

**ANÁLISIS COMPARATIVO DEL ESPECTRO ENERGÉTICO DEL
MAGNETOEXCITON EN ANILLOS CONCÉNTRICOS Y NANOTUBO.**

YEISON FABIAN SANTOS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2015

**ANÁLISIS COMPARATIVO DEL ESPECTRO ENERGÉTICO DEL
MAGNETOEXCITON EN ANILLOS CONCÉNTRICOS Y NANOTUBO.**

YEISON FABIAN SANTOS

Trabajo de grado para optar el título de Físico

Director

Ph.D. ILIA DAVIDOVICH MIKHAILOV

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2015

A Dios, a mi madre Sandra Milena Santes, a mi abuela María Dolores Povedad de Santes, mi tía Scila Santes, a mis hermanos Wilber Alexander, Mayra Alejandra, Valentina y Oscar Eduardo, a mi novia Lyda Palacios. Por su apoyo constante motivaciones y por creer en mí.

AGRADECIMIENTOS.

No hay nada más satisfactorio el poder culminar una tesis de grado, después de varias horas de trabajo de pensamientos analíticos y raciocinio sobre el tema.

Mis más profundos agradecimientos Al PhD. Ilia Davidovich Mikhailov ¹² por su tiempo, su orientación, su colaboración, sus regaños de formación y educación como persona.

A mis compañeros de estudio y sobre todo de investigación en el grupo “FICOMACO”, en especial a Luis Carlos Porras por su colaboración y su amistad.

Muchas gracias a todos.

¹ Universidad Industrial de Santander “UIS”

² Física computacional y materia condensada “FICOMACO”

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN.....	12
1. TEORÍA.....	16
1.1. Modelo Matemático	16
1.2. Hamiltoniano en unidades adimensionales	17
1.3. Separación de variables en coordenadas de centro de masa	18
1.4. Análisis de Fourier del movimientos relativo	19
1.5. Algoritmo de procedimiento numérico.....	20
2. RESULTADOS.....	20
2.1. Exciton en Anillos Concéntricos	21
2.2. Exciton en Nanotubo	23
3. CONCLUSIONES	27
ANEXOS.....	29
BIBLIOGRAFÍA.....	33

LISTAS DE FIGURAS.

Pág.

Figura. 1 Modelo de exciton confinado en (a) anillos concéntricos y (b) nanotubo.....	16
Figura. 2 Energías del exciton en función de campo magnético de niveles más bajos del exciton confinado en dos anillos cuánticos concéntricos del radio $R=4a_0^*$ de grosor $w=0,2a_0^*$ y con dos diferentes separaciones entre ellos (a) $L=2a_0^*$ y (b) $L=10a_0^*$	21
Figura. 3 Energías del exciton en función de campo magnético de cuatro niveles más bajos del exciton confinado en dos anillos cuánticos concéntricos del radio $R=4a_0^*$, de grosor $w=0,2a_0^*$ y con dos diferentes separaciones entre ellos $L=10a_0^*$	23
Figura. 4 Energías del exciton en función de campo magnético de niveles más bajos del exciton confinado en nanotubos del radio $R=2a_0^*$ de grosor $w=0,2a_0^*$ y con tres diferentes alturas (a) $L=2a_0^*$ y (b) $L=5a_0^*$.y (c) $L=20a_0^*$	25

LISTAS DE TABLAS.

Tabla 1. Parámetros adimensionales.	30
--	----

RESUMEN

Título: ANÁLISIS COMPARATIVO DEL ESPECTRO ENERGÉTICO DEL MAGNETOEXCITON EN ANILLOS CONCÉNTRICOS Y NANOTUBO*.

Autor: SANTOS, Yeison Fabián**.

Palabras claves: Magnetoexciton, Espectro energético.

Se presenta el análisis teórico de espectros energéticos de un par electrón-hueco confinado en dos anillos cuánticos acoplados verticalmente de material GaAs-InAs y separados una distancia L y, aparte, en un nanotubo angosto en presencia de campo magnético externo aplicado a lo largo de sus ejes de simetría (axial y angular) con altura considerable L . Las dimensiones de estas nanoestructuras son del orden de decenas de nanómetros, valores comparable con la longitud de onda De Broglie de los portadores de carga electrón y hueco y por eso las oscilaciones de Aharonov-Bohm de niveles energéticos en estos sistemas son esenciales. Los Hamiltonianos correspondientes al sistema electrón-hueco en las coordenadas de centro de masa para ambas estructuras son separables y las soluciones correspondientes de la ecuación de onda para el movimiento del centro de masas se encuentran en una forma analítica, mientras que para el movimiento relativo solamente numéricamente, por medio del lenguaje de programación FORTRAN y utilizando librería Filón. Los resultados de cálculo para niveles energéticos en función de campo magnético muestran que oscilaciones de niveles energéticos de un exciton en las estructuras consideradas en la tesis bidimensionales (2D) son más pronunciadas que en un anillo cuántico aislado unidimensional (1D) esto es debido a una reducción de las barreras de potencial para las corrientes de túnel responsables por las oscilaciones de Aharonov-Bohm.

* Trabajo de grado

** Facultad de ciencias. Escuela de Física. Director: Ilia Davidovich Ph.D.

ABSTRACT

Title: COMPARATIVE ANALYSIS OF ENERGY SPECTRUM IN MAGNETOEXCITON CONCENTRIC RINGS AND NANOTUBE*.

Author: SANTOS, Yeison Fabián**.

Keywords: Magnetoexciton, energy spectrum.

Theoretical analysis of energy spectra of a pair electron hollow confined in two quantum rings coupled vertically GaAs-InAs material separated a distance L and separately presented in a narrow nanotube in the presence of external magnetic field applied along their axes of symmetry (axial and angular) with considerable height L . The dimensions of these nanostructures are of the order of tens of nanometers and they are comparable to the de Broglie wavelength of the electric carriers, the electron and the hole, and therefore the Aharonov-Bohm oscillations of energy levels in these systems are essential. The electron Hamiltonian corresponding to the hole in the coordinate system of the center of mass for both structures are separable and corresponding solutions of the wave equation for the motion of the center of mass are in an analytical way, whereas for relative movement only numerically through the FORTRAN programming language library using Philo. Calculation results for energy levels depending on the magnetic field show that oscillations energy levels of an exciton in the structures considered in the two-dimensional thesis (2D) are more pronounced than in an isolated quantum ring one-dimensional (1D) due to a reduction potential barriers for tunneling currents responsible for the Aharonov-Bohm oscillations.

* Bachelor Thesis

** Facultad de ciencias. Escuela de Física. Director: Ilia Davidovich Ph.D.

INTRODUCCIÓN

Es en la escala atómica y molecular donde la nanotecnología se ha ido desarrollando y tomando gran fuerza, porque bajo este límite se pueden observar propiedades electrónicas y opto-electrónicas específicas aplicables en la creación u miniaturización de nuevos dispositivos microelectrónicas, las cuales antes eran imposibles de observar en sistemas en bloque. Estas estructuras de dimensiones de orden nanométricos han sido denominadas nanoestructuras semiconductoras o sistemas de baja Dimensionalidad [2].

