

TOPOLOGÍAS DÉBILES Y EL TEOREMA DE EBERLEIN-ŠMULIAN

DANIEL FABIÁN SUÁREZ NAVARRO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

TOPOLOGÍAS DÉBILES Y EL TEOREMA DE EBERLEIN-ŠMULIAN

DANIEL FABIÁN SUÁREZ NAVARRO

Trabajo de grado para optar al título de Matemático

Director

RONALD EDUARDO PATERNINA SALGEDO

Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

Dedicatoria

Durante toda mi carrera universitaria he tenido que enfrentarme a muchos problemas y obstáculos que hicieron difícil mi estadía en la universidad, en muchas ocasiones pensé incluso en desistir de todo, sin embargo, gracias al apoyo de dos personas incondicionales, y que son lo más importante que me ha dado la vida, pude hacerle frente a todos estos problemas y seguir adelante.

Este trabajo se lo quiero dedicar a ustedes Tilcia Navarro Niño, mi madre, y Daniel Suárez Forero, mi padre. Sin ustedes este logro nunca hubiera sido posible.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres y mi familia por su apoyo y paciencia incondicional, al profesor Ronald por su colaboración en mi proyecto, por tenerme paciencia durante desarrollo de este trabajo y por sus enseñanzas, a los profesores de la Escuela de matemáticas por todas sus enseñanzas, agradezco también a los restaurantes Menzuly y al hotel la triada por brindarme la posibilidad de trabajar en sus establecimientos y poder así cubrir mis necesidades económicas, finalmente gracias a todos mis amigos por estar siempre a mi lado y por brindarme ese apoyo emocional que en ocasiones es de mucha ayuda.

Índice general

Introducción	11
1. Preliminares	14
1.1. Topología General	14
1.2. Análisis Funcional	16
1.3. Compacidad	24
1.4. Operadores y sus adjuntos	28
1.5. Redes	28
2. Topologías Débiles	32
2.1. Topología débil	32
2.2. Propiedades de la topología débil	36
2.3. Convergencia débil.	45
2.4. Topología débil*	56
2.5. Compacidad en las topologías débil y débil*	62
2.6. Metrizabilidad de las topologías débiles	74
3. Teorema de Eberlein-Šmulian	82
3.1. Operadores débilmente compactos	90
Bibliografía	93

Lista de Símbolos

X, Y	Espacios lineales normados.
X^*, Y^*, X^{**}, Y^{**}	Dual y bidual topológico de los espacios X y Y respectivamente.
x^*, y^*, x^{**}, y^{**}	Elementos de X^*, Y^*, X^{**}, Y^{**} respectivamente.
H	Espacio de Hilbert.
Jx, Jy	Imagen de los elementos $x \in X$ e $y \in Y$ con respecto a la Inyección canónica
\mathfrak{F}	Colección de funciones de X en Y .
$L(X, Y)$	Conjunto de operadores lineales continuos de X en Y
T, R	Elementos de $L(X, Y)$
$L(X, \mathbb{R})$	Funcionales lineales y continuos de X en \mathbb{R} .
f^{-1}, g^{-1}, T^{-1}	Funciones inversas de f, g y T respectivamente
$S_X, S_{X^*}, S_{X^{**}}$	Esfera unitaria en X, X^* y X^{**} respectivamente.
$B_X, B_{X^*}, B_{X^{**}}$	Bola unitaria en X, X^* y X^{**} respectivamente.
l_∞	Espacio de sucesiones escalares convergentes acotadas.
c_0	Espacio de sucesiones escalares convergentes a cero.
$\sigma(X, X^*), \sigma(X^*, X)$	Topología débil y topología débil* respectivamente.
$\overline{A}^{\text{débil}}, \overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$	Clausura de A y $J(A)$ con respecto a las topologías débil y débil*.
$\{[a_n]\} = [a_n]$	Espacio generado por las combinaciones lineales de los elementos de $\{a_n\}$
μ	Medida positiva.
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$	Conjunto de los naturales, reales y racionales respectivamente.
$\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$	Producto cartesiano de los conjuntos X_α .
$x_n \xrightarrow{\omega} x,$	Convergencia débil de la sucesión x_n a X .
\mathcal{X}_E	Función característica del conjunto E .
N°	Interior del conjunto N .
$B(x, \varepsilon)$	Bola abierta con centro en x y radio ε .

Resumen

TÍTULO: TOPOLOGÍAS DÉBILES Y EL TEOREMA DE EBERLEIN-ŠMULIAN*

AUTOR: Daniel Fabián Suárez Navarro**

PALABRAS CLAVE: TOPOLOGÍAS DÉBILES, EBERLEIN-ŠMULIAN.

DESCRIPCIÓN:

El contenido de este trabajo se centra principalmente en el estudio de las topologías débiles en espacios lineales normados y en el teorema de Eberlein-Šmulian, uno de los resultados más importantes que se obtienen de estas topologías. Inicialmente se hará un estudio de algunos conceptos básicos de análisis funcional y topología que serán de ayuda y utilidad para la total comprensión y desarrollo de este trabajo, en dicho estudio están incluidos algunos resultados clásicos como el teorema de separación de Hahn-Banach, el teorema de Banach-Steinhaus y la relación que hay entre las tres clases diferentes de compacidad en espacios métricos. En el segundo capítulo, se hará un amplio y detallado estudio de las topologías débil y débil*, se mostrarán teoremas importantes del análisis funcional como el teorema de Goldstine y el teorema de Banach-Alaoglu, se introducirán nuevas definiciones como convergencia débil, convergencia débil* y compacidad débil, se mostrarán ejemplos de la convergencia y compacidad débil en algunos espacios conocidos del análisis funcional como los espacios l_p , c_0 y $L_p[a, b]$. Por último, en el tercer capítulo se hará un estudio del teorema de Eberlein-Šmulian el cual es el centro de estudio de este trabajo, en dicho estudio se hará uso de toda la información desarrollada en el capítulo dos. Además, veremos algunas aplicaciones de la teoría vista en algunos teoremas con operadores débilmente compactos.

*Trabajo de grado

**Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas.

Director: Dr. Ronald Eduardo Paternina Salgado.

ABSTRACT

TITLE: WEAK AND WEAK* TOPOLOGIES AND THE EBERLEIN-ŠMULIAN THEOREM *

AUTHOR: Daniel Fabián Suárez Navarro **

KEYWORDS: WEAK TOPOLOGIES, EBERLEIN-ŠMULIAN.

DESCRIPTION:

The content of this work is mainly focused on the study of weak topologies in normed linear spaces and the Eberlein- Šmulian theorem, one of the most important results obtained from these topologies. First, a study will be conducted of some basic concepts of functional analysis and topology, this as a tool for the understanding and development of this work. In the preliminary section there are some classic results, such as the Hahn-Banach separation theorem, the Banach-Steinhaus theorem and the relationship that exists between the three different classes of compactness in metric spaces. In the second chapter it will be study the weak and weak* topologies this time is going to be a wide and detailed process. Besides, it will be shown some important theorem in functional analysis such as Goldstine's theorem and Banach Alaoglu's theorem, it will be introduced some new definitions as weak convergence, weak* convergence and weak compactness, it will be shown examples of weak convergence and weak compactness in some known spaces of the functional analysis, such as the spaces l_p , c_0 and $L_p[a; b]$. Further, we will shown some applications of the theory seen on some theorems with weakly compact operators.

*Bachelor Thesis

**Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas.

Director: Dr. Ronald Eduardo Paternina Salgado.

Introducción

El estudio de las topologías débiles forman un papel muy importante tanto en el análisis funcional como en la topología general. Uno de los resultados más interesantes que surge de la topología débil, es la relación que existe entre las tres clases diferentes de compacidad débil como lo demuestra el teorema de Eberlein-Šmulian. En general este teorema establece que los conjuntos débilmente compactos son también débilmente secuencialmente compactos, permitiendo así la posibilidad de extraer una subsucesión débilmente convergente de cualquier sucesión acotada de elementos de un determinado espacio dotado con la topología débil.

El concepto de conjunto compacto en el sentido de que cada subconjunto infinito y acotado posee un punto límite fue introducido en el año 1906 por Fréchet. Además, según Dieudonné en su “History of functional analysis” (ver [5]) en su tesis doctoral Fréchet ya había notado que la convergencia de sucesiones en un conjunto de funciones no siempre corresponde a los tipos clásicos de convergencia en el espacio euclidiano, esto lo llevó a introducir los llamados espacios métricos, generalizando así las nociones de abierto, cerrado, clausura, etc. Sin embargo, este acercamiento a la topología general estaba sujeto al concepto de distancia, limitando así las nuevas nociones a espacios metrizable. Esto creó la necesidad de generalizar el concepto de espacio métrico, pero ninguno de estos conceptos resultó adecuado para el análisis funcional hasta que Hausdorff, en 1914, introdujo la topología general, basado en el concepto de vecindad.

Estos nuevos conceptos generalizaban aún más las nociones de abierto, cerrado, continuidad, etc. Sin embargo, para introducir el concepto de topología débil, fue necesario esperar hasta el año 1934 cuando Von Neumann definió la vecindad débil de un punto en un espacio de Hilbert. Anterior a estos hechos, la noción de convergencia débil fue usada por primera vez por David Hilbert para los espacios $L_2[0, 1]$, y más adelante fue usada en los espacios $L_p[0, 1]$ por F. Riesz, todo esto basados en los conceptos introducidos por Hausdorff. Pero tiempo después cuando Von Neumann ya había introducido la noción de vecindad débil para un punto, logró demostrar que para el espacio l_2 esta noción de convergencia débil falla (ver Ejemplo 2.17),

demostrando también de esta forma que la topología débil no era metrizable en espacios de dimensión infinita.

Una pregunta común sería ¿qué es lo interesante del teorema de Eberlein-Šmulian? Pues bien, es conocido que en espacios métricos la compacidad, la compacidad numerable y la compacidad secuencial son equivalentes. Pero, como se mencionó anteriormente para los espacios de dimensión infinita la topología débil no es metrizable. De aquí surge lo interesante, ya que a pesar de este hecho, el teorema de Eberlein-Šmulian establece que, se puede encontrar una equivalencia en las tres clases de compacidad débil.

Por otro lado, sabemos que todo espacio vectorial normado es metrizable, sin embargo, en conjuntos de dimensión infinita la métrica que induce la norma es demasiado fuerte para permitir deducir algunos teoremas interesantes de sucesiones, más aún, recordemos que muchos de los resultados interesantes en el análisis involucran conjuntos compactos, pero si la topología dada es muy fina (fuerte), no podremos obtener demasiados conjuntos compactos. Lo anterior motiva a estudiar las topologías débil y débil* ya que entre más débil sea una topología mayor es el número de compactos que podemos obtener; la primera, la topología débil, está presente en todo espacio topológico y en particular en espacios vectoriales normados; la segunda, la topología débil*, se encuentra solo en espacios duales. Un aspecto importante de la topología débil* es que en general para espacios duales de dimensión infinita la topología débil* es “más débil” que la topología débil del espacio dual.

Inicialmente se hará un breve estudio preliminar, en el cual se mostrarán algunos resultados básicos de topología general, análisis funcional, redes y también se mostrarán unas definiciones y teoremas básicos de la teoría de la medida; todo esto con el fin de lograr la total comprensión de los capítulos 2 y 3 que son el centro del presente estudio.

Seguidamente se estudiarán las topologías débiles, se introducirán nuevos conceptos como el significado de compacidad débil y también se estudiarán las convergencias de sucesiones en ambas topologías (débil y débil*), se mostrará bajo que condiciones la topología débil puede ser metrizable, de hecho para la topología débil podemos encontrar resultados interesantes como por ejemplo, el hecho de que un

espacio vectorial normado X es de dimensión finita si y solo si la topología débil en X es metrizable. Un ejemplo clásico de un espacio dotado de la topología débil, y de hecho, uno de los más importantes en la topología general, es el espacio producto dotado con la topología producto o topología de Tychonoff, la cual no es más que la topología débil que hace continuas todas las proyecciones definidas sobre el espacio producto.

Para la topología débil* se estudiarán también algunos resultados interesantes como lo es el hecho de que la imagen de la bola unitaria B_X bajo la función inyección canónica es un conjunto denso en $B_{X^{**}}$ con la topología débil* (teorema de Goldstine), pero el resultado que más resalta para esta topología es el teorema de Banach-Alaoglu, el cual establece que la bola cerrada unitaria en un espacio dual es compacta con la topología débil*.

Para el capítulo final, el estudio se centra en el teorema de Eberlein-Šmulian, para esto se cuenta con algunos teoremas y lemas previos que descomponen el teorema buscando hacer la demostración de este teorema un poco más didáctica y sencilla, adicionalmente se mostrarán algunos ejemplos para ver que a diferencia de lo que ocurre con la topología débil, los conjuntos débil* compactos no son necesariamente secuencialmente débil* compactos.

Finalmente, a razón de ejemplos, se presentará una sección con algunos teoremas con operadores débilmente compactos. Esto con el fin de mostrar algunas de las aplicaciones de los teoremas estudiados en el transcurso del trabajo.

Preliminares

Desde los orígenes del cálculo se fue poniendo de manifiesto la conveniencia de considerar conjuntos cuyos elementos, a diferencia de lo que sucede con el análisis clásico no son puntos en el espacio si no funciones. Este hecho llevó a los matemáticos a buscar nuevos conceptos y fue gracias a esta búsqueda que surgió el análisis funcional.

Una de las personas más influyentes en el análisis funcional fue el matemático polaco Stefan Banach, quien con sus aportes permitió, en gran parte, el desarrollo de esta importante rama de la matemática, algunos de sus teoremas más importantes como el Teorema de Separación de Hahn-Banach, el Teorema de Extensión de Hahn-Banach, y también algunos conceptos y teoremas básicos de topología se presentan en el actual capítulo.

1.1. Topología General

Definición 1.1 *Sea X un conjunto. Una familia τ de subconjuntos de X es llamada una topología en X si τ satisface las siguientes propiedades:*

1. \emptyset y X están en τ ;
2. La unión arbitraria de elementos de τ , está en τ ;
3. La intersección finita de elementos de τ , está en τ .

El par (X, τ) es llamado un espacio topológico. Si no hay confusión con respecto a τ nos referimos a X como espacio topológico.

Teorema 1.1 Sea $\{\tau_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de topologías en X . Entonces $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ es una topología en X .

Definición 1.2 Sea X un espacio topológico no vacío. Decimos que $N \subseteq X$ es una vecindad de un punto $x \in X$, si $x \in N^\circ$. Denotamos por \mathcal{U}_x a la familia de todas las vecindades de x y la llamaremos sistema de vecindad de x .

Definición 1.3 Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Una familia $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x$ es llamada base de vecindades de x , si para cualquier $N \in \mathcal{U}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$, tal que $B \subseteq N$.

Definición 1.4 Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es llamada una base de τ , si cada abierto puede ser escrito como unión de elementos de \mathcal{B} . Es decir, dado $U \in \tau$ existe una subfamilia $\zeta \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \{B \mid B \in \zeta\}$. Si \mathcal{B} es base de τ , diremos que τ es la topología generada por la base \mathcal{B} y la denotaremos por $\tau_{\mathcal{B}}$.

Ejemplo 1.1 Considere el espacio métrico \mathbb{R}^2 con la métrica usual, es fácil ver que las bolas abiertas de radio ϵ constituyen una base. Con mayor generalidad, si (X, d) es un espacio métrico, la colección de todos los $B(x_0, \epsilon)$ constituyen una base para la topología inducida por la métrica.

Ejemplo 1.2 Sea \mathfrak{X} un espacio discreto, entonces $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ es una base para $\tau = \mathcal{P}(X)$.

Teorema 1.2 Sea X un conjunto. Una base para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X (llamados elementos básicos) tales que:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2 , entonces existe un elemento básico B_3 tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Definición 1.5 Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\zeta \subseteq \tau$ es llamada subbase, si la familia de intersecciones finitas de miembros de ζ forman una base para τ . Es decir, $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \text{ es un subconjunto finito de } \zeta\}$ es base para τ . Si ζ es subbase de τ , diremos que τ es generada por la subbase ζ .

Definición 1.6 Sean τ_1 y τ_2 topologías de X , diremos que τ_2 es más fina que τ_1 si $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Además, diremos que τ_2 es estrictamente más fina que τ_1 si τ_2 es más fina que τ_1 y $\tau_2 \neq \tau_1$.

Proposición 1.1 Sean X un conjunto y τ_1 y τ_2 topologías de X . Para cada $x \in X$, sean \mathcal{B}_x^1 y \mathcal{B}_x^2 bases de vecindades de x de τ_1 y τ_2 , respectivamente. Entonces $\tau_1 \subseteq \tau_2$ si y solo si para cada $x \in X$ y cada $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$, existe $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subseteq B_1$.

1.2. Análisis Funcional

Definición 1.7 Para un espacio normado X su dual $X^* = L(X, \mathbb{R})$ es el conjunto de los funcionales lineales y continuos sobre X . Para un $f \in X^*$ su norma es dada por la fórmula

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in X}} |f(x)| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} |f(x)|.$$

Cuando no hay confusión podemos escribir $\|f\|$ en lugar de $\|f\|_{X^*}$. Dado $f \in X^*$ y $x \in X$ a menudo se escribe $\langle f, x \rangle$ en lugar de $f(x)$; y decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar para la dualidad X^*, X .

Teorema 1.3 Si X e Y son espacios lineales normados y si Y es de Banach, entonces el espacio lineal $L(X, Y)$ con la norma dada por $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$, donde $T \in L(X, Y)$, es un espacio de Banach.

Teorema 1.4 Sea X un espacio vectorial normado. Si $\dim X < \infty$, entonces cada funcional lineal en X es continuo.

Definición 1.8 Sea X un espacio lineal normado y sea X^* su espacio dual con la norma definida anteriormente. El bidual $X^{**} = L(X^*, \mathbb{R})$ es el dual de X^* y su norma está dada por

$$\|\varphi\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in X^*}} |\langle \varphi, f \rangle|$$

Dado un espacio lineal normado X podemos considerar una función $J : X \rightarrow X^{**}$ como sigue

Definición 1.9 Sean X y Y espacios normados sobre \mathbb{R} . Diremos que una aplicación $T : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo, si T es biyectiva, lineal, continua y su inversa T^{-1} es continua. En tal caso decimos que X y Y son isomorfos. Un isomorfismo isométrico entre dos espacios lineales normados X e Y es un isomorfismo T entre X e Y para el cual $\|Tx\| = \|x\|$ para cada $x \in X$.

Teorema 1.5 Una aplicación lineal sobreyectiva T entre dos espacios normados X e Y es un isomorfismo si y solo si existen constantes positivas m, M tales que

$$m\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Definición 1.10 Sea X un espacio vectorial normado. Para cada $x \in X$ considere el funcional $Jx : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $Jx(x^*) = x^*(x)$, $\forall x^* \in X^*$. Entonces $Jx \in X^{**}$ para cada $x \in X$ y $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|$.

La función $J : X \rightarrow X^{**}$ definida por $J(x) = Jx$ es llamada la inyección canónica de X en su bidual.

Definición 1.11 Un espacio normado X es reflexivo si $J(X) = X^{**}$ donde $J : X \rightarrow X^{**}$ es la inyección canónica.

Teorema 1.6 Sean $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces la aplicación $\Phi : l_q \rightarrow l_p^*$ definida por

$$\langle \Phi(y), x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_p \text{ y } y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_q$$

es un isomorfismo isométrico. Así, l_p es reflexivo para $1 < p < +\infty$.

Teorema 1.7 La aplicación $F : l_1 \rightarrow c_0^*$ definida por

$$\langle F(y), x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n, \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0 \text{ y } y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_1$$

es un isomorfismo isométrico. Por tanto $c_0^* = l_1$

Teorema 1.8 (Extensión de Hahn-Banach) Sea E un espacio vectorial y p un funcional sublineal sobre E , es decir p es una función que satisface

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \quad (1.1)$$

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E \text{ y } \forall \lambda > 0 \quad (1.2)$$

Sea $G \subset E$ un subespacio lineal y sea $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

Entonces, existe un funcional lineal f definido en todo E tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$ y $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

La demostración del anterior resultado puede ser consultada en [3]

Teorema 1.9 Sea x_0 un vector no nulo en el espacio lineal normado X . Entonces existe un funcional lineal acotado F , definido en todo el espacio, tal que

$$\|F\| = 1 \text{ y } F(x_0) = \|x_0\|.$$

Teorema 1.10 Sea M un subespacio de el espacio lineal normado X , supongamos que $x_1 \in X$ tiene la propiedad de que la distancia de x_1 a M , $d(x_1, M) = d$ es positiva. Entonces, existe un funcional lineal acotado F en X^* , tal que $\|F\| = 1$; $F(x_1) = d$, y para todo $x \in M$, $F(x) = 0$.

Definición 1.12 (Hiperplano) Sea X un espacio de Banach. Un hiperplano afín es un subconjunto H de X de la forma $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde f es un funcional lineal no nulo y $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante dada. Escribimos $H = [f = \alpha]$ y decimos que $f = \alpha$ es la ecuación de H .

Es bien conocido que el hiperplano lineal $H = [f = \alpha]$ de la definición anterior es cerrado si y solo si f es un funcional continuo.

Definición 1.13 Sean A y B dos subconjuntos de X . Decimos que el hiperplano $H = [f = \alpha]$ separa a A y B si

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{y} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B.$$

Decimos que H separa estrictamente a A y B si existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \quad \text{y} \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B.$$

Lema 1.1 Sea $C \subseteq E$ un convexo abierto con $0 \in C$. Para cada $x \in E$ definamos $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\} \quad (1.3)$$

Entonces p satisface las siguientes condiciones.

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall x \in E$ y $\forall \lambda > 0$;
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.
3. $\exists M > 0$ tal que $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$, $\forall x \in E$.
4. $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$.

Lema 1.2 Sea $C \subseteq E$ un conjunto abierto convexo no vacío y sea $x_0 \notin C$. Entonces existe $f \in E^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$. En particular el hiperplano $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ y C .

Teorema 1.11 (Teorema de Hahn-Banach, Primera forma) Sean $A, B \subset E$ dos subconjuntos convexos no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$. Suponga que uno de ellos es abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B .

Teorema 1.12 (Teorema de Hahn-Banach, Segunda forma) Sean $A \subset X$ y $B \subset X$ dos subconjuntos convexos tales que $A \cap B = \emptyset$. Suponga que A es cerrado y B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa estrictamente A y B .

Gracias a que en \mathbb{R}^n existe una forma de medir la distancia entre dos puntos, podemos estudiar los conceptos de límite, convergencia, diferenciabilidad e integración. Además, este hecho también nos permite clasificar algunos de sus subconjuntos según estas propiedades. Esto despertó el interés de los matemáticos por tratar de generalizar la definición de distancia y poder lograr muchos de los resultados que se satisfacen en \mathbb{R}^n en otros espacios topológicos.

Definición 1.14 Sea X un conjunto. Una métrica o distancia en X es una función ρ definida por $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que, para cada x, y y z en X se satisfacen las siguientes condiciones:

(M1) $\rho(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;

(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(M3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

El par (X, ρ) es llamado espacio métrico. La condición (M1) garantiza que la distancia entre dos puntos distintos es positiva y cada punto tiene una distancia cero de sí mismo. La condición dos (M2) afirma que la función distancia es simétrica, es decir no depende del orden de los puntos. La condición tres (M3) garantiza que la función distancia satisface la desigualdad triangular.

Ejemplo 1.3 Sea X un conjunto arbitrario y definamos para $x, y \in X$

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y; \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Entonces ρ es una métrica en X . La función ρ es llamada *métrica discreta*, y el espacio (X, ρ) se conoce como el *espacio discreto*.

Ejemplo 1.4 Sea E un espacio lineal normado. Entonces la función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ define una métrica sobre E . Esto implica que todo espacio vectorial normado es también un espacio métrico, en este caso, decimos que E es un espacio métrico con la métrica inducida por la norma.

Recordemos que un conjunto Y en un espacio topológico X es llamado denso en X si $\bar{Y} = X$, la clausura de Y es X . En otras palabras, Y es denso en X si $Y \cap G \neq \emptyset$ para cualquier conjunto G abierto no vacío de X .

Uno de los resultados más fundamentales y usados en el análisis funcional y la topología general es el teorema de categoría de Baire. Este teorema tiene varias formulaciones equivalentes. La primera de esas formulaciones establece lo siguiente.

Teorema 1.13 (Teorema de categorías de Baire) Sean G_1, G_2, \dots una sucesión de subconjuntos densos abiertos no nulos de un espacio métrico completo X . Entonces $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X .

Una forma equivalente de enunciar el anterior resultado es la siguiente.

Teorema 1.14 *Sea X un espacio métrico completo, si X es la unión numerable de subconjuntos cerrados entonces al menos uno de los conjuntos cerrados tiene interior no vacío.*

En el presente trabajo nos referiremos este último teorema como el Teorema de Baire.

Teorema 1.15 (Banach Steinhaus) *(Principio de acotación uniforme.)*

Sea X un espacio de Banach, Y un espacio vectorial normado. Sea A un subconjunto de $L(X, Y)$. Si para todo $x \in X$ se tiene que $\sup_{T \in A} \|Tx\| < \infty$, entonces $\sup_{T \in A} \|T\| < \infty$.

