

**UN ESTUDIO SOBRE LA EFECTIVIDAD DE LAS FUNCIONES  
ARMÓNICAMENTE RELACIONADAS DE NÚMEROS ENTEROS EN  
LA MULTIPLEXACIÓN POR DIVISIÓN DE FRECUENCIAS  
ORTOGONALES (OFDM)**



Felipe Eduardo Hernández Suárez



Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones  
Universidad Industrial de Santander  
Bucaramanga – 2007



**UN ESTUDIO SOBRE LA EFECTIVIDAD DE LAS FUNCIONES  
ARMÓNICAMENTE RELACIONADAS DE NÚMEROS ENTEROS EN  
LA MULTIPLEXACIÓN POR DIVISIÓN DE FRECUENCIAS  
ORTOGONALES (OFDM)**

Felipe Eduardo Hernández Suárez

Trabajo de grado para optar por el título de Ingeniero Electrónico

Director  
Dr. Homero Ortega Boda

Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones  
Universidad Industrial de Santander  
Bucaramanga– Agosto 2007

*A mi madre Rosalba, a mi hermana  
María Isabel , y a todos mis ami-  
gos, que siempre han sido mi apo-  
yo y motivación para alcanzar todas  
mis metas.*

*Felipe*

## AGRADECIMIENTOS

Reflexionando sobre la formación académica y humana que hoy tengo, concluí que debo profundos agradecimientos a toda la comunidad universitaria, a los miembros del grupo RadioGIS, al profesor Homero Ortega Boada y a todos aquellos amigos que se han ido y que aun quedan.

Finalmente, agradezco a Dios y la iglesia, a mis familiares por todo el amor que me han dado.

*Felipe Eduardo Hernández Suárez.*

# Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Organización . . . . .	4
1.2. Planteamiento del Problema . . . . .	5
1.3. Justificación . . . . .	6
1.4. <i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i> (OFDM) . . . . .	7
1.4.1. Descripción formal de OFDM . . . . .	7
1.4.2. Efecto del código convolucional en OFDM . . . . .	10
1.4.3. efecto del interleaving en OFDM . . . . .	11
1.4.4. Modulación Digital . . . . .	11
1.4.5. Características del medio inalámbrico . . . . .	14
1.4.6. Implementación del sistema OFDM . . . . .	19
1.4.7. Ventajas y desventajas de OFDM . . . . .	22
<b>2. Fundamentación Teórica de las FARNE utilizadas</b>	<b>24</b>
2.1. Fundamentos de analisis espectral . . . . .	24
2.1.1. Interpretación geométrica . . . . .	24
2.1.2. Procedimiento para proponer o comprobar una nueva base ortogonal . . . . .	27
2.1.3. Base de funciones exponenciales discretas . . . . .	28
2.1.4. Transformadas Recurrentes . . . . .	29
2.1.5. Funciones Armónicamente Relacionadas de Números Enteros (FARNE) . . . . .	30
2.1.6. Análisis comparativo entre las FARNE y la FED . . . . .	34
<b>3. Simulación</b>	<b>37</b>
3.1. Elementos del sistema modulado . . . . .	38
3.2. Señal de entrada . . . . .	39
3.3. Herramientas de evaluación . . . . .	39
3.3.1. Tasa de Error de Bit (BER) . . . . .	39
3.3.2. Diagramas de Constelaciones . . . . .	40
3.3.3. Densidad espectral de Potencia (PSD) . . . . .	41
3.3.4. Anchos de Banda . . . . .	43

---

3.3.5. Variaciones al incrementar el número de portadoras . . . . .	44
3.4. Escenarios de simulación . . . . .	44
3.4.1. Escenario ideal . . . . .	44
3.4.2. Escenario con ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN) . . . . .	45
3.4.3. Entorno con amplificación no lineal . . . . .	45
3.4.4. Escenario con canal multitrayectoria . . . . .	46
<b>4. Resultados y su análisis</b>	<b>48</b>
4.1. Análisis de costo computacional . . . . .	48
4.2. Invertibilidad . . . . .	49
4.3. Escenario ideal . . . . .	50
4.3.1. Tasa de Error de Bit (BER) . . . . .	50
4.3.2. PSD y Anchos de Banda . . . . .	52
4.3.3. Cambios observados debido al incremento del número de portadoras . . . . .	52
4.4. Entorno con AWGN . . . . .	54
4.5. Escenario con amplificación no lineal . . . . .	56
4.6. Entorno con canal multitrayectoria complejo (FIR) conocido . . . . .	60
4.6.1. Canal multitrayectoria sin AWGN . . . . .	60
4.6.2. Canal multitrayectoria con ecualización lineal . . . . .	61
4.6.3. Canal multitrayectoria con AWGN . . . . .	61
4.6.4. Canal multitrayectoria con todos los efectos . . . . .	62
<b>5. Conclusiones</b>	<b>63</b>
5.1. Recomendaciones . . . . .	64

# Lista de figuras

1.1. Señales FDM y OFDM en el dominio de las frecuencias . . . . .	7
1.2. Transformación de los símbolos . . . . .	8
1.3. Subportadoras Ortogonales . . . . .	9
1.4. Prefijo Cíclico . . . . .	9
1.5. Posicionamiento de los bits en las subportadoras . . . . .	11
1.6. Modulación PSK de orden 2 (BPSK) . . . . .	12
1.7. Constelaciones M-PSK y M-QAM . . . . .	13
1.8. Multitrayectorias . . . . .	16
1.9. Respuesta impulsiva del canal y diagrama fasorial . . . . .	16
1.10. Respuesta en frecuencia del canal . . . . .	17
1.11. Señal recibida producto de la suma de la señal directa y de la reflejada . . . . .	18
1.12. Modelo general del canal . . . . .	19
1.13. Modelo analítico del transmisor OFDM . . . . .	20
1.14. Diagrama de bloques del canal . . . . .	21
1.15. Esquema general del receptor OFDM . . . . .	21
1.16. Tranceiver OFDM . . . . .	23
2.1. Representación de un vector en componentes ortogonales entre sí . . . . .	25
2.2. Representación $N$ dimensional de una señal continua . . . . .	27
2.3. Representación de la base (FED) . . . . .	28
2.4. Componentes rectangulares de la FTD para $N = 16$ . . . . .	32
2.5. Parte real e imaginaria de las bases de FPD y FBD . . . . .	33
2.6. Valores discretos de las funciones utilizadas para $N = 16$ . . . . .	34
3.1. BER para $c/u$ de las transmisiones . . . . .	40
3.2. BER para $c/u$ de las transmisiones . . . . .	40
3.3. Diagrama de Constelaciones . . . . .	41
3.4. Símbolo OFDM discreto . . . . .	42
3.5. Señal resultante al paso por el retenedor . . . . .	42
3.6. Señal continua en banda base . . . . .	42

3.7. Señal transmitida en pasa banda . . . . .	42
3.8. PSDs de las señales banda base . . . . .	43
3.9. PSDs de las señales banda base . . . . .	43
3.10. Ancho de banda espectral y nominal . . . . .	43
3.11. Curvas características del HPA modelo Rap . . . . .	46
3.12. Respuesta del canal a la entrada de un símbolo OFDM . . . . .	47
4.1. Invertibilidad para la DBFT . . . . .	49
4.2. Invertibilidad para la DTFT . . . . .	49
4.3. Invertibilidad para la DPFMT . . . . .	50
4.4. Diagrama de constelaciones QPSK . . . . .	51
4.5. Diagrama de constelaciones BPSK . . . . .	51
4.6. Diagrama de constelaciones QPSK . . . . .	52
4.7. Diagrama de constelaciones BPSK . . . . .	52
4.8. Comparación entre PSDs . . . . .	53
4.9. Comparación entre PSDs . . . . .	53
4.10. Comparación entre PSDs . . . . .	53
4.11. Comparación entre PSDs . . . . .	53
4.12. Ancho de Banda espectral y nominal . . . . .	54
4.13. Ancho de banda nominal vs $N$ . . . . .	54
4.14. Ancho de banda espectral vs $N$ . . . . .	54
4.15. Constelación, S/R de 5 dB . . . . .	55
4.16. Constelación, S/R de 15 dB . . . . .	55
4.17. BER a 5 dB de S/R . . . . .	55
4.18. BER vs S/R utilizando QPSK . . . . .	56
4.19. BER utilizando QPSK, S/R de 25 dB . . . . .	56
4.20. Constelación, $N_{SAT} = 0.6$ . . . . .	57
4.21. Constelación, $N_{SAT} = 0.2$ . . . . .	57
4.22. BER vs $N_{SAT}$ en un entorno ideal . . . . .	57
4.23. BER vs $N_{SAT}$ para una S/R de 7 dB . . . . .	58
4.24. BER vs $N_{SAT}$ para una S/R de 15 dB . . . . .	58
4.25. BER vs $N_{SAT}$ para una S/R de 23 dB . . . . .	59
4.26. BER vs $N_{SAT}$ para una S/R de 55 dB . . . . .	59
4.27. BER vs S/R para un $N_{SAT}$ de 0.7 . . . . .	60
4.28. BER vs SNR, ecualización lineal, $L = 2$ . . . . .	61
4.29. BER vs SNR, $L = 2$ . . . . .	61
4.30. BER vs SNR, ecualización lineal . . . . .	62

# Lista de tablas

2.1. Resultados del cálculo de $\delta_{p,q}$ . . . . .	36
4.1. grados de invertibilidad de las FARNE . . . . .	50
4.2. BER utilizando modulación QPSK y BPSK en un escenario ideal . . . . .	51

---

**RESUMEN****TÍTULO:**

UN ESTUDIO SOBRE LA EFECTIVIDAD DE LAS FUNCIONES ARMÓNICAMENTE RELACIONADAS DE NÚMEROS ENTEROS EN LA MULTIPLEXACIÓN POR DIVISIÓN DE FRECUENCIAS ORTOGONALES (OFDM)<sup>1</sup>

**AUTOR:** FELIPE EDUARDO HERNANDEZ SUAREZ <sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVES:** Funciones Armónicamente de Números Enteros (FARNE), Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM), Bit Error Ratio (BER), Power Spectral Density (PSD), Dispositivos no lineales.

**DESCRIPCIÓN:**

En este proyecto se realiza un estudio de la efectividad de las funciones armónicamente relacionadas de números enteros aplicadas a la modulación multiportadora OFDM, en el mismo se plantea simular un sistema de este tipo que permita apreciar la efectividad bajo distintos escenarios de simulación, para observar el impacto de esas variaciones en el rendimiento del enlace.

Primero se describe la situación actual en el área de las redes inalámbricas las cuales se encuentran en estos momentos próximas a entrar en la cuarta generación en donde se necesita que la velocidad de transmisión sea mucho más rápida sin que esto conlleve a disminuir el desempeño del sistema.

En este estudio se elabora un simulador que cumple con las especificaciones básicas del sistema OFDM y se elabora una descripción detallada acerca del canal utilizado en las redes inalámbricas y los modelos matemáticos propuestos para su simulación.

Analizando el tiempo de procesamiento en el cálculo de las transformadas rápidas de Fourier en el bloque de multiplexación de símbolos en el transmisor y en el receptor, se concluye que si se utilizan funciones con coeficientes enteros que sirvan como base para la transformadas que realiza el sistema el tiempo de procesamiento disminuye y por lo tanto la velocidad de transmisión de datos aumenta considerablemente. Tomando como nuevas bases las funciones armónicamente relacionadas de números enteros se puede mejorar lo planteado anteriormente y se pueden formular nuevas hipótesis acerca del nuevo desempeño del sistema OFDM tales como el mejoramiento de la tasa de error de bit en ambientes no lineales y sistemas con un nivel de ruido muy alto. Se realiza un simulador en el cual se pueden comprobar la validez de cada una de las hipótesis mencionadas y se elaboran conclusiones acerca del comportamiento del sistema.

---

<sup>1</sup>Proyecto de Grado

<sup>2</sup>Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director Dr. Homero Ortega Boada.

---

**ABSTRACT****TITLE:**

A STUDY ON THE EFFECTIVENESS OF THE FUNCTIONS HARMONICALLY RELATED OF WHOLE NUMBERS IN THE ORTHOGONAL FREQUENCY DIVISION MULTIPLEXING(OFDM) <sup>3</sup>

**AUTHOR:** FELIPE EDUARDO HERNANDEZ SUAREZ <sup>4</sup>

**KEYWORDS:** Functions harmonically related of whole numbers(FARNE), Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM), Bit Error Ratio (BER), Power Spectral Density (PSD), nonlinear devices.

**DESCRIPTION:**

In this project a study of the effectiveness of the functions harmonically related of whole numbers is applied to multicarrying modulation OFDM, in he himself considers to simulate a system of this type that allows to appreciate the effectiveness under different scenes from simulation, to observe the impact of those variations in the performance of the connection.

First describes the current situation in the field of the wireless networks who are in these moments next to entering the fourth generation where it is necessary that the speed of transmission much more rapid without this bears to diminish the performance of the system.

In this study there is prepared a simulator that expires with the basic specifications of the system OFDM and there is prepared a description detailed about the channel used in the wireless networks and the mathematical models proposed for his simulation.

Analyzing the time of prosecution in the calculation of fast Fourier transform in the block of multiplexing of symbols in the transmitter and in the receiver, It concludes that if functions are used with whole coefficients that serve as base for her transformed that realizes the system, the time of prosecution diminishes and therefore the speed of transmission of information increases considerably.

Taking the harmonically related functions of whole numbers as new bases it is possible to improve the raised previously and new hypotheses can formulate about the new performance of the system such OFDM as the improvement of the valuation of error of bit in not linear ambiences and systems at a level very high noise. There is realized a pretender in which there can be verified the validity of each of the mentioned hypotheses and conclusions are prepared about the behavior of the system.

---

<sup>3</sup>Degree Project

<sup>4</sup>Physical Mechanics Faculty. Electrical, Electronical and Telecommunications School. Ph.D Homero Ortega Boada.

# Capítulo 1

## Introducción

La actual tendencia a nivel mundial en el área de las comunicaciones personales se orienta hacia la utilización de sistemas de comunicación inalámbricos portátiles con alta velocidad de conexión y elevado nivel de seguridad. La tecnología Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) se proyecta como una de las técnicas más prometedoras para lograr satisfacer los requerimientos del futuro, la misma posee las características claves de alta velocidad de transmisión y elevada eficiencia espectral que permitirán el desarrollo de los sistemas de comunicación del mañana.

En este proyecto de grado se evalúa la efectividad de las Funciones Armónicamente Relacionadas de Números Enteros (FARNE) en el proceso de multiplexación de símbolos del sistema OFDM como una alternativa para mejorar la velocidad de transmisión, la tasa de error de bit (BER), el rendimiento del enlace en presencia altos niveles de ruido, de ambientes no lineales y de canales variables en el tiempo.

### 1.1. Organización

En este capítulo se describe la situación actual en el área de las redes inalámbricas lo que conlleva al planteamiento del problema como tal y se describe la justificación del mismo, además se realiza una breve explicación acerca de la modulación digital y los fundamentos necesarios para el entendimiento de un sistema OFDM estándar.

También se incluye una descripción detallada acerca del canal utilizado en las redes inalámbricas y los modelos matemáticos propuestos para su simulación.

Además en este documento se recopilan los aspectos relevantes de las FARNE estudiadas, esto con el fin de servir como referencia bibliográfica para futuros proyectos relacionados. De esta forma, el capítulo II presenta los conceptos básicos de las FARNE analizadas y una breve descripción matemática de las mismas.

En el capítulo III se exponen los mecanismos utilizados para realizar cada una de las simulaciones y los puntos tomados en cuenta para evaluar el comportamiento del sistema

OFDM en particular.

Posteriormente en el último capítulo se analizan los resultados más significativos arrojados por las simulaciones, se sacan conclusiones al respecto y se proponen algunas recomendaciones para futuros análisis sobre el tema.

## 1.2. Planteamiento del Problema

Las comunicaciones son parte esencial en el desarrollo social, científico, productivo y comercial de una nación. Las sociedades evolucionan buscando cada vez mayores beneficios. Los sistemas de comunicación en la actualidad buscan en un futuro cubrir todas las necesidades en forma rápida y confortable. El avance de la tecnología inalámbrica, la proximidad de una nueva generación de sistemas móviles que harán más fáciles las comunicaciones y los negocios; la creciente diversidad y complejidad de nuevos servicios globales; el creciente poder de los canales de comunicación así como de los dispositivos finales; los avances en aplicaciones y programación distribuida; la globalización de la economía; la necesidad de una plataforma que no se vuelva obsoleta aún con servicios futuros que ni siquiera caben en la imaginación, son algunas de las causas que conllevan al estudio de sistemas de comunicación cada vez más sofisticados en el uso del canal inalámbrico que permitan utilizar de forma optimizada el espectro electromagnético; recurso no renovable, ampliamente utilizado en comunicaciones.

El grupo de investigación en radiopropagación de la Universidad Industrial de Santander (RadioGIS) en colaboración con la Universidad Politécnica de Valencia (UPV) ha estado desarrollando estudios sobre MIMO - OFDM *Multi-Inputs Multi-Outputs Orthogonal Frequency Division Multiplexing*, tecnología con mayor factibilidad para llevar los sistemas de comunicaciones móviles a la cuarta generación [7], proveyendo soluciones a canales con selectividad en frecuencia, eliminando interferencias producidas por el canal inalámbrico hasta ahora invulnerables, mejorando la calidad de la señal transmitida, al utilizar como una ventaja el fenómeno de multitraectoria del canal aplicando la teoría de múltiples antenas inteligentes y de esta manera atenuar considerablemente distorsiones en la señal producidas por el entorno. La transformada rápida de Fourier *Fast Fourier Transform* (FFT) es la parte fundamental de la OFDM, ya que esta necesita multiplexar ortogonalmente en tiempo real secuencias de constelaciones de números complejos [9].

En el futuro es necesario que la OFDM mejore su desempeño en el sistema y aumente su velocidad de ejecución, logrando satisfacer las demandas de comunicación de la sociedad. Se conoce de antemano gracias a un estudio realizado [2], que los algoritmos de transformación rápida con base en las FARNE (Funciones Armónicamente Relacionadas de Números Enteros) mencionadas anteriormente aplicados en la detección de objetos en radares aeronáuticos mejoran la velocidad de respuesta en comparación con los utilizados para este propósito basados en FFT conservando la calidad de la señal. Esto es gracias a que estas transformaciones están elaboradas utilizando bases con coeficientes enteros mientras que la FFT utiliza coeficientes

decimales provenientes de las funciones  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ .

Surge la necesidad de estudiar la efectividad de las FARNE, específicamente: las FTD (Funciones Triangulares Discretas), las FBD (Funciones Binomiales Discretas), así como sus respectivas versiones modificadas FTDM y FBDM (ver marco teórico), y los respectivos algoritmos de transformación rápida como punto de partida para el modelado de OFDM buscando con esto mejorar el desempeño de los futuros sistemas basados en OFDM.

Se espera comprobar que las FARNE compiten en efectividad con las FED (Funciones Exponenciales Discretas) en sistemas en los cuales el canal de propagación es lineal y en sistemas en los cuales por alguna circunstancia el canal tiene características no lineales.

Para realizar estas comprobaciones se hace necesario la elaboración de un simulador OFDM en el cual se pueda realizar un análisis de la efectividad de cada una de las transformadas elaboradas para diferentes tipos de canal por medio del cálculo de figuras de mérito como la BER (*Bit Error Ratio*), la PSD (*Power Spectral Density*) el ancho de banda entre otras.

### 1.3. Justificación

En la actualidad los sistemas de comunicación necesitan suministrar información de alta calidad a muchos usuarios en todas partes del mundo, para esto se requiere operar con altas tasas de bits por segundo y con enormes anchos de banda. Las comunicaciones móviles cambiaron la forma de pensar de la sociedad e introdujeron grandes avances en todos los campos, sin embargo al existir numerosas señales ocupando la misma banda del espectro, el canal de transmisión se vuelve cada día más complejo de predecir, modelar y depurar.

Para seguir adelante, en el futuro se necesitarán tecnologías capaces de lidiar con el canal inalámbrico y eliminar los defectos en la señal provocados por este. Con MIMO-OFDM se intenta realizar esta labor sirviendo de base para las futuras redes inalámbricas de alta tasa de bits. Esta investigación contribuirá al número de trabajos realizados al interior de RadioGIS, aumentando sus alcances hacia una nueva tecnología, puesto que hasta el momento solo se han hecho estudios relacionados con redes TDMA *Time Division Multiple Acces* y CDMA *Code Division Multiple Acces*, sistemas anteriores a COFDM *Coded OFDM*.

Con este proyecto de grado se espera que el grupo de investigación RadioGIS en nombre de la Universidad Industrial de Santander empiece a conocer tales tecnologías y a contribuir con investigaciones y desarrollos al respecto que conlleven a consolidar al grupo.

Con el estudio de la efectividad de las FARNE en COFDM en teoría, se puede mejorar la tasa de bits del sistema, y se espera optimizarlo significativamente, de esta forma se estaría cumpliendo con el compromiso social del grupo de investigación. Además, al terminar este proyecto se analizaría el desempeño de las FARNE en otro campo de acción, dándoles una mayor perspectiva.

## 1.4. *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM)

Es una técnica de transmisión de información que data del año 1970. En aquel momento la utilización de la misma era poco viable debido a que esta requiere grandes capacidades de procesamiento de señal, y la tecnología disponible para su implementación era demasiado costosa.

Actualmente aplicaciones como DSL *Digital Subscriber Line*, WLAN *Wireless Local Area Network* y TV Broadcasting han puesto su mirada en OFDM gracias a su eficiencia espectral y a su resistencia contra los desvanecimientos por multitrayectos.

La alta capacidad de procesamiento de los circuitos integrados actuales y su bajo costo hacen posible la implementación de esta técnica en forma eficiente y económica [6].

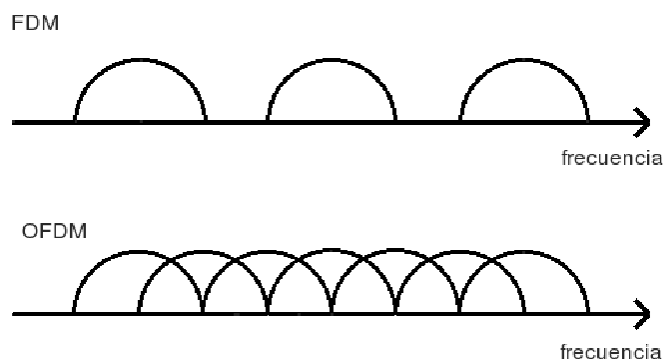


Figura 1.1: Señales FDM y OFDM en el dominio de las frecuencias

La figura 1.1 proporciona una idea de la cantidad de portadoras que se envían en un determinado ancho de banda usando FDM *Frequency Division Multiplexing* en comparación con OFDM se observa como usando OFDM la cantidad aumenta considerablemente.

OFDM se basa en la división del canal de comunicaciones en canales más pequeños, cada uno con una subportadora diferente. Cada una de las  $N$  subportadoras que se transmiten en los  $N$  subcanales deben ser ortogonales entre sí, permitiéndose el solapamiento entre bandas de frecuencia sin que esto conduzca a una interferencia de la información.

La información que se envía es multiplexada en las subportadoras y se transmite en forma paralela. En vez de enviar una portadora que utilice todo el ancho de banda disponible, se envían varias subportadoras cada una con un ancho de banda  $N$  veces menor. Esta técnica permite un mejor aprovechamiento del ancho de banda del canal gracias a que las subportadoras se pueden solapar, evitando así las bandas de guarda que se requieren en FDM.

