

*Descripción de luz parcialmente
polarizada mediante distribuciones de
cuaterniones sobre la esfera de Poincaré*

Karol Vianney Salazar Ariza

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

2015

*Descripción de luz parcialmente
polarizada mediante distribuciones de
cuaterniones sobre la esfera de Poincaré*

*Trabajo de grado realizado como requisito parcial para
optar al título de Magíster en Física*

Autora:

Karol Vianney Salazar Ariza

Director:

Rafael Ángel Torres Amaris

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

2015

Este trabajo lo dedico a mis padres....

Resumen

TÍTULO: Descripción de luz parcialmente polarizada mediante distribuciones de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré¹.

AUTOR: SALAZAR ARIZA, Karol Vianney².

PALABRAS CLAVES: Polarización, cuaterniones, distribuciones de probabilidad, esfera de Poincaré.

DESCRIPCIÓN: Usualmente los métodos algebraicos utilizados para describir los estados (luz) y operadores (medios) de polarización son: el cálculo vectorial de Jones, los vectores de Stokes, las matrices de Mueller y los cuaterniones. Los estados de polarización se pueden representar a través de la esfera de Poincaré, lo cual es útil debido a que permite analizar gráficamente el comportamiento de la luz polarizada cuando interactúa con un medio. Aunque los vectores de Stokes describen la luz polarizada y parcialmente polarizada solo se puede asociar como herramienta matemática con la representación geométrica cuando se tiene luz polarizada, pero se ve limitada al análisis de luz parcialmente polarizada. Por este motivo se formuló una nueva metodología que describe luz parcialmente polarizada sobre la esfera de Poincaré teniendo como base la teoría de señales aleatorias y el álgebra de los cuaterniones. En vista de lo anterior se define un vector de Jones en función del tiempo para cada una de las realizaciones de un campo electromagnético aleatorio. A partir del vector de Jones se calcula la matriz de polarización, para así relacionarla con los parámetros de Stokes, con el fin de deducir el cuaternión aleatorio y representarlo sobre la esfera de Poincaré, al cual posteriormente, se le asocia una distribución de probabilidad de polarización. Los resultados de la aplicación de la metodología que se propone son ilustrados mediante simulaciones.

¹Trabajo de grado de Maestría en Física

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Rafael Ángel Torres Amaris (Director).

Abstract

Title: Description of partially polarized light distributions using quaternions on the Poincare sphere³.

AUTOR: SALAZAR ARIZA, Karol Vianney⁴.

KEY WORDS: Polarization, quaternions, probability distributions, Poincare sphere.

DESCRIPTION: Algebraic methods usually used to describe states (light) and operators (means) of polarization are the vector calculation Jones, Stokes vectors, Mueller matrices and quaternions. The states of polarization can be represented through the Poincare sphere, which is useful because it allows graphically analyze the behavior of polarized light when it interacts with a medium. Although Stokes vectors described polarized light and partially polarized only can be associated as mathematical tool with geometric representation when you have polarized light, but is limited when analysis is for partially polarized light. For this reason a new methodology that describes partially polarized light on the Poincare sphere was formulated on the basis of the theory of random signals and the algebra of quaternions. In view of the above a Jones vector is defined as a function of time for each of the embodiments of a random electromagnetic field. From Jones' vector a matrix of polarization is calculated in order to deduce the random quaternion that then is represented on the Poincare sphere, which subsequently, it is assigned a probability distribution of polarization. The results of the application of the proposed methodology are illustrated through simulations.

³Work Masters Degree in Physics

⁴Science Faculty, Master in Physic, Rafael Ángel Torres Amaris (Director).

Índice general

1. Introducción	15
2. Descripción de luz polarizada	18
2.1. Luz polarizada	18
2.2. Métodos algebraicos para la luz polarizada	19
2.2.1. Representación de la luz polarizada sobre la esfera de Poincaré .	20
2.2.2. El cálculo matricial de Jones	24
2.2.3. Matriz de polarización	27
2.2.4. El cálculo matricial de Stockes-Mueller	28
3. Los cuaterniones y la luz polarizada	33
3.1. Representación cuaterniónica de los estados de polarización	33
3.2. Representación cuaterniónica de los operadores de polarización	37
4. Descripción de luz parcialmente polarizada	39
4.1. Matriz de polarización	39
4.2. Parámetros de Stokes	41
4.2.1. Relación entre los parámetros de Stokes y la matriz de polarización	44
4.2.2. Relación entre el grado de polarización y el grado de coherencia cruzada	45

5. Descripción de luz parcialmente polarizada mediante distribuciones de cuaterniones	47
5.1. Álgebra de los cuaterniones para luz parcialmente polarizada	48
5.2. Distribuciones cuaterniónicas sobre la esfera de Poincaré	53
6. Descripción de luz parcialmente polarizada mediante distribuciones de cuaterniones: Simulación	58
6.1. Simulación de una fuente de luz con estadística gaussiana	59
6.2. Distribución de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré.	61
7. Fuentes con diferentes distribuciones de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré: Simulación	65
7.1. Distribuciones para luz parcialmente polarizada	65
7.2. Distribución de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré de cada fuente.	67
8. Conclusiones	72
Bibliografía	74
Apéndices	78
A. Álgebra de los cuaterniones	79
A.1. A: Los cuaterniones	79
A.1.1. Los cuaterniones de Hamilton	79
B. Proyección estereográfica	83
C. Nociones de señales aleatorias y teoría de las probabilidades	86
C.1. Procesos aleatorios	86
C.2. Señal analítica	90

D. Distribuciones de polarización sobre la esfera de Poincaré: Montaje experimental	92
E. Primera simulación	95
F. Segunda simulación	101

Índice de figuras

2.1. Gráfica de una elipse rotada un ángulo α con respecto al sistema no primado. En el sistema primado la elipse no rotada tiene un eje menor B , un eje mayor A y un ángulo χ asociado con la excentricidad de la elipse.	20
2.2. Representación de la polarización de una onda de luz totalmente polarizada por un punto sobre la esfera de Poincaré con ángulos 2α y 2χ	23
2.3. Representación de algunos estados de polarización sobre la esfera de Poincaré. En la gráfica a) las ondas están polarizadas rectilíneamente y se encuentran sobre el ecuador. En la figura b) sobre el polo norte y sur se encuentran las ondas con polarización circular a derecha e izquierda respectivamente. En el meridiano se encuentran las polarizaciones elípticas con la misma orientación pero variando su elipticidad. En la última gráfica se encuentran sobre el paralelo las polarizaciones elípticas con la misma elipticidad pero variando su orientación.	24
4.1. Representación de la luz parcialmente polarizada sobre la esfera de Poincaré. La mancha sobre la esfera representa la distribución de puntos asociada a una fuente de luz parcialmente polarizada y su correspondiente vector de Stokes es un punto dentro de la esfera de Poincaré.	43
4.2. Representación de la luz no polarizada sobre la esfera de Poincaré. Toda la distribución de puntos se encuentra sobre toda la esfera de Poincaré, en donde el vector de Stokes correspondiente es un punto en el origen.	44

- 5.1. Representación del modelo matemático para el estudio estadístico de las oscilaciones del campo eléctrico. El conjunto Ω contiene todas las posibles realizaciones del campo eléctrico en función del tiempo en un punto fijo en el espacio. Para el tiempo t_0 los campos representan variables aleatorias. Teniendo en cuenta la ω -ésima realización del campo para dicho tiempo, se encuentra que la señal es determinista, es decir representa un estado de polarización bien definido, por lo tanto se le puede asociar un vector de Jones ${}^\omega\hat{e}(t_o)$ 49

- 5.2. Representación cuaterniónica de un estado de polarización bien definido sobre la esfera de Poincaré, correspondiente a la ω -ésima realización del ensamble cuaterniónico, en el tiempo t_0 50

- 5.3. **Representación sobre la esfera de Poincaré mediante una formulación cuaternionica.** Representación de todas las posibles realizaciones del cuaternión en función del tiempo para un punto fijo en el espacio \mathbf{r}_0 . Cada realización para un tiempo en particular presenta un estado de polarización bien definido. Para la primera realización del campo eléctrico se le asigna un cuaternión ${}^1Q(t)$, para la segunda realización se le asigna el cuaternión ${}^2Q(t)$ y así para todas las posibles ω -realizaciones del campo eléctrico. En principio cada cuaternión para cada realización puede pasar por todos los puntos de la esfera, es decir todos los estados de polarización son igualmente probables (Luz no polarizada), pero eso no será siempre el caso, ya que pueden haber estados de polarización más probables que otras, en donde dependerá del grado de polarización que tenga el campo eléctrico (Luz parcialmente polarizada). 52

- 5.4. La gráfica representa la variable aleatoria $Q(t_0)$, La cual genera la distribución de puntos sobre la esfera de Poincaré que estará limitada por el grado de polarización que caracteriza la fuente, indica el estado de polarización que presenta la fuente y que se forma a partir del ensamble cuaterniónico mostrado en la figura anterior. Cada punto sobre la esfera corresponde a un estado de polarización bien definido, en donde se encontrarán que unos estados de polarización son más probables que otros y otros estados que tengan una probabilidad de ocurrencia nula, de ahí que a dicha distribución de puntos le corresponde una distribución de probabilidad. 53

- 5.5. Las funciones de distribución de probabilidad $\rho(Q_1)$, $\rho(Q_2)$ y $\rho(Q_3)$ son las proyecciones sobre las coordenadas Q_1 , Q_2 y Q_3 que se representan gráficamente sobre la esfera de Poincaré, las cuales caracterizan el cuaternión aleatorio. 56