Teorema 1.16 *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio vectorial normado, $T_n \in L(X, Y)$ tales que para cada $x \in X$ existe $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \in Y$. Entonces definiendo $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ obtenemos que T es lineal, continua y $\|T\| \leq \sup_n \|T_n\|_{L(X, Y)}$*

Teorema 1.17 (Principio de aplicación abierta) *Sea $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal continua sobreyectiva entre dos espacios de Banach X e Y . La imagen de cada conjunto abierto en X es un conjunto abierto en Y .*

Teorema 1.18 *Una transformación lineal continua inyectiva y sobreyectiva entre dos espacios de Banach X e Y tiene inversa continua.*

Teorema 1.19 (Teorema del gráfico cerrado) *Sean X e Y dos espacios de Banach. Sea T una transformación lineal de X en Y . Suponga que la gráfica de T es cerrada en $X \times Y$. Entonces T es continua.*

Las demostraciones de los anteriores resultados se pueden encontrar en [3].

Ahora, con el fin de estudiar algunos ejemplos en los espacios $L_p[a, b]$ y $C(X)$ se introducirán algunos conceptos de medida que serán de mucha utilidad para desarrollar dichos ejemplos.

Definición 1.15 *Una colección \mathfrak{M} de subconjuntos de X es llamada una σ -álgebra en X si \mathfrak{M} tiene las siguientes tres propiedades:*

1. $X \in \mathfrak{M}$;

2. Si $A \in \mathfrak{M}$, entonces $A^c \in \mathfrak{M}$;
3. Si $A_n \in \mathfrak{M}$ para $n = 1, 2, \dots$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

Si \mathfrak{M} es un σ -álgebra en X , entonces X es llamado un espacio medible, y los elementos de \mathfrak{M} son llamados conjuntos medibles en X .

Definición 1.16 Sea \mathfrak{M} una σ -álgebra en X . Una función $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty)$ es una medida en el espacio medible (X, \mathfrak{M}) si μ satisface las siguientes condiciones:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subseteq B$;
3. si A_1, A_2, \dots es una sucesión numerable de subconjuntos dos a dos disjuntos de X entonces,

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Definición 1.17 Sea (X, d) un espacio métrico y sea μ una medida en el espacio medible (X, \mathfrak{M}) .

1. La σ -álgebra de Borel, $\mathcal{B}(X, d)$, es la menor σ -álgebra que contiene todos los subconjuntos abiertos de X . Cada elemento de $\mathcal{B}(X, d)$ es llamado conjunto de Borel. Si no hay confusión podemos escribir $\mathcal{B}(X)$.
2. μ es llamada una medida de Borel si $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathfrak{M}$.
3. μ es llamada una medida regular de Borel si es una medida de Borel y, para cualquier $A \in \mathfrak{M}$, existe $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\mu(A) = \mu(B)$ y $A \subseteq B$.

Teorema 1.20 Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y μ una medida no negativa de Borel. Entonces μ es una medida regular de Borel si y solo si

1. $\mu(K) < \infty$ para cada compacto $K \subset X$.
2. Para cada conjunto de Borel $E \in \mathfrak{M}$, tenemos que

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{abierto}\},$$

en este caso decimos que E es regular exterior.

3. La relación

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\},$$

se mantiene para cada abierto, y para cada $E \in \mathfrak{M}$ con $\mu(E) < \infty$. En este caso decimos que E es regular interior.

Una consecuencia directa del teorema anterior se da para los espacios vectoriales normados (y por tanto Hausdorff con respecto a la métrica inducida por la norma) y compactos.

Definición 1.18 Sea X un espacio topológico, el espacio $rba(X)$ es el espacio vectorial de las medidas regulares de Borel aditivas definidas sobre la σ -álgebra generada por los conjuntos cerrados del espacio X . El espacio $rba(X)$ es parcialmente ordenado con la relación de orden definida por:

$$\mu \geq \lambda \quad \text{si y solo si} \quad \mu(E) \geq \lambda(E)$$

para cada E en la σ -álgebra generada por los conjuntos cerrados de X .

Nota 1. Similar a lo que ocurre con el espacio $rba(X)$; el espacio $C(X)$ (conjunto de las funciones continuas definidas sobre el espacio topológico X) es parcialmente ordenado con la relación de orden definida por $f \geq g$ si y solo si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in X$. Además, el espacio dual de $C(X)$, $C^*(X)$, también es parcialmente ordenado con la relación de orden dada por $x^* \geq y^*$ si y solo si $x^*(f) \geq y^*(f)$ para cada $f \in C(X)$.

Teorema 1.21 (Representación de Riesz-Markov) Sea X un espacio de Hausdorff compacto, existe un isomorfismo entre $C^*(X)$ y $rca(X)$ (medidas regulares de Borel contablemente aditivas) tal que los elementos correspondientes x^* y μ satisfacen la identidad

$$x^*(f) = \int_X f(x) d\mu(x), \quad f \in C(X). \quad (1.4)$$

La norma de $\|x^*\|$ es la variación total de μ (es decir $\|x^*\| = |\mu|(X)$). Además, este isomorfismo preserva orden

Nota 2. La variación total de μ se define por la función

$$|\mu|(X) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(X_i)|;$$

donde el supremo tomado sobre todas las particiones $\{X_i\}$ de X (ver [18]).

Teorema 1.22 Sean $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, existe un isomorfismo isométrico entre $L_p^*(X, \mathfrak{M}, \mu)$ y $L_q(X, \mathfrak{M}, \mu)$ en el que los vectores correspondientes x^* y g se relacionan por la identidad

$$x^*(f) = \int_{\mathfrak{X}} g(x)f(x)d\mu(x), \quad f \in L_p(X, \mathfrak{M}, \mu).$$

Teorema 1.23 Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre un conjunto medible E que converge puntualmente a la función f y supongamos que existe una función F integrable sobre E tal que $|f_n| \leq F$ para todo n , entonces

1. f es integrable sobre E .

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$

Corolario 1.1 Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre un conjunto medible E de medida finita, que converge puntualmente a la función f . Supongamos que existe una constante M tal que $|f_n(x)| \leq M$ para cada $x \in E$, entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

1.3. Compacidad

Definición 1.19 Sea X un espacio topológico, A un subconjunto de X y Λ un conjunto de índices. Supongamos que $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tiene la propiedad que $A \subset \cup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, entonces se dice que $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, es un recubrimiento del conjunto A . Si el conjunto Λ es finito, se dice que $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un recubrimiento finito de A . Si cada G_α es abierto, el recubrimiento se llama recubrimiento abierto. Se dice que el conjunto A es compacto si de todo recubrimiento abierto se puede extraer un recubrimiento finito.

Ejemplo 1.5 La recta \mathbb{R} no es compacta pues el recubrimiento de \mathbb{R} por intervalos abiertos

$$A = \{(n, n + 2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ninguna subcolección finita que cubra \mathbb{R} .

Ejemplo 1.6 El siguiente subespacio de \mathbb{R} es compacto:

$$X = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

En efecto, dado un cubrimiento abierto $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de X , existe un elemento U de $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ que contiene al 0. El conjunto U contiene a todos los puntos de la forma $1/n$ excepto a un número finito de ellos (esto es claro ya que $1/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$); elijamos para cada uno de estos puntos que no están U un elemento de $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ que los contenga. La colección de estos elementos de $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ junto con el propio U , es una subcolección finita de $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ que cubre X .

Otros ejemplos interesantes se pueden encontrar en [15]

Definición 1.20 (*Relativamente Compacto*) Se dice que un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es relativamente compacto si \overline{A} es compacto.

Dado que todo espacio vectorial normado es también un espacio métrico, la definición anterior también se tiene para espacios normados.

Ejemplo 1.7 Considere cualquier intervalo abierto de \mathbb{R} , (a, b) . Se puede demostrar fácilmente que (a, b) no es compacto, pero para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $\overline{(a, b)} = [a, b]$ es compacta.

Definición 1.21 (ε -Red) Un conjunto de puntos N de un espacio métrico (X, d) tal que para cada $x \in A$ existe un $y \in N$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, es llamado una ε -red con respecto al conjunto A .

Definición 1.22 Un conjunto A de un espacio métrico (X, d) es llamado totalmente acotado si para algún $\varepsilon > 0$ existe una ε -red finita con respecto al A .

Teorema 1.24 Sea A un subconjunto de un espacio métrico (X, d) . Si para cada sucesión de puntos de A existe una subsucesión convergente, entonces A es totalmente acotado. (ver[1], p.66)

Definición 1.23 (Numerablemente Compacto) Un conjunto A se llama numerablemente compacto si todo subconjunto infinito de A tiene un punto de acumulación en A .

Teorema 1.25 Todo espacio topológico compacto es numerablemente compacto.

Definición 1.24 (Secuencialmente Compacto) Sea (X, d) Un espacio métrico. Un subconjunto A se llama secuencialmente compacto si de toda sucesión de A se puede extraer una subsucesión convergente en A .

Definición 1.25 Sea A un subconjunto de un espacio vectorial normado X , se dice que A es relativamente secuencialmente compacto si cada sucesión en A tiene una subsucesión convergente en X .

Teorema 1.26 Un conjunto A de un espacio métrico (X, d) es secuencialmente compacto si y solo si es compacto.

Definición 1.26 Un espacio topológico X se dice localmente compacto, si cada $x \in X$, admite una base de vecindades compactas, es decir, dado $V \in \mathcal{U}_x$, existe $W \in \mathcal{U}_x$, W compacto tal que $W \subseteq V$.

Definición 1.27 Un espacio topológico X es llamado separable si existe un subconjunto A de X numerable y denso, esto es, $\overline{A} = X$.

Ejemplo 1.8 Considere el conjunto de los números reales con \mathbb{Q} como subconjunto de los reales. Como $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ y \mathbb{Q} es numerable, entonces \mathbb{R} es separable.

Ejemplo 1.9 El espacio l_p es separable para $1 \leq p < \infty$. En efecto, sea $W = \{a = (a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \in l_p : a_i \in \mathbb{Q} \text{ para cada } i = 1, \dots, n\} \subseteq l_p$, veamos que W es un subconjunto denso y numerable de l_p .

Sea $\varepsilon > 0$ y $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_p$. Entonces, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N+1}^{+\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}$ (puesto que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ converge). Ahora para cada $k = 1, 2, \dots, N$ existe

un racional a_k tal que $|x_k - a_k|^p < \frac{\varepsilon}{2^N}$ (puesto que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R}). Defina $a = (a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, \dots)$ entonces $a \in W$ y $\|x - a\|_{l_p}^p = \sum_{k=1}^N |x_k - a_k|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por tanto W es denso en l_p .

Para ver que W es numerable, defina $S_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) : a_i \in \mathbb{Q}\}$ observe que $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Ahora, S_n es numerable puesto que \mathbb{Q} es numerable, y existe una biyección de S_n en $\mathbb{Q}^n \times \{0\} \times \dots \times \{0\} \times \dots$

Ahora se mencionarán otras propiedades importantes que se pueden encontrar para subespacios compactos de un espacio topológico.

Teorema 1.27 *Cada subespacio cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.*

Proposición 1.2 *Cada subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado*

Teorema 1.28 (Tychonoff) *El producto de espacios topológicos compactos es compacto respecto a la topología producto.*

Teorema 1.29 *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Si X es compacto, entonces Y es compacto.*

De manera más general tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2 *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Si K es un subespacio compacto de X , entonces $f(K)$ es compacto.*

Proposición 1.3 *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Si X es compacto y Y es de Hausdorff, entonces f es cerrada.*

Proposición 1.4 *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y biyectiva entre espacios topológicos. Si X es compacto y Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

1.4. Operadores y sus adjuntos

Si X y Y son espacios lineales, $L(X, Y)$ denota el conjunto de las funciones lineales y continuas $T : X \rightarrow Y$.

Definición 1.28 *La topología uniforme de operadores en $L(X, Y)$ es la topología generada por la métrica en $L(X, Y)$ inducida por la norma*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

Definición 1.29 *La adjunta T^* de un operador lineal T en $L(X, Y)$ es la función de Y^* a X^* definida por $T^*(y)^* = y^* \circ T$.*

Lema 1.3 *La función $T \rightarrow T^*$ es un encaje isométrico de $L(X, Y)$ sobre $L(Y^*, X^*)$.*

Definición 1.30 *Sean $J(X)$ y $J(Y)$ las imágenes bajo la inyección canónica de X , Y sobre X^{**} y Y^{**} respectivamente. Para $T \in L(X, Y)$ definimos $\hat{T} \in L(J(X), J(Y))$ por la ecuación $\hat{T}(J(x)) = J(y)$, donde $y = T(x)$. Una función $R \in L(X^{**}, Y^{**})$ se dice que es extensión de T , si $R(J(x)) = \hat{T}(J(x))$ para cada $J(x) \in J(X)$.*

Lema 1.4 *Si T está en $L(X, Y)$, la segunda adjunta $T^{**} : X^{**} \rightarrow Y^{**}$ es una extensión de T . Si X es reflexivo entonces $T^{**} = T$.*

Teorema 1.30 *Un operador lineal T en $L(X, Y)$ tiene inversa acotada $T^{-1} : Y \rightarrow X$ si y solo si T^* tiene inversa acotada $(T^*)^{-1}$ definida en X^* . Cuando la inversa existe, entonces $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Las respectivas demostraciones y definiciones de la teoría anterior (Operadores y sus adjuntos) se puede encontrar en [6].

1.5. Redes

Necesitamos una noción válida de límite, o convergencia, en un espacio topológico general. Una elección fácil, desde nuestro punto de vista, es considerar la redes. El lector que no está familiarizado con las redes estaría bien servido al pensar en una red como una sucesión generalizada.

Comenzaremos con un conjunto dirigido I , es decir I está equipado con la relación binaria \leq que satisface:

1. $i \leq i$ para todo $i \in I$.
2. Si $i \leq j$ y $j \leq i$, entonces $i \leq j$.
3. Dado cualquier $i, j \in I$, existe algún $k \in I$ con $i \leq k$ y $j \leq k$.

Un ejemplo inmediato de un conjunto dirigido es \mathbb{N} con su orden usual; el conjunto de todos los conjuntos finitos de un conjunto fijo es un conjunto dirigido por la inclusión recíproca (es decir $A \leq B$ si $A \supseteq B$). De manera usual también escribimos $i \geq j$ para indicar que $j \leq i$. Ahora, una red en un conjunto X es una función $x : I \rightarrow X$ donde I es un conjunto dirigido. De este hecho podemos ver que una sucesión es una red con dominio en \mathbb{N} .

Generalmente, al igual que con las sucesiones, identificamos una red con su rango. En otras palabras, denotaríamos una red en X simplemente escribiendo $(x_i)_{i \in I}$ donde I es un conjunto dirigido y donde cada $x_i \in X$. Al definir la convergencia para redes, adaptamos la terminología que usamos para sucesiones. Por ejemplo, decimos que una red $(x_i)_{i \in I}$ está eventualmente en el conjunto A si para algún $j \in I$ tenemos que $\{x_i : i \geq j\} \subseteq A$ y decimos que $(x_i)_{i \in I}$ está frecuentemente en A si dado cualquier $i \in I$ existe algún $j \in I$ con $j \geq i$ tal que $x_j \in A$. Finalmente, una red $(x_i)_{i \in I}$ en un espacio topológico X converge al punto $x \in X$, si $(x_i)_{i \in I}$ está eventualmente en cada vecindad de x . Como con sucesiones, usamos la notación $x_i \rightarrow x$ en este caso.

Muchas propiedades topológicas se pueden caracterizar en términos de convergencia de redes. De hecho, las caracterizaciones secuenciales utilizadas en espacios métricos pueden típicamente ser traducidas directamente a este nuevo lenguaje de redes. Aquí tenemos un ejemplo fácil.

Teorema 1.31 *Un conjunto E de un espacio topológico X es cerrado si y solo si cada red $(x_i)_{i \in I}$ en E que converja en X converge hacia un punto de E .*

Demostración. Suponga que E es cerrado y sea $(x_i)_{i \in I}$ una red en E tal que $x_i \rightarrow x \in X$. Si $x \in E^c$, un conjunto abierto, entonces deberíamos tener (x_i)

eventualmente en E^c (esto es, para algún $j \in I$ tenemos que $\{x_i : i \geq j\} \subseteq E^c$) lo cual es imposible, entonces x debe estar necesariamente en E . Por otro lado, suponga que cada red convergente de E converge al punto en E . Ahora, sea $x \in E^c$ y suponga que para cada vecindad V de x hay algún punto $x_V \in V \cap E$. Si dirigimos las vecindades de x por inclusión reversa, entonces sólo hemos construido una red (x_V) en E que converge a un punto x que no está en E . Así, existe una vecindad V de x que está completamente contenida en E^c , es decir, E^c es abierto. Por tanto E es cerrado.

Corolario 1.3 *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $x_0 \in \bar{A}$ si y solo si existe una red $(x_i)_{i \in I}$ en A tal que $x_i \rightarrow x_0$.*

Corolario 1.4 *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $x_0 \in A^\circ$ si y solo si toda red $(x_i)_{i \in I}$ con $x_i \rightarrow x_0$ está eventualmente en A .*

Otro teorema que es fácil de verificar es el siguiente.

Teorema 1.32 *Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua en x si y solo si dada una red $(x_i)_{i \in I}$ en X con $x_i \rightarrow x$ se tiene que $f(x_i) \rightarrow f(x)$.*

Demostración. Suponga primero que f es continua. Sea (x_i) un red en X con $x_i \rightarrow x$ y V una vecindad de $f(x)$ en Y . Entonces $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x en X , entonces (x_i) está eventualmente en $f^{-1}(V)$. Por consiguiente, $f(x_i)$ está eventualmente en V , esto es, $f(x_i)$ converge a $f(x)$. Ahora suponga que $f(x_i) \rightarrow f(x)$ siempre que $x_i \rightarrow x$. Sea E un conjunto cerrado en Y , y $(x_i)_{i \in I}$ una red en $f^{-1}(E)$ que converge a $x \in X$. Entonces, $(f(x_i))_{i \in I}$ es una red en E que converge a $f(x)$ en Y . Como $f(x) \in E$ por el Teorema 1.31, entonces $x \in f^{-1}(E)$. Así, $f^{-1}(E)$ es cerrado y por tanto f es continua.

Definición 1.31 *Sean $(x_i)_{i \in I}$ una red en un espacio topológico X y $x \in X$. Diremos que x es un punto límite (punto cluster) de la red $(x_i)_{i \in I}$ si para toda vecindad V de x tenemos que (x_i) está frecuentemente en V .*

Al igual que como ocurre con las sucesiones, donde dada una sucesión podemos definir una subsucesión. De igual manera, para una red (x_i) podemos siempre definir un subconjunto $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ (J un conjunto dirigido) de (x_i) al que llamaremos subred. La siguiente definición nos ayudará a saber como escoger dichas subredes.

Definición 1.32 *Sea $(x_i)_{i \in I}$ una subred en X y J un conjunto dirigido. Diremos que la función $\varphi : J \rightarrow I$ es:*

1. *creciente, si siempre que $j_1 \leq j_2$ tenemos que $\varphi(j_1) \leq \varphi(j_2)$.*
2. *cofinal, si para todo $i \in I$, existe $j \in J$ tal que $\varphi(j) \geq i$.*

Una subred de la red $(x_i)_{i \in I}$, es una red $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$, donde J es un conjunto dirigido y $\varphi : J \rightarrow I$ es creciente y cofinal.

Nota 3. Una consecuencia inmediata de la definición es que; si $(x_i)_{i \in I}$ es una red tal que $x_i \rightarrow x$ para algún $x \in X$, entonces $x_{\varphi(j)} \rightarrow x$ para toda subred $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ de $(x_i)_{i \in I}$.

En la Sección 1.3 habíamos definido que son los conjunto compactos, además mostramos algunos resultados interesantes que se dan para los conjuntos compactos. Los siguientes teoremas serán de utilidad para la demostración de algunos teoremas del Capítulo 2.

Teorema 1.33 *Sea X un espacio topológico. Entonces, X es compacto si y solo si cada red en X tiene al menos un punto límite.*

Corolario 1.5 *Sea X un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *X es compacto;*
2. *Cada red en X tiene por lo menos un punto límite (punto cluster);*
3. *Cada red en X admite una subred convergente.*

Algunas demostraciones de estos resultados son un poco extensas para incluir en este capítulo, sin embargo el lector interesado puede consultar algunas de éstas en [6].

Topologías Débiles

Es conocido que los únicos espacios normados cuya bola cerrada unitaria es compacta en la topología de la norma son los espacios de dimensión finita. Esto expresado en términos de convergencia de sucesiones quiere decir que, para que toda sucesión acotada en un espacio normado tenga una subsucesión convergente, el espacio tiene que ser de dimensión finita.

Históricamente la necesidad de extraer subsucesiones convergentes de sucesiones acotadas condujo a la búsqueda de topologías más débiles con más conjuntos compactos y que siguieran respetando la estructura de espacio vectorial. Las dos topologías más importantes que surgieron de esta investigación, son las ahora conocidas como topología débil y la topología débil*, la primera en un espacio normado y la segunda en un espacio dual.

2.1. Topología débil

Lo normal es describir las funciones continuas en X después de que hemos definido una topología en X . Pero el procedimiento inverso también es muy común e incluso más útil. En otras palabras, dada una colección de funciones \mathfrak{F} de un conjunto X a un espacio topológico Y , podemos construir una topología en X bajo el cual cada elemento de \mathfrak{F} será continuo. Si X tiene la topología discreta, entonces cada función de X a Y es continua, mientras que, si a X le damos la topología trivial o indiscreta, entonces sólo funciones constantes son continuas.

Por lo general, queremos algo intermedio, de hecho, nos gustaría saber si hay

una topología más pequeña que hace cada elemento de \mathfrak{F} sea continuo. Como veremos la respuesta es sí, y se puede seguir fácilmente de un pequeño e importante Lema que muestra la construcción de topologías teniendo ciertos conjuntos abiertos predeterminados.

Antes, recuerde que una topología sobre un conjunto X es una familia τ de subconjuntos de X , cerrado bajo la formación de intersecciones finitas, uniones arbitrarias y conteniendo el conjunto \emptyset y el espacio total X .

Lema 2.1 (Lema de la subbase) *Suponga que X es un conjunto y que S es una colección de subconjuntos de X . Entonces, existe una topología más pequeña τ_ω sobre X conteniendo a S . Además, $S' = \{\emptyset, X\} \cup S$ forman una subbase para τ_ω . En otras palabras, los conjuntos de la forma $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m$ donde $S_i \in S'$ para $i = 1, \dots, m$ son una base para τ_ω .*

Demostración. Sea τ_1 la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a S (también a S'). Claramente τ_1 es la topología más pequeña. Por tanto, τ_1 también contiene la colección τ_2 que definimos como el conjunto de todas las uniones posibles de conjuntos de la forma $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m$ donde $m \geq 1$ y $S_i \in S'$ para $i = 1, \dots, m$. Debemos mostrar que $\tau_1 = \tau_2$.

Como τ_2 contiene a S , es suficiente demostrar que τ_2 es una topología sobre X . En efecto, basta probar que τ_2 es cerrado bajo intersecciones finitas (puesto que claramente \emptyset y X están en τ_2 , y además τ_2 es cerrado bajo las uniones arbitrarias por definición). Sean $U, V \in \tau_2$ y tomemos $x \in U \cap V$. Sean A_1, A_2, \dots, A_n y B_1, \dots, B_m elementos de S' tales que $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n \subset U$ y $x \in B_1 \cap \dots \cap B_m \subset V$. Entonces, $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n \cap B_1 \cap \dots \cap B_m \subset U \cap V$, es decir $U \cap V \in \tau_2$. Por tanto, τ_2 es una topología sobre X . \square

Nota 4. El lema anterior nos da la posibilidad de usar una colección cualquiera de conjuntos para definir una topología. Esta posibilidad nos permite utilizar un conjunto de funciones \mathfrak{F} de X sobre un espacio topológico Y para definir una topología en el conjunto X . Para ello, basta tomar

$$S = \{f^{-1}(\mathcal{V}) : f \in \mathfrak{F} \text{ y } \mathcal{V} \text{ es abierto en } Y\}. \quad (2.1)$$

Como cada elemento de S es abierto en la nueva topología τ_ω , entonces cada elemento de \mathfrak{F} es continuo en esta topología τ_ω . Esta topología la llamaremos la topología inducida por \mathfrak{F} . En realidad, no necesitamos la imagen inversa de cada conjunto abierto en Y , podríamos tomar fácilmente las imágenes inversas de una colección de conjuntos abiertos básicos, o incluso conjuntos abiertos subbásicos. En particular, si $Y = \mathbb{R}$ la colección de conjuntos

$$W(x; f_1, f_2, \dots, f_n; \varepsilon) = \{y \in X : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\} \quad (2.2)$$

donde $x \in X$, $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{F}$, $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ forman un sistema de vecindades básicas para la topología débil generada por \mathfrak{F} como se mostrará en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 *Sea X un conjunto y \mathfrak{F} una colección de funciones de X en \mathbb{R} . Los conjuntos de la forma (2.2) Forman una base de vecindades para la topología débil de X .*

Demostración. Sea G un abierto en la topología débil y $x \in G$. Por el Lema 2.1, existe un $n \in \mathbb{N}$ y abiertos $W_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, \dots, n$ tal que $x \in \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(W_i) \subseteq G$. Luego $f_i(x) \in W_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, dado que W_i es abierto en \mathbb{R} , existen $r_i > 0$ tal que $(f_i(x) - r_i, f_i(x) + r_i) \subseteq W_i$. Sea $r = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$, entonces $(f_i(x) - r, f_i(x) + r) \subseteq W_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ y por tanto $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(f_i(x) - r, f_i(x) + r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(W_i) \subseteq G$. Finalmente, afirmamos que $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(f_i(x) - r, f_i(x) + r) = W(x; f_1, f_2, \dots, f_n; r)$. En efecto, $y \in \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(f_i(x) - r, f_i(x) + r)$ si y sólo si $f_i(y) \in (f_i(x) - r, f_i(x) + r)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Por tanto $|f_i(y) - f_i(x)| < r$ para todo $i = 1, \dots, n$, es decir, $y \in W(x; f_1, f_2, \dots, f_n; r)$. \square

Observación 1. Vale la pena señalar que nuestra construcción de topologías débiles de ninguna manera requiere un espacio de rango fijo y, en particular, dada una colección de funciones $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ donde f_α mapea a X en un espacio topológico Y_α , podemos aplicar el Lema de subbase para encontrar la topología más pequeña sobre X bajo el que cada f_α es continua. De esta forma. Consideremos la topología generada por la colección

$$S = \{f_\alpha^{-1}(V_\alpha) : V_\alpha \text{ es abierto en } Y_\alpha \text{ para cada } \alpha \in A\}.$$

Observación 2. El lector debe notar que X puede ser un espacio topológico lineal normado, con nociones de subconjuntos abiertos, subconjuntos cerrados, funciones continuas, conjuntos limitados, compactos, entre otros. Estos conceptos deben ser distinguidos de los conceptos correspondientes de la topología débil, y para ello usaremos débilmente cerrado, débilmente compacto, débilmente continua, etc.