Un sistema de baja Dimensionalidad (SBD) es una estructura donde el movimiento de las nano-partículas tales como electrón, hueco, etc. es restringido y por esa razón, el número real de grados de la libertad en sus movimientos al interior de la estructura es menor al que se aprecia en el mundo actual de tres dimensiones. Los sistemas cuánticos de baja dimensionalidad han sido de enorme interés de investigadores durante los últimos cuarenta años, proporcionado por un flujo constante de descubrimientos asombrosos y también por el potencial y las posibilidades de realización de nuevas arquitecturas de dispositivo electrónicas de tecnología avanzada.

La primer persona que describió el concepto de nanotecnología fue el premio nobel de Física Richard Feynman, en una conferencia dada en el Caltech (Instituto Tecnológico de california) el 29 de diciembre de 1959 titulada “There is plenty of room at the bottom”, (al fondo hay espacio de sobra). En las dos últimas décadas se ha empezado a investigar de manera exhaustiva en base a lo prometedor de esta nueva tecnología [1]. Este nuevo campo de investigación, se dedica a estudiar las propiedades cuánticas en un régimen intermedio entre la física atómica y la física macroscópica que se observa en materiales heterogéneos donde las propiedades se varían bruscamente en juntas separadas una a otra a escala nanométrica. Puesto que las regiones homogéneas de estas heteroestructuras tienen dimensiones de la misma escala que la longitud de onda de De Broglie de los portadores de carga, el comportamiento de estos requiere un análisis netamente cuántico. Los cambios en las propiedades de los materiales en las juntas, conducen al confinamiento

cuántico de las partículas cargadas y por ende, se restringe el movimiento de estos portadores en diferentes direcciones, según la geometría de la estructura cuántica.

En las últimas décadas se ha logrado un notable progreso en la fabricación controlada de nanoestructuras semiconductoras, abriendo nuevas perspectivas en lo que se refiere a la posibilidad de miniaturizar los dispositivos micro- y optoelectrónicos. Uno de los principales atractivos de estas estructuras radica en una amplia diversidad de morfologías que pueden presentarse al modificar algunos factores durante el proceso de crecimiento. Entre otras técnicas de crecimiento un interés especial de investigadores está relacionado con el método de Stranski-Krastanov [3], el cual es un método de crecimiento epitaxial de cristales, cuya importancia radica en el crecimiento natural o espontáneo de las nanoestructuras, permitiendo manejar de modo controlado su forma y tamaño, mediante un manejo estricto de la rapidez de crecimiento y de la temperatura. La técnica consiste en depositar una capa de InAs sobre un sustrato de GaAs, lo que conlleva a la formación de islas, llamados puntos cuánticos (QDs) auto-ensamblados. Se ha encontrado que los QDs auto-ensamblados, dependiendo de condiciones de fabricación, pueden tener diferentes topologías parecidas a las formas geométricas de Discos, Pirámides, Lentes o Anillos [3,4].

Dentro de la amplia gama de morfologías y topologías de puntos cuánticos que se han fabricado, los crecidos por primera vez por Lorke [5] en forma de anillo, han generado grandes expectativas, debido a que en estas nanoestructuras, los complejos multiparticulares pueden tener una mayor estabilidad frente a la disociación térmica, y además porque estas estructuras permiten analizar diversas variaciones topológicas que van desde sistemas cuasi-bidimensionales, como es el caso del disco cuántico que se obtiene cuando el radio interior del anillo es cero, hasta situaciones unidimensionales que surgen cuando el espesor del anillo es muy pequeño en comparación con su radio medio.

A partir de las mediciones estructurales realizadas sobre anillos cuánticos, se ha encontrado que estos sistemas se caracterizan por poseer un radio interior de orden 20nm, exterior 60nm y grosor del orden entre 2 y 6 nm [5]. El hecho experimental asociado con significativa pequeñez de la altura de los anillos

cuánticos, en comparación con las demás dimensiones características del anillo, ha conllevado a muchos autores usar los modelos estrictamente bidimensionales a la hora de calcular el espectro energético de sistemas compuestos por uno y dos electrones [6], excitones [7] e impurezas donadoras [8]. Los puntos cuánticos con la geometría anular tienen una topología convexa y pueden considerarse como estructuras cuasi-unidimensionales. Esto conlleva al hecho que los portadores de carga confinados en estas estructuras adquieren unas nuevas propiedades específicas tales como las corrientes persistentes, transparencia optica para valores de campo magnético externo específicos, oscilaciones de los niveles energéticos con el incremento del campo magnético externo, saltos bruscos de la magnetización, etc.

El cálculo más simple que ilustra todas estas propiedades puede realizarse para un modelo de anillo estrictamente 1D, correspondiente al caso límite cuando el ancho del anillo tiende a cero. Los niveles energéticos para un electrón en este caso se encuentran en una forma exacta, y las propiedades mencionadas anteriormente son evidentes. Como fue encontrado en el artículo (two electrons in one-dimensional nanorings) [9] la ecuación de Schrödinger para 2 electrones en un anillo 1D también se puede resolver en una forma exacta y la solución encontrada a pesar que esta es mucho más complicada muestran que las propiedades del anillo 1D con 2 electrones son similares a los que tiene este anillo con un solo electrón. Las propiedades específicas de los anillos cuánticos 1D en presencia de campo magnético externo y específicamente las oscilaciones de la energía del estado base se llaman el EFECTO DE AHARONOV-BOHM (AB).

En el caso de un par electrón-hueco (exciton) atrapado dentro un QR, se ha demostrado teórico- y experimentalmente [10-14] que el efecto de AB se debe al movimiento relativo del electrón y el hueco en las direcciones opuestas que produce la corriente de túnel a través de las barreras del potencial de Coulomb. Sin embargo, varios niveles más bajos casi no exhiben las oscilaciones AB debido a la pequeña probabilidad del efecto túnel y la topología casi-unidimensional de la región de posibles trayectorias del electrón y del hueco [14]. En el modelo 2D del anillo con uno y dos electrones muestra que a la medida que el ancho del anillo se incrementa este poco a poco se transforma en un disco (el radio interno se

disminuye) y las oscilaciones de AB sucesivamente se apagan. Es decir, los fenómenos de AB son evidentes solamente cuando el ancho del anillo es suficientemente pequeño comparando con el radio de la línea central. También fue demostrado que las oscilaciones de AB se ven afectadas por diferentes tipos de las perturbaciones que rompen la simetría axial en los anillos, generadas por ejemplo por la presencia de un campo eléctrico o una impureza.

En esta tesis se analiza la posibilidad de observar las oscilaciones de AB en el espectro de un exciton confinado en heteroestructuras con la geometría anular y con uno de dos posibles morfologías. Primera estructura a considerar es un nanotubo delgado modelado en esta tesis por medio de una cinta, estructura anular 2D y la segunda corresponde a dos anillos delgados concéntricos y acoplados verticalmente. La topología en ambos casos es diferente de las estructuras anulares consideradas anteriormente, debido a una posibilidad para el electrón y el hueco de tener unas trayectorias circulares separadas en la dirección axial. Uno puede esperar que debido a esta peculiaridad de estas estructuras las propiedades de los excitones confinados en ellos sean diferentes de las correspondientes en anillos cuánticos cuasi-unidimensionales. En una estructura con la topología convexa pero bidimensional (llamada nanotubo) la formación de corriente túnel inducida por campo magnético externo, relacionada con el movimiento relativo del par electrón-hueco debe ser mucho más fácil y el efecto AB debe ser más pronunciado que en un anillo 1D. El objetivo principal de este trabajo es analizar las diferencias entre los espectros energéticos de magnetoexcitones en anillos delgados y nanotubos angostos con una forma parecida a una cinta.