6.1.	En la figura se muestra sólo dos de las 500 posibles realizaciones del campo eléctrico que se tuvieron en cuenta en la simulación, en donde se observa como fluctúa el campo para un intervalo de tiempo determinado. Además la fuente se realiza de acuerdo a la estadística de oscilación de las componentes del campo eléctrico, que en este caso corresponde a una estadística gaussiana	60
6.2.	Representación de la evolución temporal de sólo tres de las quinientas posibles realizaciones del cuaternión aleatorio que conforma el conjunto Ω	62
6.3.	Representación de la distribución de probabilidad de cada variable cuaterniónica en forma de barras, en donde la superficie de cada barra indica la probabilidad de los valores que puede tomar cada variable.	63
7.1.	Representación de las oscilaciones aleatorias del campo eléctrico. Las emisiones espontáneas de la gráfica a) corresponde a la primera fuente para un intervalo de tiempo determinado y de la b) la realización del campo para la fuente dos.	66
7.2.	Representación gráfica de las distribuciones de puntos asociados a las fluctuaciones del campo eléctrico de dos fuentes de luz parcialmente polarizadas. En la figura a) se representa la forma geométrica de la distribución de puntos asociado a una de las fuentes, tal que corresponde a una distribución gaussiana. En la figura b) se representa la distribución de puntos correspondiente a la otra fuente, donde se puede observar que la distribución que la caracteriza tiene forma de anillo.	68
7.3.	Se muestra en cada gráfica un histograma el cual es una representación de cada uno de los cuaterniones aleatorios Q_1 , Q_2 y Q_3 , indicando cuales valores son más probables con respecto a otros, obteniendo así las distribuciones sobre cada eje de la esfera de Poincaré correspondiente a la función de distribución gaussiana multivariable.	69
7.4.	Se muestra en cada gráfica un histograma, que representa la función de probabilidad sobre cada uno de los cuaterniones aleatorios Q_1 , Q_2 y Q_3 , indicando cuales valores son más probables con respecto a otros de la función de distribución en forma de anillo sobre la esfera de Poincaré.	70

B.1. La proyección se construye de tal manera que el plano coincida con el ecuador de la esfera y se supone que un punto sobre el plano esta unido con el polo norte a través de una línea recta. Está proyección estereográfica muestra como todos los puntos que descansan sobre el plano le corresponde un punto sobre la esfera de Poincaré, excepto uno llamado el polo de proyección, que en este caso es el polo norte de la esfera.	84
C.1. Sea Ω un conjunto de todas las posibles realizaciones de un experimento de la variable $X(t)$, en donde para el tiempo t_1 cada una de las realizaciones toma una valor diferente para X , por lo tanto si se tiene en cuenta todo el ensamble para dicho tiempo, eso se conoce como una variable aleatoria $X(t_1)$	87
C.2. Representación de distribuciones de probabilidad correspondientes a las variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$, mostrando cuales valores de x tienen mayor o menor ocurrencia. En donde $X_1(t_1)$ y $X_2(t_2)$ son los correspondientes valores esperados de la distribución.	88
C.3. Un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ se llama ergódico, si el promedio de ensamble es igual al promedio temporal.	89
D.1. Representación esquemática de los montajes experimentales que se tuvieron en cuenta para obtener las correspondientes distribuciones de puntos sobre la esfera de Poincaré.	93
D.2. Representación sobre la esfera de Poincaré de las distribuciones de puntos que caracterizan a cada montaje. En La figura se muestran las distribuciones de polarización <i>a)</i> de la fuente, <i>b)</i> de la fuente al interactuar con un polarizador, <i>c)</i> de la fuente al interactuar con un polarizador y un birrefringente y <i>d)</i> de la fuente al interactuar con un polarizador y dos birrefringentes.	94

Capítulo 1

Introducción

La polarización de la luz es una propiedad natural que presentan las ondas electromagnéticas, la cual ha sido por mucho tiempo un campo amplio de investigación y aplicaciones tecnológicas. La elipsometría es una técnica que permite estudiar propiedades de los materiales que están relacionadas con el cambio de estado de polarización de la luz al interactuar con un material. Entre las propiedades más relevantes que caracterizan los materiales son: estructuras anisótropas, películas delgadas, capas no uniformes, composición de la aleación, concentración de soluciones, cristalinidad. Además existen aplicaciones en el campo de la industria entre las que se encuentran: medir la concentración de azúcares, dispositivos electrónicos como las pantallas de cristal líquido presente en calculadoras, pantallas planas de computador o de televisión, entre otras. En química para caracterizar sustancias. En la medicina se mide la concentración de glucosa en la sangre para las personas que sufren de diabetes [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

Todo lo mencionado anteriormente ha sido gracias a los aportes de gran relevancia que han permitido el entendimiento de la polarización de la luz [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Históricamente el primer científico en descubrir la polarización fue Erasmus Bartholinus en 1669 mediante un experimento él pudo observar como la luz se refractaba a través del cristal de espato dando lugar a dos rayos, conocidos como rayo ordinario y extraordinario. Bartholinus sólo pudo describir lo que observó en el cristal, pero fue Augustin Jean Fresnel que explicó por primera vez el fenómeno de la doble refracción del cristal al interactuar con la luz en términos de polarización [21, 20].

En 1852 George Gabriel Stokes [19, 18, 21] introduce lo que se conoce como un estado de polarización para caracterizar fuentes de luz ya sean polarizadas, no polarizadas o parcialmente polarizadas, mediante cuatro parámetros, en donde el primer parámetro

representa la intensidad total de la fuente de luz y los otros tres describen el estado de polarización de la fuente.

Posteriormente en 1892 El fisico-matemático Henry Poincaré [16, 19, 17, 18] introduce un método gráfico para representar los estados de polarización sobre una esfera con ciertas características que se conoce como la esfera de Poincaré. Este método permite visualizar como cambia el estado de polarización de una fuente sobre la esfera de Poincaré cuando interactúan con dispositivos ópticos (Operadores de polarización). Aunque para obtener cálculos explícitos es necesario asociar el método gráfico con un método algebraico (Parámetros de Stokes o los cuaterniones), para fuentes de luz totalmente polarizada, ya que la representación de un estado de polarización bien definido corresponde a un punto sobre la esfera de Poincaré. Sin embargo, cuando se tiene luz parcialmente polarizada su representación sobre la esfera corresponde a una distribución de puntos, en donde el vector de Stokes asociado a dicha distribución es un punto dentro de la esfera. [16, 22]. Por lo tanto, para el caso que la luz sea parcialmente polarizada no hay hasta el momento un método que permita asociar mediante cálculos la representación de la luz parcialmente polarizada sobre la esfera, y además que permita obtener información acerca de como fluctúa el campo eléctrico en el tiempo.

Un método alternativo para describir luz totalmente polarizada fue presentado por Robert Clark Jones en 1941 [18, 21] conocido como el cálculo de Jones. Este método permite conocer mediante un cálculo matricial el estado de polarización emergente una vez interactua con un operador de polarización. No obstante presenta limitaciones ya que sólo permite describir luz totalmente polarizada y su estado de polarización está en términos del campo eléctrico una cantidad que no es medible directamente en el laboratorio a diferencia de los parámetros de Stokes.

En 1843 William Rowan Hamilton introdujo los cuaterniones [23, 24] como una herramienta matemática que permite representar las orientaciones y rotaciones de los objetos en tres dimensiones, mediante cálculos cortos a diferencia de los ángulos de Euler. Esta herramienta fue utilizada por Pellat-Finet [25] para describir mediante cuaterniones tanto los estados de polarización bien definidos como los dispositivos ópticos. Además de manera muy simple se obtienen los cálculos de rotaciones sobre la esfera de Poincaré de una luz totalmente polarizada al interactuar con un dispositivo.

Hasta el momento sólo se ha mencionado la polarización como una propiedad geométrica de la luz [21], pero debido a que la mayoría de las fuentes de luz de origen natural o artificial el vector campo eléctrico varían de manera aleatoria cambiando el estado de polarización de manera impredecible, se hizo necesario estudiar la estadística y co-

rrrelaciones de las fluctuaciones aleatorias del vector campo eléctrico [26, 16, 27, 28], de ahí que en este trabajo de investigación se presentará una metodología alterna que describa la luz parcialmente polarizada a través de un modelo matemático en el cual se estudiará la estadística de las oscilaciones aleatorias del vector campo eléctrico y su coherencia temporal, mediante un formalismo cuaterniónico que permita a su vez representar fuentes de luz parcialmente polarizada sobre la esfera mediante distribuciones y así lograr unificar la representación geométrica (Esfera de Poincaré) con el método analítico ya mencionado.

