseudo-acústicas. Por lo tanto, para obtener la ecuación de onda pseudo-acústica en un medio VTI 2-D es necesario partir de la relación de dispersión deducida anteriormente en la ecuación (21).

$$\omega^4 = [V_x k_x^2 + V_{p0}^2 k_z^2] \omega^2 + V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) k_x^2 k_z^2,$$

donde k_x y k_z son las componentes del número de onda, V_x es la velocidad de la onda P propagándose en el medio con ángulo de $\pi/2$, V_{p0} es la velocidad de la onda paralela al eje de simetría, v_n es la velocidad (NMO) y ω la frecuencia angular.

3.3.1. Aproximación de la velocidad de fase para medios acústicos con anisotropía polar vertical

A partir de la relación de dispersión presentada en la ecuación (21) (ver Apéndice 6), se puede obtener la aproximación de la velocidad de fase haciendo uso de las relaciones mostradas en la ecuación (2.30). Por tanto:

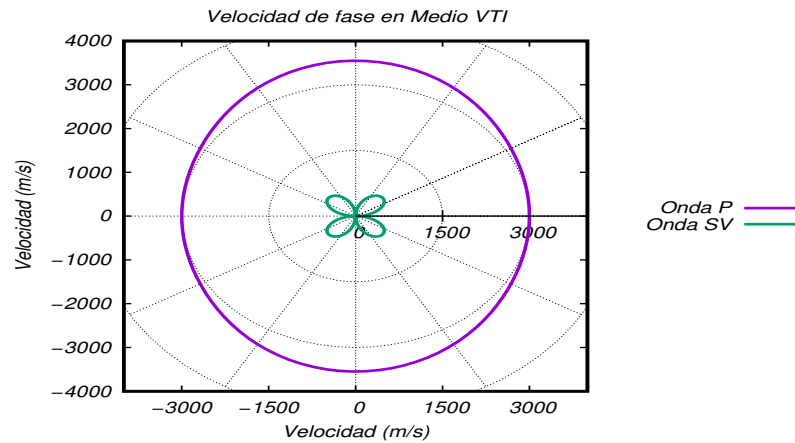
$$\frac{V(\theta)}{V_{p0}^2} = \pm \frac{\sqrt{[(1 + 2\varepsilon) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta]^2 + 8[(\delta - \varepsilon)] \sin^2 \theta \cos^2 \theta}}{2} + \frac{(1 + 2\varepsilon) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{2}. \quad (3.55)$$

La ecuación (3.55) es la expresión para la velocidad de fase en un medio acústico con anisotropía polar vertical, obtenida a partir de la relación de dispersión propuesta por Du et al. (2008)

3.3.2. Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar vertical

Las curvas de aproximación de velocidad de fase para medios acústicos se obtienen según la ecuación (3.55), la curva es obtenida para la onda P en un medio acústico con anisotropía polar vertical (VTI), considerando los siguientes valores para las velocidades $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, los parámetros de anisotropía de Thomsen $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$ (ver Figura 23).

Figura 23: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$ en un medio VTI.



3.3.3. Deducción de la ecuación de onda

Aplicando la transformada de Fourier inversa a la ecuación (21), se obtiene la ecuación diferencial parcial referente a este caso, donde $k_x = -i\partial/\partial x$, $k_z = -i\partial/\partial z$ y $\omega = i\partial/\partial t$. Se logra:

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} - V_x^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \right) - V_{p0}^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial t^2} \right) - V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} \right) = 0. \quad (3.56)$$

Multiplicando la ecuación (3.56) por el campo $q(x, z, t)$

$$\frac{\partial^4 Q}{\partial t^4} - V_x^2 \left(\frac{\partial^4 Q}{\partial x^2 \partial t^2} \right) - V_{p0}^2 \left(\frac{\partial^4 Q}{\partial z^2 \partial t^2} \right) - V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) \left(\frac{\partial^4 Q}{\partial x^2 \partial z^2} \right) = 0. \quad (3.57)$$

Esta es una ecuación diferencial parcial acoplada de cuarto orden en el tiempo. Pero se puede transformar a una ecuación diferencial de segundo orden en el tiempo, aplicable cuando $(\varepsilon - \delta > 0)$. Por tanto se define:

$$P = \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}. \quad (3.58)$$

Sustituyendo la ecuación (3.58) en la ecuación (3.57), se obtiene una ecuación diferencial acoplada de segundo orden en el tiempo.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = V_x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + V_{p0}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2 \partial z^2} \right). \quad (3.59)$$

Además, simplificando la ecuación (21), se obtiene (ver Apéndice 6):

$$\omega^2 = V_x^2 k_x^2 + \left[\frac{\omega^2 + (v_n^2 - V_x^2) k_x^2}{\omega^2} \right] V_{p0}^2 k_z^2.$$

Multiplicando por el campo $p(\omega, k_x, k_z)$ la anterior ecuación.

$$\omega^2 p(\omega, k_x, k_z) = V_x^2 k_x^2 p(\omega, k_x, k_z) + \underbrace{\left[\frac{\omega^2 + (v_n^2 - V_x^2) k_x^2}{\omega^2} \cdot p(\omega, k_x, k_z) \right]}_{q(\omega, k_x, k_z)} V_{p0}^2 k_z^2. \quad (3.60)$$

Se utiliza una campo auxiliar para la parte subrayada de la ecuación (3.60) y se define como $q(\omega, k_x, k_z)$. Reescribiendo la ecuación (3.60) se tiene:

$$\omega^2 p(\omega, k_x, k_z) = V_x^2 k_x^2 p(\omega, k_x, k_z) + V_{p0}^2 k_z^2 q(\omega, k_x, k_z), \quad (3.61)$$

donde:

$$q(\omega, k_x, k_z) = \frac{\omega^2 + (v_n^2 - V_x^2) k_x^2}{\omega^2} \cdot p(\omega, k_x, k_z), \quad (3.62)$$

$$\omega^2 q(\omega, k_x, k_z) = \omega^2 p(\omega, k_x, k_z) + (v_n^2 - V_x^2) k_x^2 p(\omega, k_x, k_z).$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa a las ecuación (3.61) y a la última expresión de la ecuación (3.62) se obtienen las ecuaciones diferenciales parciales de onda pseudo-acústica para medios VTI (Du et al., 2008).

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = V_x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + V_{p0}^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + (v_n^2 - V_x^2) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Sustituyendo la ecuación (3.63) en la ecuación (3.3.3), se logra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} &= \cancel{V_x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}} + V_{p0}^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + v_n^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \cancel{V_x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}}, \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} &= v_n^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + V_{p0}^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Las ecuaciones (3.63) y (3.64) son las ecuaciones de onda pseudo-acústica acopladas para medios con anisotropía tipo VTI. A continuación se presentan las ecuaciones a modelar.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= V_x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + V_{p0}^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} &= v_n^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + V_{p0}^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}. \end{aligned}} \quad (3.65)$$

3.3.4. Esquema numérico de la ecuación de onda

Los esquemas numéricos para las ecuaciones (3.63) y (3.64), se obtienen del mismo modo como se realizó para las expresiones (3.50) y (3.51).

Se inicia la ecuación (3.63).

$$\frac{P_{i,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} = V_x^2 \left(\frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + V_{p0}^2 \left(\frac{Q_{i,j+1}^n - 2Q_{i,j}^n + Q_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right).$$

Estableciendo para las dos ecuaciones, que $\Delta x = \Delta z = \Delta h$, y despejando el termino $P_{i,j}^{n+1}$. Se tiene:

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{n+1} = & 2P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h}\right)^2 [V_x^2 (P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n)] \\ & + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h}\right)^2 [V_{p0}^2 (Q_{i,j+1}^n - 2Q_{i,j}^n + Q_{i,j-1}^n)]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Realizando el mismo proceso, se logra el otro esquema numérico para la ecuación (3.64).

$$\frac{Q_{i,j}^{n+1} - 2Q_{i,j}^n + Q_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} = v_n^2 \left(\frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + V_{p0}^2 \left(\frac{Q_{i,j+1}^n - 2Q_{i,j}^n + Q_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} Q_{i,j}^{n+1} = & 2Q_{i,j}^n - Q_{i,j}^{n-1} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h}\right)^2 [v_n^2 (P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n)] \\ & + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h}\right)^2 [V_{p0}^2 (Q_{i,j+1}^n - 2Q_{i,j}^n + Q_{i,j-1}^n)] \end{aligned} \quad (3.67)$$

3.3.5. Implementación numérica

Para las ecuaciones (3.66) y (3.67) se definen los campos numéricos del mismo modo se hizo en las ecuaciones (3.16), (3.50) y (3.51). Por tanto, el esquema numérico en función de la nueva representación de los campos numéricos es:

$$\begin{aligned} P3(i, j) = & 2 * P2(i, j) - P1(i, j) \\ & + c * ((v1(i, j) * v1(i, j)) * (P2(i + 1, j) - 2 * P2(i, j) + P2(i - 1, j))) \\ & + (v2(i, j) * v2(i, j)) * (Q2(i, j + 1) - 2 * Q2(i, j) + Q2(i, j - 1))), \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} Q3(i, j) = & 2 * Q2(i, j) - Q1(i, j) \\ & + c * ((v3(i, j) * v3(i, j)) * (P2(i + 1, j) - 2 * P2(i, j) + P2(i - 1, j))) \\ & + (v2(i, j) * v2(i, j)) * (Q2(i, j + 1) - 2 * Q2(i, j) + Q2(i, j - 1))), \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde,

$$v1(i, j) = V_x,$$

$$v2(i, j) = V_{p0},$$

$$v3(i, j) = v_n,$$

$$c = \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2.$$

3.3.6. Deducción de la estabilidad numérica y dispersión numérica para ecuación de onda

Se parte de la ecuación (3.65), y elaborando el mismo proceso que se hizo en las secciones 2.12 y 2.13 para obtener la condiciones de estabilidad numérica y dispersión numérica. Por lo tanto, para la ecuación (3.63), se tiene:

$$\begin{aligned} P_0 e^{j((n+1)\omega\Delta t - ik_x\Delta x - mk_z\Delta z)} = & 2P_0 e^{j(n\omega\Delta t - ik_x\Delta x - mk_z\Delta z)} - P_0 e^{j((n-1)\omega\Delta t - ik_x\Delta x - mk_z\Delta z)} \\ & + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 [P_0 e^{j(n\omega\Delta t - (i+1)k_x\Delta x - mk_z\Delta z)}] V_x^2 \\ & - \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 [2P_0 e^{j(n\omega\Delta t - ik_x\Delta x - mk_z\Delta z)}] V_x^2 \\ & + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 [P_0 e^{j(n\omega\Delta t - (i-1)k_x\Delta x - mk_z\Delta z)}] V_x^2 \\ & + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 [Q_0 e^{j(n\omega\Delta t - (i+1)k_x\Delta x - mk_z\Delta z)}] V_{p0}^2 \\ & - \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 [2Q_0 e^{j(n\omega\Delta t - ik_x\Delta x - mk_z\Delta z)}] V_{p0}^2 \\ & + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 [Q_0 e^{j(n\omega\Delta t - (i-1)k_x\Delta x - mk_z\Delta z)}] V_{p0}^2. \end{aligned}$$

Dividiendo la anterior expresión sobre $e^{j(n\omega\Delta t - ik_x\Delta x - mk_z\Delta z)}$.

$$\begin{aligned} P_0 e^{j(\omega\Delta t)} = & 2P_0 - P_0 e^{-j(\omega\Delta t)} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 [P_0 e^{-j(k_x\Delta x)} - 2P_0 + P_0 e^{j(k_x\Delta x)}] V_x^2 \\ & + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 [q_0 e^{-j(k_x\Delta x)} - 2Q_0 + Q_0 e^{j(k_x\Delta x)}] V_{p0}^2 \end{aligned}$$

$$P_0 e^{j(\omega\Delta t)} - 2P_0 + P_0 e^{-j(\omega\Delta t)} = \left(\frac{\Delta t}{\Delta h}\right)^2 [P_0 e^{-j(k_x\Delta x)} - 2P_0 + P_0 e^{j(k_x\Delta x)}] V_x^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h}\right)^2 [Q_0 e^{-j(k_x\Delta x)} - 2Q_0 + Q_0 e^{j(k_x\Delta x)}] V_{p0}^2.$$

Dividiendo entre 2 y recordando que:

$$\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \cos \theta, \quad \cos \theta - 1 = -\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Se obtiene:

$$P_0(\cos(\omega\Delta t) - 1) = \left(\frac{\Delta t}{\Delta h}\right)^2 [V_x^2 (\cos(k_x\Delta x) - 1) P_0 + V_{p0}^2 (\cos(k_z\Delta z) - 1) Q_0],$$

$$\cancel{P_0} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \cancel{\left(\frac{\Delta t}{\Delta h}\right)^2} [V_x^2 \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) P_0 + V_{p0}^2 \sin^2\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right) Q_0],$$

$$\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \left[\left(\frac{V_x\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \frac{Q_0}{P_0} \left(\frac{V_x\Delta t}{\Delta z}\right)^2 \sin^2\left(\frac{k_x\Delta z}{2}\right)\right]. \quad (3.70)$$

Análogamente, para la ecuación (3.64) resulta:

$$\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{Q_0}{P_0} \left[\left(\frac{v_n\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \left(\frac{V_x\Delta t}{\Delta z}\right)^2 \sin^2\left(\frac{k_x\Delta z}{2}\right)\right]. \quad (3.71)$$

Sustituyendo las variables v_n y V_x para las relaciones de dispersión de las ecuaciones (3.70) y (3.71). Se consigue:

$$\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \underbrace{(V_{p0}\Delta t)^2 \left[\frac{(1+2\varepsilon)}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \left(\frac{Q_0}{P_0}\right) \frac{1}{(\Delta z)^2} \sin^2\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right)\right]}_A, \quad (3.72)$$

$$\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \underbrace{(V_{p0}\Delta t)^2 \left[\frac{P_0(1+2\delta)}{Q_0(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{(\Delta z)^2} \sin^2\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right)\right]}_B, \quad (3.73)$$

Definiendo las variables A y B , se logra:

$$\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = A \Rightarrow \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \sqrt{A},$$

$$\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = B \Rightarrow \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \sqrt{B}. \quad (3.74)$$

Despejando ω de las expresiones de la ecuación (3.74),

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1}(\sqrt{A}), \quad (3.75)$$

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1}(\sqrt{B}). \quad (3.76)$$

Reemplazando en las ecuaciones (3.75) y (3.76) las variables A y B . Se llega:

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left((V_{p0}\Delta t)^2 \left[\frac{(1+2\varepsilon)}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \left(\frac{Q_0}{P_0} \right) \frac{1}{(\Delta z)^2} \sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right] \right)^{1/2}, \quad (3.77)$$

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left((V_{p0}\Delta t)^2 \left[\frac{P_0(1+2\delta)}{Q_0(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \frac{1}{(\Delta z)^2} \sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right] \right)^{1/2}. \quad (3.78)$$

Así, el valor de ω es máximo cuando el \sin^2 es máximo, es decir $\sin^2 \approx 1$. Por lo tanto, el valor máximo de ω para los dos casos es:

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left((V_{p0}\Delta t)^2 \left[\frac{(1+2\varepsilon)}{(\Delta x)^2} + \left(\frac{Q_0}{P_0} \right) \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right)^{1/2}, \quad (3.79)$$

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left((V_{p0}\Delta t)^2 \left[\frac{P_0(1+2\delta)}{Q_0(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right)^{1/2}. \quad (3.80)$$

Tomando el paso $\Delta x = \Delta z = \Delta h$ y las amplitudes $P_0 = q_0$, se obtiene:

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left[\left(\frac{V_{p0}\Delta t}{\Delta h} \right) (2+2\varepsilon)^{1/2} \right], \quad (3.81)$$

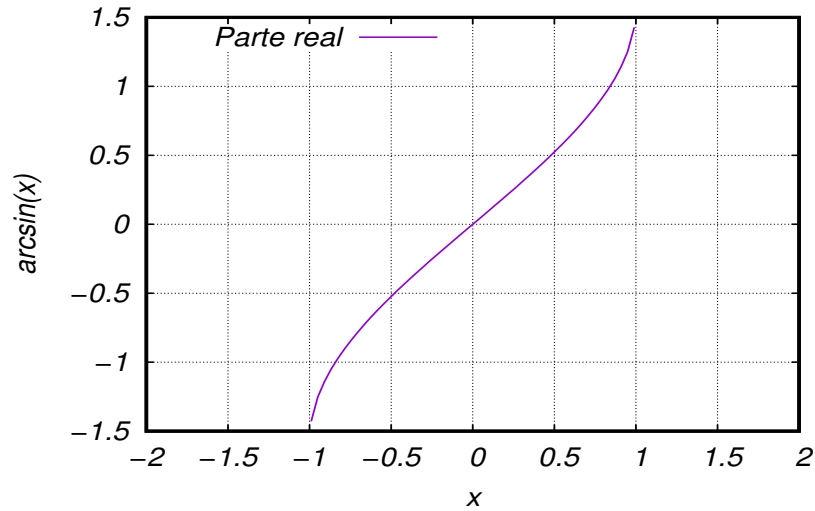
$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left[\left(\frac{V_{p0}\Delta t}{\Delta h} \right) (2+2\delta)^{1/2} \right]. \quad (3.82)$$

El intervalo donde la función \sin^{-1} es real, es en $(-1, 1)$ (ver figura 24). Por lo tanto, para fines del trabajo se desea un rango $[0, 1)$. Así,

$$0 \leq A \leq \left(\frac{V_{p0}\Delta t}{\Delta h} \right) [2(1+\varepsilon)]^{1/2} = A_{max},$$

$$0 \leq B \leq \left(\frac{V_{p0}\Delta t}{\Delta h} \right) [2(1+\delta)]^{1/2} = B_{max}.$$

Figura 24: Parte real de la función $\sin^{-1}(x)$.



Pero en el intervalo de $0 \leq A \leq 1$ ω es imaginaria, haciendo ω real en el intervalo de $1 \leq A \leq 1 A_{max}$ y análogamente para B $1 \leq A \leq 1 B_{max}$. Entonces,

$$A_{max} = \left(\frac{V_{p0} \Delta t}{\Delta h} \right) [2(1 + \varepsilon)]^{1/2} > 1,$$

$$B_{max} = \left(\frac{V_{p0} \Delta t}{\Delta h} \right) [2(1 + \delta)]^{1/2} > 1.$$

Por lo tanto el Δt , para las dos ecuaciones en diferencias finitas se definen:

$$\frac{V_{p0} \Delta t}{\Delta h} > \frac{1}{\sqrt{2}[1 + \varepsilon]^{1/2}}, \quad (3.83)$$

$$\frac{V_{p0} \Delta t}{\Delta h} > \frac{1}{\sqrt{2}[1 + \delta]^{1/2}},$$

$$\Delta t > \frac{\Delta h}{\sqrt{2}[1 + \delta]^{1/2} V_{p0}}. \quad (3.84)$$

Para obtener la condición de dispersión numérica, se parte de la definición de velocidad de fase:

$$v_f = \frac{\omega}{k}.$$

Dividiendo sobre el número de onda k , las ecuaciones (3.77) y (3.78).

$$v_{fA} = \frac{\omega}{k},$$

$$v_{fA} = \frac{2}{k\Delta t} \sin^{-1} \left((V_{p0}\Delta t) \sqrt{\left[\frac{(1+2\varepsilon)}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \frac{Q_0}{P_0(\Delta z)^2} \sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right]} \right),$$

$$v_{fB} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_{fB} = \frac{2}{k\Delta t} \sin^{-1} \left((V_{p0}\Delta t) \sqrt{\left[\frac{P_0(1+2\delta)}{Q_0(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \frac{1}{(\Delta z)^2} \sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right]} \right).$$

Ahora dividiendo sobre v , las anteriores expresiones.

$$\frac{v_{fA}}{v} = \frac{2}{vk\Delta t} \sin^{-1} \left((V_{p0}\Delta t) \sqrt{\left[\frac{(1+2\varepsilon)}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \frac{Q_0}{P_0(\Delta z)^2} \sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right]} \right),$$

$$\frac{v_{fB}}{v} = \frac{2}{vk\Delta t} \sin^{-1} \left((V_{p0}\Delta t) \sqrt{\left[\frac{P_0(1+2\delta)}{Q_0(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \frac{1}{(\Delta z)^2} \sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right]} \right).$$

Definiendo las siguientes constantes.

$$\alpha_x = \left(\frac{V_{p0}\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (1+2\varepsilon),$$

$$\alpha_z = \left(\frac{V_{p0}\Delta t}{\Delta z} \right)^2,$$

$$\beta_x = \left(\frac{V_{p0}\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (1+2\delta),$$

$$\beta_z = \left(\frac{V_{p0}\Delta t}{\Delta z} \right)^2,$$

$$\frac{v_{fA}}{v} = \frac{2}{vk\Delta t} \sin^{-1} \left(\left[\alpha_x \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) + \alpha_z \left(\frac{k\Delta z}{2} \right) \right]^{1/2} \right), \quad (3.85)$$

$$\frac{v_{fA}}{v} = \frac{2}{vk\Delta t} \sin^{-1} \left(\left[\beta_x \sin^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) + \beta_z \left(\frac{k\Delta z}{2} \right) \right]^{1/2} \right). \quad (3.86)$$

Las ecuaciones (3.85) y (3.86) representan la relaciones de la velocidad de fase v_{fA} y v_{fB} , con la velocidad del medio v .