1. TEORÍA.

1.1. Modelo Matemático.

Las dos heteroestructuras que se analizan en adelante presentan para el electrón y el hueco pozos cuánticos con la simetría axial formados por regiones con el material InAs sumergidos en una matriz de GaAs cuyas masas son $m_e = 0.067m_o$, $m_h = 0.08m_o$, $m_o = 9.11 \times 10^{-31} [kg]$ donde m_o es la masa del electrón libre. En el caso de dos anillos cuánticos circulares acoplados verticalmente Fig. 1 (a) los pozos de potencial infinito están formados por dos regiones 1D separados, y para un nanotubo Fig. 1 (b) el pozo de potencial infinito cubre una región 2D en forma de una cinta circular. Como dimensiones de estructuras y longitudes de ondas de De Broglie para los portadores de carga bajo consideración son mucho más grandes de la dimensión de la celda unitaria del material, es conveniente analizar las propiedades espectrales un exciton usando la aproximación de masa efectiva. Además, se supone que los anillos son muy delgados y no presentan altura y el nanotubo es suficientemente angosto para poder despreciar los desplazamientos de las partículas en las direcciones transversales de los mismos. Por tal motivo en este trabajo se considera un modelo del confinamiento unidimensional para anillos cuánticos acoplados y modelo bidimensional para nanotubo. En el caso del nanotubo las posiciones de los portadores de carga en las coordenadas cilíndricas se describen por las coordenadas axial z y angular φ , mientras que en el caso de anillos solamente por la coordenada angular φ .

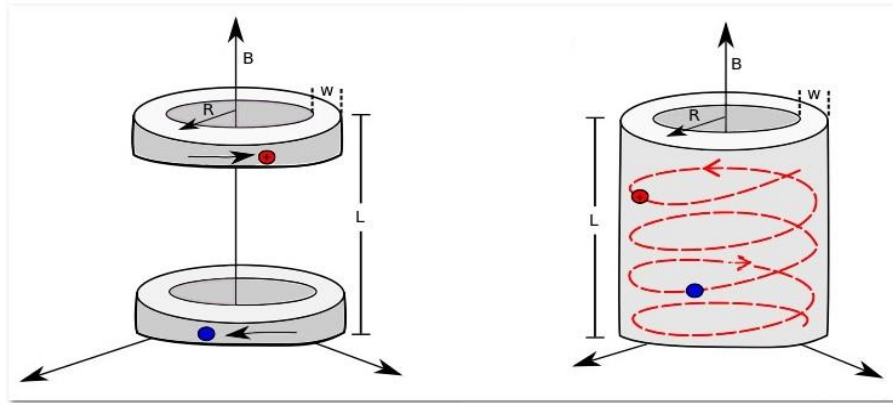


Fig. 1 Modelo de exciton confinado en (a) anillos concéntricos y (b) nanotubo.

Para calcular el espectro energético de un exciton confinado en una heteroestructura en la presencia de un campo magnético uniforme orientada a lo largo del eje z es necesario encontrar valores y funciones propios del Hamiltoniano:

$$H = \sum_{i=e,h} \left(\frac{1}{2m_i} (\vec{P}_i)^2 + V(\vec{r}_i) \right) + \frac{e^2}{\varepsilon |\vec{r}_e - \vec{r}_h|} \quad (1.0)$$

Aquí m_e, m_h son masas efectivas, del electrón, del hueco, $\vec{r}_e$ y $\vec{r}_h$ son sus vectores de posición, $\vec{P}_i, V(\vec{r}_i)$, $i = e, h$ son respectivamente momentos lineales y potenciales de confinamiento del electrón y del hueco donde en el interior de la heteroestructuras es cero y fuera de esta infinito. El último término en el Hamiltoniano (1.0) es la energía de la interacción electrostática electrón-hueco, donde ε es constante dieléctrica. En el capítulo de anexos se muestra los cálculos pertinentes y utilizados.

1.2. Hamiltoniano en unidades adimensionales.

El Hamiltoniano adimensional de un exciton formado por electrón y hueco confinados dentro de una cinta de grosor depreciable y del radio R en la presencia de un campo magnético uniforme aplicado a lo largo del eje z , se pueden presentar en las coordenadas cilíndricas como [14]:

$$H = \sum_{k=e,h} \frac{\mu}{m_k} H_k - \frac{2}{\sqrt{(z_e - z_h)^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi_e - \varphi_h}{2} + \frac{w^2}{12}}} \quad (1.1)$$

$$H_k = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_k^2} - i\gamma\eta_k \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \frac{\gamma^2 R^2}{4}; \quad \eta_e = -1; \quad \eta_h = +1$$

Aquí y en adelante $\mu = m_e m_h / (m_e + m_h)$ es masa reducida, w y R son grosor y el radio medio del nanotubo. El radio de Bohr efectivo del exciton $a_0^* = \varepsilon \hbar / \mu e^2$, y Rydberg efectivo $Ry^* = \hbar^2 / 2\mu a_0^{*2}$ se usan como unidades de distancia y energía y $\gamma = e\hbar B / 2\mu c R_y^*$ como unidad de campo magnético. Los valores de masas efectivas m_e, m_h y la constante dieléctrica ε corresponden al material InAs. En el último

término del Hamiltoniano (1.1) para el potencial de interacción electrón-hueco se utilizó la formula aproximada en la cual la separación variable entre ellos en la dirección radial se reemplaza por su valor promedio $w^2/12$. Esta aproximación es válida cuando el grosor de la cinta es suficientemente pequeño [14].

El Hamiltoniano (1.1) tiene cuatro coordenadas independientes, dos axiales z_e, z_h y dos angulares φ_e, φ_h y la ecuación de onda correspondiente se puede resolver usando el método de separación de variables o numéricamente. Las variables de ecuación de onda para el Hamiltoniano (1.1) se separan parcialmente en coordenadas centro de masa.

1.3. Separación de variables en coordenadas de centro de masa.

Las variables axiales y angulares correspondientes a las coordenadas centro de masa relativo se definen como:

$$Z = \frac{m_e Z_e + m_h Z_h}{m_e + m_h}; \quad z = z_e - z_h; \quad \Phi = \frac{m_e \varphi_e + m_h \varphi_h}{m_e + m_h}; \quad \varphi = \varphi_e - \varphi_h \quad (1.2)$$

En estas nuevas coordenadas el Hamiltoniano (1.1) se separe en dos partes, una que describe la evolución de centro de masas y otra el movimiento relativo:

$$H = H_{cm} + H_r; \quad (1.3)$$

$$H_{cm} = -\frac{1}{I_{cm}} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} - \frac{1}{M_{cm}} \frac{\partial^2}{\partial Z^2}; \quad H_r = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\gamma^2 R^2}{4} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{2}{\sqrt{z^2 + 4R^2 \sin^2 \varphi/2 + w^2/12}} \quad (1.4)$$

Aquí $M_{cm} = (m_e + m_h)^2 / m_e m_h$ y $I_{cm} = M_{cm} R^2$ son valores adimensionales de masa y del momento de inercia que describen la evolución de centro de masa.