### 1.4.1. Descripción formal de OFDM

OFDM es un esquema de modulación en el cual los símbolos son transmitidos en paralelo empleando un número considerable de subportadoras ortogonales,  $N$  símbolos son transmitidos

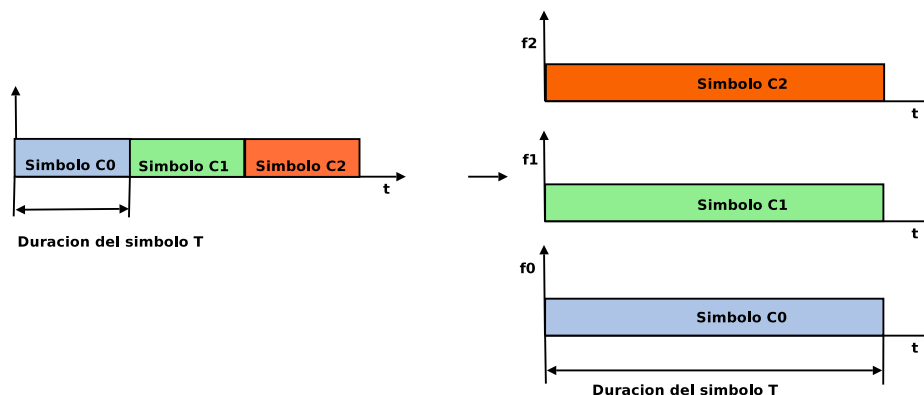


Figura 1.2: Transformación de los símbolos

serialmente en  $T_s$  segundos cada uno, se convierten en un bloque de  $N$  símbolos en paralelo que se transmiten en  $T = N \cdot T_s$  segundos cada uno (figura 1.2). Los símbolos tienen entonces una duración  $N$  veces mayor permitiendo así reducir la interferencia intersímbolo *Inter Symbol Interference* (ISI), esto se debe a que al tener símbolos mas grandes el porcentaje de éste afectado por un símbolo adyacente es menor [7].

Cada uno de los símbolos es modulado por una de las  $N$  subportadoras, es decir si tenemos  $N$  símbolos debemos tener  $N$  subportadoras, cada una de estas debe estar separada  $1/T$  Hz, con lo cual se cumple que todas las portadoras resulten ser ortogonales entre sí.

En la figura 1.3 se observan las subportadoras en el dominio de la frecuencia, nótese como los máximos de cada subportadora coinciden con los ceros de las otras, lo cual justamente se presenta cuando las portadoras que llevan la información son ortogonales entre sí.

Gracias a la tecnología digital, se logra usar portadoras complejas tipo  $e^{j2\pi kt}$  en OFDM. La señal total es de la forma:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{N-1} I_k e^{j2\pi kt/T}, \quad t \in [0, T] \quad (1.1)$$

Donde:

- $I_k$ : Símbolo complejo, este contiene la información.
- $N$ : Número de subportadoras.
- $k$ : Índice de la subportadora.
- $T$ : Tiempo del bloque OFDM.
- $1/T$ : Frecuencia fundamental, la cual resulta ser a su vez, la frecuencia de separación entre las subportadoras para que sean ortogonales.

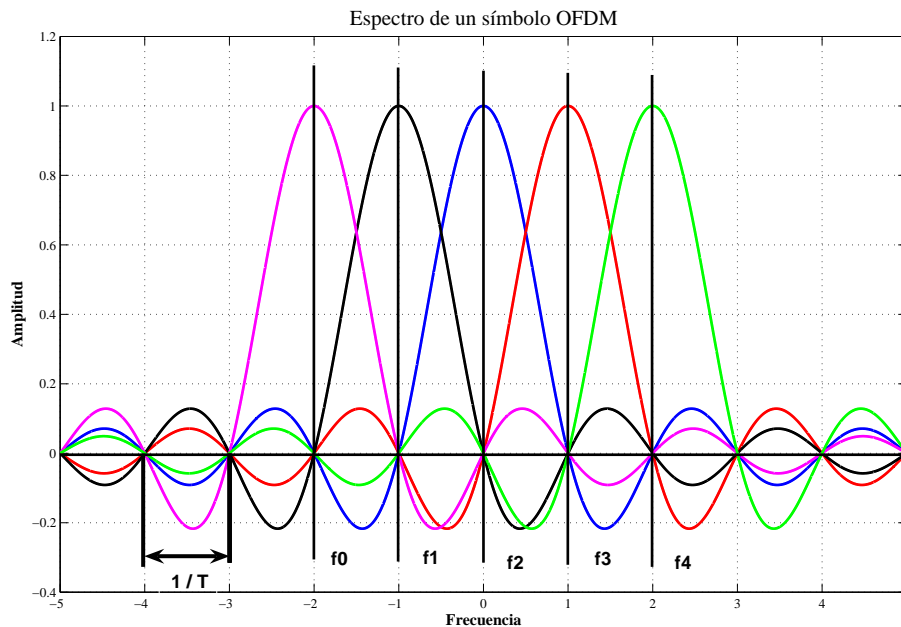


Figura 1.3: Subportadoras Ortogonales

- $v(t)$ : Señal OFDM.

La ecuación (1.1) es llevada a la práctica mediante técnicas digitales, y por lo tanto  $v(t)$  se lleva al dominio discreto con lo cual toma la forma de la inversa de la Representación en Series de Fourier, la cual se puede realizar con un chip que implemente el algoritmo de transformada rápida inversa de Fourier (IFFT).

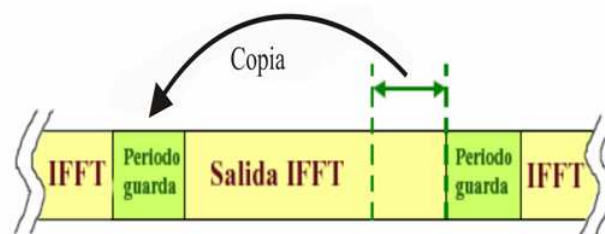


Figura 1.4: Prefijo Cíclico

Para evitar ISI (*Inter Symbol Interference*) producto de los multitrayectos [17], se añade al comienzo del símbolo OFDM un intervalo de guarda *Guard Interval* (GI), el cual es una copia de la parte final de la señal OFDM, este procedimiento se conoce con el nombre de prefijo cíclico. La duración mínima del GI para poder eliminar la ISI debe ser mayor al retardo introducido por el canal. La figura 1.4 expone donde se coloca el GI.

Como se mencionó anteriormente las subportadoras con información se pueden translapar gracias a la ortogonalidad entre ellas, sin embargo existen circunstancias de propagación en las cuales la frecuencia de las subportadoras puede desplazarse ligeramente. Esto produce pérdida de la ortogonalidad provocando el aumento de la tasa de errores en bit *Bit Error Rate* (BER), este fenómeno se conoce como interferencia entre portadoras *Inter Carrier Interference* (ICI).

Los desplazamientos de frecuencia pueden ocurrir por diferencias entre los relojes del transmisor y el receptor, o por efecto Doppler.

La señal representada por la ecuación (1.1) se encuentra en bandabase, para poder transmitirla a través del medio inalámbrico debe ser llevada a una frecuencia superior por medio de una portadora de alta frecuencia. El resultado de este procedimiento es una señal pasabanda representada por la siguiente ecuación.

$$S(t) = |vt| \cos[(2\pi f_c k/T)t + \arg(v(t))] \quad (1.2)$$

$$|v(t)| = \sqrt{\Re(v(t))^2 + \Im(v(t))^2} \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

Donde  $f_c$  es igual a la frecuencia de la portadora.

#### 1.4.2. Efecto del código convolucional en OFDM

Es un código para la corrección de errores (en inglés Forward Error Correction (FEC)) en el cual un grupo de  $M$  bits de información se codifican mediante complejos algoritmos y se transforman en un conjunto de  $N$  bits, se debe cumplir que  $M < N$  debido a que durante el proceso de codificación se agrega información redundante, la misma va a permitir al receptor corregir los bits errados. El cociente  $M/N$  se conoce con el nombre de tasa de código (en inglés code rate), este toma valores entre cero y uno ( $0 < M/N < 1$ ), cuando la tasa de código toma valores bajos el código se hace más robusto, es decir existen mayor redundancia en la información transmitida por lo que aumenta la probabilidad de poder corregir los bit errados, sin embargo esto reduce la velocidad efectiva de transmisión debido al aumento en el tamaño del número de bits que se envían. Si por el contrario la tasa es alta, se hace más difícil corregir los bits dañados, pero se aumenta la velocidad efectiva de transmisión [6].

El código convolucional no es parte de la técnica de OFDM en sí, sin embargo es muy común la implementación del mismo en sistemas que utilizan OFDM, de esta manera se evita que interferencias en una banda estrecha del canal o que el ruido de canal provoquen incrementos considerables del BER.

Los sistemas OFDM que incluyen al código convolucional como mecanismo de corrección de errores se conocen como COFDM (Coded OFDM) [7].

En el estándar 802,11a se contempla la utilización de tasas de código de 1/2, 2/3 y 3/4.

### 1.4.3. efecto del interleaving en OFDM

En un canal de comunicaciones inalámbrico suelen ocurrir desvanecimientos en ciertas frecuencias, este fenómeno aleatorio provoca cambios en la amplitud de las subportadoras de una señal OFDM, por lo que el receptor recibe distintos niveles de potencia en cada subportadora. En algunos casos la potencia de un grupo de subportadoras es tan baja que no permite identificar la información (bits) que contiene, para evitar que este fenómeno produzca ráfagas de errores que no podrán ser corregidos, se intercambia la posición de los bits antes de ser transmitidos, es decir se ordenan los bits de tal manera que no existan bits continuos en subportadoras adyacentes [8].

El procedimiento antes descrito conocido como Interleaving permite que los bits errados ocurran aleatoriamente y separados unos de otros. Los bits errados que ocurren en forma aislada se pueden recuperar gracias al código de corrección de errores (Código Convolutivo), mientras que las ráfagas de bits errados requieren retransmisión [9].

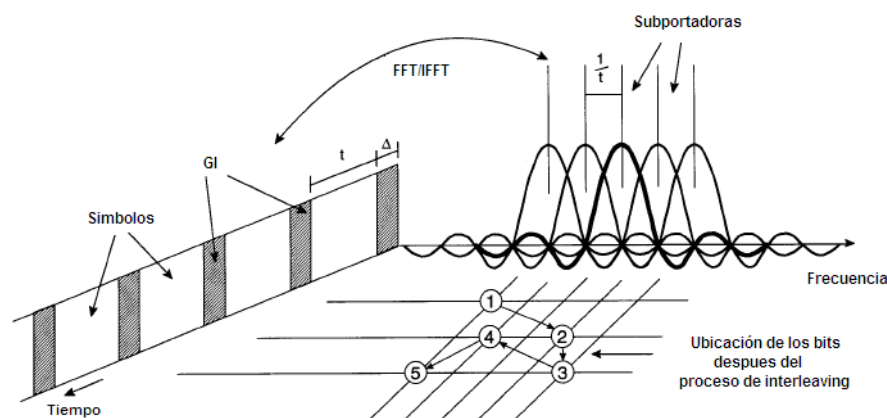


Figura 1.5: Posicionamiento de los bits en las subportadoras

Observe en la figura 1.5 como los bits continuos no se colocan en subportadoras adyacentes.

En el receptor se debe llevar a cabo el proceso inverso de tal manera de poder reordenar los bits en la secuencia original que tenían antes de pasar por el proceso de Interleaving.

### 1.4.4. Modulación Digital

Se puede pensar en la modulación digital como un procedimiento mediante el cual se transforma una señal binaria (o M-aria) de pulsos, en una señal armónica de radiofrecuencia (portadora), con la información de la señal binaria contenida en sus variaciones de fase, amplitud o frecuencia [7].

Para realizar estos procesos el sistema primero agrupa un conjunto de  $n$  bits ( $n$  depende del tipo de modulación empleada) y cada uno de estos le asigna un valor en fase y en cuadra-

tura dependiendo del tipo de diagrama de constelaciones empleado. Este procedimiento es denominado mapeo.

Posteriormente los valores en fase y en cuadratura son multiplicados por una portadora que los lleva a pasa banda.

Los sistemas de modulación digital no son algo nuevo, sin embargo en los últimos años se ha podido apreciar un notable incremento en la cantidad de estas técnicas de modulación, así como en la cantidad de aplicaciones que la utilizan para transmitir distintos tipos de información a través de canales de Radiofrecuencia (RF).

La tendencia actual en el sector de las telecomunicaciones es diseñar complejos, pero eficientes sistemas de comunicaciones utilizando tecnologías digitales, la complejidad de estos sistemas se ha hecho posible gracias a la miniaturización de los circuitos integrados y a su bajo costo comercial. En las décadas pasadas no habría sido posible la realización de las numerosas y complejas tareas de procesamiento de señales, que estos dispositivos efectúan en la actualidad [9].

### Modulación por desplazamiento de fase (PSK)

En este esquema de modulación se varía la fase de la portadora mientras la amplitud y frecuencia de la misma se mantienen constantes, de tal manera que un cero binario es representado mediante una portadora  $A_0 \cos(W_c t + \theta_0)$  y un uno binario mediante una portadora  $A_0 \cos(W_c t + \theta_1)$ .

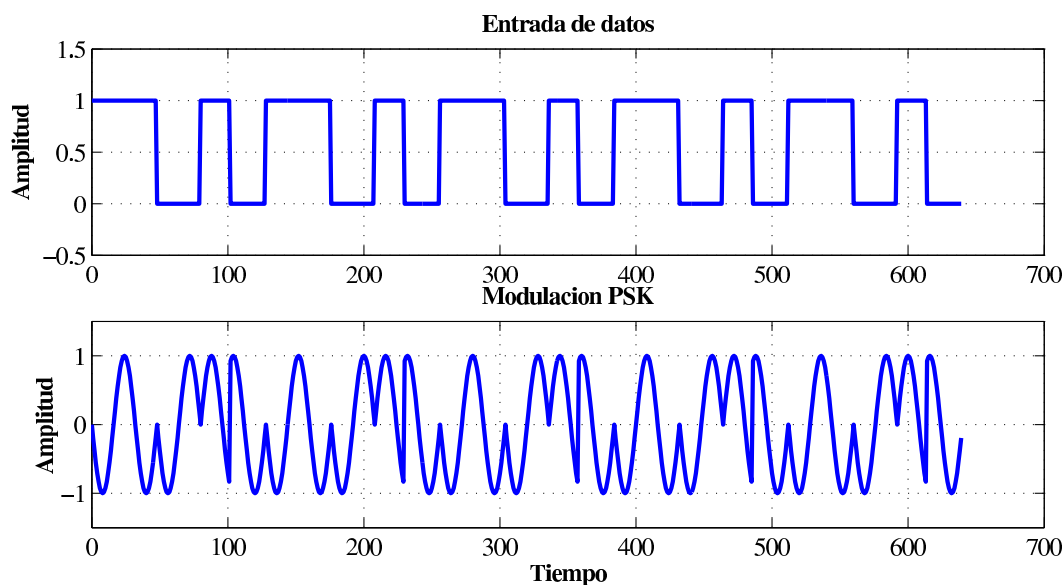


Figura 1.6: Modulación PSK de orden 2 (BPSK)

En la figura 1.6 se muestra una señal PSK en el dominio temporal, se observa que la variación de fase es de  $180^\circ$ .

**Esquemas de modulación digital M-arios**

Los esquemas de modulación digital PSK pueden ser implementados con señales bandabase no binarias de niveles múltiples, lo cual significa que la señal de información no será un tren de bits, sino que será una señal con un cierto número de niveles discretos. Cuando los esquemas antes mencionados se modulan con señales de niveles múltiples se les conoce como M-PSK. Cada nivel de la señal bandabase estará representado por varios bits, dicho número de niveles debe ser tal que satisfaga la siguiente expresión:

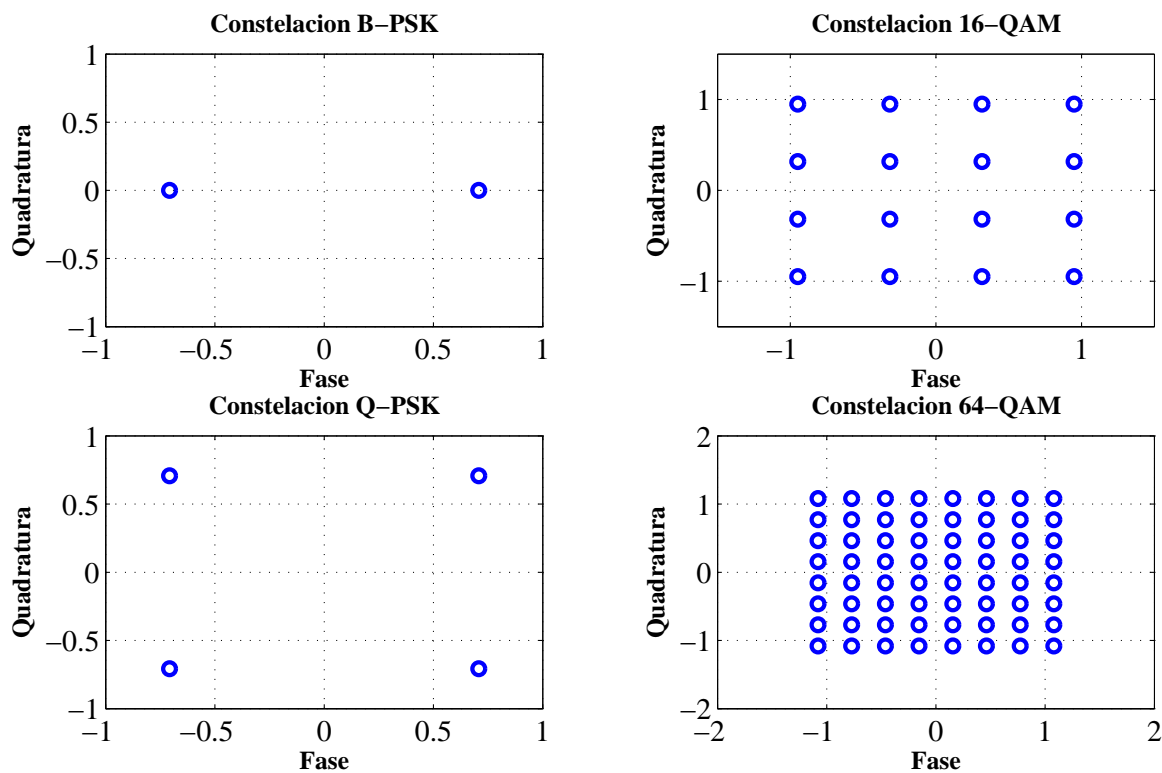


Figura 1.7: Constelaciones M-PSK y M-QAM

$$M = 2^n \tag{1.5}$$

donde  $M$  es el número de niveles de la señal bandabase, y  $n$  es el número de bits que se utilizan para mapear cada nivel. En modulación M-aria a cada nivel le corresponde un símbolo de la constelación  $I/Q$  de la señal modulada (figura 1.7).

Con ésta modulación se logra aumentar la velocidad de transmisión (bps), y por ende la eficiencia espectral (bps/Hz), a expensas de la tasa de error de bits (en ingles Bit Error Rate (BER)). A medida que la constelación posee mas símbolos, la distancia entre estos es menor (considerando una potencia normalizada), en consecuencia el sistema se vuelve mas susceptible al ruido, y aumenta la probabilidad de error, esto se debe a que el ruido traslada los puntos de la constelación recibida provocando que el receptor confunda puntos adyacentes.

### **Modulación de amplitud en cuadratura (QAM)**

La modulación QAM tiene la particularidad de modificar tanto la fase como la amplitud de la portadora, manteniendo constante la frecuencia de la misma, por lo que se considera una combinación de ASK *Amplitude Shift Keying* y PSK (figura 1.7). En esta se presentan componentes tanto en fase como en cuadratura y su forma general esta representada por la siguiente ecuación:

$$S(t) = X(t) \cos(W_c t) - Y(t) \text{sen}(W_c t) \quad (1.6)$$

Para información mas detallada acerca de esquemas de modulación digital consultar [14].

#### **1.4.5. Características del medio inalámbrico**

En esta sección se mencionan los efectos provocados por el medio inalámbrico en la señal transmitida.

El conocimiento de las características del canal de comunicación es fundamental para la comprensión de la estructura y de los procesos que se dan en un sistema de telecomunicaciones.

En un medio de comunicación ideal, la señal que detecta el receptor esta formada por una componente proveniente de una trayectoria directa entre el transmisor y el receptor, la cual será una replica exacta de la señal enviada por el transmisor. En un medio de comunicación inalámbrico real, la señal que se recibe no es una replica exacta de la enviada, esto se debe a las perturbaciones que el canal introduce en la señal a medida que la misma se desplaza de un punto a otro.

Las principales perturbaciones que el canal produce se deben a los multitrayectos, al ruido blanco Gaussiano *Additive White Gaussian Noise* (AWGN), a variaciones de la frecuencia de la portadora debido al efecto Doppler, a la atenuación, entre otras.

Todas estas modificaciones que sufre la señal deben ser corregidas por el receptor de tal manera que se pueda recuperar la información que ha sido enviada por el transmisor [12].

### Atenuación

Cuando una señal se propaga a través de un canal inalámbrico esta se debilita debido principalmente a que el frente de onda crece en forma esférica reduciendo así la densidad de potencia de manera inversamente proporcional al área de esa esfera. Al aumentar la distancia desde el punto de emisión (centro de la esfera), el área de la misma aumenta en forma cuadrática ( $4\pi r^2$ ) por lo que la densidad de potencia también disminuye en forma cuadrática, este tipo de atenuación esta siempre presente y se conoce como perdida de espacio libre. La ecuación (1.7) muestra como calcular la potencia de la señal, se observa que esta disminuye conforme la distancia aumenta y se conoce como ecuación de Friss.

$$P_r = P_t G_t G_r \left( \frac{\lambda^2}{4\pi d^2} \right) \quad (1.7)$$

Donde:

- $P_r$ : Potencia recibida.
- $P_t$ : Potencia transmitida.
- $G_t$  : Ganancia de la antena transmisora.
- $G_r$  : Ganancia de la antena receptora.
- $d$  : Distancia a la antena transmisora.
- $\lambda$ : Longitud de onda.

Existen otros factores que producen una disminución de la potencia de la señal, como por ejemplo obstáculos entre el transmisor y el receptor que obstruyan la línea de vista o las primeras zonas de Fresnel y multitrayectos provocados por señales reflejadas.

### Multitrayectoria

En los enlaces de RF (Radiofrecuencia), la señal enviada por el transmisor es reflejada por objetos que se encuentran en el camino entre él y el receptor. Esto origina replicas o copias de la señal transmitida que viajan por distintos caminos hasta llegar al receptor.

En la figura 1.8 se puede apreciar como ocurren reflexiones de la señal produciendo múltiples señales en el receptor.

Debido a que cada replica de la señal recorre caminos diferentes en su viaje desde el transmisor hasta el receptor, la fase y la potencia con la cual arriban es distinta para cada una de ellas. El receptor detecta entonces la suma de las señales (señal directa más réplicas), el nivel de potencia de dicha suma puede ser mayor al nivel de potencia de la señal directa (interferencia constructiva) o menor al nivel de potencia de la señal directa (interferencia

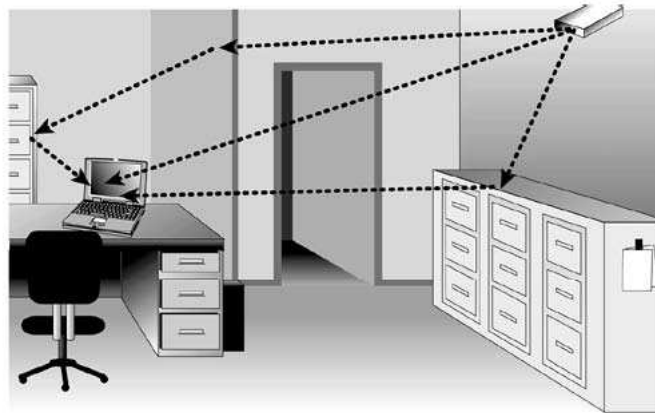


Figura 1.8: Multitrayectorias



Figura 1.9: Respuesta impulsiva del canal y diagrama fasorial

destruictiva). La interferencia destructiva puede producir serios desvanecimientos en la señal, provocando disminuciones de la potencia hasta de 40 dB.