Por lo tanto las condiciones de dispersión y estabilidad numérica para los esquemas numéricos de las ecuaciones (3.66) y (3.67), son:

$$\Delta x \leq 0,350 \quad (3.87)$$

$$\Delta t \leq 0,00013 \quad (3.88)$$

3.4 ECUACIÓN DE ONDA PSEUDO-ACÚSTICA PARA MEDIOS CON ANISOTROPÍA TIPO TTI PROPUESTA POR FLETCHER ET AL.

Para obtener la ecuación de onda pseudo-acústica para medios con anisotropía tipo TTI 2-D (Fletcher et al., 2008), se parte análogamente de la expresión que se utilizó para la sección 3.3.3, pero esta vez en tres dimensiones. Para esto denotaremos \tilde{k} como la rotación del número de onda debido a la inclinación del medio en estudio. Por lo tanto, reescribiendo la ecuación (21):

$$\omega^4 = \left[V_x(\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2) + V_{p0}^2 \tilde{k}_z^2 \right] \omega^2 + V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) (\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2) \tilde{k}_z^2. \quad (3.89)$$

3.4.1. Aproximación de la velocidad de fase para medios acústicos con anisotropía polar inclinada

En analogía como se realizó para las ecuaciones (2.47) y (3.2) se logra la velocidad de fase en un medio acústico con anisotropía polar inclinada:

$$\frac{V(\theta, \phi)}{V_{p0}^2} = \pm \frac{\sqrt{[(1 + 2\varepsilon) \sin^2(\theta - \phi) + \cos^2(\theta - \phi)]^2 + 8(\delta - \varepsilon) \sin^2(\theta - \phi) \cos^2(\theta - \phi)}}{2} + \frac{(1 + 2\varepsilon) \sin^2(\theta - \phi) + \cos^2(\theta - \phi)}{2}. \quad (3.90)$$

3.4.2. Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar inclinada

Las curvas de aproximación de velocidad de fase para medios acústicos se obtienen según la ecuación (3.90), la curva es obtenida para la onda P en un medio acústico con anisotropía polar vertical (VTI), considerando los siguientes valores para las velocidades $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, los parámetros de anisotropía de Thomsen $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$. Las curvas se presentan para diferentes valores de ϕ , para un ángulo $\phi = 30$, $\phi = 45$, $\phi = 60$ y $\phi = 90$ (ver Figuras 25 - 28).

3.4.3. Dedución de la ecuación de onda

La relación entre \tilde{k} y k se da por la siguiente matriz de rotación R .

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Figura 25: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 30$ en medio TTI.

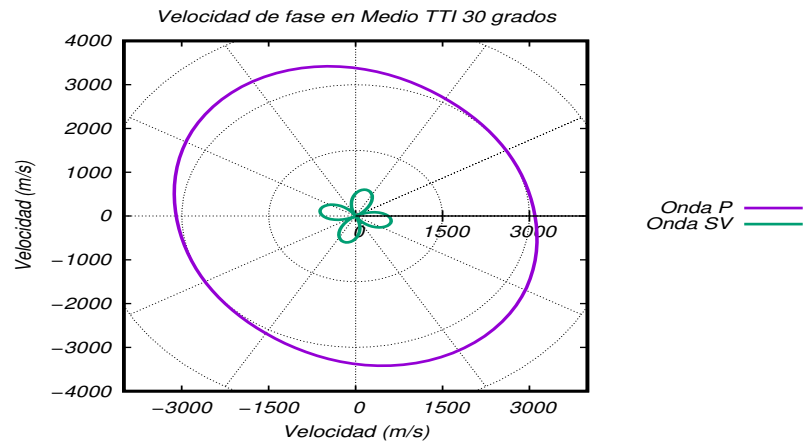


Figura 26: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 45$ en medio TTI.

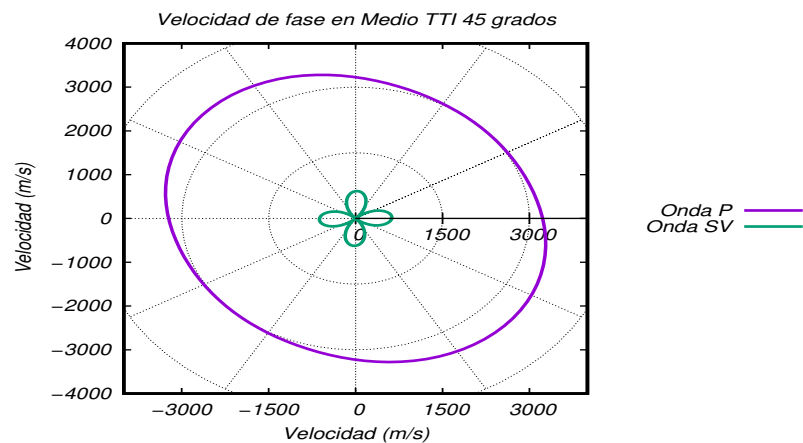


Figura 27: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 60$ en medio TTI.

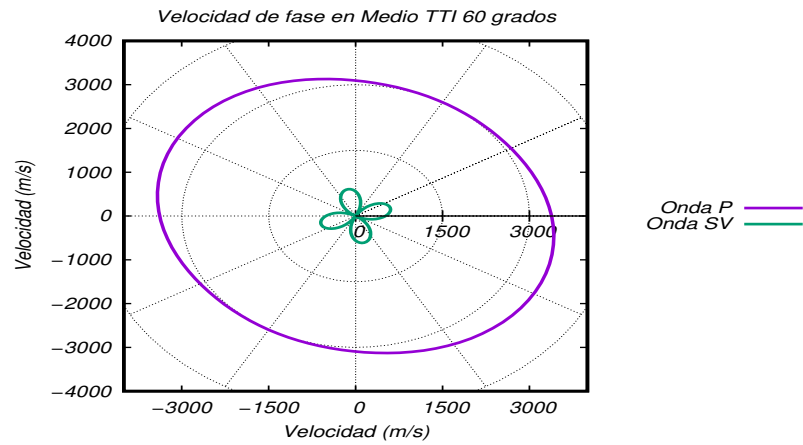
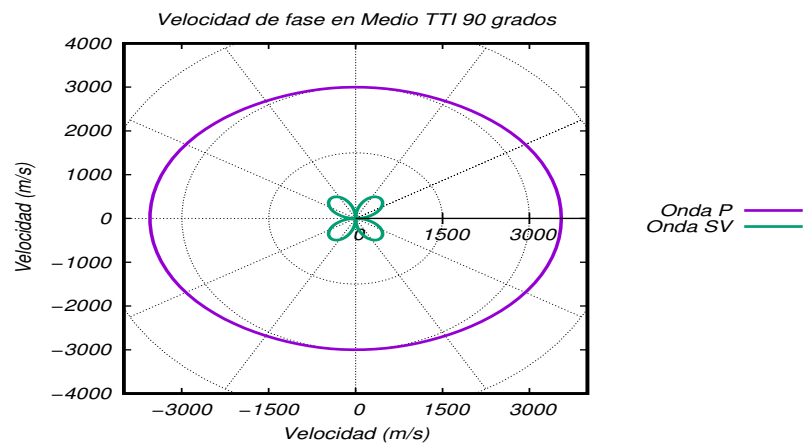


Figura 28: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 0(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 90$ en medio TTI.



Por lo tanto los \tilde{k} están definidos de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \widehat{k}_x \\ \widehat{k}_y \\ \widehat{k}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

$$\tilde{k}_x = k_x \cos \theta \cos \phi + k_y \cos \theta \sin \phi + k_z \sin \theta$$

$$\tilde{k}_y = -k_x \sin \phi + k_y \cos \phi \quad (3.91)$$

$$\tilde{k}_z = -k_x \sin \theta \cos \phi - k_y \sin \theta \sin \phi + k_z \cos \theta$$

Haciendo un análisis de la última ecuación del Apéndice 6, se observa que la expresión subrayada no es más que k_z^2 , deducido previamente en la ecuación (25). Por tanto, se definen las variables f_1 y f_2 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_1 = \tilde{k}_z^2 &= k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \cos^2 \theta \\ &+ 2 [k_x k_y \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi] \\ &- 2 [k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi] \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} f_2 = \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - k_z^2 \cos^2 \theta \\ &+ [-k_x k_y \sin^2 \theta \sin(2\phi) \cos \phi + k_x k_z \sin(2\theta) \cos \phi] \\ &+ [k_y k_z \sin(2\theta) \sin \phi] \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$f_2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - f_1$$

$$\begin{aligned} f_1 &= k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \cos^2 \theta \\ &+ 2 [k_x k_y \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi] \\ &- 2 [k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi] \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$f_2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - f_1. \quad (3.95)$$

Reescribiendo la ecuación (3.89) en función de las variables f_1 y f_2 , se obtiene:

$$\omega^4 = [V_x^2 f_2 + V_{p0}^2 f_1] \omega^2 + V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) f_1 f_2. \quad (3.96)$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa a las variables f_1 y f_2 , se obtienen los operadores H_1 y H_2 , dados de la siguiente manera:

$$H_1 = \sin^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \sin^2 \theta \sin(2\phi) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \sin(2\theta) \cos \phi \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \sin(2\theta) \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \quad (3.97)$$

$$H_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - H_1. \quad (3.98)$$

Operando la ecuación (3.96), se obtiene (ver Apéndice 6):

$$\omega^2 = V_x^2 f_2 + V_{p0}^2 f_1 \left[\frac{\omega^2 + (v_n^2 - V_x^2) f_2}{\omega^2} \right], \quad (3.99)$$

multiplicando la ecuación (3.99) por el campo $P(\omega, k_x, k_x, k_z)$

$$\omega^2 p(\omega, k_x, k_x, k_z) = V_x^2 f_2 p(\omega, k_x, k_x, k_z) + V_{p0}^2 f_1 \underbrace{\left[\frac{\omega^2 + (v_n^2 - V_x^2) f_2}{\omega^2} \cdot p \right]} \quad (3.100)$$

Del mismo modo como se realizó la sección 3.3.3, se define el campo auxiliar $Q(\omega, k_x, k_y, k_z)$.

$$q(\omega, k_x, k_y, k_z) = \frac{\omega^2 + (v_n^2 - V_x^2) f_2}{\omega^2} \cdot p(\omega, k_x, k_x, k_z). \quad (3.101)$$

Por lo tanto la ecuación (3.100) en función del campo auxiliar $q(\omega, k_x, k_y, k_z)$ queda escrita:

$$\omega^2 p(\omega, k_x, k_x, k_z) = V_x^2 f_2 p(\omega, k_x, k_x, k_z) + V_{p0}^2 f_1 q(\omega, k_x, k_y, k_z). \quad (3.102)$$

Desarrollando la ecuación (3.101), se logra (ver Apéndice 6):

$$\omega^2 q(\omega, k_x, k_x, k_z) = V_{p0}^2 f_1 q(\omega, k_x, k_x, k_z) + v_n^2 f_2 p(\omega, k_x, k_y, k_z) \quad (3.103)$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa a las ecuaciones (3.102) y (3.103), se obtienen las ecuaciones de onda pseudo-acústica para medios con anisotro-

pía tipo TTI.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(x, z, t) = V_x^2 H_2 P(x, z, t) + V_{p0}^2 H_1 Q(x, z, t) \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(x, z, t) = V_{p0}^2 H_1 Q(x, z, t) + v_n^2 H_2 P(x, z, t) \quad (3.105)$$

3.4.4. Esquema numérico de la ecuación de onda

La construcción de los esquemas numéricos de la es ecuaciones (3.104) y (3.105), se obtienen del mismo modo como se realizó en las secciones 3.1.5,3.2.4 y 3.3.4. Se inicia con la ecuación (3.104).

$$\frac{P_{i,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} = V_x^2 H_2 \left(\frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + V_{p0}^2 H_1 \left(\frac{Q_{i,j+1}^n}{(\Delta z)^2} \right) - V_{p0}^2 H_1 \left(\frac{2Q_{i,j}^n + Q_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right).$$

Estableciendo una malla homogénea para el esquema numérico $\Delta x = \Delta z = \Delta h$ y despejando el termino $P_{i,j}^{n+1}$. Se obtiene:

$$P_{i,j}^{n+1} = 2P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 [V_x^2 H_2 (P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n)] + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 [V_{p0}^2 H_1 (Q_{i,j+1}^n - 2Q_{i,j}^n + Q_{i,j-1}^n)]. \quad (3.106)$$

Análogamente se logra el esquema numérico para la ecuación (3.105),

$$\frac{Q_{i,j}^{n+1} - 2Q_{i,j}^n + Q_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} = v_n^2 H_2 \left(\frac{P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + V_{p0}^2 H_1 \left(\frac{Q_{i,j+1}^n}{(\Delta z)^2} \right) - V_{p0}^2 H_1 \left(\frac{2Q_{i,j}^n + Q_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right),$$

despejando el termino $Q_{i,j}^{n+1}$, se logra:

$$Q_{i,j}^{n+1} = 2Q_{i,j}^n - Q_{i,j}^{n-1} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h}\right)^2 [v_n^2 H_2 (P_{i+1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i-1,j}^n)] + \left(\frac{\Delta t}{\Delta h}\right)^2 [V_{p0}^2 H_1 (Q_{i,j+1}^n - 2Q_{i,j}^n + Q_{i,j-1}^n)] \quad (3.107)$$

donde,

$$H_1 = \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)_{i,j}^n + \cos^2 \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)_{i,j}^n + \sin(2\theta) \cos \phi \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right)_{i,j}^n$$

y,

$$H_2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)_{i,j}^n + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)_{i,j}^n - H_1$$

Las derivadas representadas de esta forma, denotan la discretización espacial y temporal en la malla de propagación.

3.4.5. Implementación numérica

La implementación numérica de las ecuaciones (3.104) y (3.105), se obtiene del mismo modo como se realizó en la sección anterior, Por lo tanto, el esquema numérico en función de esta nueva representación será:

$$P3(i, j) = 2 * P2(i, j) - P1(i, j) + c * (vx(i, j) * (P2(i + 1, j) - 4 * P2(i, j) + P2(i - 1, j) + P2(i, j + 1) + P2(i, j - 1))) - A(i, j) * (vx(i, j) * (P2(i + 1, j) - 2 * P2(i, j) + P2(i - 1, j))) - Vp0(i, j) * (Q2(i + 1, j) - 2 * Q2(i, j) + Q2(i - 1, j))) \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned}
P3(i, j) = & 2 * P2(i, j) - P1(i, j) \\
& + c * (vx(i, j) * (P2(i + 1, j) - 4 * P2(i, j) + P2(i - 1, j) + P2(i, j + 1) \\
& + P2(i, j - 1)) - A(i, j) * (vx(i, j) * (P2(i + 1, j) \\
& - 2 * P2(i, j) + P2(i - 1, j)) - Vp0(i, j) * (Q2(i + 1, j) \\
& - 2 * Q2(i, j) + Q2(i - 1, j))) \\
& - B(i, j) * (vx(i, j) * (P2(i, j + 1) - 2 * P2(i, j) \\
& + P2(i, j - 1)) - Vp0(i, j) * (Q2(i, j + 1) \\
& - 2 * Q2(i, j) + Q2(i, j - 1))) - C(i, j) * (vx(i, j) * (P2(i + 1, j + 1) \\
& - P2(i - 1, j + 1) - P2(i + 1, j - 1) + P2(i - 1, j - 1)) \\
& - Vp0(i, j) * (Q2(i + 1, j + 1) - Q2(i - 1, j + 1) \\
& - Q2(i + 1, j - 1) + Q2(i - 1, j - 1)))));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q3(i, j) = & 2 * Q2(i, j) - Q1(i, j) + c * (Vnmo(i, j) * (P2(i + 1, j) \\
& - 4 * P2(i, j) + P2(i - 1, j) + P2(i, j + 1) \\
& + P2(i, j - 1)) + A(i, j) * (Vp0(i, j) * (Q2(i + 1, j) \\
& - 2 * Q2(i, j) + Q2(i - 1, j)) - Vnmo(i, j) * (P2(i + 1, j) \\
& - 2 * P2(i, j) + P2(i - 1, j))) + B(i, j) * (Vp0(i, j) * (Q2(i, j + 1) \\
& - 2 * Q2(i, j) + Q2(i, j - 1)) - Vnmo(i, j) * (P2(i, j + 1) \\
& - 2 * P2(i, j) + P2(i, j - 1))) + C(i, j) * (Vp0(i, j) * (Q2(i + 1, j + 1) \\
& - Q2(i - 1, j + 1) - Q2(i + 1, j - 1) + Q2(i - 1, j - 1)) \\
& - Vnmo(i, j) * (P2(i + 1, j + 1) - P2(i - 1, j + 1) \\
& - P2(i + 1, j - 1) + P2(i - 1, j - 1)))));
\end{aligned}
\tag{3.109}$$

donde,

$$Vnmo(i, j) = v_n;$$

$$Vp0(i, j) = V_{p0};$$

$$vx(i, j) = V_x;$$

$$\begin{aligned}
A(i, j) &= \sin(\theta * M_{PI} / (180,0)) * \\
&\quad \sin(\theta * M_{PI} / (180)) * \cos(\phi * M_{PI} / (180,0)) * \\
&\quad \cos(\phi * M_{PI} / (180,0)); \\
B(i, j) &= \cos(\theta * M_{PI} / (180,0)) * \cos(\theta * M_{PI} / (180)); \\
C(i, j) &= (0,5) * \sin(\theta * M_{PI} / (180,0)) * \cos(\theta * M_{PI} / (180,0)) * \\
&\quad \cos(\phi * M_{PI} / (180,0));
\end{aligned}$$

3.4.6. Deducción de la estabilidad numérica y dispersión numérica para ecuación de onda

Se determinan las condiciones de estabilidad y dispersión numérica, por medio de las expresiones de las ecuaciones (3.20) y (3.21). Obteniendo los siguientes resultados:

$$\Delta x \leq 0,694 \quad (3.110)$$

$$\Delta t \leq 0,00020 \quad (3.111)$$

Capítulo

4

ECUACIONES DESACOPLADAS PARA EL MODELADO SÍSMICO EN MEDIOS CON ANISOTROPÍA VTI/TTI

Este capítulo presenta las ecuaciones diferenciales parciales desacopladas para medios acústicos con anisotropía VTI y TTI, expuestas por Zhan (2012). Previamente se introduce el caso de la ecuación de onda desacoplada en medios acústicos con anisotropía VTI, obtenida a partir de la velocidad de fase exacta para un medio elástico con anisotropía VTI (ver Apéndice 6). Basados en la velocidad de fase se deduce la relación de dispersión, para lograr obtener la ecuación de onda diferencial desacoplada con anisotropía polar o VTI. Luego, se aplica una rotación al vector de onda, para posteriormente sustituirlo en la relación de dispersión ya determinada y obtener análogamente la ecuación de onda acústica desacoplada, pero esta vez en medios con anisotropía tipo TTI.

4.1 APROXIMACIÓN DE LA VELOCIDAD DE FASE PARA MEDIOS ACÚSTICOS CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL (VTI)

Para obtener la velocidad de fase en este caso, se parte de la expresión de velocidad de fase exacta para medios VTI reescrita por Tsvankin (2011) y mostrada anteriormente en la sección 6 (ver Ecuación (2.44)).

$$\begin{aligned}\frac{V^2(\theta)}{V_{po}^2} &= 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 2\theta}{f}}, \\ \frac{V^2(\theta)}{V_{po}^2} &= 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right) \sqrt{1 - \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 2\theta \cdot f}{f(f + 2\varepsilon \sin^2 \theta)^2}}, \\ \frac{V^2(\theta)}{V_{po}^2} &= 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right) \sqrt{1 - \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 2\theta \cdot f}{(f + 2\varepsilon \sin^2 \theta)^2}}, \\ \frac{V^2(\theta)}{V_{po}^2} &= 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right) \underbrace{\sqrt{1 - \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2(2\theta)}{f(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f})^2}}}_{}, \quad (4.1)\end{aligned}$$

donde θ es el ángulo de fase medido respecto al eje de simetría axial, el signo más (+) corresponde a la onda P y el menos (-) corresponde a la onda S . Pestana et al. (2011) reescribió la ecuación (4.1) y expandió la raíz subrayada a primer orden de la siguiente manera, $\sqrt{1 - X} = 1 - X/2$.

$$\sqrt{1 - \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2(2\theta)}{f(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f})^2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 2\theta}{f(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f})^2} \right) = 1 - \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta}{f(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f})^2}.$$

Sustituyendo la aproximación de la raíz en la ecuación (4.1).

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{po}^2} \approx 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right) \left(1 - \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta}{f(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f})^2}\right),$$

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} \approx 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \left[1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} - \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta}{f \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} \right)} \right]. \quad (4.2)$$

Así, para desacoplar las ecuaciones diferenciales se selecciona el signo positivo (+) para la onda P y el signo negativo (-) para la onda SV de la ecuación (4.2).

$$\begin{aligned} \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &\approx 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} + \frac{f}{2} + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta}{2 \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} \right)}, \\ \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &\approx 1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta - \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta}{2 \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} \right)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para la onda SV ,

$$\begin{aligned} \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &\approx 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} - \frac{f}{2} - \varepsilon \sin^2 \theta + \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta}{2 \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} \right)}, \\ \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &\approx 1 - f - \frac{f}{2} + \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta}{2 \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} \right)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Las ecuaciones (4.3) y (4.4) representan la aproximación de la velocidad de fase tanto para la onda P y SV .

$$\begin{aligned} \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &\approx 1 + 2\varepsilon \sin^2 \theta - \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2(2\theta)}{2 \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} \right)^2} && \text{onda } P. \\ \frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} &\approx 1 - f + \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2(2\theta)}{2 \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} \right)^2} && \text{onda } SV. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2 APROXIMACIÓN DE LA VELOCIDAD DE FASE PARA MEDIOS ACÚSTICOS CON ANISOTROPÍA POLAR INCLINADA (TTI)

De forma similar como se realizó en las anteriores expresiones de velocidad de fase, se realiza en esta sección de este capítulo para medios con anisotropía

polar inclinada (TTI). Obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{V^2(\theta, \phi)}{V_{p0}^2} &\approx 1 + 2\varepsilon \sin^2(\theta - \phi) - \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2(2(\theta - \phi))}{2 \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2(\theta - \phi)}{f}\right)^2} && \text{onda } P. \\ \frac{V^2(\theta, \phi)}{V_{p0}^2} &\approx 1 - f + \frac{(\varepsilon - \delta) \sin^2(2(\theta - \phi))}{2 \left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2(\theta - \phi)}{f}\right)^2} && \text{onda } SV. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Así, las expresiones de la ecuación (4.6) representan la velocidades de fase para la onda P y onda SV .

