



**AUTOMATIZACIÓN DEL SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE ONDAS Y MEDICIÓN
DE VELOCIDADES ACÚSTICAS DEL EQUIPO DT14210-ROP PARA LA
ESTIMACIÓN DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS EN ROCAS**

GERMÁN DARÍO FIGUEROA PUERTO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECAÑICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE ELÉCTRICA, ELECTRÒNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2009**



**AUTOMATIZACIÓN DEL SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE ONDAS Y MEDICIÓN
DE VELOCIDADES ACÚSTICAS DEL EQUIPO DT14210-ROP PARA LA
ESTIMACIÓN DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS EN ROCAS**

GERMÁN DARÍO FIGUEROA PUERTO

**Trabajo de Investigación presentado como requisito parcial para optar el
título de: Ingeniero Electrónico.**

DIRECTOR:

Mie. ALFREDO RAFAEL ACEVEDO PICÓN

CODIRECTOR:

Msc. JENNY MABEL CARVAJAL JIMÉNEZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA**

2009

A Dios todo poderoso, por ser el creador e inspiración de mis logros y te pido padre que cubras con la sangre de nuestro señor Jesucristo a las personas que me ayudaron a cumplir este logro tan importante.

*Jesús Bendice y prospera a mis Padres Gustavo y Martha que con su inmenso amor y consejos me formaron para ser la persona que soy ahora.
Los amo.*

*Compañía y seguridad son los regalos que me dieron mis hermanos Dani y Richi, que en su corazón este la perfecta, buena y agradable Voluntad de Dios de los Ejércitos,
Bendiciones Hermanos.*

*Que por la gracia de nuestro señor Jesucristo tenga a mi novia Yeye las más lindas bendiciones, y te pido padre que le dé una vida larga y feliz a lado tuyo,
Te amo Corazón, gracias por estar conmigo.*

*A todos ellos les regalo esta palabra de Dios:
Yo soy el Camino, y la Verdad, y la vida; nadie va al padre, si no es por Jesus.
JUAN 14:6*

GERMÁN DARÍO

AGRADECIMIENTOS

El autor por medio de estos cortos renglones desea expresar sus más sinceros agradecimientos a:

Jorge Leonardo Galvis Castrellón. Ingeniero Electrónico del Instituto Colombiano del Petróleo (ICP). Por ser el promotor de este proyecto y por su invaluable colaboración y dedicación a cada detalle del planteamiento y ejecución. Muchas Gracias.

Alfredo Rafael Acevedo Picón. Ingeniero Electrónico y Docente de la Universidad Industrial de Santander. Por su colaboración y aportes invaluable, sugerencias y por su apoyo incondicional.

Jenny Mabel Carvajal Jiménez. Ingeniera de Petróleos del Instituto Colombiano del Petróleo (ICP). Por dar viabilidad y seguridad al desarrollo del proyecto en el Laboratorio Mecánica de Rocas del ICP.

Grupo de Investigación de Estabilidad de Pozo. Por brindarme la oportunidad de vinculación y desarrollo del proyecto de grado con tan excelente grupo de trabajo comprometidos con la investigación.

Grupo de Trabajo del Laboratorio Mecánica de Rocas. A todo el personal del Laboratorio por su paciencia y dedicación con la ejecución del proyecto en especial a Jenny Carvajal, Andrés Castillo, Jorge Galvis, Andrei Lache, Juan Carlos Torres y Erik Cifuentes.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
<u>1. FUNDAMENTOS TEORICOS</u>	3
1.1 PIEZOELECTRICIDAD	3
1.1.1 PROPIEDADES DE LOS MATERIALES PIEZOELÉCTRICOS	3
1.1.2 EFECTO PIEZOELÉCTRICO DIRECTO	4
1.1.3 EFECTO PIEZOELÉCTRICO INVERSO	4
1.1.4 FRECUENCIA DE RESONANCIA	5
1.2 ELASTICIDAD	5
1.2.1 MÓDULO DE YOUNG	6
1.2.2 COEFICIENTE DE <i>POISSON</i>	6
1.3 ONDAS ACUSTICAS	7
1.3.1 ONDA P	7
1.3.2 ONDA S	8
1.3.3 RESPUESTA DE LA ONDA P Y ONDA S	9
1.3.4 MÓDULOS ELÁSTICOS DINÁMICOS Y SU RELACIÓN CON LAS ONDAS ACÚSTICAS	10
<u>2. TRATAMIENTO DIGITAL DE ONDAS ACUSTICAS</u>	12
2.1 ANALISIS DE ONDAS ACUSTICAS	12
2.1.1 ANÁLISIS ESPECTRAL DE LA ONDA P	13
2.1.2 ANÁLISIS ESPECTRAL DE LA ONDA S	14
2.2 FILTROS DIGITALES	15
2.2.1 TÉCNICAS DE DISEÑO DE FILTROS DIGITALES <i>IIR</i>	16
2.2.2 TÉCNICAS DE DISEÑO DE FILTROS DIGITALES <i>FIR</i>	16

2.2.3 SISTEMAS LINEALES DE FASE LINEAL GENERALIZADA	17
2.2.4 DISEÑO DE FILTROS DIGITALES POR EL MÉTODO DE VENTANAS	19
2.2.5 DISEÑO DE FILTROS DIGITALES CON LA VENTANA DE <i>KAISER</i>	23
2.2.6 DISEÑO ÓPTIMO DE FILTROS DIGITALES	24
2.3 IMPLEMENTACIÓN DE FILTROS DIGITALES	28
2.3.1 MÉTODO ENVENTANADO – FILTRAR ONDA P	28
2.3.2 VENTANA DE <i>KAISER</i> – FILTRAR ONDA P	31
2.3.3 VENTANA DE <i>KAISER</i> – FILTRAR ONDA S	33
2.3.4 MÉTODO DE <i>REMEZ</i> – FILTRAR ONDA P	35
2.3.5 MÉTODO DE <i>REMEZ</i> – FILTRAR ONDA S	36
2.4 COMPARACION DE DISEÑOS PROPUESTOS	37
2.4.1 MÉTODO ENVENTANADO Vs MÉTODO ÓPTIMO – ONDA P	37
2.4.2 MÉTODO ENVENTANADO Vs MÉTODO ÓPTIMO – ONDA S	38

3. SOFTWARE DE AUTOMATIZACIÓN **40**

3.1 SNAP PAC SYSTEM	40
3.2 DISEÑO DE LA ESTRATEGIA DE CONTROL	40
3.2.1 DEFINIR EL PROBLEMA	41
3.2.2 DISEÑO DE SECUENCIA LÓGICA DE PASOS PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA	42
3.3 ESTRATEGIA DE CONTROL	43
3.3.1 CONFIGURACIÓN DEL HARDWARE SNAP PAC R1	43
3.3.2 INICIALIZACIÓN DEL PROGRAMA	44
3.3.3 ESTABLECER COMUNICACIÓN CON EL OSCILOSCOPIO DIGITAL <i>TDS2024</i>	45
3.3.4 CONTROL DEL SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE ONDAS	46
3.3.5 TRATAMIENTO DIGITAL - SEÑALES PROVENIENTES DE LA MUESTRA DE ROCA	47
3.3.6 DIFERENCIA DE TIEMPO DE TRÁNSITO DE LA SEÑAL ACÚSTICA A TRAVÉS DE LA MUESTRA DE ROCA	48
3.3.7 INTERFAZ GRÁFICA - <i>HMI</i>	50

<u>4. PRUEBAS REALIZADAS Y RESULTADOS OBTENIDOS⁵</u>	55
4.1 DESCRIPCIÓN DE LAS MUESTRAS DE ROCA	55
4.2 ORITO X001	56
4.3 ORITO X002	58
4.4 COMPARACIÓN DE PRUEBAS	61
4.5 IMPLEMENTACIÓN DEL TRATAMIENTO DIGITAL EN ONDAS ACÚSTICAS	62
<u>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</u>	64
<u>BIBLIOGRAFÍA</u>	67
<u>ANEXOS</u>	70
ANEXO A. INSTRUMENTACIÓN Y EQUIPO DE MEDICIÓN	71
ANEXO B. SISTEMAS DE FASE GENERALIZADA	81
ANEXO C. POLINOMIO $P(x)$ DE GRADO L , <i>PARKS-McCLELLAN</i> .	83

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Componentes en frecuencia de la señal acústica-Onda P.	14
Tabla 2. Componentes en frecuencia de la señal acústica-Onda S.	15
Tabla 3. Sistemas de Fase Generalizada.	18
Tabla 4. Comparación de Ventanas.	21
Tabla 5. Especificaciones de Diseño del Filtro Pasa Banda, Método Enventanado-Onda P.	28
Tabla 6. Especificaciones de Ventanas.	30
Tabla 7. Diseño de Filtros Mediante la Ventana <i>Kaiser</i> , Onda P.	31
Tabla 8. Especificaciones de Diseño del Filtro Pasa Banda, Ventana de <i>Kaiser</i> Onda P.	33
Tabla 9. Diseño de Filtros Mediante la Ventana <i>Kaiser</i> , Onda S.	34
Tabla 10. Especificaciones de Diseño del Filtro Pasa Banda, Método de <i>Remez</i> -Onda P.	35
Tabla 11. Especificaciones de Diseño del Filtro Pasa Banda, Método de <i>Remez</i> -Onda S.	36
Tabla 12. Datos Comparativos Filtro FIR Pasa Banda con la Ventana <i>Kaiser</i> y el Método de <i>Remez</i> – Onda P.	38
Tabla 13. Datos Comparativos Filtro FIR Pasa Banda con la Ventana <i>Kaiser</i> y el Método de <i>Remez</i> – Onda S.	39
Tabla 14. Señales de Entrada/Salida al Sistema General.	42
Tabla 15. Comandos para establecer una Comunicación.	46
Tabla 16. Comandos para realizar Control del entorno del Osciloscopio.	47
Tabla 17. Descripción de las Muestras de Roca.	55
Tabla 18. Orito X001, Tiempos y Velocidades.	56
Tabla 19. Orito X001, Módulo de <i>Young</i> y Coeficiente de <i>Poisson</i> .	56
Tabla 20. Orito X002, Tiempos y Velocidades.	58
Tabla 21. Orito X002, Módulo de <i>Young</i> y Coeficiente de <i>Poisson</i> .	59
Tabla 22. Tendencia de datos obtenidos, Tiempos Onda S – Orito X001.	61

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Efecto piezoeléctrico directo.	4
Figura 2. Efecto piezoeléctrico inverso.	5
Figura 3. Módulo de <i>Young</i> .	6
Figura 4. Coeficiente de <i>Poisson</i> .	7
Figura 5. Efecto de la Onda P.	8
Figura 6. Efecto de la Onda S.	9
Figura 7. Onda P a través de la muestra de roca.	9
Figura 8. Onda S a través de la muestra de roca.	10
Figura 9. Muestra de roca, análisis espectral de ondas P y S.	13
Figura 10. Espectro en frecuencia de la Onda acústica-Cristal P.	13
Figura 11. Espectro en frecuencia de la Onda acústica-Cristal S.	15
Figura 12. Relación entre una función ventana y su transformada de <i>Fourier</i> .	20
Figura 13. Ventanas de diseño de Filtro <i>FIR</i> .	21
Figura 14. Ilustración del tipo de aproximación obtenida en la respuesta en frecuencia ideal.	22
Figura 15. Esquema de Tolerancias de la Respuesta Ideal de un Filtro Pasa Banda.	24
Figura 16. Ejemplo de una aproximación de un filtro pasa banda óptimo de acuerdo al teorema de alternación.	26
Figura 17. Función de error <i>Ex</i> .	27
Figura 18. Interfaz Gráfica de <i>MatLab-fdatoo</i> .	29
Figura 19. Respuesta en Magnitud del Filtro <i>FIR</i> pasa banda, Múltiples Ventana	29
Figura 20. Respuesta en Magnitud y Fase, Retardo de Grupo, Respuesta al Impulso. Filtro <i>FIR</i> Pasa Banda, Ventana <i>Nuttall</i> .	30

Figura 21. Respuesta en Magnitud y Fase, Retardo de Grupo, Respuesta al Impulso, Diagrama de Polos y Ceros, Filtro <i>FIR</i> Pasa Banda, Ventana <i>Kaiser</i> , Onda P.	32
Figura 22. Comparación de Diseños de Filtros <i>FIR</i> Pasa Banda utilizando la Ventana <i>Kaiser</i> , Onda S.	33
Figura 23. Respuesta en Magnitud y Fase, Retardo de Grupo, Respuesta al Impulso, Diagrama de Polos y Ceros, Filtro <i>FIR</i> Pasa Banda, Ventana <i>Kaiser</i> , Onda S.	34
Figura 24. Respuesta en Magnitud y Fase, Retardo de Grupo, Respuesta al Impulso, Diagrama de Polos y Ceros, Filtro <i>FIR</i> Pasa Banda, Método de <i>Remez</i> , Onda P.	36
Figura 25. Respuesta en Magnitud y Fase, Retardo de Grupo, Respuesta al Impulso, Diagrama de Polos y Ceros, Filtro <i>FIR</i> Pasa Banda, Método de <i>Remez</i> , Onda S.	37
Figura 26. Respuesta en Magnitud del Filtro <i>FIR</i> Pasa Banda con la Ventana <i>Kaiser</i> y el Método de <i>Remez</i> – Onda P.	38
Figura 27. Respuesta en Magnitud del Filtro <i>FIR</i> Pasa Banda con la Ventana <i>Kaiser</i> y el Método de <i>Remez</i> – Onda S.	39
Figura 28. Diagrama de Conexión de la Instrumentación-Prueba	41
Figura 29. Sucesión de Pasos de Automatización.	43
Figura 30. Configuración del <i>SNAP PAC R1-PAC Manager</i> .	44
Figura 31. Entrada de Datos de la Muestra de Roca – <i>PAC Control</i> .	45
Figura 32. Configuración de Comunicación <i>TDS2024</i> – <i>PAC Control</i> .	46
Figura 33. Configuración del Sistema de Control del <i>TDS2024</i> – <i>PAC Control</i> .	47
Figura 34. Tratamiento Digital de Ondas Acústicas.	48
Figura 35. Adquisición de Onda Acústica.	49
Figura 36. Estimación de la Diferencia de Tiempo de Tránsito de la Señal Acústica a través de la Muestra de Roca.	50
Figura 37. Interfaz Gráfica – Menú Inicial.	51
Figura 38. Interfaz Gráfica – Datos de Entrada.	51

Figura 39. Interfaz Gráfica – Tablero de Control.	52
Figura 40. Interfaz Gráfica – Prueba Acústica.	53
Figura 41. Interfaz Gráfica – Informe.	54
Figura 42. Orito X001, Interfaz Gráfica-Prueba Acústica.	57
Figura 43. Orito X001, Velocidades Acústicas.	57
Figura 44. Orito X001, Módulo de <i>Young</i> .	58
Figura 45. Orito X001, Coeficiente de Poisson.	58
Figura 46. Orito X002, Interfaz Gráfica-Prueba Acústica.	59
Figura 47. Orito X002, Velocidades Acústicas.	60
Figura 48. Orito X002, Módulo de <i>Young</i> .	60
Figura 49. Orito X002, Coeficiente de <i>Poisson</i> .	60
Figura 50. Onda P, Prueba de Tomografía - XXXXX.	62
Figura 51. Onda S, Prueba Acústica - X001.	63

TITULO: AUTOMATIZACIÓN DEL SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE ONDAS Y MEDICIÓN DE VELOCIDADES ACÚSTICAS DEL EQUIPO DT14210-ROP PARA LA ESTIMACIÓN DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS EN ROCAS.*

AUTOR: GERMÁN DARÍO FIGUEROA PUERTO **

PALABRAS CLAVES: Automatización, DT14210-ROP, Acústica, Filtrado, Remez, Young, Poisson, OPTO22.

CONTENIDO:

En geomecánica la estimación de los módulos elásticos de *Young* y de *Poisson* en la muestra de roca es de gran importancia, ya que con éstos e información proveniente de la geología y la estratigrafía del terreno, se determina la viabilidad en trabajos de perforación en pozo.

En este documento se describe el proceso de automatización realizada en el sistema de adquisición de señales acústicas y en la estimación de los módulos dinámicos de la muestra de roca. En este trabajo se han diseñado e implementado filtros pasa banda de fase lineal con el método de diseño de *Remez*, utilizando el algoritmo de procesamiento digital, *Parks-McClellan*, con el motivo de minimizar el efecto de ruido presente en las ondas acústicas y facilitar la estimación de los módulos.

La prueba acústica realizada en el Laboratorio Mecánica de Rocas del Instituto Colombiano del Petróleo-ECOPETROL S.A, es desarrollada en el *software* de automatización *SNAP PAC Project Suite*, complementado con el controlador *SNAP PAC R1*. La interfaz gráfica permite al operario monitorear el proceso de una forma segura, confiable y muy amigable.

La herramienta es validada sobre dos muestras de roca de la formación ORITO, cada muestra es sometida a la acción de una carga axial desde 0.0kN a 8.0kN y en este rango, son estimado los módulos elásticos en alrededor de 16 ondas P y S, como resultado se muestran gráficas de la tendencia de velocidad de las ondas P y S, módulo de *Young* y el coeficiente de *Poisson*, en función del esfuerzo axial aplicado.

Los resultados obtenidos son relacionados con datos históricos y se comprobó que la variación de la estimación del tiempo de tránsito de la onda S de la muestra X001, no supera el 1% de variación con datos tomados por el personal del LMR.

*

Trabajo de Grado

**

Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.
Director: Alfredo Rafael Acevedo Picón. Codirector Jenny Mabel Carvajal Giménez.

TITLE: AUTOMATION OF THE WAVE ACQUISITION OF SYSTEM AND ACOUSTIC SPEEDS OF THE MEASUREMENT EQUIPMENT DT14210-ROP FOR THE MECHANICAL PROPERTIES OF THE ESTIMATION IN ROCKS.

AUTHOR: GERMÁN DARÍO FIGUEROA PUERTO **

KEYWORDS: Automation, DT14210-ROP, test, Acoustic, Filtered, *Remez*, *Young*, *Poisson*.

DESCRIPTION:

In geomechanics the estimation of the elastic modules of *Young* and *Poisson* in the rock sample great importance, with these and information from the geology and the stratigraphy of the area, the viability decides in works of perforation in well.

This document describes the process of automation in realized the system of acquisition of acoustic signs and in the estimation of the dynamic modules of the rock sample. In this work have some filters designed and implemented there pass band of linear phase with the method been design of *Remez*, using the algorithm of digital processing *Parks-McClellan*, with the motive of minimizing the effect of present noise in the acoustic waves and to facilitate the estimation of the modules.

The acoustic test realized in the Laboratory Rock Mechanics of the Colombian Institute of the Petroleum-ECOPETROL S.A, it is developed in the software of automation *SNAP PAC Project Suite*, complemented with the controller *SNAP PAC R1*. The graphical interfaz allows to the workman to handle the process of a sure, reliable and very friendly form.

The tool is validated on two rock samples of the formation ORITO, every sample is submitted to the action of an axial load from 0.0kN to 8.0kN and in this range, the elastic modules are estimated in about 16 waves P y S, the result are graphical of the speed trend of the waves P y S, modulate of *Young* and the coefficient of *Poisson* in function of the axial applied effort.

The obtained results are related with historical information and it demonstrated that the variation of the estimation of the time of transit of the wave S of the sample X001, does not surpass the 1% of variation with information taken by the personnel of LMR.

*
Work of Graduation.

**
Faculty of Physical –Mechanical, School of Engineer Electric, Electronics and Telecommunications Engineering.
Director: Alfredo Rafael Acevedo Picón. Codirector Jenny Mabel Carvajal Giménez.

INTRODUCCION

Las pruebas dinámicas constituyen una herramienta para el análisis y obtención de resultados, en este caso las pruebas dinámicas acústicas tienen una ventaja sobre las pruebas estáticas, ya que son pruebas no destructivas y se pueden utilizar estas muestras de roca para propósito.

Dentro de la prueba acústica, la obtención de las velocidades acústicas de las muestras de roca, permiten obtener las constantes elásticas, de esta forma los ingenieros geomecánicos, las utilizan para establecer un modelo geomecánico de la formación de estudio y realizar análisis de viabilidad para implementar trabajos de campo.

Para facilitar el análisis de las ondas acústicas es necesario diseñar filtros digitales, en los cuales se debe realizar un análisis del contexto que será utilizado, ya que son muy importantes las características del método de diseño y de los recursos que cuenta el diseñador.

En el diseño de filtro digitales utilizando métodos iterativos como el método de *Parks-McClellan*, buscan mejorar de forma iterativa el diseño óptimo de un filtro digital, pero no es condición que este método sea la mejor técnica de diseño, o mejor dicho, para realizar el mejor diseño del filtro se puede utilizar otros métodos que pueden ser menos precisos, pero que se acoplen de forma aceptable a la aplicación.

El acoplamiento de *hardware* y *software* ha hecho aplicaciones que sean robustas y potenciales para sus clientes, para el caso del Laboratorio Mecánica de Rocas

del Instituto Colombiano del Petróleo, se busca realizar una herramienta para el personal, que sea amigable y eficiente, con la incorporación del desarrollo de programas que proporcionen una lógica secuencial, desarrollo de tratamiento matemático de datos y visualización de resultados.

1. FUNDAMENTOS TEORICOS

1.1 PIEZOELECTRICIDAD

El efecto piezoeléctrico investigado y desarrollado por los hermanos *Pierre* y *Jacques Currie* en 1980, comprobaron la relación directa entre el esfuerzo (fuerza por unidad de área) a compresión ejercido y la diferencia de potencial positiva generada en las caras del cristal. Del mismo modo al ejercer un esfuerzo a tensión la diferencia de potencial es de signo contrario y en estado de anulación de esfuerzo la diferencia de potencial es cero.¹

1.1.1 Propiedades de los Materiales Piezoeléctricos

Los cristales piezoeléctricos a utilizados en este proyecto son de Zirconato Titanato de Plomo PZT-5a, estos cristales PZT-5a tienen un comportamiento aceptable al tener buena estabilidad a cambios de las condiciones ambientales y producen señales de alto nivel de tensión, por tal razón estos son esenciales para la generación de señales mecánicas y/o eléctricas.²

¹ P. Curie, Société Française de Physique (ed. lit), *OEuvres de Pierre Curie*, Gauthier-Villars, 1908.

² Referenciado en Figueroa, Germán Darío: Plan de Proyecto de Grado. "Automatización del sistema de adquisición de ondas y medición de velocidades acústicas del equipo DT14210-ROP para la estimación de las propiedades mecánicas en rocas". Bucaramanga, Marzo 2009.