En la figura 1.9 se observan los fasores correspondientes a la señal directa y las replicas, se aprecia como las replicas arriban al receptor con una magnitud menor y una fase distinta, la suma fasorial de estas señales corresponde a la señal efectiva vista por el receptor [11].

Este tipo de desvanecimientos se conoce como desvanecimiento Rayleigh, debido a que los niveles de potencia tienen una distribución de probabilidad con una forma muy particular que fue estudiada por Rayleigh.

### Desvanecimiento Selectivo en Frecuencia

Un canal inalámbrico en el cual ocurren multitrayectos suele tener una función de transferencia selectiva en frecuencia, es decir, algunas frecuencias se atenúan más que otras (figura 1.10). Esto se debe a que cada una de las frecuencias que componen la señal tiene una longitud de onda distinta ( $\lambda = c/f$ ), por lo tanto las fases con las cuales arriban cada una de estas

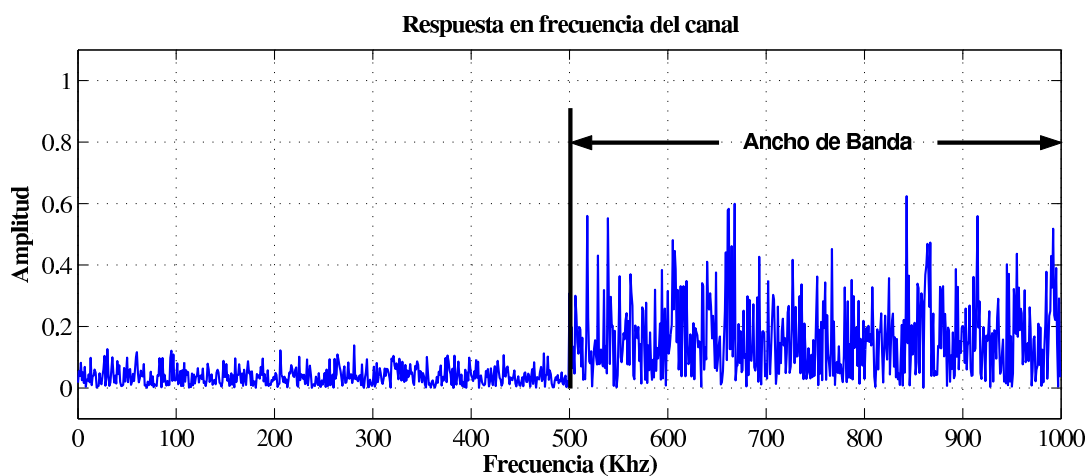


Figura 1.10: Respuesta en frecuencia del canal

componentes espectrales son diferentes y es por lo tanto diferente el efecto que causa una señal reflejada.

Se puede comparar al canal con un filtro cuya respuesta en frecuencia no sea constante a lo largo del ancho de banda del mismo. Una forma de evitar el efecto distorsionante que el medio tiene en la señal consiste en estimar su respuesta en frecuencia, y aplicar a la señal recibida la inversa de esta.

Este procedimiento se conoce con el nombre de ecualización y es ampliamente utilizado en diversos sistemas de telecomunicaciones.

En un canal inalámbrico se suele utilizar el termino ancho de banda de coherencia para referirse al ancho de banda en el cual la función de transferencia del canal se mantiene constante, el tamaño de este depende del tiempo de retardo de las señales multitrayecto, a medida que este aumenta el ancho de banda de coherencia disminuye, es decir que este es inversamente proporcional al retardo ( $W \propto 1/\tau_k$ , donde  $W$  es el ancho de banda de coherencia y  $\tau_k$  es el retardo).

Si una señal tiene un ancho de banda menor al ancho de banda de coherencia se considera al canal como no selectivo en frecuencia [7].

La respuesta impulsiva del canal varía con el tiempo, si esta variación se da en un periodo menor al tiempo de duración del símbolo que se transmite, se dice que el canal presenta un desvanecimiento rápido, en caso de que el cambio se diera en un tiempo mayor a la duración del símbolo se estaría en presencia de un desvanecimiento lento.

El canal de comunicación en una red inalámbrica es selectivo en frecuencia, con desvanecimiento lento y sigue una distribución tipo Rayleigh. La ecuación (1.8) define en forma general

la respuesta impulsiva de un canal de este tipo.

$$h(t) = \sum_{k=1}^M A_k \delta(t - \tau_k) \quad (1.8)$$

Donde:

- $A_k$ : Amplitud compleja.
- $\tau_k$ : Retardo de cada replica.
- $M$ : Número de replicas.

### Retardo del canal

La señal que se recibe en el receptor esta compuesta por una señal directa y por múltiples replicas de esta. El periodo de tiempo que transcurre entre la llegada de la señal directa y la llegada de la última replica se conoce como retardo del canal [11]. En sistemas digitales este fenómeno genera un serio problema conocido como interferencia intersímbolo (ISI). La misma consiste en que las replicas de la señal que arriban al receptor cierto tiempo después de la señal directa contienen un símbolo que se superpone al símbolo de la señal directa siguiente, ocurriendo así el solapamiento de los símbolos adyacentes. Cuando ocurre ISI la tasa de errores aumenta en forma considerable, degradando la calidad y la velocidad efectiva del enlace.

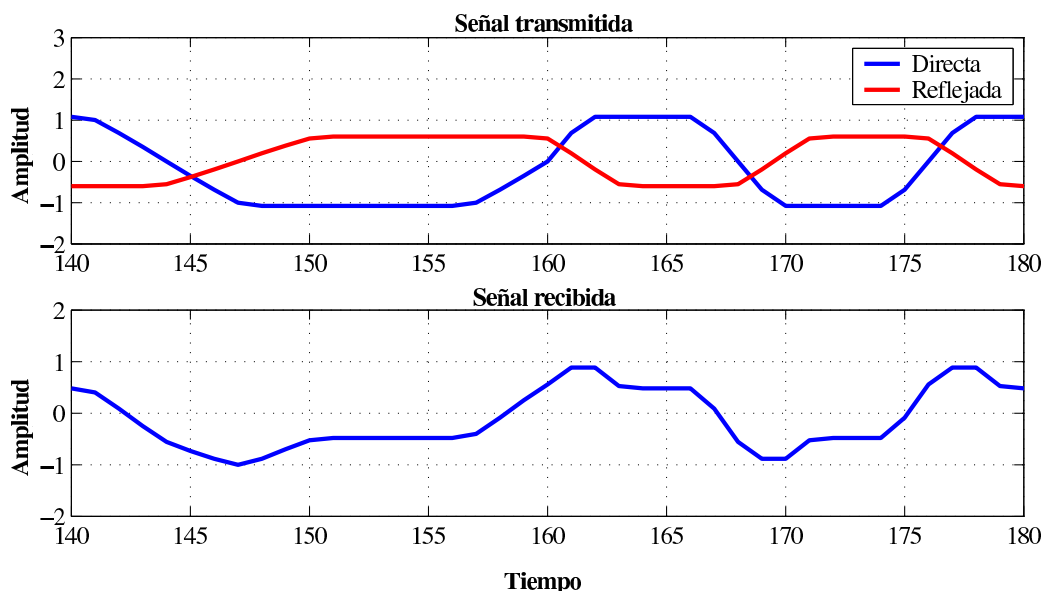


Figura 1.11: Señal recibida producto de la suma de la señal directa y de la reflejada

En la figura 1.11 se puede apreciar la señal que resulta producto de la suma de la señal directa con la replica, observe que la replica llega un tiempo después.

### Modelos de canal utilizados en las redes inalámbricas

Existen múltiples modelos matemáticos que describen en forma aproximada el comportamiento de un canal de comunicaciones inalámbrico, estos varían de acuerdo a distintos parámetros del sistema como por ejemplo la frecuencia de operación, el tipo de modulación, las características del entorno, etc. Un modelo de canal debe tomar en cuenta las diversas perturbaciones que este introduce a la señal y emularlos de la forma mas sencilla posible, este procedimiento suele llevarse a cabo en bandabase realizando una convolución en el dominio del temporal entre la envolvente compleja de la señal a transmitir y la respuesta al impulso del canal, la cual tambien se encuentra en forma compleja y en bandabase.

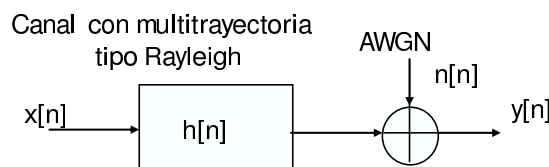


Figura 1.12: Modelo general del canal

Para generar la respuesta al impulso del canal en un ambiente de simulación computarizada se utilizan elementos como los mostrados en la figura 1.12, allí se observa como se le agrega ruido blanco a la señal que se transmite y se convoluciona.

#### 1.4.6. Implementación del sistema OFDM

En la práctica el proceso para generar, transmitir y recibir una señal OFDM se lleva a cabo de la siguiente manera (ver figura 1.16):

##### Transmisión

En la etapa de transmisión se toman los datos binarios del mensaje y se hacen pasar a través del bloque de Código Convolutivo, el cual los codifica según la tasa de código establecida, a la salida del mismo se obtiene entonces una cantidad de bits mayor a la cantidad de bits en la entrada. A estos bits codificados se les aplica el proceso de Interleaving, separando así los bits adyacentes.

Inmediatamente después se mapean los valores binarios a través del uso de constelaciones  $M - QAM$  o  $M - PSK$  según sea el caso (no se permite el uso de  $FSK$  debido a que las portadoras perderían la ortogonalidad).

Una vez obtenidos estos valores  $X_s(k)$  se hace uso de un convertidor serial/paralelo para obtener  $N$  grupos de números complejos que ingresaran al bloque de la Transformada Inversa Discreta de Fourier (*Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT)*) o su respectiva transformada rápida (*Inverse Discrete Fourier Transform (IFFT)*), la salida obtenida del bloque IDFT

es una señal bandabase en el dominio del tiempo  $x_s(t)$  limitada entre 0 y  $T_s$ . Esta señal se hace pasar por un convertidor paralelo/serial y se le agrega el prefijo cíclico (GI ó CP) para eliminar la ISI, terminada esta etapa obtenemos un símbolo OFDM. El siguiente paso es realizar una concatenación ( $\odot$ ) de símbolos OFDM. En estos momentos tenemos la señal OFDM en bandabase, la cual solo necesita pasar a través de un modulador  $I/Q$  para convertirla en una señal pasabanda  $s(t)$  que luego se dirige al amplificador lineal y finalmente a la antena que se encargara de irradiarla [7].

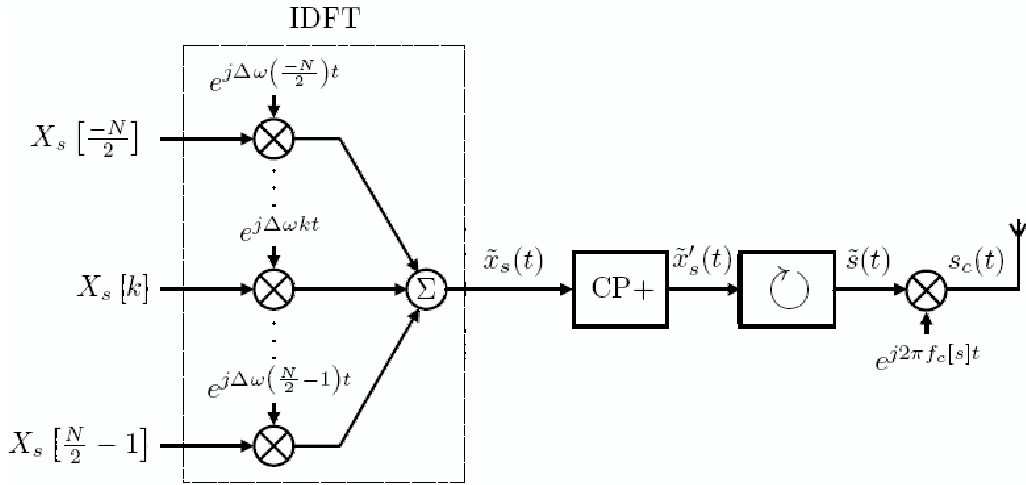


Figura 1.13: Modelo analítico del transmisor OFDM

En la figura 1.13 se explica brevemente este proceso.

### Canal

El canal es modelado como una función de transferencia compleja bandabase en el dominio del tiempo, la cual es convolucionada con la señal transmitida para determinar la señal de entrada para el sistema de recepción.

La respuesta al impulso para el  $u$ -ésima subportadora  $h_u(t)$  se puede definir como:

$$h_u(t) = \sum_{l=0}^L h_{u,l}(t) \delta_c(\tau - \tau_l) \quad (1.9)$$

donde  $h_{u,l}(t)$  es la ganancia compleja del  $l$ -ésimo componente de la multitrayectoria para el  $u$ -ésimo subportadora en el tiempo  $t$ .

El canal tiene un comportamiento estático durante el periodo de un símbolo OFDM y los coeficientes de ganancia para cada contribución a la multitrayectoria son icorrelados.

Dadas las anteriores condiciones el canal se redefine como:

$$h_{u,s}(t) = \sum_{l=0}^L h_{u,l}[s] \delta_c(t - \tau_l) \tag{1.10}$$

$$h_{u,l}[s] = h_{u,l}(t) \quad t \in [sT_s, (s+1)T_s]$$

$$sT_s \leq t < (s+1)T_s$$

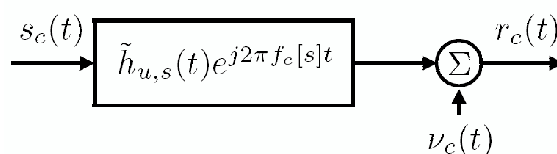


Figura 1.14: Diagrama de bloques del canal

**Recepción**

En el extremo receptor se aplica el proceso inverso al explicado anteriormente, agregando un par de procedimientos adicionales. (ver figura 1.15)

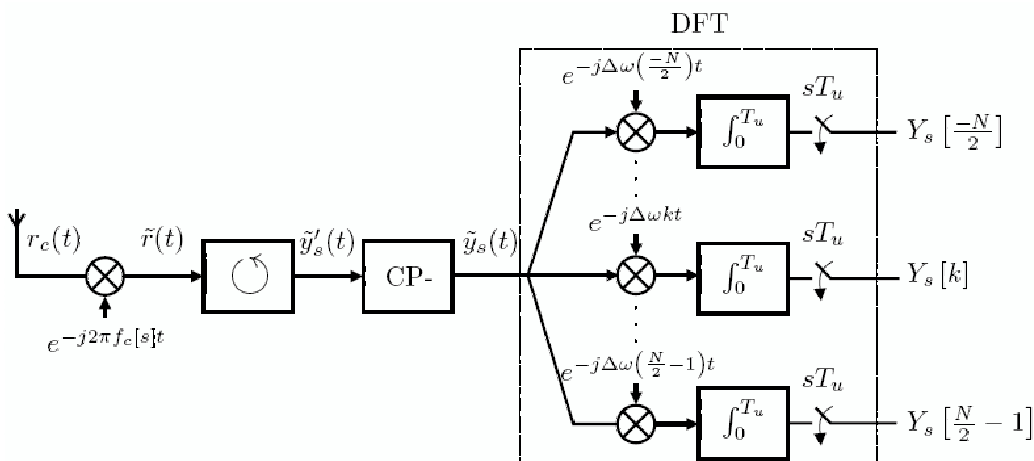


Figura 1.15: Esquema general del receptor OFDM

Al recibir la señal se deben estimar los siguientes parámetros:

Corrimiento en frecuencia, tiempo de duración del símbolo, sincronización del símbolo, función de transferencia del canal (en caso de que el canal sea selectivo en frecuencia) y corrimientos de fase.

Para la determinación de estos parámetros se emplean los campos de preámbulo que se

añaden al comienzo de cada trama y las señales pilotos que se envían en algunas subportadoras, estas señales son constantes y tanto el transmisor como el receptor las conocen de antemano [13].

#### 1.4.7. Ventajas y desventajas de OFDM

Las principales ventajas de OFDM:

- Alta eficiencia espectral.
- Resistencia a desvanecimientos por multitrayectos.
- Resistencia a desvanecimientos selectivos en frecuencia.
- Resistencia a la dispersión de la señal.
- Resistencia a la distorsión de fase.
- Fácil ecualización del canal.
- Alta inmunidad a ráfagas de ruido.

Y sus principales desventajas son:

- Las variaciones en frecuencia de las subportadoras degradan de manera considerable la calidad del enlace, ya que se pierde la ortogonalidad y las subportadoras interfieren entre sí, fenómeno que se conoce como ICI *Inter Carrier Interference*.
- Se requieren altas capacidades de procesamiento de señales debido a la complejidad de la técnica.
- Alto valor en la relación de potencia pico a potencia promedio *Peak to Average Power Ratio* (PAPR).
- Requerimiento de circuitos altamente lineales.

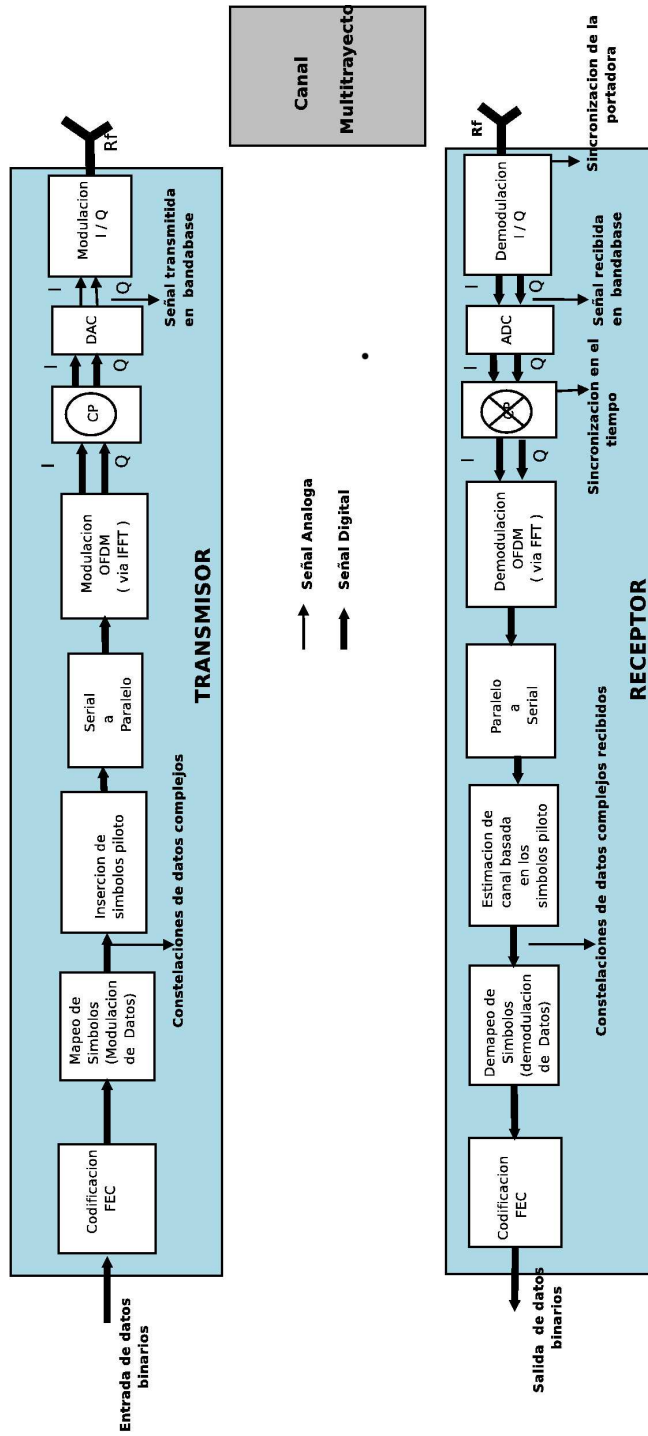


Figura 1.16: Tranceiver OFDM

## Capítulo 2

# Fundamentación Teórica de las FARNE utilizadas

Para entender con claridad el comportamiento de cada FARNE se necesita en primera instancia conocer los conceptos básicos referentes al análisis espectral como son la interpretación geométrica del mismo y el procedimiento para comprobar y elaborar una nueva transformada. Luego se procede a estudiar el modelo matemático de cada FARNE a utilizar y a hacer un análisis de su eficiencia y de su ortogonalidad.

### 2.1. Fundamentos de analisis espectral

Algunos de los fundamentos necesarios para el entendimiento del análisis espectral son:

#### 2.1.1. Interpretación geométrica

La enseñanza de la interpretación espectral de las señales siempre ha estado acompañada de varias dificultades. Los estudiantes no siempre logran descubrir la naturaleza de estas y después de resolver innumerables ejercicios en forma mecánica, simplemente terminan acostumbrándose a ellas.

En algunos casos se cometen graves errores, permanentemente se entablan discusiones (por ejemplo sobre las bandas laterales en la radio transmisión), ocurren suposiciones erróneas (por ejemplo, la incorrecta interpretación del ancho de banda en la modulación por frecuencia) o no se comprende la naturaleza de bases diferentes a las de Fourier para la descomposición de señales. Como resultado se observan diferentes paradojas, pero estas existen solo donde no hay un entendimiento real de los fenómenos. En realidad el método espectral no conlleva a errores si se usa correctamente, los errores mencionados no son fallas del método espectral, sino falta de destreza al emplearlo.

En la enseñanza del análisis espectral basada en la interpretación geométrica de las señales, propuesta por V.A. Kotelnikov en su disertación doctoral presentada en 1947 ante el consejo

académico del Instituto de Energía Molotov en Moscú [1] se amplían desde un punto de vista más amplio los conceptos generales para cubrir posteriores avances como la transmisión, el tratamiento de señales digitales y el uso de diferentes bases ortogonales y cuasi ortogonales para el procesamiento de la información.

Siguiendo esa interpretación, en su tesis doctoral [2] Homero Ortega Boada propone nuevas bases armónicamente relacionadas para las descomposiciones espectrales y resalta la importancia de los algoritmos recurrentes para las transformadas discretas de Fourier en tiempo real que compiten perfectamente con los algoritmos de Transformada Rápida de Fourier (FFT) usados comúnmente.

Para iniciar el análisis de esta interpretación, en la imagen 2.1 se muestran tres vectores ortogonales  $\vec{e}_0$ ,  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  (forman ángulo de 90 grados entre si) unitarios (su longitud es igual a 1) que sirven de base para un campo tridimensional.

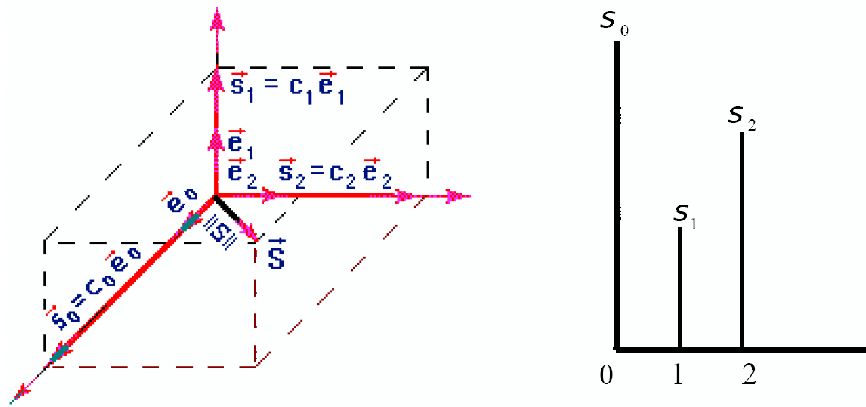


Figura 2.1: Representación de un vector en componentes ortogonales entre sí

Se observa además, como cualquier vector  $\vec{S}$  perteneciente a ese campo se puede descomponer en sus tres dimensiones, resultando tres vectores ortogonales de manera que  $\vec{S} = \vec{s}_0 + \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ , mientras que  $c_n$  son los coeficientes de descomposición.