Este trabajo de investigación se divide en 7 capítulos, los primeros cuatro capítulos corresponden a una revisión de los métodos algebraicos que existen para estudiar la luz polarizada y no polarizada en la literatura convencional. En los capítulos posteriores se desarrolla la metodología alterna para estudiar fuentes parcialmente polarizadas mediante distribuciones cuaterniónicas sobre la esfera de Poincaré. En donde en el capítulo cinco se describe de manera analítica la metodología alterna que logra comprender la luz parcialmente polarizada mediante distribuciones sobre la esfera de Poincaré, utilizando como base matemática los cuaterniones. En el capítulo seis se presenta mediante una simulación en Scilab una fuente donde las componentes del campo eléctrico varía de manera aleatoria bajo una estadística gaussiana, con el fin de desarrollar paso a paso lo que se expuso en el capítulo anterior y demostrar que los promedios de ensamble de los parámetros de Stokes son los mismos que el valor esperado de la función de distribución de cuaterniones sobre cada eje de la esfera de Poincaré. Finalmente en el último capítulo se expondrá también mediante una simulación que dos fuentes con diferentes estadística de oscilación dan lugar al mismo parámetro de Stokes, demostrando que el álgebra de Stokes está limitado como método para estudiar fuentes de luz parcialmente polarizadas y no polarizadas.

Capítulo 2

Descripción de luz polarizada

En este capítulo se analizarán fuentes de luz polarizada, en donde las amplitudes de las componentes del campo eléctrico son deterministas, es decir su diferencia de fase y amplitud es coherente en el tiempo. Por lo tanto, de acuerdo a la diferencia de fase y amplitud, dependerá la curva que describa el radio vector campo eléctrico, dicha curva se conoce como su estado de polarización, los cuales son representados mediante una formulación matemática como: Los vectores de Jones, parámetros de Stokes, matriz de polarización, cuaterniones y una representación gráfica conocida como la esfera de Poincaré, los cuales posibilitan describir y estudiar la luz polarizada[13, 19, 21, 25].

2.1. Luz polarizada

Para una onda plana y armónica los campos eléctrico y magnético vibran en un plano perpendicular a la dirección de propagación, y se pueden describir mediante las siguientes ecuaciones:

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad (2.1)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \Delta\phi), \quad (2.2)$$

en donde E_{0x} , E_{0y} y $\Delta\phi$ corresponden a las amplitudes de las componentes del campo eléctrico y el desfase entre dichas componentes. En las ecuaciones anteriores y en los cálculos posteriores sólo se utilizará la componente eléctrica para describir la onda de luz, ya que la componente magnético se deduce de las ecuaciones de Maxwell [19, 21].

Las componentes del campo eléctrico al variar el tiempo t en un punto fijo del espacio, describirán una curva la cual se obtiene mediante la eliminación del tiempo en las

Ecs.(2.1,2.2). De la Ec.(2.2) el término coseno de acuerdo a la identidad queda expresado de la forma:

$$\cos(kz - \omega t + \Delta\phi) = \cos(kz - \omega t) \cos(\Delta\phi) - \sin(kz - \omega t) \sin(\Delta\phi) = \frac{E_y}{E_{0y}}. \quad (2.3)$$

Despejando el coseno de la Ec.(2.1)

$$\cos(kz - \omega t) = \frac{E_x}{E_{0x}}, \quad (2.4)$$

reemplazando la ecuación anterior en la Ec.(2.3)

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\Delta\phi) - \sin(kz - \omega t) \sin(\Delta\phi) = \frac{E_y}{E_{0y}}. \quad (2.5)$$

Elevando al cuadrado las Ecs.(2.4, 2.5) y reemplazando en la identidad trigonométrica

$$\cos(kz - \omega t)^2 + \sin(kz - \omega t)^2 = 1, \quad (2.6)$$

se tiene la ecuación:

$$\left(\frac{E_x(t)}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t)}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}E_{0y}} \cos(\Delta\phi) = \sin(\Delta\phi)^2. \quad (2.7)$$

La ecuación anterior representa la ecuación de una elipse (Ver Fig.(2.1)), correspondiente a la curva que describe el radio vector campo eléctrico, el cual define el estado de polarización que presenta la fuente, la cual de manera general es una elipse de polarización. Sin embargo, existen ciertas formas degeneradas que presenta la elipse de polarización, considerados como casos particulares [19, 21, 29]. De ahí que, dependiendo del valor que tome la diferencia de fases entre las componentes del campo eléctrico $\Delta\phi$ y sus amplitudes, se pueda tener polarizaciones lineales y circulares.

De acuerdo a la curva que describa el vector campo eléctrico será el estado de polarización que caracteriza la onda de luz polarizada.

2.2. Métodos algebraicos para la luz polarizada

Para describir matemáticamente el cambio de estado de la luz polarizada, debido a la interacción de la luz con un medio (Operadores de polarización), es necesario tener

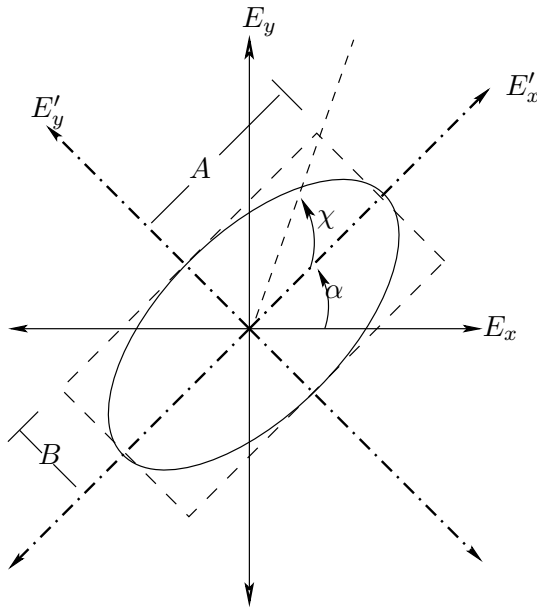


Figura 2.1: Gráfica de una elipse rotada un ángulo α con respecto al sistema no primado. En el sistema primado la elipse no rotada tiene un eje menor B , un eje mayor A y un ángulo χ asociado con la excentricidad de la elipse.

en cuenta algunas técnicas ya conocidas, que son aplicadas en diferentes problemas relacionados con la polarización. Entre estas técnicas se encuentran el cálculo matricial de Jones, el cálculo matricial de Stokes-Mueller, la matriz de polarización, el cálculo vectorial de los cuaterniones y la esfera de Poincaré [14, 18, 19, 21, 25]. A continuación se presentarán de una manera más detallada los métodos algebraicos ya nombrados.

2.2.1. Representación de la luz polarizada sobre la esfera de Poincaré

Poincaré es quien asocia por primera vez la ecuación general (Ec.(2.7)) de una elipse con un punto sobre una esfera de radio unitario, llamada la esfera de Poincaré [14, 19]. Esto lo logra relacionando las características de la elipse que son las amplitudes de las componentes del campo eléctrico y su desfase, y los dos ángulos α y χ asociados con la rotación y la excentricidad de la elipse (Fig.(2.1)). De acuerdo con lo anterior en esta sección se mostrarán las ecuaciones que relacionan dichas cantidades.

En el sistema primado (Ver fig.(2.1)), la elipse no se encuentra rotada, y está dada por

la ecuación:

$$\frac{|E'_x|^2}{A^2} + \frac{|E'_y|^2}{B^2} = 1. \quad (2.8)$$

La relación entre el sistema primado y no primado, se halla con la matriz de transformación, de la forma

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

por lo tanto

$$E_x = E'_x \cos \alpha - E'_y \sin \alpha, \quad (2.10)$$

$$E_y = E'_x \sin \alpha + E'_y \cos \alpha. \quad (2.11)$$

Introduciendo las ecuaciones anteriores en la Ec.(2.7), e igualando término a término con la Ec.(2.8), se obtiene:

$$\frac{1}{A^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{E_{0x}^2 \sin^2 \Delta \phi} + \frac{\sin^2 \alpha}{E_{0y}^2 \sin^2 \Delta \phi} - \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha \cos \Delta \phi}{E_{0x} E_{0y} \sin^2 \Delta \phi}, \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{B^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{E_{0x}^2 \sin^2 \Delta \phi} + \frac{\cos^2 \alpha}{E_{0y}^2 \sin^2 \Delta \phi} + \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha \cos \Delta \phi}{E_{0x} E_{0y} \sin^2 \Delta \phi}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{E_{0y}^2} - \frac{\sin 2\alpha}{E_{0x}^2} - \frac{2 \cos(2\alpha) \cos \Delta \phi}{E_{0x} E_{0y}} = 0. \quad (2.14)$$

Aplicando las identidades trigonométricas

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (2.15)$$

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha. \quad (2.16)$$

La elipticidad de la elipse χ y el eje menor y mayor se relacionan mediante las siguientes ecuaciones

$$\cos(2\chi) = \frac{1 - \tan^2 \chi}{1 + \tan^2 \chi}, \quad (2.17)$$

$$\tan^2 \chi = \frac{B^2}{A^2}. \quad (2.18)$$

Introduciendo en la ecuación anterior las relaciones encontradas en las Ecs.(2.12, 2.13) se deduce que

$$\tan^2 \chi = \frac{E_{0y}^2 \cos^2 \alpha + E_{0x}^2 \sin^2 \alpha - E_{0x} E_{0y} \sin(2\alpha) \cos \Delta \phi}{E_{0y}^2 \sin^2 \alpha + E_{0x}^2 \cos^2 \alpha + E_{0x} E_{0y} \sin(2\alpha) \cos \Delta \phi}, \quad (2.19)$$

lo que conduce a:

$$\cos(2\chi) = \left(\frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \right) \left(\cos(2\alpha) + \frac{2E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \sin(2\alpha) \cos \Delta \phi \right). \quad (2.20)$$

Ahora dividiendo la Ec.(2.14) por $\cos(2\alpha)$, se encuentra

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos \Delta\phi. \quad (2.21)$$

De las Ecs.(2.20,2.21) se deduce

$$\cos(2\alpha) \cos(2\chi) = \frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}. \quad (2.22)$$

Ahora, multiplicando la ecuación anterior por la Ec.(2.21), se obtiene

$$\sin(2\alpha) \cos(2\chi) = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \cos \Delta\phi. \quad (2.23)$$

Por último de las Ecs(2.22, 2.23) se deduce que

$$\sin(2\chi) = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \sin \Delta\phi. \quad (2.24)$$

Finalmente las últimas tres ecuaciones corresponden a un punto sobre una esfera de radio unitario y ángulos 2χ y 2α , conocida como la esfera de Poincaré. Estas ecuaciones como ya se habían mencionado relacionan las características principales de una elipse con los ángulos α y χ . Por lo tanto, un punto sobre la esfera de Poincaré describe un estado de polarización bien definido, que en general es una elipse de polarización (Ver Fig.(2.2)) [13, 19, 20].