1.1.2 Efecto Piezoeléctrico Directo

Cuando el cristal piezoeléctrico es sometido a una deformación mecánica a tensión, en la cara del cristal ocurre el fenómeno de separación de cargas a lo largo del eje, donde ha sido ejercido el esfuerzo. En caso contrario, es decir si el esfuerzo aplicado es a compresión, las cargas en la cara del cristal cambian de polaridad, dando como resultado una señal de naturaleza eléctrica. Como se ilustra en la figura 1.³

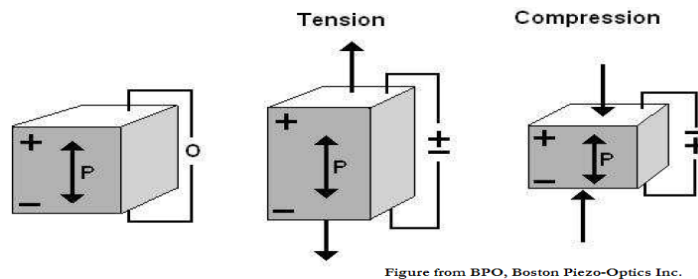


Figure from BPO, Boston Piezo-Optics Inc.

Figura 1.Efecto piezoeléctrico directo.³

1.1.3 Efecto Piezoeléctrico Inverso

Consiste en generar una señal mecánica, esto ocurre cuando el cristal piezoeléctrico es sometido a un campo eléctrico o a un diferencial de potencial en las caras del cristal.

El cristal está comprendido por celdas, por medio de las cuales los iones de cada celda se polarizan de acuerdo a la dirección del campo aplicado, esto conlleva a que todo el cristal se polarice y los electrones de los átomos experimenten fuerzas para formar enlaces, las cuales generan una deformación mecánica en las caras del cristal, pero esta deformación mecánica se expande a lo largo del eje en el que

³ BPO, Boston Piezo-Optics Inc, *An Introduction to Piezoelectric Transducer Crystals*.

es aplicado el diferencial de potencial, mientras sufre una contracción en el eje normal del campo eléctrico aplicado, tal como se describe en la figura 2.³

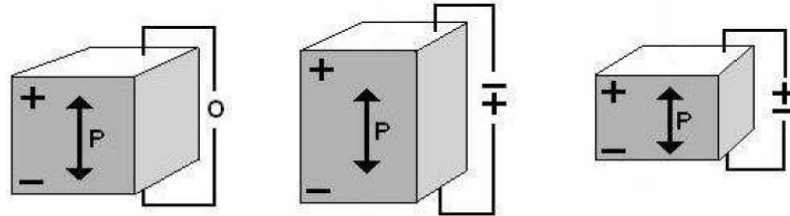


Figure from BPO, Boston Piezo-Optics Inc.

Figura 2. Efecto piezoeléctrico inverso.³

1.1.4 Frecuencia de Resonancia

Una de las relaciones existentes entre las propiedades mecánicas y las dieléctricas en los cristales piezoeléctricos, es que estos cristales pueden resonar a ciertas frecuencias, las cuales dependen de factores como la geometría, la naturaleza del cristal, la frecuencia de operación de la fuente de tensión CA (Corriente Alterna) que los excita, entre otras.³

La distribución de energía de la respuesta del cristal piezoeléctrico, evidencia que el cristal también vibrará a las frecuencias que sean múltiplo impar de la frecuencia fundamental, es decir a sus armónicos, este fenómeno se diezmará con gran severidad del quinto armónico en adelante, ya que la energía transmitida en las caras del cristal es muy baja.

1.2 ELASTICIDAD

A través de pruebas de laboratorio se investiga el comportamiento de las rocas que son sometidas de forma controlada a esfuerzos, con el motivo de obtener los

módulos elásticos que caracterizan a la muestra de roca y por ende a la formación de estudio.

1.2.1 Módulo de Young

Se denota con la letra E y se define como la relación entre el esfuerzo aplicado $\sigma = \mathcal{F}/A$ y la deformación del material elástico $\varepsilon = \Delta l/l$, para determinar la constante elástica dinámica de la muestra de roca, módulo de *Young*, se obtiene con la estimación de la velocidad de onda P, velocidad de onda S a través de la muestra de roca y datos específicos de la probeta a ensayar. Figura 3.⁴

$$E = \frac{\sigma}{|\varepsilon|} \quad (1)$$

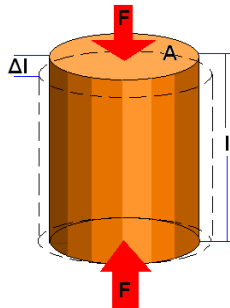


Figura 3. Módulo de *Young*.⁵

1.2.2 Coeficiente de *Poisson*

Se denota con la letra μ y se define como la relación entre las deformaciones laterales y axiales por la acción de un esfuerzo aplicado en la muestra de roca, para determinar la constante elástica dinámica de la muestra de roca, coeficiente

⁴ Kane, Joseph W. Sterheim, Morton M. FÍSICA. ISBN 8429143181. Segunda Edición. Reverté 1996.

⁵ El Autor.

de *Poisson*, se realiza con la estimación de la velocidad de onda P, velocidad de onda S a través de la muestra de roca, en la figura 4 se visualiza la relación o variables del coeficiente de *Poisson*.

$$\mu = \frac{(\Delta d/d)}{(\Delta l/l)} \quad (2)$$

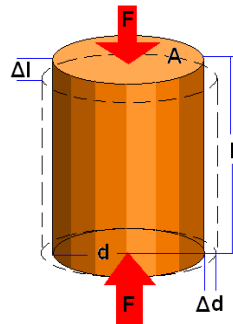


Figura 4. Coeficiente de *Poisson*.⁵

1.3 ONDAS ACUSTICAS

En un laboratorio de forma controlada es posible propagar en una muestra de roca, ondas acústicas como son la onda P de compresión y la onda S de corte, con el objetivo de estudiar el comportamiento de la propiedad elástica de la muestra de roca. La velocidad de propagación de las ondas depende en especial de la densidad y las propiedades elásticas de la roca en estudio.⁶

1.3.1 Onda P

La onda P u onda primaria es denominada así por tener la mayor velocidad de propagación en los materiales elásticos, su comportamiento describe compresiones y dilatamiento alternativamente de la roca, dando lugar a un

⁶ Díaz, Luis Alberto: Proyecto fin de carrera. "Estudio de Prospección geofísica y geotécnica para el emplazamiento del embalse de san esteban de andagoya (álava)".

movimiento de las partículas en la dirección de la propagación de la onda, tal como se describe una onda longitudinal.⁷

El movimiento de las partículas provoca en el material cambios de volumen pero no de forma (figura 5) y la onda P es capaz de viajar tanto en rocas sólidas como en líquidos.⁸

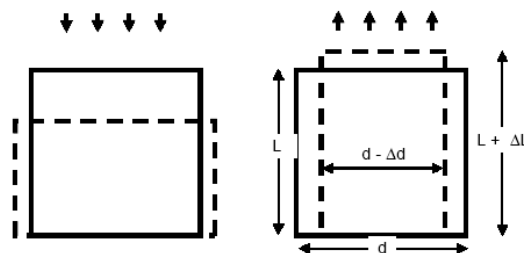


Figura 5. Efecto de la Onda P.⁸

1.3.2 Onda S⁸

La onda S u onda secundaria exhibe la cualidad de ser una onda lenta, es decir que la velocidad de propagación de la onda es inferior a la onda P. El comportamiento de la onda S en un material elástico, describe la deformación lateral del material en dirección perpendicular a la propagación de la onda, tal como se describe una onda transversal.

La generación de ondas S en el material provoca cambios en su forma pero no en su volumen (figura 6), la onda S se considera como dos ondas superpuestas, es decir que una se transmite en el plano horizontal y la otra en el plano vertical.

⁷ Bruce, A Bolt: "TERREMOTOS". Serie reverté ciencias y sociedad. Edition illustrated. 1981.

⁸ Manilla, Alfonso Alvarez. Anguas, Paul Garnica. Salazar, Alfonso Pérez. "Evaluación Indirecta de los Módulos Elásticos de Rigidez in situ y la Relación entre V_p/V_s y el Angulo de Fricción Interna"

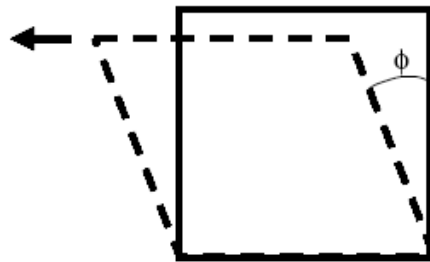


Figura 6. Efecto de la Onda S.⁸

1.3.3 Respuesta de la Onda P y Onda S

En la figura 7 se observa la señal proveniente de la muestra de roca con características de onda P y en la figura 8 la onda S, en ambas figuras se muestra una zona muerta (inicio), esta zona consiste en el tiempo transcurrido por la señal acústica a través de la muestra de roca, la forma de onda de las señales, es la superposición de señales de diferentes componentes en frecuencia.

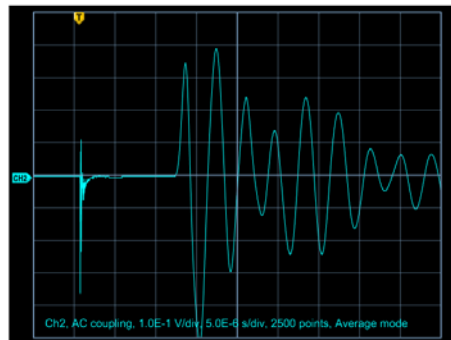


Figura 7. Onda P a través de la muestra de roca.⁹

⁹ Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 13 "Caracterizar las señales acústicas en un ambiente de menor incidencia de ruido, el cual permita establecer características del espectro de las señales acústicas". Bucaramanga Septiembre 2008.

Como se ha mencionado anteriormente, la onda S se transmite en dos planos, el vertical y horizontal, es decir que es una onda longitudinal y transversal, por tal motivo la forma de onda de la figura 8 es la superposición de la onda S y P, teniendo en cuenta que la magnitud registrada de la onda P es menor comparado con la onda S.

El primer frente de onda es la onda P, ya que viaja más rápido que la onda S y la identificación del frente de onda S, es la que muestra mayor magnitud o picos más pronunciados. Para facilitar la estimación del tiempo de transito de la onda S se procedió a realizar tratamiento de la onda por medio de algoritmos de procesamiento y tratamiento digital para eliminar la onda P de la onda S.

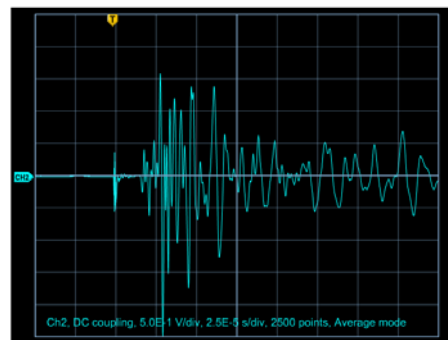


Figura 8. Onda S a través de la muestra de roca.⁵

1.3.4 Módulos Elásticos Dinámicos y su Relación con las Ondas Acústicas

Con los ensayos no destructivos, en el sistema de medición de velocidades acústicas DT14210-ROP, se estiman las constantes elásticas dinámicas de la muestra de roca, por medio de la estimación de las velocidades de las ondas P y S a través de la muestra de roca con densidad específica.

Inicialmente conociendo la densidad, las dimensiones geométricas de la muestra de roca y los tiempos de tránsito de las señales acústicas, se establece las velocidades de compresión V_p y de corte V_s .

$$V_p = L/T_p \quad (3)$$

$$V_s = L/T_s \quad (4)$$

Donde:

L es el largo de la muestra de roca

V_p es la velocidad de la onda P a través de la muestra de roca.

T_p es el tiempo de tránsito de la onda P a través de la muestra de roca

V_s es la velocidad de la onda S a través de la muestra de roca.

T_s es el tiempo de tránsito de la onda S a través de la muestra de roca.

Las constantes elásticas dinámicas se determinan de la siguiente forma:

$$\mu = \left\{ \left(\frac{V_p}{V_s} \right)^2 - 2 \right\} / 2 * \left\{ \left(\frac{V_p}{V_s} \right)^2 - 1 \right\} \quad (5)$$

$$G = \rho * V_s^2 \quad (6)$$

$$E = 2 * G * (1 + \mu) \quad (7)$$

Donde:

μ es el coeficiente de *Poisson*.

G es el Módulo de *Rigidez*.

ρ es la densidad de la muestra de roca.

E es el Módulo de *Young*.

2. TRATAMIENTO DIGITAL DE ONDAS ACUSTICAS

2.1 ANALISIS DE ONDAS ACUSTICAS

La prueba acústica es una herramienta para evaluar y caracterizar muestras de roca utilizando ondas ultrasónicas, de este modo el procesamiento digital de las señales acústicas procedentes de la muestra de roca, proporciona un análisis más a fondo de las ondas transmitidas a través de la muestra de roca.

Los cristales piezoeléctricos tienen una frecuencia de resonancia y ciertos armónicos, para conocer la distribución espectral de la señal transmitida en la muestra de roca, la herramienta matemática, *FFT (Transformada Rápida de Fourier)* permite conocer la distribución espectral de la señal.

En la figura 9 se ilustra la muestra de roca que ha sido utilizada para el análisis e interpretación del espectro en frecuencia de la señal acústica, para tener una mejor lectura de las componentes en frecuencia de la señal, se han adherido a la superficie de la muestra de roca, los cristales piezoeléctricos (Cristal tipo P, S1 y S2) por medio de soldadura de plata.⁹

Con un generador de pulsos de tensión se excita el cristal piezoeléctrico emisor y por medio de un osciloscopio digital es adquirida la señal proveniente del cristal piezoeléctrico receptor.¹²

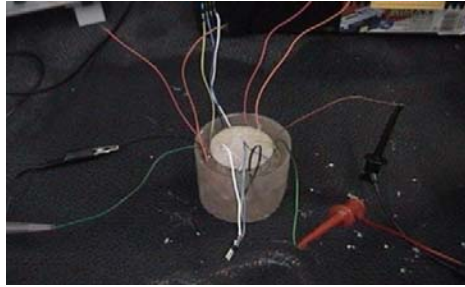


Figura 9. Muestra de roca, análisis espectral de ondas P y S.⁹

2.1.1 Análisis Espectral de la Onda P⁹

En la figura 10 se observa la distribución espectral de la señal acústica proveniente de la muestra de roca, la cual muestra una componente en frecuencia predominante en magnitud, naturalmente es la frecuencia fundamental de la onda P y las diferentes componentes o picos, son los armónicos de la señal acústica. Cabe mencionar que estas componentes no son un múltiplo entero de la frecuencia fundamental, si no son submúltiplos, es decir a $1/6$, $1/4$, $1/3$, $1/2$ de la frecuencia fundamental.

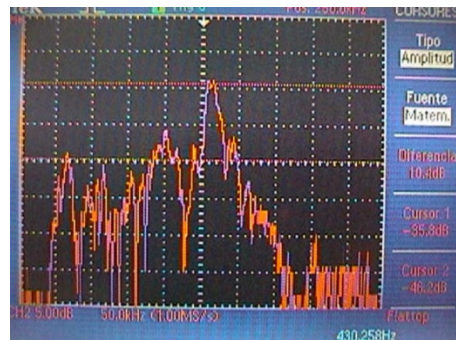


Figura 10. Espectro en frecuencia de la Onda acústica-Cristal P.⁹

En la tabla 1, se han tabulado los valores de las componentes en frecuencia de la señal acústica proveniente de la muestra de roca. Para realizar un tratamiento

digital de la onda P, se procede a diseñar filtros pasa banda, el cual atenúa componentes de ruido y señales que no son de interés.

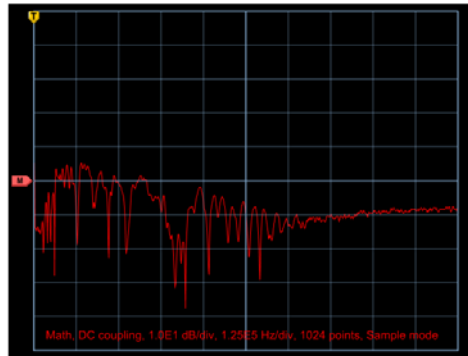
Tabla 1. Componentes en frecuencia de la señal acústica-Onda P.⁹

FRECUENCIA kHz	MAGNITUD dB
48	-22
64	-10
156	-14
200	-7.4
242	-9.4
260 Fundamental	0.0
292	-8.2
321	-14
403	-22

2.1.2 Análisis Espectral de la Onda S⁵

Como se había mencionado anteriormente, la onda S es la superposición de una onda longitudinal (onda P) y una onda transversal (onda S). En la figura 11 se muestra la distribución espectral de la señal acústica proveniente de la muestra de roca.

Conociendo el espectro en frecuencia de la onda P (onda longitudinal-figura 10) y sabiendo que la velocidad de la onda P es mayor que la velocidad de la onda S, las componentes en frecuencia de la onda S son mayores que las componentes en frecuencia de la onda P, de este modo es simple determinar el espectro en frecuencia de la onda S.



TDS 2024 - 16:36:25 05/03/2009

Figura 11. Espectro en frecuencia de la Onda acústica-Cristal S.⁵

En la Tabla 2, se han tabulado los valores de las componentes en frecuencia de la onda S.

Tabla 2. Componentes en frecuencia de la señal acústica-Onda S.⁵

FRECUENCIA kHz	MAGNITUD dB
470	-4.0
485 Fundamental	0.0
531	-1.6
553	-1.6
613	-4.0

2.2 FILTROS DIGITALES

Un filtro digital es un algoritmo para dejar pasar algunas componentes en frecuencia y atenuar otras componentes de una señal de naturaleza digital. La base para diseñar un filtro digital son las especificaciones de diseño, es decir las frecuencias de corte de la banda pasante inferior y superior, la atenuación máxima para establecer las frecuencias de corte de las bandas suprimidas inferior y

superior, el orden del filtro, la técnica de diseño, entre otras especificaciones de diseño, dependiendo de lo que se desea obtener.¹³

2.2.1 Técnicas de Diseño de Filtros Digitales IIR

La técnica de diseño de filtros digitales *IIR* (*Infinite Impulse Response*) tiene la ventaja, que el filtro puede ser diseñado a partir de funciones matemáticas de tipo cerrado, es decir, que al especificar los criterios de diseño, se puede utilizar expresiones de aproximación como *Butterworth*, *Chebyshev* o *Elíptico* y se procede a calcular el orden del filtro que cumplirá las especificaciones de diseño.¹⁴

Otra gran ventaja de diseñar filtros digitales *IIR* es su facilidad de implementación, en comparación con otras técnicas de diseño de filtros, ya que requiere un orden menor para cumplir con las mismas especificaciones.

2.2.2 Técnicas de Diseño de Filtros Digitales FIR

Un Filtro digital *FIR* (*Finite Impulse Response*), puede tener una fase lineal generalizada. La fase lineal de un filtro digital implica que, no va a inferir en cambios en su forma de onda salvo a un corrimiento temporal de la señal.¹³

Otra ventaja de tener un filtro de fase lineal, es que los coeficientes de la función de transferencia tienen una relación de simetría. En esta técnica, siempre se mantienen estables los sistemas y el ruido no afecta de gran forma a este tipo de filtrado, ya que se puede reducir a niveles muy pequeños.¹⁵

¹³ Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 14 "Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP". Bucaramanga Octubre 2008

¹⁴ Oppenheim, Alan. Schafer, Ronald. Buck, Jhon. Discrete-Time Signal Processing. Secon Ediction. Prentice Hall 2000.

¹⁵ Diseño de una interface para el Diseño de Filtros *FIR* a través del Método Remez Integrado a MFilters. Capitulo 2. Filtros.

Un filtro *FIR* de longitud $N=M+1$ (M es el grado del polinomio de la función de transferencia del filtro) con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ se describe mediante la siguiente ecuación en diferencias.

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n - 1] + \dots + b_Mx[n - M + 1] = \sum_{k=0}^{M-1} b_kx[n - k] \quad (8)$$

Donde b_k son los coeficientes que caracterizan la función de transferencia del filtro, por otra parte la salida se expresa como la convolución de la entrada $x[n]$ con la respuesta al impulso del filtro $h[n]$.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] * x[n - k] \quad (9)$$

2.2.3 Sistemas Lineales de Fase Lineal Generalizada¹⁴

Una característica ideal de diseño de filtros digitales, es tener una banda de paso sin distorsiones y que la fase sea igual a cero, lo cual no se puede conseguir si se desea tener un sistema causal, es decir que la respuesta al impulso sea cero, $h[n] = 0$ $n < 0$. Por tal motivo se debe permitir una cierta porción de distorsión de fase, que es simplemente un desplazamiento temporal de la señal a tratar.

Al considerar un sistema LTI (Lineal Invariante en el Tiempo) cuya respuesta en frecuencia en un periodo es.

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha} \quad |\omega| < \pi \quad (10)$$

Donde α es un número real entero o real entero más 0,5, α es el retardo que introduce el sistema y ω es la frecuencia en radianes.

$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1 \quad (11)$$

$$fase H_{id}(e^{jw}) = -w \alpha \quad |w| < \pi \quad (12)$$

$$\tau(w) = rdg[H(e^{jw})] = -\frac{d}{dw}\{arg[H(e^{jw})]\} \quad (13)$$

$$rdg[H_{id}(e^{jw})] = \alpha \quad (14)$$

Donde $|H_{id}(e^{jw})|$ es la magnitud del sistema, $fase H_{id}(e^{jw})$ es la fase del sistema y α es el retardo de grupo del sistema.

Si $\alpha = n_d$ es un número entero, la respuesta al impulso y salida del sistema es.

$$h_{id}[n] = \delta[n - n_d] \quad (15)$$

$$y[n] = x[n - n_d] \quad (16)$$

La ecuación 16 indica que la salida $y[n]$, es la entrada $x[n]$ con un retraso de n_d muestras. En general existen cuatro tipos de sistemas de fase generalizada, clasificados por la simetría y el retardo de grupo del sistema. Ver Anexo B.

Tabla 3. Sistemas de Fase Generalizada.

Tipo	Simetría	Retardo de Grupo
I	Par	Entero
II	Par	Entero + 0,5
III	Impar	Entero
IV	Impar	Entero + 0,5

2.2.4 Diseño de Filtros Digitales por el Método de Ventanas¹⁴

El método más simple de diseños de filtros *FIR* es el método de ventanas y el diseño comienza generalmente con la respuesta en frecuencia deseada del filtro a diseñar, la cual se expresa de la siguiente forma.

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n} \quad (17)$$

Donde $H_d(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia deseada del filtro y $h_d[n]$ es la respuesta al impulso del filtro deseado.

De la ecuación 17, muestra que la respuesta al impulso se define en todo el eje temporal n y como consecuencia se genera un sistema no causal e infinitamente largo, por tal razón para tener un filtro *FIR* causal se debe truncar la respuesta ideal con una función de duración finita. A partir de $h_d[n]$ se define un nuevo sistema.

$$h[n] = h_d[n] \begin{cases} 0 \leq n \leq M \\ 0, \text{ en el resto} \end{cases} \quad (18)$$

Donde $h[n]$ se representa como el producto de la respuesta al impulso del filtro ideal $h_d[n]$ que se desea diseñar y una ventana $w[n]$ de longitud finita. El espectro en frecuencia de $h[n]$ se define como.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \quad (19)$$

o,

$$h[n] = h_d[n] w[n] \quad (20)$$

Donde $H(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia del filtro y $W(e^{j(\omega-\theta)})$ es la respuesta en frecuencia de la ventana.