Las funciones propias de la parte del Hamiltoniano correspondiente al centro de masas se encuentran en una forma exacta:

$$H_{cm} \psi_{M,k}(\Phi, Z) = E_{cm}(M, k) \psi_{M,k}(\Phi, Z); \quad \psi_{M,k}(\Phi, Z) = A e^{iM\Phi} e^{ikz} \quad (1.5)$$

Aquí los números cuánticos M y k describen momento angular y momento lineal del centro de masas, respectivamente las cuales definen las energías

$$\text{correspondientes como } E_{cm}(M, k) = \frac{M^2}{I^*} + \frac{k^2}{M^*}; \quad -\infty \leq k \leq \infty; \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

Al contrario, las funciones propias que describen movimiento relativo electrón-hueco no se puede encontrar en forma analítica, sino en una forma de series de Fourier.

1.4. Análisis de Fourier del movimiento Relativo.

La ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano relativo es de la forma:

$$H_r \Phi(z, \varphi) = E_r \Phi(z, \varphi); \quad -\pi < \varphi < \pi; \quad -z_m < z < z_m \quad (1.7)$$

$$-\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi(z, \varphi)}{\partial \varphi^2} + i\gamma \frac{\partial \Phi(z, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi(z, \varphi)}{\partial z^2} + \left[\frac{\gamma^2}{4} R^2 - \frac{2}{\sqrt{z^2 + 4R^2 \sin^2 \varphi / 2 + w^2 / 12}} \right] \Phi(z, \varphi) = E_r \Phi(z, \varphi) \quad (1.7a)$$

Para facilitar la aplicación del método de Fourier aplicaremos para ambas coordenadas condiciones de frontera cíclicas:

$$\begin{cases} \Phi(-L/2, \varphi) = \Phi(L/2, \varphi) = 0 \\ \Phi(z, -\pi) = \Phi(z, \pi) \end{cases} \quad (1.8)$$

La primera de estas dos condiciones es válida solamente para tubos muy largos ($L \rightarrow 20a_o^*$) y se utiliza en teoría de cristales como condiciones de Born-von_Karman.

La solución de la ecuación (1.7) bajo las condiciones (1.8) busquemos en la forma de series de Fourier doble:

$$\Phi(z, \varphi) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} C_{n, m} e^{im\varphi} e^{\left(\frac{in\pi z}{L}\right)} \quad (1.9)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.9) en (1.7) se obtiene.

$$\sum_{m', n'=-N}^N \left(A_{n, n'}^{m, m'} - E_r \right) C_{n', m'} = 0 \quad (1.10)$$

$$A_{n, n'}^{m, m'} = \left(\frac{m^2}{R^2} - \gamma m + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} + \frac{\gamma^2 R^2}{4} \right) \delta_{m', m} \delta_{n', n} + V_{n', n}^{m', m} \quad (1.10a)$$

$$V_{n', n}^{m', m} = -\frac{1}{\pi L} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m'-m)\varphi} d\varphi \int_{-a}^a e^{i(n'-n)\pi \vartheta / 2a} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 + \sin^2 \theta / 2 + \eta}}; \quad \eta = w^2 / 48R^2; \quad a = L / 4R; \quad \vartheta = z / 2R \quad (1.10b)$$

Los términos γm y $\gamma^2 R^2/4$ en esta expresión corresponden a la energía paramagnética, y diamagnética, respectivamente. La competencia entre estos dos términos, conduce a una oscilación de las energías de diferentes niveles en función de la intensidad de campo magnético γ .

1.5. Algoritmo de procedimiento numérico.

Por tanto se recurre al lenguaje de programación de alto nivel que se usa principalmente en aplicaciones científicas y matemáticas (FORTRAN). En el cual la solución de la parte del Hamiltoniano relativo del exciton, se soluciona por medio de una matriz real utilizando librería Filón para doble serie de Fourier debido a la dependencia tanto axial como angular que presenta el potencial.

La energía total del exciton confinado en un nanotubo depende de cuatro números cuánticos y es una suma de las energías de centro de masa y relativa.

$$E_X = E_{cm}(M, k) + E_r(n, m); \quad k = 0; \quad M = 0, 1, 2, \dots, M_f; \quad n = 1, 2, 3, \dots, n_f; \quad m = 1, 2, 3, \dots, m_f \quad (1.11)$$

El primer término en esta fórmula se calcula en forma analítica usando la relación (1.6) mientras que el segundo término usando siguiente algoritmo:

1. Se encuentran elementos matriciales del potencial interacción electrón-hueco calculando Integral de Fourier (1.10b) usando método de Filón
2. Se calculan elementos matriciales $A_{n,n'}^{m,m'}$ según la fórmula (1.10 a)
3. Se encuentran valores y funciones propias de la matriz $A_{n,n'}^{m,m'}$ usando programa RSAA del paquete EISPACK.

2. RESULTADOS.

El objetivo principal de esta investigación fue el estudio de alteración que sufren curvas de oscilación de Aharonov-Bohm de niveles energéticos de un exciton confinado en una estructura anular cuando aparece posibilidad adicional en comparación con la estructura 1D separar el electrón y hueco en la dirección axial. Este tipo de separación se puede lograr por dos caminos usando la estructuras 1D de dos anillos 1D acoplados verticalmente colocado en una de ellos electrón y en

otro el hueco, o aumentando altura del anillo transformándolo en un nanotubo. En nuestro estudio fueron analizadas ambas posibilidades y a continuación presentamos los resultados obtenidos por separado.

2.1. Exciton en anillos concéntricos.

El modelo de dos anillos cuánticos concéntricos 1D acoplados verticalmente, cada uno de radio R y del grosor w y la separación entre ellos L en el cual el electrón está confinado en el anillo inferior y el hueco en el superior se presenta en Fig.1 (a). En este caso el potencial de interacción electrostática entre portadores de carga depende solamente del ángulo relativo del electrón-hueco, y tiene la forma:

$$V_a(\theta) = -\frac{2}{\sqrt{L^2 + 4R^2 \sin^2 \varphi/2 + w^2/12}}; \quad (2.1)$$

Al ser este potencial solo dependiente del ángulo relativo del electrón-hueco la solución del Hamiltoniano se busca en la forma de series de Fourier simple, y el orden de la matriz en la ecuación secular (1.10) se reduce esencialmente.

En la Fig.2 se presentan los resultados de cálculo de las energías relativas de niveles más bajos en función de campo magnético para exciton confinado en dos anillos concéntricos ambos con radio $R = 4a_0^*$ grosor $w = 0.2a_0^*$ y para dos diferentes separaciones (a) $L = 2a_0^*$ y (b) $L = 10a_0^*$ entre ellos.