Ejemplo 2.1 Sea X un espacio vectorial normado, entonces X tiene una topología definida por su norma que frecuentemente referiremos como topología fuerte. Adicionalmente X tiene una topología débil generada por los funcionales lineales acotados sobre X , esto es, $\mathfrak{F} = X^* = \{\text{Funcionales lineales acotados de } X \text{ en } \mathbb{R}\}$, y por tanto hay conceptos de débilmente abierto y débilmente cerrado, y queremos relacionar estos conceptos con los de la topología fuerte. Observe que si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a $X^* = \mathfrak{F}$ entonces f es débilmente continuo y como la topología débil es la topología más pequeña en que cada elemento de \mathfrak{F} es continuo, entonces concluimos que la topología débil de X esta contenida en la topología fuerte de X .

Ahora, U es abierto en la topología débil de X (denotada por $\sigma(X, X^*)$) si y solo si para cada $x \in U$ existen $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tal que $W(x; f_1, \dots, f_n; \varepsilon) \subseteq U$.

Ejemplo 2.2 La topología producto (o topología de Tychonoff) es un ejemplo de una topología débil. Sean (X_α, τ_α) espacios topológicos para cada $\alpha \in \Lambda$, y defina $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es el producto cartesiano de los conjuntos X_α . Así, X es la colección de todas las funciones $x : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ tal que $x(\alpha) \in X_\alpha$. Usualmente escribimos x_α en lugar de $x(\alpha)$ y conjuntos $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$; también x_α es la componente α de x .

Sea $P_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ la proyección sobre X_α así $P_\alpha(x) = x_\alpha$. La topología producto sobre X es la topología débil generada por $\mathfrak{F} = \{P_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Así, un conjunto $V \subseteq X$ es abierto en la topología producto si y solo si para cada punto $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ existen índices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ y abiertos $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ (con $U_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i}$) tal que $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y $\bigcap_{i=1}^n P_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = \{f = (f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in X : f_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\} \subseteq V$. Así para garantizar que un punto $y = (y_\alpha)$ pertenece a una vecindad fija de $x = (x_\alpha)$ es suficiente exigir que para un número finito de índices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ cada y_{α_i} pertenezca a una vecindad de x_{α_i} .

Tenemos ahora la siguiente caracterización de la topología débil.

Teorema 2.2 *Sea Z un espacio topológico y X dotado de la topología débil generada por $\mathfrak{F} = \{f_i\}_{i \in I}$. Entonces una función $g : Z \rightarrow X$ es continua si y solo si $f_i \circ g$ es continua, para todo $i \in I$.*

Demostración. Si g es continua, entonces $f_i \circ g$ es continua, puesto que f_i es continua para cada $i \in I$.

Recíprocamente, sea U un abierto de X . Veamos que $g^{-1}(U)$ es un abierto de Z . Sea $x \in g^{-1}(U)$ entonces $g(x) \in U$. Como U es abierto de X , existen $J \subseteq I$ finito y U_j abiertos de X_j , $j \in J$ tales que $g(x) \in \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \subseteq U$. Defina $W = \bigcap_{j \in J} (f_j \circ g)^{-1}(U_j)$. Como $f_i \circ g$ es continua para todo $i \in I$, entonces W es abierto en Z y $x \in W$, además

$$W = \bigcap_{j \in J} (f_j \circ g)^{-1}(U_j) = g^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j)\right) \subseteq g^{-1}(U).$$

Y por tanto $g^{-1}(U)$ es abierto de Z , consecuentemente g es continua. \square

2.2. Propiedades de la topología débil

Teorema 2.3 *Sea X un espacio vectorial normado. Entonces la topología débil $\sigma(X, X^*)$, es Hausdorff.*

Demostración. En efecto, Sean $x_0, y_0 \in X$ con $x_0 \neq y_0$. Debemos encontrar dos abiertos W_1 y W_2 en la topología débil $\sigma(X, X^*)$ tal que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ y $x_0 \in W_1$ y $y_0 \in W_2$. Entonces, como $x_0 \neq y_0$, tenemos que $x_0 - y_0 \neq 0$ y por el teorema de Hahn-Banach existe $f \in X^*$ tal que $f(x_0 - y_0) \neq 0$, es decir, $fx_0 \neq fy_0$. Escojamos un $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < |fx_0 - fy_0|$ y consideremos los abiertos $W_1(x_0; f; \varepsilon/2)$ y $W_2(y_0; f; \varepsilon/2)$. Demostremos que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Suponga que existe un x en la intersección, entonces $|fx - fx_0| < \varepsilon/2$ y $|fx - fy_0| < \varepsilon/2$, luego,

$$\begin{aligned} |fx_0 - fy_0| &\leq |fx_0 - fx| + |fx - fy_0| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Lo que contradice la escogencia de ε . Así, $W_1(x_0; f; \varepsilon/2)$ y $W_2(y_0; f; \varepsilon/2)$ son abiertos disyuntos que contienen a x_0 e y_0 respectivamente. \square

Teorema 2.4 *Sea X un espacio vectorial normado y $Y \subseteq X$ un subespacio lineal cerrado. Entonces, la topología débil sobre Y (generada por el dual Y^*) es la restricción sobre $Y \subseteq X$ de la topología débil sobre X .*

Demostración. Sean $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ elementos de X^* y $\varepsilon > 0$. Para cada $k = 1, 2, \dots, n$ defina $y_k^* = x_k^* \circ i$ donde $i : Y \rightarrow X$ es la inclusión. Entonces, $y_k^* \in Y^*$ para todo $k = 1, \dots, n$. Además

$$\begin{aligned} W(0; y_1^*, \dots, y_n^*; \varepsilon) &= \{y \in Y : |y_k^*(y)| < \varepsilon \ k = 1, \dots, n\} \\ &= \{y \in Y : |x_k^*(y)| < \varepsilon, \ k = 1, \dots, n\} \\ &= Y \cap \{x \in X : |x_k^*(x)| < \varepsilon, \ k = 1, \dots, n\} \\ &= Y \cap W(0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon). \end{aligned}$$

Considere ahora $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$ y $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Hahn-Banach existen $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ elementos de X^* tal que $x_k^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una extensión de y_k^* para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego por lo anterior tenemos que

$$W(0; y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*; \varepsilon) = Y \cap W(0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$$

\square

Nota 5. Este resultado es también válido sin la hipótesis que X sea un espacio vectorial normado, para ello consideremos

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) : U_j \text{ es abierto, } J \subseteq I, \ J \text{ finito} \right\}. \quad (2.3)$$

Y note que si U es un abierto en la topología débil de X entonces $U \cap Y$ es abierto en la topología débil de Y . Basta notar que, si $U = \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j)$ entonces:

$$\begin{aligned} U \cap Y &= \left(\bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \right) \cap Y \\ &= \bigcap_{j \in J} (f_j^{-1}(U_j) \cap Y) \\ &= \bigcap_{j \in J} f_j|_Y^{-1}(U_j) \in \text{topología débil de } Y \end{aligned}$$

En símbolos $\sigma(X, X^*)|_Y = \sigma(Y, Y^*)$.

La topología débil es menos fina que la topología de la norma en los espacios de dimensión infinita, así, cada conjunto débilmente cerrado es también cerrado en norma. En el siguiente resultado afirmamos que para conjuntos convexos el recíproco es también verdadero.

Teorema 2.5 *Sea X un espacio vectorial normado y A un subconjunto convexo de X . Entonces, A es cerrado en la topología débil, $\sigma(X, X^*)$, si y solo si A es cerrado en la topología fuerte.*

Demostración. Supongamos que A es cerrado en la topología fuerte, y veamos que A es cerrado en la topología débil. Para ello verifiquemos que el complemento A^c de A es abierto en la topología débil. Sea $x_0 \notin A$. Por el teorema de Hahn-Banach existe un hiperplano cerrado que separa estrictamente a $\{x_0\}$ y A . Así, existe algún $f \in E^*$ y algún $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) < \alpha < f(y), \quad \forall y \in A.$$

Sea

$$V = \{x \in E : f(x) < \alpha\};$$

Así, $x_0 \in V$, $V \cap A = \emptyset$ (i.e., $V \subseteq A^c$) y V es un abierto de la topología débil. \square

Corolario 2.1 *Sea X un espacio vectorial normado. Un subconjunto convexo A de X es débilmente denso en X si y sólo si $A \subseteq X$ es fuertemente denso.*

Nota 6. Del Teorema 2.5 se sigue que si $A \subseteq X$ es convexo entonces la clausura en la topología débil es igual a la clausura en la topología fuerte. En particular, como la bola unitaria es convexa se sigue que $\overline{B_X^{\sigma(X, X^*)}} = \overline{B_X^{\|\cdot\|}} = B_X$.

Por otro lado, si $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa (es decir $\varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$ para todo $0 \leq t \leq 1$) y semi-continua inferiormente para la topología fuerte, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $E_\lambda = \{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\}$ es fuertemente cerrado y convexo, por tanto E_λ es débilmente cerrado. Como caso particular tenemos la función convexa $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = d(x, A)$ donde

A es un conjunto convexo. Entonces $E_\lambda = \{x \in X : d(x, A) \leq \lambda\}$ es un conjunto débilmente cerrado en X . En el caso de la esfera (que no es convexa) tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.6 *Si X es de dimensión infinita, entonces $\overline{S_X^{\sigma(X, X^*)}} = B_X$.*

Demostración. Como $S_X \subseteq B_X$ y B_X es un conjunto convexo y cerrado, entonces $\overline{S_X^{\sigma(X, X^*)}} \subseteq \overline{B_X^{\sigma(X, X^*)}} = \overline{B_X} = B_X$.

Demostremos ahora que $B_X \subseteq \overline{S_X^{\sigma(X, X^*)}}$. Sea $x_0 \in B_X$ con $\|x_0\| < 1$ y veamos que $x_0 \in \overline{S_X^{\sigma(X, X^*)}}$. Sea $\varepsilon > 0$ y $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ elementos de X^* . Debemos mostrar que $W(x_0; x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \cap S_X \neq \emptyset$. Dado que X es de dimensión infinita, existe un $z \in X - \{0\}$ tal que $x_i^*(z) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ (de lo contrario la función $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $Tx = (x_1^*(x), \dots, x_n^*(x))$ es un isomorfismo lineal sobre su imagen, así, $\dim X \leq n$, lo que contradice que X es de dimensión infinita).

Definamos $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = \|x_0 + tz\|$, para todo $t \geq 0$. Claramente, φ es continua y $\varphi(0) = \|x_0\| < 1$ y como $z \neq 0$ entonces $\|x_0 + tz\| \geq t\|z\| - \|x_0\|$. Observe que $t\|z\| - \|x_0\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y por tanto $\|x_0 + tz\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por el teorema del valor intermedio, existe un $t_0 \geq 0$ tal que $\|x_0 + t_0z\| = 1$. Defina $w = x_0 + t_0z$, entonces $\|w\| = 1$ y

$$x_i^*(w) - x_i^*(x_0) = x_i^*(x_0 + t_0z - x_0) = t_0x_i^*(z) = 0 < \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Por tanto $w \in W(x_0; x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \cap S_X$ y así, $W(x_0; x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \cap S_X \neq \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$. \square

Ahora demostraremos que aunque las topologías de la norma y débil son distintas; los conjuntos acotados coinciden con los débilmente acotados.

Definición 2.1 *Sea X un espacio vectorial normado y $A \subseteq X$. Se dice que A es débilmente acotado si para toda vecindad débil W de 0 existe un $\lambda > 0$ tal que $\lambda A \subseteq W$.*

Teorema 2.7 *Sea X un espacio vectorial normado y $A \subseteq X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

I) A es débilmente acotado.

II) $\sup_{x \in A} |x^*(x)| < \infty$ para todo $x^* \in X^*$ (Así, para cada funcional lineal x^* , $x^*(A)$ es un conjunto acotado en \mathbb{R}).

III) A es acotado (en la norma).

Demostración. Supongamos primero que A es débilmente acotado y probemos II). Sea $x^* \in X^*$ y $\lambda > 0$ tal que $\lambda A \subseteq W(0; x^*; 1) = \{x \in X : |x^*(x)| < 1\}$. Entonces, si $x \in A$, tenemos que $|x^*(\lambda x)| < 1$ y por tanto $|x^*(x)| < \frac{1}{\lambda}$. Así, $\sup_{x \in A} |x^*(x)| \leq \frac{1}{\lambda} < +\infty$ para todo $x^* \in X^*$.

Probemos ahora que II) implica I). Supongamos que para cada $x^* \in X^*$ se tiene que $\sup_{x \in A} |x^*(x)| = M_{x^*} < +\infty$. Sea V una vecindad débil de 0 y consideremos $W(0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \subseteq V$. Defina $\lambda = \frac{\varepsilon}{\max_{1 \leq i \leq n} M_{x_i^*} + 1}$ entonces, afirmamos que $\lambda A \subseteq W(0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$. En efecto, si $y \in A$, entonces para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$ tenemos

$$\begin{aligned} |x_i^*(\lambda y)| &= \lambda |x_i^*(y)| \\ &\leq \lambda \sup_{x \in A} |x_i^*(x)| \\ &\leq \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $\lambda y \in W(0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$. Así, $\lambda A \subseteq W(0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \subseteq V$.

Veamos que II) implica III). Como X^* es un espacio de Banach, podemos aplicar el principio de limitación uniforme a la familia de operadores $\{J(x) : x \in A\}$ donde J es la inyección canónica de X en X^{**} . Entonces, $\sup_{x \in A} \|x\| = \sup_{x \in A} \|Jx\| < +\infty$ si y sólo si

$$\sup_{x \in A} |\langle Jx, x^* \rangle| = \sup_{x \in A} |\langle x^*, x \rangle| < +\infty \text{ para todo } x^* \in X^*.$$

Por último, es claro que III) implica I) ya que toda vecindad débil de 0 es una vecindad fuerte de 0. □

Nota 7. Podemos decir que en espacios de dimensión infinita las vecindades débiles son bastante grandes, de hecho, las vecindades básicas de 0 son tales que

$$W(0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \supseteq \bigcap_{i=1}^n \ker x_i^*$$

y la intersección de los $\ker x_i^*$ es no nula y es un subespacio de dimensión infinita (ya que es el núcleo del operador $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x_1^*(x), \dots, x_n^*(x))$ y $\dim X = +\infty$)

y es un conjunto no acotado en la norma. Por tanto, las vecindades débiles no están contenidas en ninguna bola abierta y además contienen un subespacio de dimensión infinita. La topología débil tiene menos abiertos que la de la norma, pero a pesar de esto tienen los mismos funcionales débilmente continuos, para demostrarlo necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.2 *Sea X un espacio vectorial y f, f_1, \dots, f_n funcionales lineales sobre X . Entonces, f es una combinación lineal de f_1, \dots, f_n si y solo si $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$.*

Demostración. Suponga que f es combinación lineal de f_1, f_2, \dots, f_n y $x \in \bigcap_{i=1}^n \ker f_i$, entonces $f_i x = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Como f es combinación lineal de f_1, f_2, \dots, f_n existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$, como $f_i(x) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ entonces $f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$, entonces $x \in \ker f$. Por tanto $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$.

Recíprocamente, suponga que $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker f$. Demostremos por inducción matemática que f es combinación lineal sobre los f_i . Para $n = 1$, sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funcionales lineales tal que $\ker g \subseteq \ker f$, si $g(x) = 0$ para todo $x \in X$, entonces $\ker g = X$ y por tanto, $\ker f = X$. Luego $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. consecuentemente $f(x) = \alpha g(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y cualquier $x \in X$.

Ahora, supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) \neq 0$. Entonces, para todo $x \in X$, $x - x_0 \cdot \frac{g(x)}{g(x_0)} \in \ker g$, puesto que $g\left(x - x_0 \cdot \frac{g(x)}{g(x_0)}\right) = g(x) - g(x_0) \cdot \frac{g(x)}{g(x_0)} = g(x) - g(x) = 0$. Por hipótesis concluimos que $x - x_0 \cdot \frac{g(x)}{g(x_0)} \in \ker f$ y por tanto, $f\left(x - x_0 \cdot \frac{g(x)}{g(x_0)}\right) = 0$; esto es $f(x) - \frac{g(x)}{g(x_0)} \cdot f(x_0) = 0$. Así, $f(x) = g(x) \cdot \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \alpha g(x)$ para todo $x \in X$, donde $\alpha = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Supongamos ahora que lo anterior se cumple para $n = k$. Veamos que se cumple para $n = k + 1$. Como $\bigcap_{i=1}^{k+1} \ker f_i \subseteq \ker f$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^k \ker f_i|_{\ker f_{k+1}} \subseteq \ker f|_{\ker f_{k+1}}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción a $f_1|_{\ker f_{k+1}}, f_2|_{\ker f_{k+1}}, \dots, f_k|_{\ker f_{k+1}}$, obtenemos que $f|_{\ker f_{k+1}}$ es combinación lineal de $f_1|_{\ker f_{k+1}}, \dots, f_k|_{\ker f_{k+1}}$, es decir, que $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$ sobre $\ker f_{k+1}$. Entonces, si $x \in \ker f_{k+1}$ tenemos que $f x = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i x$,

esto es $\left(f - \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i\right)(x) = 0$. Lo cual implica que

$$\ker f_{k+1} \subseteq \ker \left(f - \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i\right).$$

Así, aplicando lo que sabemos para el caso de $n = 1$, tenemos que, existe $\alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$f - \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i = \alpha_{k+1} f_{k+1}.$$

esto es

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i f_i(x) \quad \forall x \in X.$$

Lo que completa la demostración. □

Teorema 2.8 *Sea X un espacio vectorial normado, entonces $x^* \in X^*$ si y solo si $x^* : (X, \sigma(X, X^*)) \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo (esto es continuo con la topología débil de X).*

Demostración. Sea X un espacio vectorial normado y suponga que $x^* \in X^*$, entonces $x^* : (X, \sigma(X, X^*)) \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo por la construcción de la topología débil (La menor topología en que cada funcional lineal es continuo).

Recíprocamente, suponga que $x^* : (X, \sigma(X, X^*)) \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo. Entonces, el conjunto $V = \{x \in X : |x^*(x)| < 1\}$ es una vecindad de 0 en la topología débil. Por tanto, existen $k \in \mathbb{N}$ y funcionales lineales acotados $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ en X^* y un $\varepsilon > 0$ tal que $W(0; x_1^*, \dots, x_k^*; \varepsilon) \subseteq V$. Así, si $x \in \bigcap_{i=1}^k \ker x_i^*$ entonces $x_i^*(x) = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. Luego, para todo λ , $x_i^*(\lambda x) = \lambda x_i^*(x) = 0$ y por tanto $\lambda x \in V$ esto es $|x^*(\lambda x)| < 1$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego, $|x^*(x)| < \frac{1}{|\lambda|}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, $x^*(x) = 0$, es decir $x \in \ker x^*$. Luego, $\bigcap_{i=1}^k \ker x_i^* \subseteq \ker x^*$. Por tanto, del Lema 2.2 x^* es combinación lineal de x_1^*, \dots, x_k^* . Luego $x^* \in X^*$. □

Nota 8. Del Teorema 2.8 concluimos que el dual de X con la topología débil es igual al dual de X con la topología fuerte. También concluimos que si $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^* \in X^*$ y $\varepsilon, \delta > 0$ son tales que

$$W(0; x_1^*, \dots, x_k^*; \varepsilon) \subseteq W(0; x^*; \delta).$$

Entonces x^* es combinación lineal de los $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$. Ahora ¿qué pasará con la continuidad débil de operadores entre espacios normados de dimensión infinita? Para ello tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2 Sean X e Y espacios vectoriales normados. Un operador $T : X \rightarrow Y$ es débilmente continuo, si es continuo con respecto a las topologías débil de X y de Y respectivamente.

Teorema 2.9 Sean X e Y espacios vectoriales normados y $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal. Entonces, T es continuo en la norma si y sólo si es débilmente continuo.

Demostración. Supongamos que T es continuo en la norma. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, y_1^*, \dots, y_k^* elementos de Y^* y definimos $x_i^* = y_i^* \circ T$ para $i = 1, \dots, k$. Luego $x_i^* \in X^*$ para toda $i = 1, 2, \dots, k$. Veamos que $T(W(x; x_1^*, \dots, x_k^*; \varepsilon)) \subseteq W(Tx; y_1^*, \dots, y_k^*; \varepsilon)$. Sea $b \in T(W(x; x_1^*, \dots, x_k^*; \varepsilon))$, entonces $b = Tz$ con $z \in W(x; x_1^*, \dots, x_k^*; \varepsilon)$. Luego

$$\begin{aligned} |y_i^*(b) - y_i^*(Tx)| &= |y_i^*(Tz) - y_i^*(Tx)| \\ &= |(y_i^* \circ T)(z) - (y_i^* \circ T)(x)| \\ &= |x_i^*z - x_i^*x| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Por tanto, $b \in W(Tx; y_1^*, \dots, y_k^*; \varepsilon)$. Luego T es débilmente continuo.

Recíprocamente, supongamos que T es débilmente continuo. Entonces por el Teorema 2.2 se sigue que para todo $y^* \in Y^*$, $y^* \circ T$ es débilmente continuo y por tanto, por el Teorema 2.8 $y^* \circ T \in X^*$. Además, si $x \in B_X$ entonces para todo $y^* \in Y^*$

$$|y^*(Tx)| = |(y^* \circ T)(x)| \leq \|y^* \circ T\|.$$

Así, $T(B_X)$ es débilmente acotado y por el Teorema 2.7 $T(B_X)$ es acotado en la norma. Por lo tanto T es continuo. \square

Finalizamos esta sección con el siguiente teorema.

Teorema 2.10 La topología débil y la topología fuerte sobre X coinciden si y sólo si X es de dimensión finita.

Demostración. Supongamos que X es de dimensión finita. Ya sabemos que la topología débil $\sigma(X, X^*)$ siempre tiene menos abiertos que la topología fuerte. Por lo tanto, necesitamos probar que dado un abierto en la topología fuerte también es un abierto en la topología débil, $\sigma(X, X^*)$. Sea $x_0 \in X$ y U una vecindad de x_0 en la topología fuerte. Debemos encontrar un subconjunto finito $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tales que $W(x_0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \subseteq U$.

Como U es una vecindad de x_0 existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq U$. Consideremos una base de X dada por $\{e_1, \dots, e_n\}$ con $\|e_i\| = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Definamos los funcionales $x_i^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $x_i^*(x) = \alpha_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, para cada $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base, x_i^* es bien definida y lineal para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Como X es de dimensión finita, $x_i^* \in X^*$. Si para cada $1 \leq i \leq n$, $x \in W(x_0; x_1^*, \dots, x_n^*; r/n)$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i^*(x - x_0) e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i^*(x - x_0)| \|e_i\| \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{r}{n} = r. \end{aligned}$$

Es decir, $W(x_0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \subseteq U$.

Recíprocamente, Supongamos que X es de dimensión infinita y mostremos que las topologías débil y fuerte no coinciden. Para ello, consideremos el conjunto $B_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ que es un abierto en la topología de la norma, mostremos que el interior del conjunto B_X en la topología débil es vacío y por tanto no es abierto en la topología débil. Supongamos que existe x_0 un punto interior de B_X en la topología débil, entonces existe un $\varepsilon > 0$ y x_1^*, \dots, x_n^* elementos de X^* tal que $W(x_0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \subseteq B_X$. Como X es de dimensión infinita existe $y_0 \in X$, $y_0 \neq 0$ tal que $x_i^*(y_0) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Luego, la recta $x_0 + ty_0$ está en $W(x_0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y por tanto pertenece a B_X , es decir, $\|x_0 + ty_0\| < 1$ para todo t , pero $\|x_0 + ty_0\| \geq |t| \cdot \|y_0\| - \|x_0\| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. lo que es un absurdo. \square

Nota 9. Los conjuntos abiertos (o cerrados) en la topología débil son siempre abiertos (o cerrados) en la topología fuerte. Del Teorema 2.10 se sigue que en cualquier espacio de dimensión infinita, la topología débil es estrictamente menos fina que la topología fuerte; es decir, existen conjuntos abiertos como $B(0, 1)$ en la topología fuerte que no son abiertos en la topología débil y cerrados como S_X en la topología fuerte que no son cerrados en la topología débil (ver Teorema 2.6).