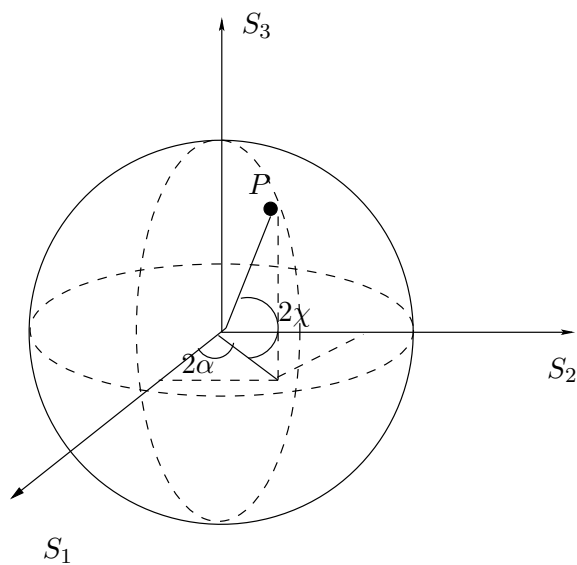


Figura 2.2: Representación de la polarización de una onda de luz totalmente polarizada por un punto sobre la esfera de Poincaré con ángulos 2α y 2χ .

Por lo mencionado anteriormente, sobre la esfera de Poincaré se encuentran todos los estado de polarización. En el ecuador es el lugar en donde se encuentran las ondas con polarización lineal ($\chi = 0$), en el polo norte y sur se representa la polarización circular derecha ($\chi = \pi/4$) e izquierda y en el resto de la esfera se encuentran todas las polarizaciones elípticas, en donde los paralelos tienen la misma elipticidad, pero varían su orientación, mientras que en los meridianos su orientación se mantiene constante, variando su elipticidad (Ver Fig.(2.3)).

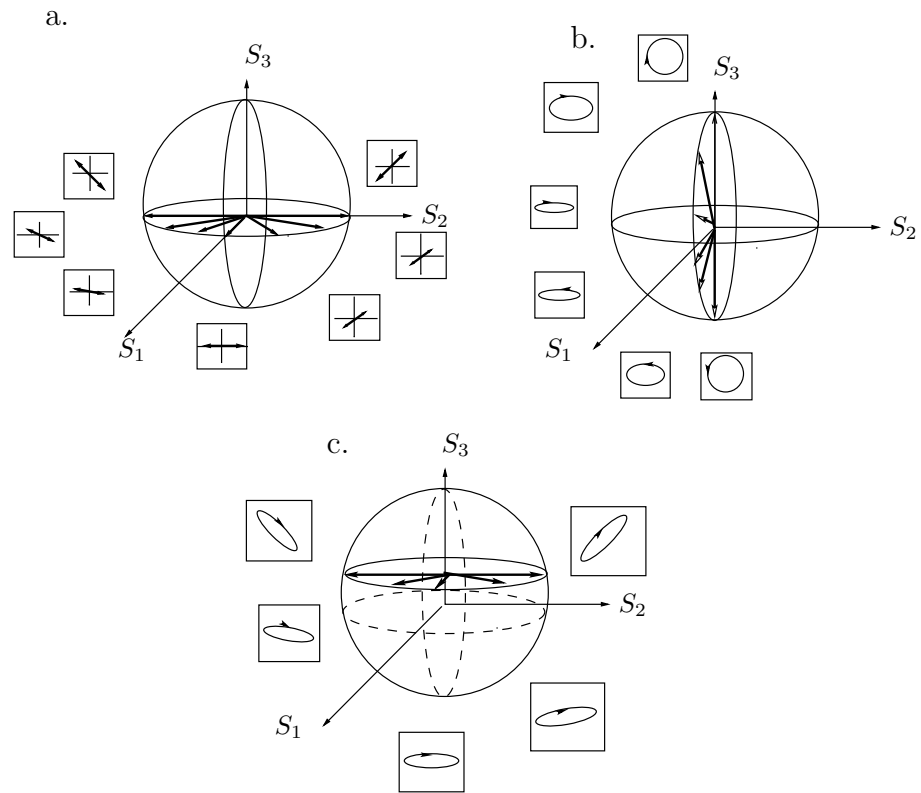


Figura 2.3: Representación de algunos estados de polarización sobre la esfera de Poincaré. En la gráfica a) las ondas están polarizadas rectilíneamente y se encuentran sobre el ecuador. En la figura b) sobre el polo norte y sur se encuentran las ondas con polarización circular a derecha e izquierda respectivamente. En el meridiano se encuentran las polarizaciones elípticas con la misma orientación pero variando su elipticidad. En la última gráfica se encuentran sobre el paralelo las polarizaciones elípticas con la misma elipticidad pero variando su orientación.

La representación de los estados de polarización sobre la esfera de Poincaré, es un método que permite visualizar los estados de polarización y la interacción entre la luz polarizada con un operador de polarización (Medio) [30]. Pero cuando se quiere tener cálculos explícitos, es necesario asociar la esfera de Poincaré con un método algebraico. Entre estos métodos se encuentran: el cálculo matricial de Stokes-Mueller y el cálculo vectorial de los cuaterniones, que se estudiarán en las siguientes secciones.

2.2.2. El cálculo matricial de Jones

Robert C. Jones en 1941 [13, 21, 31] introduce una representación matemática para la luz polarizada en términos de las componentes del campo eléctrico, en donde los estados de polarización y los operadores de polarización se representan mediante un

vector columna (Vector de Jones) y una matriz 2×2 (Matriz de Jones) respectivamente.

Vector de Jones

En la sección anterior, se mostró que el campo eléctrico en general describe un estado de polarización elíptico, por medio de las componentes del campo eléctrico como:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \hat{i} + E_{0y} \cos(\omega t + \Delta\phi - kz) \hat{j}. \quad (2.25)$$

Reescribiendo la ecuación anterior en términos de la amplitud compleja

$$\mathbf{E}(z, t) = (E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^{1/2} e^{i\omega t - kz} \hat{e}_p, \quad (2.26)$$

en donde \hat{e}_p se conoce como el vector de Jones

$$\hat{e}_p = \frac{1}{(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\Delta\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Por lo tanto, el vector de Jones queda completamente determinado por el $\Delta\phi$ y las amplitudes del campo eléctrico E_{0x} y E_{0y} [31]. La siguiente tabla muestra el vector de Jones de algunos estados de polarización.

VECTORES DE JONES		
Estados de polarización	Vectores de Jones	Polarización
Estado φ horizontal	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	\Leftrightarrow
Estado φ vertical	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	\Updownarrow
Estado φ a $+45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	\nearrow
Estado φ circular-derecha	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$	\circlearrowright

Tabla 2.1: Vectores de Jones para algunos estados de polarización

Matrices de Jones

Si la onda de luz polarizada pasa a través de varios operadores representados por las matrices de Jones $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$, el nuevo estado de polarización emergente, está dado de la forma

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n \mathbf{E}_i. \quad (2.28)$$

En la siguiente tabla se muestra un breve listado de las matrices de Jones para varios elementos ópticos.

MATRICES DE JONES	
Elemento óptico lineal	Matrices de Jones
Polarizador lineal horizontal	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polarizador lineal vertical	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador circular	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
Lámina cuarto de onda	$\frac{1-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
Lámina media-onda	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
Birrefringente	$\begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$

Cuadro 2.2: Matrices de Jones para algunos operadores de polarización

2.2.3. Matriz de polarización

La diferencia de fase y las amplitudes de las componentes del campo eléctrico para una onda monocromática plana son constantes, por lo tanto su fase y sus amplitudes están completamente definidas para cualquier valor del tiempo, en otras palabras la fase y las amplitudes de una onda monocromática están perfectamente correlacionadas, por consiguiente le corresponde un estado de polarización bien definido [20, 27, 32]. Las correlaciones del campo eléctrico se definen mediante la matriz de polarización (matriz de coherencia), que se obtiene del producto tensorial entre el vector de Jones con su correspondiente transpuesta del complejo conjugado

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \overline{E_x} \\ \overline{E_y} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} E_x & E_y \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

dando como resultado la matriz de polarización, que tiene la forma:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} E_x \overline{E_x} & E_x \overline{E_y} \\ E_y \overline{E_x} & E_y \overline{E_y} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Los elementos de la diagonal de la matriz representan las intensidades de las componentes del campo eléctrico y la traza de la matriz $\text{Tr } \Gamma$ que es la suma de los elementos de la diagonal es igual a la intensidad total de la onda. Los elementos fuera de la diagonal representan las correlaciones cruzadas entre las componentes del campo eléctrico [27]. Estas correlaciones entre las componentes del campo toman más interés cuando se quiere analizar la estadística para fuente de luz parcialmente polarizadas, que se estudiarán en los posteriores capítulos. Por otra parte, el determinante de la matriz de polarización

$$|\Gamma| = E_x \overline{E_x} E_y \overline{E_y} - E_x \overline{E_y} E_y \overline{E_x} = 0, \quad (2.31)$$

caracteriza una fuente de luz totalmente polarizada, ya que siempre el valor del determinante de la matriz es cero. En la tabla (2.3) se presentan algunas matrices de polarización para estados de luz totalmente polarizada. Cuando una onda con un estado de polarización bien definido pasa a través de un operador de polarización, que modifica la matriz de polarización del estado de polarización que sale, el nuevo estado de polarización se obtiene de la siguiente relación:

$$\Gamma' = \mathbf{A} \Gamma \mathbf{A}^\dagger, \quad (2.32)$$

MATRIZ DE POLARIZACIÓN		
Estados de polarización	Matriz de polarización	Polarización
Estado \wp horizontal	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	\Leftrightarrow
Estado \wp vertical	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	\Updownarrow
Estado \wp a $+ 45^\circ$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	\nearrow
Estado \wp circular-derecha	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$	\circlearrowright

Tabla 2.3: Matriz de polarización para algunos estados de polarización.