4.2.1. Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar vertical

Las curvas de aproximación de velocidad de fase para medios acústicos se obtienen según la primera expresión de la ecuación (4.5) y segunda expresión para la onda SV , la curva es obtenida para la onda P en un medio acústico con anisotropía polar vertical (VTI), considerando los siguientes valores para las velocidades $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, los parámetros de anisotropía de Thomsen $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$ (ver Figura 29).

4.2.2. Curvas de velocidad de fase para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar inclinada

Las curvas de aproximación de velocidad de fase para medios acústicos se obtienen según las expresiones de la ecuación (4.6), estas curvas son obtenidas para las ondas P y SV en un medio acústico con anisotropía polar vertical (TTI), considerando los siguientes valores para las velocidades $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, los parámetros de anisotropía de Thomsen $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$. Las curvas se presentan para diferentes valores de ϕ , para un ángulo $\phi = 30$, $\phi = 45$, $\phi = 60$ y $\phi = 90$ (ver Figuras 30-33).

Figura 29: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$ en un medio VTI.

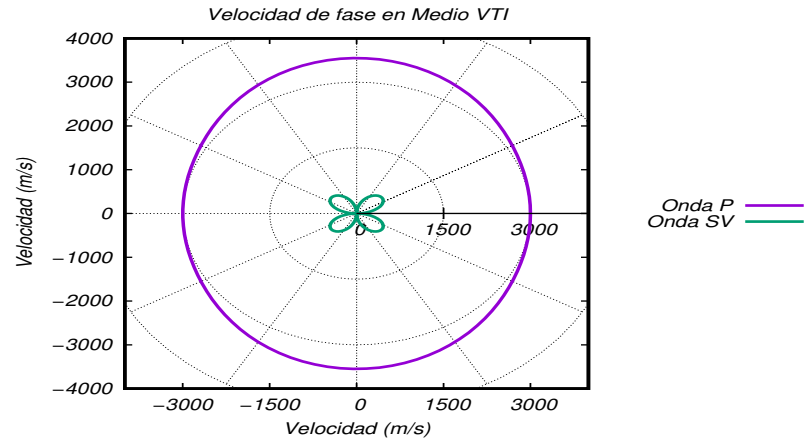


Figura 30: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 30$ en medio TTI.

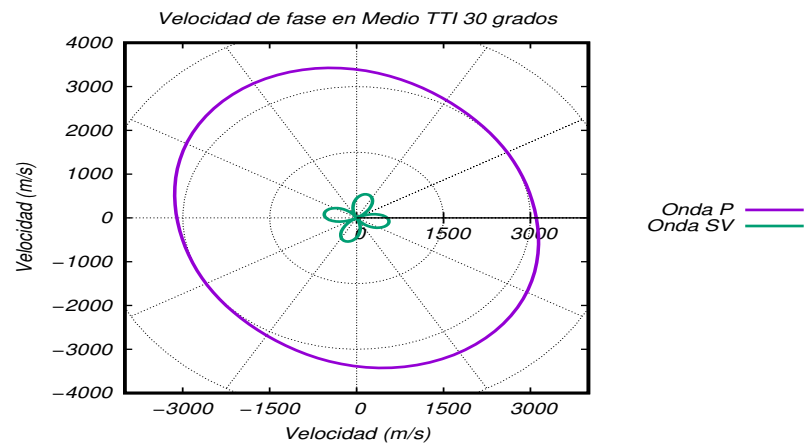


Figura 31: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 45$ en medio TTI.

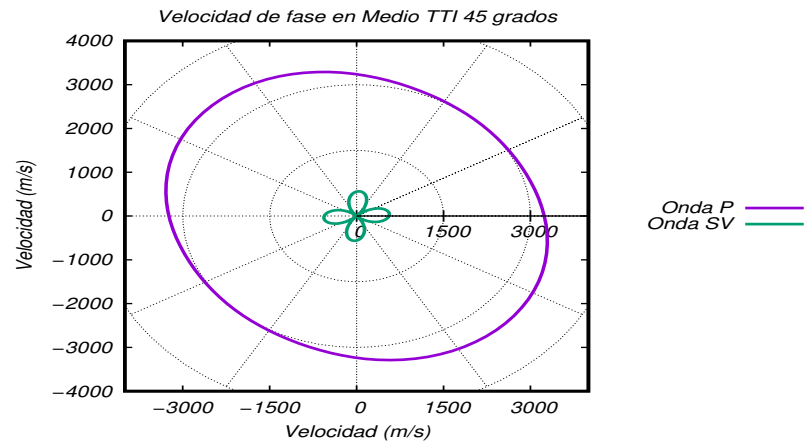


Figura 32: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 60$ en medio TTI.

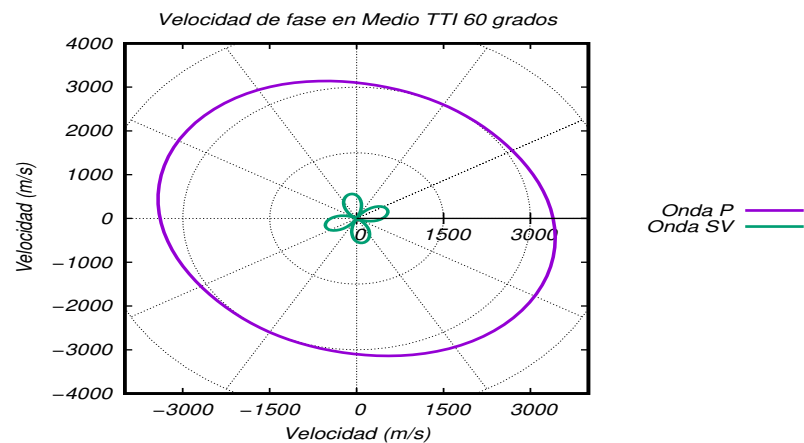
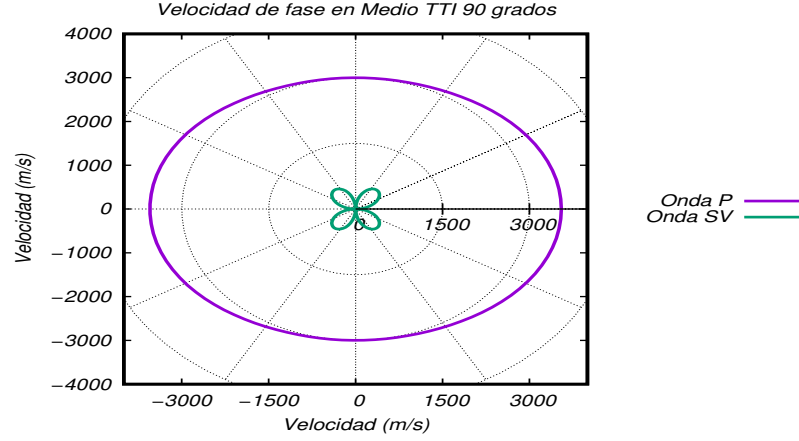


Figura 33: Velocidad de fase en coordenadas polares de la onda P y la onda SV con $V_{p0} = 3000(m/s)$, $V_{s0} = 2121(m/s)$, $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ con un ángulo $\phi = 90$ en medio TTI.



4.2.3. Deducción de la ecuación de onda desacoplada en medios con anisotropía tipo VTI

En esta sección se muestra la ecuación diferencial desacoplada en medios con anisotropía polar vertical (VTI) propuesta por Pestana et al. (2011), La ecuación (4.5) es una buena aproximación para las relaciones de dispersión cuando.

$$\left| \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 2\theta}{f(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f})} \right| \ll 1, \quad (4.7)$$

sustituyendo las siguientes relaciones en la ecuación (4.5), $\sin \theta = V(\theta)k_r/\omega$ y $\cos \theta = V(\theta)k_z/\omega$ con $k_r^2 = k_x^2 + k_y^2$, donde ω es la frecuencia angular y k_x , k_y y k_z los números de onda. Se logra para la onda P :

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} \approx \frac{V^2(\theta)k_r^2}{\omega^2} + \frac{V^2(\theta)k_z^2}{\omega^2} + 2\varepsilon \sin^2 \theta - \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\frac{V^2(\theta)k_r^2}{\omega^2} + \frac{V^2(\theta)k_z^2}{\omega^2} + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}},$$

teniendo en cuenta que: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Entonces:

$$\sin^2 \theta = \frac{V^2(\theta)k_r^2}{\omega^2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{V^2(\theta)k_z^2}{\omega^2}$$

$$1 = \frac{V^2(\theta)}{\omega^2}(k_r^2 + k_z^2) \Rightarrow V^2(\theta) = \frac{\omega^2}{k_r^2 + k_z^2}.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (4.2.3), se consigue:

$$\frac{\omega^2}{k_r^2 + k_z^2} \approx V_{p0}^2 \left[\frac{V^2(\theta)k_r^2}{\omega^2} + \frac{V^2(\theta)k_z^2}{\omega^2} + 2\varepsilon \frac{V^2(\theta)k_r^2}{\omega^2} \theta - \frac{\frac{2(\varepsilon - \delta)V^4(\theta)k_r^2k_z^2}{\omega^4}}{\frac{V^2(\theta)k_r^2}{\omega^2} + \frac{V^2(\theta)k_z^2}{\omega^2} + \frac{2\varepsilon V^2(\theta)k_r^2}{\omega^2 f}} \right],$$

$$\frac{\omega^2}{k_r^2 + k_z^2} \approx V_{p0}^2 \left[\frac{V^2(\theta)}{\omega^2}(1 + 2\varepsilon)k_r^2 + \frac{V^2(\theta)}{\omega^2}k_z^2 - \frac{\frac{V^4(\theta)}{\omega^4}(2(\varepsilon - \delta)k_r^2k_z^2)}{\frac{V^2(\theta)}{\omega^2}\left(\left(1 + \frac{2\varepsilon}{f}\right)k_r^2 + k_z^2\right)} \right].$$

Llevando de nuevo a la forma $V^2(\theta) = \frac{\omega^2}{k_r^2 + k_z^2}$.

$$V^2(\theta) \approx V_{p0}^2 \left[\frac{V^2(\theta)}{\omega^2}(1 + 2\varepsilon)k_r^2 + \frac{V^2(\theta)}{\omega^2}k_z^2 - \frac{V^2(\theta)}{\omega^2} \left(\frac{(2(\varepsilon - \delta)k_r^2k_z^2)}{\left(1 + \frac{2\varepsilon}{f}\right)k_r^2 + k_z^2} \right) \right]$$

Multiplicando ambos lados por ω^2 y dividiendo entre $V^2(\theta)$ obtenemos la relación de dispersión para la onda P .

$$\omega^2 = V_{p0}^2 \left[(1 + 2\varepsilon)k_r^2 + k_z^2 - \frac{2(\varepsilon - \delta)k_r^2k_z^2}{Fk_r^2 + k_z^2} \right]. \quad (4.8)$$

Para la onda SV , se hace el mismo proceso que se realizó para la ecuación (4.8), pero esta vez teniendo en cuenta la definición de f , presentada en la sección 6.

$$V^2(\theta) \approx V_{p0}^2 \left[\lambda - \left(\lambda - \frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} \right) + \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} \right)} \right],$$

$$V^2(\theta) \approx V_{p0}^2 \left[\frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} + \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} \right)} \right],$$

$$V^2(\theta) \approx V_{p0}^2 \left[\frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f} \right)} \right],$$

$$V^2(\theta) \approx V_{p0}^2 \left[\frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} \left(\frac{V^2(\theta)k_r^2}{\omega^2} + \frac{V^2(\theta)k_z^2}{\omega^2} \right) + \frac{\frac{2(\varepsilon-\delta)V^4(\theta)k_r^2k_z^2}{\omega^4}}{\frac{V^2(\theta)}{\omega^2}k_r^2 + \frac{V^2(\theta)}{\omega^2}k_z^2 + \frac{2\varepsilon V^2(\theta)k_r^2}{\omega^2 f}} \right],$$

$$V^2(\theta) \approx V_{p0}^2 \left[\frac{V^2(\theta)}{\omega^2} \left[\frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} (k_r^2 + k_z^2) \right] + \frac{\frac{V^4(\theta)}{\omega^4}}{\frac{V^2(\theta)}{\omega^2}} \left(\frac{2(\varepsilon - \delta)k_r^2k_z^2}{\left(1 + \frac{2\varepsilon}{f}\right)k_r^2 + k_z^2} \right) \right],$$

$$V^2(\theta) \approx V_{p0}^2 \left[\frac{V^2(\theta)}{\omega^2} \left[\frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} (k_r^2 + k_z^2) \right] + \frac{V^2(\theta)}{\omega^2} \left(\frac{2(\varepsilon - \delta)k_r^2k_z^2}{\left(1 + \frac{2\varepsilon}{f}\right)k_r^2 + k_z^2} \right) \right].$$

De nuevo multiplicando ambos lados por ω^2 y dividiendo entre $V^2(\theta)$ obtenemos la relación de dispersión para la onda SV .

$$\omega^2 = V_{p0}^2 \left[\frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} (k_r^2 + k_z^2) + \frac{2(\varepsilon - \delta)k_r^2k_z^2}{Fk_r^2 + k_z^2} \right] \quad \text{onda SV.} \quad (4.9)$$

Finalmente, se resumen las relaciones de dispersión, tanto para la onda P , como para la onda SV .

$$\omega^2 = V_{p0}^2 \left[(1 + 2\varepsilon)k_r^2 + k_z^2 - \frac{2(\varepsilon - \delta)k_r^2k_z^2}{Fk_r^2 + k_z^2} \right] \quad \text{onda P.}$$

$$\omega^2 = V_{p0}^2 \left[\frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} (k_r^2 + k_z^2) + \frac{2(\varepsilon - \delta)k_r^2k_z^2}{Fk_r^2 + k_z^2} \right] \quad \text{onda SV.} \quad (4.10)$$

donde,

$$F = 1 + \frac{2\varepsilon}{f} = \frac{f + 2\varepsilon}{f} = \frac{1 - \frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} + 2\varepsilon}{1 - \frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{V_{p0}^2 - V_{s0}^2}{V_{p0}^2} + 2\varepsilon}{\frac{V_{p0}^2 - V_{s0}^2}{V_{p0}^2}} = \frac{\frac{V_{p0}^2 - V_{s0}^2 + 2\varepsilon V_{p0}^2}{V_{p0}^2}}{\frac{V_{p0}^2 - V_{s0}^2}{V_{p0}^2}}.$$

Por tanto, factorizando V_{p0}^2 obtenemos el valor de F en función de V_{s0} y V_{p0} .

$$F = 1 + \frac{2\varepsilon}{f} = \frac{(1 + 2\varepsilon)V_{p0}^2 - V_{s0}^2}{V_{p0}^2 - V_{s0}^2}. \quad (4.11)$$

4.2.4. Deducción de la ecuación de onda desacoplada en medios con anisotropía tipo TTI

En la sección 4.2.3, se determinó las ecuaciones desacopladas de onda acústica para medios con anisotropía tipo VTI, en esta sección se realiza el mismo proceso para determinar la relación de dispersión para medios con anisotropía tipo TTI, pero esta vez se hace una rotación vector de onda de forma equivalente a como se elaboró en la sección 3.4. Para esto se utiliza el ajusta del valor de la componente paralela de la velocidad de la onda S igual a cero ($V_{s0} = 0$). También se aplica la hipótesis de anisotropía débil (parámetros de *Thomsen* muy pequeños) y se introduce la matriz de rotación R definida anteriormente para obtener la relación de dispersión en un medio TTI. Entonces escribiendo las relaciones de dispersión de las ondas P y SV mostradas en la ecuación (4.10), pero esta vez para medios TTI, se tiene:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= V_{p0}^2 \left[(1 + 2\varepsilon)\widehat{k}_r^2 + \widehat{k}_z^2 - \frac{2(\varepsilon - \delta)\widehat{k}_r^2\widehat{k}_z^2}{\widehat{k}_r^2 + \widehat{k}_z^2} \right] && \text{onda } P. \\ \omega^2 &= V_{p0}^2 \left[\frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2}(\widehat{k}_r^2 + \widehat{k}_z^2) + \frac{2(\varepsilon - \delta)\widehat{k}_r^2\widehat{k}_z^2}{\widehat{k}_r^2 + \widehat{k}_z^2} \right] && \text{onda } SV.\end{aligned}\tag{4.12}$$

donde el valor de $F = 1$, $\widehat{k}_r^2 = \widehat{k}_x^2 + \widehat{k}_y^2$, \widehat{k}_x , \widehat{k}_y y \widehat{k}_z son los números de onda en el sistema de coordenadas rotado debido a la matriz R . Los valores de \widehat{k}_z y \widehat{k}_r se obtienen a partir de la ecuaciones (25) y (27) (Ver Apéndice 6).

$$\begin{aligned}\widehat{k}_r^2 &= k_r^2 - \sin^2 \theta (\cos^2 \phi k_x^2 + \sin^2 \phi k_y^2 - k_z^2 + \sin 2\phi k_x k_y) \\ &\quad + \sin 2\theta (\cos \phi k_x k_z + \sin \phi k_y k_z), \\ \widehat{k}_z^2 &= k_z^2 + \sin^2 \theta (\cos^2 \phi k_x^2 + \sin^2 \phi k_y^2 - k_z^2 + \sin 2\phi k_x k_y) \\ &\quad - \sin 2\theta (\cos \phi k_x k_z + \sin \phi k_y k_z).\end{aligned}\tag{4.13}$$

Por lo tanto se tiene:

$$\widehat{k}_r^2 + \widehat{k}_z^2 = k_r^2 + k_z^2.\tag{4.14}$$

Sustituyendo la ecuación (4.13) y (4.14) en (4.12), y luego simplificando, se obtienen las relaciones de dispersión para medios acústicos con anisotropía tipo TTI de las ondas P y SV en la versión 2-D.

$$\begin{aligned}
\omega^2 = & V_{p0}^2 \left[(k_x^2 + k_z^2 + (2\varepsilon \cos^2 \theta)) \frac{k_x^4}{k_x^2 + k_z^2} \right. \\
& + (2\varepsilon \sin^4 \theta + 2\delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \frac{k_z^4}{k_x^2 + k_z^2} \\
& + (-4\varepsilon \sin 2\theta \cos^2 \theta + \delta \sin 4\theta) \frac{k_x^3 k_z}{k_x^2 + k_z^2} \\
& + (-4\varepsilon \sin 2\theta \cos^2 \theta + \delta \sin 4\theta) \frac{k_x k_z^3}{k_x^2 + k_z^2} \\
& \left. + (3\varepsilon \sin^2 2\theta - \delta \sin^2 2\theta + 2\delta \cos^2 2\theta) \frac{k_x^2 k_z^2}{k_x^2 + k_z^2} \right] \quad \text{Onda } P \\
\omega^2 = & V_{p0}^2 \left[\frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} (k_x^2 + k_z^2) + (\varepsilon - \delta) \left(2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{k_x^4}{k_x^2 + k_z^2} \right. \right. \\
& + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{k_z^4}{k_x^2 + k_z^2} + \sin 4\theta \frac{k_x^3 k_z}{k_x^2 + k_z^2} \\
& \left. \left. + (-\sin 4\theta) \frac{k_x k_z^3}{k_x^2 + k_z^2} + (\cos^2 2\theta + \cos \theta) \frac{k_x^2 k_z^2}{k_x^2 + k_z^2} \right) \right] \quad \text{Onda } SV.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (4.15) por el campo de onda $p(\omega, k_x, k_z)$ en el dominio de Fourier, y luego aplicando la transformada de Fourier inversa ambos lados haciendo uso de la relación $i\omega \rightarrow \partial/\partial t$, se obtiene las ecuaciones desacopladas de onda acústica 2-D en medios TTI para las ondas P y SV en el dominio tiempo y numero de onda.

$$\boxed{
\begin{aligned}
\frac{1}{V_{p0}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = & - \left\{ (k_x^2 + k_z^2 + (2\varepsilon \cos^4 \theta + 2\delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta)) \frac{k_x^4}{k_x^2 + k_z^2} \right. \\
& + (2\varepsilon \sin^4 \theta + 2\delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \frac{k_z^4}{k_x^2 + k_z^2} \\
& + (-4\varepsilon \sin 2\theta \cos^2 \theta + \delta \sin 4\theta) \frac{k_x^3 k_z}{k_x^2 + k_z^2} \\
& + (-4\varepsilon \sin 2\theta \cos^2 \theta + \delta \sin 4\theta) \frac{k_x k_z^3}{k_x^2 + k_z^2} \\
& \left. + (3\varepsilon \sin^2 2\theta - \delta \sin^2 2\theta + 2\delta \cos^2 2\theta) \frac{k_x^2 k_z^2}{k_x^2 + k_z^2} \right\} \cdot p
\end{aligned}
}$$

$$\frac{1}{V_{p0}^2} \frac{\partial^2 P_{SV}}{\partial t^2} = - \left\{ \frac{V_{s0}^2}{V_{p0}^2} (k_x^2 + k_z^2) + (\varepsilon - \delta) \left(2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{k_x^4}{k_x^2 + k_z^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{k_z^4}{k_x^2 + k_z^2} + \sin 4\theta \frac{k_x^3 k_z}{k_x^2 + k_z^2} \right. \right. \\ \left. \left. + (-\sin 4\theta) \frac{k_x k_z^3}{k_x^2 + k_z^2} + (\cos^2 2\theta + \cos \theta) \frac{k_x^2 k_z^2}{k_x^2 + k_z^2} \right) \right\} \cdot p_{SV} \quad (4.16)$$

4.2.5. Implementación numérica

La solución numérica de la ecuación (4.16) se dificulta al momento de ser deducida por medio del método numérico en diferencias finitas (FD) (Zhan, 2012). La metodología para implementar numéricamente la ecuación (4.16), es aplicar individualmente a cada termino espacial la transformada de Fourier inversa y luego multiplicar por el coeficiente que está en términos de la variable espacial antes de cada suma.