2.3. Convergencia débil.

En esta sección estamos interesados en estudiar propiedades básicas de la convergencia débil incluyendo la comparación entre las nociones de convergencia fuerte (o en la norma) con la de convergencia débil.

Definición 2.3 Sean (X, τ) un espacio topológico, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x_0 \in X$. Decimos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_0 si para todo $W \in \tau$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in W$, para todo $n \geq n_0$.

Teorema 2.11 Sea X un espacio vectorial normado y τ_ω la topología débil generada por $\mathfrak{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ y (x_n) una sucesión en X . Entonces, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x si y solo si $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ para cada $i \in I$.

Demostración. Claramente, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x entonces $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ para todo $i \in I$ ya que cada f_i es continua en la topología débil. Recíprocamente, sea U una vecindad débil de x , supongamos que para todo $i \in I$, $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$. Como U es abierto débil y $x \in U$, existen $\varepsilon > 0$ y f_1, \dots, f_k elementos de \mathfrak{F} tal que $\bigcap_{j=1}^k f_j^{-1}(V_j) \subseteq U$ y $x \in \bigcap_{j=1}^k f_j^{-1}(V_j)$. Como $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$ para cada $i \in I$, entonces para cada $j = 1, \dots, k$, existe un entero N_j tal que $f_j(x_n) \in V_j$ para $n \geq N_j$. Entonces, tomando $N = \max_{1 \leq j \leq k} N_j$, tenemos que $x_n \in f_j^{-1}(V_j)$ para $n \geq N$ y $j = 1, \dots, k$. Así, $x_n \in U$ para cada $n \geq N$. Por tanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x .

Nota 10. Cuando una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x en la topología débil de X generada por $\mathfrak{F} = X^*$ entonces escribimos $x_n \xrightarrow{\omega} x$ (o también $x_n \rightharpoonup x$). La

convergencia en la topología de la norma la escribiremos $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ y diremos convergencia fuerte.

Observe que al igual que en sucesiones una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ converge débilmente a x escrito $x_\alpha \xrightarrow{\omega} x$, si y solo si $f_i(x_\alpha) \rightarrow f_i(x)$ para todo funcional $f \in X^*$.

Antes de ilustrar algunos ejemplos, vamos a demostrar algunas propiedades básicas de la convergencia débil.

1. El límite débil (si existe) es único. En efecto, suponga que $x_n \xrightarrow{\omega} x$ y $x_n \xrightarrow{\omega} y$. Entonces, para cada funcional $f \in X^*$, tenemos que $fx_n \rightarrow fx$ y $fx_n \rightarrow fy$ en \mathbb{R} . Como \mathbb{R} es de Hausdorff entonces $fx = fy$ y por tanto $f(x - y) = 0$ para todo $f \in X^*$. Así,

$$\|x - y\| = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in X^*}} |f(x - y)| = 0.$$

Luego $x = y$.

2. Sea X un espacio vectorial normado y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en X tal que $x_n \xrightarrow{\omega} x$, $y_n \xrightarrow{\omega} y$. Entonces, $x_n + y_n \xrightarrow{\omega} x + y$ y $\alpha x_n \xrightarrow{\omega} \alpha x$ para cada escalar α .
3. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x_n \rightarrow x$ en norma, entonces $x_n \xrightarrow{\omega} x$.

En efecto, sea $f \in X^* - \{0\}$ y $\varepsilon > 0$. Como $x_n \rightarrow x$ en norma, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq n_0$ entonces

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_{X^*}}.$$

Luego, si $n \geq n_0$ tenemos

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &= |f(x_n - x)| \\ &\leq \|f\| \cdot \|x_n - x\| \\ &\leq \|f\| \frac{\varepsilon}{\|f\|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_n \xrightarrow{\omega} x$

4. Si $x_n \xrightarrow{\omega} x$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado (en norma).

En efecto, para cada $f \in X^*$ se tiene que $fx_n \rightarrow fx$ entonces el conjunto $(f(x_n))_{n \geq 1}$ es acotado para todo $f \in X^*$. Así, el conjunto $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es débilmente acotado y por el Teorema 2.7 concluimos que A es acotado en la norma. Así, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado.

5. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en X tal que $x_n \xrightarrow{\omega} x$ y $f_n \rightarrow f$ en norma. Entonces, $f_n x_n \rightarrow fx$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \xrightarrow{\omega} x$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $|fx_n - fx| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Además, $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, entonces existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2M}$ para todo $n \geq n_1$.

Luego, para todo $n > N = \max\{n_0, n_1\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \|f_n - f\| \cdot \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2M} M + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \end{aligned}$$

Así, $f_n(x_n)$ converge a $f(x)$.

Teorema 2.12 *Si X es un espacio vectorial normado, de dimensión finita. la convergencia fuerte es equivalente a la convergencia débil.*

Demostración. Ya hemos demostrado que en cualquier espacio normado X la convergencia fuerte implica convergencia débil. Nos resta probar que en un espacio vectorial de dimensión finita, la convergencia débil implica convergencia fuerte.

Para esto, supongamos $\{e_1, \dots, e_k\}$ es una base para X y que $x_n \xrightarrow{\omega} x$, donde

$$x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \dots + \alpha_k^{(n)} e_k \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

y $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k$. Ahora, consideremos los funcionales lineales $f_i \in X^*$, ($i = 1, \dots, k$) definidos por $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ donde δ_{ij} es el delta de Kronecker. Como $x_n \xrightarrow{\omega} x$,

entonces, para $i = 1, \dots, k$ $f_i(x_n) \rightarrow f_i(x)$. Aplicando la definición de f_i tenemos que $f_i(x_n) = \alpha_i^{(n)}$ y $f_i(x) = \alpha_i$, luego

$$\alpha_i^{(n)} \rightarrow \alpha_i \text{ para } i = 1, \dots, k.$$

Defina $M = \max_i \|e_i\|$. Sea $\varepsilon > 0$, como $\alpha_i^{(n)} \rightarrow \alpha_i$ para $i = 1, \dots, k$. Debe existir un entero N tal que para todo $n \geq N$ y cada $i = 1, \dots, k$ tenemos $|\alpha_i^{(n)} - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{Mk}$. Por tanto

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \left\| \sum_{i=1}^k (\alpha_i^{(n)} - \alpha_i) e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i^{(n)} - \alpha_i| \|e_i\| \\ &< \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon}{Mk} M = \frac{\varepsilon}{k} k = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así x_n converge fuertemente a x . □

Teorema 2.13 (Mazur) *Suponga que X es un espacio de Banach y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge débilmente a $x \in X$. Entonces, existe una sucesión $\{y_i\}$ en X tal que*

I) *cada y_i es una combinación convexa de un número finito de los x_n .*

II) *$y_i \rightarrow x$ en norma.*

Demostración. En efecto. Sea H la envolvente convexa de los $(x_n)_{n \geq 1}$ y K la clausura débil de H . Entonces H es convexo y $x \in K$. Por el Teorema 2.5 x está en la clausura fuerte de H y por tanto existe una sucesión y_i en H tal que $y_i \rightarrow x$ en norma.

Veamos ahora algunos ejemplos de convergencia débil en algunos espacios de Banach conocidos.

Ejemplo 2.3 (Convergencia débil no implica convergencia fuerte). Considere el espacio de Hilbert $X = L_2[0, 2\pi]$ compuesto por las funciones reales Lebesgue integrables de 0 a 2π , y para el cual $X^* = (L_2[0, 2\pi])^* = L_2[0, 2\pi] = X$. Por el teorema de representación de Riesz, para cada $f \in X^*$ existe $g \in X$ tal que para cada $x \in X$

$$f(x) = \langle x, g \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)g(t)dt.$$

Consideremos ahora la sucesión de elementos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X por $x_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi}$ para $n = 1, 2, \dots$. Demostremos que x_n converge débilmente a cero, pero $x_n \not\rightarrow 0$ en norma.

Sea $f \in X^*$ y g como se mencionó anteriormente, tenemos que

$$f(x_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin nt)g(t)dt.$$

Por el lema Riemann-Lebesgue, tenemos que

$$f(x_n) \rightarrow 0 \text{ para todo } f \in X^*.$$

Por tanto x_n converge débilmente a cero.

Por otra parte, para mostrar que $x_n \not\rightarrow 0$ consideremos

$$\|x_n - 0\|^2 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 nt)dt = \frac{1}{\pi}$$

para todo n . Por tanto, $x_n \not\rightarrow 0$ en norma.

Ejemplo 2.4 Consideremos $E = l_p$ con $1 < p < \infty$ y sea $e_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0, \dots)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1, \dots)$, ... una sucesión en l_p . Para cada $z = (z_n) \in l_q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^q$ converge y por lo tanto $z_n \rightarrow 0$. Ahora, por el teorema de representación de Riesz, dado $\varphi \in (l_p)^*$ existe un $z \in l_q$ tal que $\langle \varphi, e_n \rangle = \langle z, e_n \rangle = z_n \rightarrow 0$. Entonces $e_n \rightarrow 0$ débilmente, pero $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge en norma a cero.

Ejemplo 2.5 (convergencia débil en c_0) Sea $x \in c_0$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de c_0 . Entonces, x_n converge débilmente a x si y sólo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado en la norma de c_0 y $P_k(x_n) \rightarrow P_k(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Donde $P_k : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección canónica ($P_k((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \alpha_k$).

Solución. Como $x_n \rightarrow x$ si y solo si $x_n - x$ converge débilmente a cero, basta demostrar la equivalencia para $x = 0$.

En efecto, si $x_n \rightarrow 0$ débilmente, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, además, P_k es lineal y continua para cada $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $P_k(x_n) \rightarrow P_k(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, supongamos que el conjunto $\{\|x_n\| \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es acotado y que $P_k(x_n) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo ($\varphi \in c_0^* = l_1$). Entonces, existe una sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $l_1 = c_0^*$ tal que

$$\varphi((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n$$

para todo $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$.

Sea $\varepsilon > 0$, Como $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_1$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$ y por tanto existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} |\lambda_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{donde } M = 1 + \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|.$$

Por otra parte, como $P_1(x_n) \rightarrow 0$, $P_2(x_n) \rightarrow 0$, ..., $P_{n_\varepsilon}(x_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tenemos que

$$|P_1(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+L)}; |P_2(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+L)}; \dots; |P_{n_\varepsilon}(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+L)},$$

donde $L = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |\lambda_k|$. Así, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k(x_n) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k P_k(x_n)| = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| |P_k(x_n)| \\ &= \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |\lambda_k| |P_k(x_n)| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |\lambda_k| |P_k(x_n)| \\ &\leq L \frac{\varepsilon}{2(1+L)} + \frac{\varepsilon}{2M} M \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, $\varphi(x_n) \rightarrow 0$ para todo $\varphi \in c_0^*$, esto es $x_n \rightarrow 0$ débilmente.

Ejemplo 2.6 (Convergencia Débil en l_p con $1 < p < \infty$) Sea $x \in l_p$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Una sucesión de elementos de l_p . Entonces, $x_n \rightarrow x$ débilmente si y solo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado en la norma de l_p y $P_k(x_n) \rightarrow P_k(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $P_k : l_p \rightarrow \mathbb{R}$ son las proyecciones canónicas.

Solución. Al igual que para el caso de c_0 podemos suponer que $x = 0$. Usemos el hecho que para $1 < p < \infty$ $l_p^* = l_q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Como toda sucesión débilmente

convergente es acotada y $P_k : l_p \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y continua, tenemos que $P_k(x_n) \rightarrow 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, supongamos que $\{\|x_n\|_p : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado y que $P_k(x_n) \rightarrow 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Sea $\varphi \in l_p^*$, entonces existe una sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en l_q tal que $\varphi((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n$ para todo $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en l_p . Sea $\varepsilon > 0$, ya que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_q$ existe un n_ε tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q \right)^{1/q} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{donde } M = 1 + \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|.$$

Como $P_1(x_n) \rightarrow 0, P_2(x_n) \rightarrow 0, \dots, P_{n_\varepsilon}(x_n) \rightarrow 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|P_1(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2L}; \quad |P_2(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2L}; \quad \dots; \quad |P_{n_\varepsilon}(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{2L},$$

para todo $n \geq n_0$, donde $L = 1 + \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} |\lambda_n|$. Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n)| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k(x_n) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\lambda_k P_k(x_n)\| \\ &= \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |\lambda_k| |P_k(x_n)| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |\lambda_k| |P_k(x_n)|. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder en la segunda sumatoria obtenemos.

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n)| &\leq \left(\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |\lambda_k| \right) \frac{\varepsilon}{2L} + \left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |\lambda_k|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |P_k(x_n)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \|x_n\|_p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, $\varphi(x_n) \rightarrow 0$ para todo $\varphi \in l_p^*$; luego $x_n \rightarrow 0$ débilmente.

Teorema 2.14 (Convergencia débil en $C(X)$) Sea X un espacio de Hausdorff compacto y $f \in C(X)$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X)$. Entonces, $f_n \rightharpoonup f$ débilmente si y solo si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$ y $f_n(t) \rightarrow f(t)$ para todo $t \in X$.

Demostración. Supongamos que $f_n \rightharpoonup f$ débilmente, entonces $(f_n)_{n \geq 1}$ es acotado en $C(X)$ y por tanto $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$. Para cada $t \in X$ consideremos el funcional de Dirac $\delta_t(f) = f(t)$ para toda $f \in C(X)$. Entonces, $\delta_t \in C(X)^*$ para toda $t \in X$. Así, por la convergencia débil tenemos que $\delta_t(f_n) \rightarrow \delta_t(f)$ para toda $t \in X$. Luego $f_n(t) \rightarrow f(t)$ para toda $t \in X$.

Recíprocamente, supongamos que $f_n(t) \rightarrow f(t)$ para toda $t \in X$ y que $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$. Sea $\varphi \in C(X)^*$. Por el teorema de representación de Riesz, tenemos que existe una única medida regular de Borel Finita μ sobre X tal que $\varphi(f) = \int_X f d\mu$ para toda f en $C(X)$. Como $f_n(t) \rightarrow f(t)$ para toda $t \in X$ (esto es f_n converge puntualmente a f), entonces (f_n) es acotado, así $|f_n(t)| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $t \in X$ y $|\mu|(X) < \infty$. Por el teorema de convergencia dominada obtenemos que f es integrable sobre X , y

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Es decir, $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f)$ para todo $\varphi \in C(X)^*$. Luego $f_n \rightharpoonup f$ débilmente.

Nota 11. Observe que por el teorema de Mazur, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en $C(X)$ tal que $|f_n(x)| < 1$ para todo $x \in X$ y $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in X$. Entonces, existe una combinación lineal convexa de los f_n que converge uniformemente a f .

Para los siguientes ejemplos necesitamos el siguiente teorema.

Teorema 2.15 *Sea X un espacio vectorial normado, $x \in X$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, entonces, $x_n \rightharpoonup x$ débilmente si y solo si la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y existe un subconjunto fundamental $Y \subseteq X^*$ ($\overline{\text{Span} Y} = X^*$) tal que $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ para todo $x^* \in Y$.*

Demostración. Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado y tome $Y = X^*$.

Recíprocamente, suponga que existe un $M > 0$ y $Y \subseteq X^*$ con $\overline{\text{Span} Y} = X^*$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ para todo $x^* \in Y$. Denotemos por $Z = \text{Span} Y$ entonces $Z \subseteq X^*$, $\overline{Z} = X^*$ y $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ para todo $x^* \in Z$.

Considere $x^* \in X^*$. Como $\overline{Z} = X^*$ encontramos una sucesión $(z_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Z$ tal que $z_n^* \rightarrow x^*$ en X^* . Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|z_n^* - x^*\| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_\varepsilon$. Pero $z_{n_\varepsilon}^* \in Z$, así $z_{n_\varepsilon}^*(x_n) \rightarrow z_{n_\varepsilon}^*(x)$ y por tanto hay un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|z_{n_\varepsilon}^*(x_n) - z_{n_\varepsilon}^*(x)| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N_\varepsilon$. Entonces, para $n \geq N_\varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} |x^*(x_n) - x^*(x)| &\leq |x^*(x_n) - z_{n_\varepsilon}^*(x_n)| + |z_{n_\varepsilon}^*(x_n) - z_{n_\varepsilon}^*(x)| + |z_{n_\varepsilon}^*(x) - x^*(x)| \\ &\leq \|x^* - z_{n_\varepsilon}^*\| \cdot \|x_n\| + \varepsilon + \|x^* - z_{n_\varepsilon}^*\| \cdot \|x\| \\ &\leq \varepsilon(2M + 1). \end{aligned}$$

Y por tanto $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ obtenemos de esto que $x_n \rightarrow x$ débilmente. \square

El teorema anterior es válido si cambiamos el conjunto fundamental por un conjunto denso.

Corolario 2.2 *Una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ de un espacio lineal normado X converge débilmente a un elemento $x \in X$ si y solo si la sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ es acotada y $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ para cada f en un subconjunto denso D de X^* .*

Ejemplo 2.7 (Convergencia débil en un espacio de Hilbert) Sea H un espacio de Hilbert y $E \subseteq H$ una base ortonormal de H ; $x \in H$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en H . Entonces, $x_n \rightarrow x$ débilmente si y sólo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es limitado y $\langle x_n, a \rangle \rightarrow \langle x, a \rangle$ para todo $a \in H$.

Solución. Si $x_n \rightarrow x$ débilmente, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado. Además, para todo $a \in H$ defina $f_a \in H^*$ por $f_a(x) = \langle x, a \rangle$. Entonces $f_a(x_n) \rightarrow f_a(x)$ para todo $a \in H$. Esto es $\langle x_n, a \rangle \rightarrow \langle x, a \rangle$ para todo $a \in H$.

Recíprocamente, dado que E es ortonormal entonces E es fundamental en H , luego, del Teorema 2.15 tenemos que $\langle x_n, a \rangle \rightarrow \langle x, a \rangle$ para toda $a \in H$. Por el teorema de representación de Riesz concluimos que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ para todo $f \in H^*$, esto es $x_n \rightarrow x$ débilmente.

Ejemplo 2.8 (Convergencia débil en $L_1[0, 1]$) Sea $f \in L_1[0, 1]$ y $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L_1[0, 1]$. Entonces, $f_n \rightarrow f$ débilmente, si y solo si existe un $M > 0$ tal que

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y}$$

$$\int_E f_n(t)dt \rightarrow \int_E f(t)dt$$

para todo $E \subseteq [0, 1]$ medible Lebesgue.

Solución. Supongamos que $f_n \rightarrow f$ débilmente en $L_1[0, 1]$. Entonces, la sucesión $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L_1[0, 1]$ es acotada, es decir, existe un $M > 0$ tal que $\int_0^1 |f_n(t)|dt \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como $L_1^*[0, 1] = L_\infty[0, 1]$ y dado que la función característica \mathcal{X}_E pertenece a $L_\infty[0, 1]$ para todo $E \subseteq [0, 1]$ medible Lebesgue, obtenemos que $\mathcal{X}_E(f_n) \rightarrow \mathcal{X}_E(f)$. Así,

$$\int_0^1 \mathcal{X}_E(t)f_n(t)dt \rightarrow \int_0^1 \mathcal{X}_E(t)f(t)dt,$$

esto es,

$$\int_E f_n(t)dt \rightarrow \int_E f(t)dt \text{ para todo } E \subseteq [0, 1] \text{ medible Lebesgue.}$$

Recíprocamente, supongamos que la sucesión $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L_1[0, 1]$ es acotada y $\int_E f_n(t)dt \rightarrow \int_E f(t)dt$ para todo $E \subseteq [0, 1]$ medible Lebesgue. Entonces, para toda función paso $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(t)f_n(t)dt = \int_0^1 g(t)f(t)dt.$$

Demostremos que el conjunto de las funciones paso es denso en $L_\infty[0, 1]$ y por el Teorema 2.15 concluimos que $f_n \rightarrow f$ débilmente.

Sea $h \in L_\infty[0, 1]$ y supongamos que $h(t) \in \mathbb{R}$ para todo $t \in [0, 1]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que hay un $k > 0$ tal que $-k < h(t) < k$ para todo $t \in [0, 1]$. Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2k}{n} \leq \varepsilon$. Para $i = 1, 2, \dots, n$ sea

$$E_i = \left\{ t \in [0, 1] : -k + \frac{2k}{n}(i-1) \leq h(t) < -k + \frac{2k}{n}i \right\}$$

Como h es medible obtenemos que $E_i \subseteq [0, 1]$ es medible Lebesgue. Sea $t_i \in E_i$, $i = 1, \dots, n$ y defina $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g = \sum_{i=1}^n h(t_i)\mathcal{X}_{E_i}$. Para cada $t \in [0, 1]$ existe un i tal que $t \in E_i$. Entonces $|g(t) - h(t)| = |h(t_i) - h(t)|$, supongamos por ejemplo

que $h(t_i) \geq h(t)$ y entonces

$$\begin{aligned} |g(t) - h(t)| &= h(t_i) - h(t) \\ &\leq -k + \frac{2k}{n}i + k - \frac{2k}{n}(i-1) \\ &= \frac{2k}{n} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Obtenemos que $\|g - h\|_\infty \leq \varepsilon$ donde g es una función paso. Finalmente, si $h = u + iv$ con $u, v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|u - u_1\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y $\|v - v_1\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ entonces para $h_1 = u_1 + iv_1$ tenemos $\|h - h_1\|_\infty \leq \varepsilon$ y h_1 es la función paso.

De lo anterior tenemos que el conjunto de las funciones paso forma un conjunto denso en $L_\infty[0, 1]$. Por tanto, del Teorema 2.15 tenemos que $f_n \rightarrow f$ débilmente.

Ejemplo 2.9 (Convergencia débil en $L_p[0, 1]$) Sea $f \in L_p[0, 1]$ y $(f_n)_{n \geq 1} \subseteq L_p[0, 1]$. Entonces, $f_n \rightarrow f$ débilmente, si y sólo si

$$\int_0^x f_n(t) dt \rightarrow \int_0^x f(t) dt \text{ para todo } x \in [0, 1]$$

y existe un $M > 0$ tal que

$$\int_0^1 |f_n(t)|^p dt \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución. Si $f_n \rightarrow f$ débilmente en $L_p[0, 1]$ obtenemos que la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ es acotada, es decir, existe un $M > 0$ tal que $\int_0^1 |f_n(t)|^p dt \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(L_p[0, 1])^* = L_q[0, 1]$, $1 < q < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $\mathcal{X}_{[0, x]} \subseteq L_q[0, 1]$ para toda $x \in [0, 1]$ obtenemos que $\mathcal{X}_{[0, x]}(f_n) \rightarrow \mathcal{X}_{[0, x]}(f)$ para toda $x \in [0, 1]$ es decir

$$\int_0^x f_n(t) dt \rightarrow \int_0^x f(t) dt \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Suponga ahora que

$$\int_0^x f_n(t) dt \rightarrow \int_0^x f(t) dt \text{ para todo } x \in [0, 1]$$

y que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado en norma. Para cada $0 \leq x < y \leq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^y f_n(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^y f_n(t) dt - \int_0^x f_n(t) dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^y f_n(t) dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt \\ &= \int_0^y f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_x^y f(t) dt. \end{aligned}$$

Obtenemos que para cada $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{[a_i, b_i]}$ tenemos

$$\int_0^1 f_n(t)g(t)dt \rightarrow \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Vamos a considerar $X \subset L_q[0, 1]$ como siendo el conjunto de todas las funciones con la forma de g , obtenemos $g(f_n) \rightarrow g(f)$ para toda $g \in X$. De manera similar al ejemplo anterior tenemos que el conjunto $X \subset L_q[0, 1]$ es denso. Y por el Teorema 2.15 tenemos que $f_n \rightarrow f$ débilmente.

2.4. Topología débil*

Sea X un espacio vectorial normado. Vamos a resaltar ahora la topología débil* sobre un espacio dual X^* . Sea $J : X \rightarrow X^{**}$ la isometría natural de un espacio de Banach en su segundo dual, dada por $J(x)x^* = x^*(x)$. Como es usual identificamos X con $J(X) \subseteq X^{**}$. La topología débil* sobre X^* (denotada por $\sigma(X^*, X)$) es la topología inducida sobre X^* por X es decir, es la topología más débil sobre X^* que hace todos los funcionales en $J(X) \subseteq X^{**}$ continuos. En términos anteriores es la topología más débil sobre X^* generada por $\mathfrak{F} = JX$.