La selección de la ventana se realiza con la intención de que $W(e^{j\omega})$ se concentre en una banda estrecha de frecuencia alrededor de $\omega = 0$, entonces $H(e^{j\omega})$ se parecerá a la respuesta en frecuencia del filtro ideal $H_d(e^{j\omega})$.

Un conflicto es conseguir $w[n]$ tan corta como sea posible para minimizar los cálculos necesarios para implementar el filtro, pero de la forma que $W(e^{j\omega})$ se concentre en las frecuencias cercanas a cero, $\omega = 0$.¹⁷

Para ilustrar el caso anteriormente mencionado se puede observar la figura 12. Si se desea que $w[n]$ sea de duración corta, va a producir un alargamiento del lóbulo principal de la transformada de *Fourier* $W(e^{j\omega})$.

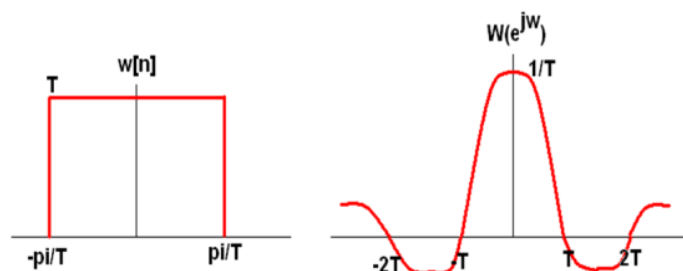


Figura 12. Relación entre una función ventana y su transformada de *Fourier*.⁵

Para este método de diseño de filtros *FIR*, existen diversas ventanas, entre ellas se destacan la *Rectangular*, *Bartlett*, *Bartlett Hanning*, *Hamming*, *Blackman*, *Blackman Harris*, *Boham*, *Chebyshev*, *Flat Top*, *Gaussian*, *Nutall*, *Parzen*, *Tukey*, *Kaiser*, entre otras.

En la tabla 1 se observan las ventanas comúnmente usadas para el diseño de filtros digitales *FIR* por el método de ventanas, comparando la amplitud pico del lóbulo lateral de la respuesta en magnitud, anchura del lóbulo principal, entre otras.

¹⁷ Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 18 "Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP". Bucaramanga Enero 2009.

Tabla 4. Comparación de Ventanas.¹⁶

Tipo de ventana	Amplitud de pico del lóbulo lateral (relativa)	Anchura aproximada del lóbulo principal	Error de aproximación de pico $20\log \delta$ (dB)	Ventana de <i>kaiser</i> equivalente β	Anchura de transición de la ventana de <i>Kaiser</i> equivalente
<i>Bartlett</i>	-25	2,539/M	-25	1,33	1,757/M
<i>Bartlett-Hanning</i>	-35,8	2,73/M	-39,4	2,88	2,14
<i>Blackman</i>	-58.1	3,125/M	-75	7,196	2,93/M
<i>Blackman-Harris</i>	-92	3,71/M	-44	3,86	2,34/M
<i>Bohman</i>	-46	3,32/M	-46	4,087	2,34/M
<i>Chebyshev</i>	-50	2,53/M	-50	4,63	2,54/M
<i>Flat Top</i>	0	7,42/M	-92	9,18	3,32/M
<i>Gaussian</i> $\alpha=2,5$	-43	2,73/M	-57,3	5,36	2,49/M
<i>Hamming</i>	-41	2,53/M	-53	4,86	2,54/M
<i>Hanning</i>	-31	2,7/M	-44	3,86	2,34/M
<i>Nuttall</i>	-97	3,71/M	-105,6	10,68	3,52/M
<i>Parzen</i>	-53	3,515/M	-56	5,21	2,53/M
<i>Rectangular</i>	-13	1,75/M	-21	0	1,75/M
<i>Triangular</i>	-26,6	2,53/M	-26,5	1,58	1,75/M
<i>Tukey</i> $\alpha = 0,5$	-15,1	2,14/M	-22	0,663	1,75/M

En la figura 13 se observa la traza de las ventanas, *Rectangular*, *Triangular*, *Hanning*, *Blackman* y *Nuttall*, en el dominio de la frecuencia.¹⁷

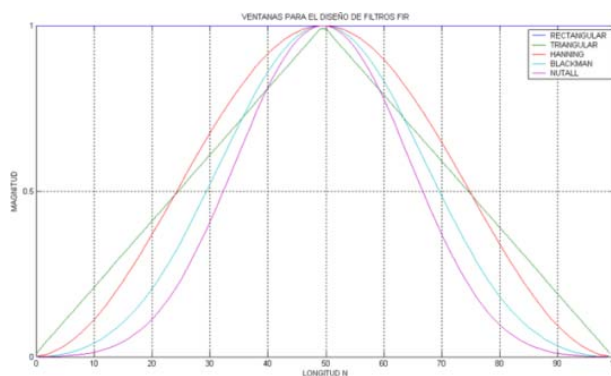


Figura 13. Ventanas de diseño de Filtro *FIR*.⁵

¹⁶ Figueroa, German. Ardila, Ender. Valdivieso, Raúl. Solano, Fabian. Informe Análisis de Filtros Digitales Mediante Métodos de Enventanado e Implementación en DSP - Universidad Industrial de Santander – E3T.

Como se ha mencionado anteriormente, la selección de la ventana se decide por el ancho del lóbulo principal y la tolerancia de las amplitudes de los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia de la ventana. Esta condición se puede observar en la figura 14.

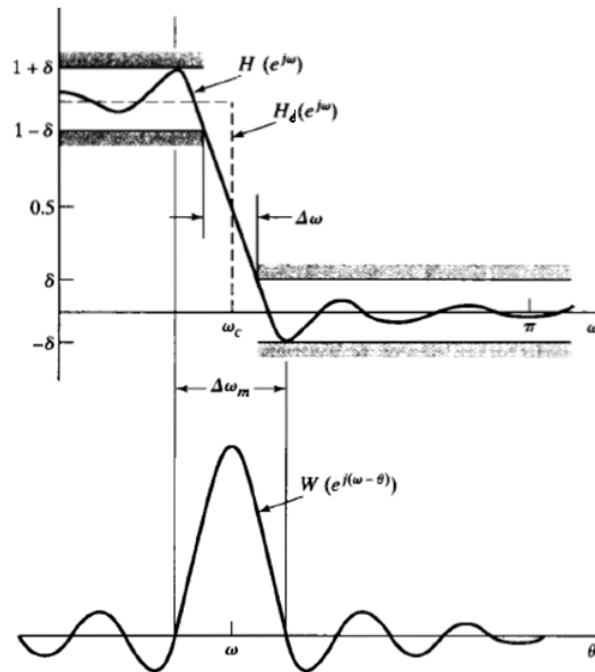


Figura 14. Ilustración del tipo de aproximación obtenida en la respuesta en frecuencia ideal.¹⁴

El ancho de las bandas de transición del filtro a diseñar se define por el ancho del lóbulo principal de la respuesta en frecuencia de la ventana $W(e^{j\omega})$, es decir, que si se desea tener bandas de transición cortas, esto implica aumentar el orden del filtro, M , o de otra manera consiste en aumentar la longitud de la ventana $N = M+1$.¹⁷

Aquello implica que tengan oscilaciones fuertes de amplitud en la respuesta en magnitud del filtro digital en las cercanías de las frecuencias de corte y se vayan atenuando a medida que se aleja de la frecuencia de corte del filtro.¹⁷

2.2.5 Diseño de Filtros Digitales con la Ventana de *Kaiser*

La desventaja del diseño de filtros mediante las ventanas anteriormente citadas, es la dependencia entre la anchura del lóbulo principal y el área de los lóbulos laterales.

Sin embargo *Kaiser* descubrió que se puede formar una ventana cuasi óptima utilizando la función de *Bessel* modificada de primera especie. La ventana de *Kaiser* se define como:

$$w[n] = \frac{I_0\left[\beta\left(1 - \left[\frac{n-\alpha}{\alpha}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq M \quad (21)$$

Siendo $\alpha = \frac{M}{2}$ e $I_0(\cdot)$ es la función de *Bessel* modificada de primera especie.

La gran diferencia entre la ventana *Kaiser* y las ventanas propuestas de la tabla 4, es que *Kaiser* cuenta con dos parámetros de diseño, la longitud $N = M+1$ y el parámetro de forma β . Con la variación de estos dos parámetros se puede ajustar la longitud y la forma de la ventana, ajustando así, el compromiso de variar la amplitud de los lóbulos laterales y anchura del lóbulo principal.

El aumento de M provoca un filtro más selectivo en frecuencia, reduciendo la banda de transición y manteniendo la amplitud del lóbulo lateral constante y al reducir β se reduce la banda de transición con un aumento de la amplitud pico de los lóbulos laterales

2.2.6 Diseño Óptimo de Filtros Digitales¹⁴

Uno de los inconvenientes de diseñar filtros con el método de ventanas, es no tener control de los rizados presentes en las bandas de eliminación y de paso, por tal razón los procesos algorítmicos efectivos buscan minimizar el máximo error presente en las bandas del filtro, es decir controlar el valor de los rizados en las bandas de paso y de eliminación de forma independiente.

La respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ que caracteriza un sistema causal retrasado $L = M/2$ muestras.

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega L} \quad (22)$$

En la figura 15 se muestra el esquema de tolerancias de la aproximación de un filtro pasa banda con función $A_e(e^{j\omega})$ real, par y periódica en ω , donde se realiza una aproximación a la unidad en la banda de paso $\omega_{p1} \leq |\omega| \leq \omega_{p2}$ con un error absoluto de δ_1 , y una aproximación a cero en las bandas de eliminación $0 \leq |\omega| \leq \omega_{s1}$ & $\omega_{s2} \leq |\omega| \leq \pi$ con un error absoluto de δ_2 .

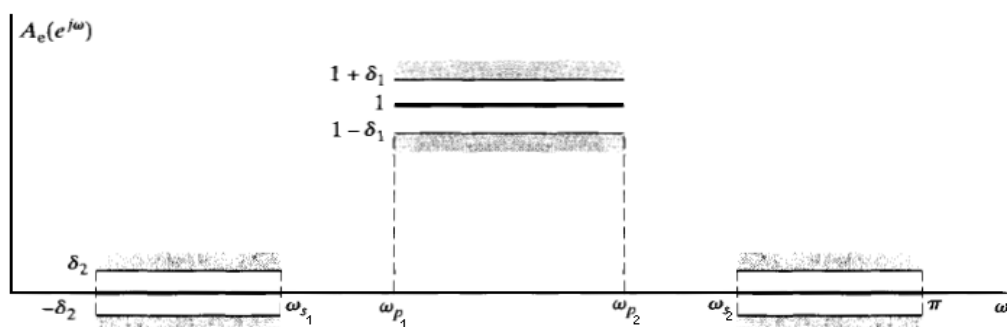


Figura Modificada de Oppenheim, Alan, Schafer, Ronald, Buck, Jhon. Discrete-Time Signal Processing. Second Edition. Prentice Hall 2000. Figura 7.31 Tolerance Scheme and Ideal response for Low Pass

Figura 15. Esquema de Tolerancias de la Respuesta Ideal de un Filtro Pasa Banda.¹⁴

- **Método de Parks-McClellan**

Parks-McClellan o diseño óptimo es un algoritmo que busca diseñar filtros que cumpla con las especificaciones L , ω_{p1} , ω_{p2} , ω_{s1} , ω_{s2} y de forma iterativa se obtenga ajustes óptimos para los restantes parámetros. Éste algoritmo se basa en tratar un problema matemático, es decir, desarrollar la aproximación de un polinomio que surge de extender la ecuación 23.

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^L h_e[n]e^{-j\omega n} \quad (23)$$

Donde $h_e[n]$ es la respuesta al impulso del sistema. Si se utiliza la identidad trigonométrica de *Chebyshev*, ecuación 24, en la ecuación 23, se obtiene el polinomio $P(x)$ de grado L , ecuación 25. Ver Anexo C.

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (24)$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^L a_k x^k \quad (25)$$

Donde a_k son constantes relacionadas con $h_e[n]$ y $x = \cos(\omega)$. Para formalizar el problema de aproximación, se ha establecido una función de error de aproximación $E(\omega)$ o de la forma $E(x)$.

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(e^{j\omega}) - A_e(e^{j\omega})] \quad (26)$$

$$E(x) = W(x)[H_d(x) - P(x)] \quad (27)$$

Donde $W(\omega)$ o $W(x)$ es una función de peso que relaciona los parámetros del error de aproximación en el proceso de diseño δ_1 y δ_2 . $H_d(e^{j\omega})$ es la respuesta en frecuencia deseada del filtro pasa banda, para este caso.

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_{p1} \leq |\omega| \leq \omega_{p2} \\ 0, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_{s1}, \omega_{s2} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (28)$$

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}, & \omega_{p1} \leq |\omega| \leq \omega_{p2} \\ 1, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_{s1}, \omega_{s2} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (29)$$

Donde $K = \delta_1/\delta_2$. Parks-McClellan (1972a, 1972b) aplicaron el teorema de alternación para la teoría de aproximación del polinomio $P(x)$.

- **Teorema de Alternación**¹⁴

Una alternancia es un punto sobre las bandas de eliminación y de paso de la función de transferencia del filtro pasa banda, la que su derivada es cero, es decir se deben buscar los máximos y mínimos locales ubicados en las bandas de eliminación y de paso (máximo local se alterna con el mínimo local).

Básicamente el teorema de alternación busca que $P(x)$ de grado L, sea el único polinomio que minimiza el error máximo $E(x)$, es decir que el rizado presente en las bandas de eliminación y de paso sean constantes, tal como se puede observar en la figura 16 y en la figura 17 muestra un ejemplo de $E(x)$ para el caso que no es un diseño óptimo.

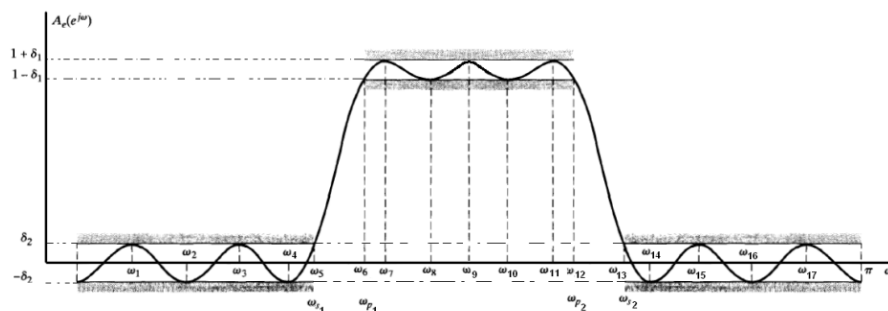


FIGURA MODIFICADA DE Oppenheim, Alan, Schaffer, Ronald, Buck, John. Discrete-Time Signal Processing. Second Edition, Prentice Hall 2000. Figure 7.35 Typical example of low pass filter approximation that is optimal according to the alternation theorem for L=7.

Figura 16. Ejemplo de una aproximación de un filtro pasa banda óptimo de acuerdo al teorema de alternación.¹⁴

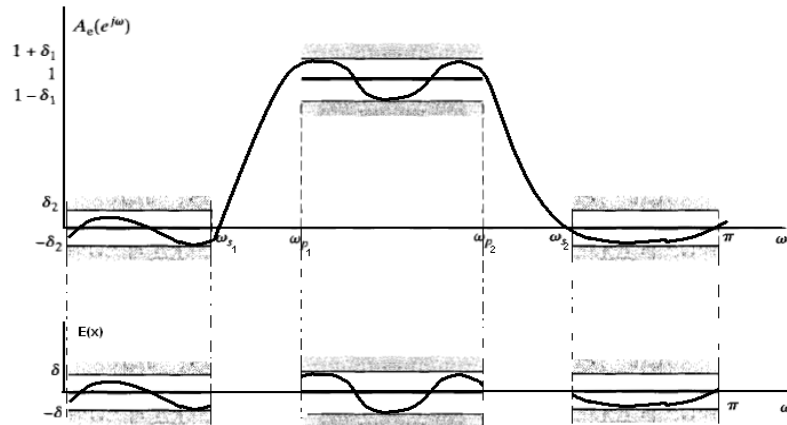


Figura 17. Función de error $E(x)$.⁵

- **Método de Remez**

El objetivo principal de este método es obtener un rizado constante dentro de las tolerancias impuestas por los parámetros de diseño δ_1 y δ_2 . Las alternancias son buscadas a partir de la función $E(x)$, los siguientes pasos desarrollan este método de una forma eficiente y fácil de implementar.

Paso 1. Buscar el orden del filtro que se acomode a las especificaciones de diseño.

$$M = \frac{-10 \cdot \log_{10}(\delta_1 \delta_2) - 13}{2,324 \cdot \Delta\omega} \quad (30)$$

Donde $L = M/2$ y $\Delta\omega = \text{abs}(\omega_s - \omega_p)$. Cabe destacar que para este diseño se ha planteado que δ_2 sea igual para las dos bandas de eliminación y el ancho de las bandas de transición del filtro pasa banda se cumple que $\text{abs}(\omega_{s1} - \omega_{p1}) = \text{abs}(\omega_{s2} - \omega_{p2}) = \Delta\omega$.

Paso 2. Buscar $L+3$ alternancias en la función de error $E(x)$ de 0 a π .

Paso 3. Hallar δ , $P(x)$, $E(x)$, con el algoritmo de *Parks-McClellan*.¹⁴

Paso 4. Encontrar la localidad de los máximos x_i de la ecuación 25.

Paso 5. Volver a calcular δ , si δ no cambia es porque se ha hallado el polinomio óptimo $P(x)$, para comprobar se comparan los nuevos x_i , con los x_i obtenidos anteriormente.

Paso 6. Si δ cambia, ir al paso 3 y hallar $E(x)$.

2.3 IMPLEMENTACIÓN DE FILTROS DIGITALES

2.3.1 Método Enventanado – Filtrar Onda P¹⁷

En la tabla 5 se observan las especificaciones de diseño del Filtro *FIR* Pasa Banda para la onda P, las frecuencias de corte y las tolerancias de atenuación, tanto en la banda de paso como en las bandas de eliminación del filtro pasa banda.

Tabla 5. Especificaciones de Diseño del Filtro Pasa Banda, Método Enventanado-Onda P.⁵

Banda de Eliminación Inferior de Filtro Pasa Banda	Banda de Paso de Filtro Pasa Banda		Banda de Eliminación Superior de Filtro Pasa Banda
$f_{s1} = 40kHz$ $\Delta_{s1} = -22dB$	$f_{p1} = 150kHz$	$f_{p2} = 400kHz$ $\Delta_p = -1dB$	$f_{s2} = 700kHz$ $\Delta_{s2} = -22dB$

Con la ayuda de la *Toolbox* “*fdatool*” de *MATLAB* se realizaron los diseños de los filtros pasa banda (Onda P y Onda S). De la tabla 4, se ha utilizado tres ventanas para los diseños previos del filtro, las cuales son escogidas por su utilidad en el tratamiento digital de señales, las ventanas a utilizar son: (*Hanning*, *Blackman* y *Nuttall*).

Para calcular el orden mínimo que cumple con las especificaciones de diseño se introducen los valores de la tabla 5 en la interfaz gráfica de *fdatool* de *MATLAB*, el cual se obtiene un orden del filtro $M=3485$. Figura 18.

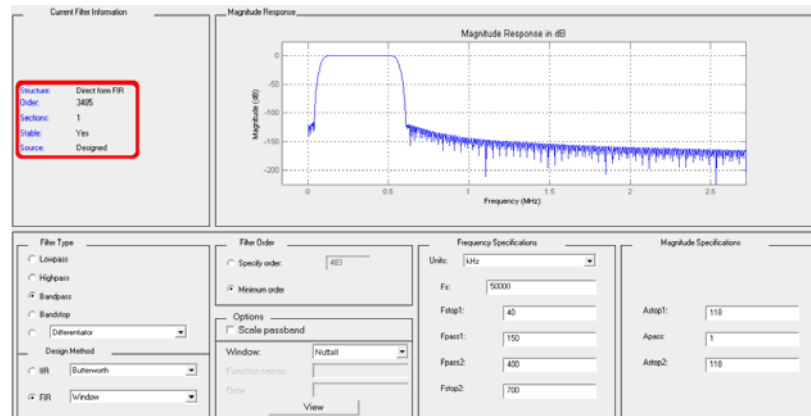


Figura 18. Interfaz Gráfica de *MatLab-fdatool*.¹⁷

En la figura 19 se observa la respuesta en frecuencia del filtro pasa banda utilizando las ventanas de *Hanning*, *Blackman* y *Nuttall*.

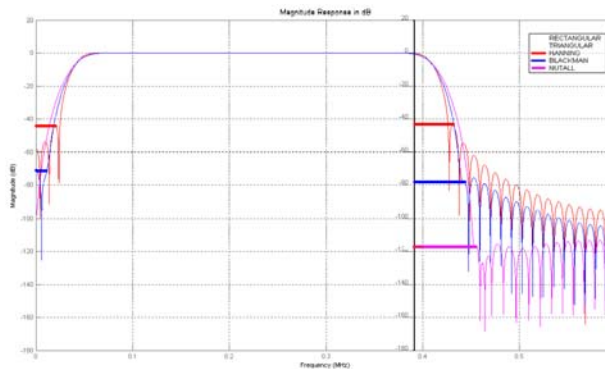


Figura 19. Respuesta en Magnitud del Filtro *FIR* pasa banda, Múltiples Ventanas.¹⁷

En la segunda fila de la tabla 6 se tabula las amplitudes de pico de los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia de cada ventana (Datos de la Tabla 4), en

la tercera fila se consignaron las amplitudes pico de los lóbulos laterales de la respuesta en magnitud del diseño del filtro pasa banda *FIR* (figura 19) y en la cuarta fila el ancho del lóbulo principal de la respuesta en frecuencia de cada ventana o mejor entendido, el ancho de las bandas de transición.

Tabla 6. Especificaciones de Ventanas.¹⁷

ESPECIFICACION	RECTANGULAR	TRIANGULAR	HANNING	BLACKMAN	NUTTALL
Valores Tabla 4	-13dB	-26.6 dB	-31dB	-57dB	-97dB
$\Delta_s H_{bp}$			-42dB	-79dB	-118dB
Ancho del lóbulo principal			25.0kHz	29.0kHz	31.0kHz

Dado que la ventana *Nuttall* es la que mejor cumple con las especificaciones de diseño del filtro pasa banda, se procede a estudiar la fase, el retardo de grupo y la respuesta al impulso del filtro. La figura 20, demuestra que el filtro pasa banda es un sistema de fase II, ya que tiene un retardo de grupo 2258.5 muestras (entero + 0,5) y la respuesta al impulso es de simetría par. Cabe destacar que el punto donde la respuesta al impulso es simétrica es el valor del retardo de grupo $\alpha = 45,17\mu s$ (microsegundos).