El método pseudo-espectral consiste en aproximar derivadas en una ecuación diferencial, utilizando la propiedad de la derivada de la transformada de Fourier la cual es obtenida numéricamente con el algoritmo de la transformada de rápida de Fourier o FFT (Cooley et al., 1965). Dada la función $f(x)$ se expresa la transformada de Fourier por k el número de onda (Gazdag, 1978). La propiedad de la derivada de la transformada de Fourier es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F^{-1} \left[ik \tilde{f}(k) \right], \quad (4.17)$$

para la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = F^{-1} \left[-k^2 \tilde{f}(k) \right]. \quad (4.18)$$

Reemplazando en la ecuación (4.16), se obtiene la relación de la discretización de la ecuación de onda desacoplada propuesta por Zhan (2012). Una vez los operadores espaciales hayan sido evaluados por medio de esta técnica, la ecuación (4.16) puede ostentar un ventaja usando el método de expansión rápida (REM) (Zhan, 2012). El método de expansión rápida (REM) en problemas de

migración tiempo reversa propuestos por Pestana y Stoffa (2010) para casos isotropos han sido aplicados en casos de anisotropía VTI (Pestana et al., 2011). REM es basado en términos de la expansión de los polinomios ortogonales de Chebyshev (Tai-Ezer et al., 1987) y fue aplicado en modelado sísmico por Kosloff et al. (1989). El método de expansión rápida es una buena aproximación en la práctica donde este es numéricamente estable y no presenta un comportamiento divergente en modelos de contrastes fuertes (Carcione et al., 2002), y cuando se combina con el método pseudo-espectral para los operadores espaciales, la propagación de la onda es libre de dispersión numérica. Además, el estudio de la estabilidad numérica en el modelado en medios con anisotropía polar inclinada (TTI) para el caso de las ecuaciones desacopladas de la onda P y la onda SV es más estable que las ecuaciones acopladas convencionales en medios con anisotropía polar inclinada (Zhan, 2012). Sin embargo, en la practica la estabilidad todavía se presenta y se logra observar en el campo de onda. Y por otra parte, la presencia de las derivadas espaciales mixtas y cambios fuertes en los parámetros de anisotropía, particularmente en los ejes de simetría desencadenan problemas al momento de desarrollar el modelado.

Capítulo

5

MODELADO NUMÉRICO EN MODELOS SIMPLES PARA LA ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA EN MEDIOS CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL E INCLINADA

A continuación se presentan los resultados obtenidos del modelado sísmico con anisotropía polar vertical e inclinada, basado en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas propuestas por Alkhalifah (2000), Zhang et al. (2005), Huang et al. (2011), Du et al. (2008) y Fletcher et al. (2008). Estos resultados muestran el campo de onda para un medio acústico anisótropo con su respectivo registro sísmico. Se ha considerado anisotropía polar vertical para los casos de Alkhalifah (2000), Huang et al. (2011), Du et al. (2008) según los esquemas discretos en diferencias finitas presentados anteriormente en las ecuaciones (3.12) - (3.14), (3.48) - (3.49) y (3.66) - (3.67), y medios con anisotropía polar inclinada para los casos de Zhang et al. (2005) y Fletcher et al. (2008), según los esquemas determinados en las ecuaciones (3.15) y (3.106) - (3.107).

Por otra parte, se presentan los valores de intervalo de muestreo espacial y tem-

poral para cada caso propuesto en este trabajo, estos valores garantizan la estabilidad y dispersión numérica de los esquemas desarrollados en anteriores secciones. Estos valores fueron determinados por medio de las ecuaciones (3.20) y (3.21).

A continuación, se presenta la tabla 1, esta se divide en dos columnas fundamentales, medios isótropos y medios anisótropos, la primera columna de la izquierda muestra cada caso de estudio, donde **C1**, denota una capa y donde **C3**, denota tres capas. Las especificaciones de cada situación se presentan en las siguientes secciones.

Tabla 1: Valores efectivos de intervalo de muestreo espacial y temporal para evitar dispersión y estabilidad numérica en medios con anisotropía polar vertical e inclinada.

Aproximaciones	Número de capas	Isotropía		Número de muestras en el tiempo	Anisotropía		Número de muestras en el tiempo
		$\Delta x (m)$	$\Delta t (s)$		$\Delta x (m)$	$\Delta t (s)$	
Alkhalifah VTI	C1	0.694	0.00020	400	0.694	0.00017	400
	C3	0.694	0.00011	800	0.694	0.00012	900
Huang VTI	C1	0.694	0.00018	5000	0.694	0.00010	5000
	C3	0.694	0.00010	6000	0.694	0.00010	6000
Du et al. VTI	C1	0.694	0.00041	600	0.350	0.00013	600
	C3	0.694	0.00021	800	0.350	0.00015	650
Zhang et al. TTI	C1	0.694	0.00032	460	1.088	0.00031	740
	C3	0.694	0.00017	1300	0.694	0.00013	1300
Fletcher et al. TTI	C1	0.694	0.00018	800	0.694	0.00020	800
	C3	0.694	0.00021	1100	0.694	0.00012	900

5.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ACOPLADAS PARA MEDIOS ACÚSTICOS CON ANISOTROPÍA POLAR VERTICAL

Considerando los esquemas discretos de las ecuaciones (3.12)-(3.14), (3.48)-(3.49) y (3.66)-(3.67), se modela el medio acústico homogéneo considerando anisotropía polar vertical para dos modelos simples, el modelo 1 consiste de una sola capa horizontal homogénea y el modelo 2 consiste en tres capas horizontales homogéneas.

Modelo de una capa horizontal

En el primer modelo se considera solo una capa horizontal, donde se obtiene el campo de onda en un medio acústico con anisotropía polar vertical (VTI), se consideran valores constantes a los parámetros de anisotropía (ε , δ y e_c) (ver Tabla 1 de Huang et al. (2011)). En todos los casos las dimensiones del modelo son $500 (m)$ de longitud por $500 (m)$ de profundidad, la ondícula que simula la fuente del pulso está dada por la expresión (Scales, 1997):

$$f_s(t) = \left[1 - 2 \left(\frac{\omega_0(t - t_0)}{2} \right)^2 \right] e^{-\left(\frac{\omega_0(t - t_0)}{2} \right)^2}, \quad (5.1)$$

donde ω_0 y t_0 es la frecuencia y el tiempo inicial del pulso. La fuente está ubicada en una posición $(250, 250) (m)$, la frecuencia fundamental de la ondícula es $60 H_z$, el paso de malla y paso temporal para evitar la dispersión y estabilidad numérica es variable para cada caso (ver Tabla 1), la componente de la velocidad de la onda P , es $V_{p0} = 1000 (m/s)$.

Caso 1: Medio isótropo.

En el primer caso, se obtiene el frente de onda esférico considerando un medio acústico homogéneo isótropo, es decir los valores de los parámetros de anisotropía son igual cero, $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$, $e_c = 0$ (ver Imágenes inferiores de las figuras 34 - 37).

El valor de las velocidades V_{p0} , V_x y v_n se determinan por medio de las ecuaciones (16) y (20), obteniendo:

$$\begin{aligned} V_{p0} &= 1000 (m/s) \\ V_x &= 1000 (m/s) \\ v_n &= 1000 (m/s) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Caso 2: Medio con anisotropía polar vertical.

En el segundo caso, se considera un medio acústico homogéneo con anisotropía polar vertical (ver Figuras 38 - 41), donde se consideran los siguientes valores

para los parámetros de anisotropía $\varepsilon = 0,2$, $\delta = 0,1$ y $e_c = -0,38$. Se obtiene el frente de onda para la onda compresional P y la onda con menor velocidad, SV para los casos de Alkhalifah (2000), Huang et al. (2011) y Du et al. (2008).

El valor de las velocidades V_{p0} , V_x y v_n para este caso, se determinan por medio de las ecuaciones (16) y (20), Logrando:

$$\begin{aligned} V_{p0} &= 1000(m/s) \\ V_x &= 1183,21(m/s) \\ v_n &= 1095,45(m/s) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Modelo de tres capas horizontales

Este modelo 2 consiste en tres capas ubicadas horizontalmente, el primer cambio de litología se encuentra a 120 (m) y el segundo a 160 (m). Las dimensiones del modelo son de 750 (m) de longitud por 500 (m) de profundidad, la ondícula que simula la fuente se ubica en la posición $(x_0, z_0) = (375, 50)$ (m), la frecuencia fundamental de la ondícula es 60 (H_z), el paso de malla Δh y paso de tiempo Δt están determinados por las ecuaciones (3.20) y (3.21), presentados en la Tabla (1). En el registro sintético se ubican 374 geófonos a lado y lado de la fuente en una posición $g_x, g_z = (375, 52)$ (m), donde el eje horizontal representa el *offset*, que es definido como la distancia entre la fuente y el receptor, el eje vertical representa la evolución en el tiempo del campo.

Caso 1: Medio isótropo.

El primer caso, se considera un medio acústico heterogéneo isótropo, en donde, el valor de la velocidad en la primera capa isótropa es de $V_{p0}^1 = 1000$ (m/s), la velocidad de la segunda capa es $V_{p0}^2 = 1500$ (m/s) y la velocidad de la última capa es $V_{p0}^3 = 1800$ (m/s). Los valores de anisotropía son respectivamente $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0)$ y $(\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0)$.

En las gráficas 42 - 45 se presenta el campo de onda y el registro sísmico para un tiempo determinado. Se puede observar en las gráficas, que al ubicar la fuente en una capa isótropa, no aparece ningún rastro de la onda SV , ni en el

modelado, ni tampoco en el sismograma (ver imágenes de las figuras 42 - 45).

Caso 2: Medio con anisotropía polar vertical.

En este caso, se considera un medio acústico heterogéneo con anisotropía polar vertical, donde la primera capa posee un valor de anisotropía de $\varepsilon_1 = 0,2$ y $\delta_1 = 0,1$, con una velocidad de $V_{p0}^1 = 1000 (m/s)$, la segunda capa es totalmente isótropa con una velocidad $V_{p0}^2 = 1500 (m/s)$ y la tercera capa se considera anisotropía "elíptica", es decir los valores de anisotropía de Thomsen son iguales ($\varepsilon_3 = \delta_3 = 1$) y una velocidad $V_{p0}^3 = 1800 (m/s)$.

En la figuras 46 - 49 se presenta el campo de onda y el registro sísmico para un tiempo determinado por la tabla 1. Se puede observar en las figuras (46)-(49) que a diferencia de las figuras anteriores, el efecto inherente de la onda *SV* para los casos de Alkhalifah (2000) y Du et al. (2008), tanto en el campo de onda modelado, como en el registro sísmico, agregando ruido a la señal distorsionándola.

Figura 34: Campo de onda en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de $2 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Alkhalifah (2000)).

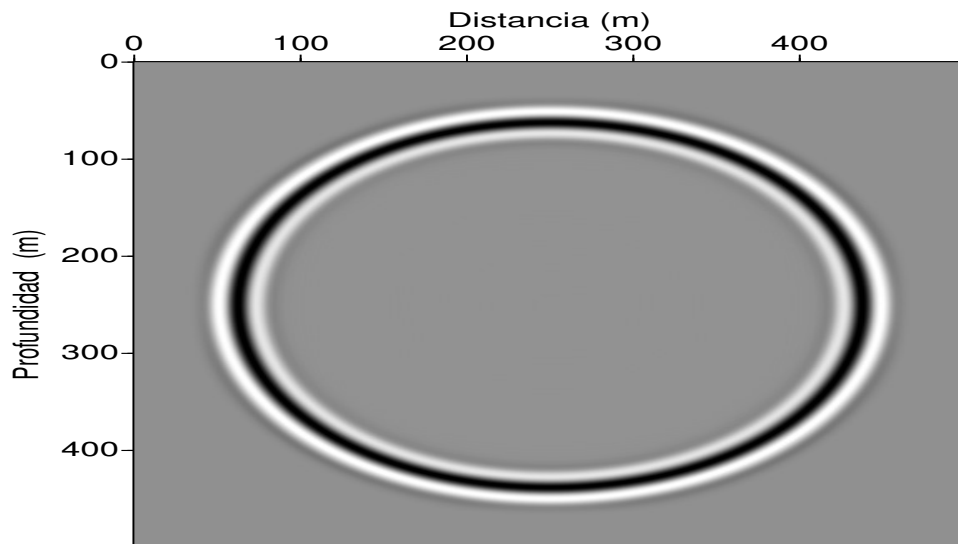


Figura 35: Campo de onda en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de 1 (*ms*). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Huang et al., (2011)).

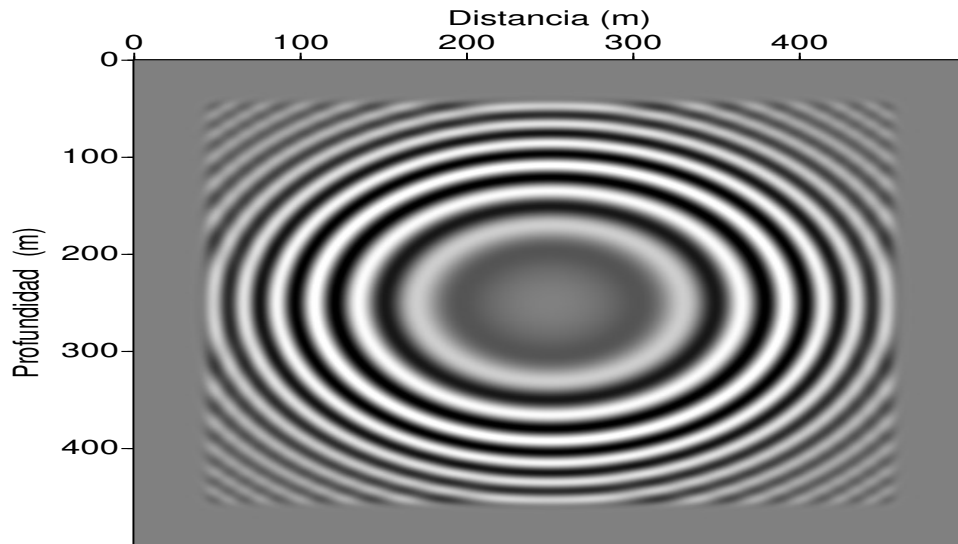


Figura 36: Campo de onda *P* en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de 4 (*ms*). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).

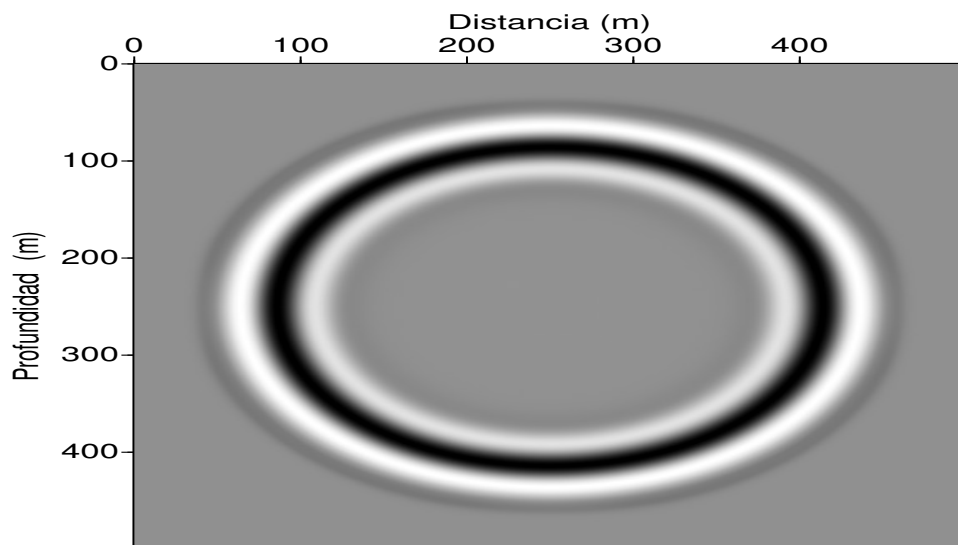


Figura 37: Campo de onda Q en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de $4 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).

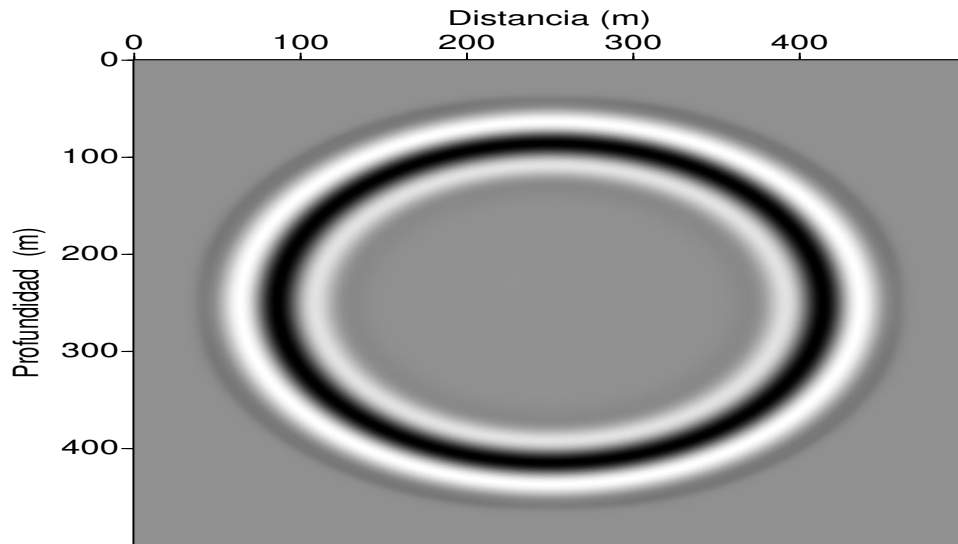


Figura 38: Campo de onda en un medio acústico con anisotropía polar vertical, en un tiempo de $1 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Alkhalifah (2000)).

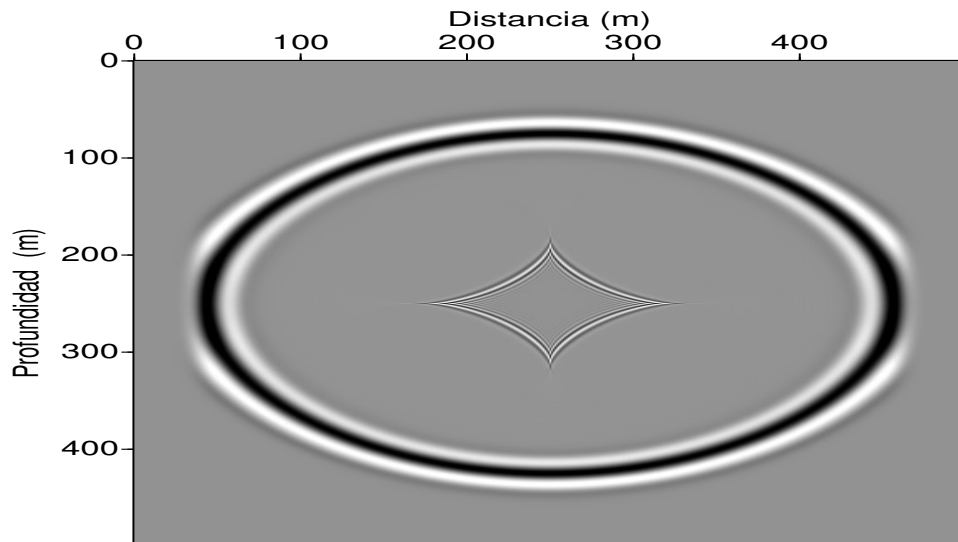


Figura 39: Campo de onda en un medio acústico con anisotropía polar vertical, en un tiempo de 1 (ms). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Huang et al., (2011)).

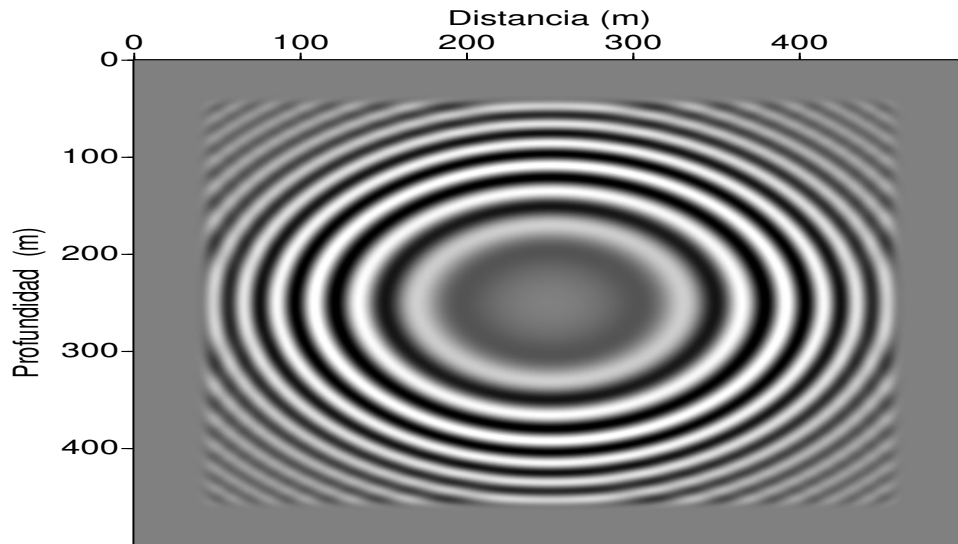


Figura 40: Campo de onda P en un medio acústico con anisotropía polar vertical, en un tiempo de 1 (ms). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).