Definición 2.4 *Un conjunto $U \subseteq X^*$ es abierto en la topología débil* (diremos débil* abierto) si para cada $g \in U$ existen x_1, x_2, \dots, x_n en X y un $\varepsilon > 0$ tal que $W(g; x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon) = \{f \in X^* : |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \dots, n\} \subseteq U$.*

Teorema 2.16 *La topología débil* es Hausdorff.*

Demostración. Sean f_1, f_2 elementos de X^* con $f_1 \neq f_2$. Entonces existe un $x \in X$ tal que $f_1(x) \neq f_2(x)$. Suponga por ejemplo que $f_1(x) < f_2(x)$, y tome $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) < \alpha < f_2(x)$. Note que

$$\begin{aligned} W_1 &= \{f \in X^* : f(x) < \alpha\} \\ &= \{f \in X^* : J(x)f < \alpha\} \\ &= J(x)^{-1}((-\infty, \alpha)) \end{aligned}$$

es abierto en la topología débil* y

$$\begin{aligned} W_2 &= \{f \in X^* : f(x) > \alpha\} \\ &= \{f \in X^* : J(x)f > \alpha\} \\ &= J(x)^{-1}((\alpha, +\infty)) \end{aligned}$$

es abierto en la topología débil*. Además, $f_1 \in W_1$, $f_2 \in W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Luego la topología débil* es Hausdorff. \square

Nota 12. Sea X un espacio vectorial normado. Sobre X^* tenemos además de la topología débil estrella, $\sigma(X^*, X)$, la topología débil generada por $\sigma(X^*, X^{**})$. Así, si denotamos por z los elementos de X^* y tomando la notación $\langle \xi, z \rangle$ en lugar de $\xi(z)$ para indicar la acción de $\xi \in X^{**}$ sobre $z \in X^*$ podemos indicar las vecindades de 0 para $\sigma(X^*, X^{**})$ que son conjuntos de la forma $W(0; f_1, \dots, f_n; \varepsilon) = \{z \in X^* : |\langle f_1, z \rangle| < \varepsilon, \dots, |\langle f_n, z \rangle| < \varepsilon\}$ para $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Una sucesión de elementos $(z_n)_{n \geq 1}$ converge débilmente a un elemento z_0 en $\sigma(X^*, X^{**})$ si y sólo si para todo $f \in X^{**}$ $\langle f, z_n \rangle \rightarrow \langle f, z_0 \rangle$.

Finalmente, una sucesión de elementos $(f_n)_{n \geq 1}$ en X^* converge a f en la topología débil* si y sólo si para todo $x \in X$, $J(x)f_n \rightarrow J(x)f$, esto es $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in X$.

Una red $(f_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq X^*$ converge débil* a $f \in X^*$ y escribimos $f_\alpha \xrightarrow{\omega^*} f$ si para cada $x \in X$, $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$. Esta es la razón por la que muchas veces esta topología (débil*) es llamada de convergencia puntual sobre los elementos de X . Más adelante estudiaremos mejor esta convergencia.

Teorema 2.17 *Si X^* está dotado con la topología débil estrella ($\sigma(X^*, X)$). Entonces, el dual de X^* puede ser identificado con X . En otras palabras, si $f : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional débil* continuo entonces $f = J(x)$ para algún $x \in X$ y recíprocamente.*

Demostración. Suponga que $f : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional continuo en la topología débil*. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ y $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ tal que si $|\langle J(x_i), x^* \rangle| < \delta$ para todo $i = 1, \dots, k$ entonces $|f(x^*)| < \varepsilon$ (esto es si $x^* \in W(0; x_1, \dots, x_k; \delta) \Rightarrow f(x^*) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$). Esto implica que $\bigcap_{i=1}^k \ker J(x_i) \subseteq \ker f$,

pues si $x^* \in \bigcap_{i=1}^k \ker J(x_i)$ entonces $Jx_i(x^*) = x^*(x_i) = 0 \forall i = 1, \dots, k$. Luego para todo $\lambda > 0$ $x^*(\lambda x_i) = \lambda x^*(x_i) = 0 \forall i = 1, \dots, k$. esto es $\lambda x^* \in W(0; x_1, \dots, x_k; \delta)$ para todo $\lambda > 0$ y así $|f(\lambda x^*)| < \varepsilon$ para todo $\lambda > 0$, entonces $|f(x^*)| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$ y así $f(x^*) = 0$. Luego $x^* \in \ker f$. Por el Lema 2.2 f es combinación lineal de Jx_1, \dots, Jx_k , esto es existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tal que

$$f = \sum_{i=1}^k \lambda_i J(x_i) = J \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \right).$$

Luego $f = J(x)$ para algún $x \in X$.

Recíprocamente, si $f = J(x)$ para algún $x \in X$ entonces f es débil estrella continuo por definición de topología débil*. \square

Recuerde que en general si X está dotado con la topología de la norma entonces X^{**} , usualmente es estrictamente mas grande que X . Ahora veamos el siguiente corolario.

Corolario 2.3 *Sea X un espacio vectorial normado, y H un hiperplano débil* cerrado en X^* . Entonces, existe un $x_0 \in X, x_0 \neq 0$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que H tiene la forma $H = \{f \in X^* : f(x_0) = \alpha\}$.*

Demostración. Como H es un hiperplano en X^* entonces H se puede escribir de la forma $H = \{f \in X^* : \varphi(f) = \alpha\}$ donde φ es un funcional sobre X^* y $\varphi \neq 0$. Sea $f_0 \in H^c$ y W una vecindad débil de f_0 con $W \subseteq H^c$ (H^c es débil* abierto). Así, podemos tomar $W = \{f \in X^* : |\langle f - f_0, x_i \rangle| \leq \varepsilon \text{ para } i = 1, \dots, k\}$. Como W es convexo debemos tener $\varphi(f) < \alpha$ o $\varphi(f) > \alpha$ para todo $f \in W$. Suponga que $\varphi(f) < \alpha$ para todo $f \in W$. Entonces $\varphi(g) < \alpha - \varphi(f_0)$ para todo $g \in V = W - f_0$ y como $-V = V$ entonces $-\varphi(g) < \alpha - \varphi(f_0)$ para todo $g \in V$ entonces $|\varphi(g)| \leq |\alpha - \varphi(f_0)|$ para todo $g \in V$. Así, φ es débil* continua en 0 y por el Teorema 2.17 concluimos que existe un x_0 tal que $\varphi = Jx_0$, esto es $\varphi(f) = f(x_0)$, para todo $f \in X^*$.

Nota 13. Se sigue que si $\varphi \in X^{**}$ con $\varphi \notin J(X)$ entonces el conjunto $H = \{f \in X^* : \langle \varphi, f \rangle = 0\}$ no es cerrado en la topología débil*, pero sabemos que es cerrado en la topología débil (por ser convexo y fuertemente cerrado). Así, la topología débil* es estrictamente menos fina que la topología débil en X^* (si X no es reflexivo).

Este ejemplo también muestra que H es convexo, fuertemente cerrado pero no es débil*-cerrado.

Naturalmente se podría preguntar ¿existe algún tipo de relación entre X dotado con la topología débil y X^{**} dotado con la topología débil*? En efecto, el próximo teorema nos muestra el hecho de que tenemos una identificación

$$(X, \sigma(X, X^*)) \xrightarrow{J} (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)).$$

Esto es

$$(X, \text{topología débil de } X) \xrightarrow{J} (X^{**}, \text{topología débil* de } X^{**}).$$

Teorema 2.18 *Sea X un espacio vectorial normado. Entonces, la isometría canónica $J : X \rightarrow J(X)$ es un homeomorfismo débil-débil* continuo.*

Demostración. Dado que J es una isometría, J es inyectiva y por tanto $J : X \rightarrow J(X)$ es biyectiva. Sea $x^{**} \in X^{**}$, $x^{**} \in J(X)$. Entonces, existe un $x \in X$ tal que $J(x) = x^{**}$. Considere la vecindad débil* de $J(x)$ de la forma $W(J(x); x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$ y defina $W_1 = W(x; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$, W_1 es una vecindad de x en la topología débil de X . Para cada $y \in W_1$, tenemos

$$|x_i^*(x - y)| < \varepsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Así,

$$|(J(x) - J(y))(x_i^*)| < \varepsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Es decir $J(y)$ pertenece a $W(J(x); x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$ (esto es $J(W_1) \subseteq W(J(x); x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$) y por tanto J es débil-débil* continua.

Para demostrar que $J^{-1} : J(X) \rightarrow X$ es débil*- débil continua, consideremos una red $(J(x_\delta))_{\delta \in A}$ en $J(X)$ con $J(x_\delta) \rightarrow J(x)$ en la topología débil*, donde $x_\delta \in X$ para todo $\delta \in A$, y $x \in X$. Entonces $J(x_\delta)(x^*) \rightarrow J(x)(x^*)$ para todo $x^* \in X^*$ es decir $x^*(x_\delta) \rightarrow x^*(x)$ para todo $x^* \in X^*$. Luego $x_\delta \rightarrow x$ en la topología débil. Lo que completa la demostración de continuidad de J^{-1} . \square

Corolario 2.4 *Sea X un espacio vectorial normado, y sea $J : X \rightarrow X^{**}$ la isometría canónica de X en X^{**} . Entonces, para cualquier subconjunto A de X se tiene que $J(\overline{A}^{\text{débil}}) = \overline{J(A)}^{\text{débil*}} \cap J(X)$*

Demostración. Sea $y \in J(\overline{A^{\text{débil}}})$. Por definición, existe $a \in \overline{A^{\text{débil}}}$ tal que $y = J(a)$. Claramente $y \in J(X)$, luego basta probar que $y \in \overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$. Como $a \in \overline{A^{\text{débil}}}$ existe una red $(a_i)_{i \in I}$ en A tal que $a_i \rightarrow a$ débilmente. Ahora, dado que J es débil-débil* continua (puesto que $J : X \rightarrow J(X)$ es un homeomorfismo débil-débil* continuo) la red $(Ja_i)_{i \in I}$ converge débil* a $y = J(a)$. Por tanto $y \in \overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$.

Recíprocamente, supongamos que $y \in \overline{J(A)}^{\text{débil}^*} \cap J(X)$. Entonces $y \in \overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$ y $y \in J(X)$, como $y \in J(X)$, $y = J(x)$ para algún $x \in X$, además, dado que $y \in \overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$ existe una red $(y_i)_{i \in I}$ en $J(A)$ tal que $y_i \rightarrow y = J(x)$ en la topología débil*.

Por definición, existe un red $(x_i)_{i \in I}$ en A tal que $y_i = J(x_i)$ para todo $i \in I$, entonces $J(x_i) \rightarrow J(x)$ en la topología débil*. Como J es un homeomorfismo débil-débil* continuo, J^{-1} es una función continua de $J(X)$ (con la topología débil*) sobre X (con la topología débil). Luego $J^{-1}(J(x_i)) \rightarrow J^{-1}(J(x))$ en la topología débil de X . Esto es $x_i \rightarrow x$ débilmente, de ello que $x \in \overline{A^{\text{débil}}}$. Y por tanto $y = J(x) \in J(\overline{A^{\text{débil}}})$. \square

Ahora estudiaremos algunas propiedades de la convergencia de sucesiones en la topología débil estrella.

1. Si $(f_n) \subseteq X^*$ converge a f en $\sigma(X^*, X^{**})$ entonces $f_n \xrightarrow{\omega^*} f$.

En efecto, si $f_n \rightarrow f$ en $\sigma(X^*, X^{**})$ entonces

$$\langle z, f_n \rangle \rightarrow \langle z, f \rangle \text{ para todo } z \in X^{**}$$

como $J(X) \subseteq X^{**}$ entonces en particular

$$\langle J(x), f_n \rangle \rightarrow \langle J(x), f \rangle \text{ para todo } x \in X.$$

Esto es $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in X$. Luego $f_n \xrightarrow{\omega^*} f$.

Esto quiere decir que la topología débil* en X^* es menos fina que la topología débil de X^* , $\sigma(X^*, X^{**})$.

2. Si $f_n \xrightarrow{\omega^*} f$ entonces $(f_n)_{n \geq 1}$ es acotada en norma.

En efecto, para cada $x \in X$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ y por tanto $(f_n(x))_{n \geq 1}$ es acotada para cada $x \in X$. Luego por el teorema de Banach-Steinhaus $(f_n)_{n \geq 1}$ es acotada en norma.

3. Si $f_n \xrightarrow{\omega^*} f$ y $x_n \rightarrow x$ en norma entonces $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Esto se sigue de la desigualdad $|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$. Como $f_n \xrightarrow{\omega^*} f$ entonces $f_n(x) \rightarrow f(x)$ y como

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f_n(x)| &= |f_n(x_n - x)| \\ &\leq \|f_n\| \cdot \|x_n - x\| \\ &\leq M \cdot \|x_n - x\|, \text{ donde } M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|. \end{aligned}$$

Entonces tomando un n grande obtenemos $|f_n(x_n) - f(x)| < \varepsilon$.

Ejemplo 2.10 Considere $(a_n)_{n \geq 1} \in l_\infty$ y defina $x_n = (0, 0, \dots, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots) \in l_\infty$. Demostremos que $x_n \rightarrow 0$ débil* en l_∞ .

Solución. Como $l_1^* = l_\infty$, tomando $\varphi \in l_1$ con $\varphi = (\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$. Como $|a_k \lambda_k| \leq (\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|) |\lambda_k|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$ converge, entonces, por el criterio de comparación sigue que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k$ converge, y por tanto $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \lambda_k \rightarrow 0$. Luego $x_n(\varphi) \rightarrow 0$ para todo $\varphi \in l_1$. De donde $x_n \rightarrow 0$ en $\sigma(l_\infty, l_1) = \sigma(l_1^*, l_1)$.

Ejemplo 2.11 Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales. Defina $x_n^* \in l_\infty^*$ por $x_n^*(x_1, x_2, \dots) = a_n x_n$. Entonces $(x_n^*)_{n \geq 1}$ es débil* convergente si y solo si $(a_n)_{n \geq 1} \in c_0$. En este caso $x_n^* \rightarrow 0$.

Solución. Sea $x^* \in l_\infty^*$ tal que $x_n^* \rightarrow x^*$ débil*. Es decir $x_n^*(x_1, x_2, \dots) \rightarrow x^*(x_1, x_2, \dots)$ para todo $(x_1, x_2, \dots) \in l_\infty$. En particular,

$$x_n^*(0, 1, 0, 1, \dots) \rightarrow x^*(0, 1, 0, 1, \dots),$$

de donde

$$x_{2n}^*(0, 1, 0, 1, \dots) \rightarrow x^*(0, 1, 0, 1, \dots) \text{ y}$$

$$x_{2n-1}^*(0, 1, 0, 1, \dots) \rightarrow x^*(0, 1, 0, 1, \dots),$$

pero $x_{2n}^*(0, 1, 0, 1, \dots) = a_{2n}$ y $x_{2n-1}^* = 0$. Luego $a_{2n} \rightarrow 0$. De la misma forma (cambiando $(0, 1, 0, \dots)$ por $(1, 0, 1, 0, \dots)$) obtenemos que $a_{2n-1} \rightarrow 0$. Lo que implica que $(a_n)_{n \geq 1} \in c_0$. El recíproco es claro.

Ejemplo 2.12 Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de escalares. Defina $x_n^* \in l_\infty^*$ por $x_n^*(x_1, x_2, \dots) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$. Entonces la sucesión $(x_n^*)_{n \geq 1}$ es débil* convergente si y solo si $(a_n)_{n \geq 1} \in l_1$. En este caso, se tiene que $x_n^* \rightarrow x^*$ débil* donde $x^*(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx_n$ para todo $(x_1, x_2, \dots) \in l_\infty$.

Solución. Sea $x^* \in l_\infty^*$ tal que $x_n^* \rightarrow x^*$ débil*. Es decir, $x_n^*(x_1, x_2, \dots) \rightarrow x^*(x_1, x_2, \dots)$ para todo $(x_1, x_2, \dots) \in l_\infty$. En particular para $(\operatorname{sgn}(a_1), \operatorname{sgn}(a_2), \dots) \in l_\infty$ se tiene que $x_n^*(\operatorname{sgn}(a_1), \operatorname{sgn}(a_2), \dots) \rightarrow x^*(\operatorname{sgn}(a_1), \operatorname{sgn}(a_2), \dots) = s \in \mathbb{R}$. Pero $x_n^*(\operatorname{sgn}(a_1), \operatorname{sgn}(a_2), \dots) = a_1 \cdot \operatorname{sgn}(a_1) + a_2 \cdot \operatorname{sgn}(a_2) + \dots + a_n \cdot \operatorname{sgn}(a_n) = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

Entonces $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \rightarrow s$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, es decir $(a_n)_{n \geq 1} \in l_1$.

Recíprocamente, suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Sea $x^* : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $x^*(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx_n$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_nx_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq +\infty.$$

Por lo tanto x^* es bien definida, lineal y continua. Entonces, $x_n^* \rightarrow x^*$ débil* si y solo si $x_n^*(x_1, x_2, \dots) \rightarrow x^*(x_1, x_2, \dots)$ para todo $(x_1, x_2, \dots) \in l_\infty$ si y solo si $\sum_{k=1}^n a_kx_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_kx_k$, esto último se tiene puesto que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_kx_k$ converge.

2.5. Compacidad en las topologías débil y débil*

Hasta aquí hemos estudiado conjuntos débilmente acotados, débilmente cerrados y convexos. ¿Qué pasará con los conjuntos débilmente compactos? Supongamos que K es un subconjunto débilmente compacto de un espacio vectorial normado X . Entonces K es débilmente cerrado y por tanto cerrado en norma. Por otro lado, como todo $x^* \in X^*$ es débilmente continuo entonces $x^*(K)$ es compacto y por tanto acotado en \mathbb{R} . Así, del Teorema 2.7 se sigue que K es acotado. Luego, hemos demostrado que todo conjunto débilmente compacto es cerrado y acotado en norma. Ahora, veamos un ejemplo para mostrar que el recíproco es falso.

Ejemplo 2.13 Sea c_0 el espacio vectorial normado de todas las sucesiones escalares que convergen a 0. La bola unitaria $B_{c_0} \subseteq c_0$ es cerrada y acotada en norma pero no es débilmente compacta.

Solución. Obviamente B_{c_0} es cerrado y acotado en norma. Supongamos que B_{c_0} es débilmente compacto. Consideremos la sucesión $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_{c_0}$ definida por $\sigma_n = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ donde $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la base estándar de c_0 . Como B_{c_0} es débilmente compacto hay una subred $(\sigma_{\varphi(\delta)})_{\delta \in A}$ de $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $\sigma \in B_{c_0}$ tal que $\sigma_{\varphi(\delta)} \rightarrow \sigma$ débilmente. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $P_n(\sigma_{\varphi(\delta)}) \rightarrow P_n(\sigma)$ donde $P_n \in c_0^*$ y $P_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = x_n$. Por la definición de subred $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N}$ tiene la siguiente propiedad, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \delta_0 \in A$ tal que $\varphi(\delta) \geq n, \forall \delta \geq \delta_0$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \delta_0 \in A$ tal que $P_n(\sigma_{\varphi(\delta)}) = 1, \forall \delta \geq \delta_0$. Tomando el límite con respecto a $\delta \in A, \delta \geq \delta_0$ obtenemos que $P_n(\sigma) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\sigma = (1, 1, \dots)$. Así, $\sigma \notin c_0$, lo cual es una contradicción.

Ejemplo 2.14 Sea l_1 el espacio vectorial normado de todas las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Entonces la bola unitaria $B_{l_1} \subseteq l_1$ es cerrada y acotada en norma pero no es débilmente compacta.

Solución. Supongamos que B_{l_1} es débilmente compacto. Considere la base estándar $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}, e_n \in B_{l_1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Demostremos que $e_n \rightarrow 0$ débilmente. Supongamos por contradicción que $e_n \not\rightarrow 0$ débilmente. Existe $k \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ y $x_1^*, \dots, x_k^* \in l_1^*$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ hay un $k_n \in \mathbb{N}$ con $k_n \geq n$ tal que $e_{k_n} \notin W(0; x_1^*, \dots, x_k^*; \varepsilon)$. Como $(e_{k_n})_{n \in \mathbb{N}} \in B_{l_1}$ y B_{l_1} es débilmente compacto existe una subred $(e_{\varphi(\delta)})_{\delta \in A}$ de $(e_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ y $e \in B_{l_1}$ tal que $e_{\varphi(\delta)} \rightarrow e$ débil. Entonces, para cualquier $\lambda \in c_0 \subseteq l_\infty = l_1^*$ donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ tenemos $\lambda_{\varphi(\delta)} \rightarrow 0$. Luego $\lambda(e) = 0$ para todo $\lambda \in c_0$, tomando $\lambda = e_n$ elemento de c_0 obtenemos que $e = 0$. Por tanto, $\forall \delta \in A$ tenemos que $e_{\varphi(\delta)} \notin W(0; x_1^*, \dots, x_k^*; \varepsilon)$ y $e_{\varphi(\delta)} \rightarrow 0$ débilmente lo que es una contradicción. Luego, por el teorema de Mazur obtenemos una sucesión $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de combinaciones convexas de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\sigma_n \rightarrow 0$ en la topología de la norma de l_1 . Pero $\|\sigma_n\|_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ y obtenemos una contradicción.

Ejemplo 2.15 Sea $(e_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de vectores unitarios en c_0 y $(e_n^*)_{n \geq 1}$ la sucesión de vectores unitarios de l_1 . Entonces, $\{e_n^*\}_{n \geq 1}$ es biortogonal a $\{e_n\}_{n \geq 1}$ es

decir

$$e_n^*(e_m) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m; \\ 1, & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. El conjunto $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto acotado pues $\|s_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que el conjunto es débilmente cerrado pero no es débilmente compacto.

Solución. Sea $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in c_0 - \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces se satisface uno de los siguientes tres casos

1. $x_0 = 0$.
2. Existe i_0 tal que $a_{i_0} \neq 0, 1$.
3. Existe i_0 tal que $a_{i_0} = 0$ y $a_{i_0+1} = 1$.

En el primer caso, sea $W = \{x \in c_0 : |e_1^*(x)| < 1\}$, en el segundo caso sea $W = \{x \in c_0 : |e_{i_0}^*(x_0 - x)| < \min\{|a_{i_0}|, |1 - a_{i_0}|\}\}$ y en tercero sea $W = \{x \in c_0 : |(e_{i_0}^* - e_{i_0+1}^*)(x_0 - x)| < 1\}$. Es claro que en cualquiera de los casos la vecindad W de x_0 está contenida en $c_0 - \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es débilmente cerrado. Pero si $V_n = \{x \in c_0 : |(e_n^* - e_{n+1}^*)(s_n - x)| < 1\}$. Entonces V_n es una vecindad débil de s_n y $\{V_n\}_{n \geq 1}$ es una cubierta de $\{s_n\}_{n \geq 1}$. Sin embargo, $s_m \notin V_n$ si $m \neq n$. Y por tanto, no puede tener una subcobertura finita.

Nota 14. Considere X un espacio vectorial normado. Por lo mencionado en el Ejemplo 2.2 tenemos que \mathbb{R}^X es la colección de todas las funciones $f : X \rightarrow \bigcup_{x \in X} \mathbb{R}_x = \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha \in \mathbb{R}_x = \mathbb{R}$, consecuentemente $X^* \subseteq \mathbb{R}^X = \prod_{x \in X} \mathbb{R}$. Además, del Ejemplo 2.2 tenemos también que la topología producto es topología menos fina que hace continua las proyecciones $P_x(f) = f(x)$. Entonces, restringiendo la topología producto al conjunto X^* , tenemos que la topología producto es la topología menos fina en X^* que hace continua todas las funciones P_x tales que $P_x(x^*) = x^*(x)$. Ahora, dado que la topología débil* es la topología menos fina sobre X^* que hace continuas todas las funciones $f_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_x(x^*) = x^*(x)$, tenemos que, necesariamente la topología débil* y la topología producto de \mathbb{R}^X restringida a X^* deben ser equivalentes.

Ahora centraremos nuestra atención en la topología débil*. El primer resultado que se mostrará es una de las propiedades más importantes de dicha topología, puesto que contrario a lo que sucede en la topología débil, los subconjuntos conjuntos cerrados y acotados en X^* con la topología de la norma siempre son débil* compactos. Este resultado fue descubierto por Banach en 1932 para espacios separables y fue generalizado por Alaoglu en 1940.

Teorema 2.19 (Banach-Alaoglu) *Para todo espacio normado X , la bola B_{X^*} es débil* compacto y por tanto todo subconjunto débil* cerrado y acotado de X^* es débil* compacto.*

Demostración. Dado $x^* \in B_{X^*}$, para todo $x \in B_X$ se tiene que $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq 1$. Por tanto, para cada $x^* \in B_{X^*}$ se tiene que $x^*(B_X) \subseteq D$ donde $D = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq 1\}$. Sea $\Gamma = \prod_{x \in B_X} D = D^{B_X}$ con la topología producto. Como D es compacto, del teorema de Tychonoff sigue que Γ es compacto. Definimos $F : B_{X^*} \rightarrow D^{B_X}$ mediante $F(x^*)(x) = x^*(x)$ para cada $x \in B_X$. Con esto lo que queremos decir, es que $F(x^*)$ es aquel elemento de Γ cuya coordenada x es precisamente $x^*(x)$. Consideremos en B_{X^*} la restricción de la topología débil*. Demostremos que F es un homeomorfismo sobre su imagen y que la imagen de B_{X^*} es cerrado en D^{B_X} y como este es compacto tendremos el resultado deseado.