En donde Γ' y Γ representa la matriz de polarización emergente y de entrada respectivamente. La matriz \mathbf{A} corresponde a las matrices de Jones que se utilizan para representar el operador de polarización.

2.2.4. El cálculo matricial de Stockes-Mueller

Además del método algebraico de Jones y la matriz de polarización, el cálculo matricial de Stokes-Mueller permite la representación de estados de polarización de luz totalmente polarizada, luz parcialmente polarizada o no polarizada, como se verá en el capítulo 4. Esta representación también matricial, describe los estados de polarización mediante un vector columna llamado vector de Stokes y los operadores mediante una matriz 4×4 conocida como las matrices de Mueller. Stokes en su representación matemática utilizó como parámetro observable la intensidad de la luz [13, 19, 21, 33].

Vectores de Stokes

Considerando una onda plana monocromática en donde las componentes del campo eléctrico se representan mediante las Ecs.(2.1 y 2.2), de manera que su diferencia de amplitudes y fase se mantiene constante en el tiempo y están relacionadas mediante la ecuación de la elipse de polarización

$$\left(\frac{E_x(t)}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t)}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}E_{0y}}\cos(\Delta\phi) = \sin(\Delta\phi)^2, \quad (2.33)$$

encontrada en la sección 2.1. Las componentes de las amplitudes E_{0x} y E_{0y} son constantes, mientras que E_x y E_y siguen dependiendo implícitamente del tiempo. Para representar la ecuación anterior en términos de los observables el en campo óptico [13, 14, 19], hay que tener un promedio sobre el tiempo de observación, debido a que los campos no son deterministas, a través de la siguiente ecuación

$$\left(\frac{\langle E_x(t) \rangle}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{\langle E_y(t) \rangle}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{\langle E_x(t)E_y(t) \rangle \cos(\Delta\phi)}{E_{0x}E_{0y}} = \sin(\Delta\phi)^2, \quad (2.34)$$

el promedio temporal se define

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \lim \frac{1}{T} \int_0^T E_x(t)E_y(t)dt. \quad (2.35)$$

El promedio temporal de las componentes del campo eléctrico en función del tiempo de la Ec.(2.34) son:

$$\langle E_x(t)^2 \rangle = \frac{1}{2}E_{0x}, \quad (2.36)$$

$$\langle E_y(t)^2 \rangle = \frac{1}{2}E_{0y}, \quad (2.37)$$

y

$$\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = \frac{1}{2}E_{0x}E_{0y}\cos\Delta\phi. \quad (2.38)$$

Reemplazando los resultados anteriores en la Ec.(2.34) y multiplicando a ambos lados de la ecuación por el término $4E_{0x}^2E_{0y}^2$ se encuentra:

$$2E_{0y}^2E_{0x}^2 + 2E_{0y}^2E_{0y}^2 - (2E_{0x}E_{0y}\cos\Delta\phi)^2 = (2E_{0x}E_{0y}\sin\Delta\phi)^2. \quad (2.39)$$

Otra forma de representar la ecuación anterior es

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - (2E_{0x}E_{0y}\cos\Delta\phi)^2 = (2E_{0x}E_{0y}\sin\Delta\phi)^2. \quad (2.40)$$

Escribiendo las cantidades dentro de los paréntesis como:

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (2.41)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad (2.42)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y}\cos\Delta\phi, \quad (2.43)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y}\sin\Delta\phi. \quad (2.44)$$

La ecuación anterior forma un vector columna el cual se conoce como el vector de Stokes para una fuente de luz polarizada. En donde S_0 , S_1 , S_2 y S_3 se conocen como los parámetros de Stokes, y se definen en términos de las amplitudes y el desfase entre las componentes del campo eléctrico.

El parámetro S_0 mide la intensidad total de la onda, S_1 mide la intensidad total entre la diferencia de las amplitudes al cuadrado de las componentes del campo eléctrico, en donde cada componente al cuadrado corresponde al estado de polarización horizontal y polarización vertical, respectivamente. S_2 mide la intensidad obtenida de la diferencia de fase que hay entre ellas, si la diferencia de fase es 45° el estado de polarización será lineal a 45° y si la diferencia de fase es -45° tendrá un estado de polarización lineal a -45° . Por último S_3 mide la intensidad entre la diferencia de fase que hay entre las componentes del campo eléctrico, si la diferencia de fase es $\pi/2$ o $-\pi/2$ se tendrá estados de polarización circular a derecha o polarización circular a izquierda, respectivamente. En general los últimos tres parámetros de Stokes describen estados de polarización elípticos, dependiendo del valor que tengan las amplitudes de las componentes del campo eléctrico y la diferencia de fase.

Los cuatro parámetros de Stokes no son independientes y están relacionados por la siguiente ecuación:

$$1 = \frac{S_1^2}{S_0^2} + \frac{S_2^2}{S_0^2} + \frac{S_3^2}{S_0^2}. \quad (2.45)$$

La ecuación anterior representa la ecuación de una esfera, en donde los parámetros de Stokes están relacionados con las Ecs.(2.22-2.24), por lo tanto, la representación de los estados de polarización para una onda polarizada sobre la esfera de Poincaré, se relaciona con el vector de Stokes [34, 30, 35] por la Ec.(2.45), mediante las siguientes ecuaciones

$$\frac{S_1}{S_0} = \cos(2\alpha)\cos(2\chi), \quad (2.46)$$

$$\frac{S_2}{S_0} = \cos(2\chi)\sin(2\alpha), \quad (2.47)$$

$$\frac{S_3}{S_0} = \sin(2\chi). \quad (2.48)$$

Luz totalmente polarizada		
Estados de Polarización	Vectores de Stokes	Polarización
Estado φ horizontal	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	\Leftrightarrow
Estado φ vertical	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	\Uparrow
Estado φ circular-derecha	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	\circlearrowright

Cuadro 2.4: Vectores de Stokes para algunos estados de polarización.

Por lo general los vectores de Stokes se escriben dividiendo todos los cuatro parámetros por el parámetro S_0 , con el fin de que queden normalizados.

En la tabla 2.4 se muestran los vectores Stokes que describen fuentes con estados de polarización bien definidos.

Matrices de Mueller

Al igual que la matriz de Jones, la matriz de Mueller representa matemáticamente un operador de polarización [21], que cambia la onda incidente con un estado de polarización en una onda de salida con un estado de polarización diferente. En la siguiente tabla se muestra las matrices de Mueller para algunos operadores de polarización.

MATRICES DE MÜELLER	
Elemento óptico lineal	Matrices de Müller
Polarizador lineal horizontal	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador lineal vertical	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Birrefringente	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$

Cuadro 2.5: Matrices de Mueller para algunos operadores de polarización.

Capítulo 3

Los cuaterniones y la luz polarizada

Los cuaterniones fueron creados por Hamilton para representar rotaciones en el espacio tridimensional de manera natural [23, 24], pero fue Pierre Pellat-Finet quien introduce por primera vez los cuaterniones como método algebraico para describir luz polarizada [25]. La formulación cuaterniónica permite representar tanto los estados de polarización, como elementos ópticos por medio de un cuaternión; a diferencia de los cálculos de Jones o de Stokes-Mueller en donde los estados son vectores columna y los sistemas ópticos son matrices cuadradas [13, 14, 19, 21]; por lo tanto, permite frecuentemente encontrar soluciones cortas a una cantidad de problemas de la luz polarizada y su formulación es bien adaptada a la esfera de Poincaré, debido a que sobre la esfera la representación de un birrefringente [36, 37] no es más que una rotación.