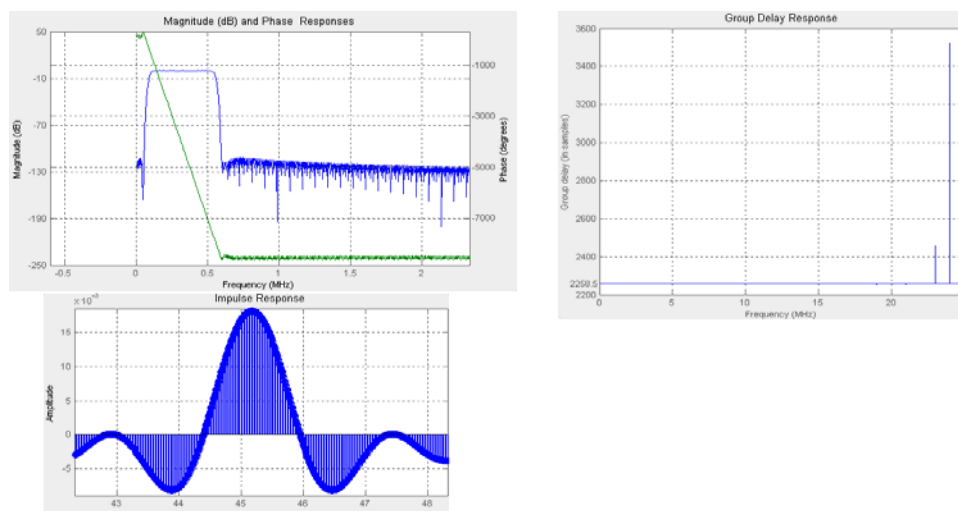


Figura 20. Respuesta en Magnitud y Fase, Retardo de Grupo, Respuesta al Impulso. Filtro *FIR* Pasa Banda, Ventana *Nuttall*.¹⁷

2.3.2 Ventana de *Kaiser* – Filtrar Onda P¹⁸

El propósito de utilizar la ventana *Kaiser* es reducir el orden del filtro cumpliendo en lo mejor posible con las especificaciones de diseño que se ha obtenido con la ventana de *Nuttall*.

El procedimiento consiste en utilizar la ventana *Kaiser*, con $\beta = 0$ y reducir el orden del filtro, con la condición de tener bandas de transición cercana a 100kHz, de acuerdo a lo mencionado anteriormente al reducir M aumenta las bandas de transición del filtro. Al final se obtuvo M=413 a una atenuación de -22dB de los lóbulos laterales.

Ahora el propósito es aumentar lo mayor posible la atenuación de los lóbulos laterales, es decir aumentar β en un factor de 3, dada la condición de mantener el ancho de las bandas de transición aproximadamente en los 100kHz o lo más cercano posible, también se debe aumentar M.

Tabla 7. Diseño de Filtros Mediante la Ventana *Kaiser*, Onda P.¹⁸

VENTANA	F _{s1} kHz	F _{p1} kHz	F _{p2} kHz	F _{s2} kHz	F _{s2} -F _{p2} F _{p1} -F _{s1}	Amplitud lóbulo lateral dB	β	M
DISEÑO INICIAL	40	150	400	500	90	Min		
					100	-22dB		
NUTTALL	78.3	110	534	565	31.7	-118dB		3485
					28	456kHz		
KAISER	88.3	101	543.5	555.5	12.7	564.6kHz	0	3317
					12	-21.33dB		
KAISER	86.7	103.3	541.3	558.6	16.7	570.7kHz	0	2517
					17.3	-20.63dB		
KAISER	81.8	112	535.4	565.7	30.2	589kHz	0	1317
					30.4	-22dB		
KAISER	52.7	140	498.5	598.5	87.3	568kHz	0	413

¹⁸ Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 19 "Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP". Bucaramanga Febrero 2009.

KAISER	42.8	143	489.5	591.2	100	-22.38dB	3	483
					100.2	692kHz		
					101.7	-35.2dB		

En la tabla 7 se muestra el procedimiento realizado, en la última fila es tabulado las especificaciones del diseño final con la ventana *Kaiser*, cabe aclarar que los datos obtenidos de F_{s1} y F_{s2} son con respecto al eje de -22dB.

En la figura 21, se observa la respuesta en magnitud y fase del filtro, este sistema es de tipo II, debido a su retardo de grupo de 241.5 (constante + 0,5) y su respuesta al impulso es de simetría par, $\alpha=4.83\mu s$, éste retardo de grupo es inferior al obtenido con la ventana de *Nuttall*, esto demuestra otra ventaja del diseño del filtro *FIR* pasa banda con la ventana de *Kaiser*.

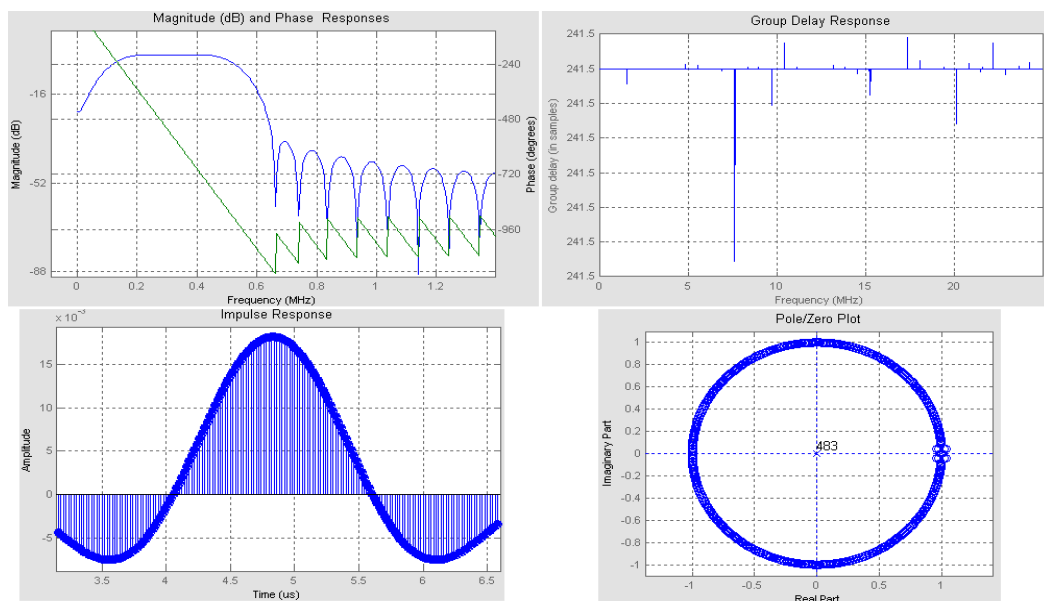


Figura 21. Respuesta en Magnitud y Fase, Retardo de Grupo, Respuesta al Impulso, Diagrama de Polos y Ceros, Filtro *FIR* Pasa Banda, Ventana *Kaiser*, Onda P.¹⁸

2.3.3 Ventana de *Kaiser* – Filtrar Onda S⁵

En la tabla 8 se observa las especificaciones de diseño del filtro pasa banda para la onda S.

Tabla 8. Especificaciones de Diseño del Filtro Pasa Banda, Ventana de *Kaiser*-Onda S.

Banda de Eliminación Inferior de Filtro Pasa Banda	Banda de Paso de Filtro Pasa Banda		Banda de Eliminación Superior de Filtro Pasa Banda
$f_{s1} = 430kHz$	$f_{p1} = 470kHz$	$f_{p2} = 613kHz$	$f_{s2} = 813kHz$
$\Delta_{s1} = -20dB$	$\Delta_p = -0.5dB$		$\Delta_{s2} = -4dB$

Utilizando el entorno de *Fdatool de Matlab* se comparan diferentes diseños de filtros pasa banda, variando el valor de M y el de β , en la figura 22 se observa la comparación de tres respuestas en frecuencia del filtro *FIR* pasa banda para la onda S y en la tabla 9 se han tabulado los datos de interés de cada diseño del filtro utilizando la ventana de *Kaiser*.

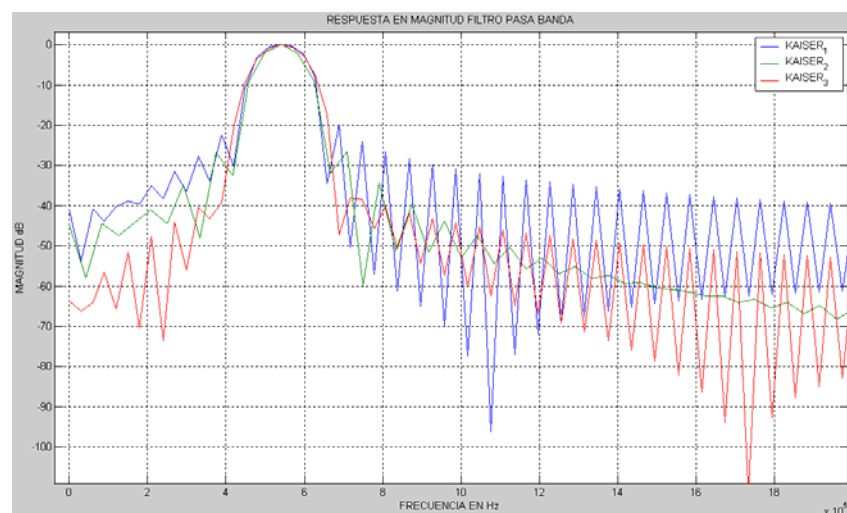


Figura 22. Comparación de Diseños de Filtros *FIR* Pasa Banda utilizando la Ventana *Kaiser*, Onda S.⁵

Tabla 9. Diseño de Filtros Mediante la Ventana *Kaiser*, Onda S.⁵

VENTANA	F _{s1} kHz	F _{p1} kHz	F _{p2} kHz	F _{s2} kHz	F _{s2} -F _{p2} F _{p1} -F _{s1}	Amplitud lóbulo lateral dB	β	M
DISEÑO INICIAL	410	430	613	813	40	Min -20dB/-4dB		
KAISER	404.6	434.5	659	688.2	29.9	708kHz -21dB	0	1469
KAISER 1	390.7	447.2	645.5	702.5	29.2	735.5kHz -22dB	0	837
KAISER 2	379	459	628.5	713	80	757kHz 19.73dB	0	601
KAISER 3	374.5	459.9	635	718.4	85.4	756.8kHz -36.4dB	3	837
					83.4			

Se ha seleccionado la ventana de *Kaiser* con $M=837$ y $\beta = 3$, para realizar el diseño del filtro *FIR* pasa banda, principalmente por tener la mayor atenuación (-36.4dB) en sus bandas de eliminación, ya que uno de los objetivos de implementar este filtro es atenuar las componentes de la onda longitudinal (Onda P) del espectro en frecuencia de la onda S. Cabe mencionar que los datos F_{s1} y F_{s2} fueron obtenidos con referencia al eje de -22dB.

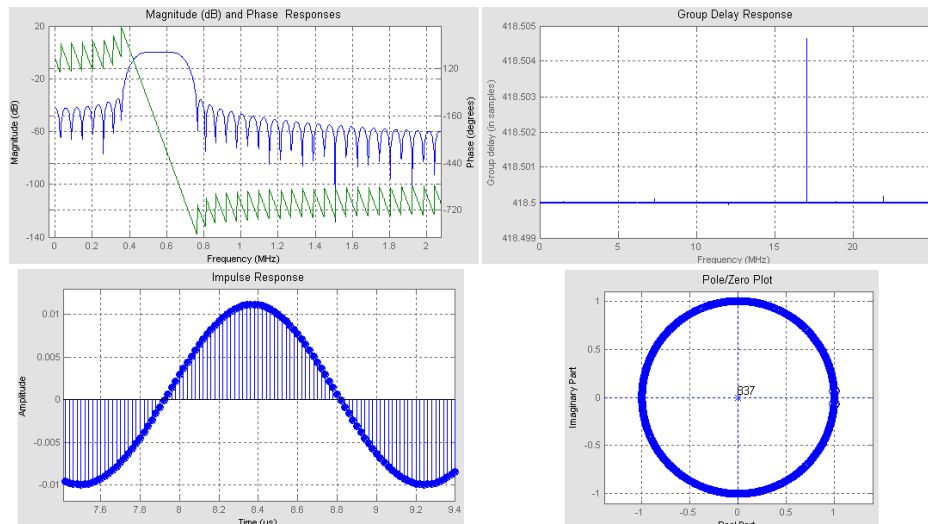


Figura 23. Respuesta en Magnitud y Fase, Retardo de Grupo, Respuesta al Impulso, Diagrama de Polos y Ceros, Filtro *FIR* Pasa Banda, Ventana *Kaiser*, Onda S.⁵

En la figura 23, se observa la respuesta en magnitud y fase del filtro, este sistema es de tipo II, debido a su retardo de grupo 418.5 (constante + 0,5) y su respuesta al impulso es de simetría par con respecto al retardo de grupo del filtro $\alpha = 8.37\mu s$.

2.3.4 Método de Remez – Filtrar Onda P⁵

Con la ayuda de la *Toobox “fdatool”* de *MatLab* se ha realizado los diseños del filtro para la onda P y S. Las especificaciones de diseño del Filtro *FIR* Pasa Banda utilizando método óptimo de *Remez* para la Onda P se observa en la tabla 10.

Tabla 10. Especificaciones de Diseño del Filtro Pasa Banda, Método de *Remez*-Onda P.⁵

Banda de Eliminación Inferior de Filtro Pasa Banda	Banda de Paso de Filtro Pasa Banda		Banda de Eliminación Superior de Filtro Pasa Banda
$f_{s1} = 40kHz$	$f_{p1} = 150kHz$	$f_{p2} = 400kHz$	$f_{s2} = 700kHz$
$\Delta_{s1} = -20dB$			$\Delta_{s2} = -20dB$
$\delta_2 = 0.001$		$\delta_1 = 0.01$	$\delta_2 = 0.001$

En este diseño se ha utilizado el mismo orden del filtro $M=483$, con el motivo de compararlo con el diseño realizado en el método de ventanas, en la figura 24 se muestra la respuesta en magnitud y fase, retardo de grupo, respuesta al impulso y el diagrama de polos y ceros del filtro *FIR* pasa banda.

El diseño propuesto con el método de *Remez* es un sistema de fase II, debido a su retardo de grupo de 241.5 (entero + 0.5) y por tener su respuesta al impulso con simetría par, el punto donde la respuesta al impulso es simétrica es el valor del retardo de grupo, es decir la señal a tratar se retrasará 4.83 μs .

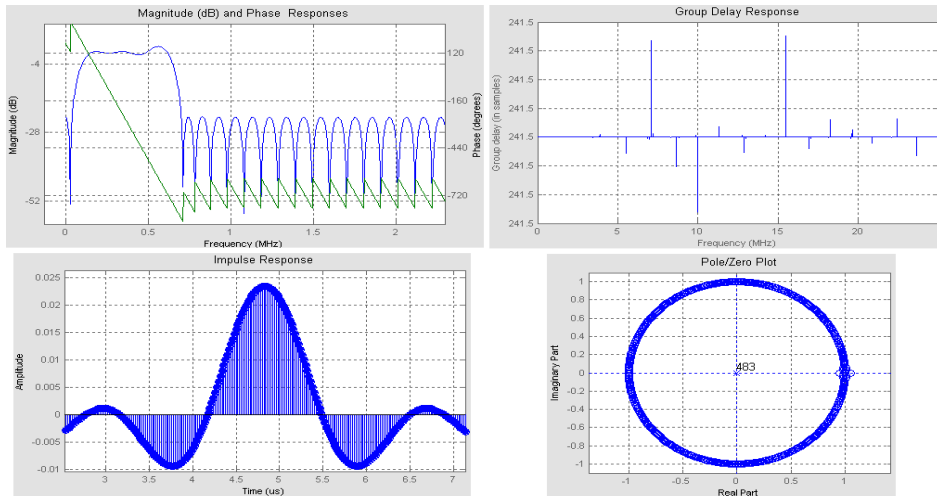


Figura 24. Respuesta en Magnitud y Fase, Retardo de Grupo, Respuesta al Impulso, Diagrama de Polos y Ceros, Filtro *FIR* Pasa Banda, Método de *Remez*, Onda P.⁵

2.3.5 Método de *Remez* – Filtrar Onda S⁵

Las especificaciones de diseño del Filtro *FIR* Pasa Banda utilizando método óptimo de *Remez* para la onda S se observa en la tabla 11.

Tabla 11. Especificaciones de Diseño del Filtro Pasa Banda, Método de *Remez*-Onda S.⁵

Banda de Eliminación Inferior de Filtro Pasa Banda	Banda de Paso de Filtro Pasa Banda		Banda de Eliminación Superior de Filtro Pasa Banda
$f_{s1} = 430kHz$	$f_{p1} = 470kHz$	$f_{p2} = 613kHz$	$f_{s2} = 813kHz$
$\Delta_{s1} = -22dB$	$\Delta_p = -0.5dB$		$\Delta_{s2} = -22dB$
$\delta_2 = 0.1$	$\delta_1 = 0.01$		$\delta_2 = 0.1$

Orden del filtro $M=837$, en la figura 25 se muestra la respuesta en magnitud y fase, retardo de grupo con valor de 418.5 (entero + 0.5), respuesta al impulso cuyo punto de simetría es $\alpha = 8.37\mu s$ y el diagrama de polos (Todos en el origen) y ceros del filtro *FIR* pasa banda para la Onda S.

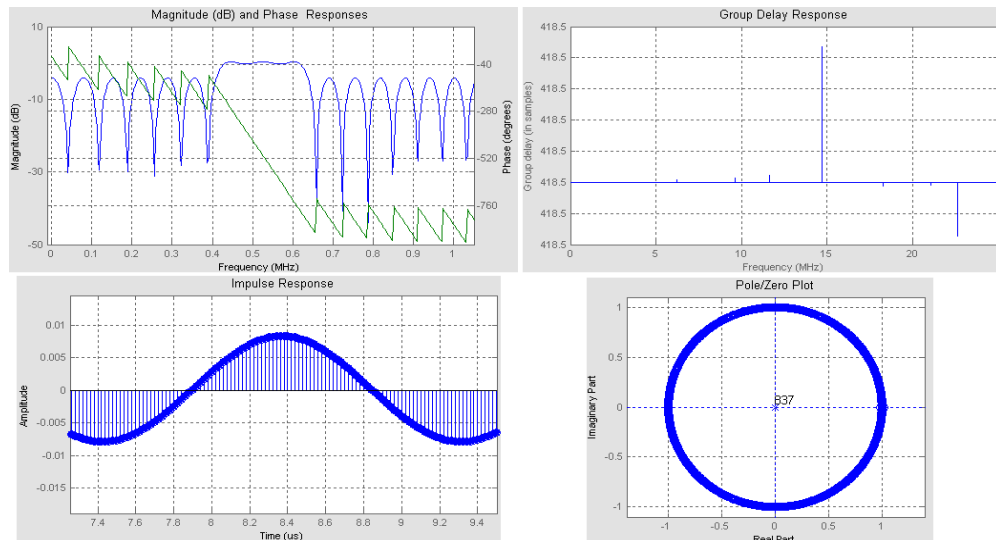


Figura 25. Respuesta en Magnitud y Fase, Retardo de Grupo, Respuesta al Impulso, Diagrama de Polos y Ceros, Filtro *FIR* Pasa Banda, Método de *Remez*, Onda S^5 .

2.4 COMPARACION DE DISEÑOS PROPUESTOS

Para analizar las ventajas y desventajas de los dos métodos propuestos para diseñar filtros pasa banda de fase lineal, se han superpuesto las respuestas en magnitud del filtro, tanto para la onda P (figura 26) como para la onda S (figura 27).

2.4.1 Método Enventanado Vs Método Óptimo – Onda P^5

Los datos obtenidos de las frecuencias de paso ω_{p1} y ω_{p2} son tomados con referencia al eje de -1dB y los datos de las frecuencias de corte ω_{s1} y ω_{s2} con referencia al eje de -22dB.

Tabla 12. Datos Comparativos Filtro FIR Pasa Banda con la Ventana *Kaiser* y el Método de *Remez* – Onda P.⁵

Parámetro de Diseño	Unidad	Método Enventanado <i>Kaiser</i>	Método Óptimo <i>Remez</i>	Diseño Inicial
Orden del Filtro	M	483	483	
ω_{s1}	kHz	42.8	39.5	35
ω_{p1}	kHz	143	139.2	48
ω_{p2}	kHz	489.5	409.8	403
ω_{s2}	kHz	591.2	500.2	416
$\omega_{p1} - \omega_{s1}$	kHz	100.2	99.7	13
$\omega_{s2} - \omega_{p2}$	kHz	101.7	90.4	15
ΔS	dB	-35.2	-21.7	-20
δ_1		0.014	0.03	0.01
δ_2		0.0015	0.08	0.1
α	μseg	4.83	4.83	
Implementación		Fácil	Complejo	

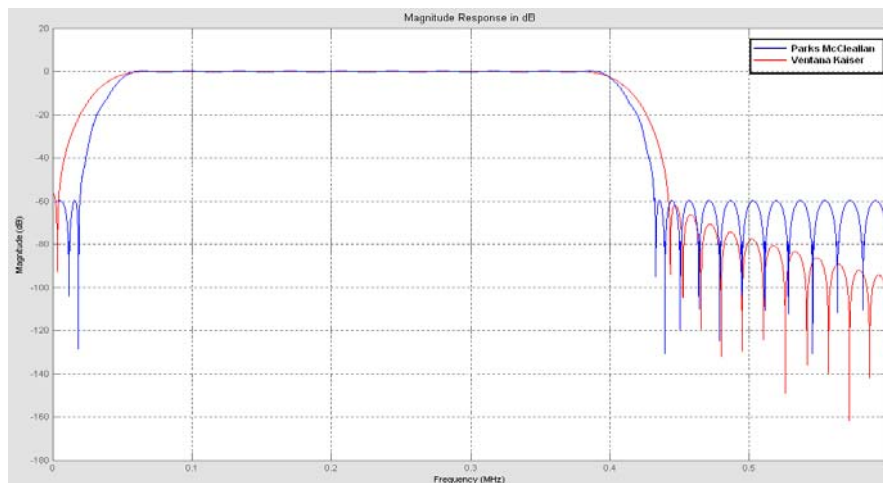


Figura 26. Respuesta en Magnitud del Filtro FIR Pasa Banda con la Ventana *Kaiser* y el Método de *Remez* – Onda P.⁵

2.4.2 Método Enventanado Vs Método Óptimo – Onda S⁵

Los datos obtenidos de las frecuencias de paso ω_{p1} y ω_{p2} son tomados con referencia al eje de -0.5dB y los datos de las frecuencias de corte ω_{s1} y ω_{s2} con referencia al eje de -4dB.