Primero veamos que F es inyectiva. Supongamos que $F(x_1^*) = F(x_2^*)$ esto es, $x_1^*(x) = x_2^*(x)$ para toda $x \in B_X$ lo que implica $x_1^* = x_2^*$. Sean $x_0^* \in B_{X^*}$ y $V = \bigcap_{i=1}^n \{x^* \in B_{X^*} : |x_0^*(x_i) - x^*(x_i)| < \varepsilon\}$ una vecindad débil* de x_0^* en B_{X^*} . Como

$$|\langle x_0^*, x_i \rangle - \langle x^*, x_i \rangle| = |\langle F(x_0^*), x_i \rangle - \langle F(x^*), x_i \rangle|.$$

Es claro que $F(V) = \bigcap_{i=1}^n \{F(x^*) : x^* \in B_{X^*} \text{ y } |\langle F(x_0^*), x_i \rangle - \langle F(x^*), x_i \rangle| < \varepsilon\}$ y este conjunto es abierto en $F(B_{X^*}) \cap D^{B_X}$. De aquí se sigue que F es un homeomorfismo. Probemos ahora que $F(B_{X^*})$ es un conjunto cerrado en D^{B_X} y por tanto compacto; sea $f_0 \in \overline{F(B_{X^*})} \subset D^{B_X}$, entonces $|f_0(x)| \leq 1$ para todo $x \in B_X$. Sean $\tilde{f}_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $\tilde{F} : B_{X^*} \rightarrow X^*$ dadas por $\tilde{f}_0(0) = 0$, y si $x \neq 0$, $\tilde{f}_0(x) = \|x\| f_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ y $\tilde{F}(x^*)(x) = x^*(x)$ para todo $x \in X$. Demostremos que \tilde{f}_0 es lineal. En efecto, sean $x_1, x_2 \in X$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Como $f_0 \in \overline{F(B_{X^*})}$, para cualquier vecindad débil* de f_0 se satisfacen las siguientes desigualdades:

1. Si $x_1 \neq 0$, $W(f_0; \frac{x_1}{\|x_1\|}; \frac{\varepsilon}{\|x_1\|}) \cap F(B_{X^*}) \neq \emptyset$ entonces existe un $x^* \in B_{X^*}$ con $F(x^*) \in W(f_0; \frac{x_1}{\|x_1\|}; \frac{\varepsilon}{\|x_1\|})$ y así

$$\left| Fx^* \left(\frac{x_1}{\|x_1\|} \right) - f_0 \left(\frac{x_1}{\|x_1\|} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{\|x_1\|},$$

esto es

$$\|x_1\| \cdot \left| Fx^* \left(\frac{x_1}{\|x_1\|} \right) - f_0 \left(\frac{x_1}{\|x_1\|} \right) \right| < \varepsilon.$$

Así

$$|\langle \tilde{F}(x^*), x_1 \rangle - \tilde{f}_0(x_1)| < \varepsilon.$$

2. Si $x_2 \neq 0$, $W(f_0; \frac{x_2}{\|x_2\|}; \frac{\varepsilon}{\|x_2\|}) \cap F(B_{X^*}) \neq \emptyset$ y por tanto existe $x^* \in B_{X^*}$ tal que $F(x^*) \in W(f_0; \frac{x_2}{\|x_2\|}; \frac{\varepsilon}{\|x_2\|})$ y así

$$\left| Fx^* \left(\frac{x_2}{\|x_2\|} \right) - f_0 \left(\frac{x_2}{\|x_2\|} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{\|x_2\|},$$

entonces

$$\|x_2\| \cdot \left| Fx^* \left(\frac{x_2}{\|x_2\|} \right) - f_0 \left(\frac{x_2}{\|x_2\|} \right) \right| < \varepsilon.$$

Así

$$|\langle \tilde{F}(x^*), x_2 \rangle - \tilde{f}_0(x_2)| < \varepsilon.$$

3. Si $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \neq 0$ entonces existe un $x^* \in B_{X^*}$ tal que

$$F(x^*) \in W(f_0; \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|}; \frac{\varepsilon}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|}). \text{ Luego}$$

$$\left| Fx^* \left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|} \right) - f_0 \left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|},$$

entonces

$$\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\| \cdot \left| Fx^* \left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|} \right) - f_0 \left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|} \right) \right| < \varepsilon.$$

Así

$$|\tilde{F}x^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \tilde{f}_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| < \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
& |\tilde{f}_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 \tilde{f}_0(x_1) - \lambda_2 \tilde{f}_0(x_2)| \\
= & |\tilde{f}_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \tilde{F}x^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \tilde{F}x^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 \tilde{f}_0(x_1) - \lambda_2 \tilde{f}_0(x_2)| \\
\leq & |\tilde{f}_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \tilde{F}x^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| + \\
& |\tilde{F}x^*(\lambda_1 x_1) + \tilde{F}x^*(\lambda_2 x_2) - \lambda_1 \tilde{f}_0(x_1) - \lambda_2 \tilde{f}_0(x_2)| \\
\leq & \varepsilon + |\lambda_1 \langle \tilde{F}(x^*), x_1 \rangle - \lambda_1 \tilde{f}_0(x_1)| + |\lambda_2 \langle \tilde{F}(x^*), x_2 \rangle - \lambda_2 \tilde{f}_0(x_2)| \\
\leq & \varepsilon + |\lambda_1| \cdot |\langle \tilde{F}(x^*), x_1 \rangle - \tilde{f}_0(x_1)| + |\lambda_2| \cdot |\langle \tilde{F}(x^*), x_2 \rangle - \tilde{f}_0(x_2)| \\
\leq & \varepsilon + |\lambda_1| \varepsilon + |\lambda_2| \varepsilon \\
= & (1 + |\lambda_1| + |\lambda_2|) \varepsilon
\end{aligned}$$

Para todo $\varepsilon > 0$. De modo que \tilde{f}_0 es lineal. Además para cada $x \in B_X$ $F(\tilde{f}_0) = \tilde{f}_0(x) = \|x\| f_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = f_0\left(\frac{\|x\|x}{\|x\|}\right) = f_0(x)$. Así $f_0 = F(\tilde{f}_0)$, esto es $f_0 \in F(B_{X^*})$. Luego $\overline{F(B_{X^*})}^{\text{débil}^*} \subseteq F(B_{X^*})$ por tanto $F(B_X)$ es un conjunto cerrado en D^{B_X} , sigue que $F(B_X)$ es compacto. Como F es un homeomorfismo de B_{X^*} sobre su imagen B_{X^*} es compacto. \square

Como consecuencia inmediata del teorema de Alaoglu, podemos ver que un subespacio del espacio de Banach de funciones continuas sobre un espacio de Hausdorff compacto es la forma más general de espacio de Banach.

Teorema 2.20 *Cada espacio de Banach X es isométricamente isomorfo a un subespacio lineal cerrado de un espacio $C(K)$ donde K es un espacio de Hausdorff compacto.*

Demostración. Suponga que X es un espacio de Banach. Por el teorema de Banach-Alaoglu, B_{X^*} es compacto en la topología débil*. Para cada $x \in X$, sea f_x la restricción de $Jx \in X^{**}$ a $K = B_{X^*}$. Como la topología débil* es la menos fina en que cada Jx es continua entonces f_x pertenece a $C(K)$. Defina $T : X \rightarrow C(B_{X^*})$ por $T(x) = f_x = Jx|_K$.

Entonces T es claramente lineal y para cada $x \in X$ tenemos

$$\|Tx\| = \|Jx\|_{X^{**}} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |Jx(x^*)| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = \|x\|.$$

Por tanto T es una isometría lineal inyectiva. Ahora, veamos que la imagen es cerrada en $C(B_{X^*})$. En efecto, sea $(x_n)_{n \geq 1}$ en X tal que $Tx_n \rightarrow y$. Como $Tx_n \rightarrow y$ entonces (Tx_n) es de Cauchy en $C(B_{X^*})$ y dado que T es una isometría sigue que $(x_n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy en X , y como X es de Banach existe un $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Así $Tx_n \rightarrow Tx$ y por tanto $y = Tx$. Así $T(X)$ es cerrado en $C(B_{X^*})$ y por tanto T es un isomorfismo isométrico sobre su imagen. \square

Sabemos que el embejamiento natural (inyección canónica) $J : X \rightarrow X^{**}$ es una isometría, y por tanto envía conjuntos cerrados (en norma) de X a conjuntos cerrados de X^{**} . En particular $J(B_X)$ es cerrado en X^{**} y no puede ser denso en X^{**} a menos que X sea reflexivo. Sin embargo, si la topología de la norma en X^{**} es reemplazada por su topología débil* la sustitución es bastante diferente como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.21 (Goldstine) *Para cada espacio vectorial normado X , el conjunto $J(B_X)$ es débil* denso en $B_{X^{**}}$.*

Demostración. Inicialmente veamos que $\overline{J(B_X)}^{\text{débil}^*} \subseteq B_{X^{**}}$. Como J es una isometría, $\|Jx\| = \|x\|$, así, si $f \in J(B_X)$ entonces $f = Jx$ para algún $x \in B_X$ y por tanto $\|f\| = \|Jx\| \leq \|x\| \leq 1$. Así $\|f\| \leq 1$ lo que implica que $f \in B_{X^{**}}$, más aún, tenemos que $J(B_X) \subseteq B_{X^{**}}$. Ahora, por el Teorema 2.19 tenemos que $B_{X^{**}}$ es cerrado con la topología débil*. Luego $\overline{J(B_X)}^{\text{débil}^*} \subseteq B_{X^{**}}$.

Ahora, debemos mostrar que $B_{X^{**}} \subseteq \overline{J(B_X)}$. Suponga que existe un $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $x^{**} \notin \overline{J(B_X)}$. Como $\overline{J(B_X)}$ es convexo y cerrado por el teorema de separación existe un funcional f continuo sobre X^{**} y constantes $C, \varepsilon > 0$ tal que $f(\overline{J(B_X)}) \leq C$ y $f(x^{**}) \geq C + \varepsilon$. Por el Teorema 2.17 existe un $x^* \in X^*$ tal que $f = Jx^*$ y

$$f(x^{**}) = Jx^*(x^{**}) = x^{**}(x^*) \text{ para cada } x^{**} \in X^{**}. \quad (2.4)$$

Como $J(B_X) \subseteq \overline{J(B_X)}$ sigue de (2.4) que $f(Jx) = Jx^*(Jx) = Jx(x^*) = x^*(x) \leq C$ para todo $x \in B_X$. Pero si $x \in B_X$ entonces $\alpha x \in B_X$ para $|\alpha| \leq 1$ y por tanto $|x^*(x)| \leq C$ para $x \in B_X$. Así $\|x^*\| \leq C$ y $|f(x^{**})| = |x^{**}(x^*)| \leq C\|x^{**}\| \leq C$. Lo que contradice que $f(x^{**}) \geq C + \varepsilon$. Por tanto $\overline{J(B_X)} = B_{X^{**}}$. \square

Corolario 2.5 *Sea X un espacio vectorial normado. Entonces, el conjunto $J(X)$ es débil* denso en X^{**} .*

Demostración. La clausura débil* de $J(X)$ es un subespacio de X^{**} que por el teorema anterior contiene a $B_{X^{**}}$ y por tanto cada punto de X^{**} . Luego $\overline{J(X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = X^{**}$. \square

Uno de los métodos usados en matemáticas para lograr obtener algunos resultados o teoremas interesantes, es restringir un teorema a conjuntos o espacios que tienen ciertas características especiales. Como ya lo habíamos mencionado antes en general cuando hablamos de la topología débil no todo conjunto cerrado y acotado es compacto, sin embargo, en espacios de Banach reflexivos tenemos algunos resultados interesantes.

La intención ahora es demostrar que en un espacio Banach reflexivo la bola unitaria es débilmente compacta, antes de ver este hecho veamos el siguiente resultado.

Teorema 2.22 *Sea X un espacio vectorial normado. Si X es reflexivo entonces $J(B_X) = B_{X^{**}}$.*

Demostración. En efecto, del Teorema 2.21 concluimos que $J(B_X) \subseteq B_{X^{**}}$. Recíprocamente, sea $f \in B_{X^{**}}$. Como X es reflexivo existe $x \in X$ tal que $f = J(x)$. Luego $\|x\| = \|J(x)\| = \|f\| \leq 1$, así, $x \in B_X$. Entonces $f \in J(B_X)$. De ello que $B_{X^{**}} \subseteq J(B_X)$. \square

Teorema 2.23 *Sea X un espacio de Banach. Entonces, X es reflexivo si y solo si la bola unitaria es compacta en la topología débil.*

Demostración. Suponga que X es un espacio de Banach reflexivo y sea $J : X \rightarrow X^{**}$ la isometría natural. Entonces J y J^{-1} son isometrías. Como X es reflexivo entonces del Teorema 2.22 tenemos que $J(B_X) = B_{X^{**}}$. Ahora, por el Teorema 2.18 tenemos que $J : (X, \text{débil}) \rightarrow (X^{**}, \text{débil}^*)$ es un homeomorfismo, y por el teorema de Banach-Alaoglu $B_{X^{**}}$ es débil* compacto. Por tanto $J^{-1}(B_{X^{**}}) = B_X$ es débilmente compacto.

Recíprocamente, suponga que B_X es compacto en la topología débil. Como J es un homeomorfismo $J(B_X)$ es compacto en la topología débil* y por tanto es débil* cerrado. Además, $J(B_X)$ es débil* denso en $B_{X^{**}}$, esto es $B_{X^{**}} = \overline{J(B_X)}$. Luego $J(B_X) = B_{X^{**}}$ y $J(X) = X^{**}$. Luego X es reflexivo. \square

Corolario 2.6 *Un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si cada subconjunto $A \subseteq X$ débilmente cerrado y acotado es débilmente compacto.*

Demostración. Suponga que X es reflexivo y $A \subseteq X$ es débilmente cerrado y acotado. Entonces existe un $m \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subseteq mB_X$. Por el teorema anterior mB_X es débilmente compacto (ya que X es reflexivo). Como A es débilmente cerrado entonces A es débilmente compacto.

Recíprocamente. B_X es débilmente cerrado y acotado puesto que B_X es convexo, cerrado y acotado en norma, por hipótesis B_X es débilmente compacto. Entonces por el Teorema 2.23 tenemos que X es reflexivo. \square

Teorema 2.24 *Sea X un espacio de Banach. Entonces son equivalentes*

1. X es reflexivo;
2. B_X es $\sigma(X, X^*)$ compacto (B_X es débilmente compacto);
3. $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$ (topología débil* de X^* = topología débil de X^*);
4. X^* es reflexivo.

Demostración. (1) \Leftrightarrow (2) ya se demostró.

(2) \Rightarrow (3). Si B_X es débilmente compacto entonces X es reflexivo y por tanto la topología débil sobre X^* en el que todo elemento de X^{**} es continuo es igual a la topología débil en X^* en el que cada $J(x)$ es continuo, esta es la topología débil* de X^* . Luego $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$.

(3) \Rightarrow (4). Supongamos que $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$. Por el teorema de Banach-Alaoglu B_{X^*} es débil* compacto y como $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$ entonces B_{X^*} es $\sigma(X^*, X^{**})$ compacto y aplicando el corolario a X^* obtenemos que X^* es reflexivo.

(4) \Rightarrow (1). Suponga que X^* es reflexivo. Entonces X^{***} es isométrico a X^* . Como $J(B_X)$ es cerrado y convexo con la norma en X^{**} entonces $J(B_X)$ es débilmente cerrado en X^{**} . Esto es, $\overline{J(B_X)}^{\sigma(X^{**}, X^{***})} = J(B_X)$. Como X^* es reflexivo entonces $\overline{J(B_X)}^{\sigma(X^{**}, X^*)} = J(B_X)$, es decir $J(B_X)$ es débil* cerrado en X^{**} y por el teorema de Goldstein $J(B_X)$ es débil* denso en $B_{X^{**}}$. Así $J(B_X) = B_{X^{**}}$ y X es reflexivo. \square

Corolario 2.7 *Si Y es un subespacio cerrado de un espacio de Banach reflexivo, entonces Y es reflexivo.*

Demostración. Como X es reflexivo, entonces B_X es débilmente compacto y como $B_Y = B_X \cap Y$ es un subconjunto débilmente cerrado del conjunto débilmente compacto B_X sigue que B_Y es débilmente compacto. Luego Y es reflexivo. \square

Nota 15. Finalizamos esta sección estudiando la conexión entre los espacios reflexivos y separables. Este estudio nos ayudará a entender la próxima sección de metrizabilidad de las topologías débil y débil*.

Un espacio vectorial normado es llamado separable si éste tiene un subconjunto denso que sea numerable. En otras palabras, X es separable si existe una sucesión, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, en X tal que para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$ hay un x_k que satisface $\|x - x_k\| < \varepsilon$.

Teorema 2.25 *Sea X un espacio vectorial normado. Si X^* es separable, entonces X es separable.*

Demostración. Sea $(x_n^*)_{n \geq 1}$ un subconjunto denso en X^* . Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $|x_n^*(x_n)| \geq \frac{\|x_n^*\|}{2}$. Sea $M = \overline{\{x_n\}}$ la clausura del conjunto de combinaciones lineales de los x_n . Si $M \neq X$, existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin M$. Por el teorema de Hahn-Banach existe un $x_0^* \in X^*$ tal que $x_0^*(M) = 0$, $\|x_0^*\| = 1$ y $x_0^*(x_0) \neq 0$. En particular $x_0^*(x_n) = 0$ para $n = 1, 2, \dots$ Así,

$$\begin{aligned} \frac{\|x_n^*\|}{2} &\leq |x_n^*(x_n)| \\ &= |x_n^*(x_n) - x_0^*(x_n)| \\ &\leq \|x_n^* - x_0^*\| \cdot \|x_n\| \\ &= \|x_n^* - x_0^*\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Entonces $1 = \|x_0^*\| \leq \|x_n^* - x_0^*\| + \|x_n^*\| \leq 3\|x_n^* - x_0^*\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ demostrando que ninguno de los x_n^* puede estar más próximo de una distancia de $\frac{1}{3}$ de x_0^* . Esto contradice el hecho que $\{x_n^*\}_{n \geq 1}$ es denso en X^* . Como M es separable, entonces X es separable (note que las combinaciones lineales finitas de los $\{x_n\}$ con coeficientes racionales es denso en M y numerable). \square

Teorema 2.26 *Sea X un espacio vectorial normado. Entonces, X es separable y reflexivo si y solo si X^* separable y reflexivo.*

Demostración. Supongamos que X es separable y reflexivo. Sea $(x_k)_{k \geq 1}$ una sucesión densa en X y sea x^{**} un elemento de X^{**} . Como X es reflexivo existe un $x \in X$ tal que $Jx = x^{**}$. Además, para cada $\varepsilon > 0$ existe un x_k tal que $\|x_k - x\| < \varepsilon$. Así, $\|Jx_k - Jx\| = \|x_k - x\| < \varepsilon$ luego $\|Jx_k - x^{**}\| < \varepsilon$. Así X^{**} es separable. Por el teorema anterior concluimos que X^* es separable. Además, el Teorema 2.24 muestra que X^* es reflexivo.

El recíproco es inmediato por el Teorema 2.25 y el Teorema 2.24. \square

Nota 16. En general si X es solo separable (no es reflexivo) no implica que X^* sea separable como lo muestra $X = l_1$ con $X^* = l_\infty$, en donde este último no es separable.

Nota 17. Sabemos que una sucesión débil* convergente siempre es acotada. En espacios separables tenemos un recíproco para esto.

Teorema 2.27 *Si X es separable entonces cada sucesión acotada en X^* tiene una subsucesión débil* convergente.*

Demostración. Sea $(x_n^*)_{n \geq 1}$ una sucesión acotada en X^* y $(a_k)_{k \geq 1}$ una sucesión densa en X . Entonces, $(x_n^*(a_1))_{n \geq 1}$ es una sucesión acotada de números reales, luego existe una subsucesión $\{x_{n_1}^*(a_1)\}$ convergente, esto es $\lim_{n_1 \rightarrow \infty} x_{n_1}^*(a_1)$ existe. Igualmente, hay una subsucesión $\{x_{n_2}^*\}$ de $\{x_{n_1}^*\}$ tal que $\{x_{n_2}^*(a_2)\}$ converge. Inductivamente, existe una subsucesión $\{x_{n_k}^*\}$ de $\{x_{n_{k-1}}^*\}$ tal que $x_{n_k}^*(a_k)$ converge. Defina $z_m^* = x_{n_m}^*$ entonces $\{z_m^*\}$ es una subsucesión de $\{x_n^*\}$ y $z_m^*(a_k)$ converge para cada a_k . Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por la densidad de $(a_k)_{k \geq 1}$ existe un a_k tal que $\|x - a_k\| < \frac{\varepsilon}{3c}$ donde c es tal que $\|x_n^*\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned} |z_m^*(x) - z_p^*(x)| &\leq |z_m^*(x) - z_m^*(a_k)| + |z_m^*(a_k) - z_p^*(a_k)| + |z_p^*(a_k) - z_p^*(x)| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + |z_m^*(a_k) - z_p^*(a_k)| \end{aligned}$$

y tomando m y p grandes tal que $|z_m^*(a_k) - z_p^*(a_k)| < \varepsilon/3$, tenemos que $(z_m^*(x))_{m \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} y por tanto convergente para cada $x \in X$. Defina

$F : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} z_m^*(x)$. Claramente F es lineal, acotado y $z_m^* \rightarrow F$ en la topología débil*. Lo cual demuestra el resultado deseado. \square

Ejemplo 2.16 La condición de separabilidad del teorema anterior no se puede omitir. Para ver esto, considere l_∞ que no es separable. Veamos que $B_{l_\infty}^*$ no es débil* secuencialmente compacto. Sea $f_n \in l_\infty^*$ defina tal que $f_n x = x_n$ para todo $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_\infty$. Entonces, $|f_n x| \leq \|x\|_\infty$ para todo $x \in l_\infty$, si $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ es la sucesión de vectores unitarios en l_∞ , $\|e_n\|_\infty = 1$ y $|f_n(e_n)| = 1$ por tanto $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f_n \in B_{l_\infty}^*$.

Supongamos que existe una subsucesión $\{f_{\sigma(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{f_{\sigma(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tenga un límite débil*, entonces la subsucesión $\{f_{\sigma(k)}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge en \mathbb{R} para todo $x \in B_{l_\infty}$. Definamos

$$x_n := \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = \sigma(k), \\ 0 & \text{si } n \neq \sigma(k). \end{cases}$$

Claramente $x_n \in B_{l_\infty}$ y note que $\{f_{\sigma(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}(x_n) = (-1)^k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto contradice el hecho de que $\{f_{\sigma(k)}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge en \mathbb{R} para todo $x \in B_{l_\infty}$. Por tanto $\{f_{\sigma(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ no tiene un límite débil*. Dado que la subsucesión es arbitraria concluimos que $\{f_n\}$ no tiene una subsucesión convergente.

Teorema 2.28 *Sea X un espacio vectorial normado. Si X es reflexivo, entonces cada sucesión acotada tiene una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración. Suponga que X es reflexivo y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X . Sea $M = \overline{\{x_n\}}$ la clausura del conjunto de combinaciones lineales de los x_n . Como observamos antes, M es separable, además, como éste es un subespacio cerrado de un espacio reflexivo entonces M es reflexivo. Así, por el Teorema 2.26 tenemos que M^* es separable y reflexivo. Ahora $\{Jx_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión acotada en M^{**} . Entonces, por el Teorema 2.27 existe una subsucesión (también denotada por $\{Jx_n\}$) que es convergente en la topología débil*. Esto es lo mismo que decir que $x^*(x_n)$ converge para cada $x^* \in M^*$. Ahora, sea x^* un elemento cualquiera de X^* . Entonces, la restricción x_M^* de X^* a M está en M^* . Así, $x^*(x_n) = x_M^*(x_n)$ converge. Esto significa que $\{x_n\}$ converge débilmente y la demostración queda completa. \square

2.6. Metrizable de las topologías débiles

Recordemos que una topología sobre un conjunto X es metrizable si existe una métrica en X que induce dicha topología y que las topologías inducidas por métricas satisfacen el primer axioma de numerabilidad, es decir, todo punto en X tiene una base local numerable. Primero demostramos que los únicos espacios normados cuya topología débil es metrizable son los de dimensión finita; esto nos da una diferencia substancial entre las topologías débiles y la de la norma ya que todo espacio normado es métrico.

Veamos primero un ejemplo propuesto por Von Neumann que muestra claramente que la topología débil no es metrizable en l_2 (ni secuencial).

Ejemplo 2.17 Sea $A \subseteq l_2$ definido por $A = \{e_m + me_n : 1 \leq m < n < \infty, m, n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $0 \in \overline{A^{\sigma(l_2, l_2^*)}}$, pero no existe en A una sucesión que converja a 0 en la topología débil.

Solución. Sabemos que $W(0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) = \{x \in l_2 : |x_i^*(x)| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ y $x_1^*, \dots, x_n^* \in l_2^*$ forman una base de vecindades débiles para el origen. Con el fin de probar que $0 \in \overline{A^{\sigma(l_2, l_2^*)}}$, veamos que $A \cap W(0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ y $x_1^*, \dots, x_n^* \in l_2^*$.