3.1. Representación cuaterniónica de los estados de polarización

El vector de Jones para una onda de luz polarizada, en términos de las componentes del campo eléctrico

$$\hat{e}_p = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

El producto tensorial del vector de Jones con su correspondiente transpuesta del complejo conjugado

$$\Gamma = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overline{E_x} & \overline{E_y} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

obteniendo como resultado la matriz de polarización

$$\Gamma = \begin{pmatrix} E_x \overline{E_x} & E_x \overline{E_y} \\ E_y \overline{E_x} & E_y \overline{E_y} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

La matriz de polarización como ya se mostró es otro método que permite describir matemáticamente los estados de polarización mediante los cuatro elementos. Escribiendo la matriz de polarización en términos de la base canónica de una matriz 2×2 de la siguiente forma:

$$\Gamma = E_x \overline{E_x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_x \overline{E_y} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_y \overline{E_x} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + E_y \overline{E_y} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

La ecuación anterior se reescribe ahora en términos de la matrices de Pauli, encontrando

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2}[E_x \overline{E_x} + E_y \overline{E_y}] \sigma_0 \\ &+ \frac{1}{2}[E_x \overline{E_x} - E_y \overline{E_y}] \sigma_1 \\ &+ \frac{1}{2}[E_x \overline{E_y} + E_y \overline{E_x}] \sigma_2 \\ &+ \frac{i}{2}[E_x \overline{E_y} - E_y \overline{E_x}] \sigma_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

como resultado, la relación entre la matriz de polarización y los parámetros de Stokes dados por las Ecs.(2.41, 2.42, 2.43, 2.44),

$$\Gamma = S_0 \sigma_0 + S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2 + S_3 \sigma_3. \quad (3.6)$$

Finalmente con la ecuación anterior se encontró una relación entre el vector de Jones, la matriz de polarización y los parámetros de Stokes.

Por otra parte, el álgebra de los cuaterniones complejos es isomorfa al álgebra de las matrices complejas, por lo tanto se define la matriz de cuaterniones

$$[q] = \begin{pmatrix} q_0 - iq_1 & -q_3 - iq_2 \\ q_3 - iq_2 & q_0 + iq_1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Encontrando el determinante de la matriz que es igual a la norma de q se obtiene

$$\det[q] = (q_0 - iq_1)(q_0 + iq_1) - (-q_3 - iq_2)(q_3 - iq_2) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \quad (3.8)$$

Al igual que con la matriz de polarización, la matriz cuaterniónica se escribe en términos de la base canónica de una matriz 2×2 de la siguiente forma:

$$[q] = (q_0 - iq_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-q_3 - iq_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + (q_3 - iq_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (q_0 + iq_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Reescribe ahora la ecuación anterior en términos de la matrices de Pauli

$$[q] = \frac{1}{2}[(q_0 - iq_1) + (q_0 + iq_1)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}[(q_0 - iq_1) - (q_0 + iq_1)] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ + \frac{1}{2}[(q_3 - iq_2) + (-q_3 - iq_2)] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}[-(q_3 - iq_2) + (-q_3 - iq_2)] \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Se halla finalmente

$$[q] = q_0\sigma_0 - i[q_1\sigma_1 + q_2\sigma_2 + q_3\sigma_3], \quad (3.11)$$

una matriz cuaterniónica que contiene una parte escalar y una parte vectorial al igual que el vector de Stokes, su parte escalar S_0 representa la intensidad vibratoria de la onda, y una parte vectorial dado por S_1, S_2 y S_3 correspondiente a una suma o diferencia de intensidades medibles. Por lo tanto, los cuaterniones representan estados de polarización para una onda de luz polarizada debido al isomorfismo que presenta el álgebra de la matriz cuaterniónica [12] dada por la Ec.(3.11) con el álgebra de la matriz de polarización dada por la Ec.(3.6). Por esta razón los cuaterniones que representan estados de polarización se relacionan con las componentes del campo eléctrico por medio de las siguientes ecuaciones

$$q_0 = \frac{1}{2}[E_x\overline{E_x} + E_y\overline{E_y}]\hat{e}_0, \quad (3.12)$$

$$q_1 = \frac{i}{2}[E_x\overline{E_x} - E_y\overline{E_y}]\hat{e}_1, \quad (3.13)$$

$$q_2 = \frac{i}{2}[E_x\overline{E_y} + E_y\overline{E_x}]\hat{e}_2, \quad (3.14)$$

$$q_3 = \frac{i}{2}[E_x\overline{E_y} - E_y\overline{E_x}]\hat{e}_3. \quad (3.15)$$

Los cuaterniones unitarios $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2$ y \hat{e}_3 forman una base canónica compleja de dimensión cuatro (Ver Apéndice A). Las ecuaciones anteriores están relacionadas de la

siguiente manera

$$\frac{q_1^2}{q_o^2} + \frac{q_2^2}{q_o^2} + \frac{q_3^2}{q_o^2} = 1. \quad (3.16)$$

La ecuación anterior representa la ecuación de una esfera con centro en el origen y radio unitario, dando como resultado la representación sobre la esfera de Poincaré de la parte vectorial de un cuaternión, correspondiente a un estado de polarización bien definido mediante las siguientes ecuaciones

$$Q_1 = \frac{q_1}{q_0} = \cos(2\alpha) \cos(2\chi), \quad (3.17)$$

$$Q_2 = \frac{q_2}{q_0} = \cos(2\chi) \sin(2\alpha), \quad (3.18)$$

$$Q_3 = \frac{q_3}{q_0} = \sin(2\chi). \quad (3.19)$$

En la siguiente tabla se muestra algunos estados de polarización.

ESTADOS DE POLARIZACIÓN		
Vectores de Stokes	Cuaternión	Polarización
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$e_0 + ie_1$	\Leftrightarrow
$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$e_0 - ie_1$	\Updownarrow
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$e_0 + ie_2$	\nearrow
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$e_0 + ie_3$	\circlearrowright

Cuadro 3.1: Representación cuaterniónica para algunos estados de polarización.

3.2. Representación cuaterniónica de los operadores de polarización

A diferencia del método algebraico de Jones y de Stokes-Mueller los operadores de polarización se representaban por matrices cuadradas y los estados de polarización mediante un vector, en el cálculo vectorial de los cuaterniones tanto los estados de polarización como los operadores de polarización se representan con cuaternión [12].

Para una onda de luz polarizada que se hace incidir sobre un operador de polarización,

su nuevo estado de polarización emergente

$$X' = uXu^*. \quad (3.20)$$

El cuaternión X representa el estado de polarización de la onda incidente, los operadores de polarización se representa en general por el cuaternión complejo u . En la siguiente tabla, se muestran algunos operadores de polarización en su representación polar (Ver Apéndice A).

Operadores de polarización	
Elemento óptico	Cuaternión
Lámina cuarto de onda	$e^{\hat{e}_1\pi/4}$
Lámina media-onda	$e^{\hat{e}_1\pi/2}$
Birrefringente	$e^{\hat{e}_1\varphi/2}$

Cuadro 3.2: Representación cuaterniónica para algunos operadores de polarización.

Capítulo 4

Descripción de luz parcialmente polarizada

La gran mayoría de las fuentes de luz térmicas ya sean naturales o artificiales como por ejemplo el sol, las bombillas y lámparas fluorescentes, entre otras, no tienen un estado de polarización bien definido, sino que por el contrario su estado de polarización cambia aleatoriamente en el tiempo. Por lo tanto, como su estado de polarización está cambiando de manera que todos los estados de polarización son igualmente probables o algunos estados de polarización son más probables que otros, se dice que la fuente no está polarizada o está parcialmente polarizada respectivamente. Tales fuentes son descritas por los métodos algebraicos de la matriz de polarización y de Stokes. [26, 16, 22, 15, 21, 29].

4.1. Matriz de polarización

Las propiedades estadísticas de una fuente de luz se pueden estudiar mediante las correlaciones temporales o la coherencia temporal¹ de segundo orden que existan entre la fase y la amplitud del campo eléctrico [26, 38, 39], a través de la matriz de polarización

$$\Gamma(\tau) = \begin{bmatrix} \langle E_x(t) \overline{E_x(t)} \rangle & \langle E_x(t) \overline{E_y(t)} \rangle \\ \langle E_y(t) \overline{E_x(t)} \rangle & \langle E_y(t) \overline{E_y(t)} \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

¹Una fuente de luz se considera coherente cuando dos puntos en el tiempo de la onda guardan una relación de fase constante, es decir para un intervalo de tiempo se puede predecir la fase de la onda y esto se conoce como tiempo de coherencia.

Las componentes del campo eléctrico correspondiente a una onda cuasi-monocromática² que se representan mediante señales analíticas, se construyen a partir de un ensamble que representa el conjunto de todas las posibles realizaciones de la fuente (Ver Apéndice (C)), la cual se considera estacionario³. La barra denota el complejo conjugado, la traza de la matriz representa la intensidad total de la fuente, los términos que están fuera de la diagonal miden las correlaciones cruzadas del campo eléctrico para diferentes tiempos en un punto del espacio, y los brackets angulares denotan promedios temporales o promedios de ensamble. La matriz de polarización es una matriz hermítica, por tanto su determinante es un valor real

$$|\Gamma| = \langle E_x(t)\overline{E_x(t)}\rangle\langle E_y(t)\overline{E_y(t)}\rangle - \langle E_x(t)\overline{E_y(t)}\rangle\langle E_y(t)\overline{E_x(t)}\rangle \geq 0. \quad (4.2)$$

Cuando el valor del determinante de la matriz de polarización sea igual a cero, la fuente es considerada luz polarizada, en el otro extremo se tiene cuando el valor del determinante de la matriz es 1, es decir una fuente de luz no polarizada. La matriz de polarización correspondiente a este tipo de fuentes es:

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

los elementos fuera de la diagonal son cero, debido a que las componentes del campo eléctrico son mutuamente incoherentes y las componentes de la diagonal son 1 indicando que estas tienen la misma intensidad.