Tabla 13. Datos Comparativos Filtro FIR Pasa Banda con la Ventana *Kaiser* y el Método de *Remez* – Onda S.⁵

Parámetro de Diseño	Unidad	Método Enventanado Kaiser	Método Óptimo Remez	Diseño Inicial
Orden del Filtro	M	837	837	
ω_{s1}	kHz	431.7	410.6	430
ω_{p1}	kHz	470.2	428	450
ω_{p2}	kHz	650.2	620.4	613
ω_{s2}	kHz	688.3	637.6	630
$\omega_{p1} - \omega_{s1}$	kHz	38.5	17.4	20
$\omega_{s2} - \omega_{p2}$	kHz	38.1	17.2	17
ΔS	dB	-36.4	-4.2	-4
δ_1	Volts	0.02	0.0345	0.01
δ_2	Volts	0.0015	0.6	0.1
α	μ seg	8.37	8.37	
Implementación		Fácil	Complejo	

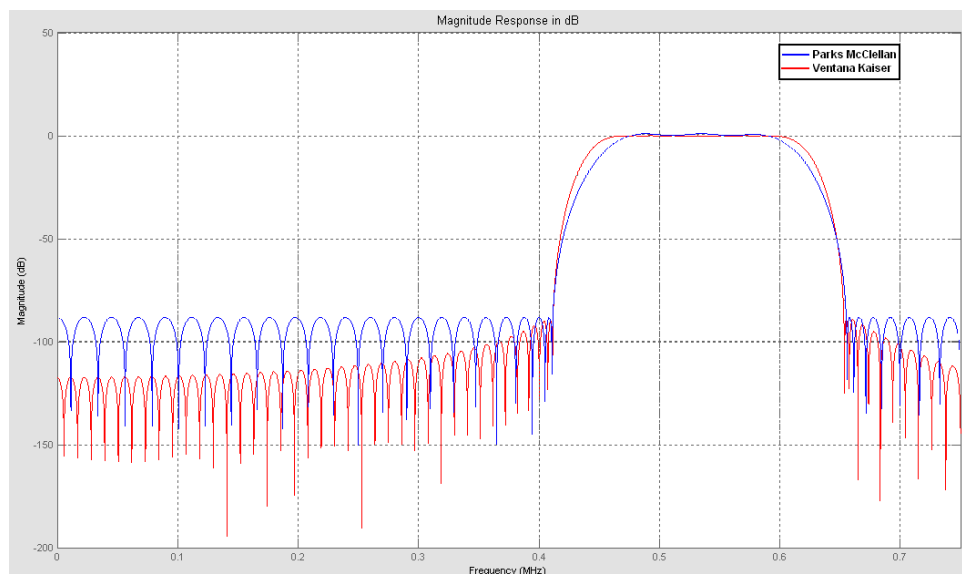


Figura 27. Respuesta en Magnitud del Filtro FIR Pasa Banda con la Ventana *Kaiser* y el Método de *Remez* – Onda S.⁵

3. SOFTWARE DE AUTOMATIZACIÓN

3.1 SNAP PAC System

SNAP PAC System (*PAC* de sus siglas en inglés Control Automata Programable) de la empresa *OPTO22* está comprendido de cuatro componentes, el *software PAC Project Suite*, el *hardware SNAP PAC Controller, Brains* y dispositivos de entrada/salida, en conjunto permiten realizar automatización industrial, monitoreo remoto, adquisición de datos y aplicaciones de control.

El *software PAC Project Suite* tiene tres entornos de desarrollo para automatizar procesos industriales *PAC Control, PAC Display* y *PAC Manager*.

En *PAC Control* se escribe el código fuente en un lenguaje gráfico (*flowchart* y *optoscript*), que permite depurar y compilar la estrategia o programa desarrollado, en *PAC Display* se desarrollan las interfaces gráficas para mostrar resultados y monitoreo del proceso y en *PAC Manager* se realiza la configuración e inspección de trabajo del *PAC*.

3.2 Diseño de la estrategia de Control¹⁹

Para controlar un problema se procede a solucionarlo de forma sencilla mediante un algoritmo, el cual permitirá involucrar preguntas, acciones y comandos de

¹⁹ Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 11 "Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP". Bucaramanga Julio 2008.

control y acción, en la figura 28 se observa el esquema de conexión del sistema general, para tener una visión global de las señales que intervienen en el proceso.

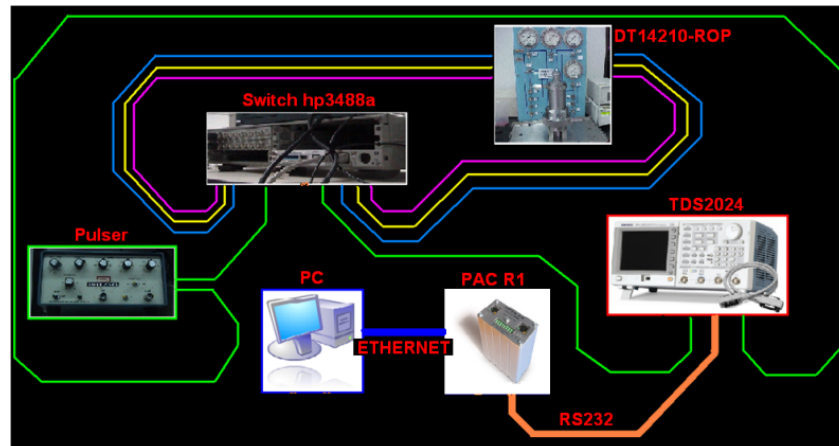


Figura 28. Diagrama de Conexión de la Instrumentación-Prueba Dinámica Acústica.⁵

3.2.1 Definir el Problema

Para definir el problema de forma sistemática se hicieron preguntas, las cuales permitirán tener una idea global de la situación.

- **¿Qué se debe tener en cuenta?**

La selección del sensor piezoeléctrico transmisor y receptor debe coincidir en sus propiedades de propagación de onda (Cristal P, S1, S2), la selección se puede realizar con un multiplexor para el transductor transmisor y un demultiplexor para el transductor receptor (Anexo A).

La adquisición y tratamiento de las señales eléctricas provenientes de la muestra de roca debe estar en un rango aceptable de calidad para estimar la diferencia de

tiempo de transito de las ondas P y S, lo que a su vez puede inferir en el cálculo del módulo elástico de *Young* y coeficiente de *Poisson* de la roca.

El desarrollo de la interfaz gráfica permitirá introducir y arrojar valores de interés, así como monitorizar entre otras posibilidades de control.

- **¿Qué señales de entrada y salida van a intervenir?**

En la tabla 14 se muestran las señales de entrada y de salida al sistema en general con una breve descripción de cada señal.

Tabla 14. Señales de Entrada/Salida al Sistema General.¹⁹

E/S	SEÑAL	DESCRIPCION
E	Señal Pulsar	La señal que excitará la muestra de roca
E	Señal hp3488a (Mux 1-4)	La señal que proviene del pulsar y es direccionada a uno de los tres cristales piezoeléctricos transmisores (P, S1, S2).
E	Comandos Básicos	Inserción de comandos y preguntas realizadas al osciloscopio digital TDS2024 con el motivo de realizar acciones.
E	Datos de Entrada	Largo, Diámetro, Peso de la muestra, Módulo de Rigidez, etc.
S	Señal hp3488a (Demux 4-1)	La señal que proviene de la muestra de roca y es direccionada a uno de los tres cristales piezoeléctricos receptores (P, S1, S2).
S	Comandos Básicos	Respuesta a la inserción de preguntas realizadas al osciloscopio digital, es decir adquisición de datos de la señal acústica.
S	Resultados	La diferencia de tiempo de tránsito de la señal acústica a través de la muestra de roca, Módulo de Young y Coeficiente de Poisson.

3.2.2 Diseño de secuencia lógica de pasos para la solución del problema

Como se ha determinado lo que se quiere hacer con las entradas y salidas del sistema, ahora, es necesario seguir los pasos para realizar control y automatización. En la figura 29 se visualiza el suceso de los pasos a desarrollar en la automatización del sistema de medición de velocidades acústicas.

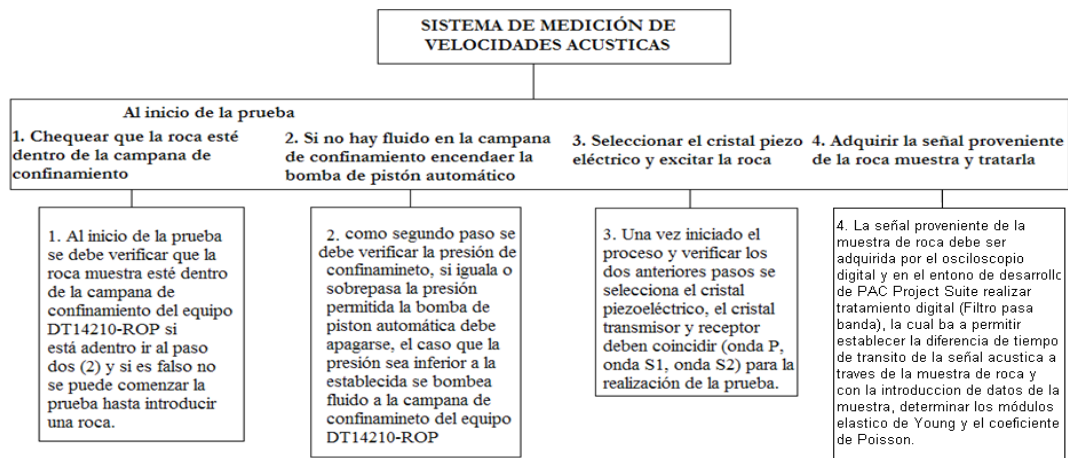


Figura 29. Sucesión de Pasos de Automatización.¹⁹

3.3 Estrategia de Control

3.3.1 Configuración del Hardware SNAP PAC R1²⁰

El controlador utilizado para comunicar el sistema de adquisición de ondas (*Tektronix TDS2024*) y el sistema de cómputo se realiza por medio del *SNAP PAC R1* de *OPTO22* y la comunicación entre estos dos dispositivos se realiza por medio de la interfaz *RS232*, además el *SNAP PAC R1* cuenta con dos puertos *Ethernet* con direcciones IP (Protocolo de Internet) independientes y por medio de una de ellas se comunica con el computador para controlar el osciloscopio digital, ver figura 28.

La configuración del *SNAP PAC R1* permitirá tener una comunicación fiable, por tal motivo el *software PAC Manager* es el gestor de configuración del *SNAP PAC R1* y todo dispositivo que se comunique a él. En la figura 30 se observa la configuración, asignando una dirección **IP=192.254.40**, dirección de **Mac=00-A0-3D-01-4D-83** y una dirección de **Subnet Mask=255.255.0.0**.

²⁰ 1704_PAC_Manager_Users_Guide

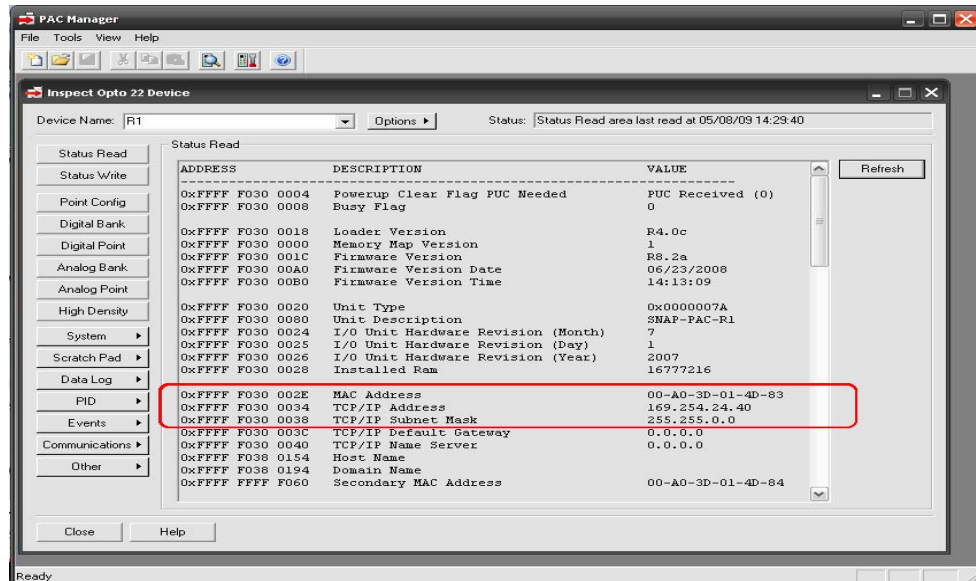


Figura 30. Configuración del SNAP PAC R1-PAC Manager.⁵

3.3.2 Inicialización del Programa

Al inicio de la prueba es necesario ingresar datos característicos de la muestra de roca, dado que la velocidad de las ondas acústicas se relaciona con el largo de la probeta ecuación 3 y 4, el coeficiente de *Poisson* está en función de las velocidades de las ondas P y S, ecuación 5, y el módulo de *Young* se relaciona con la densidad y las velocidades de las ondas P y S, ecuación 7.

En el entorno de desarrollo de *PAC Control* se crean las variables de entrada, figura 31.²¹

²¹ 1713_PAC_Control_Commands_Quick_Reference_Legacy_Edition

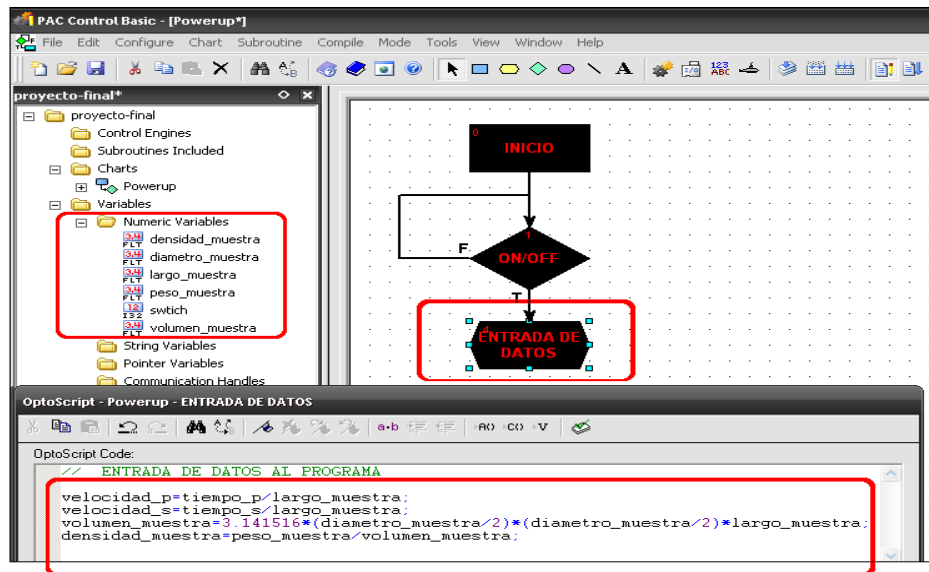


Figura 31. Entrada de Datos de la Muestra de Roca – PAC Control.⁵

3.3.3 Establecer Comunicación con el Osciloscopio Digital TDS2024²²

Para controlar y operar el osciloscopio digital *Tektronix TDS2024* desde el *software PAC Control*, se realiza a través del protocolo de comunicación de la interfaz *RS232* y comandos básicos. La transmisión de los comandos hacia el osciloscopio se realiza por medio del código *ASCII (American Standard Code for Information Interchange)*. Los comandos pueden realizar acciones específicas del entorno del osciloscopio y pedir información al osciloscopio.

El protocolo de comunicación del osciloscopio con dispositivos seriales externos, exige que la velocidad en baudios sea de 9600, el control de flujo de datos sea *ind hard* y ninguna paridad dentro de los ocho bits de transmisión por la interfaz *RS232*. En la figura 32 se observa el código realizado para establecer la comunicación del osciloscopio digital con el *SNAP PAC R1* y el computador desde el entorno de desarrollo *PAC Control*. Para transferir los comandos, fue creado un

²² TDS1000 TDS2000 Series Manual del usuario

vector con los comandos y se envía uno a uno de forma automática. En la tabla 15 se observan los comandos a utilizar para establecer una comunicación del osciloscopio digital con dispositivos seriales.

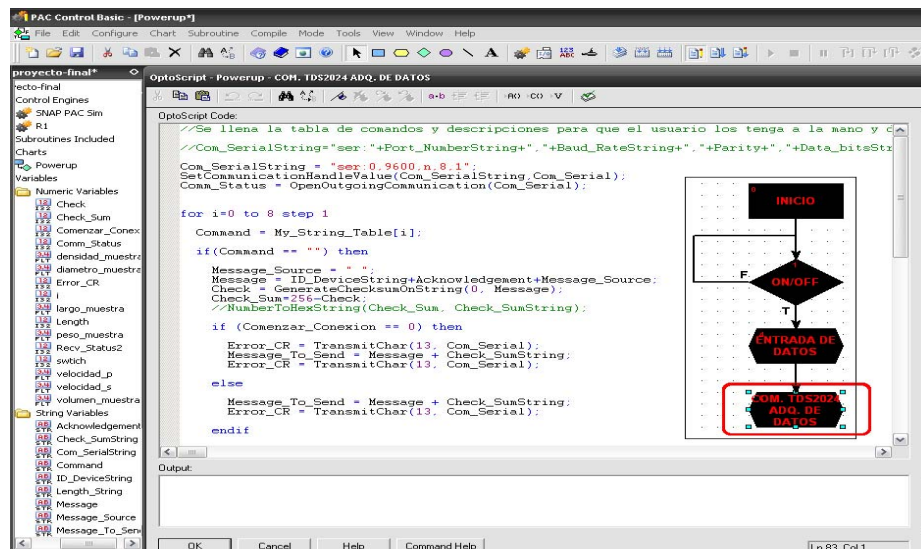


Figura 32. Configuración de Comunicación TDS2024 – PAC Control.⁵

Tabla 15. Comandos para establecer una Comunicación.

COMANDO BASICO	DESCRIPCION
RS232:BAUd 9600	Velocidad de Transmisión 9600 Baudios
RS232:HARDFlagging ON	Control de Flujo Encendido
RS232:PARity NOnE	Ningún bit de Paridad en Busca de Errores de Transmisión

3.3.4 Control del Sistema de Adquisición de Ondas

Antes de obtener los datos que caracterizan las ondas acústicas se debe controlar el entorno del osciloscopio digital, con el motivo de obtener ondas acústicas bien definidas en el *display* del osciloscopio. En la tabla 16 se muestran los comandos a utilizar y una descripción de cada uno y en la figura 33 se observa el código desarrollado para realizar control del entorno del osciloscopio digital *Tektronix TDS2024*.

Tabla 16. Comandos para realizar Control del entorno del Osciloscopio.

COMANDO BASICO	DESCRIPCION
HORizontal:MAIn:SCAlE 2.5E-6	Frecuencia de Muestreo 10MHz
CH1:POS 0.0E0	Posición de la señal en eje de voltaje
CH1:VOL 2.0E-1	Volts por división
HORizontal:POSition 2.0E-6	Posición de la señal en el eje temporal
ACQuire:MODe SAMple	Modo de Adquisición
ACQuire:NUMAVg 128	Número de formas de Ondas para promediar y adquirir
ACQuire:STATE RUN	Comenzar la adquisición
ACQuire:STATE STOP	Finalizar la adquisición

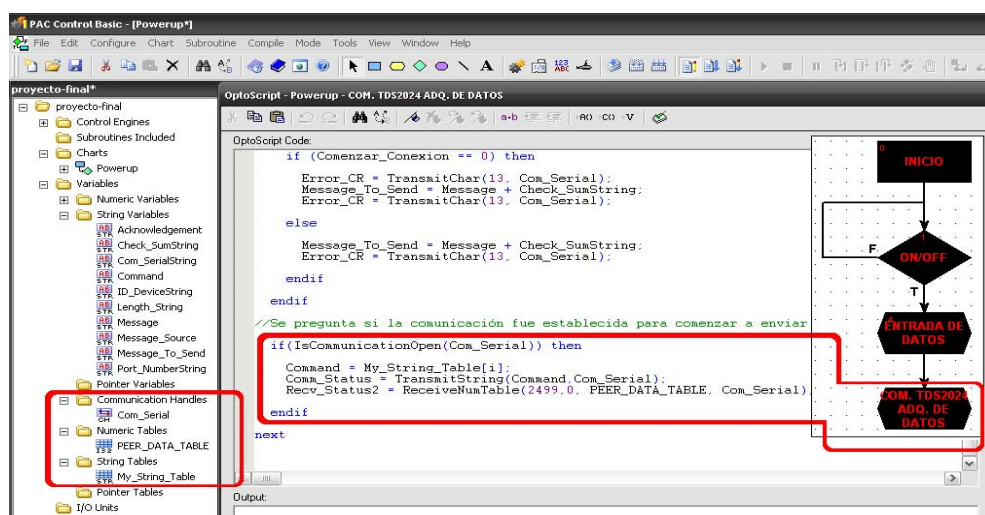


Figura 33. Configuración del Sistema de Control del TDS2024 – PAC Control.⁵

3.3.5 Tratamiento Digital - Señales Provenientes de la Muestra de Roca

La etapa de tratamiento digital de las señales provenientes de la muestra de roca, consiste en resolver la ecuación 8, en la cual los coeficientes del filtro pasa banda de fase lineal se han obtenido con el método con el de *Remez*. Antes de realizar el tratamiento digital de las ondas, se debe seleccionar la onda respectiva, es decir la Onda P, Onda S1 u Onda S2, para no inferir en cálculos errados. Precisamente en la figura 34 se ilustra la etapa de selección de la onda y de tratamiento digital a la respectiva onda seleccionada.

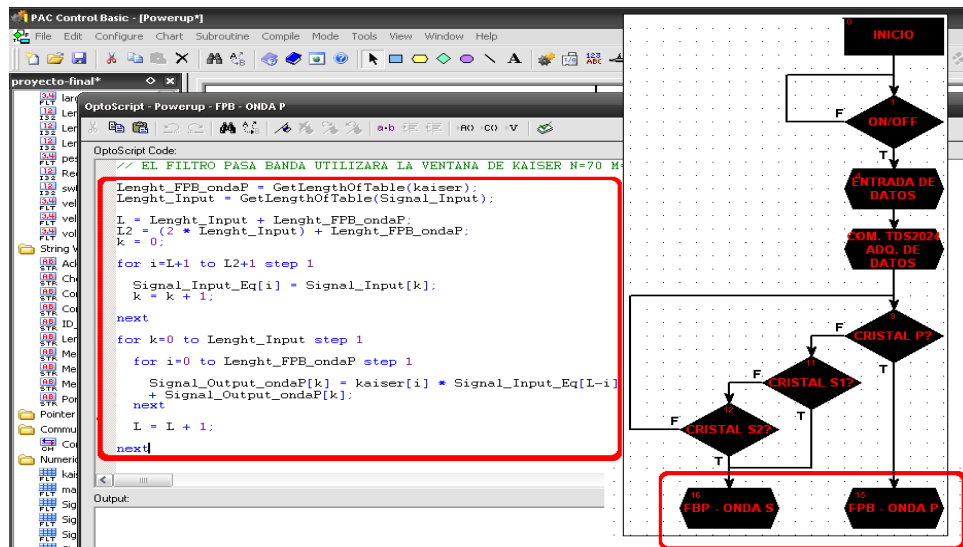


Figura 34. Tratamiento Digital de Ondas Acústicas.⁵

3.3.6 Diferencia de Tiempo de Tránsito de la Señal Acústica a través de la Muestra de Roca

Para establecer el instante de inicio de la señal acústica, se puede determinar por medio de la siguiente técnica, al excitar la muestra de roca, inicialmente se generan picos de voltaje, estos picos son la referencia para dar comienzo a un contador.