En la segunda imagen se muestra otra forma gráfica de interpretar el vector  $\vec{S}$  con los valores escalares de sus componentes ortogonales.

En adelante al ver una figura como esta, se entenderá que se trata de las magnitudes tres vectores con magnitudes  $s_0$ ,  $s_1$  y  $s_2$  con ángulo de  $90^\circ$  entre si, que componen el vector  $\vec{S}$ .

Suponiendo la existencia de campos de  $N$  dimensiones la fórmula general de la descomposición de un vector  $\vec{S}$  es:

$$\vec{S} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \vec{e}_n \quad (2.1)$$

Este campo de  $N$  dimensiones se conoce como el campo de Euclides. Es muy importante aclarar el concepto de multiplicación escalar en un campo de  $N$  dimensiones. Sabemos que la

multiplicación escalar de 2 vectores  $\vec{S}$  y  $\vec{Y}$  con un ángulo  $\theta$  entre si, se define como:  $(\vec{S}, \vec{Y}) = s.y.\cos\theta$  donde  $s$  y  $y$  son las magnitudes de los vectores.

Teniendo en cuenta la composición ortogonal de esos vectores en el campo  $N$  dimensional se deduce que su multiplicación escalar es igual a:

$$(\vec{S}, \vec{Y}) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i y_i \quad (2.2)$$

También se puede deducir que para dos vectores ortogonales  $\vec{X}$  y  $\vec{Z}$  se cumple que su multiplicación escalar es igual a cero:

$$(\vec{X}, \vec{Z}) = 0 \quad (2.3)$$

La longitud (que en adelante se llamará norma) del vector  $\vec{S}$  se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras:  $\|\vec{S}\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} s_i^2$ , lo cual equivale a:

$$\|\vec{S}\| = \sqrt{(\vec{S}, \vec{S})} \quad (2.4)$$

Supongamos que en calidad de vector base se quieren usar unos  $\vec{h}_n$  que son ortogonales, pero que tienen diferente norma. En este caso se buscarán sus vectores unitarios así:  $\vec{e}_n = \vec{h}_n / \|\vec{h}_n\|$ , donde  $\|\vec{h}_n\|$  es la norma del vector respectivo y la fórmula 2.1 tomará la forma de:

$$\vec{S} = \sum_{i=0}^{N-1} c_n \cdot \frac{\vec{h}_n}{\|\vec{h}_n\|} \quad (2.5)$$

Para calcular  $\vec{c}_n$  podemos recurrir a la multiplicación escalar:  $(\vec{S}, \vec{e}_n) = \vec{c}_n \vec{e}_n \vec{e}_n$ . De aquí se deduce que:

$$\vec{c}_n = (\vec{S}, \vec{e}_n) \quad (2.6)$$

Tambien se deduce que para el caso general de vectores de base no normalizados los coeficientes de descomposición se calculan así:

$$\vec{c}_n = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{S} \frac{\vec{h}_n}{\|\vec{h}_n\|} \quad (2.7)$$

(2.5) y (2.21) constituyen la forma más generalizada de las descomposiciones ortogonales.

Siguiendo la representación dada en la figura 2.1 de un vector  $\vec{S}$ , bien se puede considerar que una señal discreta como la presentada en la figura 2.2 se trata de un vector en el espacio  $N$  dimensional.

De igual manera la señal continua  $S(t)$  puede considerarse como un vector en un espacio de dimensiones infinitas. En este último caso la suma en la ecuación 2.2 para la multiplicación

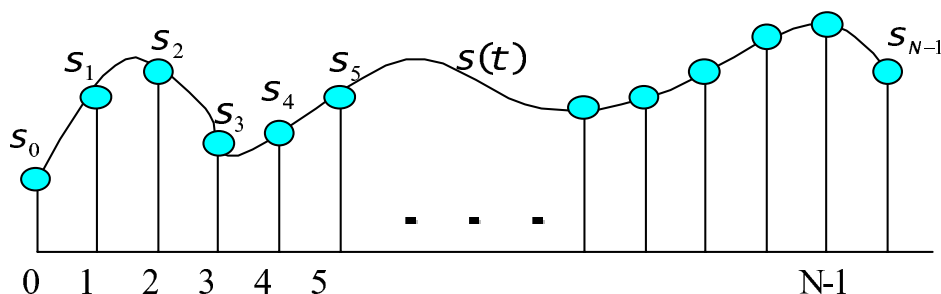


Figura 2.2: Representación  $N$  dimensional de una señal continua

escalar toma la forma de una integral:

$$(\vec{S}, \vec{Y}) = \int_a^b s(t)y(t)dt \quad (2.8)$$

Lo importante ahora es establecer la existencia de tales campos de  $N$  dimensiones y de dimensiones infinitas. En la vida práctica es muy difícil concebir tales campos, aunque a esto se dedica una parte de la matemática conocida como Teoría Funcional.

### 2.1.2. Procedimiento para proponer o comprobar una nueva base ortogonal

Existen muchos sistemas de bases ortogonales como: las funciones armónicas, las funciones de Walsh, Adamar, Hadamart, Croneker, Peli, Haar, etc, las cuales resultan útiles en diferentes casos.

La clave para proponer nuevas bases está en encontrar un sistema de vectores que sean ortogonales entre si, los cuales servirían de base para el campo de  $N$  dimensiones. En el artículo [2] se plantea un método para descubrir sistemas ortogonales, mientras que en esta breve sección se aclara el procedimiento para comprobar que el sistema de funciones escogido sirve efectivamente de base. Luego se explica como encontrar las fórmulas finales.

El sistema de funciones debe ser completo, es decir, todos los vectores deben cumplir la codición de ortogonalidad.

El procedimiento es el siguiente:

- Proponer el sistema de funciones que servirán de base
- Comprobar la ortogonalidad de todas las funciones mediante (2.3), usando para la multiplicación escalar propuestas en (2.2) o en (2.21) según se trate de funciones discretas o continuas
- Encontrar la norma de cada uno de los componentes del sistema, según (2.4)
- Usar (2.5) para hallar la transformada

- Usar (2.6) para hallar los coeficientes de descomposición

Un ejemplo de este proceso, aplicado a las bases que se usarán como objeto de estudio de esta investigación se puede observar a continuación.

### 2.1.3. Base de funciones exponenciales discretas

Un sistema de funciones que puede servir de base para un espacio  $N$  dimensional y además conduce a la demostración de la representación en series de Fourier en forma discreta es el sistema de Funciones Exponenciales Discretas (FED) de forma compleja:  $1, e^{j\pi\Omega}, e^{j2\pi\Omega} \dots e^{j(N-1)\pi\Omega}$ , donde  $\Omega = 2n/N, n = [0, N - 1]$ .

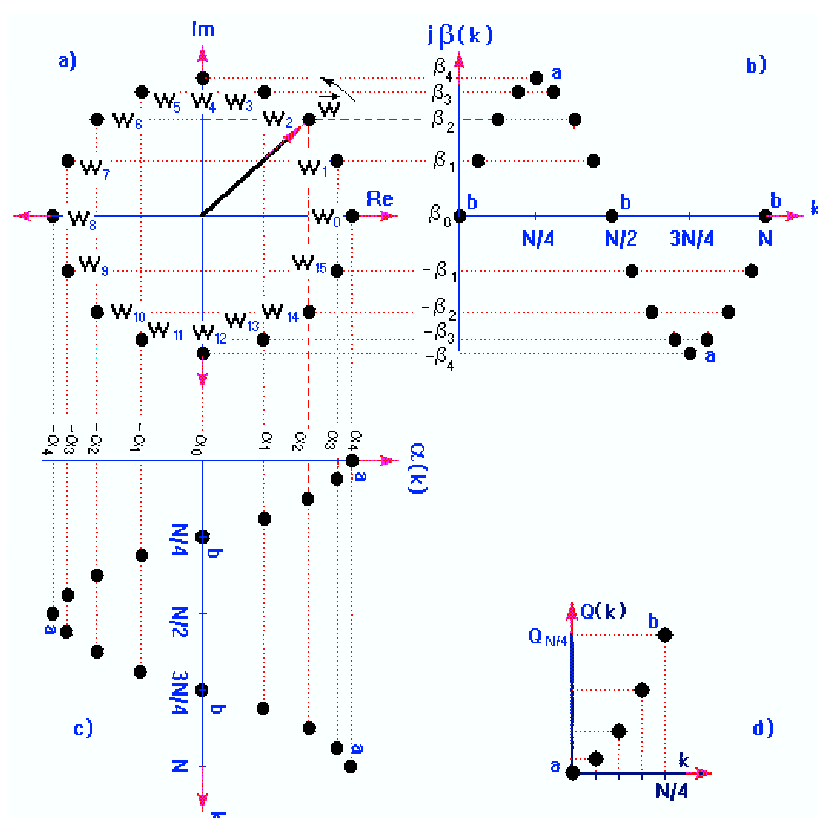


Figura 2.3: Representación de la base (FED)

Una mejor comprensión de este sistema se observa en la figura 2.3. Aquí se ve en el área compleja un vector  $\vec{h}_n$  girando en contra de las manecillas del reloj ocupando los valores  $W_k, k = [0, N - 1]$ .

La  $n$ -ésima función del sistema puede ser representada con un vector rotativo a una  $n$ -ésima velocidad como por ejemplo el vector  $\vec{h}_1 = (W_0, W_1, W_2, \dots)$  o el vector  $\vec{h}_2$  que rota con una velocidad doble, o sea,  $\vec{h}_2 = (W_0, W_2, W_4, \dots)$ .

Los valores discretos  $W_k = \alpha_k + j\beta_k$  se conocen como Factores de Fase (FF) en donde  $\alpha_k = \cos(k\Omega)$  y  $\beta_k = \text{sen}(k\Omega)$ .

Para realizar la multiplicación escalar de magnitudes complejas las fórmulas (2.2) y (2.21) cambian ligeramente con el fin de que el resultado sea una magnitud real.

De forma axiomática se usará entonces el valor conjugado  $y^* = a - jb$  en lugar de  $y = a + jb$ , o sea que:

$$(\vec{S}, \vec{Y}) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i y_i^* \quad \text{para campos N dimensionales} \quad (2.9)$$

$$(\vec{S}, \vec{Y}) = \int_a^b s(t) y(t)^* dt \quad \text{para campos de dimensiones infinitas} \quad (2.10)$$

La multiplicación escalar para este caso es:

$$\begin{aligned} (\vec{h}_n, \vec{h}_m) &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{jnk} e^{-jmk} = 0 && \text{para } n \neq m \\ &= N && \text{para } n = m \end{aligned} \quad (2.11)$$

Después de utilizar (2.10) se utiliza la ecuación (2.6) para hallar los coeficientes de la DFT.

#### 2.1.4. Transformadas Recurrentes

Para la solución de las transformadas con diferentes bases generalmente se utilizan algoritmos de Transformación Rápida de Fourier (FFT) [3].

En Rusia se ha generalizado el uso de dos algoritmos recurrentes de la Transformada de Fourier propuestos desde 1969 por Leites y Solovev [4] y se ha demostrado su supremacía en velocidad respecto a los algoritmos [5], por cual se les consideran como la plataforma del Análisis Espectral Digital Dinámico (AEDD).

Supongamos que a un analizador de espectros están entrando una por una las muestras de señal:  $s(0), s(1), s(2), \dots, s(p-1), s(p)$ . En la salida del analizador, el espectro va cambiando dinámicamente, de manera que si antes de la muestra  $s(p)$  se tenía el espectro  $C_{p-1}(n)$ , seguidamente se calculará  $C_p(n)$  en la forma recurrente:

$$C_p(n) = [C_{p-1}(n) + s(p) - s(p-N)]W_n \quad \text{donde, } n = [0, N-1] \quad (2.12)$$

Una segunda fórmula es:

$$C_p(n) = C_{p-1}(n)[s(p) - s(p-N)]W_{n(p+1)}^* \quad (2.13)$$

Basado en el procedimiento expuesto, se han logrado sintetizar y comprobar diversas bases.

### 2.1.5. Funciones Armónicamente Relacionadas de Números Enteros (FAR-NE)

Si se analiza detenidamente la figura 2.3 se puede observar que los Factores de Fase  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  pueden ser definidos a partir de una Sucesión Numérica de Coeficientes que crecen monótonamente (SNCM) inicial  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{N/4}$  (figura 2.3 numeral d). Las letras  $a$  y  $b$  muestran respectivamente el comienzo y el final de la curva que une los valores discretos. La definición matemática general de los FF se puede deducir confrontando la curva  $(a - b)$  con las diferentes partes de las sucesiones  $\alpha_k, \beta_k$  (figura 2.3 numeral c y d) obteniendo de esta forma:

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \text{sgn}(N/4 - k)(Q_{N/4} - Q_{N/4 - |N/4 - k|}) \\ \beta_k &= Q_{N/4} - Q_{|N/4 - k|} \quad 0 \leq k \leq N/2 \\ W_k &= -W_{k - N/2} \quad N/2 \leq k \leq N\end{aligned}\quad (2.14)$$

en donde  $\text{sgn}(x)$  es la función signo definida como  $-1$  si  $x \in (-\infty, 0)$  y  $1$  si  $x \in [0, \infty)$ .

Conociendo estos FF se pueden encontrar nuevas definiciones para  $\alpha_k$  y  $\beta_k$ :

$$\begin{aligned}\alpha(k) &= \text{sgn}(N/2 - ((k))_N)(\text{sgn}(N/4 - ((k))_{N/2}) \bullet (Q_{N/4} - Q_{N/4 - |N/4 - ((k))_{N/2}|}) \\ \beta(k) &= \text{sgn}(N/2 - ((k))_N)(Q_{N/4} - Q_{|N/4 - ((k))_{N/2}|}) \quad k \geq 0\end{aligned}\quad (2.15)$$

donde  $((x))_q$  es el residuo de  $x$  en módulo  $q$ .

Si se aplica (2.15) se pueden sintetizar FARNE continuas con la ayuda de una función continua creciente  $f(x)$ . Por ejemplo si escogemos  $N = 4$  las funciones  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  serian:

$$\begin{aligned}\alpha_4(x) &= \text{sgn}(2 - ((x))_4)(\text{sgn}(1 - ((x))_2) \bullet (1 - f(1 - |1 - ((x))_2|)) \\ \beta_4(x) &= \text{sgn}(2 - ((x))_4)(1 - f(|1 - ((x))_2|)) \quad x \in [0, \infty)\end{aligned}\quad (2.16)$$

en donde  $\alpha_4(x)$  y  $\beta_4(x)$  son periódicas con periodo igual a 4.

### Funciones Triangulares Discretas (FTD)

Para sintetizar funciones triangulares se puede utilizar la función  $f(x) = x, x \in [0, 1]$ . Si esta se introduce en (2.16), después de algunas reducciones se obtiene que:

$$\begin{aligned}\text{triac}_4(x) &= |((x))_4 - 2| - 1 \\ \text{trias}_4(x) &= |((x+1))_4 - 2| - 1 \quad x \in [0, \infty)\end{aligned}\quad (2.17)$$

o bien

$$\begin{aligned} triac_4(x) &= |x - 2| - 1 \\ trias_4(x) &= |x - 1| - 1 \quad x \in [0, 4] \end{aligned} \quad (2.18)$$

y, en forma compleja  $tria(x) = triac(x) + jtrias(x)$ .

Teniendo como base las anteriores definiciones se toma la función discreta  $Q_k = k$ ,  $k = [0, N/4]$  para desarrollar las *FTD*. Al reemplazar esta función en (2.15) y después de realizar algunas reducciones triviales se obtiene:

$$\begin{aligned} triac_N(k) &= |(k)_N - N/2| - N/4 \\ trias_N(k) &= |(k + N/4)_N - N/2| - N/4 \quad k \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (2.19)$$

o bien

$$\begin{aligned} triac_N(k) &= |k - N/2| - N/4 \\ trias_N(k) &= |k - N/4| - N/4 \quad k \in [0, N - 1] \end{aligned} \quad (2.20)$$

El sistema de funciones  $\vec{W}_n = tria_N(jnK)$ , donde  $n, k = [0, N - 1]$ , puede servir de base para el espacio N-dimensional. Sin tener en cuenta las norma de cada una de estas funciones, la transformada discreta de Fourier con la base FTD según (2.5), (2.6) y (2.21), tiene como característica principal el uso solamente de números enteros.

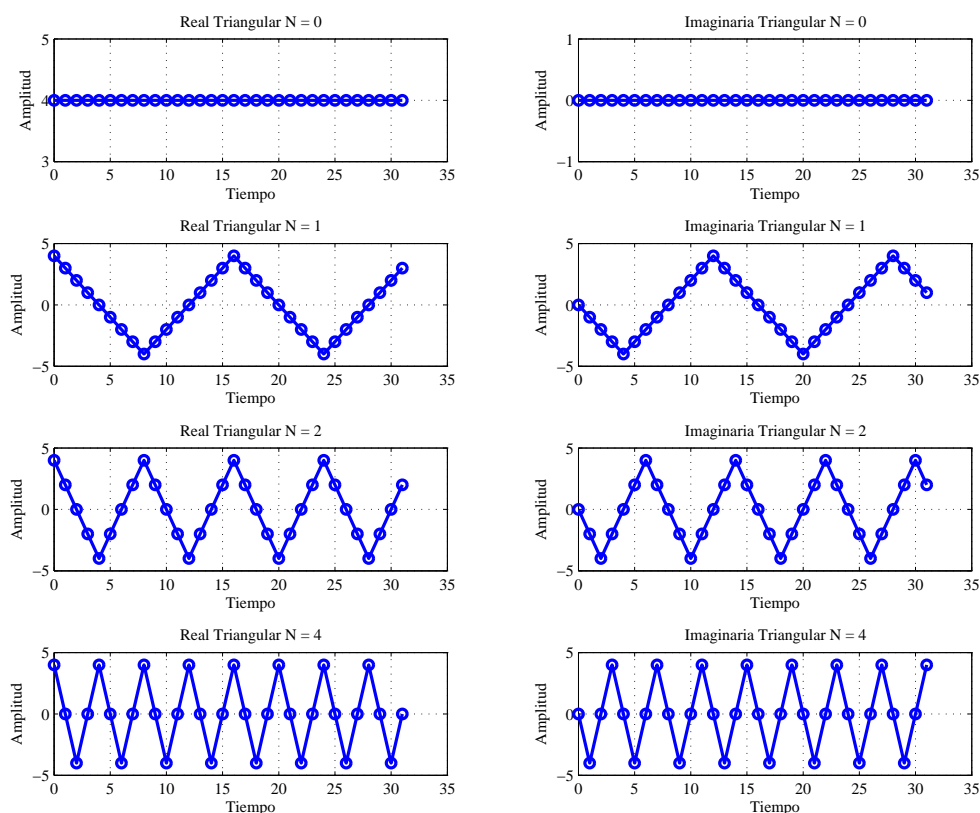
$$\vec{c}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \vec{s}_k tria_N(-jnk), n = [0, N - 1] \quad (2.21)$$

En la figura 2.4 se muestran algunas de las componentes del sistema de funciones FTD para el caso de  $N = 16$ .

### Funciones Potenciales Discretas (FPD)

Análogamente, si se emplea la sucesión  $Q_k = k^2$ ,  $k = [0, N - 1]$  en 2.15, se logra sintetizar la base de las FPD, para llegar a la definición:

$$\begin{aligned} pows_N(k) &= ((k)_N - N/2)(|(k)_N - N/2| - N/2) \\ powc_N(k) &= pows_N(k + N/4) \quad k \in [0, \infty) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Figura 2.4: Componentes rectangulares de la FTD para  $N = 16$ 

Analizando la ecuación anterior y comparándola con la descrita en el desarrollo de las FTD, se llega a demostrar que:

$$\begin{aligned} pows_N(k) &= trias_N(k)(N/2 - |trias_N(k)|) \\ powc_N(k) &= triac_N(k)(N/2 - |triac_N(k)|) \end{aligned} \quad (2.23)$$

### Funciones Binomiales Discretas (FBD)

Para sintetizar esta base se empleó la sucesión  $Q_k = C_{k+1}^2, k = [0, N/4]$ , donde  $C_n^m$  es un coeficiente binomial en donde  $C_n^2 = n(n+1)/2$ .

Además de tener las FBD una representación matemática resultante del reemplazo de esta sucesión en (2.15), los FF tienen una deficiencia recurrente que puede resultar de gran utilidad.

Sea  $W_k = \alpha_k + j\beta_k$  entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \alpha_{k-1} - k, & k \in (0, N/4) \\
&= \alpha_{k-1} + k - N/2 - 1 & k \in (N/4, N/2) \\
\beta_k &= \beta_{k-1} - k + N/4 + 1, & k \in (0, N/4) \\
&= \beta_{k-1} - k + N/4, & k \in (N/4, N/2) \\
W_k &= -W_{k-N/2}, & k \in (N/2, N)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Con base en las ecuaciones anteriores se puede encontrar una relación directa entre esta base y la base de FTD:

$$\begin{aligned}
bins_N(k) &= trias_N(k)(N/2 + 1 - |trias_N(k)|)/2 \\
binc_N(k) &= triac_N(k)(N/2 + 1 - |triac_N(k)|)/2
\end{aligned} \tag{2.25}$$

La transformación discreta de Fourier de las FPD y las FBD son muy similares a la descrita para las FTD.

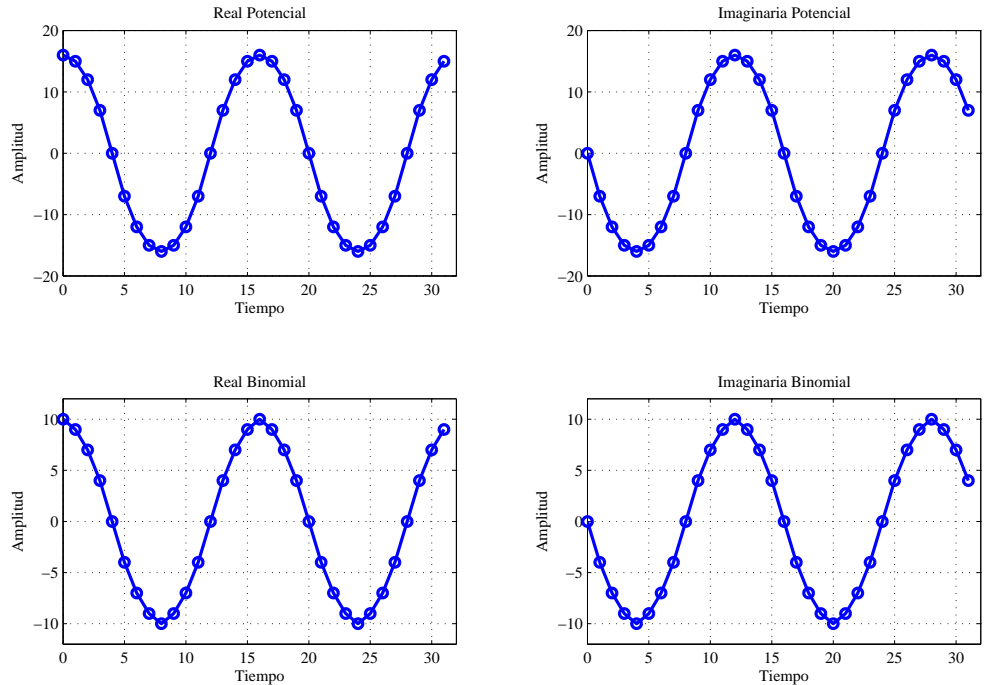


Figura 2.5: Parte real e imaginaria de las bases de FPD y FBD

Cada una de estas transformaciones posee su respectivo algoritmo de transformada rápida.

### 2.1.6. Análisis comparativo entre las FARNE y la FED

En OFDM se utiliza la DFT como la encargada de multiplexar ortogonalmente las portadoras por lo tanto este sistema debe realizar cada vez que transmite un símbolo el cálculo de esta transformada, si existiera la forma de disminuir el tiempo de procesamiento gastado al realizar esta operación se mejoraría la velocidad de transmisión del mismo.