Ahora bien, para un valor del determinante de la matriz de polarización (Ver Ec.(4.2)) diferente de cero y uno, se tiene que la fuente de luz se considera parcialmente polarizada. La correspondiente matriz de polarización

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \langle E_{0x}(t)\overline{E_{0x}(t)}\rangle & \langle E_{0x}(t)\overline{E_{0y}(t)}e^{i(\Delta\phi)}\rangle \\ \langle E_{0y}(t)\overline{E_{0x}(t)}e^{-i(\Delta\phi)}\rangle & \langle E_{0y}(t)\overline{E_{0y}(t)}\rangle \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Para el proceso se deben sacar los promedios ya sean temporales o de ensamble de las funciones de auto-correlación y correlación cruzada entre las amplitudes y el ángulo de desfase $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

²Para una onda cuasi-monocromática las amplitudes y las fases varían lentamente en intervalos de tiempo que son pequeños en comparación con relación al tiempo de coherencia.

³ Un proceso estacionario es un proceso aleatorio cuya distribución de probabilidad en un instante de tiempo fijo es la misma para todos los instantes de tiempo, es decir sus propiedades no dependen del origen del tiempo.

Un parámetro que permite medir el grado de correlación entre las componentes del campo eléctrico se conoce como grado de coherencia cruzada

$$|\mu_{xy}| = \frac{\Gamma_{xy}}{\sqrt{\Gamma_{xx}\Gamma_{yy}}} \quad (4.5)$$

Esta ecuación sólo puede tomar valores entre cero y uno, el cero corresponde a luz no polarizada, es decir no hay ninguna correlación entre las componentes del campo eléctrico y la unidad a fuentes totalmente polarizadas en donde las componentes del campo eléctrico están altamente correlacionadas, y los valores entre cero y uno corresponde a una correlación parcial entre las componentes del campo eléctrico dando lugar a fuentes parcialmente polarizadas

En la siguiente sección se describe otro método que permite describir luz parcialmente polarizada a partir de cuatro parámetros que son una combinación lineal de las correlaciones que pueden existir entre las componentes del campo eléctrico y se conoce como los parámetros de Stokes. También se mostrará la relación que hay entre estos dos métodos y se definirá el grado de polarización en término de los parámetros de Stokes.

4.2. Parámetros de Stokes

Muchas de las fuentes de luz ya sean naturales o artificiales no son ni completamente polarizadas o no polarizadas, de ahí que el concepto de grado de polarización sea tan importante, ya que este parámetro indica que tanto están correlacionadas las componentes del campo eléctrico de la fuente. Cuando el grado de polarización es uno o es cero la fuente presenta una polarización definida o todos sus estados son igualmente probables respectivamente. Mientras que si el grado de polarización está entre cero y uno la fuente se dice que está parcialmente polarizada. Un método algebraico que permite medir la polarización de la fuente, sin importar el grado de polarización que presente son los parámetros de Stokes [22, 19, 21, 40].

Las componentes del campo eléctrico varían de manera aleatoria cambiando el estado de polarización en el tiempo, por consiguiente cuando un estado de polarización tiene mayor ocurrencia con respecto a otros estados, se dice que la fuente presenta un grado de polarización entre cero y uno.

Ahora bien, para calcular el vector de Stokes de una fuente de luz parcialmente polarizada se hace mediante promedios y considerando que el proceso aleatorio es estacionario (Ver apéndice C) se define el vector de Stokes

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \langle S_0 \rangle \\ \langle S_1 \rangle \\ \langle S_2 \rangle \\ \langle S_3 \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Los parámetros de Stokes se escriben en términos de las amplitudes y el ángulo de desfase de las componentes del campo eléctrico que varían aleatoriamente en el tiempo,

$$\langle S_0 \rangle = \langle E_{0x}(t)\overline{E_{0x}(t)} + E_{0y}(t)\overline{E_{0y}(t)} \rangle, \quad (4.7)$$

$$\langle S_1 \rangle = \langle E_{0x}(t)\overline{E_{0x}(t)} - E_{0y}(t)\overline{E_{0y}(t)} \rangle, \quad (4.8)$$

$$\langle S_2 \rangle = \langle 2E_{0x}(t)\overline{E_{0y}(t)} \cos(\Delta\phi) \rangle, \quad (4.9)$$

$$\langle S_3 \rangle = \langle 2E_{0y}(t)\overline{E_{0x}(t)} \sin(\Delta\phi) \rangle, \quad (4.10)$$

El primer parámetro S_0 define la intensidad total de la fuente. El parámetro S_1 sólo mide el promedio temporal de la variación aleatoria de las amplitudes del campo eléctrico, mientras que los dos últimos parámetros S_2 y S_3 miden tanto la variación aleatoria de las amplitudes como la diferencia de fase que hay entre las componentes del campo eléctrico. Además los tres últimos parámetros determinan el estado de polarización de la fuente.

Los promedios temporales de los parámetros de Stokes normalizados cumplen con la siguiente relación:

$$1 > \frac{\langle S_1 \rangle^2}{\langle S_0 \rangle^2} + \frac{\langle S_2 \rangle^2}{\langle S_0 \rangle^2} + \frac{\langle S_3 \rangle^2}{\langle S_0 \rangle^2}. \quad (4.11)$$

Demostrando que la representación del estado de polarización sobre la esfera de Poincaré es un punto dentro de la esfera. La longitud del vector de Stokes sobre la esfera de Poincaré corresponde al grado de polarización [41, 42], dado por la siguiente ecuación:

$$P = \frac{I_p}{I} = \left(\frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{S_0^2} \right)^{1/2}. \quad (4.12)$$

La ecuación anterior caracteriza el estado de polarización de la fuente, pero no contiene alguna información adicional sobre el estado de polarización, que el que puede ser cuantificado usando los parámetros de Stokes. En el caso que la luz sea totalmente polarizada su grado de polarización es uno, correspondiendo a un punto sobre la esfera de Poincaré. Mientras para la luz parcialmente polarizada su representación sobre la

esfera de Poincaré es una distribución de puntos que está limitada por el grado de polarización de la fuente (Ver figura 4.1), y su correspondiente vector de Stokes asociado a dicho estado corresponde a un radio menor que uno sobre la esfera de Poincaré, por lo tanto el vector de Stokes asociado a una luz parcialmente polarizada no se puede asociar como método algebraico a la representación geométrica de la esfera de Poincaré [19, 43, 21].

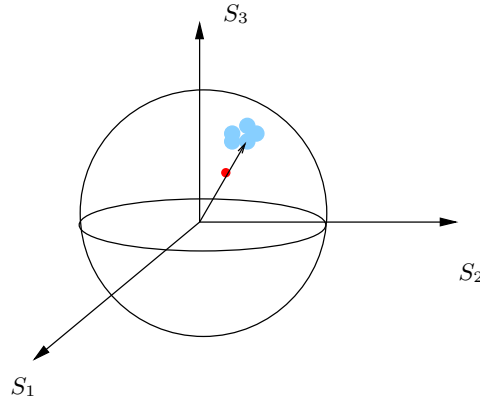


Figura 4.1: Representación de la luz parcialmente polarizada sobre la esfera de Poincaré. La mancha sobre la esfera representa la distribución de puntos asociada a una fuente de luz parcialmente polarizada y su correspondiente vector de Stokes es un punto dentro de la esfera de Poincaré.

Para el caso de una fuente no polarizada se tiene que todos los estados de polarización son igualmente probables, en el cual la distribución de puntos asociada a dicha fuente están sobre toda la esfera de Poincaré (Ver figura 4.2). El vector de Stokes queda definido de la forma:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

El promedio de los parámetros de Stokes S_1 , S_2 y S_3 es igual a cero, demostrando que todos los estados de polarización tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Debido a que los promedios temporales de los parámetros de Stokes normalizados son iguales a cero, el grado de polarización para una fuente de luz no polarizada es igual a cero, en donde el vector de Stokes asociado a este tipo de fuentes se representa como un punto en el centro de coordenadas sobre la esfera de Poincaré.

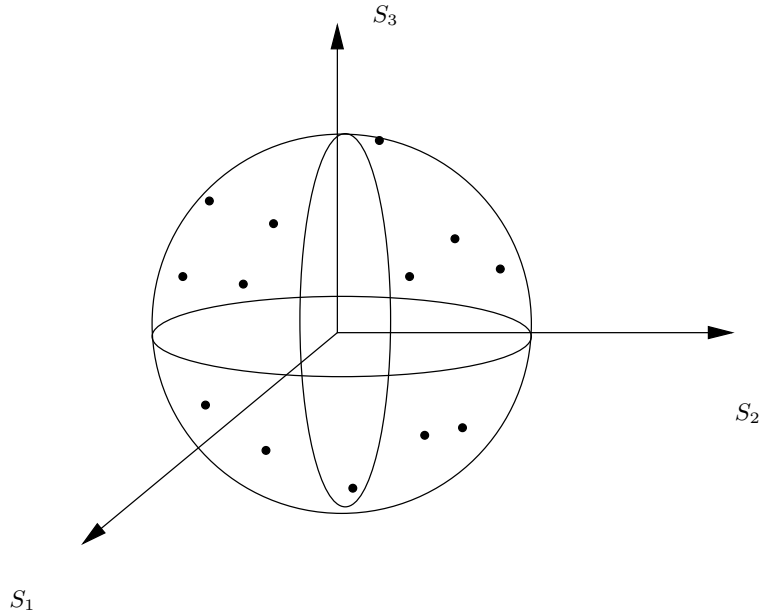


Figura 4.2: Representación de la luz no polarizada sobre la esfera de Poincaré. Toda la distribución de puntos se encuentra sobre toda la esfera de Poincaré, en donde el vector de Stokes correspondiente es un punto en el origen.