Ahora para estimar el tiempo al que comienza la señal acústica (Onda P, Onda S), en otras palabras, el tiempo de tránsito de la señal acústica a través de la muestra de roca, se toma como referencia el inicio del pico con respecto a la desviación del eje temporal, en un valor de 8% de la amplitud del pico. Cuando la evaluación supere este valor, el contador finaliza justo en el instante de inicio de la onda, este valor es multiplicado por el periodo de muestreo de la señal, para expresarlo en unidades temporales.

Generalmente la prueba acústica consiste en analizar varias ondas P y S, desde una presión axial mínima hasta una presión axial máxima, justo antes que falle la muestra de roca, la técnica anteriormente mencionada para establecer la diferencia de tiempo de tránsito de las ondas acústicas, se aplica sobre la última onda P y S registrada, dado que esta señal es la de mayor magnitud comparándola con las otras ondas, además el ruido permitido por el filtro digital no afecta en gran medida a esta señal.

Para establecer la diferencia de tiempo de tránsito del resto de las ondas se toma como referencia el tiempo hallado de la última señal (registrada a mayor presión axial), debido a que este es el menor tiempo de tránsito que se puede registrar, dado que al ser sometido a una presión máxima, la distancia entre los cristales es menor y la densidad de la muestra es mayor. Partiendo del tiempo hallado y este principio básico (a menor presión, mayor tiempo de tránsito) se establece un rango de tiempo y se evalúa para cada onda el instante de tiempo que ha cruzado por el eje temporal, indicando el inicio de la onda acústica.



Figura 35. Adquisición de Onda Acústica.⁵

En la figura 36 se muestra el código y la lógica realizada en el entorno de desarrollo de *PAC Control*.

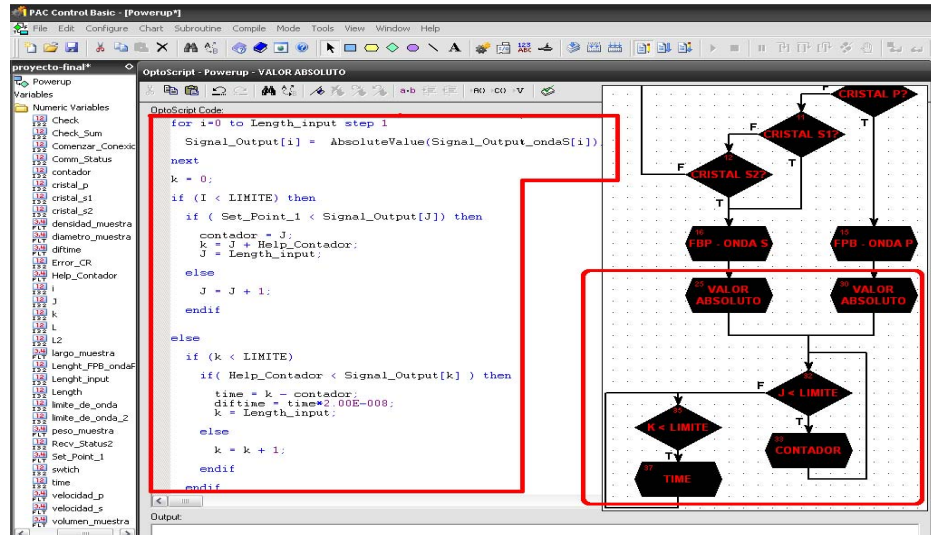


Figura 36. Estimación de la Diferencia de Tiempo de Tránsito de la Señal Acústica a través de la Muestra de Roca.⁵

3.3.7 Interfaz Gráfica - HMI

La interfaz gráfica realizada en *PAC Display* de *OPTO22* se llama *HMI (Human Machine Interface)*, la cual permite monitorear, adquirir datos, realizar control industrial con los controladores de *OPTO22*, como es el caso del *SNAP PAC R1*. El diseño amigable de la interfaz gráfica permite que el operario realice el ensayo sin ningún inconveniente, obteniendo los resultados en tiempo real.

La *HMI* para el ensayo de velocidades acústicas está comprendida de un menú inicial, el cual abre ventanas emergentes para la entrada de los datos característicos de la muestra de estudio, un tablero de control para seleccionar hasta 24 ondas acústicas, la visualización de las gráficas de velocidades de ondas, módulo de *Young*, coeficiente de *Poisson* y el valor del tiempo de vuelo de las ondas P y S, y por último muestra un informe de la prueba acústica. Figura 37.



Figura 37. Interfaz Gráfica – Menú Inicial.⁵

Se crearon dos menús de Entrada de Datos, el primero permite ingresar los datos de la persona responsable del ensayo: nombre, apellido, cargo en el Laboratorio Mecánica de Rocas y la fecha en la que se realiza el ensayo, con el fin de realizar un registro e historial de eventos, en el segundo menú se introducen datos característicos de la muestra roca, como: la identificación, el tipo de formación, el peso, diámetro y el largo de la muestra de roca, en la figura 38 se observa la ventana emergente para los datos de entrada del operario y de la muestra de roca.



Figura 38. Interfaz Gráfica – Datos de Entrada.⁵

Regularmente el juego de ondas adquiridas y a analizar son varias ondas P y S, el número de ondas a analizar depende de las ondas que pueden ser registradas justo antes que falle la muestra, la ventana Tablero de Control corresponde a la selección de ondas P y de ondas S con interruptores, también hay un menú para registrar las presiones axiales y laterales a la que se somete la muestra de roca.

Cabe aclarar que las ondas P1 y S1 son las ondas a presiones mínimas y las ondas P12 y S12 son las ondas registradas a las mayores presiones. En la figura 39 se observa el menú Tablero de Control.

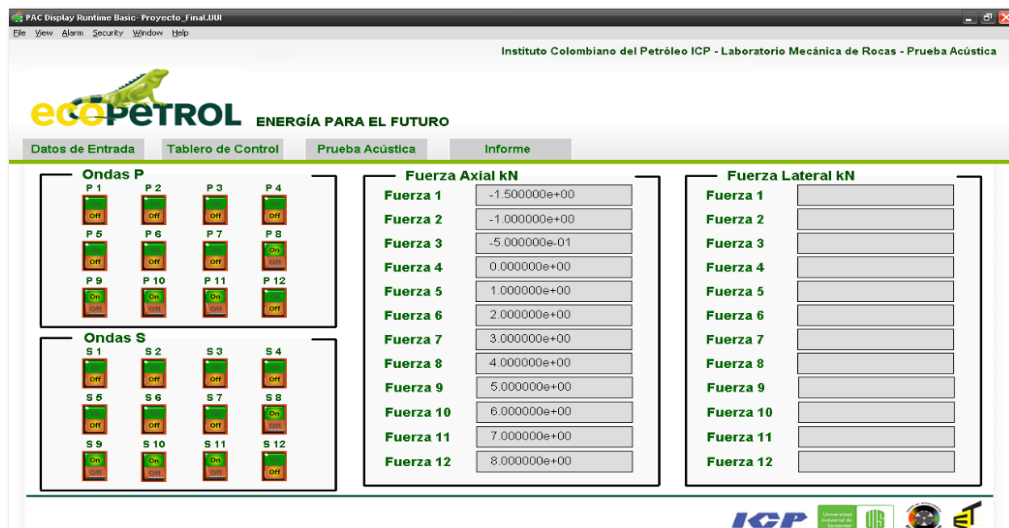


Figura 39. Interfaz Gráfica – Tablero de Control.

La ventana emergente de la Prueba Acústica está comprendida por dos botones redondo industriales, con el objetivo de dar inicio y parada a la prueba acústica, con la premisa que por lo menos se haya seleccionado una onda P y S para el inicio de la prueba, de forma ilustrativa se muestra una barra de progreso para el análisis de las ondas P y S, dado que la parte de filtrado digital de las ondas tarda un par de minutos.

Las gráficas que se muestran en esta ventana son cuatro: la primera (parte superior) el promedio del tiempo de vuelo de las ondas P y S a través de la muestra de roca, la segunda (Inferior izquierda) las velocidades de las ondas P y S en función de la presión axial ejercida a la muestra, en la tercera (Inferior centro) el módulo de *Young* en función de la presión axial sobre la muestra y en la cuarta (inferior derecha) el coeficiente de *Poisson* de la muestra de roca en función de la presión axial.

Cuando se completa el 100% del análisis de las ondas P y S, automáticamente se activa el botón de apagado y se muestran los resultados de forma gráfica en la ventana Prueba Acústica (figura 40) y de forma numérica en la ventana Informe (figura 41).

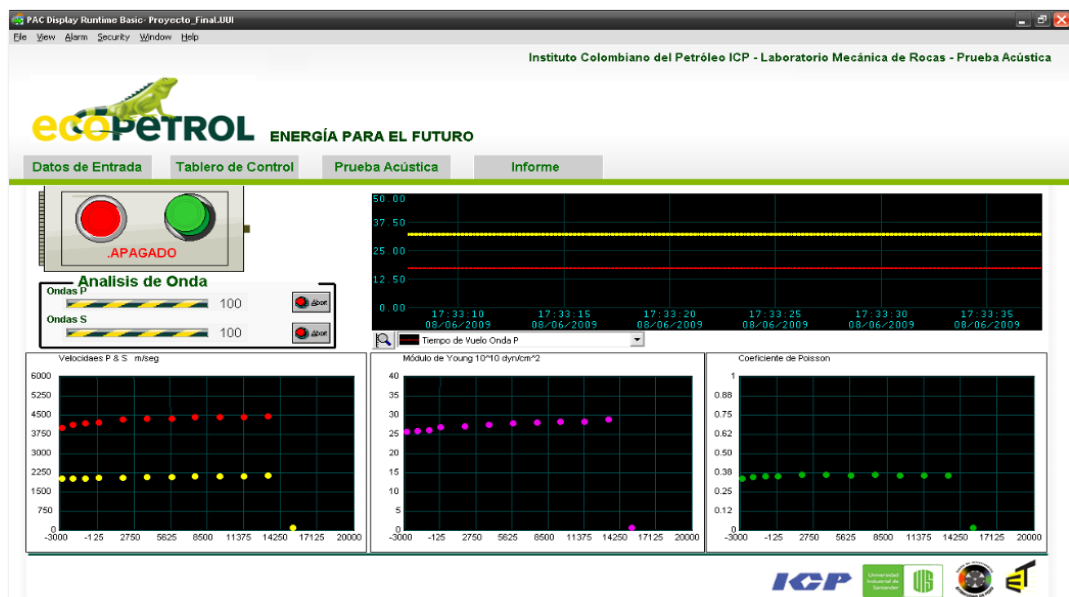


Figura 40. Interfaz Gráfica – Prueba Acústica.⁵

4. PRUEBAS REALIZADAS Y RESULTADOS OBTENIDOS⁵

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de las pruebas acústicas realizadas en el *software* desarrollado de *OptoControl* y visualizadas en *OptoDisplay*, para este caso se van a realizar dos pruebas.

La prueba consiste en ejercer una carga o fuerza axial a la muestra de roca, desde un valor mínimo (0.0kN) hasta un valor máximo, justo antes que falle la muestra de roca y registrar ondas P y S dentro de este rango, con el fin de estimar la diferencia de tiempo de tránsito de las ondas acústicas a través de la muestra de roca en función de la fuerza por unidad de área y, con base en estos datos, estimar los módulos elásticos de la muestra de roca.

Cabe aclarar que la onda acústica viaja de un cristal transmisor al cristal receptor y estos cristales piezoeléctricos se ubican en *endcup's* dado por la configuración mecánica del equipo, el cual indica que al tiempo registrado por las ondas acústicas se debe restar el tiempo en que las ondas viajan por el material de los *endcup*, para la onda P (5.8us) y para la onda S (8.2us).

4.1 Descripción de las Muestras de Roca

Las propiedades petrofísicas de las dos muestras de roca se han escrito en la tabla 17.

Tabla 17. Descripción de las Muestras de Roca.⁵

Formación	ID Sample	Largo mm	Diámetro mm	Masa g	Área cm ²	Volumen cm ³	Densidad g/cm ³
ORITO	X001	48.85	25.82	61.36	5.23603	25.578	2.3989
ORITO	X002	48.37	25.37	57.96	5.05511	24.452	2.3704

4.2 Orito X001

En la tabla 18 se han tabulado los valores de la carga axial aplicada, los tiempos de tránsito y velocidades de las ondas P y S de la muestra de roca. En la tabla 19 se muestran los módulos de *Young* y los coeficientes de *Poisson* así como el promedio de estos valores.

En la figura 42 se detalla en *OptoDisplay*, la ventana de informe de la prueba, en la figura 43 se ilustra la gráfica de las velocidades de las ondas acústicas (tabla 18), en la figura 44 y figura 45 se observan las tendencias del módulo de *Young* y del coeficiente de *Poisson* (tabla 19).

Tabla 18. Orito X001, Tiempos y Velocidades.⁵

Fuerza Axial kN	Esfuerzo Axial kPa	Tiempo P us	Tiempo S us	Velocidad P m/s	Velocidad S m/s
0	0.00	17.65	38.25	4122.363	1625.624
0.5	954.92	17.65	38.25	4122.363	1625.624
1	1909.84	17.55	38.05	4157.446	1636.516
1.5	2864.76	17.45	37.85	4193.133	1647.554
2.5	4774.61	17.15	37.45	4303.965	1670.085
3.5	6684.45	17.05	37.05	4342.222	1693.241
4.5	8594.29	17.05	36.85	4342.222	1705.061
5.5	10504.14	16.95	36.75	4381.166	1711.033
6.5	12413.98	16.95	36.65	4381.166	1717.047
7.5	14323.82	16.95	36.65	4381.166	1717.047
8.5	16233.66	16.85	36.45	4420.814	1729.203
Promedio		17.20	37.30	4286.184	1679.821

Tabla 19. Orito X001, Módulo de *Young* y Coeficiente de *Poisson*.⁵

Fuerza Axial kN	Esfuerzo Axial kPa	Módulo de <i>Young</i> 10^{10} dyn/cm ²	Coefficiente de <i>Poisson</i>
0	0.00	17.85128	0.4079294
0.5	954.92	17.85128	0.4079294
1	1909.84	18.09632	0.4083201
1.5	2864.76	18.34641	0.4087150
2.5	4774.61	18.88715	0.4113697
3.5	6684.45	19.40030	0.4103360
4.5	8594.29	19.65138	0.4088508
5.5	10504.14	19.80561	0.4100130
6.5	12413.98	19.93450	0.4092643
7.5	14323.82	19.93450	0.4092643
8.5	16233.66	20.22375	0.4096822
Promedio		19.08932	0.4092431



Figura 42. Orito X001, Interfaz Gráfica-Prueba Acústica.⁵

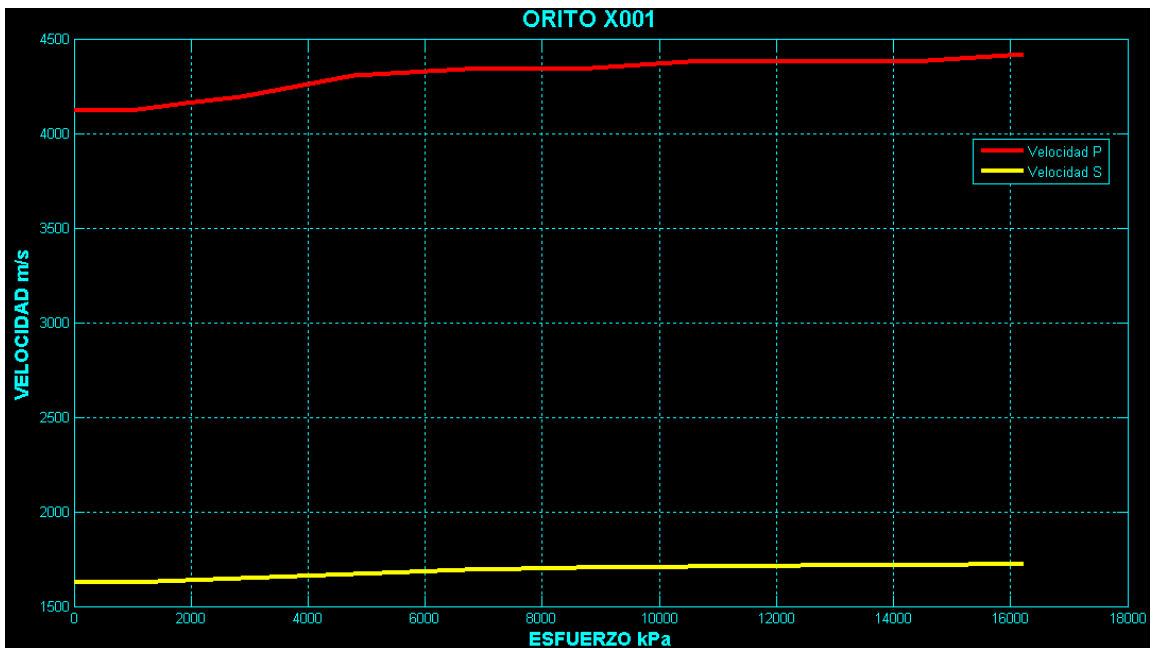


Figura 43. Orito X001, Velocidades Acústicas.⁵

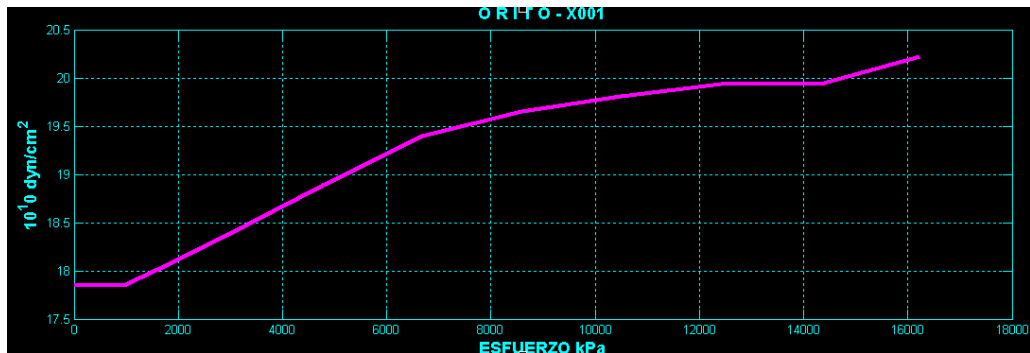


Figura 44. Orito X001, Módulo de Young.⁵

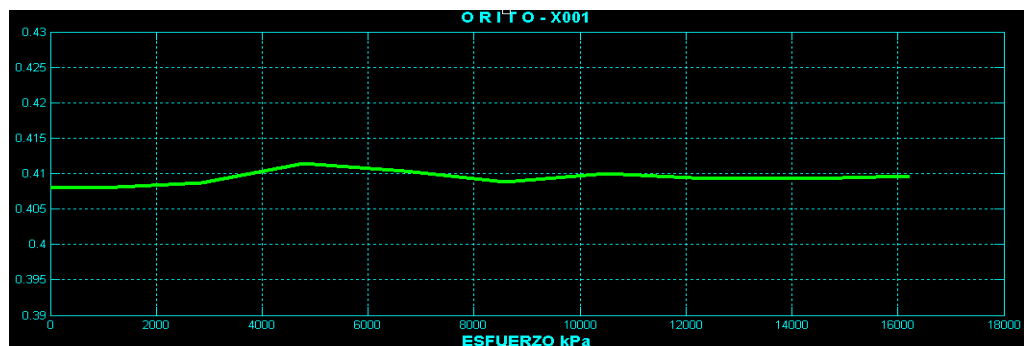


Figura 45. Orito X001, Coeficiente de Poisson.⁵

4.3 Orito X002

Los resultados obtenidos con la realización de esta prueba se han tabulado en las tablas 20 y 21, y la representación gráfica de los resultados obtenidos se detalla en las figuras 47 a 49, en la figura 46 se muestra el informe de la prueba acústica.