Por lo tanto es de suma importancia conocer la eficiencia de las FARNE en el cálculo de la transformada y realizar un análisis comparativo entre las nuevas funciones y la FED.

Otro punto crítico a analizar es la ortogonalidad de la misma ya que en OFDM es de vital importancia que las subportadoras por donde se multiplexa la información sean ortogonales entre sí.

#### Eficiencia en el cálculo de los coeficientes

La principal ventaja de las FARNE propuestas con respecto a las FED consiste en la sencillez del cálculo de los valores de los FF (Factores de Fase). Adicionalmente, para todas las FARNE los FF son números enteros, razón por lo cual no resulta necesario realizar multiplicaciones con puntos decimales propias de la base armónica, sino que sólo se efectúan simples sumas y desplazamientos de su representación binaria.

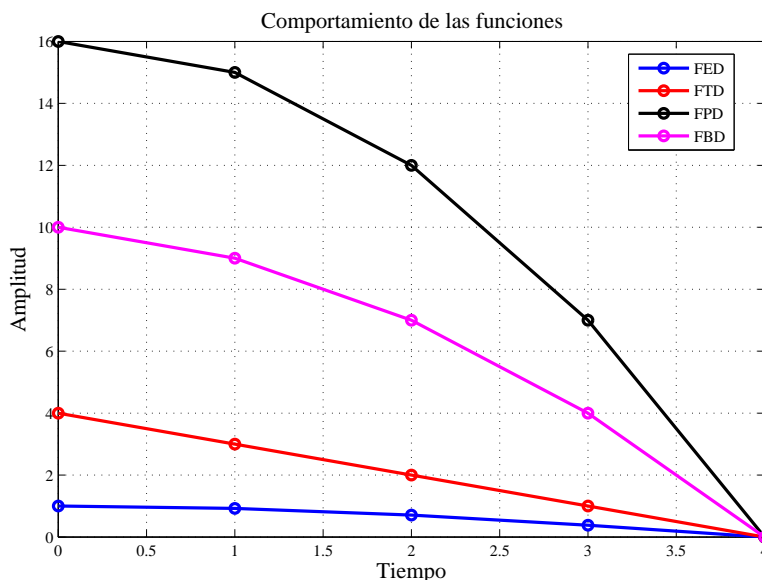


Figura 2.6: Valores discretos de las funciones utilizadas para  $N = 16$

En la figura 2.6 se pueden observar los valores enteros de las FARNE en comparación con los valores decimales de la FED.

Analizando con más profundidad sus definiciones matemáticas, se puede concluir que para calcular un valor discreto de la DFT, es necesario aplicar la series de Taylor para obtener la función  $sen(x)$  ó  $cos(x)$ , en las cuales se realizan operaciones matemáticas complejas que requieren un mayor procesamiento con las FARNE.

Por lo tanto las transformadas basadas en FARNE tienen una velocidad de procesamiento mayor que la DFT dando como resultado un incremento significativo en la velocidad de transmisión del sistema OFDM.

### Ortogonalidad

Con el fin de analizar la desviación de ortogonalidad de las bases de las FARNE con respecto a las FED se puede usar el vector  $\vec{U} = W^{\vec{FED}} - W^{\vec{FARNE}}$ , o bien la diferencia de velocidades angulares  $\omega = \omega^{\vec{FED}} - \omega^{\vec{FARNE}}$  para diferentes momentos  $t$ .

Los resultados demuestran que las funciones FPD y FBD propuestas son 3 veces mas cercanas a las FED, que las FTD. En los casos cuando los volúmenes de valores son pequeños  $N$  menor a 32, las FBD son mas cercanas a las funciones armónicas que las demás. Pero cuando  $N \geq 32$  este papel lo juegan las FPD.

La investigación de la ortogonalidad de los sistemas de FARNE descrita en [2] declara que aún cuando la mayoría de las funciones de un sistema determinado de FARNE son ortogonales entre si, existen grupos alejados de funciones que no son ortogonales. Para determinar el índice de ortogonalidad de un sistema de FARNE se puede usar la expresión utilizada para calcular el ángulo  $\alpha_{p,q}$  entre los vectores de base  $\vec{e}_p$  y  $\vec{e}_q$  para cualquier  $p, q = [0, N - 1]$ .

Según la definición de la multiplicación escalar:

$$\delta_{p,q} = (\vec{e}_p, \vec{e}_q) = \|\vec{e}_p\| \|\vec{e}_q\| \cos \alpha_{p,q}$$

donde  $\delta_{p,q}$  se conoce como tensor métrico y es igual a cero si acaso  $\vec{e}_p$  y  $\vec{e}_q$  son ortogonales. La norma (el largo) del vector  $\vec{e}_\mu$  según el teorema de Pitàgoras es:

$$\|\vec{e}_\mu\| = \sqrt{(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\mu)} = \sqrt{(\delta_{\mu\mu})} \quad (2.26)$$

entonces la desviación de ortogonalidad dada en grados  $\zeta_{p,q} = 90^\circ - \alpha_{p,q}$  seria:

$$\delta_{p,q} = \left| 90^\circ - \arccos \frac{\delta_{p,q}}{\sqrt{\delta_{p,q}} \sqrt{\delta_{p,q}}} \right| \quad (2.27)$$

Los cálculos de  $\|\vec{e}_\mu\|$  en todas las combinaciones posibles muestran que en el sistema de funciones triangulares continuas el 89,16 por ciento de la funciones son idealmente ortogonales y el 100 por ciento son normalizadas, así mismo, en el sistema de funciones potenciales es en un 94,16 por ciento ortogonal y 100 por ciento normalizado.

En los sistemas de FARNE discretas se observa otra situación:

p	q	FT	FP	FTD	FPD	FBD
1	5	2,3°	0,46°	10,48°	1,68°	0,3°
2	10	2,3°	0,46°	19,48°	3,37°	0,5°
3	15	2,3°	0,46°	10,48°	1,68°	0,3°

Tabla 2.1: Resultados del cálculo de  $\delta_{p,q}$ 

Los sistemas de FTD, FPD, FBD, tienen un 88,33 por ciento de funciones ortogonales y son en diferente grado cuasinormalizadas. En la tabla 2.1 se muestran las desviaciones mayores.

## Capítulo 3

# Simulación

Este capítulo está dedicado a explicar brevementemente el funcionamiento de las simulaciones realizadas con el propósito de evaluar el comportamiento de un sistema OFDM utilizando transformadas basadas en FARNE y FED.

El objetivo de estas simulaciones es observar algunas de las principales figuras de mérito del sistema, apreciando como estas varían de acuerdo al esquema de modulación que se utilice, al nivel de ruido blanco presente en el canal, a los multitrayectos, a la presencia de amplificadores no lineales y a la utilización de diversas técnicas para la detección de la señal transmitida.

Se plantean varios escenarios de simulación, el primero consiste en evaluar OFDM en un medio ideal (sin ruido aditivo y sin efectos de propagación) para observar si las FARNE son útiles dentro del sistema y son capaces de demodular la señal de entrada sin ningún problema.

El segundo consiste en evaluar el efecto que el ruido blanco gaussiano tiene en el sistema, para lograr esto se modifica el nivel de ruido que el canal introduce a la señal haciendo un barrido del nivel SNR y luego se analiza como esto afecta a las figuras de mérito y a la tasa de error.

El tercero plantea la implementación de distintos modelos de canal utilizados para la simulación de redes inalámbricas, cada uno de estos posee una respuesta impulsiva distinta que se asemeja a la respuesta real del canal, se analizará como se comporta la tasa de error de bit cuando se utilizan estos modelos.

El cuarto consiste en evaluar los efectos generados por la inclusión de modelos no lineales en los amplificadores de potencia utilizados para la transmisión de la señal al medio, se estudiará como se comportan cada una de las FARNE observando algunas de las figuras de mérito empleadas. Algunos escenarios consisten en la combinación de varios fenómenos al mismo tiempo (ej: ruido gaussiano y multitrayectos entre otros) de tal forma que se permita evaluar la efectividad de las FARNE en un ambiente más real.

El programa seleccionado para llevar a cabo las simulaciones fue MATLAB 6.5 y 7.0 utilizando algunas de las Toolbox de procesamiento de señales y de comunicaciones, sin embargo la mayoría de los bloques del sistema fueron programados partiendo desde cero, de tal forma que

estos pudieran cumplir con todas las características necesarias para la valoración del sistema, de este modo se escogió trabajar en modo texto todos los sistemas y no utilizar Simulink.

Trabajar en modo texto garantiza una toma de datos más confiable, un mejor manejo de las pruebas a realizar y una gran ventaja en la manipulación de los esquemas de modulación, de las variables de cada uno de los bloques del sistema y sobre todo de la formulación de las transformadas rápidas dentro de la etapa de modulación de símbolos.

### 3.1. Elementos del sistema modulado

Cada elemento del sistema esta programado como una función de MATLAB de tal forma que pueda interactuar con cada una de las simulaciones a realizar.

El elemento más importante dentro del sistema en general es el bloque responsable del cálculo de las transformadas rápidas dentro del transmisor y del receptor, este debe estar programado del tal modo que se puedan incluir cada una de las bases a evaluar logrando realizar la comparación inmediata de las figuras de merito a calcular. Por tal razón se elaboró una función general que realizara un proceso de selección de las bases y funciones específicas en las cuales se calculan las transformadas.

Analizando la teoría propuesta en [2], se pueden extrapolar las ecuaciones necesarias para el cálculo de cada una de las transformadas directas para cada una de las bases expuestas. Después de realizar esta operación se plantearon las ecuaciones para el desarrollo de sus respectivas transformadas inversas.

Realizando una prueba para observar el comportamiento de las transformadas elaboradas y tomando como señal de entrada una cosenoidal muestreada se obtuvieron las constantes necesarias para normalizarlas. Por ejemplo, en la IDFT (*Inverse Discrete Fourier Transform*) la señal resultante debe ser multiplicada por el factor  $1/N$  en cambio utilizando la IDBFT (*Inverse Discrete Binomial Function Transform*) el coeficiente necesario es  $\frac{1024}{N^3(N+1)^2}$ . Para obtener estos valores además de analizar la teoría de las transformadas de Fourier se elaboró un algoritmo cuyo objetivo es el de ajustar los coeficientes hasta que al realizar la transformada directa e inversa consecutivamente la amplitud máxima de la señal resultante fuera igual a la magnitud de la señal de entrada.

Con base en las FARNE adicionalmente se plantearon las ecuaciones para las FARNE Modificadas (Función Triangular Discreta Modificada (FTDM), Función Potencial Discreta Modificada (FPDM) y Función Binomial Discreta Modificada (FBDM)) y se ajustaron sus coeficientes utilizando un procedimiento similar al expuesto anteriormente.

Las FM (Funciones Modificadas) son las mismas FARNE pero con parte imaginaria igual a cero y en estudios anteriores demostraron un buen comportamiento en aplicaciones de radar [2].

Las transformadas directas calculadas con las FARNE y las FM toman los nombres de DTFT (*Discrete Triangular Function Transform*), DPFT (*Discrete Potential Function*

*Transform*), DBFT (*Discrete Binomial Function Transform*), DTFMT (*Discrete Triangular Function Modified Transform*), DPFMT (*Discrete Potential Function Modified Transform*) y DBFMT (*Discrete Binomial Function Modified Transform*).

Utilizando la fundamentación teórica necesaria y tomando como base algoritmos desarrollados en [2] se programaron los bloques de modulación y demodulación de datos ( QPSK y BPSK ) y los modelos de AWGN, canal multitrayectoria, ecualización y amplificación no lineal.

## 3.2. Señal de entrada

Para estas simulaciones la señal de entrada es un vector de ceros y unos generados aleatoriamente. El tamaño de la señal de entrada que puede ser transmitida por un símbolo OFDM <sup>1</sup> depende del tipo de constelación utilizada en la modulación de los bits y del orden de la transformada inversa usada para la multiplexación de los símbolos.

Por ejemplo si la señal mensaje va a ser mapeada <sup>2</sup> por medio de un modulador QPSK y va a ser modulada a través de una transformada de orden  $N$  es necesario que su número de muestras sea par y menor o igual a  $2N$ .

Esta señal de entrada es transmitida dentro de un sólo símbolo OFDM, por lo tanto si se quiere evaluar el comportamiento del sistema observando sus principales figuras de mérito es indispensable realizar un algoritmo capaz de transmitir un número considerable de señales mensaje para posteriormente realizar los cálculos necesarios para la evaluación del sistema y además tener la posibilidad de observar gráficamente la señal modulada en el tiempo, su densidad espectral de potencia, el diagrama de constelaciones resultante de cada transmisión, los errores obtenidos en la simulación, la gráfica de señal a ruido entre otras.

## 3.3. Herramientas de evaluación

En esta parte del libro se explicarán brevemente los procesos utilizados para el cálculo de la BER *Bit Error Ratio*, el Ancho de banda, la PSD *Power Spectral Density*, el comportamiento de las señales en el sistema a través de la observación del diagrama de constelaciones, las variaciones en la BER al aumentar el número de portadoras, las gráficas de Señal/Ruido, entre otras.

### 3.3.1. Tasa de Error de Bit (BER)

Para el cálculo de la BER se transmiten, un número elevado de señales de entrada aleatorias y para cada una de estas transmisiones se obtiene el número de errores causado por el sistema.

---

<sup>1</sup>Un símbolo OFDM es la multiplexación en frecuencia de  $N$  símbolos de constelación. Es el resultado de aplicar la transformada inversa a los símbolos

<sup>2</sup>Entiendase por mapeo la obtención de símbolos de una constelación

Más adelante estos errores se dividen por el número de señales de entrada transmitidas y por el número de bits contenidos en cada una.

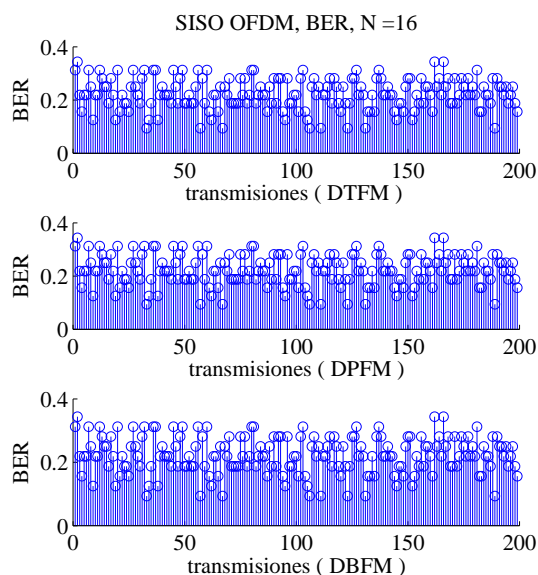


Figura 3.1: BER para c/u de las transmisiones

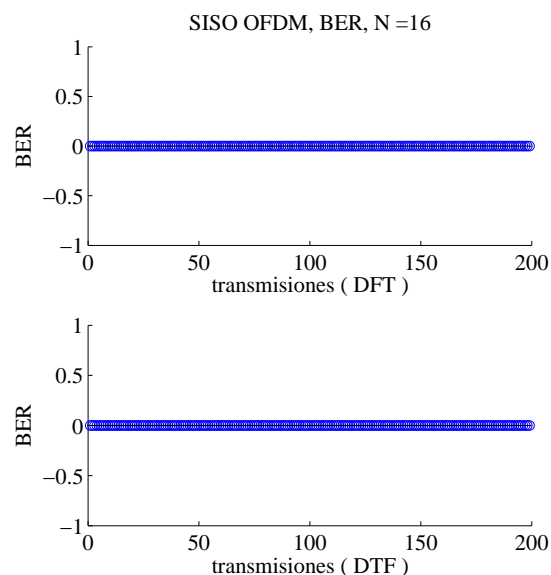


Figura 3.2: BER para c/u de las transmisiones

El simulador muestra en una gráfica (ver figuras 3.1 y 3.2) los valores de la BER para cada una de las transmisiones realizadas con cada una de las bases a evaluar e imprime en pantalla la BER obtenida para cada una de las bases. Además en pantalla se visualizan los valores de BER para cada una de las bases utilizadas tomando en cuenta todas las transmisiones simuladas.

### 3.3.2. Diagramas de Constelaciones

Permite observar en una gráfica de parte imaginaria vs parte real los puntos resultantes de la modulación de datos y compararlos con los puntos recibidos en el demodulador después de aplicar el bloque de transformación directa, de esta forma se pueden apreciar las variaciones producidas al aplicar cada una de las transformadas, los efectos ocasionados por la inclusión de AWGN, fenómenos de multitrayectoria y comportamientos no lineales dentro del transmisor y el canal. Mientras el mapeo de bits usados en el transmisor produce unos símbolos que aparecen muy bien definidos en el diagrama de constelación, en la parte receptora estos símbolos resultan corridos con respecto a los originales debido al efecto del ruido y de los demás fenómenos de propagación.

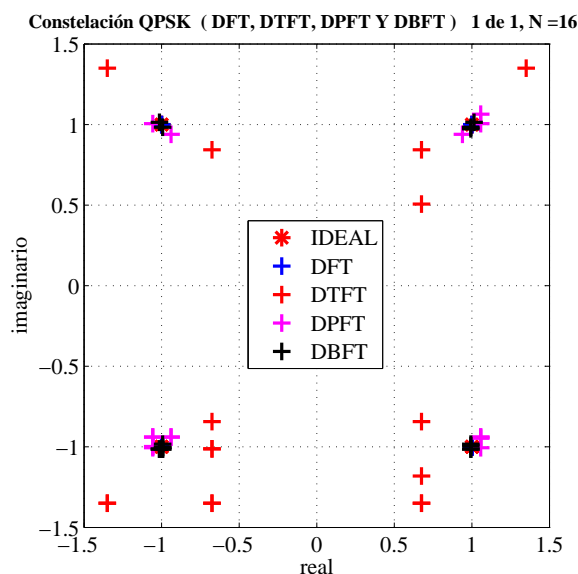


Figura 3.3: Diagrama de Constelaciones

### 3.3.3. Densidad espectral de Potencia (PSD)

En las comunicaciones digitales, el análisis espectral se realiza mediante la PSD, es decir la distribución de la potencia promedio de un proceso aleatorio (como lo es las señales digitales) en el dominio de las frecuencias.

Para graficar la PSD de la señal transmitida, es necesario tener en cuenta:

- La señal transmitida corresponde a un proceso estocástico, estacionario y ergódico por lo tanto para hallar su PSD es necesario realizar un número elevado de ensayos y hallar la media de sus transformadas de Fourier en magnitud al cuadrado o bien aplicando la relación Einstein-Wiener-Khitchine.
- La señal transmitida es continua por lo tanto es necesario aplicar procesamiento digital de señales para poder simular un conversor discreto continuo para después por medio de técnicas de estimación apreciar con más detalle la forma de la PSD.

Para obtener una buena PSD de la señal, una cantidad elevada de símbolos OFDM en tiempo discreto (figura 3.4) es concatenada de tal forma que se logre un campo muestral adecuado, seguidamente entre cada uno de los valores de la señal resultante se insertan un conjunto de ceros y más adelante se convoluciona la nueva señal con un tren de pulsos, de este modo se simula el trabajo realizado por un retenedor(figura 3.5).

Por medio de un filtro pasa bajas la señal digitalizada es convertida a una señal continua como la mostrada en la figura 3.6. Con esta señal se realiza la estimación de la PSD en banda base utilizando el método de Welch [20]. El simulador también estima la PSD de la señal en

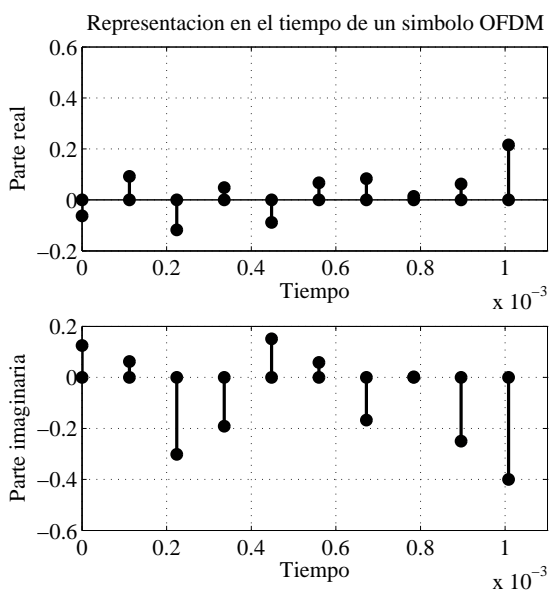


Figura 3.4: Símbolo OFDM discreto

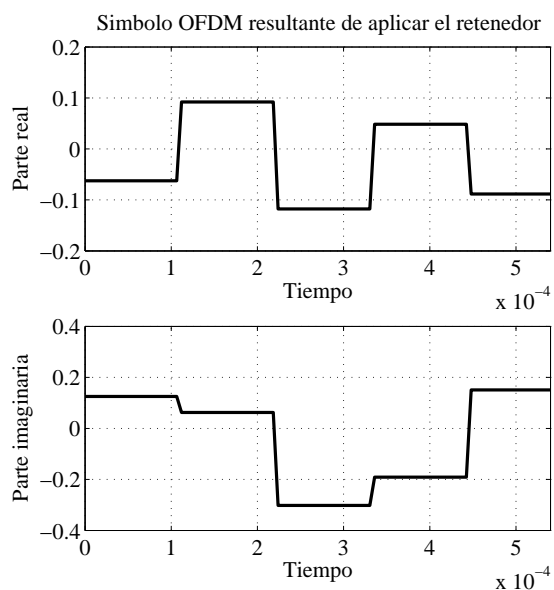


Figura 3.5: Señal resultante al paso por el retenedor

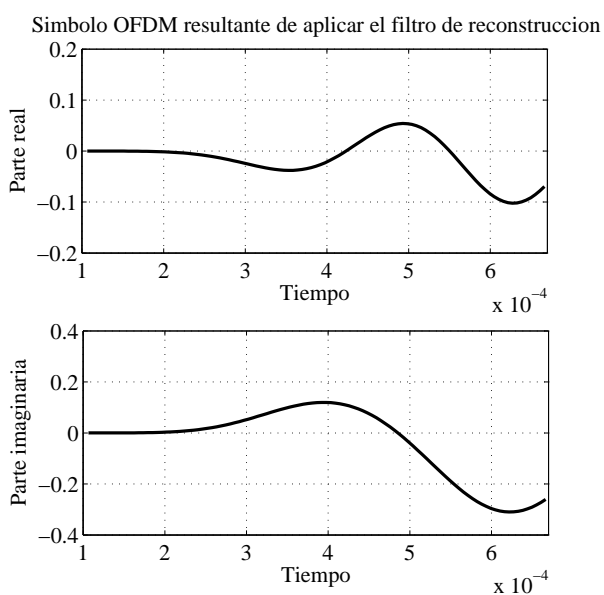


Figura 3.6: Señal continua en banda base

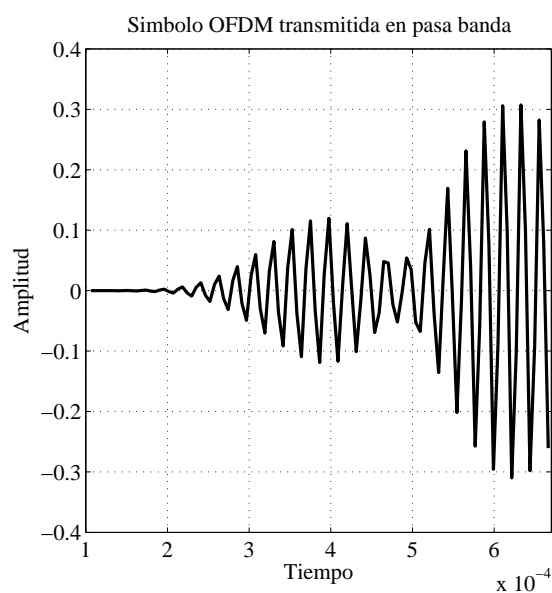


Figura 3.7: Señal transmitida en pasa banda

pasa banda suponiendo que esta señal es el resultado de modular con QAM la señal banda base. Un ejemplo de una señal en pasa banda es presentado en la figura ??.