En efecto, por el teorema de representación de Riesz, existe $(\lambda_k^i)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq l_2$ con $i = 1, \dots, n$ tal que

$$x_i^*((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \langle (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (\lambda_k^i)_{k \in \mathbb{N}} \rangle, \quad \forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_2.$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^i = 0$ para $i = 1, \dots, n$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\lambda_{m_\varepsilon}^i| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n.$$

Ahora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_\varepsilon \lambda_k^i = m_\varepsilon \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^i = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Luego, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n_\varepsilon > m_\varepsilon$ con $|m_\varepsilon \lambda_{n_\varepsilon}^i| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $i = 1, \dots, n$. Así,

$$\begin{aligned} |x_i^*(e_{m_\varepsilon} + m_\varepsilon e_{n_\varepsilon})| &= |\lambda_{m_\varepsilon}^i + m_\varepsilon \lambda_{n_\varepsilon}^i| \\ &\leq |\lambda_{m_\varepsilon}^i| + |m_\varepsilon \lambda_{n_\varepsilon}^i| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, de ello que $e_{m_\varepsilon} + m_\varepsilon e_{n_\varepsilon} \in A \cap W(0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon)$

Ahora, supongamos que existe una sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_k \rightarrow 0$ débilmente. Sea $x_k = e_{m_k} + m_k e_{n_k}$ con $1 \leq m_k < n_k < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $x_k \rightarrow 0$ débilmente, la sucesión (x_k) es acotada y por tanto $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada. Luego existe una subsucesión convergente $(m_{k_s})_{s \in \mathbb{N}}$. Pero al ser subsucesión convergente de números naturales debe existir un s_0 y un $n \in \mathbb{N}$ tal que $m_{k_s} = n$ para todo $s \geq s_0$. Entonces

$$\langle e_n, x_{m_{k_s}} \rangle = \langle e_n, x_{k_s} \rangle = \langle e_n, e_{m_{k_s}} + m_{k_s} e_{n_{k_s}} \rangle = 1.$$

Una contradicción ya que $\langle e_n, x_{m_{k_s}} \rangle \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$.

Teorema 2.29 *Si $\dim X = n < +\infty$, entonces $\dim X^* = n < +\infty$.*

Demostración. Sean x_1, x_2, \dots, x_n una base de X . Entonces existen funcionales lineales x_1^*, \dots, x_n^* tal que

$$x_j^*(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1; & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Ahora veamos que $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ es una base de X^* . Primero, observemos que si $x \in X$, entonces $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ con $\alpha_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n$ y por tanto $x_j^*(x) = \alpha_j$ entonces

$$x = \sum_{k=1}^n x_k^*(x) x_k, \quad \forall x \in X.$$

Así, si x^* es cualquier funcional en X^* entonces $x^*(x) = \sum_{k=1}^n x_k^*(x) x^*(x_k)$, $x \in X$.

Sigue que

$$x^* = \sum_{k=1}^n x^*(x_k) x_k^*.$$

Por tanto $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ generan X^* . Además si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son escalares tal que $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^* = 0$ entonces $(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^*)(x_j) = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Luego $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^*(x_j) = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Así $\lambda_j \cdot x_j^*(x_j) = 0$, entonces $\lambda_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Esto muestra que $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ es linealmente independiente. Luego $\dim X^* = n$. \square

Corolario 2.8 *Sea X un espacio vectorial normado. Si $\dim X^* < \infty$, entonces $\dim X < \infty$.*

Demostración. Suponga que $\dim X^* < \infty$ y considere $J : X \rightarrow X^{**}$ la isometría canónica. Por el Teorema 2.29, X^{**} tiene dimensión finita y como JX es un subespacio de X^{**} entonces JX tiene dimensión finita. Como X es isomorfo a JX entonces X tiene dimensión finita. \square

Teorema 2.30 *Sea X un espacio de Banach. Si la topología débil en X es metrizable entonces X es de dimensión finita.*

Demostración. Suponga que la topología débil sobre X es metrizable. Entonces, existe una métrica d sobre X . Entonces el conjunto $\{B(0, \varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}\}$ las bolas de centro en 0 y radio ε con respecto a d forman una base de vecindades para $0 \in X$ con respecto a la topología débil. Así, para cada $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$ podemos encontrar $x_{1,\varepsilon}^*, x_{2,\varepsilon}^*, \dots, x_{n(\varepsilon),\varepsilon}^* \in X^* - \{0\}$ y un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $W(0, x_{1,\varepsilon}^*, \dots, x_{n(\varepsilon),\varepsilon}^*, \delta_\varepsilon) \subseteq B(0, \varepsilon)$.

El conjunto $\{x_{1,\varepsilon}^*, \dots, x_{n(\varepsilon),\varepsilon}^*\}_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}}$ es numerable y consideremos este como una sucesión $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$. Para cada $x^* \in X^*$ y $\delta > 0$, el conjunto $W(0, x^*, \delta) = \{x \in X : |x^*(x)| < \delta\}$ es una vecindad débil de 0 y por tanto existe un $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+ - \{0\}$ tal que $B(0, \varepsilon) \subseteq W(0, x^*, \delta)$. Obtenemos que podemos encontrar $\{x_{k_1}^*, x_{k_2}^*, \dots, x_{k_n}^*\} \subseteq \{x_j^*\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $W(0, x_{k_1}^*, \dots, x_{k_n}^*, \delta_\varepsilon) \subseteq B(0, \varepsilon) \subseteq W(0, x^*, \delta)$.

Afirmamos que $\bigcap_{i=1}^n \ker x_{k_i}^* \subseteq \ker x^*$.

En efecto, sea $x \in \bigcap_{i=1}^n \ker x_{k_i}^*$, entonces $x_{k_i}^*(\alpha x) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, para toda $\alpha \in \mathbb{N}$. Por tanto $\alpha x \in W(0, x_{k_1}^*, \dots, x_{k_n}^*, \delta_\varepsilon)$, obtenemos de ello que $\alpha x \in W(0, x^*, \delta)$ para toda $\alpha \in \mathbb{N}$. Por tanto, $|x^*(x)| < \frac{\delta}{\alpha}$ para toda $\alpha \in \mathbb{N}$.

Así, pasando al límite cuando $\alpha \rightarrow \infty$, tenemos que $x^*(x) = 0$, es decir $x \in \ker x^*$. Esto prueba que, $\bigcap_{i=1}^n \ker x_{k_i}^* \subseteq \ker x^*$ y por el Lema 2.2 tenemos que $x^* \in \text{Span}\{x_{k_1}^*, x_{k_2}^*, \dots, x_{k_n}^*\}$. Si denotamos por $X_n = \text{Span}\{x_{k_1}^*, x_{k_2}^*, \dots, x_{k_n}^*\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, hemos demostrado que $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ el subespacio X_n es cerrado y como X^* es un espacio de Banach, aplicando el teorema de Baire concluimos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, un $r > 0$ y x_0^* tal que $B(x_0^*, r) \subseteq X_{n_0}$. Como X_{n_0} es un subespacio vectorial obtenemos $X_{n_0} = X^*$, es decir $\dim X^* < \infty$ y por el Corolario 2.8 tenemos que $\dim X < \infty$. \square

Corolario 2.9 *Si la topología débil* en X^* es metrizable entonces X^* (y por tanto X) es de dimensión finita.*

Por otro lado, si X es separable, la restricción de la topología débil* a conjuntos acotados es metrizable más aún estos conjuntos son débil* separables.

Teorema 2.31 *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces B_{X^*} es metrizable en la topología débil* de X^* . Recíprocamente, si B_{X^*} es metrizable en la topología débil*, entonces X es separable.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio normado separable y considere un subconjunto denso $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X - \{0\}$. Definimos $d : B_{X^*} \times B_{X^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x^* - y^*)(x_n)|}{2^n \|x_n\|}, \quad \forall x^*, y^* \in B_{X^*}.$$

Demostremos que:

1. $d : B_{X^*} \times B_{X^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ define una métrica sobre B_{X^*}
2. La identidad $I : (B_{X^*}, \text{débil}^*) \rightarrow (B_{X^*}, d)$ es un homeomorfismo.
3. La topología débil* en B_{X^*} es metrizable.

1. Primero, observe que si $x^*, y^* \in B_{X^*}$ entonces

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x^* - y^*)(x_n)|}{2^n \|x_n\|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x^* - y^*\| \cdot \|x_n\|}{2^n \|x_n\|} = \|x^* - y^*\| < +\infty.$$

Por tanto d es bien definida. Considere ahora $x^*, y^* \in B_{X^*}$ tal que $d(x^*, y^*) = 0$. Entonces $(x^* - y^*)(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y usando la continuidad de x^* e y^* y la densidad de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X , obtenemos que $(x^* - y^*)(x) = 0$ para todo $x \in X$, es decir $x^* = y^*$. Los otros axiomas para una métrica son fáciles de verificar.

2. Considere la identidad $I : (B_{X^*}, \text{débil}^*) \rightarrow (B_{X^*}, d)$ y $x_0^* \in B_{X^*}$. Como primera medida demostremos que I es continua en x_0^* .

Sea $\varepsilon > 0$. Existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ y por tanto, existe $r > 0$ tal que

$$r \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n \|x_n\|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos $V = W(x_0^*; x_1, \dots, x_N; r) \cap B_{X^*}$. Para cualquier $x^* \in V$, tenemos

$$\begin{aligned}
 d(x^*, x_0^*) &= \sum_{n=1}^N \frac{|(x^* - x_0^*)(x_n)|}{2^n \|x_n\|} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|(x^* - x_0^*)(x_n)|}{2^n \|x_n\|} \\
 &\leq r \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n \|x_n\|} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\|x^* - x_0^*\| \cdot \|x_n\|}{2^n \|x_n\|} \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Por tanto $I(V) \subseteq B_d(x_0^*, \varepsilon)$, es decir, I es continua en x_0^* . Como I es biyectiva (B_{X^*} , débil*) es un espacio topológico compacto y (B_{X^*}, d) es un espacio de Hausdorff. Tenemos que I es un homeomorfismo.

3. De 1) y 2) se sigue que la topología débil* en B_{X^*} es generada por d .

Recíprocamente, suponga que B_{X^*} es metrizable en la topología débil* de X^* . Veamos que X es separable. Sea d la métrica compatible para la topología débil* de B_{X^*} .

Sea $U_n = \{f \in B_{X^*} : d(f, 0) < \frac{1}{n}\}$ un abierto, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una vecindad de 0 en la topología débil* tal que $V_n \subseteq U_n$. Podemos asumir que V_n tiene la forma $V_n = \{f \in B_{X^*} : |f(x)| < \varepsilon_n \text{ para todo } x \in \Phi_n\}$ con $\varepsilon_n > 0$ y Φ_n un subconjunto finito de X . Defina $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$. Entonces, D es numerable. Afirmamos que D es denso en X . En efecto, suponga que $f \in X^*$ es tal que $fx = 0$ para todo $x \in D$. Entonces, $f \in V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $f \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así $f = 0$. Luego D es denso en X . Por tanto, X es separable. \square

Teorema 2.32 *Sea X un espacio de Banach. Entonces, $(B_X, \text{débil})$ es metrizable en la topología débil si y solo si X^* es separable.*

Demostración. Supongamos que $(B_X, \text{débil})$ es un espacio métrico. Sea d la métrica que genera la topología débil de B_X . En cualquier espacio métrico tenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \{0\},$$

donde $B(0, \frac{1}{n})$ es la bola de centro en 0 y de radio $\frac{1}{n}$ con respecto a d . Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_{1,n}^*, x_{2,n}^*, \dots, x_{k_n,n}^*$ y $\varepsilon_n > 0$ tal que $0 \in W(0; x_{1,n}^*, x_{2,n}^*, \dots, x_{k_n,n}^*; \varepsilon_n) \cap B_X \subseteq B(0, \frac{1}{n})$. Deducimos que hay una sucesión $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ en X^* y una sucesión $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ en $(0, +\infty)$ tal que

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} W(0; x_n^*; \varepsilon_n) \cap B_X.$$

Demostremos que $\text{Span}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X^* y X^* es separable. Supongamos por el contrario que $\overline{\text{Span}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|} \neq X^*$ y considere $x_0^* \in X^* - \overline{\text{Span}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}$. Entonces, obtenemos que $\delta = d(x_0^*, \text{Span}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}) > 0$ y por el Teorema 1.10 existe un $x^{**} \in X^{**}$ con $\|x^{**}\| = 1$ tal que $x^{**}(x_n^*) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x^{**}(x_0^*) = \delta$. Sea $V = W(0; x_0^*; \frac{\delta}{2}) \cap B_X$, entonces V es una vecindad de 0 en la topología débil de B_X . Como $(B_X, \text{débil})$ es un espacio métrico existe una bola abierta con centro en 0 (con respecto a la distancia en B_X que genera la topología débil) contenida en V . Por lo visto inicialmente, encontramos un conjunto finito $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{n \in A} W(0; x_n^*; \varepsilon_n) \cap B_X \subseteq V$. Como $J(B_X) \subseteq B_{X^{**}}$ es un conjunto débil* denso en $B_{X^{**}}$ (teorema de Goldstine), entonces, para cada $x^{**} \in B_{X^{**}}$ existe un $x_0 \in B_X$ tal que $Jx_0 \in \bigcap_{n \in A} W(x^{**}; x_n^*; \varepsilon_n)$. Por tanto,

$$|Jx_0(x_n^*) - x^{**}(x_n^*)| < \varepsilon_n \text{ para cada } n \in A.$$

Como x^{**} se anula en $\text{Span}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ tenemos que

$$|Jx_0(x_n^*)| = |x_n^*(x_0)| < \varepsilon_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Luego $x_0 \in \bigcap_{n \in A} W(0; x_n^*; \varepsilon_n)$ y como $x_0 \in B_X$ obtenemos que $x_0 \in V$. Así, $|Jx_0(x_0^*) - x^{**}(x_0^*)| < \frac{\delta}{2}$, esto es, $|x_0^*(x_0) - \delta| < \frac{\delta}{2}$ de donde $|x_0^*(x_0)| \geq \delta - |x_0^*(x_0) - \delta| > \frac{\delta}{2}$ es decir $x_0 \notin V$. Lo que da una contradicción. Por tanto X^* es separable.

Recíprocamente, supongamos que X^* es separable. Por el Teorema 2.31 tenemos que $(B_{X^{**}}, \text{débil}^*)$ es metrizable en la topología débil* de X^{**} . Sea d la métrica que genera la topología débil* sobre $B_{X^{**}}$. Para cada $x, y \in B_X$ consideremos la métrica en B_X definida por $p(x, y) = d(Jx, Jy)$. Como d es una métrica sobre $B_{X^{**}}$ obtenemos que p es una métrica en B_X .

Ahora, $J : (B_X, p) \rightarrow (J(B_X), d)$ es un homeomorfismo puesto que $J : X \rightarrow J(X)$ es biyectiva, y además, si $x_0 \in B_X$ y $B_r(x_0)$ es abierto en (B_X, p) entonces claramente por la definición de p , $J(B_r(x_0))$ es abierto en $(J(B_X), d)$.

Por otro lado, del Teorema 2.18 tenemos que $J : (B_X, \text{débil}) \rightarrow (J(B_X), \text{débil}^*)$ es un homeomorfismo. Así, tomando $f : (B_X, p) \rightarrow (B_X, \text{débil})$ definida por $f(x) = (J \circ J^{-1})(x)$, donde $J : (B_X, p) \rightarrow (JB_X, d)$ y $J^{-1} : (J(B_X), \text{débil}^*) \rightarrow (B_X, \text{débil})$ tenemos que $f : (B_X, p) \rightarrow (B_X, \text{débil})$ es un homeomorfismo (puesto que J y J^{-1} son homeomorfismos). Luego la topología generada por p en B_X es la topología débil. Por lo tanto, $(B_X, \text{débil})$ es metrizable. \square

Nota 18. Si X es un espacio de Banach tal que $(B_X, \text{débil})$ es metrizable entonces X^* tiene un subconjunto denso total (recordemos, que subconjunto $A \subseteq X^*$ se llama total si para cada $x \in X$ con la propiedad que $x^*(x) = 0, \forall x^* \in A$ tenemos que $x = 0$). En efecto, del teorema anterior se sigue que X^* es separable, es decir, existe un $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$ un conjunto denso contable. Demostremos que $A = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X^*$ es un conjunto total. Sea $x \in X$ tal que $x_n^*(x) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada Jx tenemos, $Jx(x_n^*) = x_n^*(x) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Usando la continuidad de Jx sobre X^* obtenemos que $Jx = 0$ en \overline{A} , pero $\overline{A} = X^*$ y por tanto $Jx = 0$, es decir $x = 0$.

Teorema 2.33 *Sea X un espacio de Banach. Si X^* tiene un conjunto total numerable, entonces sobre cada subconjunto débilmente compacto de X la topología débil es metrizable.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ un conjunto débilmente compacto y $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$ un conjunto total. Defina $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x - y)|}{2^n(\|x_n^*\| + 1)}.$$

Para cada $x, y \in A$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x - y)|}{2^n(\|x_n^*\| + 1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n^*\| \cdot (\|x\| + \|y\|)}{2^n(\|x_n^*\| + 1)} \leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2M$$

donde $M = \sup_{x \in A} \|x\| < \infty$. Note que M está bien definida pues A es acotado en norma. Por tanto, $d(x, y) \in \mathbb{R}, \forall x, y \in A$. Si $d(x, y) = 0$ entonces $x_n^*(x - y) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y usando que $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$ es un conjunto total obtenemos que $x - y = 0$ esto es $x = y$.

Los otros axiomas para una métrica son fáciles de verificar. De la misma forma como se hizo en el teorema 2.31 obtenemos que la topología débil sobre A es generada por d . □

Teorema de Eberlein-Šmulian

En el capítulo anterior vimos que los subconjuntos débil* cerrados y acotados de un espacio de Banach son compactos. Por otra parte, vimos que B_{c_0} y B_{l_1} (Ejemplos 2.13 y 2.14) son débilmente cerrados y acotados pero no son débilmente compactos, de esto surge la siguiente pregunta ¿cuándo un subconjunto A de un espacio de Banach es débilmente compacto? Recordemos que si el espacio de Banach X es reflexivo entonces por el Teorema 2.23 tenemos que la bola unitaria B_X es débilmente compacta, consecuentemente, los subconjuntos cerrados y acotados en un espacio de Banach reflexivo son débilmente compactos. Ahora, observe que si K es un subconjunto débilmente compacto en el espacio lineal normado X y $x^* \in X^*$ entonces, dado que x^* es débilmente continuo el conjunto $x^*(K)$ es un subconjunto compacto de escalares, de esto se sigue que $x^*(K)$ es acotado para cada $x^* \in X^*$. Por el teorema de Banach-Steinhaus esto implica que K es acotado, y como K es un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff, K es débilmente cerrado. Así K también es cerrado en norma. Por lo tanto los subconjuntos débilmente compactos son cerrados y acotados en norma. De lo anterior tenemos que en la topología débil los espacios débilmente compactos son cerrados y acotados en norma, sin embargo los subconjuntos cerrados y acotados en la topología débil no son necesariamente compactos.

Continuando con nuestro estudio de las topologías débiles encontramos que, aunque la topología débil en los espacios de Banach de dimensión infinita no es metrizable (como lo demuestra el Ejemplo 2.17), con ayuda del teorema de Eberlein-

Šmulian, se puede encontrar una equivalencia entre las tres clases de compacidad para los subconjuntos de un espacio de Banach dotado con la topología débil.

Antes de proceder a demostrar el teorema de Eberlein-Šmulian veamos unos hechos importantes que nos serán de mucha ayuda para la demostración de este teorema.

Nota 19. Observe que la convergencia débil y débil* coinciden con respecto a la inyección canónica. En efecto, $x_n \xrightarrow{\text{débil}} x \Leftrightarrow x^*(x_n) \rightarrow x^*(x), \forall x^* \in X^* \Leftrightarrow Jx_n \xrightarrow{\text{débil}^*} Jx$.

Teorema 3.1 *Si A es relativamente débilmente secuencialmente compacto, entonces $J(A)$ es relativamente débil* secuencialmente compacto.*

Demostración. Sea $(a_n) \subset J(A)$ una sucesión de elementos de $J(A)$, por definición existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $a_n = J(x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Dado que A es relativamente débilmente secuencialmente compacto existen $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ y $x \in X$ tales que $x_{n_k} \xrightarrow{\text{débil}} x$, esto es $x^*(x_{n_k}) \rightarrow x^*(x)$ para todo $x^* \in X^*$. Así, tomando $a_{n_k} = J(x_{n_k})$ y $a = J(x) \in X^{**}$ tenemos que $a_{n_k} = J(x_{n_k}) \xrightarrow{\text{débil}^*} J(x) = a$, esto es, (a_{n_k}) converge débilmente a a en $J(X) \subseteq X^{**}$. Por tanto $J(A)$ es relativamente débil* secuencialmente compacto. \square

Teorema 3.2 *Sea X un espacio vectorial normado, y $A \subseteq X$, entonces $J(A)$ es relativamente débil* compacto si y sólo si A es relativamente débilmente compacto.*

Demostración. Supongamos que $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$ es compacto, entonces el conjunto $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*} \cap J(X)$ también es compacto en la topología débil*. Por el Corolario 2.4 del capítulo anterior tenemos que $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*} \cap J(X) = J(\overline{A^{\text{débil}}})$, esto implica que $J(\overline{A^{\text{débil}}})$ es compacto en la topología débil* de X^{**} . Como $J : X \rightarrow J(X)$ es un homeomorfismo entre X y $J(X)$ con las topologías débil y débil* respectivamente tenemos que $\overline{A^{\text{débil}}}$ es compacto.

Recíprocamente, si A es relativamente débilmente compacto entonces $J(\overline{A^{\text{débil}}})$ es un conjunto compacto para la topología débil* y por tanto es débil* cerrado y acotado luego, dado que $J(A) \subseteq J(\overline{A^{\text{débil}}})$, tenemos que

$$\overline{J(A)}^{\text{débil}^*} \subseteq \overline{J(\overline{A^{\text{débil}}})}^{\text{débil}^*} = J(\overline{A^{\text{débil}}}). \quad (3.1)$$

Sigue que $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$ es cerrado y acotado en la topología débil*. Por tanto, del teorema de Alaoglu concluimos que $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$ es compacto. \square

Lema 3.1 *Sea X un espacio vectorial normado. Un subconjunto $A \subseteq X$ es relativamente débilmente compacto si y sólo si A es acotado y $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*} \subseteq J(X)$.*

Demostración. Claramente, si A es relativamente débilmente compacto entonces, por (3.1) $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*} \subseteq J(\overline{A}^{\text{débil}}) \subseteq J(X)$. Ahora, dado que A es relativamente débilmente compacto $\overline{A}^{\text{débil}}$ es acotado lo que implica que A también es acotado.

Recíprocamente, suponga A es acotado y que $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*} \subseteq J(X)$. Como A es acotado $J(A)$ es acotado, y así $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$ es acotado. Por el teorema de Alaoglu, tenemos que $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$ es compacto en la topología débil* y del teorema anterior tenemos que A es relativamente débilmente compacto. \square

Así, para mostrar que un conjunto acotado A es relativamente débilmente compacto, la estrategia es ver si cada uno de los elementos de $\overline{J(A)}^{\text{débil}^*}$ está en X .

Lema 3.2 *Sea X un espacio vectorial normado. Si E es un subespacio de dimensión finita de X^{**} , entonces existe un subconjunto finito E' de S_{X^*} tal que para cada x^{**} en E tenemos*

$$\frac{\|x^{**}\|}{2} \leq \text{máx}\{|x^{**}(x^*)| : x^* \in E'\}.$$

Demostración. Como E es de dimensión finita entonces S_E es un subconjunto compacto en la norma de X^{**} , por tanto, existe una ε -red finita $F = \{x_1^{**}, \dots, x_n^{**}\}$ con $\varepsilon = \frac{1}{4}$ de S_E . Esto es $S_E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i^{**}, \frac{1}{4})$. Sea $E' = \{x_1^*, \dots, x_n^*\} \subseteq S_{X^*}$ tal que

$$|x_k^{**}(x_k^*)| > \frac{3}{4}, \text{ para cada } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Entonces para cualquier $x^{**} \in S_E$, tenemos que

$$\begin{aligned} |x^{**}(x_k^*)| &= |x_k^{**}(x_k^*) + (x^{**}(x_k^*) - x_k^{**}(x_k^*))| \\ &\geq |x_k^{**}(x_k^*)| - |x^{**}(x_k^*) - x_k^{**}(x_k^*)| \\ &\geq \frac{3}{4} - \|x^{**} - x_k^{**}\| \\ &\geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que, para cualquier $x^{**} \in S_E$

$$\frac{\|x^{**}\|}{2} = \frac{1}{2} \leq |x^{**}(x_k^*)| \leq \max\{|x^{**}(x_i^*)| : x_i^* \in E'\}$$

para una elección adecuada de k . Fácilmente este resultado se puede extender para todo el subespacio E . \square

Nota 20. Considere el espacio generado por una sucesión de elementos de X^{**} , $[x_n^{**}]$. Suponga que para cada $y^{**} \in [x_n^{**}]$ se tiene que

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \leq \sup_m |y^{**}(x_m^*)|, \text{ donde } (x_m^*) \subset B_{X^*}. \quad (3.2)$$

Veamos que (3.2) es válida para cada $x^{**} \in \overline{[x_n^{**}]}$.