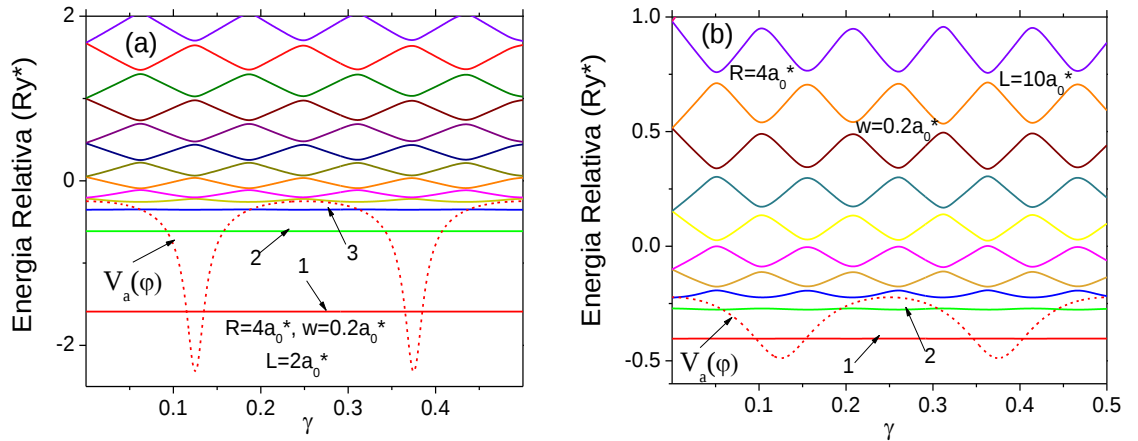


Fig. 2 Energías del exciton en función de campo magnético de niveles más bajos del exciton confinado en dos anillos cuánticos concéntricos del radio $R = 4a_0^*$ de grosor $w = 0.2a_0^*$ y con dos diferentes separaciones entre ellos (a) $L = 2a_0^*$ y (b) $L = 10a_0^*$.

Se observa que en cada caso hay unos pocos niveles energéticos inferiores, insensibles a la variación del campo magnético mientras la mayoría de niveles superiores exhiben oscilaciones de AB con la amplitud creciente a la medida que nivel energético suba. Además en las figuras con las líneas punteadas nosotros trazamos las curvas de potencial periódico dado por la fórmula (2.1). Se ve claramente que los niveles bajos 1, 2 y 3 en el primer caso y 1, 2 en el segundo, cuyas energías están por debajo de la barrera de potencial, no presentan oscilaciones AB ya que en estos estados campo magnético no genera la corriente circular correspondiente a la rotación relativa del electrón y del hueco en direcciones contrarias. Por esta razón estos estados no son sensibles a la variación de campo magnético y ellos conciernen a los estados del par electrón-hueco fuertemente ligados. También, comparando las curvas de potencial en las Fig.2(a) y Fig. 2(b) se puede ver que el aumento de la separación entre anillos produce la disminución de la barrera de potencial lo que conduce a la disminución del número de los estados enlazados del par electrón-hueco. El número de los estados enlazados en la Fig. 1 se disminuye de tres a dos cuando la separación entre los anillos se incrementa desde $L=2a_0^*$ hasta $L=10a_0^*$.

Las dependencias presentadas en la Fig.1 para un exciton confinado en dos anillos cuánticos concéntricos acoplados verticalmente son parecidos a los que fueron obtenidos anteriormente [18-20] para un exciton confinado en un anillo cuántico con una diferencia que en nuestro modelo aparece una posibilidad adicional para separar electrón y hueco en la dirección axial variando la distancia entre dos anillos.

Un comportamiento interesante tienen el tercer nivel in Fig. 2 (a) y el segundo nivel en la Fig.2 (b). A pesar de que estos niveles están ubicados por debajo de la barrera de potencial, ellos exhiben unas oscilaciones AB muy leves, con una amplitud pequeña. Para ver estas oscilaciones más claro en la Fig. 3 nosotros presentamos en una escala más grande las mismas curvas que en la Fig. 2 (b) pero solamente para cuatro niveles más bajos. La energía del primer nivel más bajo no depende de campo magnético y la curva correspondiente es una recta horizontal. En este estado la energía está muy por debajo de la barrera de potencial, el electrón y el hueco están fuertemente ligados entre sí y rotación relativa en el cual el electrón y el hueco giran en las direcciones opuestas es imposible. La curva

correspondiente al segundo nivel cuya posición se acerca la barrera potencial en contrario al primer nivel exhibe unas oscilaciones pero muy débiles. Este efecto se debe al corriente túnel cuando electrón y hueco bajo influencia de campo magnético en su rotación en sentidos contrarias penetran a través de las barreras de potencial electrostático de forma periódica. Los restantes niveles superiores situados por arriba de potencial periódico a partir del tercer nivel presentan estados rotacionales en los cuales el electrón y el hueco están rotándose en las direcciones opuestas. Curvas energéticas en esta región presentan múltiples intersecciones que conducen al reordenamiento de niveles con el cambio del campo magnético, típico para el efecto de AB como se puede ver en la Fig. 2.

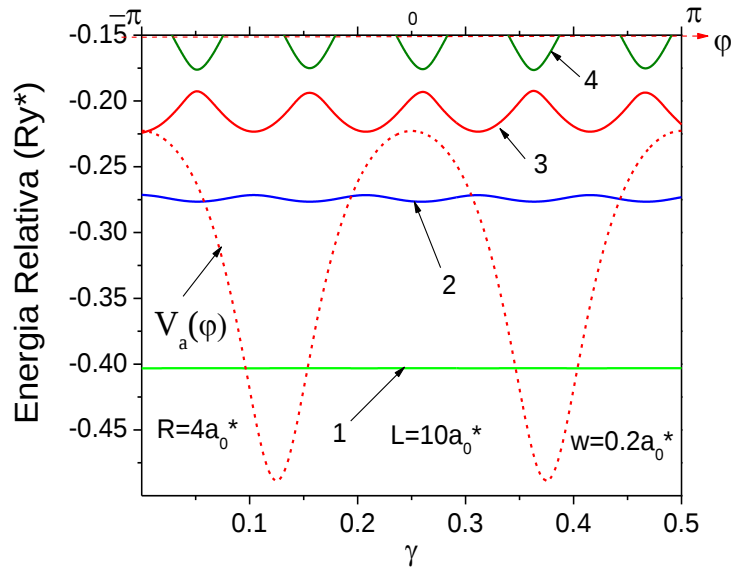


Fig. 3 Energías del exciton en función de campo magnético de cuatro niveles más bajos del exciton confinado en dos anillos cuánticos concéntricos del radio $R=4a_0^*$, de grosor $w=0.2a_0^*$ y con dos diferentes separaciones entre ellos $L=10a_0^*$.

2.2. Exciton en Nanotubo.

Al analizar los resultados de cálculo similar para un exciton confinado en un nanotubo que se presentan a continuación hay que tener en cuenta que los portadores de carga en este caso poseen un grado de libertad adicional a lo largo de eje axial lo que conduce al cambio radical de la topología del sistema y consecuentemente a la alteración de las propiedades espectrales. Si en el caso de

anillos todas posibles trayectorias de portadores de carga son unidimensionales y paralelas entre sí en el nanotubo existe una gran diversidad de las trayectorias posibles en las cuales aparece la más opciones para evitar un acercamiento excesivo de las partículas y de esta manera. Esto conduce al hecho que la energía de enlace del exciton en una estructura 2D es menor que en una estructura 1D y los estados ligados son menos estables en un nanotubo que en un anillo bajo las perturbaciones externos incluyendo producidos por campo magnético externo.

Esta diferencia entre sistemas 1D y 2D se refleja en resultados de cálculo presentados en Fig.4, donde se muestran las dependencias del campo magnético externo de las energías de niveles más bajos de los excitones confinados en tres nanotubos del mismo radio $R = 2a_0$ * grosor $w = 0.2a_0$ * y con las alturas (a) $L = 2a_0$ *, (b) $L = 5a_0$ *. (c) $L = 20a_0$ *.