En las figuras 3.8 y ?? se observan ejemplos de las PSDs estimadas de las señales en banda base al utilizar en la etapa de multiplexación de símbolos cada una de las transformadas inversas elaboradas.

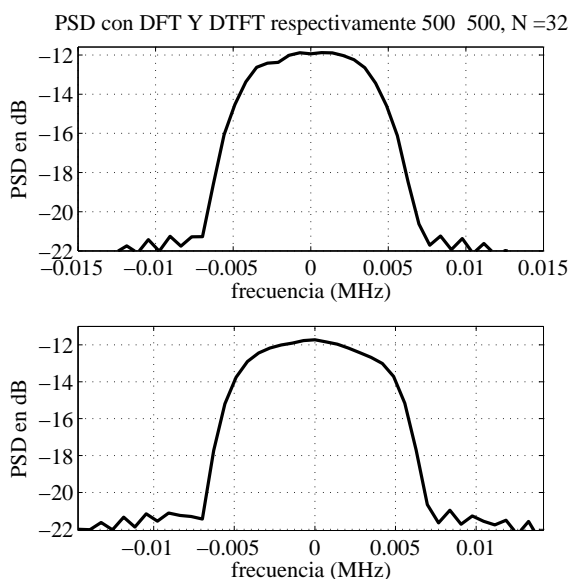


Figura 3.8: PSDs de las señales banda base

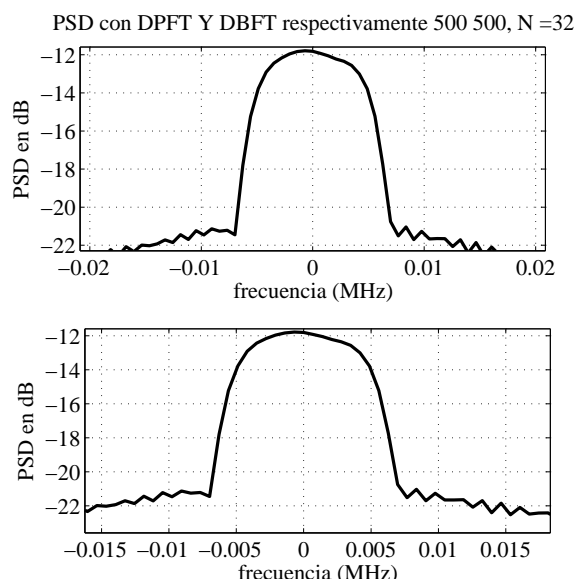


Figura 3.9: PSDs de las señales banda base

### 3.3.4. Anchos de Banda

Tomando como punto de partida la PSD estimada se utilizaron dos formas para el cálculo del ancho de banda. Primero se calculó el ancho de banda con base en la definición, "El ancho de banda es calculado como el espacio en Hertz comprendido entre la frecuencia central y la frecuencia cuya componente sea menor en 3 decibeles a esta ". El ancho de banda calculado tomando como base la definición anterior se llamó ancho de banda nominal.

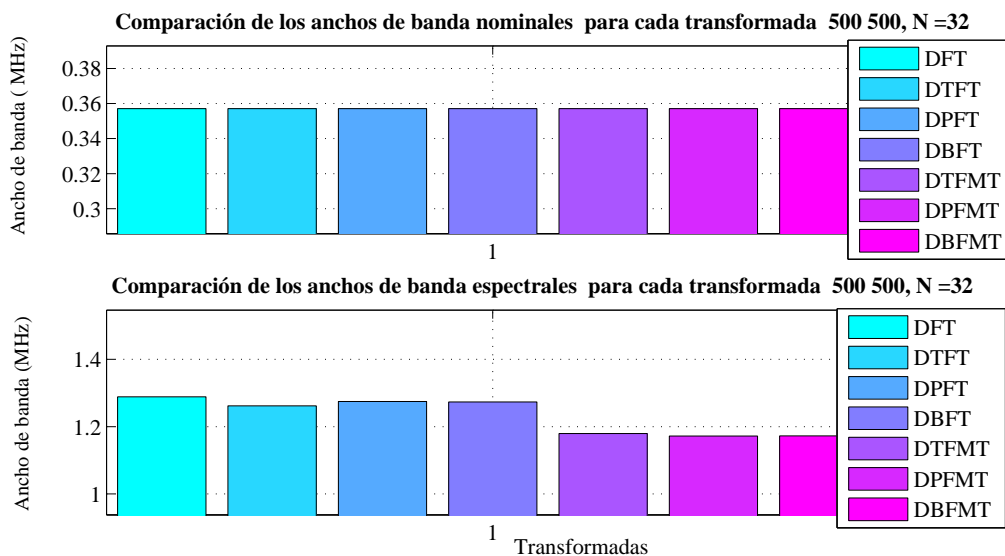


Figura 3.10: Ancho de banda espectral y nominal

Para obtener una mayor seguridad en la comparación del ancho de banda se recurrió a una definición más amplia, el ancho de banda espectral. Para hallar el valor de este ancho de banda se hace necesario calcular una estimación del contenido de energía de la señal  $\|F\|^2$  y el centro de gravedad del area bajo la curva  $\bar{w}$ . Con estos parámetros se puede estimar el ancho de banda espectral  $\Delta w$  utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\|F\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \quad (3.1)$$

$$\bar{w} = \frac{1}{\|F\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} w |F(w)|^2 dw \quad (3.2)$$

$$(\Delta w)^2 = \frac{1}{\|F\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (w - \bar{w})^2 |F(w)|^2 dw \quad (3.3)$$

En la figura 3.10 se puede observar la salida mostrada por el simulador.

### 3.3.5. Variaciones al incrementar el número de portadoras

Para realizar esta toma de datos se almacenaron los resultados obtenidos para cada valor de N de tal forma que por medio de una gráfica se pudiera predecir el comportamiento de los mismos.

## 3.4. Escenarios de simulación

Garantizando el perfecto funcionamiento de todos los bloques se plantean a continuación los escenarios en los cuales se probará la eficacia de las FARNE.

### 3.4.1. Escenario ideal

Es este escenario la señal de entrada pasa directamente por el modulador QPSK banda base, el cual agrupa por pares los bits de la señal y los convierte en símbolos complejos de la forma  $c = a + jb$  (mapeo).

Como alternativa, se simula el sistema tomando en cuenta también un modulador BPSK que a diferencia del anterior convierte cada uno de los ceros de la señal mensaje en -1. Esto convierte a la señal de salida en entera pero disminuye la tasa de transmisión.

Realizado el proceso de modulación de datos banda base (mapeo), la señal compleja resultante pasa a través del bloque en el cual se aplica la transformada inversa elaborada con las FARNE o la FED según el caso. En el bloque receptor el resultado es inmediatamente demultiplexado a través de la transformada directa generada por la función correspondiente

y más adelante por medio de un demodulador QPSK banda base (mapeo) se obtiene una versión semejante a la señal de entrada.

Comparando la señal de entrada original y la señal recuperada se calcula la BER y por medio de los resultados arrojados por cada uno de los bloques del sistema se obtienen los valores necesarios para el cálculo de la estimación de la PSD y el cálculo del ancho de banda.

### 3.4.2. Escenario con ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN)

En este escenario se ha agregado ruido blanco aditivo gaussiano a la señal proveniente del modulador QPSK banda base utilizando para esto una serie de valores aleatorios complejos que simulan el fenómeno causado por el canal en la realidad.

En esta parte del estudio se pueden analizar los cambios en la BER producidos para un valor específico de señal a ruido en un número de iteraciones determinada, observando además el resultado de la BER para cada iteración, de esta forma se puede analizar detenidamente la eficacia del sistema.

### 3.4.3. Entorno con amplicación no lineal

En los sistemas de comunicación inalámbrica se hace necesario transmitir los datos por medio de antenas, las cuales necesitan a su vez, una potencia considerable para poder irradiar la señal hacia el medio. En contraste, la potencia de la señal a transmitir es muy pequeña y se hace indispensable agregar un HPA (High Power Amplifier) [15].

Idealmente un HPA aumentaría la potencia de la señal de manera uniforme, pero en la realidad la salida del amplificador se satura en un nivel determinado creando un comportamiento no lineal después de este límite.

Para poder realizar análisis en los cuales se tengan en cuenta estos fenómenos, la mayoría de los estándares utilizan el modelo Rapp [16], el cual simula el comportamiento de un HPA de estado sólido teniendo en cuenta la siguiente función característica:

$$V_{OUT} = \frac{V_{IN}}{(1 + (|V_{IN}|/V_{SAT})^{2p})^{\frac{1}{2p}}} \quad (3.4)$$

donde  $V_{IN}$  y  $V_{OUT}$  son respectivamente las señales complejas en la entrada y en la salida normalizadas y  $V_{SAT}$  es el nivel de saturación a la salida del amplificador normalizado a la unidad,  $P_{SAT} = |V_{SAT}|^2$ . El parámetro  $p$  controla la uniformidad de la curva. Para este análisis este parámetro tendrá un valor de 2, debido a que de esta forma se obtienen muy buenas representaciones de amplificadores típicos de alta potencia para rangos de frecuencia inferiores a 10 GHz [19].

En este entorno se realiza un barrido de  $V_{SAT}$  de tal forma que se pueda evaluar satisfactoriamente el comportamiento del sistema con diferentes amplificadores de potencia, así mismo al variar el nivel de saturación a la salida se puede observar como el sistema hace frente a

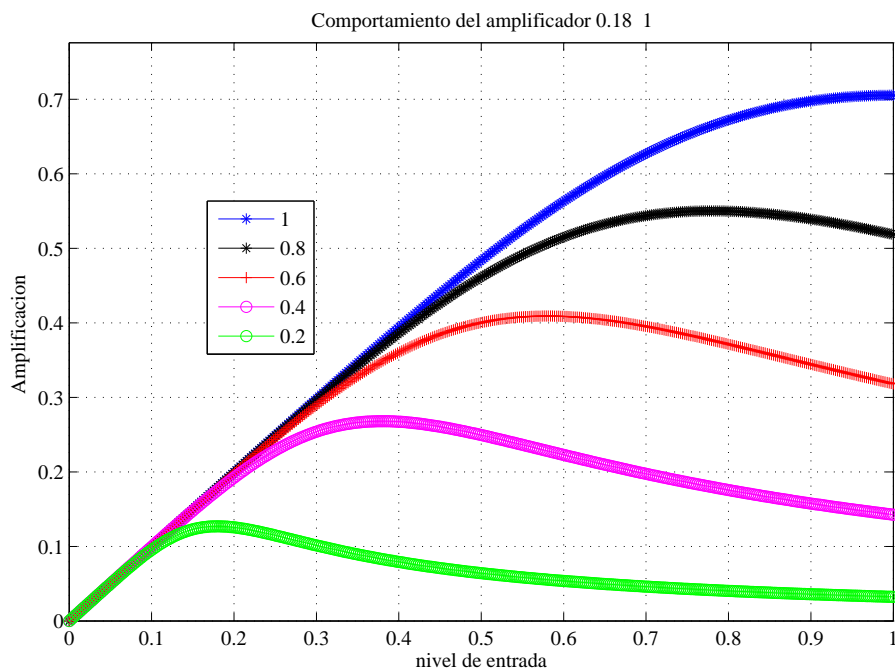


Figura 3.11: Curvas características del HPA modelo Rap

diferentes no linealidades.

En la figura 3.11 se pueden apreciar diferentes curvas características del HPA para varios valores de  $V_{SAT}$ .

Disminuyendo significativamente el valor de  $V_{SAT}$  del modelo Rapp se puede aumentar la no linealidad del mismo, lo cual permite crear un elemento de distorsión no lineal multiplicativo con el que se pueden emular fenómenos especiales.

#### 3.4.4. Escenario con canal multitrayectoria

El entorno a simular en esta fase parte del conocimiento previo de un canal multitrayectoria complejo el cual se representa por un filtro FIR (*Finite Impulse Response*) con  $L$  coeficientes complejos. Este filtro emula los diversos desvanecimientos provocados por este tipo de canales.

A continuación se observa la ecuación en diferencias característica de un filtro FIR y en la figura 3.12 se aprecia el efecto provocado por este en un símbolo OFDM si se toman en cuenta un par de coeficientes complejos.

$$y(n) = b(1) * x(n) + b(2) * x(n - 1) + \dots + b(L) * x(n - L) \quad (3.5)$$

El filtro FIR en este análisis se genera con sólo 2 coeficientes complejos representando en este caso un canal complejo de 2 trayectorias diferentes, ya que en la práctica los efectos de las más multitrayectorias no son muy notorios.

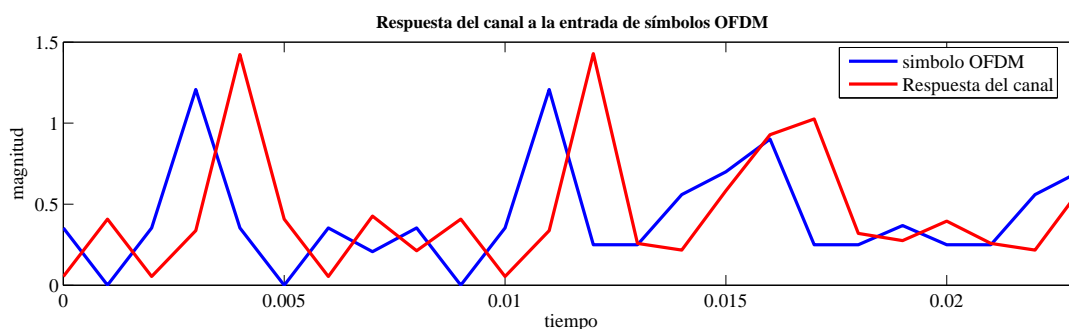


Figura 3.12: Respuesta del canal a la entrada de un símbolo OFDM

Como se pudo visualizar el filtro FIR representa un canal en el cual se producen corrimientos en el tiempo de la señal transmitida además de atenuaciones y amplificaciones de algunas de sus componentes. Los coeficientes del canal son diferentes para cada transmisión simulando la variación en el tiempo de la potencia del canal en cada camino.

En la etapa de demodulación se intenta corregir el efecto producido por el canal por medio de un sistema de ecualización lineal sencillo aplicado inmediatamente después de recibir la señal transmitida. Es importante aclarar que la potencia de cada trayectoria es perfectamente conocida para cualquier instante de tiempo, lo que permite obtener la respuesta al impulso del canal sin tener que realizar alguna técnica de estimación.

Para optimizar el funcionamiento de este sistema se debe garantizar que el prefijo cíclico sea mayor a  $L$  [17].

## Capítulo 4

# Resultados y su análisis

En este capítulo se realiza un breve análisis de costo computacional y se analizan las figuras de mérito arrojadas por los simuladores desarrollados comparando las diferencias entre las provenientes de la utilización de la DFT y las resultantes de la aplicación de las transformadas elaboradas con Funciones Armónicamente Relacionadas de Números Enteros (FARNE).

### 4.1. Análisis de costo computacional

En un sistema OFDM en tiempo real se utiliza la forma rápida de la DFT (FFT) para realizar menos operaciones en el cálculo de las subportadoras en la modulación de símbolos.

Teóricamente el número de operaciones realizadas para el cálculo de la FFT es  $N \log_2 N$ , donde  $N$  es el orden de la FFT. Si se compara éste valor con las  $N^2$  operaciones realizadas por la DFT se observa de inmediato una gran diferencia. En este proyecto de grado no se implementaron transformadas rápidas debido a que con el conocimiento teórico de la diferencia en el número de cálculos entre la forma general y su forma rápida, se pueden fácilmente interpolar los resultados.

Las transformadas elaboradas con las FARNE FTD, FPD y FBD cumplen los requisitos necesarios para la elaboración de sus transformadas rápidas respectivas por medio de la utilización de mariposas de Cooley-Tukey como ser simétricas y armónicas, lo cual se demuestra en [2].

Como se afirmó en la fundamentación teórica las FARNE tienen la propiedad de calcular sus factores de fase realizando operaciones con números enteros. Por lo tanto, si el modulador de datos convirtiera los bits a números reales o complejos enteros todas las operaciones dentro de las transformadas elaboradas con estas funciones serían enteras disminuyendo de este modo la velocidad de procesamiento aún más, cualidad que en la DFT no se puede dar porque la FED contiene números decimales debido a los valores del  $\sin(x)$  y del  $\cos(x)$ .

## 4.2. Invertibilidad

Para tener una mejor comprensión de las transformadas utilizadas se realizó un análisis comparativo para hallar experimentalmente su grado de invertibilidad.

Según los resultados arrojados, si se toma como señal de entrada una muestra de la señal después de pasar por los moduladores digitales banda base y se le calculan secuencialmente las transformadas inversas y directas elaboradas se obtienen los siguientes resultados:

La similitud entre las dos señales estudiadas es del 100 por ciento con la DFT.

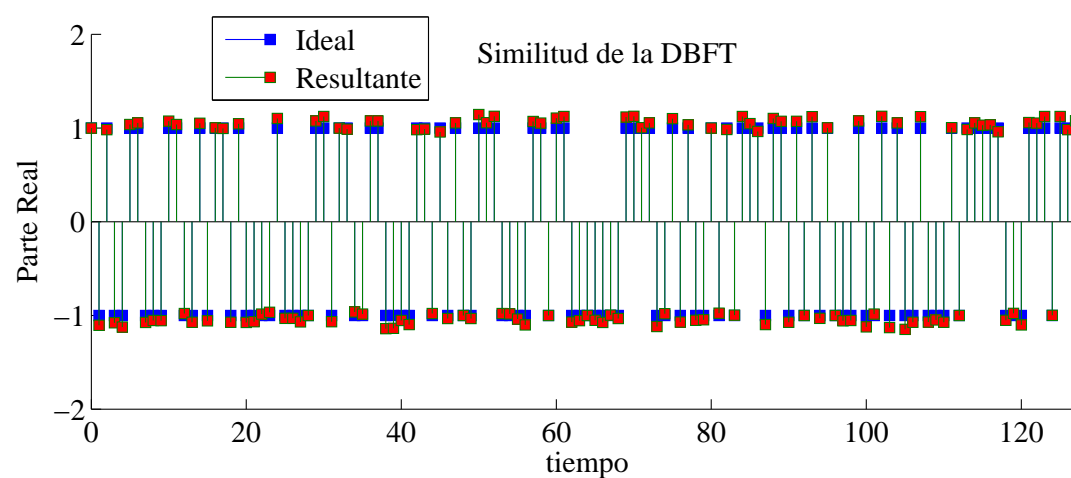


Figura 4.1: Invertibilidad para la DBFT

La similitud entre las señales es muy parecida entre la DPFT y la DBFT y no muestra una diferencia muy grande con respecto a la DFT.

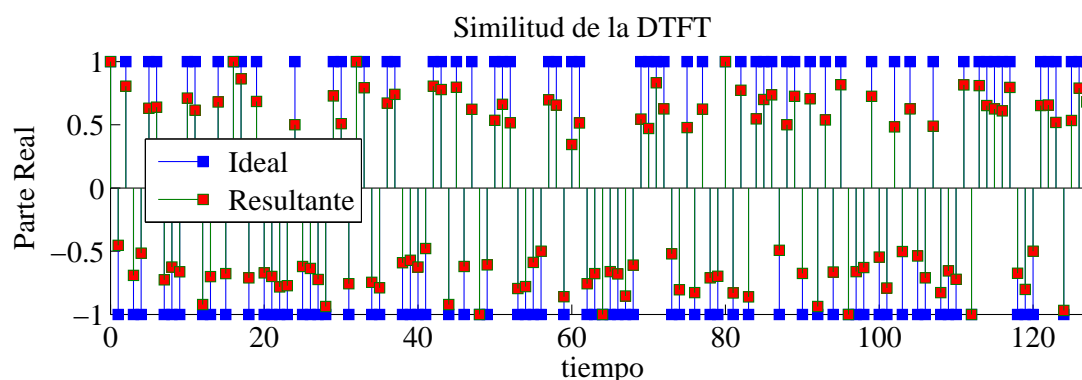


Figura 4.2: Invertibilidad para la DTFT

La DTFT tiene más errores que la DPFT y la DBFT y por lo tanto es menos invertible.

La parte real de la señal presenta un grado de invertibilidad muy similar a su parte imaginaria.

Los grados de invertibilidad de las transformadas son:

Transformada	DFT	DTFT	DPFT	DBFT
Real	100	69.6	92.3	93.4

Tabla 4.1: grados de invertibilidad de las FARNE

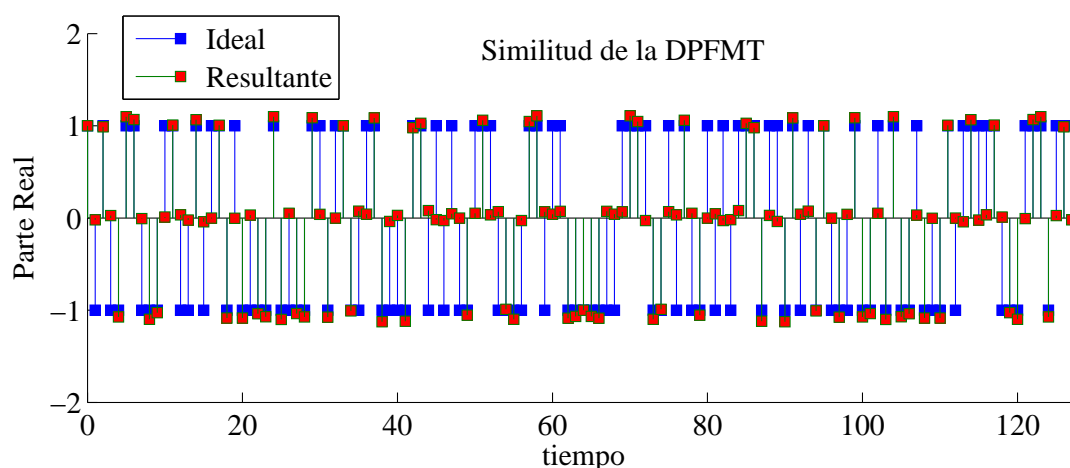


Figura 4.3: Invertibilidad para la DPFMT

El grado de invertibilidad de las transformadas basadas en las FM (Funciones Modificadas) es mucho menor (aproximadamente los valores son la mitad de los originales) debido a que algunas de sus componentes tienden a desaparecer. En la figura 4.3 se aprecia mejor este comportamiento.

Cabe anotar que no todo está dicho con la invertibilidad, pues una vez la señal que sale por la transformada inversa se enfrenta al ruido y a características muy complejas del canal de transmisión, cada una de las transformadas evaluadas deja de ser invertible.

### 4.3. Escenario ideal

En esta sección se exponen los resultados obtenidos sin presencia de fenómenos en el canal que causen alguna distorsión o interferencia a la señal transmitida. Esto con el fin de aislar los efectos causados sólo por la aplicación de las transformadas inversas y directas elaboradas.