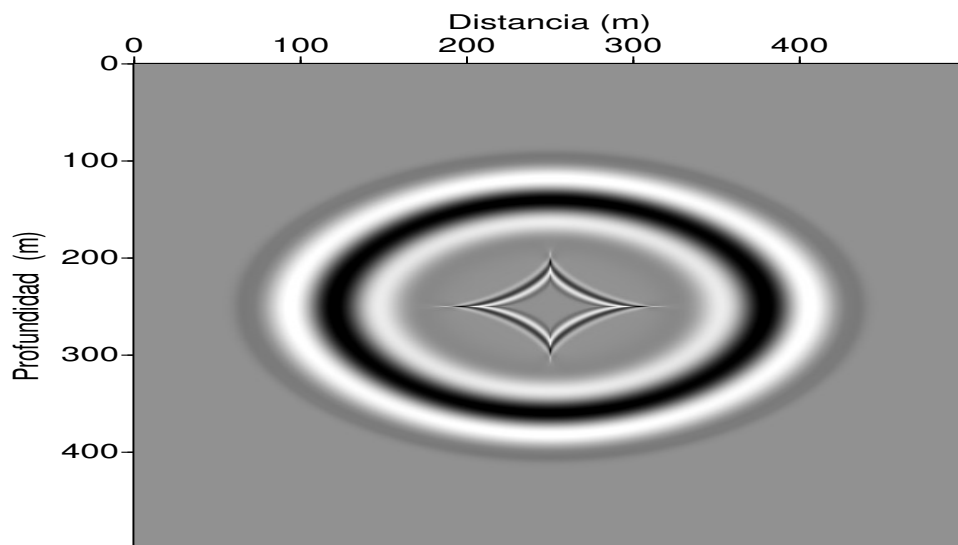


Figura 41: Campo de onda Q en un medio acústico con anisotropía polar vertical, en un tiempo de 1 (ms). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).

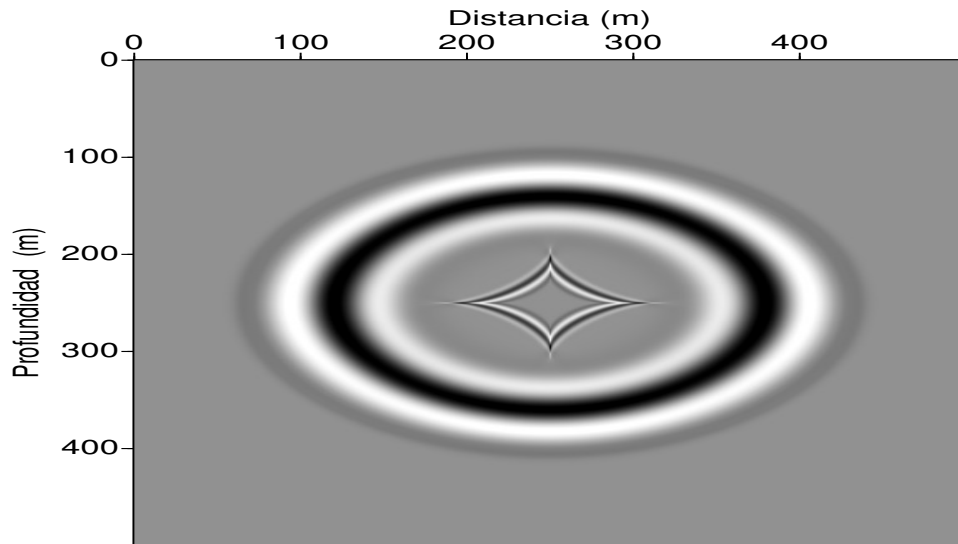


Figura 42: Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 1 (ms) (aproximación propuesta por Alkhalifah (2000)).

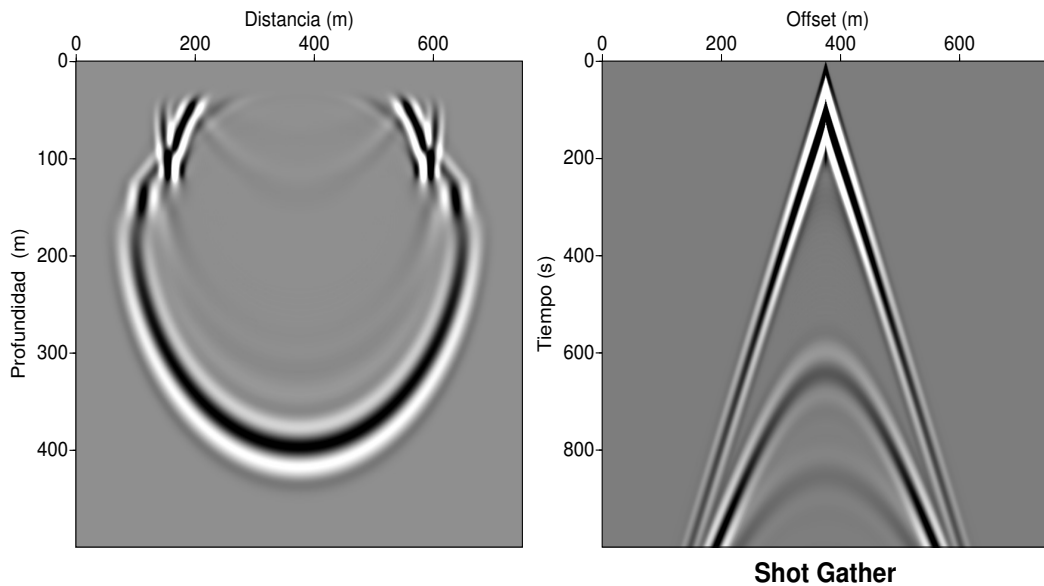


Figura 43: Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $1x$ (ms) (aproximación propuesta por Huang et al., (2011)).

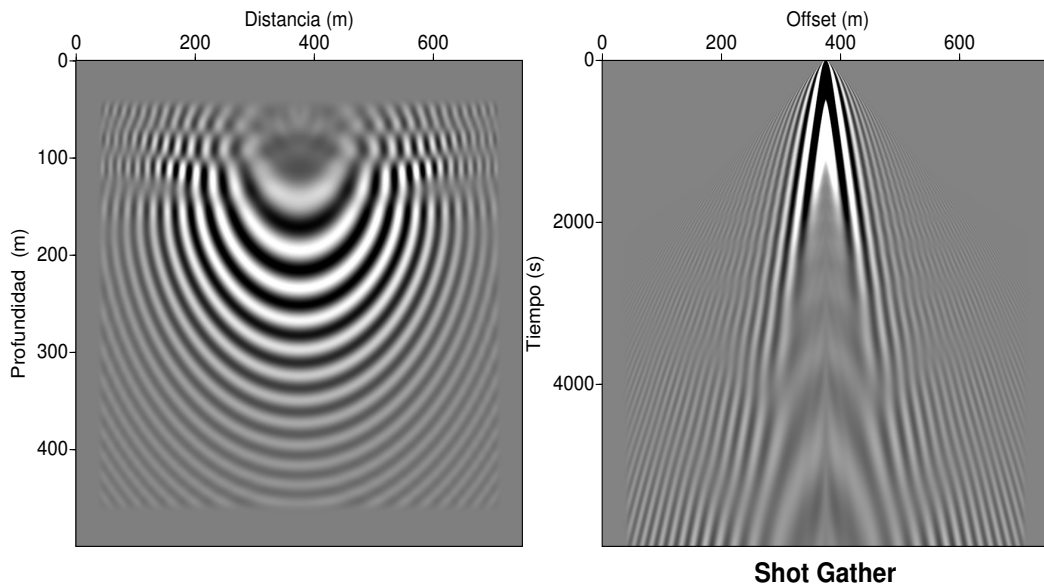


Figura 44: Campo de onda P en un medio acústico estratificado homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 2 (ms) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).

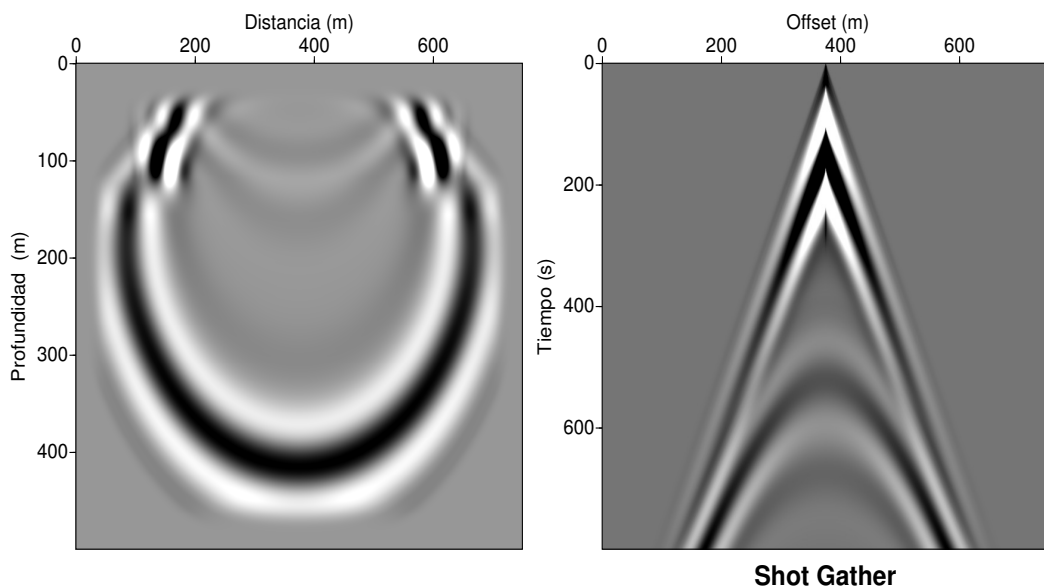


Figura 45: Campo de onda Q en un medio acústico estratificado homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 2 (ms) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).

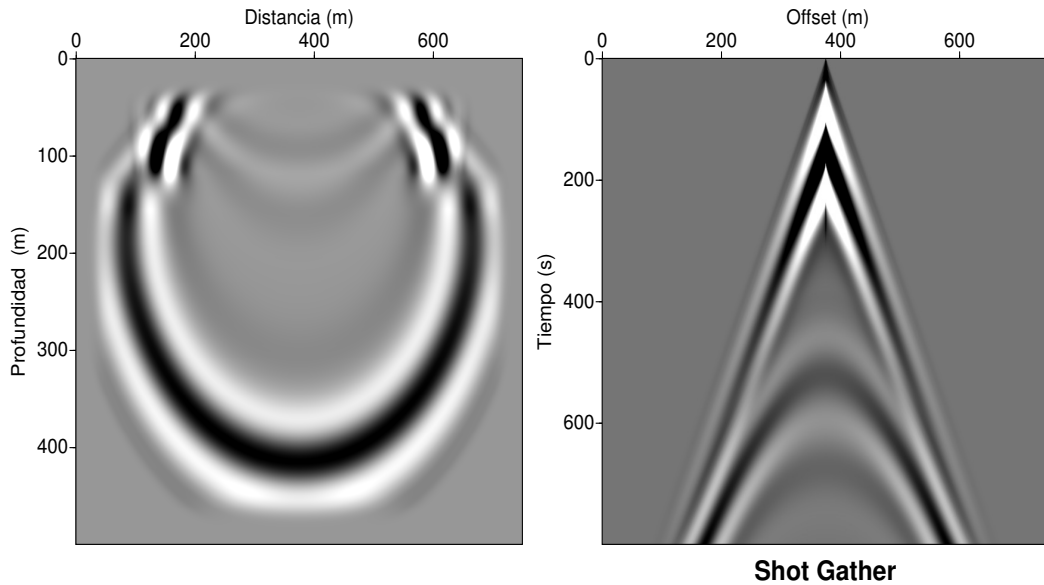


Figura 46: Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar vertical (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 2 (ms) (aproximación propuesta por Alkhalifah (2000)).

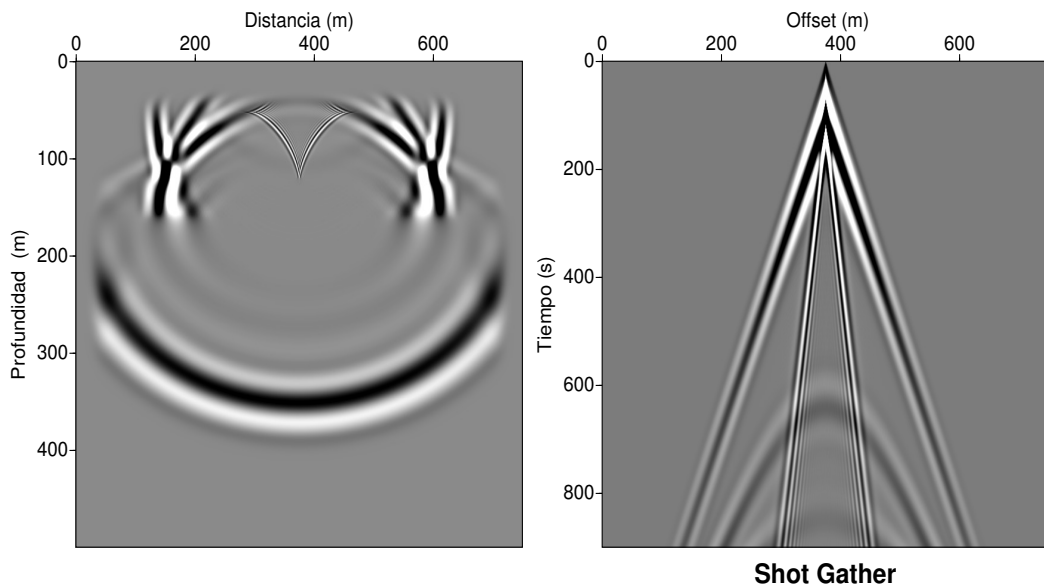


Figura 47: Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar vertical (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 7 (*ms*) (aproximación propuesta por Huang et al., (2011)).

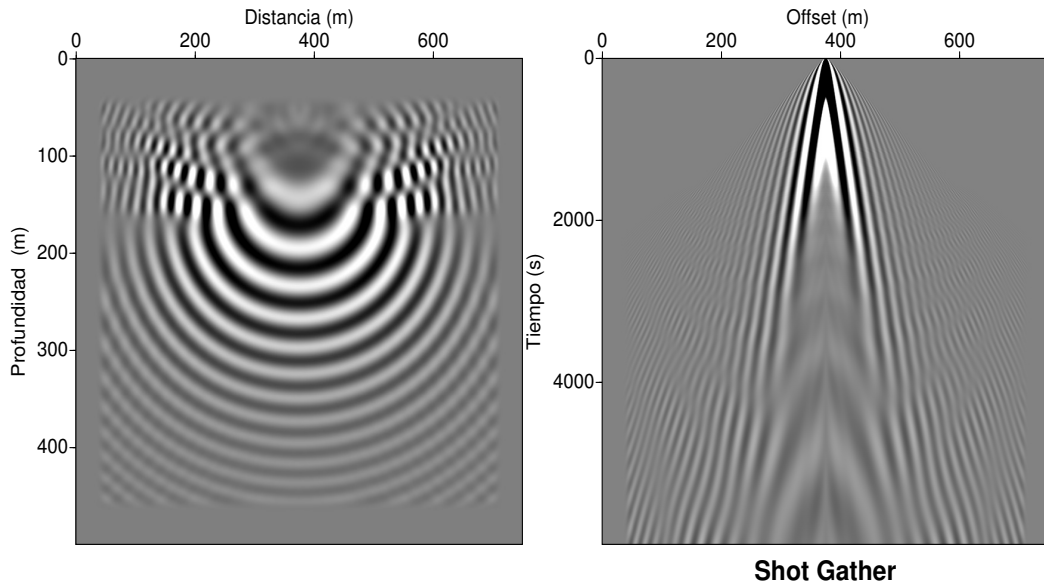


Figura 48: Campo de onda *P* en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar vertical (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 2 (*ms*) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).

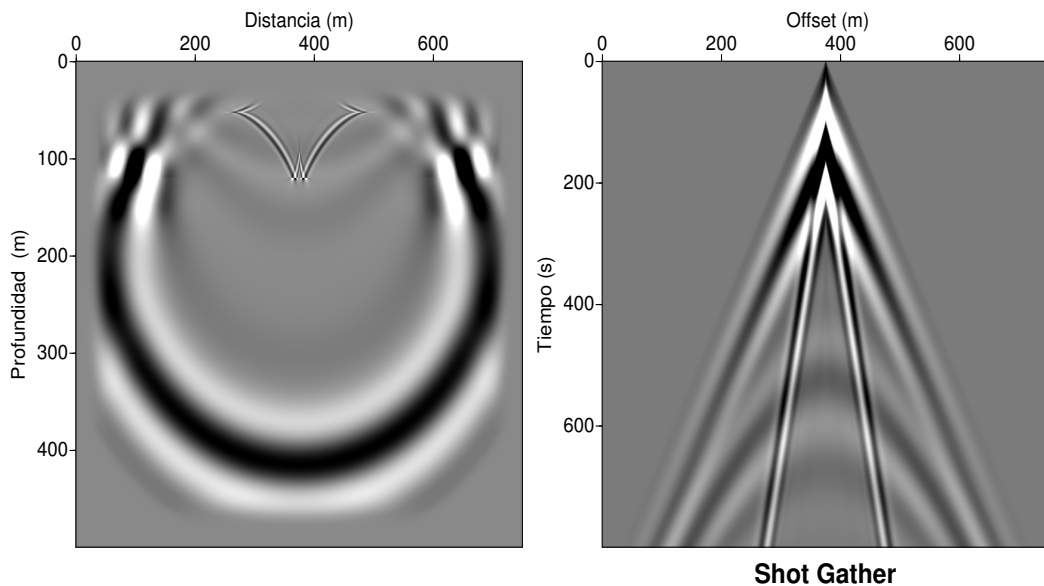
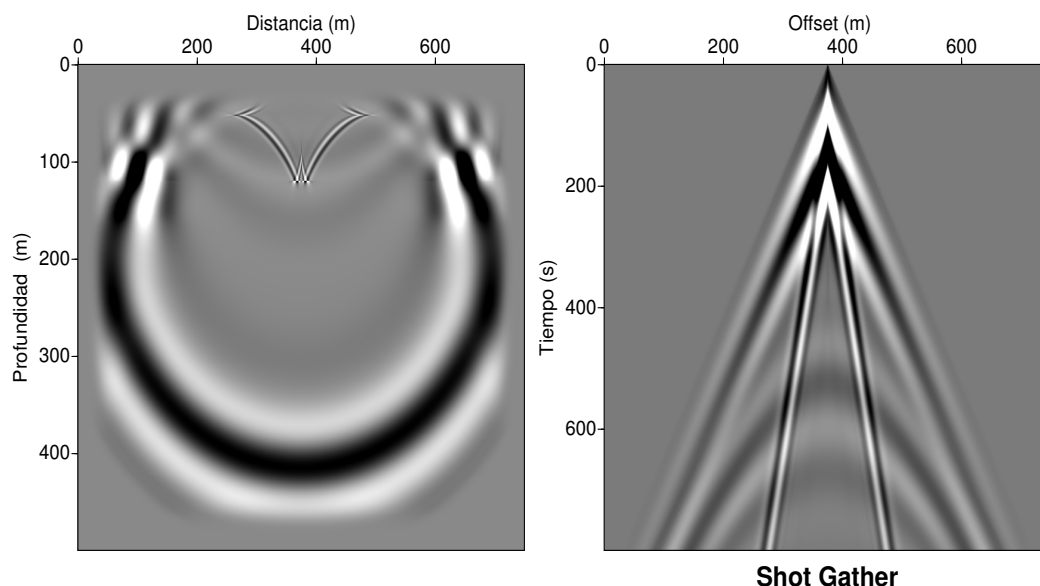


Figura 49: Campo de onda Q en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar vertical (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 2 ($m.s$) (aproximación propuesta por Du et al., (2008)).



5.2 ECUACIONES DIFERENCIALES ACOPLADAS PARA MEDIOS ACÚSTICOS CON ANISOTROPÍA POLAR INCLINADA

Para modelar el campo de onda en un medio acústico homogéneo con anisotropía polar inclinada o TTI, propuesto por Zhang et al. (2005) y Fletcher et al. (2008), se consideran los esquemas numéricos presentados en las ecuaciones (3.15) y (3.106)-(3.107), se modela los campos de onda considerando anisotropía polar inclinada, de forma similar como se realizó en medios con anisotropía vertical se consideran dos modelos, uno de una capa horizontal y un segundo modelo de tres capas horizontales homogéneas.

Modelo de una capa horizontal

En el primer modelo se considera solo una capa horizontal, donde se obtiene el campo de onda de un medio acústico con anisotropía polar inclinada (TTI). En

todos los casos las dimensiones del modelo son 500 (m) de longitud por 500 (m) de profundidad, la ondícula que simula la fuente del pulso está dada por la expresión presentada en la ecuación (5.1) (Scales, 1997).

Caso 1: Medio isótropo.

En el primer caso consiste en una sola capa horizontal isótropa con valores de anisotropía $\varepsilon = \delta = 0$, la velocidad de la onda P , es $V_{p0} = 1000 (m/s)$ (ver Figuras 50 - 52).

El valor de las velocidades V_{p0} , V_x y v_n se han determinado anteriormente en la ecuación (5.2).

Caso 2: Medio con anisotropía polar inclinada.