Se ve que hay algunas diferencias esenciales entre las curvas en Fig.2 y en la Fig.4. En primer lugar, el número total de niveles in Fig.4 es significativamente superior que en la Fig.2. Esto se debe al hecho de que el nanotubo es una estructura 2D y sus niveles energéticos dependen de dos números cuánticos. A cada nivel de una estructura 1D similar le corresponde un conjunto subniveles (“subbands”) con diferentes energías del movimiento traslacional a lo largo de eje axial. Es decir, a cada nivel rotacional de una estructura 1D le corresponde en la estructura 2D una sub-banda con un conjunto de subniveles con diferentes números cuánticos axiales.

En segundo lugar, para nanotubos con las alturas pequeñas como en el caso (a) de Fig.4 hay un solapamiento significativo sub-bandas correspondientes a diferentes estados rotacionales mientras las sub-bandas en un nanotubo largo, como en el caso (c) de Fig.4 las sub-bandas son bien separadas. Además, se ve que las brechas energéticas entre los subniveles dentro una sub-banda disminuye notablemente cuando altura de nanotubo crece y son inversamente proporcionales a la altura del nanotubo. Por ejemplo, cuando la altura del nanotubo es $L = 2a_0$ * se observa según resultado presentado en la Fig.4(a) una mayor cantidad de curvas que en Fig. 2(a) las cuales se intersectan entre sí casi en una forma caótica.

También uno puede observar en Fig. 4(a) un mayor número de líneas horizontales correspondientes a los estados sin rotación relativa (exciton fuertemente enlazado) en comparación con de la Fig. 2(a). El número de estos estados fuertemente

ligados en nanotubo se multiplica debido a la aparición subniveles adicionales correspondientes a diferentes subniveles del movimiento relativo en la dirección axial. A medida que la altura del nanotubo crece las brechas entre los subniveles empiezan a disminuir, produciendo una agrupación sucesiva de ellos alrededor de los niveles rotacionales. Esta agrupación de subniveles se puede observar claramente en las Figs. 4 (a) y (b).

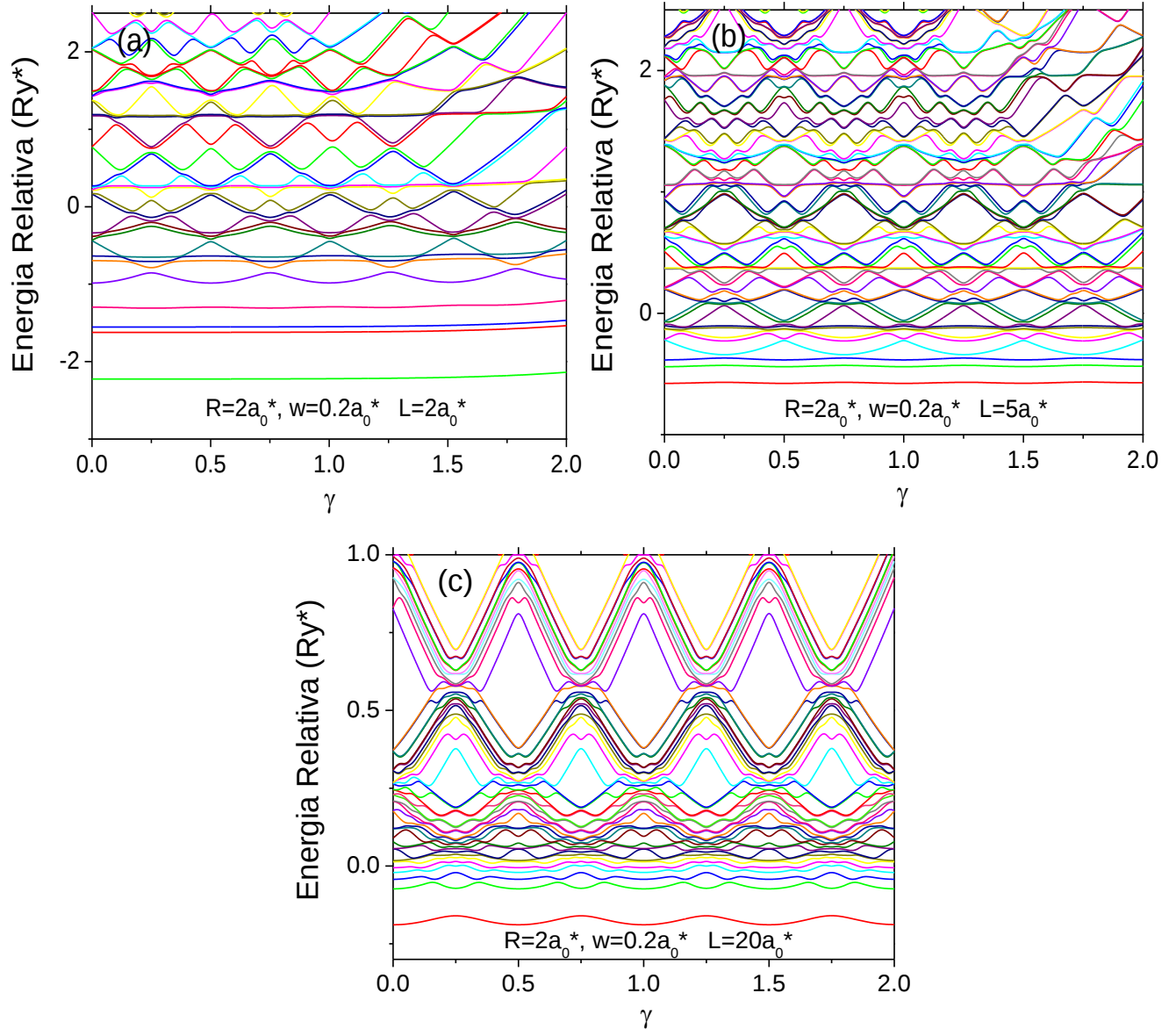


Fig. 4 Energías del exciton en función de campo magnético de niveles más bajos del exciton confinado en nanotubos (2D) del radio $R=2a_0^*$ de grosor $w=0,2a_0^*$ y con tres diferentes alturas (a) $L=2a_0^*$ y (b) $L=5a_0^*$ y (c) $L=20a_0^*$.

El tercero, al pasar desde la Fig. 4(a) hacia Fig. 4(c) se observa una disminución paulatina del número de los niveles energéticos cuyas dependencias de campo magnético presentan las líneas horizontales correspondientes a los estados excitónicos fuertemente ligados. Con el crecimiento de la altura del nanotubo su geometría se transforma desde 1D hacia 2D esto es debido que en pequeñas alturas el nanotubo se puede estudiar como un anillo y a medida que se aumente su altura va cambiando su morfología y por ende sus grados de libertad van aumentando. Las estructuras de segundo tipo proporcionan más trayectorias que evitan el acercamiento entre partículas lo que facilita la generación del corriente túnel. Por eso, en el caso de nanotubo alto cuando $L = 20a_0$ * todos los niveles, incluso el inferior, exhiben oscilaciones AB manifestando la presencia de corrientes túnel incluso en los estados excitónicos fuertemente ligados.

3. CONCLUSIONES

En conclusión, se ha presentado el análisis comparativo de propiedades espectrales relacionadas con las oscilaciones Aharonov Bohm de niveles energéticos del exciton confinado en dos anillos acoplados verticalmente con los del exciton confinado en un nanotubo, generados por el campo magnético externo aplicado a lo largo de eje de simetría.

Se elaboró un nuevo método numérico para resolver las ecuaciones de onda correspondientes a estos dos problemas en la base de las series de Fourier y se realizaron los cálculos de las energías del exciton en función de campo magnético externo para diferentes dimensiones de heteroestructuras usando el algoritmo elaborado.