#### 4.3.1. Tasa de Error de Bit (BER)

Realizando una simulación en la cual se transmitieron 1000 tramas de 16, 32 y 64 bits para BSPK y de 32, 64 y 128 bits para QPSK por el sistema OFDM se obtienen los siguientes resultados:

N/BASE	DFT	DTFT	DPFT	DBFT	DTFMT	DPFMT	DBFMT
16	0	0	0	0	0.2213	0.2213	0.2213
32	0	0	0	0	0.2337	0.2337	0.2337
64	0	0	0	0	0.2384	0.2384	0.2384

N/BASE	DFT	DTFT	DPFT	DBFT	DTFMT	DPFMT	DBFMT
16	0	0	0	0	0.1956	0.1956	0.1956
32	0	0	0	0	0.2234	0.2234	0.2234
64	0	0	0	0	0.2305	0.2305	0.2305

Tabla 4.2: BER utilizando modulación QPSK y BPSK en un escenario ideal

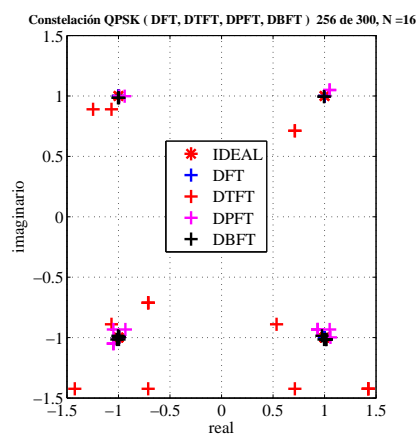


Figura 4.4: Diagrama de constelaciones QPSK

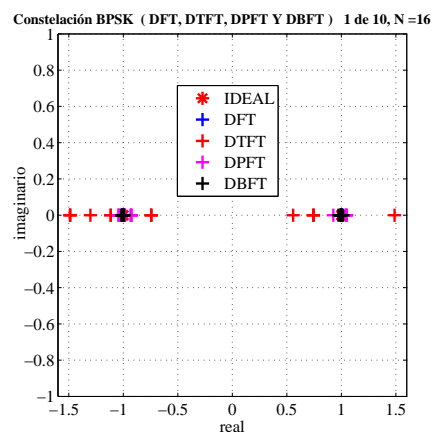


Figura 4.5: Diagrama de constelaciones BPSK

Con base en los resultados mostrados en los diagramas de constelaciones se puede concluir que los puntos obtenidos utilizando la DFT son iguales a los puntos ideales (figura 4.4) en cambio los resultantes del trabajo de las transformadas elaboradas con las FARNE muestran una muy pequeña desviación. Esta se debe principalmente al grado de invertibilidad de las FARNE, el cual es menor al 100 por ciento.

Los puntos con mayor desviación son los resultantes de utilizar en el sistema OFDM la DTFT seguidos por los producidos por la DBFT y la DPFT respectivamente, lo anterior concuerda con los grados de invertibilidad de las transformadas.

No obstante las diferencias anteriores, las distancia entre los puntos recibidos con cada una de las transformadas y los ideales no son lo suficientemente significativas para ocasionar que el demodulador interprete mal una pareja de bits y por lo tanto al comparar los bits recibidos con los esperados la BER es 0.

Se puede visualizar también que las desviaciones presentadas por los puntos recibidos con respecto a los transmitidos son similares al aplicar en el sistema OFDM moduladores BPSK y QPSK banda base, lo que da a entender que las transformadas no tienen influencia directa

del tipo de modulación de datos utilizada (figura 4.5).

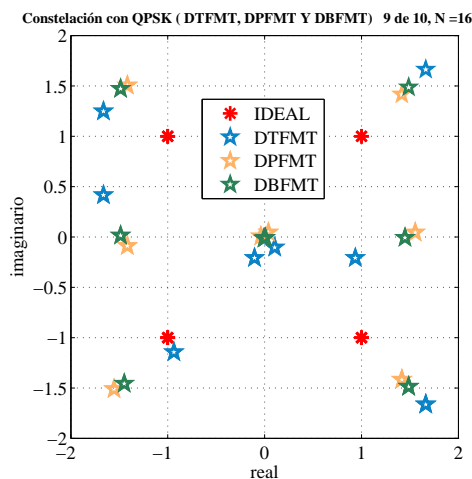


Figura 4.6: Diagrama de constelaciones QPSK

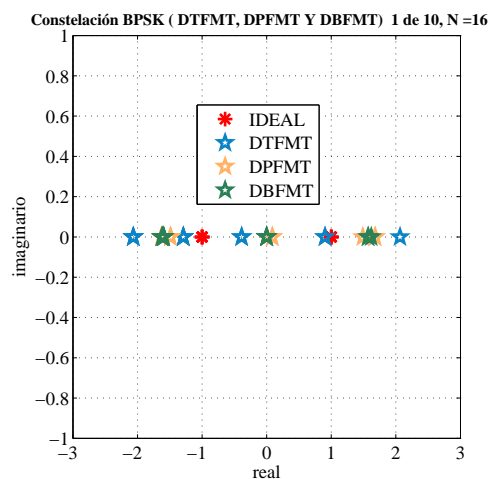


Figura 4.7: Diagrama de constelaciones BPSK

Observando las tabla 4.2 los sistemas simulados aplicando transformadas elaboradas con FARNE modificadas (FM) presentaron valores iguales de BER y además al observar sus respectivos diagramas de constelaciones se pudo analizar que la mayoría de los puntos recibidos se ubican en posiciones en donde existe igual distancia entre dos o más puntos ideales, produciendo por lo tanto errores a la hora de la identificación de los datos en el bloque de demodulación. En las figuras 4.6 y 4.7 se puede apreciar el comportamiento anteriormente explicado.

#### 4.3.2. PSD y Anchos de Banda

Estas simulaciones se realizaron con 1000 transmisiones de tal forma que la PSD hallada tuviera un alto grado de confiabilidad.

La DTFT, la DPFT y la DBFT tienen una PSD muy similar a la DFT. En las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 se observan estos comportamientos.

Al aumentarse el número de portadoras las PSDs se ensancha con una proporción muy similar para todos los casos. En los sistemas de comunicaciones se busca que el ancho de banda sea el menor posible para de este modo ocupar un mínimo espacio del espectro y así poder transmitir más información.

En cuanto al ancho de banda nominal (ver figura 4.12), se puede observar la similitud entre el calculado para la DFT y los hallados para la DTFT, DPFT y la DBFT.

#### 4.3.3. Cambios observados debido al incremento del número de portadoras

Si se analizan los gráficos obtenidos en la simulación (figuras 4.13 y 4.14) y se visualiza que sucede con los anchos de banda, se puede concluir que el incremento del ancho de banda es

Comparación entre el espectro formado por DTFT y DFT 1000 1000, N=32

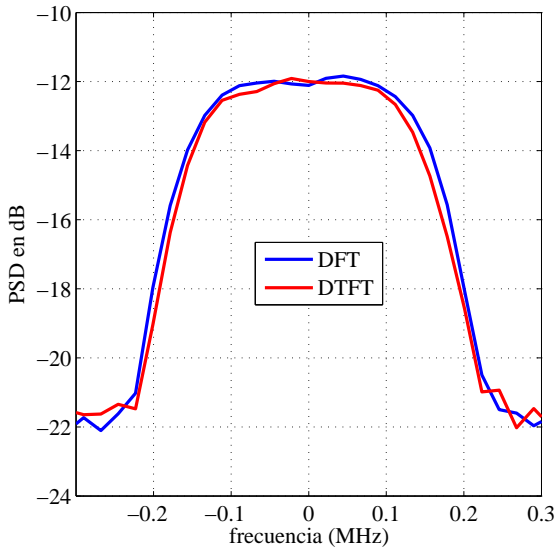


Figura 4.8: Comparación entre PSDs

Comparación entre el espectro formado por DPFT y DFT 1000 1000, N=32

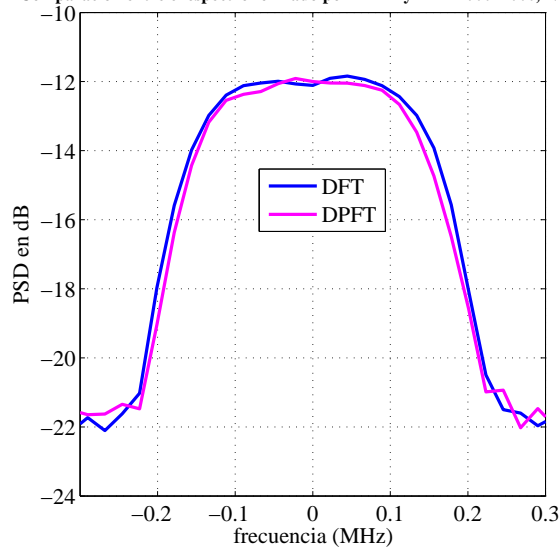


Figura 4.9: Comparación entre PSDs

Comparación entre el espectro formado por DBFT y DFT 1000 1000, N=32

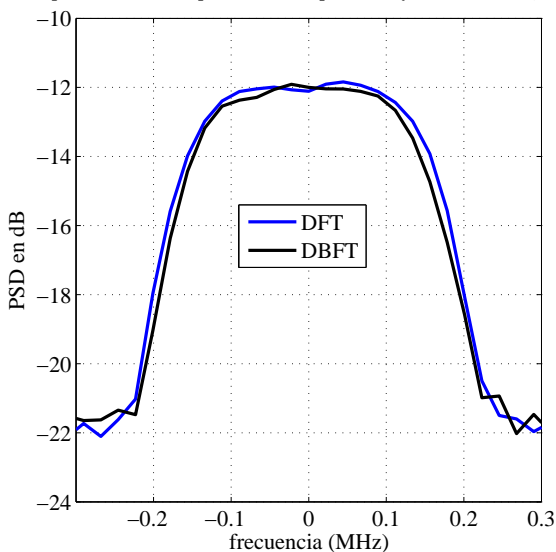


Figura 4.10: Comparación entre PSDs

Comparación entre el espectro formado por DBFT y DFT 1000 1000, N=64

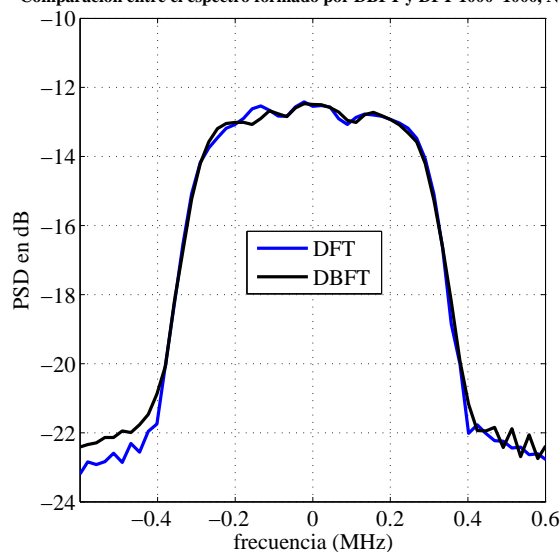


Figura 4.11: Comparación entre PSDs

casi lineal. Al incrementarse N al doble el ancho de banda nominal se incrementa en la misma proporción no interesa cual sea la transformada utilizada y con respecto al ancho de banda espectral, el incremento es el doble del anterior y el tipo de transformada tampoco influye de forma significativa.

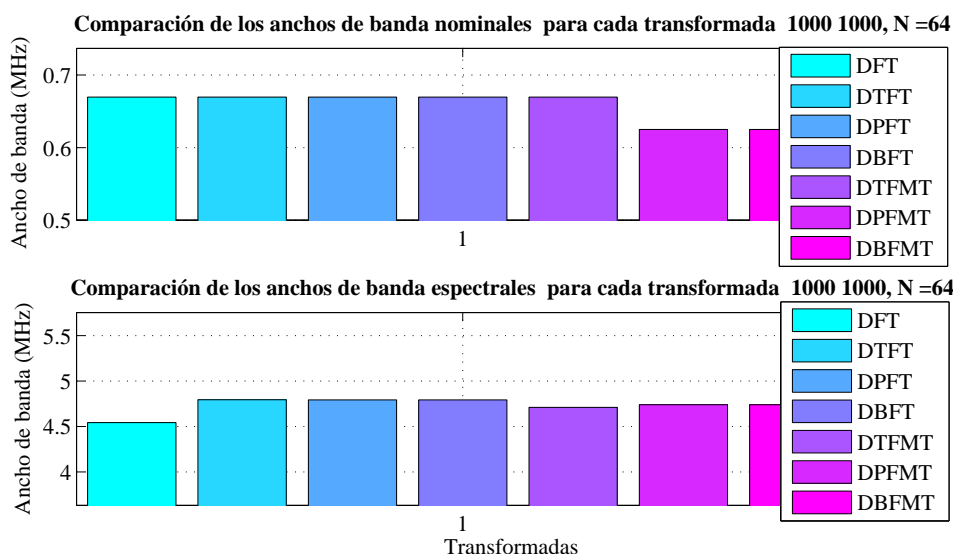


Figura 4.12: Ancho de Banda espectral y nominal

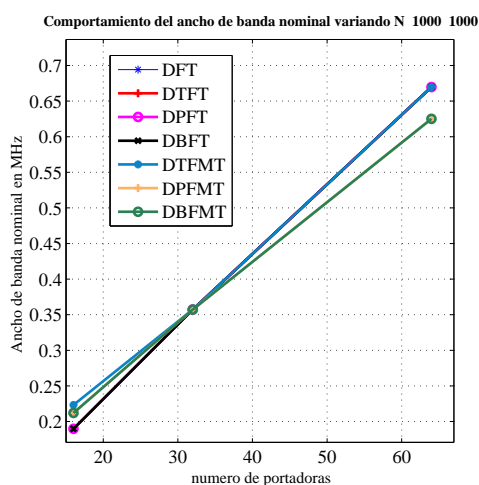


Figura 4.13: Ancho de banda nominal vs N

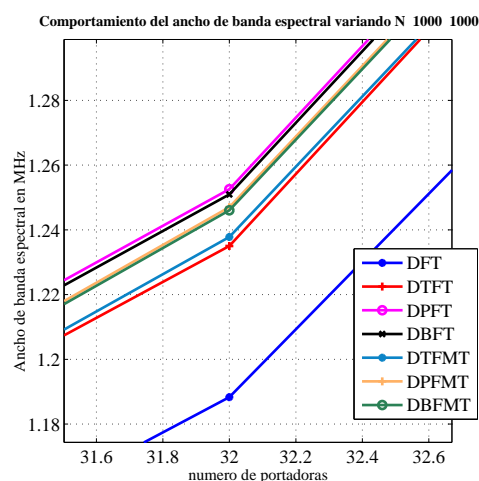


Figura 4.14: Ancho de banda espectral vs N

### 4.4. Entorno con AWGN

Observando detalladamente los diagramas de constelaciones arrojados por la simulación, se aprecia que los puntos recibidos están más alejados de los ideales que en el caso ideal y están distribuidos de forma aleatoria formando círculos alrededor. Además como es bien sabido la naturaleza del AWGN es aleatoria por lo tanto los puntos tienden a localizarse en posiciones al azar alrededor del ideal.

Si se analizan cuidadosamente los resultados cuando la S/R varía, se pueden observar diferencias en el comportamiento de los puntos recibidos para cada una de las transformadas. En

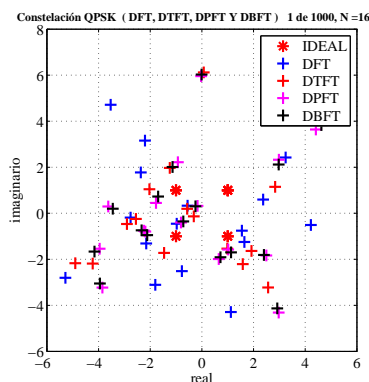


Figura 4.15: Constelación, S/R de 5 dB

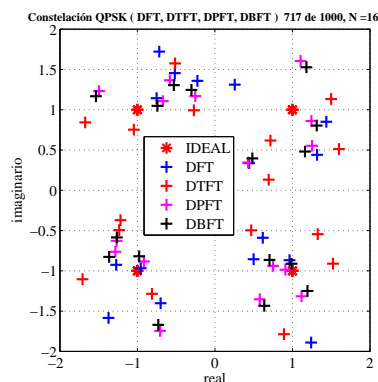


Figura 4.16: Constelación, S/R de 15 dB

esta sección se presentan algunas observaciones acerca del comportamiento de los diagramas de constelaciones.

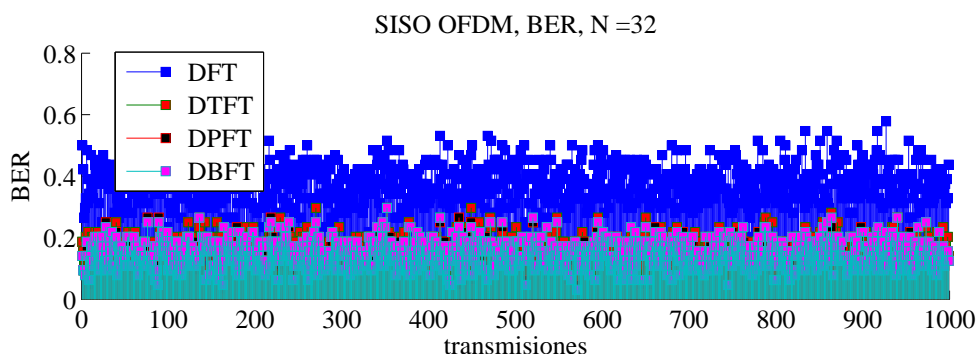


Figura 4.17: BER a 5 dB de S/R

La señal transmitida por medio de la DFT es afectada enormemente cuando la S/R es muy baja y su BER sube considerablemente (figuras 4.17 y 4.18).

En las figuras 4.15 y 4.16 se observa como a medida que la S/R aumenta los puntos recibidos tienden a acercarse a los puntos ideales de tal forma que a los 15 dB aproximadamente la DTFT se convierte de nuevo en la de menor eficacia (figura 4.19).

Analizando cada uno de los resultados anteriores se concluye que la utilización de las FARNE en la elaboración de las transformadas para un sistema OFDM es muy conveniente en situaciones de ruido intenso, ya que tienen menor probabilidad de perder información y su costo computacional es más bajo que el de la DFT. La explicación a este fenómeno se debe a que el canal induce deformaciones a las componentes armónicas, que son mejor interpretadas por la DTFT, la DPFT y la DBFT por ser versiones deformadas de la DFT.

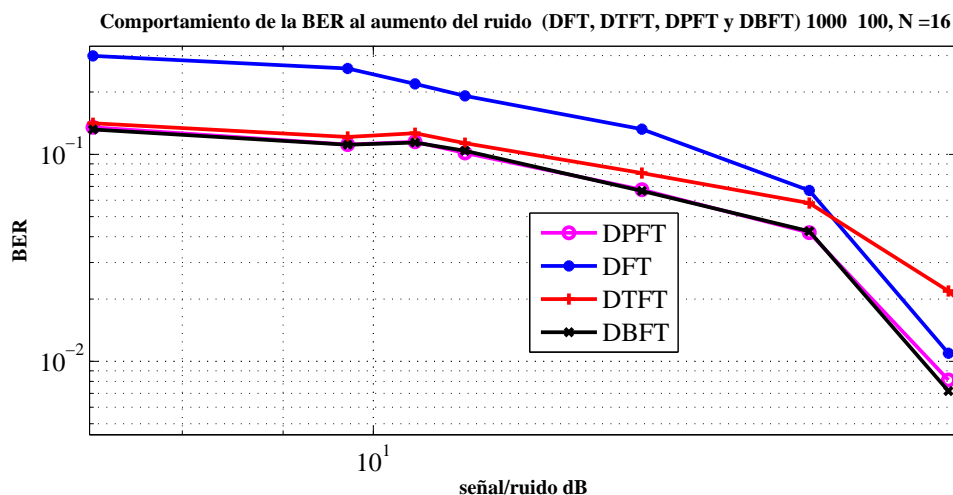


Figura 4.18: BER vs S/R utilizando QPSK

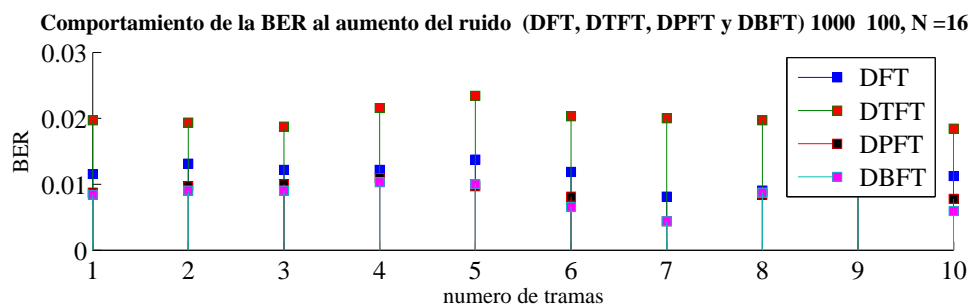


Figura 4.19: BER utilizando QPSK, S/R de 25 dB

## 4.5. Escenario con amplificación no lineal

En este análisis se busca evaluar el efecto causado por las no linealidades del HPA (*High Power Amplifier*) utilizado en OFDM, para lograrlo se aplica el modelo de Rapp y se define como  $N_{SAT}$  al porcentaje de la señal de entrada que no es afectada por la región no lineal del amplificador.

Después de que la señal modulada pasa por el HPA, esta sale amplificada hacia la antena transmisora, por donde se envía la información hacia el canal inalámbrico. En este la potencia de la señal se disminuye debido a atenuaciones causadas por el medio y a la distancia entre el transmisor y el receptor.

En los diagramas de constelaciones elaborados se observa como las no linealidades del amplificador afectan a los puntos recibidos por el demodulador de datos.

Según el comportamiento descrito en las figuras 4.20 y 4.21 se puede observar que a medida que el  $N_{SAT}$  disminuye, mayor no linealidad, los puntos recibidos tienden a colocarse en el centro del diagrama de constelaciones, alejándose más de los puntos ideales y por lo tanto la

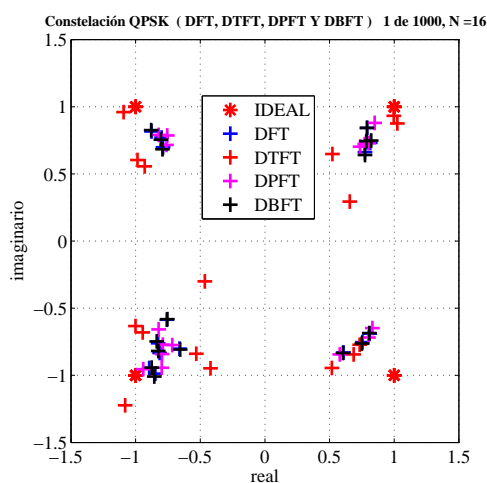


Figura 4.20: Constelación,  $N_{SAT} = 0.6$

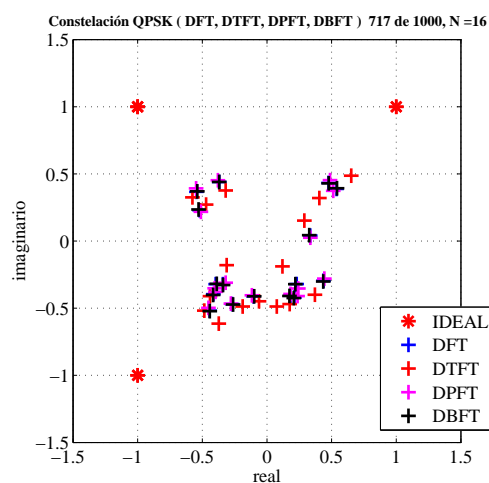


Figura 4.21: Constelación,  $N_{SAT} = 0.2$

probabilidad de error se eleva. Esto se debe fundamentalmente al aumento de la no linealidad del HPA, la cual distorciona la magnitud del símbolo OFDM.