El segundo caso consiste de una sola capa horizontal homogénea anisótropa con valores de anisotropía $\varepsilon = 0,2$ y $\delta = 0,1$, la velocidad de la onda P , es $V_{p0} = 1000 (m/s)$, donde a diferencia del caso anterior se observa el efecto de la onda SV en el modelado (ver Figuras 53 - 55). El valor de las velocidades V_{p0} , V_x y v_n para este caso, se presentan en la ecuación (5.3).

Modelo de tres capas horizontales

Este modelo consiste en tres capas ubicadas horizontalmente, las características del modelo son idénticas a las presentadas en el modelo de tres capas, en el caso de las ecuaciones diferenciales con anisotropía polar vertical.

Caso 1: Medio isótropo.

En este caso se consideran tres capas horizontales homogéneas, pero con la diferencia que las capas poseen valores de anisotropía iguales $\varepsilon_1 = \delta_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \delta_2 = 0$ y $\varepsilon_3 = \delta_3 = 0$, la velocidad de la primera capa es $V_{p0}^1 = 1000 (m/s)$, la segunda capa posee un valor de velocidad $V_{p0}^2 = 1500 (m/s)$ y la velocidad de la última capa es $V_{p0}^3 = 1800 (m/s)$. En las figuras 56 - 58 se presenta el campo de onda y el registro sísmico para un tiempo determinado.

Caso 2: Medio con anisotropía polar inclinada.

El caso dos consiste de tres capas horizontales homogéneas con anisotropía polar inclinada, donde el valor de velocidad de la primera capa es $V_{p0}^1 = 1000 (m/s)$,

la segunda es $V_{p0}^2 = 1000 (m/s)$ y en la última capa $V_{p0}^3 = 1800 (m/s)$. Los valores de anisotropía son respectivamente $\varepsilon_1 = 0,2$ y $\delta_2 = 0,1$, la segunda capa se considera isótropa y la tercera capa se modela bajo la aproximación de anisotropía "elíptica" $\varepsilon_3 = \delta_3 = 1$ (ver Figuras 59 y 61).

Figura 50: Campo de onda en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de $3 (ms)$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Zhang et al. (2005)).

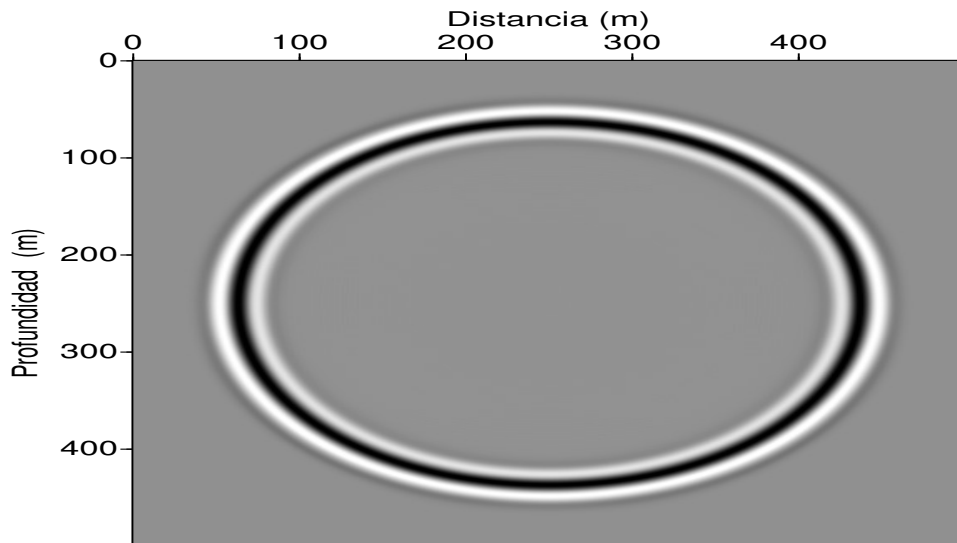


Figura 51: Campo de onda P en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de 1 (ms). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al. (2008)).

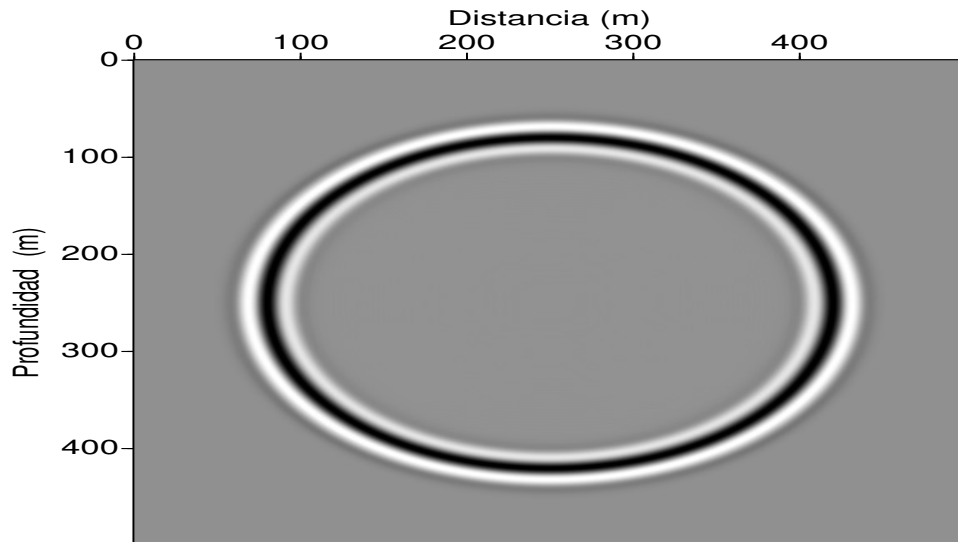


Figura 52: Campo de onda Q en un medio acústico homogéneo isótropo, en un tiempo de 1 (ms). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al. (2008)).

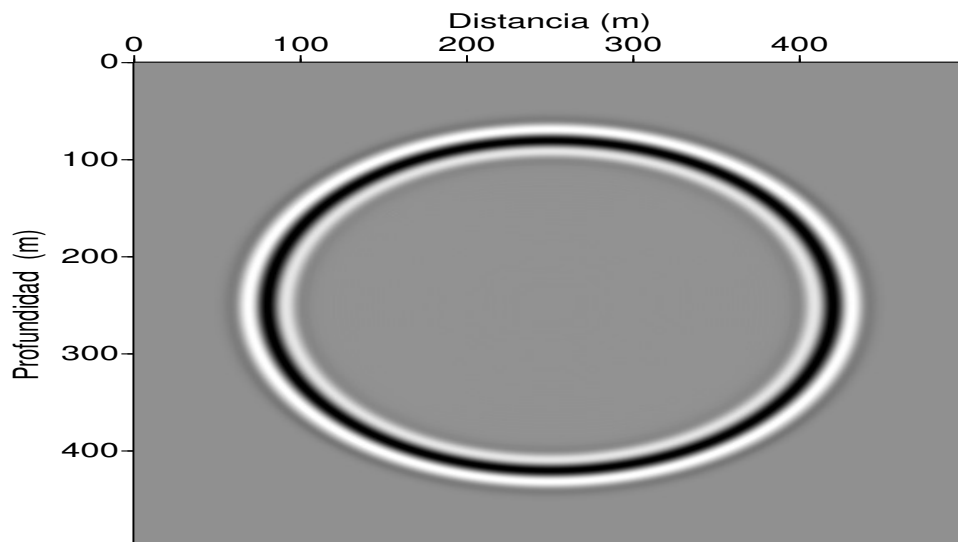


Figura 53: Campo de onda en un medio acústico homogéneo con anisotropía polar inclinada, en un tiempo de 3 (*ms*) para $\phi = 45^\circ$. El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Zhang et al. (2005)).

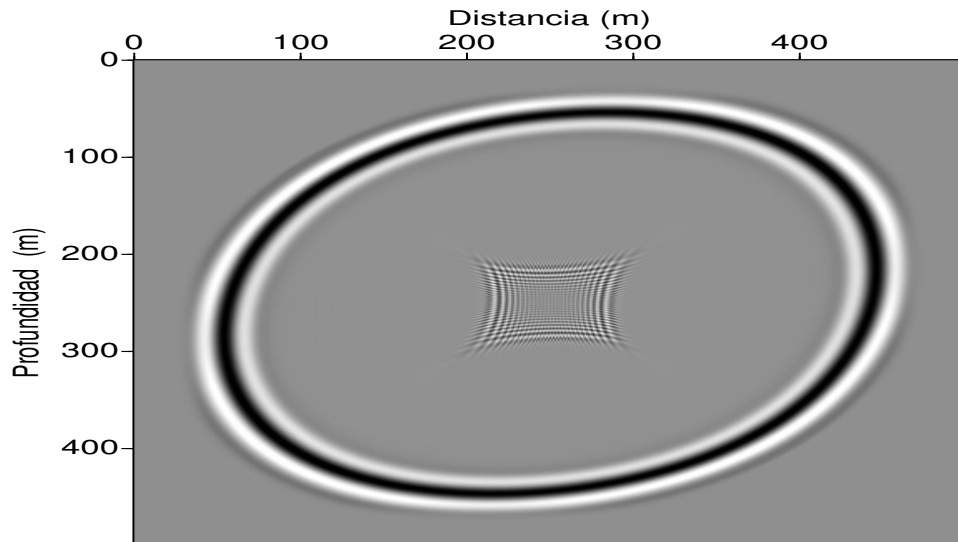


Figura 54: Campo de onda *P* en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar inclinada, en un tiempo de 1 (*ms*). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al. (2008)).

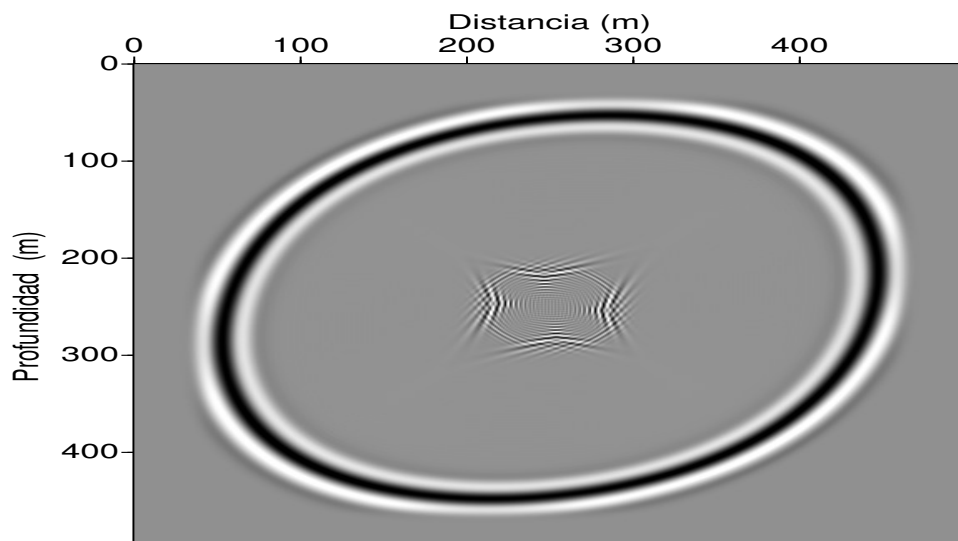


Figura 55: Campo de onda Q en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar inclinada, en un tiempo de 1 (ms). El valor de las velocidades se presentan en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al. (2008)).

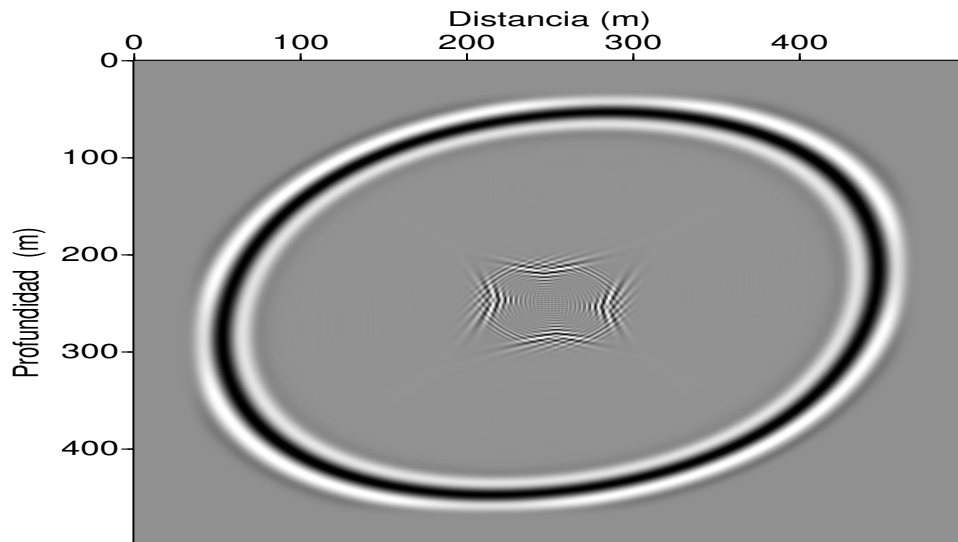


Figura 56: Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 1 (ms) para $\phi = 45^\circ$. El valor para la velocidad es obtenido en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Zhang et al. (2005)).

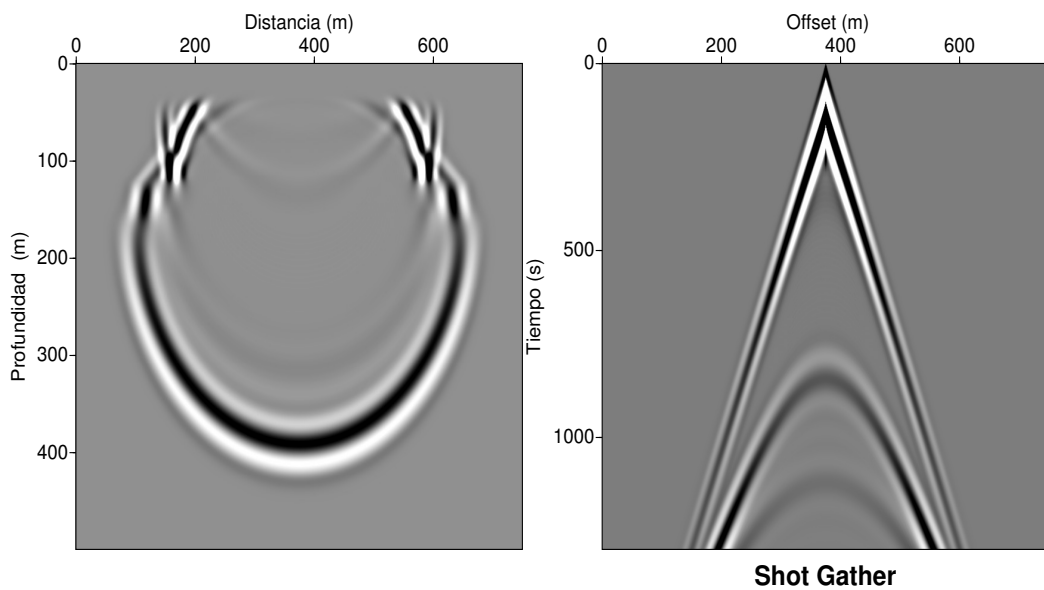


Figura 57: Campo de onda P en un medio estratificado acústico homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $2 (ms)$ para $\phi = 45^\circ$. El valor para la velocidad es obtenido en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al., (2008)).

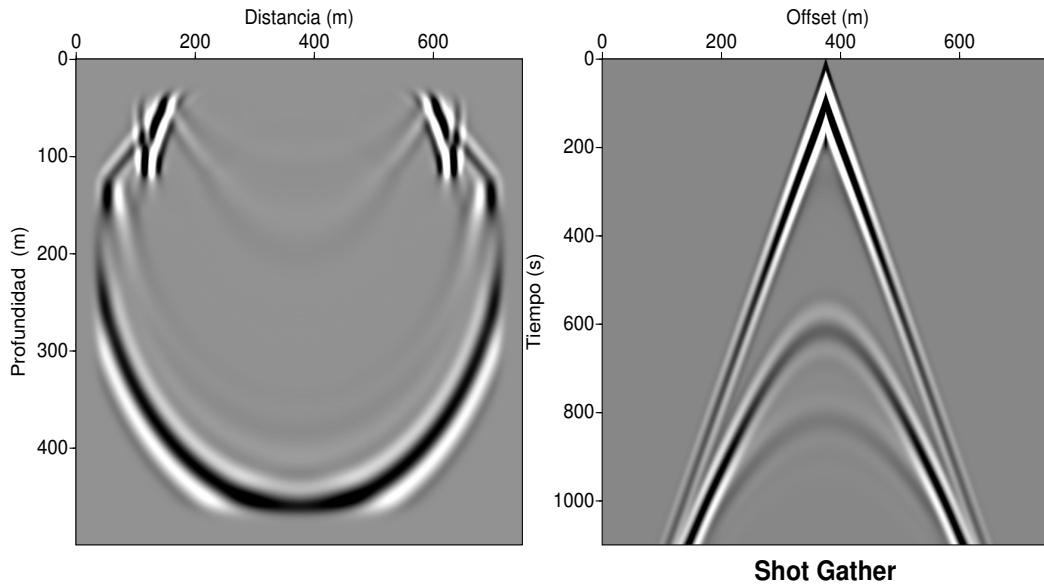


Figura 58: Campo de onda Q en un medio estratificado acústico homogéneo isótropo (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de $2 (ms)$ para $\phi = 45^\circ$. El valor para la velocidad es obtenido en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Fletcher et al., (2008)).

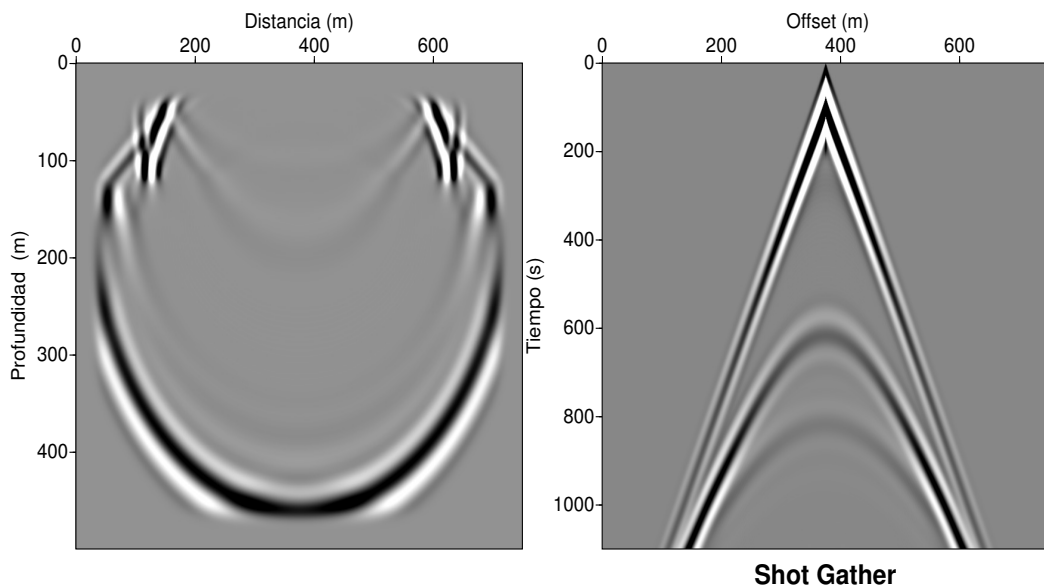
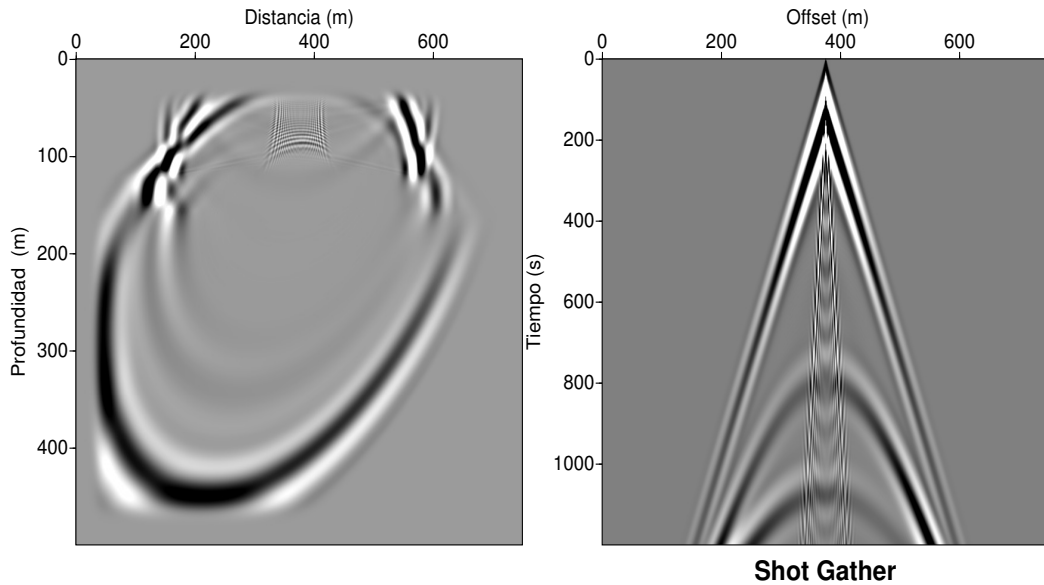
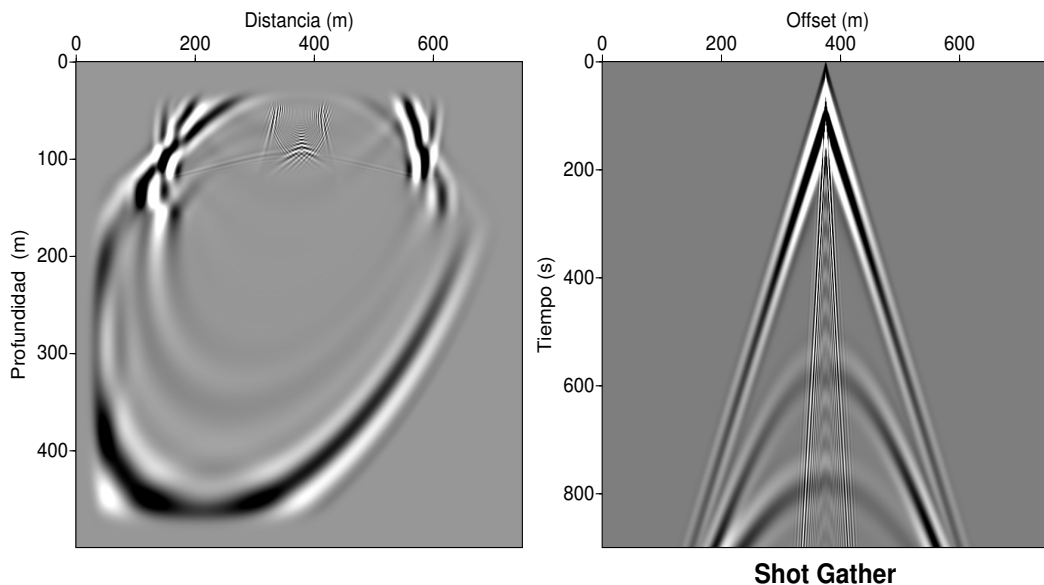


Figura 59: Campo de onda en un medio acústico estratificado homogéneo con anisotropía polar inclinada (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 2 ($m.s$) para $\phi = 45^{\circ}$. El valor para la velocidad es obtenido en la ecuación (5.2) (aproximación propuesta por Zhang et al. (2005)).