Los resultados de cálculo muestran que las oscilaciones Aharonov Bohm de niveles energéticos se deben a la interacción del corriente túnel de los estados rotacionales, relacionado con las rotaciones relativas del electrón y del hueco en direcciones contrarias, con el campo magnético externo, que genera esta corriente.

Se presentan los resultados de cálculo numérico que muestran que a pesar de una similitud general entre espectros de un exciton confinado en nanotubo y de un exciton en anillos concéntricos, hay algunas diferencias esenciales en las formas de curvas energéticas en función de campo magnético, relacionadas con las propiedades topológicas diferentes de las estructuras correspondientes, donde se presentan más oscilaciones AB en nanotubo que en anillos concéntricos.

Se encontró que cuando la altura del nanotubo es pequeña hay muchos niveles energéticos que no exhiben oscilaciones de energía en función de campo magnético. En este caso pequeña separación entre el electrón y el hueco favorece la formación de los estados ligados en los cuales no hay corriente y por consiguiente, no hay efecto de campo magnético.

Al contrario, cuando el nanotubo es largo, casi todos los niveles exhiben las oscilaciones Aharonov Bohm. Por otro lado, electrón y hueco confinados en un nanotubo pueden rotarse en direcciones opuestas con más facilidad en comparación con anillo aislado. Esto muestra que el enlace entre electrón hueco en

nanotubo largo es mucho más débil que en un anillo 1D y por esta razón el efecto AB en las estructuras 2D (nanotubo) es mucho más pronunciado.

Se encontró, además, que el número total de niveles en nanotubo es significativamente superior que en los anillos concéntricos, y ellos forman unas sub-bandas bien separadas con las brechas entre subniveles muy pequeñas cuando la altura del nanotubo se hace grande. En este límite casi todos niveles exhiben las oscilaciones Aharonov Bohm.

ANEXOS.

CALCULO DE ECUACION DE SCHRÖDINGER PARA NANOTUBO.

Partiremos del operador Hamiltoniano de Pauli adimensional. El Hamiltoniano no relativista para el sistema de electrón, hueco.

$$H = \sum_{n=e,h} \left[\frac{1}{2m_n} (\vec{P}_n)^2 + V(\vec{r}_n) \right] + \frac{e^2}{\varepsilon \|\vec{r}_e - \vec{r}_h\|} \quad (1)$$

Donde $\vec{P}_n$ es el momentum, $V(\vec{r}_n)$ potencial el cual es cero dentro de la heteroestructuras y fuera de esta infinito, y la última expresión es la interacción electrón hueco. Para el sistema en cuestión se tiene que: $\vec{P}_n = \vec{p}_n - \frac{e}{c} \vec{A}$ y donde C es la velocidad de la luz.

Cuantizando solo el Hamiltoniano del electrón ya que el del hueco tiene el mismo procedimiento matemático y la interacción electrón–hueco no se tendrá en cuenta en el procedimiento, luego el Hamiltoniano para el electrón será:

$$H_e = \frac{1}{2m_e} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + V(\vec{r}_e)$$

Reescribiendo el momentum lineal cuántico como; $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}_{(e)}$, Se eleva las variables dinámicas a estatus de operador en la representación de coordenadas, Resolviendo el binomio interno.

$$H_e = \frac{1}{2m_e} \left\{ -\hbar^2 \Delta_e + \frac{i\hbar e}{c} \vec{\nabla}_e \cdot \vec{A} + \frac{i\hbar e}{c} \vec{A} \cdot \vec{\nabla}_e + \frac{e^2}{c^2} \|\vec{A}\|^2 \right\} + V(\vec{r}_e) \quad (1.2)$$

Se impone en la ecuación (1.2) las condiciones de gauge, y multiplicando y dividiendo $\mu = \frac{m_e m_h}{m_e + m_h}$, dando como resultado un operador Hamiltoniano con la forma:

$$H_e = \frac{1}{2\mu m_e} \left\{ -\hbar^2 \Delta_e + \frac{2i\hbar e}{c} \vec{A} \cdot \vec{\nabla}_e + \frac{e^2}{c^2} \|\vec{A}\|^2 \right\} + V(\vec{r}_e) \quad (1.3)$$

Donde definiremos $v_e = \frac{\mu}{m_e}$ y de igual manera para el hueco como $v_h = \frac{\mu}{m_h}$. En la tabla 1 se muestra el listado de parámetros que permiten adimensional la ecuación (1.3)

Parámetro	Parámetro adimensional	Nombre del parámetro adimensional
m	m_e^*	masa efectiva
$\vec{r}$	$\vec{r}a_0^*$	(a_0^*) Radio de Bohr efectivo
---	R_y^*	Rydberg efectivo

Tabla 1: Parámetros adimensionales.

Se define los parámetros a_0^* y m_e^* tal que:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^{*2} R_y^*} = 1 \quad y \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_y^* a_0^*} = 2 ; \quad \tilde{v}(\vec{r}_e) = \frac{v(\vec{r}_e)}{R_y^*} \quad (1.4)$$

$$a_0^* = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{e^2 \mu}; \quad R_y^* = \frac{\hbar^2}{2\mu a_0^{*2}}; \quad \gamma = \frac{e\hbar B}{2\mu c R_y^*}; \quad \gamma^2 = \frac{e^2 B^2 a_0^{*2}}{2\mu c^2 R_y^*} \quad (1.5)$$

Donde la coordenada z del momento angular está dada por:

$$L_z = -\frac{i\hbar B}{2} \left(-y_e \frac{\partial}{\partial x_e} + x_e \frac{\partial}{\partial y_e} \right) = -\frac{i\hbar B}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.6)$$

Dividiendo (1.3) entre R_y^* y reemplazando en dicha expresión los parámetros descritos en la tabla 1. Reemplazando las relaciones (1.6) y (1.5) en (1.3) se llega a:

$$\widetilde{H}_e = \eta_e \left[-\Delta_e + i\gamma \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\gamma^2}{4} (x_e^2 + y_e^2) \right] + \tilde{V}(\vec{r}_e) \quad (1.7)$$

Ahora bien, aprovechando la simetría axial del sistema, conviene expresar los siguientes términos en coordenadas cilíndricas:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\Delta = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.8)$$

$$\|\vec{r}_e - \vec{r}_h\| = \sqrt{|\vec{R}_e - \vec{R}_h|^2 + |z_e - z_h|^2} = \sqrt{|\vec{R}|^2 + |Z|^2}$$

Finalmente reemplazando en (1.7) los términos dados en (1.8), se tiene al operador Hamiltoniano de Pauli adimensional.

$$H_i = v_i \left\{ -\Delta_i + i\gamma\eta_i \frac{\partial}{\partial\varphi_i} + \frac{\gamma^2}{4} R^2 \right\} + \tilde{V}(\vec{r}_i, E); i = e, h; v_i = \frac{\mu}{m_i}; \mu = \frac{m_e m_h}{m_e + m_h}; \eta_e = 1, \eta_h = -1; \Delta_i = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z_i^2}$$