Tabla 20. Orito X002, Tiempos y Velocidades.⁵

Fuerza Axial kN	Esfuerzo Axial kPa	Tiempo P us	Tiempo S us	Velocidad P m/s	Velocidad S m/s
0	0.00	19.95	37.05	3418.374	1676.603
0.5	989.10	19.85	38.05	3442.704	1620.436
1	1978.20	19.65	37.65	3492.419	1642.445
1.5	2967.29	19.65	37.45	3492.419	1653.675
2.5	4945.49	18.25	37.25	3885.141	1665.060
3.5	6923.68	18.25	37.05	3885.141	1676.603
4.5	8901.88	18.15	36.85	3916.600	1688.307
5.5	10880.07	18.15	36.75	3916.600	1694.220

6.5	12858.27	18.15	36.65	3916.600	1700.176
7.5	14836.47	18.15	36.55	3916.600	1706.173
8.5	16814.66	18.15	36.55	3916.600	1706.173
9.5	18792.86	18.05	36.45	3948.571	1712.212
Promedio		18.70	37.025	3762.314	1678.507

Tabla 21. Orito X002, Módulo de *Young* y Coeficiente de *Poisson*.⁵

Fuerza Axial kN	Esfuerzo Axial kPa	Módulo de <i>Young</i> 10 ¹⁰ dyn/cm ²	Coeficiente de <i>Poisson</i>
0	0.00	17.87894	0.3416212
0.5	989.10	16.90126	0.3577012
1	1978.20	17.36744	0.3580103
1.5	2967.29	17.57320	0.3554988
2.5	4945.49	18.23661	0.3875000
3.5	6923.68	18.46471	0.3855766
4.5	8901.88	18.72760	0.3858878
5.5	10880.07	18.84562	0.3849027
6.5	12858.27	18.96465	0.3839039
7.5	14836.47	19.08470	0.3828913
8.5	16814.66	19.08470	0.3828913
9.5	18792.86	19.23840	0.3842110
Promedio		18.36398	0.3742163

ecopETROL ENERGÍA PARA EL FUTURO

Instituto Colombiano del Petróleo ICP - Laboratorio Mecánica de Rocas - Prueba Acústica

PRUEBA ACÚSTICA

Trabajador: GERMAN DARIO FIGUEROA PUERTO Cargo: ING. ELECTRONICO Fecha: 06/07/2009

Descripción de la Muestra de Estudio

Sample ID : X002 Peso gr : 5.796000e+01 Volumen cm³ : 2.445159e+01
Formación : ORITO Largo mm : 4.837000e+01 Densidad gr/cm³ : 2.370398e+00
Diametro mm : 2.537000e+01

Propiedades Mecánicas

Fuerza Axial kN	Esfuerzo Axial kPa	Tiempo P useg	Tiempo S useg	Velocidad P m/seg	Velocidad S m/seg	M. Young dyn/cm ²	C. de Poisson
-1.500000e+00	-2.967292e+03	1.995000e-05	3.705000e-05	3.416374e+03	1.676603e+03	1.787894e+11	3.416212e-01
-1.000000e+00	-1.978195e+03	1.985000e-05	3.805000e-05	3.442704e+03	1.620436e+03	1.690126e+11	3.577012e-01
-5.000000e-01	-9.890975e+02	1.965000e-05	3.765000e-05	3.492419e+03	1.642445e+03	1.736744e+11	3.580103e-01
0.000000e+00	0.000000e+00	1.965000e-05	3.745000e-05	3.492419e+03	1.653675e+03	1.757320e+11	3.554988e-01
1.000000e+00	1.978195e+03	1.825000e-05	3.725000e-05	3.885141e+03	1.665060e+03	1.823661e+11	3.875000e-01
2.000000e+00	3.956390e+03	1.825000e-05	3.705000e-05	3.885141e+03	1.676603e+03	1.846471e+11	3.855766e-01
3.000000e+00	5.934585e+03	1.815000e-05	3.685000e-05	3.916600e+03	1.688307e+03	1.872760e+11	3.858878e-01
4.000000e+00	7.912780e+03	1.815000e-05	3.675000e-05	3.916600e+03	1.694220e+03	1.884562e+11	3.849027e-01
5.000000e+00	9.890975e+03	1.815000e-05	3.665000e-05	3.916600e+03	1.700176e+03	1.896465e+11	3.839039e-01
6.000000e+00	1.186917e+04	1.815000e-05	3.655000e-05	3.916600e+03	1.706173e+03	1.908470e+11	3.828913e-01
7.000000e+00	1.384736e+04	1.815000e-05	3.655000e-05	3.916600e+03	1.706173e+03	1.908470e+11	3.828913e-01
8.000000e+00	1.582556e+04	1.805000e-05	3.645000e-05	3.948571e+03	1.712212e+03	1.923840e+11	3.842110e-01
Promedio		1.812500e-05	3.655000e-05	3.924593e+03	1.706183e+03	1.909311e+11	3.834743e-01

ICP Universidad Nacional de Colombia

Figura 46. Orito X002, Interfaz Gráfica-Prueba Acústica.⁵

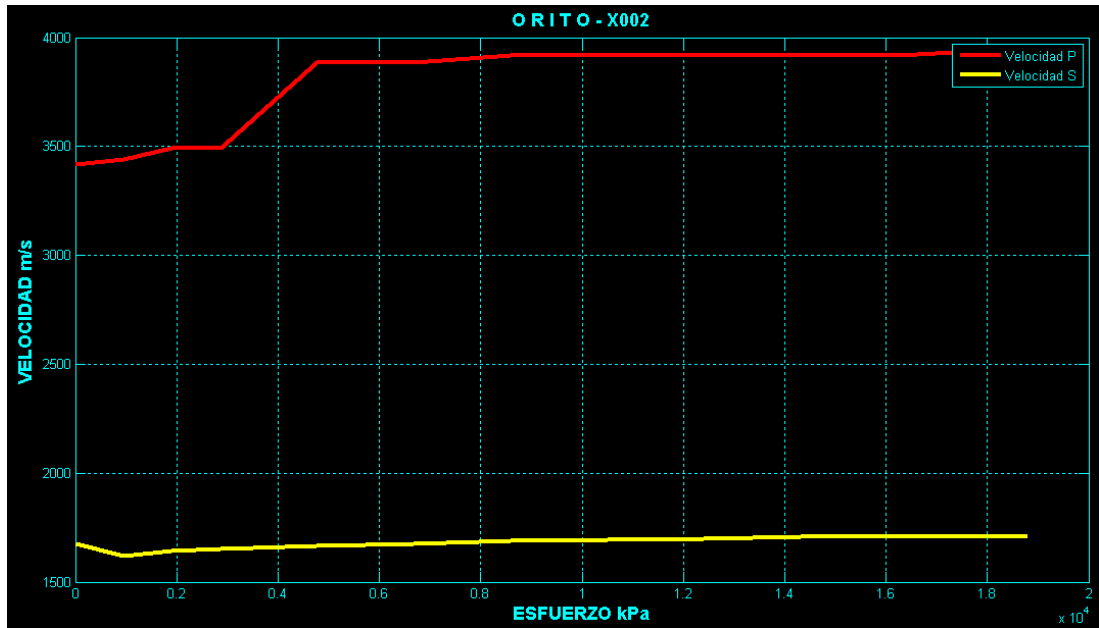


Figura 47. Orito X002, Velocidades Acústicas.⁵

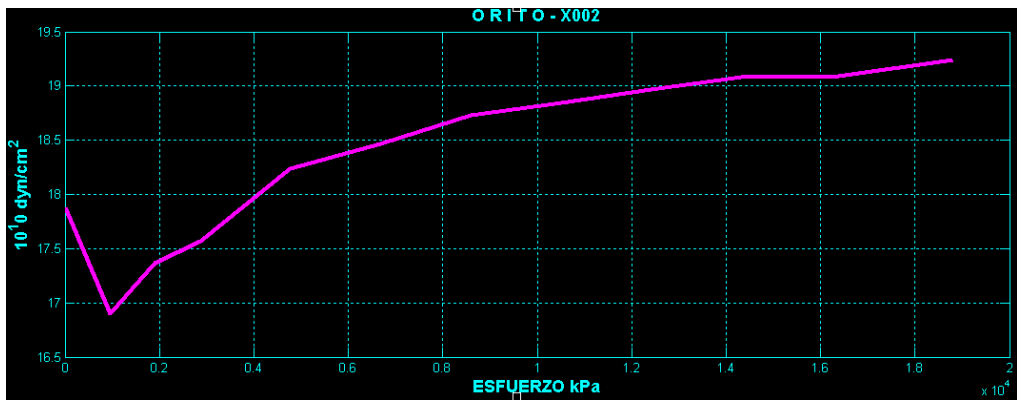


Figura 48. Orito X002, Módulo de Young.⁵

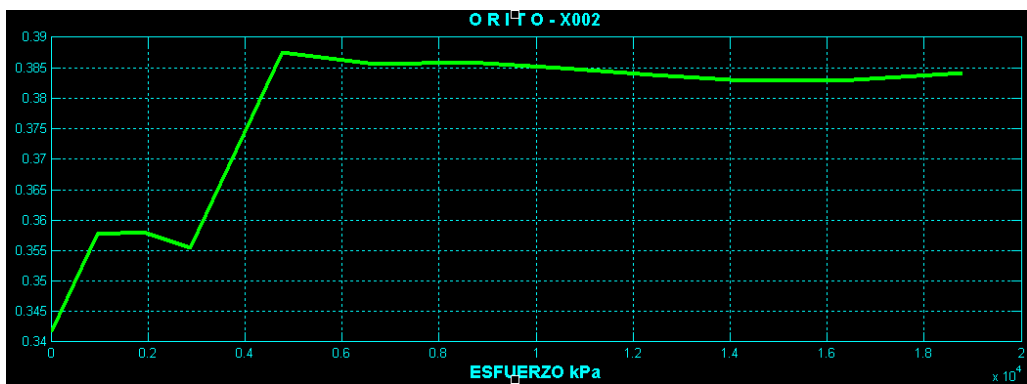


Figura 49. Orito X002, Coeficiente de Poisson.⁵

Los resultados obtenidos en las dos pruebas acústicas son satisfactorios y se acomodan a un comportamiento físico, ya que al ejercer presión axial a la muestra de roca, ésta se comprime y el material se torna más denso, provocando que la distancias entre el cristal transmisor y el receptor disminuya gradualmente, por ende el tiempo de transito de las ondas acústicas debe ir disminuyendo, esto se vio reflejado en los resultados obtenidos.

4.4 Comparación de Pruebas

Para comparar la estimación de la diferencia de tiempo de tránsito de la onda S, se compara con datos históricos obtenidos por el personal del LMR, para este caso en la tabla 22 en la primera columna se introducen los datos históricos, en la segunda columna los datos de la prueba Orito X001 con la implementación de tratamiento digital (TD), en la tercera columna los datos de la prueba Orito X001 sin la implementación del tratamiento digital de las ondas acústicas (STD), en la cuarta y quinta columna la variación en us (microsegundos) de los datos de la prueba Orito X001 con respecto a los datos históricos y en la sexta y séptima columna el porcentaje de error.

Cabe aclarar que los datos históricos no es un patrón de datos, ya que fueron obtenidos de forma visual y sin tratamiento digital, pero si da una idea de la tendencia de los resultados.

Tabla 22. Tendencia de datos obtenidos, Tiempos Onda S – Orito X001.⁵

Datos Históricos us	Orito X001 – TD us	Orito X001 – STD us	Variación– TD us	Variación– STD us	Error% TD	Error% STD
38.6	38.25	51.2	0.35	12.6	0.9	32.6
38.5	38.25	44.5	0.25	6	0.6	15.6
38.3	38.05	43.9	0.25	5.6	0.7	14.6
37.9	37.85	36.6	0.05	1.3	0.1	3.4
37.5	37.45	35.9	0.05	1.6	0.1	4.3
37.3	37.05	37	0.25	0.3	0.7	0.8
37	36.85	36.9	0.15	0.1	0.4	0.3
36.8	36.75	36.8	0.05	0	0.1	0

36.7	36.65	36.9	0.05	0.2	0.1	0.5
36.5	36.65	36.9	0.15	0.4	0.4	1.1
36.5	36.45	36.9	0.05	0.4	0.1	1.1

4.5 Implementación del tratamiento Digital en Ondas Acústicas

El tratamiento digital sobre las ondas acústicas permite estimar la diferencia de tiempo de tránsito de estas ondas con mayor facilidad y obteniendo resultados más confiables. En la figura 50 se observa una onda P de una prueba de tomografía sin realizar el tratamiento digital (azul) y con tratamiento digital (rojo), del mismo modo en la figura 51 se ilustra una onda S de la prueba Orito X001.

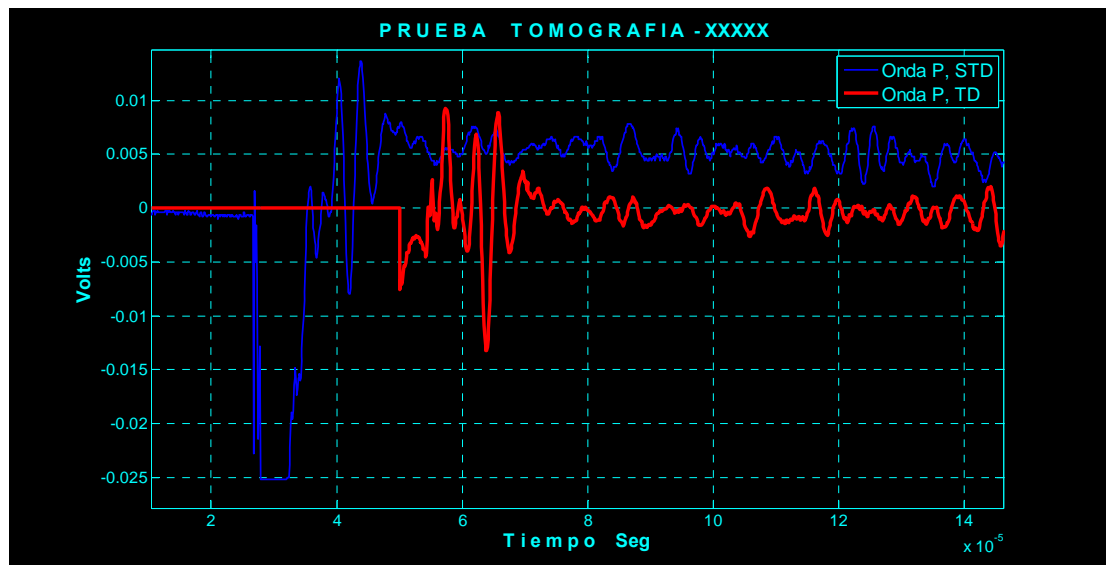


Figura 50. Onda P, Prueba de Tomografía - XXXXX.⁵

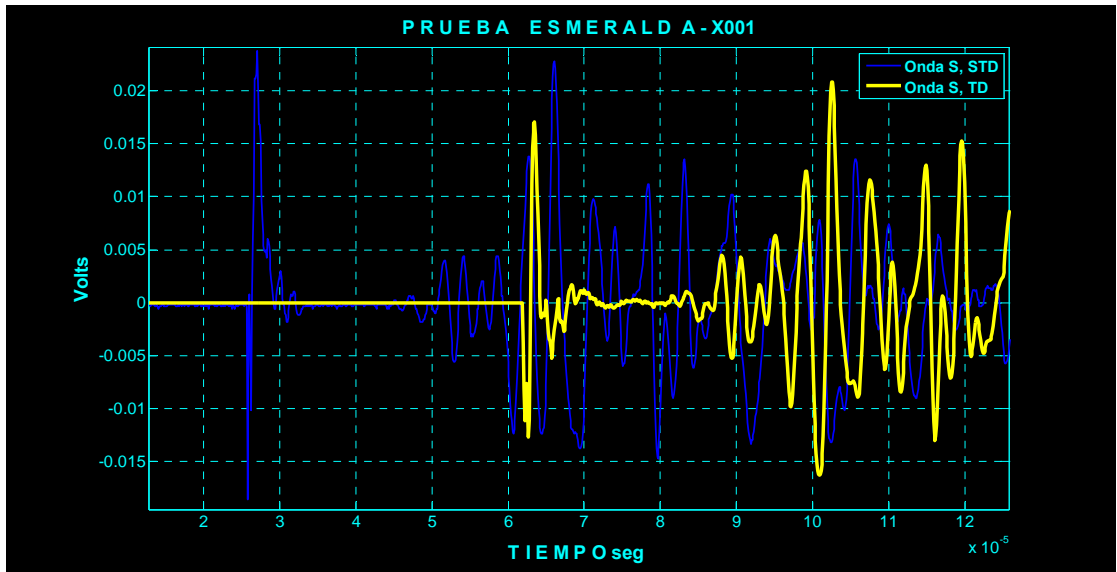


Figura 51. Onda S, Prueba Acústica - X001.⁵

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La implementación de los filtros digitales de fase lineal con el Método Óptimo de *Remez* permitió atenuar componentes de ruido de las ondas P y S, del mismo modo atenuar las componentes en frecuencia de la onda P presentes en la Onda S, facilitando la estimación de la diferencia de tiempo de tránsito de las ondas acústicas a través de la muestra de roca.

El cambio en la geometría y en el área del cristal que está en contacto con la muestra de roca, cambia la frecuencia de resonancia del cristal modificado, lo cual evidencia una problemática en el análisis de las ondas, dado que el Generador de Pulsos *SOFRANEL 78500* excita el cristal a 270V, probablemente a una frecuencia diferente de resonancia del cristal modificado, obteniendo señales acústicas de muy baja amplitud (alrededor de 40mV), dificultando en gran medida el análisis de ondas.

La identificación del espectro en frecuencia de las ondas acústicas por medio de la herramienta matemática, Transformada Rápida de Fourier *FFT*, brinda información de las características del espectro en frecuencia de las ondas P y S, esto se ha logrado por recrear un ambiente de mínima incidencia de ruido a la señal, ya que los cristales piezoeléctricos PZT-5a se adhirieron a la muestra de roca por medio de soldadura de plata.

La técnica de diseño de sistemas *FIR* es sin ninguna duda mejor que la técnica de diseño de sistemas *IIR*, para la aplicación de este proyecto de grado, ya que con sistemas *FIR* se puede garantizar la fase lineal y por ende tener un retardo de

grupo constante, lo cual implica que toda la forma de onda de la señal posea un atraso temporal y constante.

El diseño e implementación de los filtros digitales utilizando el método óptimo de *Remez*, presenta una respuesta en magnitud con mejor comportamiento comparado con el diseño de los filtros utilizando la ventana de *Kaiser*, ya que las bandas de transición del filtro son menores, obteniendo un filtro más selectivo en frecuencia, otra cualidad importante, es que tiene un rizado constante tanto en las bandas de eliminación y de paso, esto es importante tenerlo en cuenta, ya que en la estimación de la diferencia de tiempo de tránsito de las ondas acústicas, se relaciona la forma de onda de las ondas acústicas con la respuesta en magnitud del filtro pasa banda.

La configuración de la interfaz *RS232* y el sistema de comunicación del osciloscopio digital *TDS2024* con el controlador *SNAP PAC R1* y el equipo de cómputo, ha permitido controlar el entorno del osciloscopio digital, de esta forma se ha optimizado el sistema de adquisición, ya que antes de obtener los datos que caracterizan las ondas acústicas, se adecúa la posición de la señal tanto en el eje vertical y horizontal, y a una frecuencia de muestreo que coincida con la frecuencia de muestreo del filtro digital y que sea mayor a la frecuencia de *nyquist*.

El desarrollo de la estrategia de control y la interfaz gráfica ha dado control y monitorización en una *HMI (Human Machine Interface)*, permitiendo observar de forma gráfica y numérica los resultados obtenidos durante la realización de la pruebas, mostrando las velocidades de las ondas P y S, el módulo de *Young* y el coeficiente de *Poisson*, obteniendo así un *software* fácil de usar, eficiente y agradable por su diseño.

Para la industria del petróleo es de gran importancia la estimación del módulo de *Young* y el Coeficiente de *Poisson*, debido a que permiten conocer el

comportamiento que presentaría la formación al ejercer una presión sobre ella, esto se traduce a qué presiones se deben emplear para realizar trabajos de perforación, cementación, cañoneo y otros trabajos del sector, por ello la importancia que estos datos sean confiables, cabe aclarar que para realizar una caracterización más profunda de la formación se deben complementar con otro tipo de pruebas destructivas y no destructivas, dinámicas o estáticas.

Aunque el objetivo planteado por el ICP es solo la parte de control en la adquisición y tratamiento de señales del sistema de medición de velocidades acústicas del equipo DT14210-ROP, es importante tener en cuenta qué variables a controlar se puede realizar en proyectos futuros, como el control automático de la carga axial y lateral en la muestra de roca. Esto se puede lograr mediante el cambio de las válvulas analógicas por electroválvulas y control de flujo en la cámara de confinamiento por medio de la bomba de alta presión *Gilson 305* desde el entorno de desarrollo de *OptoControl*, también se pueden reemplazar los manómetros analógicos por lecturas en pantallas *LCD* y llevar a cabo una automatización más amplia.

Para minimizar la sensibilidad en la estimación de la diferencia de tiempo de tránsito de las ondas, es importante elevar la frecuencia de muestreo en el sistema de adquisición, ya que a 10MHz el mínimo cambio del contador varía en 0.1µseg, mientras que a 50MHz el mínimo cambio del contador es de 0.02µseg y con esta frecuencia de muestreo se garantiza la adquisición de una porción importante de la onda acústica.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. Curie, Société Française de Physique (ed. lit), OEuvres de Pierre Curie, Gauthier-Villars, 1908.
- [2] Figueroa, Germán Darío: Plan de Proyecto de Grado. "Automatización del sistema de adquisición de ondas y medición de velocidades acústicas del equipo DT14210-ROP para la determinación de las propiedades mecánicas en rocas". Bucaramanga, Marzo 2009.
- [3] BPO, Boston Piezo-Optics Inc, An Introduction to Piezoelectric Transducer Crystals.
- [4] Kane, Joseph W. Sterheim, Morton M. FÍSICA. ISBN 8429143181. Segunda Edición. Reverté 1996.
- [6] Díaz, Luis Alberto: Proyecto fin de carrera. "Estudio de Prospección geofísica y geotécnica para el emplazamiento del embalse de san esteban de andagoya (álava)".
- [7] Bruce, A Bolt: "TERREMOTOS". Serie reverté ciencias y sociedad. Edition illustrated. 1981.
- [8] Manilla, Alfonso Alvarez. Anguas, Paul Garnica. Salazar, Alfonso Pérez. "Evaluación Indirecta de los Módulos Elásticos de Rigidez in situ y la Relación entre V_p/V_s y el Angulo de Fricción Interna".

[9] Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 13 “Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP”. Bucaramanga Septiembre 2008.

[10] Grupo de Investigación de Estabilidad de Pozo. Trabajo de adecuación y ampliación del rango de medida de uno a tres cristales Onda P, Onda S1 y S2.

[11] Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 12 “Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP”. Bucaramanga Agosto 2008.

[12] Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 16 “Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP”. Bucaramanga Diciembre 2008.

[13] Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 14 “Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP”. Bucaramanga Octubre 2008.

[14] Oppenheim, Alan. Schafer, Ronald. Buck, Jhon. Discrete-Time Signal Processing. Segunda Edición. Prentice Hall 2000.

[15] Diseño de una interface para el Diseño de Filtros *FIR* a través del Método Remez Integrado a MFilters. Capítulo 2. Filtros.

[16] Figueroa, German. Ardila, Ender. Valdivieso, Raúl. Solano, Fabian. Informe Análisis de Filtros Digitales Mediante Métodos de Enventanado e Implementación en DSP - Universidad Industrial de Santander – E3T.

[17] Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 18 “Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP”. Bucaramanga Enero 2009.

[18] Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 19 “Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP”. Bucaramanga Febrero 2009.

[19] Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 11 “Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP”. Bucaramanga Julio 2008.

[20] 1704_PAC_Manager_Users_Guide

<http://www.opto22.com/site/documents/drilldown.aspx?aid=3161&title=PAC+Manager+Users+Guide>

[21] 1713_PAC_Control_Commands_Quick_Reference_Legacy_Edition

<http://www.opto22.com/site/documents/drilldown.aspx?aid=3156&title=Legacy+Edition%2C+PAC+Control+Commands+Quick+Reference>

[22] TDS1000 TDS2000 Series Manual del usuario

<http://materias.fi.uba.ar/6644/info/osciloscopios/manuales/TDS%201000%202000%20manual%20usuario.pdf>

ANEXOS

Anexo A. Instrumentación y Equipo de Medición

Equipo de Medición de Velocidades Acústicas *DT14210-ROP*¹¹

El equipo *DT14210-ROP* es un dispositivo utilizado para realizar pruebas acústicas. Al estar la muestra de roca en una campana de confinamiento sometido a esfuerzos laterales y axiales como se establece una celda biaxial, es posible conocer las características mecánicas de la muestra de roca mediante la estimación de la velocidad del sonido que viaja a través de ella. Figura 1.

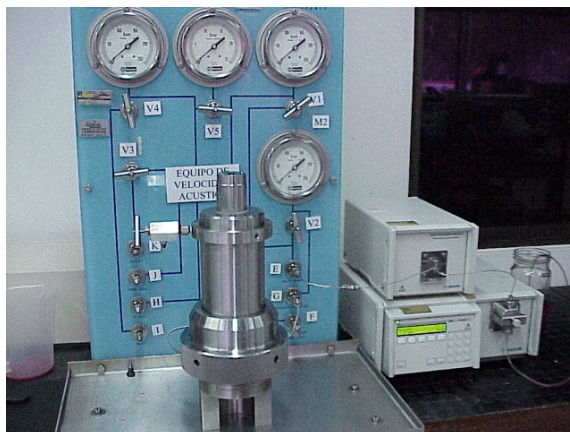


Figura 1. Equipo *DT14210-ROP*.⁵

Las pruebas que se realizan en el equipo constituyen pruebas no destructivas, es decir la muestra de roca pueden ser utilizada nuevamente en otro tipo de ensayo, las pruebas que se realizan en este equipo son:

- Medición de Onda S y P (Interés del proyecto de grado).
- Porosidad.