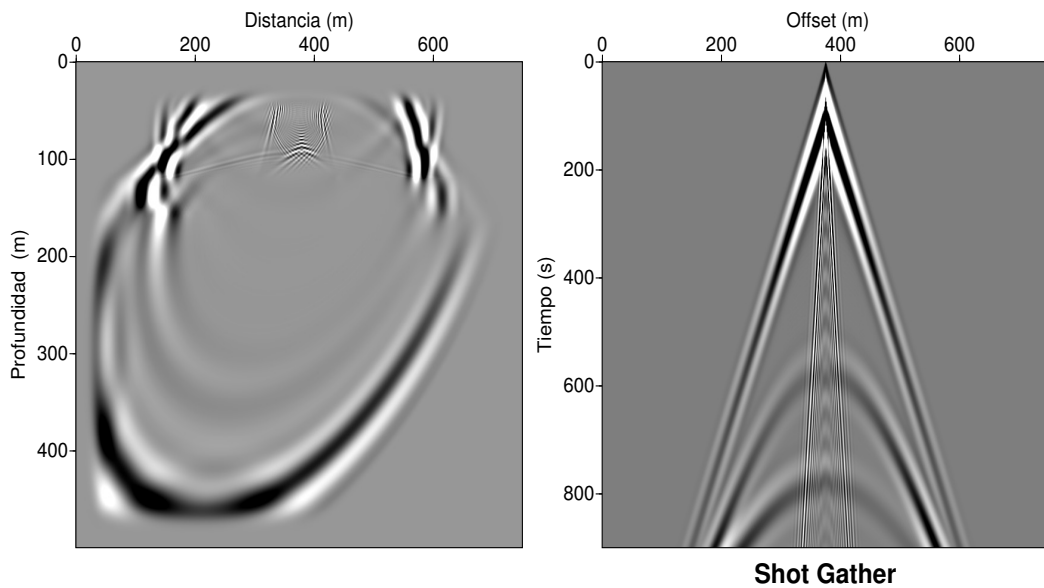
Fuente: Los autores.

Figura 60: Campo de onda P en un medio estratificado acústico homogéneo con anisotropía polar Inclínada (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 1 ($m.s$) para $\phi = 45^{\circ}$ (aproximación propuesta por Fletcher et al., (2008)).



Fuente: Los autores.

Figura 61: Campo de onda Q en un medio estratificado acústico homogéneo con anisotropía polar Inclínada (izquierda) y registro sísmico (derecha), en un tiempo de 1 (ms) para $\phi = 45^0$ (aproximación propuesta por Fletcher et al., (2008)).



Capítulo

6

CONCLUSIONES

El modelado numérico en medios acústicos con anisotropía polar vertical es más eficiente en costo computacional, en comparación con medios que tienen anisotropía polar inclinada. Por lo tanto, desarrollar los modelos a partir de la hipótesis acústica en medios VTI, es una buena elección debido a su reducción de tiempo computacional y aproximación en la estructura del subsuelo.

Basados en las curvas de velocidad de fase en medios acústicos con anisotropía polar vertical e inclinada, se observó que las aproximaciones son parecidas, pero difieren cuando se compara con las curvas de velocidad de fase exacta en medios elásticos, tanto para la onda P como SV .

Se implementó soluciones numéricas para el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales por medio del método de diferencias finitas, en donde se tuvieron en cuenta condiciones de estabilidad y dispersión numéricas adecuadas.

Se construyeron e implementaron algoritmos computacionales que proporcionaron buenos resultados en su mayoría. Con respecto al modelado de los campos de onda, se observaron las diferencias en el frente de onda y registro sísmico para los modelos propuestos con y sin anisotropía. Sin embargo, los resultados obtenidos de la propagación del campo de onda, no son los que se esperaban para el caso de la ecuación diferencial parcial propuesta por Huang, debido a su

alta frecuencia a medida que se propagaba el campo en la malla.

APÉNDICE

Apéndice A

Ecuación de onda 1-D

Derivando parcialmente con respecto a t y x la ecuación (2.63)

$$P(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \underbrace{\frac{dF(x + ct)}{d(x + ct)}}_{F'} \cdot \underbrace{\frac{\partial(x + ct)}{\partial t}}_c + \underbrace{\frac{dG(x - ct)}{d(x - ct)}}_{G'} \cdot \underbrace{\frac{\partial(x - ct)}{\partial t}}_{-c}, \\ &= cF'(x + ct) - cG'(x - ct). \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= c^2 F''(x + ct) - c(-c)G''(x - ct), \\ &= c^2 F''(x + ct) + c^2 G''(x - ct). \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \underbrace{\frac{dF(x + ct)}{d(x + ct)}}_{F'} \cdot \underbrace{\frac{\partial(x + ct)}{\partial x}}_1 + \underbrace{\frac{dG(x - ct)}{d(x - ct)}}_{G'} \cdot \underbrace{\frac{\partial(x - ct)}{\partial x}}_1, \\ &= F'(x + ct) + G'(x - ct). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = F''(x + ct) + G''(x - ct). \quad (4)$$

Sustituyendo esto en la ecuación de onda escalar dada por la ecuación (2.62) (ver Sección 2), se obtiene:

$$c^2 F''(x + ct) + c^2 G''(x - ct) = c^2 [F''(x + ct) + G''(x - ct)]. \quad (5)$$

La ecuación (5), concluye que una solución general a la ecuación de onda acústica isotrópica, es de la forma de la función $P(x, t)$. blah blah

Apéndice B

Estabilidad numérica

Utilizando las identidades de Euler y del *seno* del ángulo medio, se sustituye en la ecuación (2.78), se logra:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\cos(\theta) - 1 = -2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

$$\cos(\omega\Delta t) = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cos(k_x \Delta x)$$

$$\cancel{\sin^2} \left(\frac{\omega\Delta t}{2} \right) = \cancel{\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right)$$

$$\sin^2 \left(\frac{\omega\Delta t}{2} \right) = (c\Delta t)^2 \frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right)$$

blah blah

Apéndice C

Deducción de la relación de dispersión a partir de la velocidad de fase para un medio elástico VTI

Se deduce la relación de dispersión a partir de la velocidad de fase para un medio elástico VTI, deducido por Thomsen (1986) y reformulada por Tsvankin (1986) en términos de los parámetros de Thomsen.

$$\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} = 1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2} + \frac{f}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}}.$$

Para lograr la relación de dispersión, se reorganiza los términos de la ecuación (2.45) y se eleva al cuadrado ambos lados de la siguiente manera:

$$\left[\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2} - \left(1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}\right],$$
$$\left(\frac{f}{2}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{2\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right)^2 - \frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}\right] = \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right)^2 - 2\left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) \left(1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2}\right) + \left(1 + \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{f}{2}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{4\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2} + \frac{4\varepsilon \sin^2 \theta}{f}\right] - \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left[\frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}\right] = \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right)^2 \\
& \quad - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) (\varepsilon \sin^2 \theta) - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) f \\
& \quad + (1 + \varepsilon \sin^2 \theta)^2 - (1 + \varepsilon \sin^2 \theta) f + \left(\frac{f}{2}\right)^2, \\
\cancel{\left(\frac{f}{2}\right)^2} + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left(\frac{4\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2} + \right) + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \frac{4\varepsilon \sin^2 \theta}{f} - \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left[\frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}\right] = \\
& \quad \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right)^2 - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) (\varepsilon \sin^2 \theta) - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) f \\
& \quad + (1 + \varepsilon \sin^2 \theta)^2 - (1 + \varepsilon \sin^2 \theta) f + \cancel{\left(\frac{f}{2}\right)^2}, \\
& \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left(\frac{4\varepsilon^2 \sin^4 \theta}{f^2} + \right) + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \frac{4\varepsilon \sin^2 \theta}{f} + - \left(\frac{f}{2}\right)^2 \left[\frac{8(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{f}\right] = \\
& \quad \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right)^2 - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) (\varepsilon \sin^2 \theta) - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) f + 1 \\
& \quad + 2\varepsilon \sin^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^4 \theta - f - f \sin^2 \theta f, \\
& \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right)^2 - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) (\varepsilon \sin^2 \theta) - 2 \left(\frac{V^2(\theta)}{V_{p0}^2}\right) f \tag{6} \\
& + (1 - f) + 2\varepsilon \sin^2 \theta - 2\varepsilon f \sin^2 \theta + 2f(\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0.
\end{aligned}$$

Recordando las relaciones entre las variables de velocidad de fase, numero de onda y frecuencia angular,

$$V(\theta) = \frac{\omega}{|k|}, \quad k_x = |k| \sin \theta, \quad k_z = |k| \cos \theta,$$

sustituyendo en la ecuación (6):

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2}\right)^2 \frac{1}{|k|^2} - 2 \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2}\right) - 2\varepsilon \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2}\right) \left(\frac{k_x^2}{|k|^2}\right) + \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2}\right) f - 2\varepsilon f k_x^2 \\
& \quad + 2f(\varepsilon - \delta) \frac{k_x^2 k_z^2}{|k|^2} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^4}{V_{p0}^4} - 2(k_x^2 + k_z^2) \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) - 2\varepsilon \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) (k_x^2) + \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) f(k_x^2 + k_z^2) \\ & + (1 - f)(k_x^2 + k_z^2)^2 + 2\varepsilon k_x^2(k_x^2 + k_z^2) \\ & - 2\varepsilon f k_x^2(k_x^2 + k_z^2) + 2f(\varepsilon - \delta)k_x^2 k_z^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega^4}{V_{p0}^4} \right) - 2 \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) k_x^2 - 2 \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) k_z^2 - 2\varepsilon \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) k_x^2 + \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) f k_x^2 + \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) f k_z^2 \\ & + (1 - f)(k_x^4 + 2k_x^2 k_z^2 + k_z^4) + 2\varepsilon k_x^4 + 2\varepsilon k_x^2 k_z^2 \\ & - 2\varepsilon f k_x^4 + 2\varepsilon f k_x^2 k_z^2 + 2f(\varepsilon - \delta)k_x^2 k_z^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1 - f)k_z^4 + [(1 - f) + (1 - f)(2\varepsilon + 1)]k_x^4 + [2(1 - f)(1 + \varepsilon) + 2(\varepsilon - \delta)f] k_x^2 k_z^2 \\ & - \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) (2 - f)k_z^2 - \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) (2(1 + \varepsilon) - f) k_x^2 + \left(\frac{\omega^4}{V_{p0}^4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Para mayor simplicidad de la ecuación denotaremos a α , β y ϕ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - f), \\ \beta &= \left[(2(1 - f)(1 + \varepsilon) + 2(\varepsilon - \delta)f)k_x^2 - \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) (2 - f) \right], \\ \phi &= \left[(1 - f)(1 + 2\varepsilon)k_x^2 - \frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \left(2(1 + \varepsilon) - f \right) \right] k_x^2 + \frac{\omega^4}{V_{p0}^4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Reescribiendo la ecuación (7) en función de las variables α , β , y ϕ , se obtiene:

$$\alpha k_z^4 + \beta k_z^2 + \phi = 0. \quad (9)$$

Para reducir las expresiones de α , β y ϕ , se definen unas nuevas constantes

β_1, β_2, ϕ_1 y ϕ_2 .

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= 2(1-f)(1+\varepsilon) + 2(\varepsilon-\delta)f(2-f) \\
 \beta_2 &= (2-f) \\
 \phi_1 &= 2(1+\varepsilon) - f \\
 \phi_2 &= (1-f)(1+2\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{10}$$

Sustituyendo las relaciones de la ecuación (10) en (8).

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (1-f), \\
 \beta &= \left[\beta_1 k_x^2 - \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \right) \beta_2 \right] \\
 &= -\frac{\beta_2 \omega^2}{V_{p0}^2} \left[1 - \frac{\beta_1 V_{p0}^2 k_x^2}{\beta_2 \omega^2} \right], \\
 \phi &= \left[-\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \phi_1 + \phi_2 k_x^2 \right] + \frac{\omega^4}{V_{p0}^4} \\
 &= \frac{\omega^4}{V_{p0}^4} \left[1 - \frac{V_{p0}^2}{\omega^2} k_x^2 \phi_1 + \frac{V_{p0}^4}{\omega^4} \phi_2 k_x^4 \right], \\
 \phi &= \frac{\omega^4}{V_{p0}^4} \left[1 - \frac{V_{p0}^2}{\omega^2} \phi_1 \left(1 - \frac{V_{p0}^2}{\omega^2} \frac{\phi_2}{\phi_1} k_x^2 \right) \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Aplicando el ajuste a la velocidad paralela al eje de simetría de la onda S igual a cero ($V_{s0} = 0$), el valor de $f = 1$. Por lo tanto las variables $\beta_1, \beta_2, \phi_1, \phi_2, \alpha, \beta$ y ϕ se reducen a:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= 2(\varepsilon - \delta), \\
 \beta_2 &= 1, \\
 \phi_1 &= 1 + 2\varepsilon, \\
 \phi_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0. \\
 \beta &= -\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \left[1 - 2(\varepsilon - \delta) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right]. \\
 \phi &= \frac{\omega^4}{V_{p0}^4} \left[1 - (1 + 2\varepsilon) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Por lo tanto despejando k_z^2 de la ecuación (9)

$$\alpha^0 \cdot k_z^4 + \beta \cdot k_z^2 + \phi = 0,$$

$$k_z^2 = -\frac{\phi}{\beta}.$$

Sustituyendo los valores de β y ϕ .

$$k_z^2 = \frac{\frac{\omega^4}{V_{p0}^4} \left[1 - (1 + 2\varepsilon) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right]}{\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \left[1 - 2(\varepsilon - \delta) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right]},$$

$$k_z^2 = \frac{\frac{\omega^4}{V_{p0}^4} \left[1 - (1 + 2\varepsilon) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right]}{\frac{\omega^2}{V_{p0}^2} \left[1 - 2(\varepsilon - \delta) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right]},$$

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 \left[1 - (1 + 2\varepsilon) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right]}{V_{p0}^2 \left[1 - 2(\varepsilon - \delta) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right]}.$$

Factorizando el término $\frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2}$,

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 \left[\frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2 k_x^2} - (1 + 2\varepsilon) \right) \right]}{V_{p0}^2 \left[\frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2 k_x^2} - 2(\varepsilon - \delta) \right) \right]}. \quad (14)$$

Sumando y restando 2δ en el numerador.

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 \left[\frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2 k_x^2} - 2(\varepsilon - \delta) - (1 + 2\delta) \right) \right]}{V_{p0}^2 \left[\frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2}{V_{p0}^2 k_x^2} - 2(\varepsilon - \delta) \right) \right]},$$

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 \left[1 - 2(\varepsilon - \delta) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} - (1 + 2\delta) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right]}{V_{p0}^2 \left[1 - 2(\varepsilon - \delta) \frac{V_{p0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right]} \cdot \left(\frac{1 + 2\delta}{1 + 2\delta} \right).$$

Así, organizando términos obtenemos la relación de dispersión para medio acústico con anisotropía tipo VTI 2D.

$$k_z^2 = \frac{V_{p0}^2 (1 + 2\delta)}{V_{p0}^2} \left[\frac{\omega^2}{V_{p0}^2 (1 + 2\delta)} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2V_{p0}^2 (\varepsilon - \delta) k_x^2} \right]. \quad (15)$$

La ecuación (15) puede ser expresada en el parámetro de anisotropía η y la velocidad *NMO* (*Normal moveout*) que está definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v_{nmo}(0) &= v_n(0) = V_{p0}\sqrt{1+2\delta} \\ \eta &= 0,5 \left(\frac{v_h}{v_n^2(0)} - 1 \right) = \frac{\varepsilon - \delta}{1 + 2\delta} \end{aligned} \quad (16)$$

donde v_h es la velocidad paralela al eje de simetría. Por lo tanto, la ecuación (15) queda escrita de la siguiente manera:

$$k_z^2 = \frac{v_n^2}{V_{p0}^2} \left[\frac{\omega^2}{v_n^2} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2v_n^2 \eta k_x^2} \right]. \quad (17)$$

Operando la diferencia de la ecuación (16):

$$\begin{aligned} k_z^2 &= \frac{v_n^2}{V_{p0}^2} \left[\frac{\omega^4 - 2v_n^2 k_x^2 \omega^2 - v_n^2 k_x^2 \omega^2}{v_n^2 \omega^2 - 2v_n^4 \eta k_x^2} \right], \\ V_{p0}^2 (v_n^2 \omega^2 - 2v_n^4 \eta k_x^2) k_z^2 &= v_n^2 [\omega^4 - 2v_n^2 \eta k_x^2 \omega^2 - v_n^2 k_x^2 \omega^2], \\ V_{p0}^2 (\omega^2 - 2v_n^2 \eta k_x^2) k_z^2 &= \omega^4 - [2v_n^2 \eta k_x^2 + v_n^2 k_x^2] \omega^2, \\ V_{p0}^2 \omega^2 k_z^2 - 2V_{p0}^2 v_n^2 \eta k_x^2 k_z^2 &= \omega^4 - [2v_n^2 \eta k_x^2 + v_n^2 k_x^2] \omega^2, \\ \omega^4 - [2v_n^2 \eta k_x^2 + v_n^2 k_x^2] \omega^2 - V_{p0}^2 \omega^2 k_z^2 + 2V_{p0}^2 v_n^2 \eta k_x^2 k_z^2 &= 0, \\ \omega^4 - [(2\eta + 1)v_n^2 k_x^2 + V_{p0}^2 k_z^2] \omega^2 + 2V_{p0}^2 v_n^2 \eta k_x^2 k_z^2 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\omega^4 = [k_x^2 (2v_n^2 \eta + v_n^2) + V_{p0}^2 k_z^2] \omega^2 + V_{p0}^2 \omega^2 k_z^2 - 2V_{p0}^2 v_n^2 \eta k_x^2 k_z^2.$$

Sustituyendo las relaciones de la ecuación (16) en la anterior expresión, se tiene:

$$\omega^4 = \left[2k_x^2 V_{p0}^2 \frac{(1+2\delta)(\varepsilon - \delta)}{(1+2\delta)} + V_{p0}^2 (1+2\delta) k_x^2 + V_{p0}^2 k_z^2 \right] \omega^2 + V_{p0}^2 k_x^2 k_z^2 (-2v_n^2 \eta),$$

$$\omega^4 = [k_x^2 (2V_{p0}^2 (\varepsilon - \delta) + V_{p0}^2 (1 + 2\delta)) + V_{p0}^2 k_z^2] \omega^2 + V_{p0}^2 k_x^2 k_z^2 (-2v_n^2 \eta),$$

$$\omega^4 = [k_x^2 (V_{p0}^2 (2\varepsilon - 2\delta + 1 + 2\delta)) + V_{p0}^2 k_z^2] \omega^2 + V_{p0}^2 k_x^2 k_z^2 (-2v_n^2 \eta),$$

$$\omega^4 = [k_x^2 V_{p0}^2 (2\varepsilon + 1) + V_{p0}^2 k_z^2] \omega^2 + V_{p0}^2 k_x^2 k_z^2 (-2v_n^2 \eta). \quad (19)$$

Sustituyendo los parámetros η y v_n en la expresión subrayada.

$$-2v_n^2 \eta = - \left[V_{p0}^2 (1 + 2\delta) \frac{(\varepsilon - \delta)}{(1 + 2\delta)} \right] = V_{p0}^2 (2\delta - 2\varepsilon) = V_{p0}^2 (2\delta) - V_{p0}^2 (2\varepsilon).$$

Sumando y restando V_{p0}^2 :

$$V_{p0}^2 (2\delta) - V_{p0}^2 (2\varepsilon) + V_{p0}^2 - V_{p0}^2 = v_n^2 - V_x^2,$$

donde V_x se define como:

$$V_x^2 = V_{p0}^2 (1 + 2\varepsilon). \quad (20)$$

Por lo tanto, sustituyendo esta expresión en la ecuación (19), se tiene:

$$\omega^4 = [(V_{p0}^2 (2\varepsilon + 1))k_x^2 + V_{p0}^2 k_z^2] \omega^2 + V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) k_x^2 k_z^2$$

Sustituyendo la velocidad de la onda s (V_x), definida arriba, se obtiene la relación de dispersión utilizada por Fletcher et al. (2008) para determinar la ecuación de onda acústica acoplada para medios con anisotropía TTI.