Como los nanotubos y estados excitonicos bajo consideración son mucho más grandes de la celda unidad del material, la aproximación de masa efectiva es un enfoque adecuado y por lo tanto el modelo Hamiltoniano resultante del par electrón-hueco en la presencia de un campo magnético uniforme orientada a lo largo del eje z se pueden presentar como:

$$H = H_e + H_h - \frac{2}{\sqrt{|R|^2 + |Z_e - Z_h|^2 - 2R^2 \cos(\varphi_e - \varphi_h)}} \quad (1.9)$$

Donde el centro de masa acimutal y angular esta dado por:

$$Z = \frac{m_e Z_e + m_h Z_h}{m_e + m_h}; z = z_e - z_h; \quad (1.10) \quad \Phi = \frac{m_e \varphi_e + m_h \varphi_h}{m_e + m_h}; \varphi = \varphi_e - \varphi_h \quad (1.11)$$

Bajo las condiciones (1.10) y (1.11) el Hamiltoniano (1.9) es separable en Hamiltoniano de centro de masas y Hamiltoniano relativo debido al movimiento angular.

$$H = H_{cm} + H_r; H_{cm} = -\frac{1}{I^*} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{M^*} \frac{\partial^2}{\partial Z^2}; M^* = \frac{m_e + m_h}{\mu} = \frac{(m_e + m_h)^2}{m_e m_h}; I^* = M^* R^2 \quad (1.12)$$

$$H_r = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\gamma^2}{4} R^2 - \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 4R^2 \sin^2 \varphi/2}}; \quad (1.13)$$

El Hamiltoniano de centro de masas tiene solución exacta, donde la ecuación de la energía de centro de masas es:

$$H_{cm} \psi_{M,k}(\Theta, Z) = E_{cm}(M, k) \psi_{M,k}(\Theta, Z); \psi_{M,k}(\Theta, Z) = A e^{iM\Theta} e^{ikZ};$$

$$E_{cm}(M, k) = \frac{M^2}{I^*} + \frac{k^2}{M^*}; -\infty \leq k \leq \infty; M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En cambio el Hamiltoniano relativo no presenta una solución analítica.

$$H_r \Phi(z, \varphi) = E_r \Phi(z, \varphi); E_X = E_{cm}(M, k) + E_r(n); k = 0; M = 0, 1, 2, \dots, M_f; n = 1, 2, 3, \dots, n_f$$

$$-\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi(z, \varphi)}{\partial \varphi^2} + i\gamma \frac{\partial \Phi(z, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi(z, \varphi)}{\partial z^2} + \left[\frac{\gamma^2}{4} R^2 - \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 4R^2 \sin^2 \varphi/2}} \right] \Phi(z, \varphi) = E_r \Phi(z, \varphi); \quad (*)$$

$-\pi < \varphi < \pi; -z_m < z < z_m$

Para facilitar la aplicación del método de Fourier aplicaremos para ambas coordenadas condiciones de frontera cíclicas:

$$\begin{cases} \Phi(-L/2, \varphi) = \Phi(L/2, \varphi) = 0 \\ \Phi(z, -\pi) = \Phi(z, \pi) \end{cases}$$

La solución del sistema de ecuaciones (*) Buscamos en la forma $\Phi(\varphi, z) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{n,m} e^{im\varphi} e^{in\pi z/L}$. Por último, el cálculo de la energía relativa se reduce al siguiente problema de valor propio:

$$\sum_m \left(A_{m,m'}^{n,n'} - E_r \right) C_{n',m'} = 0; A_{n,n'}^{m,m'} = \left(\frac{m^2}{R^2} - \gamma m + \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} + \frac{\gamma^2 R^2}{4} \right) \delta_{m',m} \delta_{n',n} + V_{n',n}^{m,m'} \quad (1.14)$$

Donde potencial electrostático es de la forma:

$$V_{n',n}^{m,m'} = -\frac{1}{\pi L} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m'-m)\varphi} d\varphi \int_{-a}^a e^{i(n'-n)\pi\vartheta/2a} \frac{d\vartheta}{\sqrt{g^2 + \sin^2 \theta/2 + \eta}}; \eta = w^2/48R^2; a = L/4R; \vartheta = z/2R$$

Y para el caso de anillos concéntricos acoplados verticalmente el potencial electrostático solo depende de los ángulos relativos manteniendo una separación L constante.

$$V_a(\theta) = -\frac{2}{\sqrt{L^2 + 4R^2 \sin^2 \varphi/2 + w^2/12}} \quad (1.15)$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Appenzeller, T. Science 254, 1300.
- [2] Harrison, P. Quantum Wells, Wires and Dots, Wiley-Interscience.
- [3] A. Lorke, R.J. Luyken, A.O. Govorov, J.P. Kotthaus, J.M. Garcia, P.M. Petroff, Phys. Rev. Lett. 84 2223.
- [4] M. Bayer, O. Stern, P. Hawrylak, S. Fafard, and A. Forchel, Nature (London) 405, (2000) 923; D. Gammon, Nature 405, 899.
- [5] A. Lorke, R. J. Luyken, A. O. Govorov, J. P. Kotthaus, J. M. Garcia and P. M. petroff, Phys. Rev. Lett. 84, 2223.
- [6] J. L. Zhu, Z. Dai and X. Hu Phys. Rev. B 68 045324.
- [7] J. Planelles, W. Jaskolsky and J. I. Aliaga, Phys Rev. B. 65, 33306.
- [8] H. Pan and J. L. Zhu, J. Phys.: Condens Matter 15, 7287.
- [9] J.-L. Zhu and Zh. Dai, two electrons in one-dimensional nanorings, Phys. Rev. B68,045324.
- [10] A. V. Chaplik, JETP let. 62(1995),900
- [11] M.D. Teodoro, V.L. Campo, Jr., V. Lopez-Richard, E. Marega, Jr., G.E. Marques, Y. Galvao Gobato, F. Iikawa, M. J. S. P. Brasil, Z.Y. AbuWaar, V. G. Dorogan, Yu. I. Mazur, M. Benamara, Phys. Rev. Lett. 104 ,086401
- [12] R. A. Römer and M. E. Raikh, Phys. Rev. B 62 (2000), 7045.
- [13] F. Ding, N. Akopian, B. Li, U. Perinetti, A. Govorov, F. M. Peeters, C. C. BofBufon, C. Deneke, Y. H. Chen, A. Rastelli, O. G. Schmidt, V. Zwiller. Phys. Rev. B 82 (2010) 075309.
- [14] L.C. Porras, I.D. Mikhailov, Physica E 53(2013)41–47.
- [15] Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of Electromagnetic Potential in the quantum Theory, Phys. Rev. Vol. 115 No. 3, (1959).
- [16] Zhu, J. L., Phys. Rev. B. 39,8780.
- [17] A. V. Chaplik, JETP Lett. 62 (1995), 900
- [18] M.D. Teodoro, V.L. Campo, Jr., V. Lopez-Richard, E. Marega, Jr., G.E. Marques, Y. Galvao Gobato, F. Iikawa, M. J. S. P. Brasil, Z.Y. AbuWaar, V. G. Dorogan, Yu. I. Mazur, M. Benamara, Phys. Rev. Lett. 104 (2010), 086401
- [19] R. A. Römer and M. E. Raikh, Phys. Rev. B 62 (2000), 7045.
- [20] F. Ding, N. Akopian, B. Li, U. Perinetti, A. Govorov, F. M. Peeters, C. C. BofBufon, C. Deneke, Y. H. Chen, A. Rastelli, O. G. Schmidt, V. Zwiller. Phys. Rev. B 82 (2010) 075309.