Sean $x^{**} \in \overline{[x_n^{**}]}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $y_0^{**} \in [x_n^{**}]$ tal que $y_0^{**} \in B(x^{**}, \frac{\varepsilon}{2})$. Esto es $|x^{**}(f) - y_0^{**}(f)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $f \in B_{X^*}$. Por (3.2), tenemos

$$\frac{\|y_0^{**}\|}{2} \leq \sup_m |y_0^{**}(x_m^*)|.$$

Luego

$$\begin{aligned} |x^{**}(x_m^*)| &= |x^{**}(x_m^*) - y_0^{**}(x_m^*) + y_0^{**}(x_m^*)| \\ &\geq |y_0^{**}(x_m^*)| - |x^{**}(x_m^*) - y_0^{**}(x_m^*)| \\ &\geq |y_0^{**}(x_m^*)| - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \sup_m |x^{**}(x_m^*)| &\geq \sup_m |y_0^{**}(x_m^*)| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \frac{\|y_0^{**}\|}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \frac{\|y_0^{**} - x^{**} + x^{**}\|}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \frac{\|x^{**}\|}{2} - \frac{\|y_0^{**} - x^{**}\|}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \frac{\|x^{**}\|}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \frac{\|x^{**}\|}{2} - \frac{3\varepsilon}{4}, \quad \forall \varepsilon \geq 0. \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, tenemos para cada $x^{**} \in \overline{[x_n^{**}]}$

$$\frac{\|x^{**}\|}{2} \leq \sup_m |x^{**}(x_m^*)|.$$

Otro resultado importante que será de gran ayuda para la demostración del teorema de Eberlein-Šmulian es el hecho de que el espacio dual de un espacio de Banach separable contiene un subconjunto total, aunque no se verá la demostración para todo espacio separable en general, se mostrará un breve resultado para los espacios generados por los elementos de un conjunto.

Lema 3.3 *Sea X un espacio de Banach, y $[a_n]$ el espacio generado por los elementos a_n de X , existe $\{d_n^*\}$ en X^* tal que $\{d_n^*\}$ es un subconjunto total de $[a_n]^*$.*

Demostración. En efecto, Consideren $\{d_n\}_{n \geq 1}$ un subconjunto denso y numerable en la esfera unitaria de $[a_n]$ (Recuerde que el espacio generado por los elementos de un conjunto numerable es un espacio separable) y $\{d_n^*\}$ en X^* tal que $d_n^*(d_m) = 1$ si $n = m$, y $d_n^*(d_m) = 0$ si $n \neq m$. Veamos que $\{d_n^*\}$ es total.

Sea $x \in X$ tal que $d_n^*(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $x \neq 0$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|x\| = 1$. Por la densidad de $\{d_n\}_{n \geq 1}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x - d_{n_0}\| < \frac{1}{2\|d_{n_0}^*\|}.$$

Luego

$$1 = |d_{n_0}^*(x) - d_{n_0}^*(d_{n_0})| = |d_{n_0}^*(x - d_{n_0})| \leq \|d_{n_0}^*\| \cdot \|x - d_{n_0}\| < \frac{1}{2}$$

Lo cual es un absurdo. Por tanto, necesariamente x debe ser el vector nulo.

Nota 21. Note que, además de ser total, $\{d_n^*\}$ también es numerable.

Basados en estos tres lemas procedamos a demostrar el teorema de Eberlein-Šmulian.

Teorema 3.3 (Eberlein-Šmulian) *Un subconjunto de un espacio de Banach es relativamente débilmente compacto si y solo si es relativamente débilmente secuencialmente compacto. En particular, un subconjunto de un espacio de Banach es débilmente compacto si y solo si es débilmente secuencialmente compacto.*

Demostración. Para empezar, mostremos que un subconjunto relativamente débilmente compacto de un espacio de Banach X es relativamente débilmente secuencialmente compacto.

Sea A es un subconjunto relativamente débilmente compacto de X y sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A . Consideremos el subespacio cerrado $[a_n] = \overline{Span\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Este espacio es débilmente cerrado en X . Por tanto $A \cap [a_n]$ es un subconjunto relativamente débilmente compacto en el espacio de Banach separable $[a_n]$. Ahora, por el Lema 3.3, tenemos que existe un subconjunto total y numerable de $[a_n]^*$. Así, por el Teorema 2.33 tenemos que el conjunto $\overline{A \cap [a_n]^{\text{débil}}}$ es metrizable en la topología débil de $[a_n]$.

Dado que los conjuntos compactos y secuencialmente compactos son equivalentes en los espacios métricos, $\overline{A \cap [a_n]^{\text{débil}}}$ es débilmente secuencialmente compacto. En particular, si a es un punto de acumulación débil, entonces existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de (a_n) que converge débilmente a a en $[a_n]$. Por el teorema de extensión de Hahn-Banach tenemos que para todo $\varphi \in [a_n]^*$ existe $f \in X^*$, $f|_{[a_n]} = \varphi$. Ahora, supongamos que (a_{n_k}) no converge débilmente a a en X . De ello que, existe $f \in X^*$ tal que $f(a_{n_k}) \not\rightarrow f(a)$, entonces para $\varphi = f|_{[a_n]} \in [a_n]^*$ tendríamos que $\varphi(a_{n_k}) \not\rightarrow \varphi(a)$, esto contradice que (a_{n_k}) que converge débilmente a a en $[a_n]$. por tanto (a_{n_k}) también converge débilmente a a en X .

Recíprocamente, Sea A un subconjunto relativamente débilmente secuencialmente compacto, por el Teorema 3.1 tenemos que $J(A)$ es relativamente débil* secuencialmente compacto, además, como A es relativamente débilmente secuencialmente compacto A es acotado. Veamos que $\overline{J(A)^{\text{débil}^*}} \subseteq J(X)$.

Sea $x^{**} \in \overline{J(A)^{\text{débil}^*}}$ y $x_1^* \in S_{X^*}$. Como $x^{**} \in \overline{J(A)^{\text{débil}^*}}$ cada vecindad débil* de x^{**} contiene un elemento de $J(A)$. En particular, la vecindad débil* generada por $\varepsilon = 1$ y x_1^* , $\{y^{**} \in X^{**} : |(y^{**} - x^{**})(x_1^*)| < 1\}$, contiene un elemento Ja_1 , $a_1 \in A$ tal que

$$|(x^{**} - Ja_1)(x_1^*)| < 1.$$

Consideremos ahora el espacio generado por x^{**} y $x^{**} - Ja_1$, $F_1 = Span[x^{**}, x^{**} - Ja_1] \subseteq X^{**}$. F_1 tiene dimensión finita, por tanto, del Lema 3.2 existen $x_2^*, x_3^*, \dots, x_{n(2)}^* \in S_{X^*}$ tales que

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \leq \max\{|y^{**}(x_k^*)| : 1 \leq k \leq n(2)\},$$

para cada $y^{**} \in F_1$. Observe que x^{**} es fijo, así, podemos considerar otra vecindad débil* de x^{**} generada por $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_{n(2)}^*$. Entonces, existe $Ja_2 \in J(A)$

tal que

$$|(x^{**} - Ja_2)(x_i^*)| < \frac{1}{2} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n(2).$$

Consideremos el subespacio $F_2 = \text{Span}\{x^{**}, x^{**} - Ja_1, x^{**} - Ja_2\}$ de X^{**} . Por el Lema 3.2 existen $x_{n(2)+1}^*, x_{n(2)+2}^*, \dots, x_{n(3)}^*$ en S_{X^*} tales que

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \leq \text{máx}\{|y^{**}(x_k^*)| : 1 \leq k \leq n(3)\},$$

para cada $y^{**} \in F_2$. Una vez más, tomando $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $x_1^*, \dots, x_{n(3)}^* \in S_{X^*}$ y $Ja_3 \in J(A)$ tal que $|(x^{**} - Ja_3)(x_i^*)| < \frac{1}{3}$ para todo $i = 1, 2, \dots, n(3)$. Podemos encontrar $x_{n(3)+1}^*, x_{n(3)+2}^*, \dots, x_{n(4)}^*$ en S_{X^*} tales que

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \leq \text{máx}\{|y^{**}(x_k^*)| : 1 \leq k \leq n(4)\}$$

para todo $y^{**} \in F_3 = \text{Span}\{x^{**}, x^{**} - Ja_1, x^{**} - Ja_2, x^{**} - Ja_3\}$.

Continuando con este proceso, encontramos una sucesión $(a_n) \subseteq A$ tal que $|(x^{**} - Ja_k)(x_m^*)| < \frac{1}{k}$ para todo $1 \leq m \leq n(k)$. Ahora, dado que A es relativamente débilmente compacto, A también es relativamente débilmente numerablemente compacto. luego cada subconjunto infinito de A tiene un punto de acumulación débil en X . De esto sigue que, existe $x \in X$ tal que $a_n \xrightarrow{\text{débil}} x$, consecuentemente $Ja_n \xrightarrow{\text{débil}^*} Jx$. De esta convergencia tenemos que $Jx \in \overline{\text{Span}[Ja_n]}^{\text{débil}^*}$, luego $x^{**} - Jx \in \overline{\text{Span}\{x^{**}, x^{**} - Ja_1, \dots\}}^{\text{débil}^*}$. Nuestra construcción de los x_i^* y los a_i nos asegura que

$$\frac{\|y^{**}\|}{2} \leq \sup_m |y^{**}(x_m^*)| \quad (3.3)$$

para cada y^{**} de $\text{Span}\{x^{**}, x^{**} - Ja_1, \dots\}$, y de la Nota 20 concluimos que (3.3) también se cumple para todo $y^{**} \in \overline{\text{Span}\{x^{**}, x^{**} - Ja_1, x^{**} - Ja_2, \dots\}}^{\text{débil}^*}$. Como $x^{**} - Jx$ está en $\overline{\text{Span}\{x^{**}, x^{**} - Ja_1, x^{**} - Ja_2, \dots\}}^{\text{débil}^*}$ entonces

$$\frac{\|x^{**} - Jx\|}{2} \leq \sup_m |(x^{**} - Jx)(x_m^*)|. \quad (3.4)$$

Por construcción sigue que $|(x^{**} - Ja_k)(x_m^*)| < \frac{1}{k}$, para $1 \leq m \leq n(k)$. Además, como $Ja_n \xrightarrow{\text{débil}^*} Jx$ tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|Ja_n(x_m^*) - Jx(x_m^*)| < \varepsilon$.

Por tanto, tomando $k \geq n_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} |(x^{**} - Jx)(x_m^*)| &\leq |(x^{**} - Ja_k)(x_m^*)| + |Ja_n(x_m^*) - Jx(x_m^*)| \\ &\leq \frac{1}{k} + \varepsilon, \end{aligned}$$

y pasando el limite cuando k tiende a infinito obtenemos

$$|(x^{**} - Jx)(x_m^*)| \leq \varepsilon.$$

De la desigualdad (3.4) sigue que $\frac{\|x^{**} - Jx\|}{2} \leq \varepsilon$, entonces $\|x^{**} - Jx\| \leq 2\varepsilon$. De esta manera, $x^{**} - Jx = 0$ es decir $x^{**} = Jx \in JX$. \square

Veamos ahora dos ejemplos donde el teorema de Eberlein-Šmulian falla para el caso de la topología débil*.

Ejemplo 3.1 Sea Γ un conjunto no vacío, denote por $l_1(\Gamma)$ el conjunto de todas las sucesiones $x : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)| < \infty$. Análogamente al caso de l_1 se verifica que $(l_1(\Gamma), \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach donde $\|x\|_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|$ para todo $x \in l_1(\Gamma)$ y $(l_1(\Gamma))^* = l_\infty(\Gamma)$, donde $l_\infty(\Gamma)$ es el conjunto de las funciones $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\|\varphi\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |\varphi(\gamma)| < \infty$. La acción de $\varphi \in l_\infty(\Gamma)$ sobre $x \in l_1(\Gamma)$ es dada por

$$\varphi(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma)x(\gamma).$$

Considere ahora $\Gamma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, es decir Γ es el conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{N} . Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\delta_n : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\delta_n(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

Veamos que $\delta_n \in B_{l_\infty(\Gamma)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y (δ_n) no posee una subsucesión débil* convergente.

Solución. Claramente, $\|\delta_n\|_\infty = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es $\delta_n \in B_{l_\infty(\Gamma)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponga que existe una subsucesión $(\delta_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ y un $\delta \in l_\infty(\Gamma)$ tales que $\delta_{k_n} \rightarrow \delta$ débil*. Entonces, $\delta_{k_n}(x) \rightarrow \delta(x)$ para todo $x \in l_1(\Gamma)$. Consideremos $A \subseteq \mathbb{N}$ dada por $A = \{k_0, k_2, k_4, \dots\}$ y defina $x : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$x(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } B = A \\ 0 & \text{si } B \neq A \end{cases}$$

entonces $x \in l_1(\Gamma)$ y como $(\delta_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en la topología débil* de $l_\infty(\Gamma)$ tenemos que la sucesión $(\delta_{k_n}(x))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ converge. Pero

$$\delta_{k_n}(x) = \sum_{B \subseteq \mathbb{N}} \delta_{k_n}(B)x(B) = \delta_{k_n}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_n \in A \\ 0 & \text{si } k_n \notin A, \end{cases}$$

esto es

$$\delta_{k_n}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Claramente $\delta_{k_n}(x)$ no es convergente. Por tanto la sucesión (δ_n) no posee una subsucesión débil* convergente.

Ejemplo 3.2 Definamos $x_n^* \in l_\infty^*$ por $x_n^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = x_n$ para todo $(x_1, x_2, \dots) \in l_\infty$. Demostremos que $\|x_n^*\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene una subsucesión convergente.

Solución. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $|x_n^*(x_1, x_2, \dots)| = |x_n| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$ para todo $(x_1, x_2, \dots) \in l_\infty$ luego $\|x_n^*\| \leq 1$. Además

$$1 = |x_n^*(e_n)| \leq \|x_n^*\| \cdot \|e_n\| = \|x_n^*\|.$$

Suponga que existe una subsucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{N} tal que $x_{n_k}^* \rightarrow x^*$ débil* para algún $x^* \in l_\infty^*$. Entonces $x_{n_k}^*(x) \rightarrow x^*(x)$ para todo $x \in l_\infty$. Considere $x_0 = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{n_1, n_3, n_5, \dots\}; \\ 2 & \text{si } n \notin \{n_1, n_3, n_5, \dots\}, \end{cases}$$

entonces $x \in l_\infty$ y por tanto la sucesión $(x_{n_k}^*(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para todo $x \in l_\infty$. Pero

$$x_{n_k}^*(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \{n_1, n_3, n_5, \dots\}; \\ 2 & \text{si } n \notin \{n_1, n_3, n_5, \dots\}, \end{cases}$$

lo cual es una contradicción.

3.1. Operadores débilmente compactos

Muchas de las aplicaciones de los teoremas vistos se da en los operadores débilmente compactos como lo veremos en algunos teoremas de esta sección.

Definición 3.1 Sea $T \in L(X, Y)$. El operador T es débilmente compacto si la clausura débil de $T(B_X)$ es compacta en la topología débil de Y . Entonces por el teorema de Eberlein-Šmulian, un operador es débilmente compacto si y solo si envía subconjuntos acotados en subconjuntos débilmente secuencialmente compactos.

Nota 22. Sean X y Y espacios vectoriales normados. Suponga que $y_n^* \rightarrow y^*$ en la topología débil* de Y^* . Entonces para cada $x \in X$, $(T^*y_n^*)(x) = y_n^*(Tx) \rightarrow y^*(Tx) = (T^*y^*)(x)$. Así, $T^*y_n^* \rightarrow T^*y^*$ en la topología débil* de X^* .

De lo anterior tenemos que el operador lineal $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ es una función continua de $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ (Y^* dotado con la topología débil*) en $(X^*, \sigma(X^*, X))$ (X^* dotado con la topología débil*).

Teorema 3.4 Un operador lineal $T \in L(X, Y)$ es débilmente compacto si y solo si $T^{**}(X^{**})$ está contenido en la imagen de la inyección canónica $J(Y)$ de Y en Y^{**}

Demostración. Sean B_X y $B_{X^{**}}$ las bolas unitarias de X y X^{**} respectivamente. Por la Nota 3 tenemos que T^{**} es una función continua de $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ en $(Y^{**}, \sigma(Y^{**}, Y^*))$. Además, como T^{**} es una extensión de T y $TB_X \subseteq \overline{TB_X}^{\text{débil}}$ entonces

$$T^{**}(\overline{JB_X^{\text{débil}^*}}) \subseteq \overline{T^{**}(JB_X)^{\text{débil}^*}} = \overline{J(TB_X)^{\text{débil}^*}} \subseteq \overline{J(\overline{TB_X}^{\text{débil}})^{\text{débil}^*}}. \quad (3.5)$$

Si T es débilmente compacto, tenemos que $\overline{TB_X}^{\text{débil}}$ es débilmente compacto en Y y como $J : Y \rightarrow J(Y)$ es un homeomorfismo débil-débil* continuo, $J(\overline{TB_X}^{\text{débil}})$ es compacto y por tanto cerrado en la topología débil* de Y^{**} . Entonces de (3.5) inferimos

$$T^{**}(\overline{JB_X^{\text{débil}^*}}) \subseteq J(\overline{TB_X}^{\text{débil}}).$$

Por teorema de Goldstein $\overline{JB_X^{\text{débil}^*}} = B_{X^{**}}$, y así $T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq J(\overline{TB_X}^{\text{débil}})$. Ahora, por el Teorema 2.5, $\overline{TB_X}^{\text{débil}} \subset \overline{Y}^{\text{débil}} = \overline{Y} = Y$ y $J(\overline{TB_X}^{\text{débil}}) \subseteq J(Y)$, lo cual prueba que

$$T^{**}(X^{**}) \subseteq J(Y). \quad (3.6)$$

Recíprocamente, sea $T \in L(X, Y)$ un operador lineal tal que $T^{**}(X^{**}) \subseteq J(Y)$. Dado que T^{**} es continuo con las topologías débil* de X^{**} e Y^{**} , y $B_{X^{**}}$ es débil* compacto

en X^{**} (teorema de Banach-Alaoglu), $T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq J(Y)$ es débil* compacto en Y^{**} . Ahora, observe que $JB_X \subseteq \overline{JB_X}^{\text{débil}^*}$ y por el teorema de Goldstine $\overline{JB_X}^{\text{débil}^*} = B_{X^{**}}$. Sigue que

$$J(T(B_X)) = T^{**}(J(B_X)) \subseteq T^{**}(\overline{J(B_X)}^{\text{débil}^*}) = T^{**}(B_{X^{**}}).$$

Luego el conjunto $J(T(B_X))$ es relativamente débil* compacto. Por el Teorema 3.2 esto implica que $T(B_X)$ es relativamente débilmente compacto en Y . \square

Corolario 3.1 *Sean X e Y espacios vectoriales normados. Si X o Y es reflexivo, cada operador en $L(X, Y)$ es débilmente compacto.*

Demostración. Sea $T \in L(X, Y)$ y $T^{**} : X^{**} \rightarrow Y^{**}$ el segundo operador adjunto de T . Si Y es reflexivo, entonces

$$T^{**}(X^{**}) \subseteq Y^{**} = J(Y),$$

y, si X es reflexivo,

$$T^{**}(X^{**}) = T^{**}(J(X)) = J(T(X)) \subseteq J(Y).$$

Por tanto, para ambos casos tenemos que T es débilmente compacto. \square

Corolario 3.2 *El conjunto de los operadores débilmente compactos es cerrado en la topología uniforme de operadores de $L(X, Y)$.*

Demostración. Si $T_n \rightarrow T$ en $L(X, Y)$, entonces $\|T_n^{**} - T^{**}\| = \|T_n - T\| \rightarrow 0$. Si T_n es débilmente compacto, entonces para cada $x^{**} \in X^{**}$, $T_n^{**}(x^{**}) \in J(Y)$ y dado que $J(Y)$ es cerrado en la topología de la norma de Y^{**} , $T^{**}(x^{**}) \in J(Y)$ para cada $x^{**} \in X^{**}$. Por tanto $T^{**}(X^{**}) \subseteq J(Y)$, y por el Teorema 3.4 concluimos que T es débilmente compacto. \square

Teorema 3.5 *Un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ es débilmente compacto si y solo si T^* es débil*- débil continuo de Y^* a X^**

Demostración. Sea T un operador débilmente compacto. Por el Teorema 3.4 sabemos que $T^{**}(X^{**}) \subseteq J(Y)$. Así, para cada $x^{**} \in X^{**}$, existe un $y \in Y$ con $T^{**}x^{**} = Jy$ tal que

$$x^{**}(T^*(y^*)) = (T^{**}x^{**})y^* = Jy(y^*) = y^*(y). \quad (3.7)$$

Ahora, sea $(y_i^*)_{i \in I}$ una red en Y^* tal que $y_i^* \xrightarrow{\omega^*} y^*$, $y^* \in Y^*$, entonces $y_i^*(y) \rightarrow y^*(y)$ para todo $y \in Y$. Por (3.7), tenemos $x^{**}(T^*(y_i^*)) \rightarrow x^{**}(T^*(y^*))$ para cada $x^{**} \in X^{**}$, es decir $T^*y_i^* \xrightarrow{\omega} T^*y^*$ en X^* . Por tanto T^* es débil*-débil continuo de Y^* a X^* .

Recíprocamente, Sea T^* un operador lineal débil*-débil continuo de Y^* a X^* , y sea $x_0^{**} \in X^{**}$. Si $y_i^*(y) \rightarrow y^*(y)$, $y \in Y$, entonces $x_0^{**}(T^*y_i^*) = (T^{**}x_0^{**})y_i^* \rightarrow (T^{**}x_0^{**})y^*$. Luego $T^{**}x_0^{**} \in Y^{**}$ es un funcional lineal y continuo en Y^* con la topología débil*. Por el Teorema 2.17, $T^{**}x_0^{**} \in J(Y)$, y $T^{**}(X^{**}) \subseteq J(Y)$. Por el Teorema 3.4 concluimos que T es un operador lineal débilmente compacto. \square

Teorema 3.6 (*Gantmacher*) *Un operador en $L(X, Y)$ es débilmente compacto si y solo si su adjunta es débilmente compacta.*

Demostración. Sea T un operador débilmente compacto. Dado que $B_{Y^*} \subseteq Y^*$ es débil* compacto (teorema de Banach-Alaoglu) y T^* es débil*- débil continuo (Teorema 3.5) $T^*(B_{Y^*})$ es débilmente compacto en X^* . Por tanto T^* es débilmente compacto.

Recíprocamente, si T^* es débilmente compacto del Teorema 3.5 deducimos que T^{**} es una función débil*- débil continua de X^{**} a Y^{**} . Por el teorema de Goldstine y de la continuidad de T^{**} tenemos que $T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq \overline{T^{**}(J(B_X))}^{\text{débil}} = \overline{J(T(B_X))}^{\text{débil}}$. Por el Teorema 2.5 la clausura débil y la clausura fuerte del subconjunto convexo es la misma. Así $T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq \overline{J(T(B_X))}^{\|\cdot\|} \subseteq J(\overline{TB_X}^{\text{débil}}) \subseteq J(Y)$, y por el Teorema 3.4 el operador T es débilmente compacto. \square

Bibliografía

- [1] BACHMAN, George y NARICI, Lawrence. *Functional Analysis*. Academic Press, New York. 1972.
- [2] BRACE. John. Compactness in the weak topology. *Math. Mag.*, 28, 125-134, 1955.
- [3] BREZIS, Haim. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York. 2010.
- [4] DIESTEL, Joseph. *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer-Verlag, New York. 1984.
- [5] DIEUDONNÉ, Jean. *History of functional Analysis*. North-Holland. 1981.
- [6] DUNFORD, Nelson y SCHWARTZ, Jacob. *Linear Operators* (Volumen 1). Interscience, New York. 1972.
- [7] EBERLEIN, William. Weak Compactness in Banach spaces. I. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 33, 51-53, 1947.
- [8] ENGELKING, Ryszard. *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlín. 1989.
- [9] FACENDA, José. *Geometría de Espacios de Banach*. Univ Sevilla, España. 1998.
- [10] FLORET, Klaus. *Weakly Compact Sets*. Springer Lecture Notes in Mathematics. Volume 801. Springer-Verlag, New York. 1980.

- [11] GROTHENDIECK, Alexandre. Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux. *Amer. J. Math.* 74, 168-186, 1952.
- [12] HU, Sze. *Introduction to general Topology*. Holden Day, Inc., San Francisco, California. 1969.
- [13] JAENICH, Klaus. *Topology*. Springer-Verlag, New York. 1984.
- [14] LINDENSTRAUSS, Joram. Weakly Compact Sets –their topological properties and the Banach spaces they generate. Proceedings of the Symposium on Infinite Dimensional Topology. *Annals of Math. Studies*, no. 69, 235-263, 1972.
- [15] MUNKRES, James. *Topology*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. 2000.
- [16] PELCZYNSKI, Aleksander. A proof of Eberlein-Smulian theorem by an application of basic sequences. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 12, 543-548, 1964.
- [17] RUDIN, Walter. *Functional Analysis*. McGraw-Hill book company, New York. 1991.
- [18] RUDIN, Walter. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill book company, New York. 1970.
- [19] SMULIAN, Vitold. Über lineare topologische. *Mat. Sbornik.*, 7(49), 425-448, 1940.
- [20] YOSIDA, Kosaku. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York. 1980.