$$\omega^4 = [V_x k_x^2 + V_{p0}^2 k_z^2] \omega^2 + V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) k_x^2 k_z^2 \quad (21)$$

Deducción de la relación de dispersión en función de *slowness*

Para determinar la relación de dispersión en función de *slowness* p , se parte de la ecuación (14). Sustituyendo $k_i = \frac{\omega}{v_i}$, donde *slowness* se define como el inverso de la velocidad. Por lo tanto, retomando la ecuación (17):

$$k_z^2 = \frac{v_n^2}{V_{p0}^2} \left[\frac{\omega^2}{v_n^2} - \frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2 - 2v_n^2 \eta k_x^2} \right].$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \implies \lambda = v/f,$$

$$\implies k = \frac{\omega}{v}.$$

Por lo tanto sustituyendo el valor del número de onda:

$$\frac{\omega^2}{v_z^2} = \frac{v_n^2}{V_{p0}^2} \left(\frac{\omega^2}{v_n^2} - \frac{\omega^2 \left(\frac{\omega^2}{v_x^2} \right)}{\omega^2 - 2v_n^2 \eta k_x^2} \right).$$

Dividiendo por ω^2 .

$$\frac{1}{v_z^2} = \frac{v_n^2}{V_{p0}^2} \left(\frac{1}{v_n^2} - \frac{\left(\frac{\omega^2}{v_x^2} \right)}{\omega^2 - 2v_n^2 \eta k_x^2} \right).$$

Factorizando del termino subrayado ω^2 .

$$\frac{1}{v_z^2} = \frac{v_n^2}{V_{p0}^2} \left(\frac{1}{v_n^2} - \frac{\left(\frac{\omega^2}{v_x^2} \right)}{\omega^2 \left(1 - 2v_n^2 \eta \left(\frac{\omega^2}{v_x^2} \right) \right)} \right).$$

Sustituyendo por la definición de *slowness*, se deduce la relación de dispersión en función de los *slownnes* p_x y p_z .

$$\boxed{p_z^2 = \frac{v_n^2}{V_{p0}^2} \left(\frac{1}{v_n^2} - \frac{p_x^2}{1 - 2v_n^2 \eta p_x^2} \right)}. \quad (22)$$

Apéndice D

Ecuación diferencial acoplada para medios VTI propuesta por X. Du

A partir,

$$\omega^4 - [V_x^2 k_x^2 + V_{p0}^2 k_z^2] \omega^2 - V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) k_x^2 k_z^2 = 0$$

$$\omega^4 - V_x^2 k_x^2 \omega^2 - V_{p0}^2 k_z^2 \omega^2 - V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) k_x^2 k_z^2 = 0$$

$$\omega^4 = V_x^2 k_x^2 \omega^2 + V_{p0}^2 k_z^2 \omega^2 + V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) k_x^2 k_z^2$$

$$\omega^2 = V_x^2 k_x^2 + V_{p0}^2 k_z^2 + \frac{V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) k_x^2 k_z^2}{\omega^2}$$

$$\omega^2 = V_x^2 k_x^2 + \left[1 + \frac{(v_n^2 - V_x^2) k_x^2}{\omega^2} \right] V_{p0}^2 k_z^2$$

$$\omega^2 = V_x^2 k_x^2 + \left[\frac{\omega^2}{\omega^2} + \frac{(v_n^2 - V_x^2) k_x^2}{\omega^2} \right] V_{p0}^2 k_z^2$$

Apéndice E

Ecuación diferencial acoplada para medios TTI propuesta por X. Du

Para empezar, se determina k_x^2 , k_y^2 y luego k_z^2 , a partir de la ecuación (3.91).

$$\tilde{k}_x^2 = (k_x \cos \theta \cos \phi + k_y \cos \theta \sin \phi + k_z \sin \theta) \cdot (k_x \cos \theta \cos \phi + k_y \cos \theta \sin \phi + k_z \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x^2 &= k_x^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + k_x k_y \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi + k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ &+ k_y^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi + k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ &+ k_x k_y \cos^2 \theta \sin \phi + k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi + k_z^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x^2 &= k_x^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \sin^2 \theta \\ &+ 2 [k_x k_y \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi + k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi + k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x^2 &= k_x^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \sin^2 \theta \\ &+ 2 [k_x k_y \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi + k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi + k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\tilde{k}_y^2 = (-k_x \sin \phi + k_y \cos \phi) \cdot (-k_x \sin \phi + k_y \cos \phi), \quad (24)$$

$$\tilde{k}_y^2 = k_x^2 \sin^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \phi - 2k_x k_y \sin \phi \cos \phi.$$

$$\tilde{k}_z^2 = (-k_x \sin \theta \cos \phi - k_y \sin \theta \sin \phi + k_z \cos \theta) \cdot (-k_x \sin \theta \cos \phi - k_y \sin \theta \sin \phi + k_z \cos \theta).$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_z^2 = & k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + k_x k_y \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ & + k_x k_y \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi + k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi \\ & - k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi - k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi + k_z^2 \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_z^2 = & k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \cos^2 \theta \\ & + 2 [k_x k_y \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi - k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi]. \end{aligned} \quad (25)$$

Sumando las ecuaciones (23) y (24).

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 = & k_x^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \sin^2 \phi + k_x^2 \sin^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \phi \\ & + 2 [k_x k_y \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi + k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi] \\ & + 2 [k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi - k_x k_y \sin \phi \cos \phi], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 = & k_x^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \sin^2 \phi + k_x^2 \sin^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \phi \\ & + 2 [k_x k_y \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi + k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi + k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi] \\ & - 2 [k_x k_y \sin \phi \cos \phi], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 = & k_x^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \sin^2 \phi + k_x^2 \sin^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \phi \\ & + 2 \left[\underbrace{k_x k_y \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi}_{\text{subrayada}} + k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi + k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi \right] \\ & - 2 \left[\underbrace{k_x k_y \sin \phi \cos \phi}_{\text{subrayada}} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

Sacando factor común de la expresión subrayada.

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 = & k_x^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \sin^2 \phi + k_x^2 \sin^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \phi \\ & + 2 [(\cos^2 \theta - 1) k_x k_y \sin \phi \cos \phi + k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi + k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi]. \end{aligned}$$

Utilizando las identidades trigonométricas $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ y $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$, y reemplazando.

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 &= k_x^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \sin^2 \phi + k_x^2 \sin^2 \phi + k_y^2 \cos^2 \phi \\ &\quad + 2 \left[-k_x k_y \sin^2 \theta \sin(2\phi) \cos \phi + k_x k_z \sin(2\theta) \cos \phi + k_y k_z \sin(2\theta) \sin \phi \right], \\ \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 &= k_x^2 \underbrace{[\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi]} + k_y^2 \underbrace{[\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi]} + k_z^2 \underbrace{[\sin^2 \theta]} \\ &\quad + \left[-k_x k_y \sin^2 \theta \sin(2\phi) \cos \phi + k_x k_z \sin(2\theta) \cos \phi + k_y k_z \sin(2\theta) \sin \phi \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Las expresiones subrayadas pueden anotarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi &= (1 - \sin^2 \theta)(1 - \sin^2 \phi) + \sin^2 \phi \\ &= 1 - \sin^2 \phi - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \phi \\ &= 1 - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \\ &= 1 - \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \phi) \end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi.$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi &= (1 - \sin^2 \theta)(\sin^2 \phi) + (1 - \sin^2 \phi) \\ &= \sin^2 \phi - \sin^2 \theta \sin^2 \phi + 1 - \sin^2 \phi \end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi.$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta.$$

Sustituyendo las expresiones halladas en la ecuación (27) se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 &= k_x^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) + k_y^2 (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) + k_z^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &\quad + \left[-k_x k_y \sin^2 \theta \sin(2\phi) \cos \phi + k_x k_z \sin(2\theta) \cos \phi + k_y k_z \sin(2\theta) \sin \phi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \underbrace{-k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - k_z^2 \cos^2 \theta}_{\text{}} \\ &\quad + \left[-k_x k_y \sin^2 \theta \sin(2\phi) \cos \phi + k_x k_z \sin(2\theta) \cos \phi + k_y k_z \sin(2\theta) \sin \phi \right]. \end{aligned}$$

Desarrollo matemático para la relación de dispersión X. Du

Proceso matemático para obtener la ecuación (3.99).

$$\omega^4 = [V_x^2 f_2 + V_{p0}^2 f_1] \omega^2 + V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) f_1 \cdot f_2$$

$$\omega^4 = V_x^2 \omega^2 f_2 + V_{p0}^2 \omega^2 f_1 + V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) f_1 \cdot f_2$$

$$\omega^2 = V_x^2 f_2 + V_{p0}^2 f_1 + \frac{V_{p0}^2 (v_n^2 - V_x^2) f_1 \cdot f_2}{\omega^2}$$

$$\omega^2 = V_x^2 f_2 + V_{p0}^2 f_1 + \frac{V_{p0}^2 v_n^2 f_1 f_2 - V_{p0}^2 V_x^2 f_1 f_2}{\omega^2}$$

$$\omega^2 = V_x^2 f_2 + V_{p0}^2 f_1 \left[\frac{\omega^2}{\omega^2} + \frac{v_n^2 f_2 - V_x^2 f_2}{\omega^2} \right]$$

$$\omega^2 = V_x^2 f_2 + V_{p0}^2 \left[\frac{\omega^2 + v_n^2 f_2 - V_x^2 f_2}{\omega^2} \right]$$

Desarrollo matemático para el campo auxiliar $q(\omega, k_x, k_y, k_z)$ X.

Du

Desarrollando la ecuación (3.101), a partir del proceso que se presenta a continuación, se deduce la ecuación (3.103).

$$\omega^2 q(\omega, k_x, k_y, k_z) = \omega^2 + (v_n^2 - V_x^2) f_2 \cdot P(\omega, k_x, k_x, k_z)$$

$$\omega^2 q(\omega, k_x, k_y, k_z) = (\omega^2 + (v_n^2 - V_x^2) f_2) \cdot P(\omega, k_x, k_x, k_z)$$

$$\omega^2 q(\omega, k_x, k_y, k_z) = \omega^2 P(\omega, k_x, k_x, k_z) + (v_n^2 - V_x^2) f_2 P(\omega, k_x, k_x, k_z)$$

$$\omega^2 q(\omega, k_x, k_y, k_z) = V_x^2 f_2 P(\omega, k_x, k_x, k_z) + V_{p0}^2 f_1 q(\omega, k_x, k_y, k_z)$$

$$+ (v_n^2 - V_x^2) f_2 P(\omega, k_x, k_x, k_z)$$

Deducción de la rotación del número de onda \tilde{k}_r^2 y \tilde{k}_z^2 X. Du

Operando la matriz de rotación R sobre los números de onda k_x , k_y y k_z a partir de las relaciones de la ecuación (3.91), se deducen los números de onda \tilde{k}_r y \tilde{k}_z :

$$\begin{aligned}\tilde{k}_z^2 &= k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 \underbrace{\cos^2 \theta} \\ &+ 2 [k_x k_y \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi - k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{k}_r^2 &= \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 = k_x^2 [\underbrace{\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi}] + k_y^2 [\underbrace{\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi}] + k_z^2 [\sin^2 \theta] \\ &+ [-k_x k_y \sin^2 \theta \sin(2\phi) \cos \phi + k_x k_z \sin(2\theta) \cos \phi + k_y k_z \sin(2\theta) \sin \phi]\end{aligned}$$

Para la parte subrayada de la expresión de \tilde{k}_z^2 , se sustituye $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$.

$$\begin{aligned}\tilde{k}_z^2 &= k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 (1 - \sin^2 \theta) \\ &+ 2 [k_x k_y \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi - k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{k}_z^2 &= k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + k_z^2 - k_z^2 \sin^2 \theta \\ &+ 2 [k_x k_y \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi - k_x k_z \sin \theta \cos \theta \cos \phi - k_y k_z \sin \theta \cos \theta \sin \phi]\end{aligned}$$

Factorizando términos comunes, se logra:

$$\begin{aligned}\widehat{k}_z^2 &= k_z^2 + \sin^2 \theta (\cos^2 \phi k_x^2 + \sin^2 \phi k_y^2 - k_z^2 + \sin 2\phi k_x k_y) \\ &- \sin 2\theta (\cos \phi k_x k_z + \sin \phi k_y k_z)\end{aligned}\tag{28}$$

Se realiza el mismo proceso para \tilde{k}_r^2 , donde los términos subrayados se han deducido en la sección 3.4.3.

$$\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi$$

$$\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación \tilde{k}_r^2 , se consigue:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_r^2 = & k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \sin^2 \theta - k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \\ & + [-k_x k_y \sin^2 \theta \sin(2\phi) \cos \phi + k_x k_z \sin(2\theta) \cos \phi + k_y k_z \sin(2\theta) \sin \phi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{k}_r^2 = & k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \sin^2 \theta - k_x^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - k_y^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \\ & + [-k_x k_y \sin^2 \theta \sin(2\phi) \cos \phi + k_x k_z \sin(2\theta) \cos \phi + k_y k_z \sin(2\theta) \sin \phi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{k}_r^2 = & k_r^2 - \sin^2 \theta (\cos^2 \phi k_x^2 + \sin^2 \phi k_y^2 - k_z^2 + \sin 2\phi k_x k_y) \\ & + \sin 2\theta (\cos \phi k_x k_z + \sin \phi k_y k_z)\end{aligned}\tag{29}$$

BIBLIOGRAFÍA

Aki, K., and Richards, P., 2002, Quantitative seismology: Second edition: University Science Books.

Aki, K., and Richards, P. G., 1980, Quantitative seismology: Theory and methods: W.H Freeman and Co.

Alkhalifah, T. (1998). Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media. *Geophysics*, 63(2), 623-631.

Alkhalifah, T. (2000). An acoustic wave equation for anisotropic media. *Geophysics*, 65(4), 1239-1250.

Backus, G., 1962, Long wave elastic anisotropy produce by horizontal layering: *Journal Of Geophysical Research*, 67, 4427-4440.

Carcione, J. M., Herman, G. C., and Ten Kroode, A. P. E. (2002). Seismic modeling. *Geophysics*, 67(4), 1304-1325.

Cohen, J. K. (1997). Analytic study of the effective parameters for determination of the NMO velocity function in transversely isotropic media. *Geophysics*, 62(6), 1855-1866.

Cooley, J. W., and Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90), 297-301.

Daley, P., and Hron, F., 1977, Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media: *Geophysics*, 67, 661-675.

- Dellinger, J., and J. Etgen. Wave-field separation in two-dimensional anisotropic media. *Geophysics* 55.7 (1990): 914-919.
- Dellinger, J., and Muir, F. (1988). Imaging reflections in elliptically anisotropic media. *Geophysics*, 53(12), 1616-1618.
- Du, X., 2007, Prestack depth migration methods for isotropic and polar anisotropic media: PhD Thesis: University of Calgary, Calgary.
- Du, X., Fletcher, R. P., and Fowler, P. J. (2008, June). A new pseudo-acoustic wave equation for VTI media. In 70th EAGE Conference and Exhibition.
- Fletcher, R., Du, X., and Fowler, P. J. (2008, January). A new pseudo-acoustic wave equation for TI media. In 2008 SEG Annual Meeting. Society of Exploration Geophysicists.
- Gazdag, J. (1978). Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics*, 43(7), 1342-1351.
- HUANG, Y. J., ZHU, G. M., and LIU, C. Y. (2011). An approximate acoustic wave equation for VTI media. *Chinese Journal of Geophysics*, 54(4), 599-607.
- Jin, S., Jiang, F., and Ren, Y. (2010, January). Comparison of isotropic, VTI and TTI reverse time migration: an experiment on BP anisotropic benchmark dataset. In 2010 SEG Annual Meeting. Society of Exploration Geophysicists.
- Johnston, J., and Christensen, N. I., 1995, Seismic anisotropy of shale:: *Journal of Geophysical Prospecting*, 7, 158-182.
- Jones, L. E., and Wang, H. F. (1981). Ultrasonic velocities in Cretaceous shales from the Williston basin. *Geophysics*, 46(3), 288-297.
- Kosloff, D., Queiroz Filho, A., Tessmer, E., and Behle, A. (1989). Numerical solution of the acoustic and elastic wave equations by a new rapid expansion method. *Geophysical Prospecting*, 37(4), 383-394.
- Kosloff, D., Kessler, D., Filho, A. Q., Tessmer, E., Behle, A., and Strahilevitz, R. (1990). Solution of the equations of dynamic elasticity by a Chebychev spectral

method. *Geophysics*, 55(6), 734-748.

Leslie, J., and Lawton, D., 1999, Refraction-seismic field study to determine the anisotropic parameters of shales:: *Geophysics*, 64, 1247-1252.

Love, A. E. H., 1927, A treatise on the mathematical theory of elasticity:: Cambridge University Press, Cambridge.

Pestana, R. C., and Stoffa, P. L. (2010). Time evolution of the wave equation using rapid expansion method. *Geophysics*, 75(4), T121-T131.

Pestana, R. C., Ursin, B., and Stoffa, P. L. (2011, August). Separate P-and SV-wave equations for VTI media. In 12th International Congress of the Brazilian Geophysical Society.

Rosa, A. L. R. (2010). Análise do sinal sísmico. Sociedade Brasileira de Geofísica.

Scales, J., 1997, Theory of seismic imaging: Center of Wave Phenomena, Department of Geophysics, Colorado School of Mines, Golden Colorado, Published by the Samizdat Press.

Slawinski, M., 2003, Seismic wave rays in elastic media, volume 34 Handbook of Geophysical Exploration, Elsevier Science Publ. Co.Inc.

Taflove, A., and Hagness, S. C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method (Artech House, Boston, 2000). There is no corresponding record for this reference.

TAL EZER, H., Kosloff, D., and Koren, Z. (1987). An Accurate Scheme for Seismic Forward MODELLING. *Geophysical Prospecting*, 35(5), 479-490.

Thomsen, L. (1986). Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, 51(10), 1954-1966.

Thomsen, L., 2001, Entendimiento de la anisotropía sísmica en exploración y explotación: SEG-EAGE, 41, Oct-Dic.

Toldi, J., Alkhalifah, T., Bethet, P., ArnaudJ. Williamson, P., and Conche, B., 1999,

Case of study of estimation of anisotropy: The Leading Edge 18, 588-593.

Tsvankin, I. (1996). P-wave signatures and notation for transversely isotropic media: An overview. *Geophysics*, 61(2), 467-483.

White, J. E. (1983). *Underground sound: Application of sound waves*.

Winterstein, D., 1990, Velocity anisotropy terminology for geophysicist: *Geophysics*, 55, 1070-088.

Zhan, G. (2012). Reverse-time Migration in Tilted Transversely Isotropic Media with Decoupled Equations.

Zhan, G., Pestana, R. C., and Stoffa, P. L. (2012). Decoupled equations for reverse time migration in tilted transversely isotropic media. *Geophysics*, 77(2), T37-T45.

Zhang, L., Rector III, J. W., and Hoversten, G. M. (2003, January). An acoustic wave equation for modeling in tilted TI media. In 73rd Annual International Meeting, Society of Exploration Geophysics, Expanded Abstracts (pp. 153-156).

Zhang, L., Rector, J., and Hoversten, G., 2005, Finite difference modelling of wave propagation in acoustic tilted TI media: Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, USA.

Zhou H B. Zhang G Q, Bloor R. An anisotropic acoustic wave equation for modeling and migration in 2D TTI media. *SEG Expanded Abstracts*. 2006. 194-198.

PONENCIAS

Resumen de la ponencia presentada XXVI Congreso Nacional de Física Colombiano (*Pagina 224, Libro de Resúmenes Vol. No. 26 Año 2015*)

MODELADO NUMÉRICO PARA DOS APROXIMACIONES DE LA ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA 2D EN MEDIOS HOMOGÉNEOS CON ANISOTROPÍA TIPO VTI USANDO DIFERENCIAS FINITAS

Eduv F. Chacón¹, Jairo A. Torres², Herling González Álvarez³, Rafael A. Torres¹

¹Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga,
Colombia

efch09@hotmail.com

²Grupo Pangea, Universidad de Pamplona, Pamplona, Norte de Santander,
Colombia

jatorresp@gmail.com

³Grupo de Geofísica, Instituto Colombiano del Petróleo, Ecopetrol, Piedecuesta,
Santander, Colombia

herling.gonzalez@ecopetrol.com.co

La Anisotropía Sísmica es la dependencia de la velocidad sísmica con el ángulo en el cual se propagan las ondas en el subsuelo, es por eso que cuando se procesan datos sísmicos es importante considerar este tipo de propiedad para generar imágenes sísmicas con menor incertidumbre. En una etapa previa del procesamiento de datos se encuentra el modelado sísmico, la cual es vital para entender

y diseñar previamente un programa sísmico, junto con el entendimiento de la propagación de las ondas a través del subsuelo. Este trabajo se enfoca en modelar numéricamente las ondas acústicas en medios homogéneos con anisotropía tipo VTI. Para realizar este modelado, las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden son solucionadas por medio del método de Diferencias Finitas. Se comparan dos sistemas de EDPs para dos tipos de Aproximación, la desarrollada por Alkhalifah [1] y por Huang [2], estas ecuaciones consideran parámetros de Anisotropía conocidos como los parámetros de Thomsen [3]. Previamente se muestra la deducción de las velocidades de fase y de grupo para el caso elástico VTI, después se define la componente vertical de la onda S como nula y de esta manera se asume el caso Acústico, Se presentan las curvas de velocidad de fase y de grupo para diferentes valores de anisotropía en diferentes tipos de materiales. Se usan los operadores en diferencias finitas para realizar el correspondiente esquema numérico considerando relaciones de estabilidad numérica y dispersión adecuadas, para finalmente observar el campo de onda en el tiempo para diferentes tiempos en modelos geológicos simples tales como capas planas horizontales.