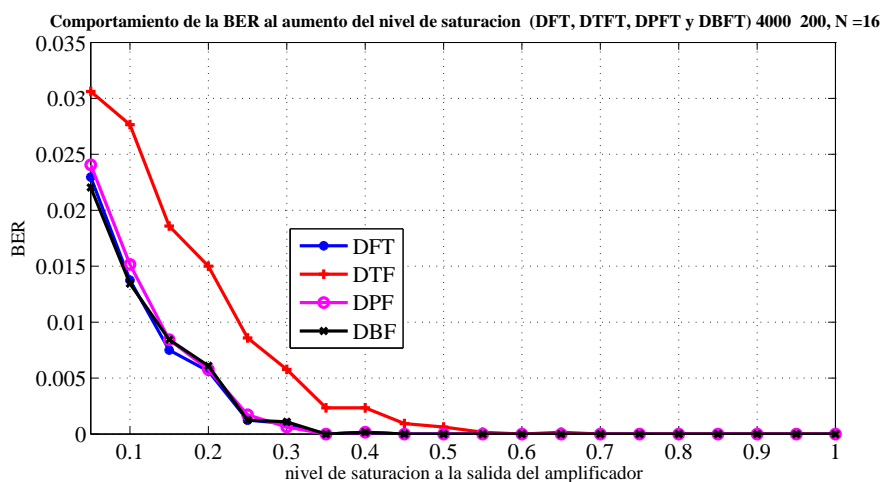


Figura 4.22: BER vs  $N_{SAT}$  en un entorno ideal

En un escenario sin ruido ni atenuación (que llamaremos ideal) los bits perdidos por el efecto de usar amplificadores de potencia no lineales son muy pocos. En la figura 4.22 se observa como la falta de grado de ortogonalidad de la DTFT ocasiona una BER mayor a las demás en un escenario ideal.

Analizando las curvas de BER vs  $N_{SAT}$  para distintos valores de S/R presentadas en la figuras 4.23 y 4.24, se puede concluir que si la S/R esta entre 0 y 10dB, la DTFT, DPFT y DBFT presentan menores pérdidas debidas a las no linealidades ocasionadas por el amplificador de potencia. Por lo tanto en un sistema en el cual el canal posee un nivel de ruido alto,

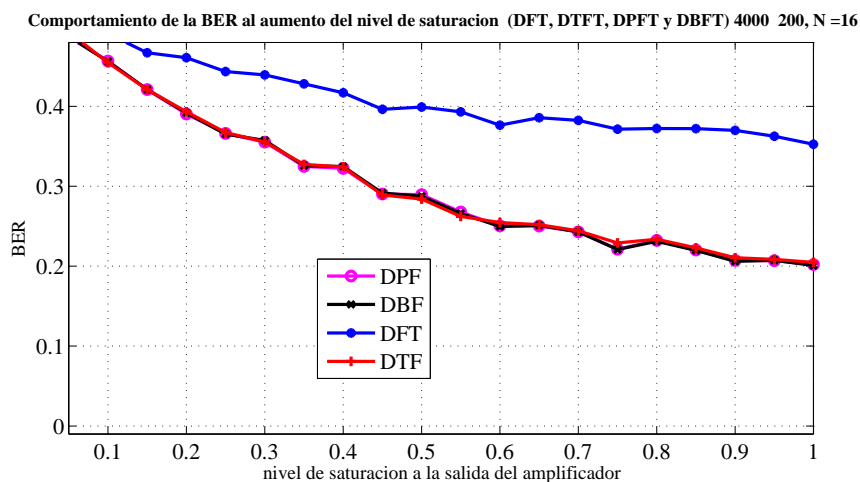


Figura 4.23: BER vs  $N_{SAT}$  para una S/R de 7 dB

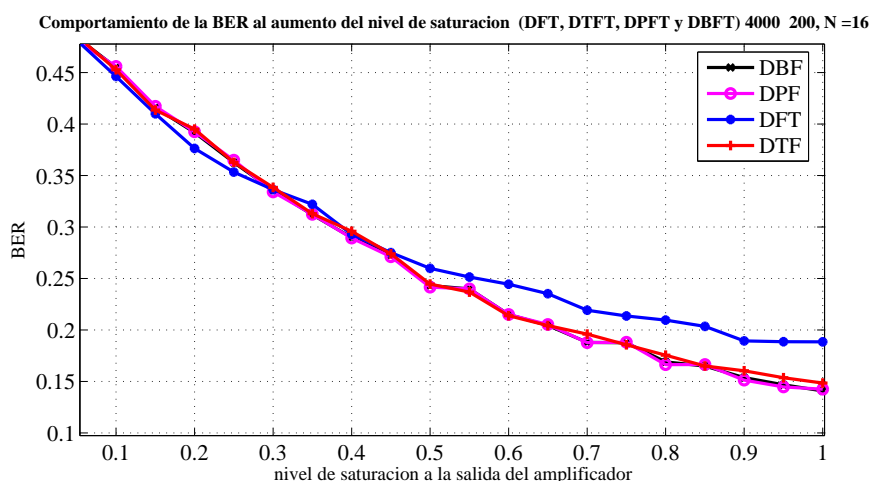


Figura 4.24: BER vs  $N_{SAT}$  para una S/R de 15 dB

estas transformadas son mas eficaces que la DFT.

El resultado anterior es muy importante porque ratifica la gran eficacia de las transformadas elaboradas con FARNE en sistemas con S/R muy baja.

Analizando las curvas de BER vs  $N_{SAT}$  para distintos valores de S/R presentadas en la figuras 4.23, 4.24, 4.25 se puede concluir además que en un escenario en el cual la S/R esta entre (los 0 y los 10dB), el comportamiento no lineal del amplificador influye en la BER de una forma menos eficaz en comparación con ambientes en los cuales la S/R es más alta.

Los efectos provocados por la no linealidad del amplificador HPA aumentan considerablemente en presencia de ruido. Sí se evalúan estos efectos en un modelo ideal, las pérdidas de datos serían mínimas (figura 4.22).

Para valores de señal a ruido entre los 20 dB las transformadas elaboradas con las FARNE son afectadas en mayor porcentaje por las no linealidades del amplificador que la DFT (figura

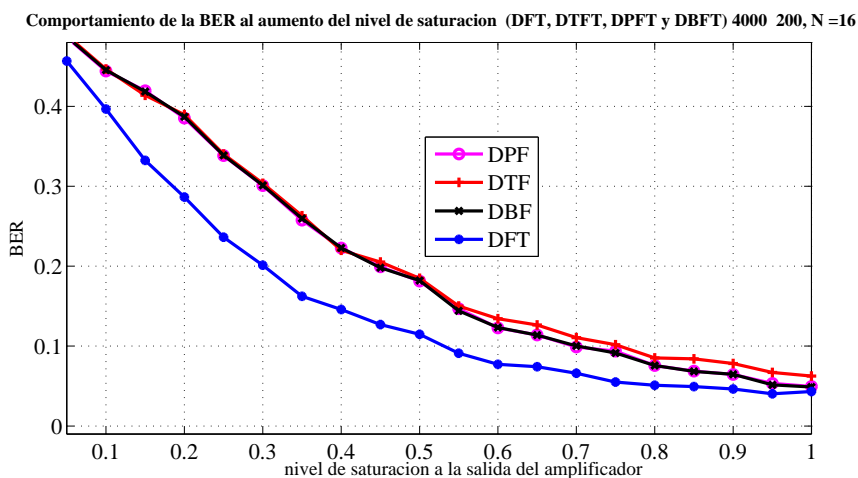


Figura 4.25: BER vs  $N_{SAT}$  para una S/R de 23 dB

4.25).

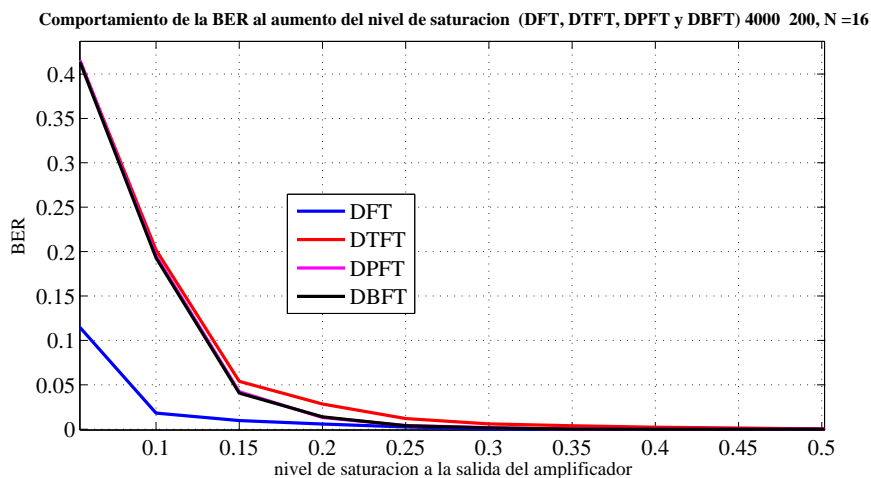


Figura 4.26: BER vs  $N_{SAT}$  para una S/R de 55 dB

Si se analiza para valores cada vez mayores de S/R el valor de  $N_{SAT}$  del amplificador para que existan errores cada vez es menor, por lo tanto el diseño del amplificador de potencia para el sistema se vuelve menos complejo.

Si se considera un sistema OFDM en la realidad los estándares hablan de S/R mayores a 40 dB, en estos sistemas si las no linealidades ocasionadas por el amplificador son muy grandes la DFT se comporta mejor que las demás, pero si las no linealidades no son muy grandes ( $N_{SAT}$  mayor o igual a 0.6), las transformadas elaboradas con las FARNE presentan muy pocas pérdidas (figura 4.26) y pueden ser utilizadas.

Por lo tanto si se desea diseñar un sistema OFDM que soporte distorsiones no lineales en su amplificador de potencia la DPFT, la DTFT y la DBFT son excelentes opciones.

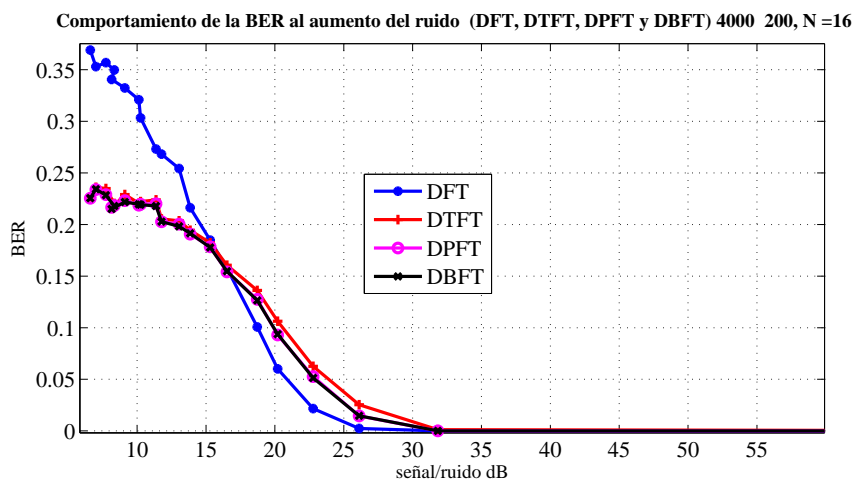


Figura 4.27: BER vs S/R para un  $N_{SAT}$  de 0.7

Analizando el comportamiento del sistema cuando se implementa un amplificador de potencia con un  $N_{SAT} = 0.7$  para distintos valores de señal a ruido se puede concluir que para valores superiores a los 40 dB las pérdidas en todos los casos son prácticamente iguales por lo tanto la implementación del sistema OFDM utilizando las transformadas evaluadas es muy efectiva.

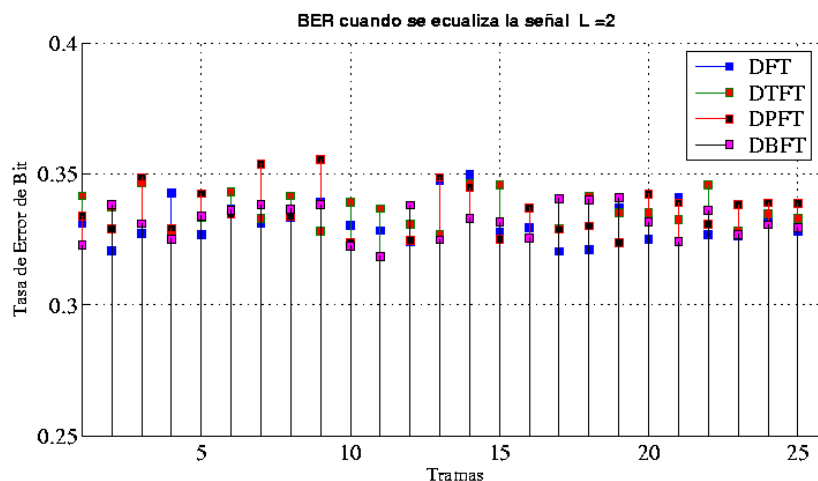
## 4.6. Entorno con canal multitrayectoria complejo (FIR) conocido

La simulación realizada transmite un número elevado de bits agrupados en bloques de 32. Cada uno de estos es procesado de tal forma que se formen cuatro bloques en paralelo de 8 bits. El procesamiento en paralelo de los bloques aumenta el número de transformadas realizadas por transmisión pero disminuye su longitud, permitiendo realizar al final menos operaciones en total, en contraposición la disminución de la longitud conlleva a tener un prefijo cíclico más pequeño y por tanto una menor eficiencia de la ecualización contra canales con alto grado de desvanecimiento y con mayor número de multitrayectorias.

### 4.6.1. Canal multitrayectoria sin AWGN

Observando los resultados obtenidos en la simulación cuando se modela un canal con dos multitrayectorias ( $L = 2$ ) sin tener en cuenta los demás fenómenos estudiados, se puede apreciar la similitud de la BER (0.5) para cada una de las transformadas evaluadas. Se puede concluir entonces que la inclusión del filtro FIR para modelar el canal multitrayectoria afectó a las transformadas de forma similar.

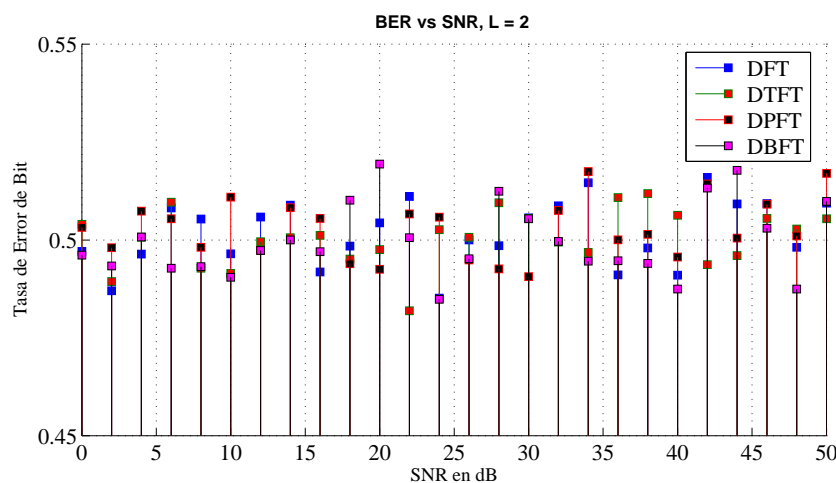
## 4.6.2. Canal multitrayectoria con ecualización lineal

Figura 4.28: BER vs SNR, ecualización lineal,  $L = 2$ 

Observando los resultados obtenidos en la simulación para  $L = 2$  teniendo en cuenta solamente la corrección realizada por el ecualizador, se puede apreciar una disminución de la BER muy similar para todos los casos.

## 4.6.3. Canal multitrayectoria con AWGN

Para graficar la curva de BER vs SNR entre 0 y 50 dB con un paso de 2dB se utiliza la función `awgn`, la cual utiliza la potencia de la señal transmitida y la SNR dada para elaborar una señal de ruido aditivo gaussiano que cumpla con todos los requisitos necesarios para ser adicionada después de que la señal de datos pase a través del canal.

Figura 4.29: BER vs SNR,  $L = 2$

Al observar la figura 4.29 se concluye que las BER de todas las transformadas se comportan de forma similar.

#### 4.6.4. Canal multitrayectoria con todos los efectos

Al evaluar la BER para todas las transformadas cuando existen fenómenos de amplificación no lineal y el canal tiene multitrayectorias definidas en el tiempo, si además se aplica ecualización lineal en el demodulador se observa como al aumentar la S/R la BER disminuye similarmente en todos los casos.

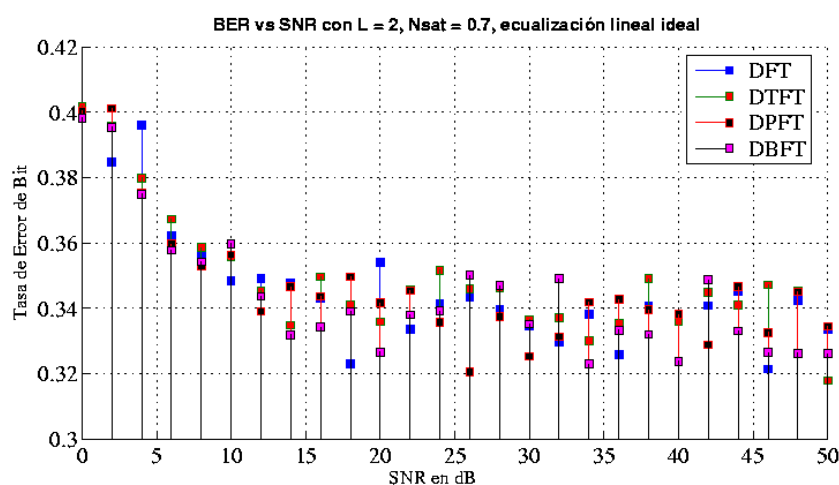


Figura 4.30: BER vs SNR, ecualización lineal

Si se analizan todos los resultados obtenidos en esta sección se concluye que al tomar en cuenta un canal con multitrayectorias predecible en el tiempo, los efectos ocasionados por el cambio de las transformadas en los bloques de multiplexación y demultiplexación no son muy notorios, por lo tanto la utilización de las nuevas transformadas (DTFT, DPFT y DBFT) en sistemas OFDM con canales de este tipo es una alternativa muy viable.

La eficacia de las transformadas evaluadas es muy similar a la analizada con la DFT, pero como es sabido las primeras tienen más eficiencia en el cálculo de sus coeficientes, por lo tanto si definimos como efectividad la suma de la eficiencia más la eficacia, la aplicación de FARNE en OFDM es muy efectiva.

## Capítulo 5

# Conclusiones

Tomando como base los análisis realizados se puede concluir:

Con las FARNE se pueden elaborar un conjunto de transformadas cuya base es siempre entera. De esta forma si se utilizan para la modulación y la demodulación de datos bloques en los cuales los puntos  $a + jb$  del diagrama de constelaciones son enteros, la señal resultante a la salida de la transformada inversa también es entera, por lo tanto el número de operaciones necesarias para realizar este trabajo será mucho menor a las hasta ahora realizadas utilizando la DFT debido a que las bases de esta producen resultados con decimales.

Para hallar sus coeficientes las transformadas DTFT, DPFT y DBFT realizan todas sus operaciones con números enteros en cambio la DFT para hallar el valor de sus coeficientes necesita hallar el  $\sin(x)$  y el  $\cos(x)$ , a través de la utilización de series de Taylor u otros algoritmos con operaciones en punto decimal. Por consiguiente, la velocidad en el cálculo de las transformadas basadas en las FARNE es mayor que la velocidad de la DFT y por tanto en un sistema de comunicaciones OFDM, el cual necesita hallar en tiempo real las transformadas inversas y directas, las FARNE son muy eficientes.

Las transformadas DTFT, DPFT y DBFT presentan una menor BER en ambientes en los cuales la S/R es muy baja (0 a 10 dB) y no existe fenómenos de multitrayectoria en el canal.

Las transformadas modificadas DTFMT, DPFMT y DBFMT utilizadas anteriormente en la detección de señales de radar, no funcionan en OFDM debido a que el grado de invertibilidad de las mismas es muy pequeño.

En ambientes en los cuales la relación S/R es superior a los 20 dB el comportamiento de la BER utilizando las transformadas DFT, DPFT y DBFT es muy parecida. La DTFT presenta mayores problemas debido a su falta de ortogonalidad.

En medios en donde existe un canal multitrayectoria predecible y sencillo las FARNE son igual de efectivas a la DFT.

Concluyendo las transformadas basadas en las FARNE tienen igual o mayor efectividad en los sistemas OFDM.

## 5.1. Recomendaciones

Impulsar el estudio de este tipo de investigaciones con el fin de encontrar futuras aplicaciones a técnicas desarrolladas por los grupos de investigación de la Universidad Industrial de Santander.

Realizar un análisis más detallado de las técnicas de estimación de canal para intentar adaptarlas a las nuevas transformadas de tal forma que se puedan utilizar en canales no predictivos.

Trabajar con un sistema físico OFDM para poder analizar su comportamiento en tiempo real y los efectos provocados por el medio.

Mejorar el algoritmo de las FARNE para mejorar la invertibilidad de la transformada.

Analizar la forma de corregir la invertibilidad de las FM realizando un estudio para encontrar una versión análoga a alguna de las versiones probadas de la DCT *Discrete Cosine Transform*.

Trabajar en futuros proyectos de grado en MIMO-OFDM *Multiple Inputs Multiple Outputs - Orthogonal Frequency Division Multiplexing*.

# Bibliografía

- [1] V.A. Kotelnikov. Tesis doctoral, Instituto de Energía Molotov, Moscú, 1947
- [2] Homero Ortega. Síntesis de Bases Cuasi armónicas de Números Enteros. Problemas de Modelamiento y de Procesamiento Digital de señales: libro de artículos científicos - Kiev: KMUGA, 1996. - pag. 50-68.
- [3] Proakis, J.G. y Manolakis D.G. Tratamiento Digital de Señales, 3ra ed. Prentice Hall, Madrid, 1998.
- [4] Leites R.D., Solovev V.N. Modelamiento Digital de los Sistemas de Telefonía Sintética. Sviaz, Moscú, 1969
- [5] Plotnikov V.N., Belinsky A.V., Suhanov V.A. Analizadores Digitales de Espectros, Radio y Sviaz, Moscú, 1990
- [6] Gast, Matthew. 802.11 Wireless Networks: The Definitive Guide, OReilly Publisher, Abril 2002.
- [7] Terry, J. y Heiskala, J. OFDM Wireless LANs: A Theoretical and Practical Guide, Sams Publisher, Diciembre 2001.
- [8] Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications, High-speed Physical Layer in the 5 GHz Band, IEEE Standard, Nueva York N.Y. 1999
- [9] Maddocks, M.C.D. An Introduction to Digital Modulation and OFDM Techniques, Research Department Report, The British Broadcasting Corporation, Londres 1993.
- [10] Zozaya, Alfonso Jose. Aportación a la Linealización de Amplificadores de Potencia Mediante la Teoría de la Hiperestabilidad, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona España.
- [11] Lawre, Eric. The suitability of OFDM as a modulation technique for wireless telecommunications, with a CDMA comparison, Tesis de grado. James Cook University, Australia 1997.

- 
- [12] Lawre, Eric. Adaptive Techniques for Multiuser OFDM, Tesis Doctoral. James Cook University, Australia 2001.
- [13] A Comparison of the Hiperlan/2 and IEEE 802.11a Wireless LAN Standars, IEEE Communications Magazine, Mayo 2002.
- [14] Haykin, Simon. Communication Systems, 4th Edition, John Wiley and Sons Inc, 2001.
- [15] T. Kaitz, Channel and interference model for 802.16b Physical Layer, contribution to the IEEE 802.16b standard, 2001.
- [16] C. Rapp, Effects of the HPA-nonlinearity on a 4-DPSK/OFDM signal for a digital sound broadcasting system, Tech. Conf. ECSC 91, Luettich, Octubre 1991.
- [17] Ahmad R. S. Bahai and Burton R. Saltzberg, Multi-Carrier Digital Communications: Theory and Applications of OFDM, Kluwer Academic Publishers 2002.
- [18] Sinem Coleri, Mustafa Ergen, Anuj Puri, and Ahmad Bahai, Channel Estimation Techniques Based on Pilot Arrangement in OFDM Systems, IEEE Transactions on broadcasting, vol. 48, no. 3, Septiembre 2002.
- [19] T. Kaitz, Channel and interference model for 802.16b Physical Layer, contribution to the IEEE 802.16b standard, 2001.
- [20] Proakis and Manolakis, Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications, 3rd Edition, Prentice Hall, 1996.