¹¹ Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 12 "Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP". Bucaramanga Agosto 2008.

Mecánicamente el equipo *DT14210-ROP* cuenta con:

- Dos pistones: uno móvil, el cual tiene en su interior el transductor transmisor, que es un arreglo de tres cristales piezoeléctricos de tipo PZT-5a,¹⁰ y además por encima del pistón móvil se ubica la muestra de roca para realizar la prueba, el otro pistón es estático y se ubica por encima de la muestra de roca, en el cual se encuentra el transductor receptor, del mismo modo son tres cristales piezoeléctricos PZT-5a. Estos dos pistones son los que van a ejercer una carga axial a la muestra de roca.

- Entradas para la presión lateral, están localizadas sobre la base del equipo.

- Dos circuitos:

El primero es usado para colocar la muestra bajo esfuerzo y está equipado con unas válvulas de cerrado y drenado, con manómetros:

- M1 para la carga axial.
- M2 para la presión lateral.

El otro circuito es para saturar la muestra de roca bajo una presión controlada por manómetros, la saturación de la muestra es para realizar pruebas de presión de poro:

- M4 (0 – 25 bar).
- M3 (0 – 250 bar).

¹⁰ Grupo de Investigación de Estabilidad de Pozo. Trabajo de adecuación y ampliación del rango de medida de uno a tres cristales Onda P, *Onda S1* y *S2*.

- Una bomba de pistón automático, el rango de operación es de 600bar, 60 Mpa o 8700psi.

Sistema de Generación de Pulsos de Tensión SOFRANEL 78500 SARTROUVILLE¹²

En la parte frontal (figura 2-izquierda) y posterior (figura 2-derecha) se observa el sistema de generación de pulsos de tensión, automáticamente al encender este equipo, en su terminal de salida arroja un pulso de tensión de 270 V aproximadamente, el cual es la señal utilizada para excitar el cristal piezoeléctrico de Zirconato Titanato de Plomo PZT-5a, cristal P, S1 y/o S2.



Figura 2. Generador de Pulsos SOFRANEL 78500.⁵

En la parte posterior del equipo se encuentran tres conectores coaxiales J1 (*SIGNAL OUTPUT*), J2 (*SYNC*), J3 (*EXT TRIG*), el conector J2 (*SYNC*) se comunica directamente con el osciloscopio digital *Tektronix TDS2024* en uno de sus canales, con el motivo de establecer una sincronización de la señal excitadora (Salida de Generador de Pulsos) y la señal respuesta (Sistema receptor de ondas acústicas).

¹² Referenciado de Figueroa, Germán Darío: Informe de Avance N° 16 "Sistema de Medición de Velocidades Acústicas DT14210-ROP". Bucaramanga Diciembre 2008.

Sistema de Multiplexación y Demultiplexación de Señales *SWITCH hp 3488a*¹²

En la parte frontal (figura 3-izquierda) del *Switch hp 3488a*, se muestra el panel principal, en el cual, por botones, se puede seleccionar la tarjeta de entrada/salida de señales, además cuenta con un teclado numérico para seleccionar uno de los canales de la tarjeta de entrada/salida, cada selección por teclado se muestra en una pantalla *LCD (Liquid Crystal Display)*.

En la parte posterior (figura 3-derecha) del *Switch hp 3488a*, se visualizan dos tarjetas, una configurada como tarjeta de entrada y la otra es configurada como tarjeta de salida, los conectores son de tipo coaxial.

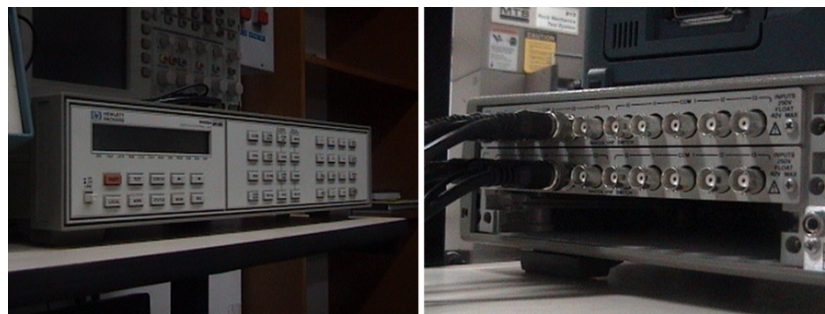


Figura 3. Multiplexor/Demultiplexor *Switch hp 3488a*.⁵

En la figura 4, se observa el esquemático de la tarjeta de entrada/salida, la cual tiene dos bloques independientes, cada uno con un conector *COM* y cuatro conectores para ser cortocircuitado con el conector *COM*.

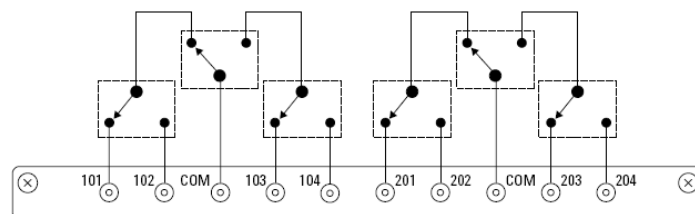


Figura 4. Esquemático Tarjeta de entrada/salida *Switch hp 3488a*.⁵

La tarjeta de salida se utiliza para direccionar la señal excitadora (Generador de pulsos) a uno de los tres cristales piezoeléctricos (P, S1, S2), es decir, el conector COM se comunica con el sistema *Sofranel 78500* y los otros tres de los cuatro conectores es para cada uno de los cristales piezoeléctricos en el sistema de transmisión de ondas acústicas del equipo *DT14210-ROP*.

En la tarjeta de entrada del *Switch hp 3488a* se utilizan tres de los cuatro conectores para comunicar los cristales piezoeléctricos del sistema de recepción de ondas acústicas del equipo *DT14210-ROP* a uno de los canales del osciloscopio digital *Tektronix TDS2024*, por medio del conector COM.

Sistema de Adquisición de Señales OSCILOSCOPIO DIGITAL *TEKTRONIX TDS2024*¹²

En la figura 5 se visualiza la parte frontal del sistema de adquisición de señales, el cual cuenta con cuatro canales de entrada, el primer canal se utiliza para adquirir la señal acústica proveniente de la muestra de roca y el segundo canal es utilizado para adquirir la señal proveniente del sistema de generación de pulsos, con el motivo de establecer una sincronización con la señal del primer canal, es decir, para determinar el instante de tiempo de inicio de excitación en la muestra de roca.



Figura 5. Osciloscopio Digital *Tektronix TDS2024*.⁵

El osciloscopio digital *Tektronix TDS2024* cuenta con una serie de opciones para analizar la señal, manipular los ejes coordenados (eje de abscisas y eje de ordenadas), opciones de adquisición de señales, comunicación con controladores externos, entre otras herramientas.

El módulo de comunicación *TDS2CMA* que proporciona el osciloscopio digital, añade puertos de comunicación *Centronics*, *RS 232* y *GPIB (General Purpose Interface Bus)*, desde un controlador externo se realiza control del osciloscopio digital y monitoreo de las señales adquiridas por medio de la interfaz *RS 232*, ya que el controlador a utilizar soporta la conexión de dispositivos seriales.

El control del osciloscopio digital se realiza por medio de comandos básicos en formato *ASCII (American Standard Code for Information Interchange)* y estos se envían por la interfaz de comunicación *RS 232*.

Interfaz *RS 232*

La interfaz *RS 232* designa una norma para la transmisión y recepción de datos binarios de una forma serial, en particular entre el controlador *SNAP PAC R1* y el sistema de adquisición de señales.

Esta interfaz está diseñada para comunicar dispositivos a cortas distancias (15m especificada por la norma), el cual la distancia que separa el controlador *SNAP PAC R1* con el osciloscopio digital *TDS2024* está dentro de esta norma.

La conexión eléctrica se especifica en la figura 6, donde Tx es transmisión de datos, Rx es recepción de datos y COM es el común o tierra eléctrica.

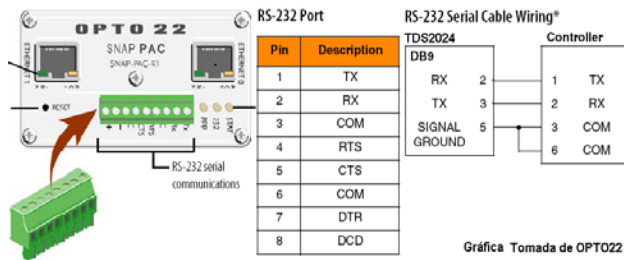


Figura 6. Conexión eléctrica entre el *SNAP PAC R1* y *TDS2024* a través de la interfaz *RS 232*.

Controlador *SNAP PAC R1*

El controlador *SNAP PAC R1* (*PAC* de sus siglas Controlador Automata Programable) provee alta velocidad en funciones digitales de control, monitoreo y adquisición, este controlador contiene dos puertos *Ethernet*, para crear redes de dispositivos soportado por el protocolo de comunicación *TCP/IP* (Protocolo de Control de Transmisión/Protocolo de Internet), además cuenta con el puerto *RS 232* soportado por el protocolo *PPP* (*Point to Point Protocol*) para comunicarse con dispositivos seriales.

El *SNAP PAC R1* soporta todos los módulos de I/O de *OPTO22* y en él se descarga la estrategia de control desarrollada en el *software PAC Project Suite Basic/Professional*. En la figura 7 se observa el entorno del controlador.



Gráfica Tomada de OPTO22

Figura 7. *SNAP PAC R1*.

Caracterización de Cristales Piezoeléctricos PZT-5a (Zirconato Titanato de Plomo)

La caracterización de los cristales piezoeléctricos modificados e implementados por Laboratorio Mecánica de Rocas del ICP, para la generación y recepción de ondas acústicas es importante, ya que va a dar información importante del cual o cuáles son las frecuencias de resonancia del cristal modificado.

Los cristales P a utilizar en este ensayo son los siguientes: figura 8a cristal P sin modificar su geometría, figura 8b cristal cuadrado P de 5mm de lado, figura 8c cristal $\frac{1}{4}$ de luna de 5.2x7mm.

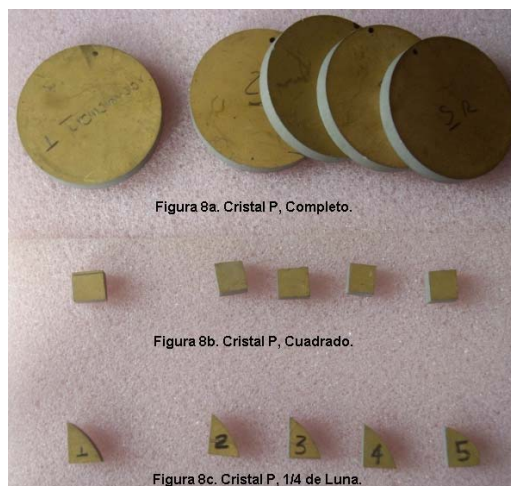


Figura 8. Cristales PZT-5a. Onda P.

Para esta caracterización se va a utilizar la siguiente metodología de trabajo: se utiliza un cristal P completo como transmisor y como receptor cristales completos, cristales cuadrados y cristales $\frac{1}{4}$ de luna y por último se utiliza un cristal P cuadrado con transmisor y se utiliza diferentes cristales cuadrados como receptores.

- **Cristal P Completo transmisor Vs Cristales P completos receptores**

En la figura 9 se observa las componentes en frecuencia en función del voltaje, claramente se observa que en los cinco ensayos, la frecuencia de resonancia está en la vecindad de 82kHz.

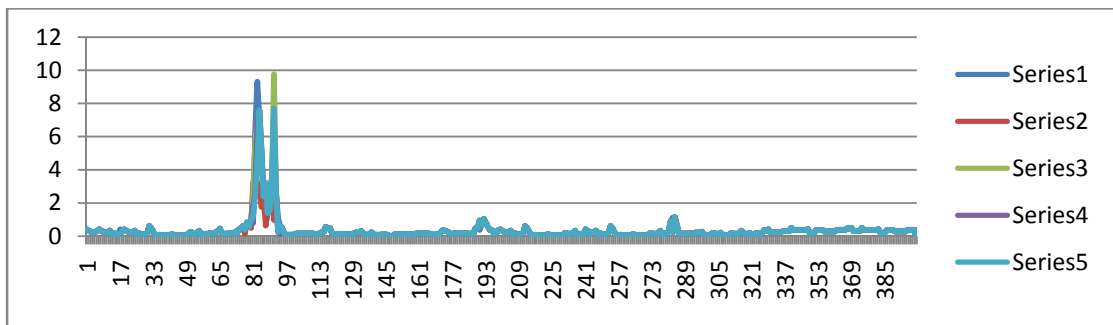


Figura 9. Espectro en frecuencia, Tx Cristal P completo-Rx's Cristales P completos.

- **Cristal P Completo transmisor Vs Cristales P cuadrados receptores**

Para este ensayo se evidencia la reducción de la magnitud del pico de voltaje a la misma frecuencia de resonancia de 82kHz, pero aparece un pico de voltaje en la vecindad de 282kHz.

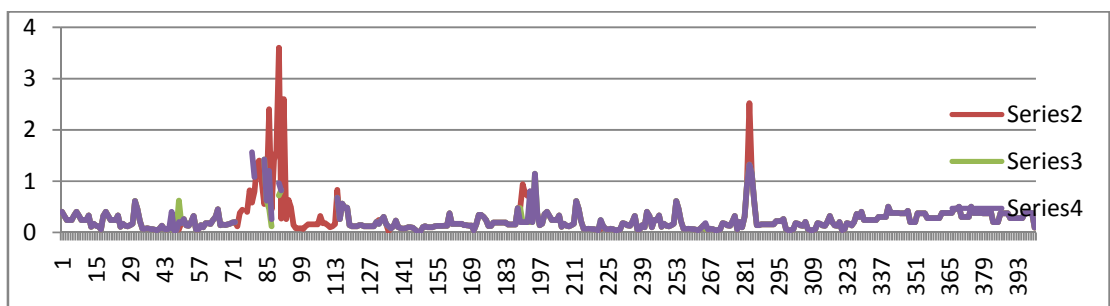


Figura 10. Espectro en frecuencia, Tx Cristal P completo-Rx's Cristales P cuadrados.

- **Cristal P Completo transmisor Vs Cristales P ¼ de luna receptores**

En este ensayo la magnitud del pico de voltaje a la frecuencia de resonancia de 82kHz aumento, es decir un comportamiento similar al primer caso.

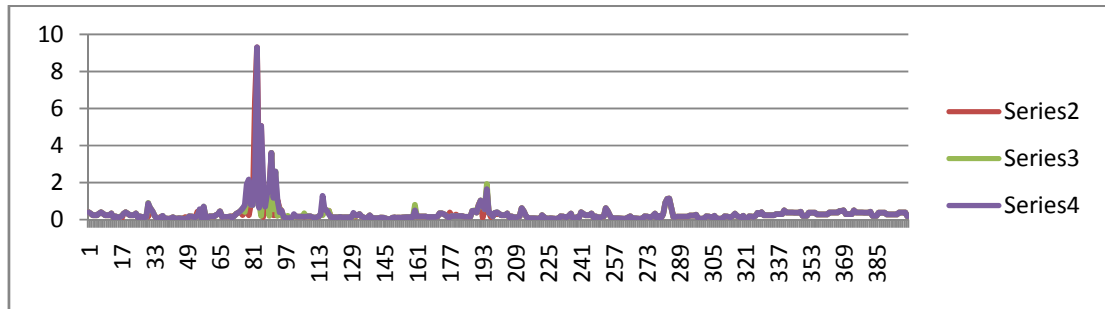


Figura 11. Espectro en frecuencia, Tx Cristal P completo-Rx's Cristales P ¼ de luna.

- **Cristal P cuadrado transmisor Vs Cristales P cuadrados receptores**

En este caso se ha cambiado el cristal trasmisor y se observa que a la frecuencia de 82kHz el pico se ha atenuado, pero aparecen picos en frecuencias de 280kHz, 305kHz, 318kHz y 335kHz, una visión más detallada es que no todas los ensayos realizados para este caso, no resonaron en las mismas frecuencias, pensando en una hipótesis, que todos los cristales cuadrados no se comportan de la misma forma, dando una idea que el material del cristal no es totalmente homogéneo.

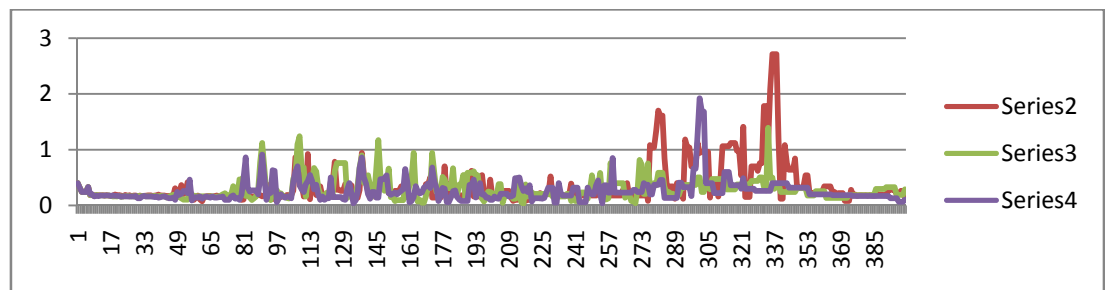


Figura 12. Espectro en frecuencia, Tx Cristal P cuadrado-Rx's Cristales P cuadrados.

Anexo B. Sistemas de Fase Generalizada

Para comentar y estudiar sobre sistemas que son de fase generalizada su respuesta en frecuencia se puede expresar de la forma.

$$H(e^{jw}) = A(e^{jw})e^{j(-\alpha w + j\beta)} \quad (1)$$

Donde α y β son constantes y $A(e^{jw})$ es una función real, la ecuación anterior sigue siendo un sistema de fase lineal en el cual β es un término que suma a la fase, es decir que la fase del sistema es una línea recta $\alpha w + \beta$, con un retardo de grupo constante de α .

Para desarrollar la ecuación anterior se considera esta igualdad.

$$H(e^{jw}) = H^*(e^{-jw}) \quad (2)$$

Entonces la ecuación 1 se puede transformar.

$$H^*(e^{-jw}) = A(-w)e^{j(-\alpha w - \beta)} \quad (3)$$

Al reemplazar la ecuación 2 e igualar a cero resulta.

$$A(w)e^{-j\alpha w}e^{j\beta} - A(-w)e^{-j\alpha w}e^{-j\beta} = 0 \quad (4)$$

Al agrupar términos.

$$e^{j\alpha w}\{A(w)e^{j\beta} - A(-w)e^{-j\beta}\} = 0 \quad (5)$$

Donde $e^{j\alpha w}$ no puede ser cero porque es de fase lineal y no fase cero, lo cual indica la condición de nulidad el término de la derecha de la ecuación 5.

$$A(w)e^{j\beta} - A(-w)e^{-j\beta} = 0 \quad (6)$$

O agrupando.

$$A(w) - A(-w)e^{-j2\beta} = 0 \quad (7)$$

En donde los dos términos de la ecuación 7 son de valor real salvo con la condición que β sea múltiplo de $\pi/2$. En síntesis hay dos posibilidades para que la ecuación 6 sea igual a cero.

$$e^{-j2\beta} = 1 \text{ o } -1 \quad (8)$$

La cual se tendría si es de simetría par para la respuesta al impulso.

$$A(w) - A(-w) = 0 \quad (9)$$

O simetría impar de la respuesta al impulso.

$$A(w) + A(-w) = 0 \quad (10)$$

Lo anterior concluye que existen 4 tipos de sistemas de fase lineal y son:

Tipo I con Simetría Par y Retardo de Grupo entero.

Tipo II con Simetría Par y Retardo de Grupo entero más 0,5.

Tipo III con Simetría Impar y Retardo de Grupo entero.

Tipo IV con simetría Impar y Retardo de Grupo entero más 0,5.

Anexo C. Polinomio P(x) de Grado L, Parks-McClellan.

De la ecuación 23 se obtiene:

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^L h_e[n] e^{-j\omega n} \quad (23)$$

$$A_e(e^{j\omega}) = h_e[0] \sum_{n=1}^L h_e[n] e^{-j\omega n} + h_e[-n] e^{j\omega n} \quad (1)$$

$$h_e[n] = h_e[-n] \quad (2)$$

Cumpliendo la igualdad de la respuesta al impulso por ser de simetría par y teniendo conocimiento de la expresión del coseno en función de *euler*.

$$\cos(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2} \quad (3)$$

$$A_e(e^{j\omega}) = h_e[0] + 2 * \sum_{n=1}^L h_e[n] \cos \omega n \quad (4)$$

Expresado de otra forma.

$$A_e(e^{j\omega}) = C_0 + 2 * \sum_{n=1}^L C_n \cos \omega n, \quad C_n \begin{cases} h_e[n], & n = 0 \\ 2h_e[n], & 1 \leq n \leq L \end{cases} \quad (5)$$

$$A_e(e^{j\omega}) = C_0 + C_1 \cos(\omega) + C_2 \cos(2\omega) + \dots + C_L \cos(L\omega) \quad (6)$$

Utilizando la identidad trigonométrica de *Chebyshev*,

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (7)$$

$$T_n(x) = \cos(\omega n) \quad (8)$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (9)$$

Donde:

$$T_0(x) = 1 \quad (10)$$

$$T_1(x) = x = \cos(\omega n) \quad (11)$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 = \cos(2\omega) = 2 \cos^2(\omega) - 1 \quad (12)$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 2x = \cos(3\omega) = 4 \cos^3(\omega) - 3 \cos(\omega) \quad (13)$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 = \cos(4\omega) = 8 \cos^4(\omega) - 8 \cos^2(\omega) + 1 \quad (14)$$

Así sucesivamente. Al reemplazar las ecuaciones anteriores en la ecuación 6, se obtiene la ecuación 15.

$$A_e(e^{j\omega}) = a_0 + a_1 \cos(\omega) + a_2 \cos^2(\omega) + a_3 \cos^3(\omega) + \dots + a_l \cos^L(\omega) \quad (15)$$

Donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_l$, son constantes, Sintetizando la ecuación 15 resulta la ecuación 16 y reemplazado $x = \cos(\omega)$ se obtiene la ecuación 17.

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^L a_k \cos^k(\omega) \quad (16)$$

$$P(x) = A_e(x) = \sum_{k=0}^L a_k x^k \quad (17)$$

Donde $P(x)$ es un polinomio de grado L y a_k son constantes relacionadas con $h_e[n]$ y $x = \cos(\omega)$.