4.2.1. Relación entre los parámetros de Stokes y la matriz de polarización

Las propiedades que caracterizan las fluctuaciones del vector campo eléctrico, se pueden medir mediante las correlaciones que puedan existir a través de los parámetros de Stokes o la matriz de polarización \mathbf{J} [26, 15], de ahí que sea usual definir los parámetros de Stokes a partir de los elementos de la matriz de polarización de la forma:

$$S_0 = J_{xx} + J_{yy} \quad (4.14)$$

$$S_1 = J_{xx} - J_{yy} \quad (4.15)$$

$$S_2 = J_{xy} + J_{yx} \quad (4.16)$$

$$S_3 = i(J_{xy} - J_{yx}), \quad (4.17)$$

y

$$J_{xx} = \frac{1}{2}(S_0 + S_1) \quad (4.18)$$

$$J_{yy} = \frac{1}{2}(S_0 - S_1) \quad (4.19)$$

$$J_{xy} = \frac{1}{2}(S_2 + iS_3) \quad (4.20)$$

$$J_{yx} = \frac{1}{2}(S_2 - iS_3). \quad (4.21)$$

Las ecuaciones anteriores se obtienen por la matriz de polarización (Ver Ec.4.4) y las Ecs.(4.7-4.10), y se conocen como los parámetros de Stokes generalizados. Por otro lado, el grado de polarización también se puede escribir en términos de la matriz de polarización de acuerdo a las relaciones encontradas, de ahí que se pueda definir de la forma:

$$P = \frac{I_p}{I} = \sqrt{1 - 4 \frac{|\Gamma(t)|}{(Tr\Gamma(t))^2}}, \quad (4.22)$$

Aquí el grado de polarización se define en términos del determinante y la traza de la matriz de polarización. La ecuación anterior y la Ec.(4.12) presentan una formulación diferente pero físicamente representan lo mismo.

Aunque los parámetros de Stokes permiten describir luz parcialmente polarizada sin ningún problema, se ve limitado como método algebraico en el momento de asociarse mediante cálculos explícitos a la esfera de Poincaré, debido que no es más que un punto que se encuentra ubicado dentro de la esfera de Poincaré. Además impide identificar que distribución forman las fuentes parcialmente polarizadas sobre la esfera de Poincaré, ya que se puede tener el mismo vector de Stokes para fuentes con diferente estadística de oscilación del campo eléctrico. Por lo tanto, En el siguiente capítulo se presentará un método algebraico como una metodología alterna que permita utilizar la esfera de Poincaré como una representación de la luz parcialmente polarizada o no polarizada.

4.2.2. Relación entre el grado de polarización y el grado de coherencia cruzada

El grado de polarización mide que tanto de la fuente está polarizada, indicando como se vio en la sección anterior que dependiendo del valor que tome clasifica la fuente como polarizada, parcialmente polarizada o no polarizada. También se encontró dos ecuaciones diferentes (Ver Ecs.(4.12 y 4.22)) que calculan el grado de polarización, una de ellas se obtiene a partir de los parámetros de Stokes y la otra a partir de la matriz de polarización.

En esta sección se encontrará como está relacionada el grado de polarización y el grado de coherencia cruzada, para eso retomando el grado de polarización en términos de los

parámetros de Stokes

$$P^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{S_0^2}, \quad (4.23)$$

sumando uno a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$1 - P^2 = \frac{(S_0^2 - S_1^2) - (S_2^2 + S_3^2)}{S_0^2}. \quad (4.24)$$

Escribiendo la ecuación anterior en términos de las componentes de la matriz de polarización a través de las Ecs.(4.18-4.21) y el grado de coherencia cruzada, se tiene

$$P = \left(1 - \frac{4\Gamma_{xx}\Gamma_{yy}(1 - \mu_{xy}^2)}{(\Gamma_{xx} + \Gamma_{yy})^2} \right)^{1/2}. \quad (4.25)$$

el grado de polarización en función del grado de coherencia cruzada. En donde se puede apreciar que cuando el $\mu_{xy} = 0$ el grado de polarización es igual a cero, si $\mu_{xy} = 1$ el grado de polarización es uno, pero el caso de luz parcialmente polarizada ya no es igual al grado de coherencia cruzada, su relación se encuentra mediante las siguientes relaciones.

Para un $a \geq 0$ y un $b \geq 0$ se tiene

$$(a - b)^2 \geq 0, \quad (4.26)$$

sumando ambos lados $4ab$

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \quad (4.27)$$

se encuentra

$$1 \geq \frac{4ab}{(a + b)^2}. \quad (4.28)$$

La relación anterior se escribe de nuevo pero ahora en términos de las componentes de la matriz de polarización

$$1 \geq \frac{4\Gamma_{xx}\Gamma_{yy}}{(\Gamma_{xx} + \Gamma_{yy})^2} = \frac{1 - P^2}{(1 - \mu_{xy})^2}, \quad (4.29)$$

encontrando la relación que lleva

$$P \geq \mu(xy). \quad (4.30)$$

Tanto el grado de polarización y el coeficiente de coherencia son valores positivos, se deduce

$$0 \leq \mu(xy) \leq P. \quad (4.31)$$

La ecuación anterior muestra que el grado de polarización fija una cota superior al grado de coherencia cruzada, para el caso que la fuente tenga un polarización parcial.

Capítulo 5

Descripción de luz parcialmente polarizada mediante distribuciones de cuaterniones

En los capítulos dos y tres se analizaron fuentes de luz totalmente polarizadas y los métodos algebraicos que permiten caracterizar dichas fuentes por medio de los estados de polarización. También se mostró que un punto sobre la esfera de Poincaré es la representación gráfica del vector de Stokes (Ver Ec.2.45) o el cuaternión de polarización (Ver Ec.3.16), a través de un estado de polarización bien definido (Ver Fig.2.2) [13, 19, 25].

En el capítulo cuatro se estudiaron los métodos que permiten describir fuentes de luz parcialmente polarizada. El cálculo de Stokes por su parte permite asociarse al método gráfico de la esfera de Poincaré para el caso de luz polarizada, pero para el caso de luz parcialmente polarizada o luz no polarizada, es decir el estado de polarización de la fuente esta cambiando de manera aleatoria en el tiempo, su representación sobre la esfera de Poincaré es una distribución de puntos, en donde los promedios de ensamble del vector de Stokes asociado a esta distribución corresponde a un punto que se encuentra dentro de la esfera (Ver Fig.4.1), satisfaciendo la Ec(4.11), por ende no se puede asociar como método analítico a la representación gráfica sobre la esfera de Poincaré [19].

La distribución de puntos formada por la luz parcialmente polarizada o no polarizada sobre la esfera de Poincaré corresponde a la estadística de oscilación del campo eléctrico propia de cada fuente de luz a la cual se le asocia un parámetro de Stokes. Ese parámetro de Stokes que se forma mediante tres números no permite identificar que distribución

forman las fuentes (Ver Apéndice D). Además no puede diferenciar entre dos fuentes con diferente estadística de oscilación del campo eléctrico y con el mismo vector de Stokes.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, en este capítulo se presentará una metodología alterna que logra acoplar la esfera de Poincaré como método geométrico con el método analítico del álgebra de los cuaterniones, en donde se le va asociar una función de probabilidad a cada distribución de puntos, indicando cuales estados de polarización de la fuente son más probables que otros, logrando diferenciar entre fuentes estadísticamente diferentes pero con el mismo parámetro de Stokes. Además las distribuciones de probabilidad asociadas a cada fuente permiten caracterizar las fluctuaciones aleatorias tanto de la fase como de la amplitud de las oscilaciones del campo eléctrico.

5.1. Álgebra de los cuaterniones para luz parcialmente polarizada

El radio vector campo eléctrico de las fuentes de luz natural vibra de manera aleatoria en el tiempo, en donde el estado de polarización va cambiando de manera impredecible. De manera que, para estudiar la estadística de las oscilaciones aleatorias del campo eléctrico que es esquematizado en la Fig.(5.1) en donde el ensamble Ω representa el conjunto de todas las posibles realizaciones del campo, se hará a través del modelo matemático que se desarrolla en este capítulo [44, 45, 46].

La fuente de luz tiene la posibilidad de emitir un campo eléctrico el cual es representado mediante una señal, la cual corresponde a cualquiera de las posibles realizaciones del conjunto Ω , por consiguiente todas esas posibles realizaciones representan un proceso aleatorio (Ver Apéndice C). En un proceso aleatorio el campo en un tiempo determinado representa una variable aleatoria (Ver Fig.(5.1)) [27, 44, 47, 48, 49, 50].

De acuerdo a la mencionado, se procederá a encontrar una formulación cuaterniónica que represente todas las emisiones de la fuente de un conjunto Ω . Para eso, es necesario recordar que en el capítulo 3 se presentaron los cuaterniones como un método que permite describir luz polarizada, debido al isomorfismo que presentán con los parámetros de Stokes, ya que va a ser la misma la metodología utilizada para encontrar el cuaternión que describe luz polarizada.

El vector de Jones correspondiente a la ω -ésima realización del campo en un tiempo t_o

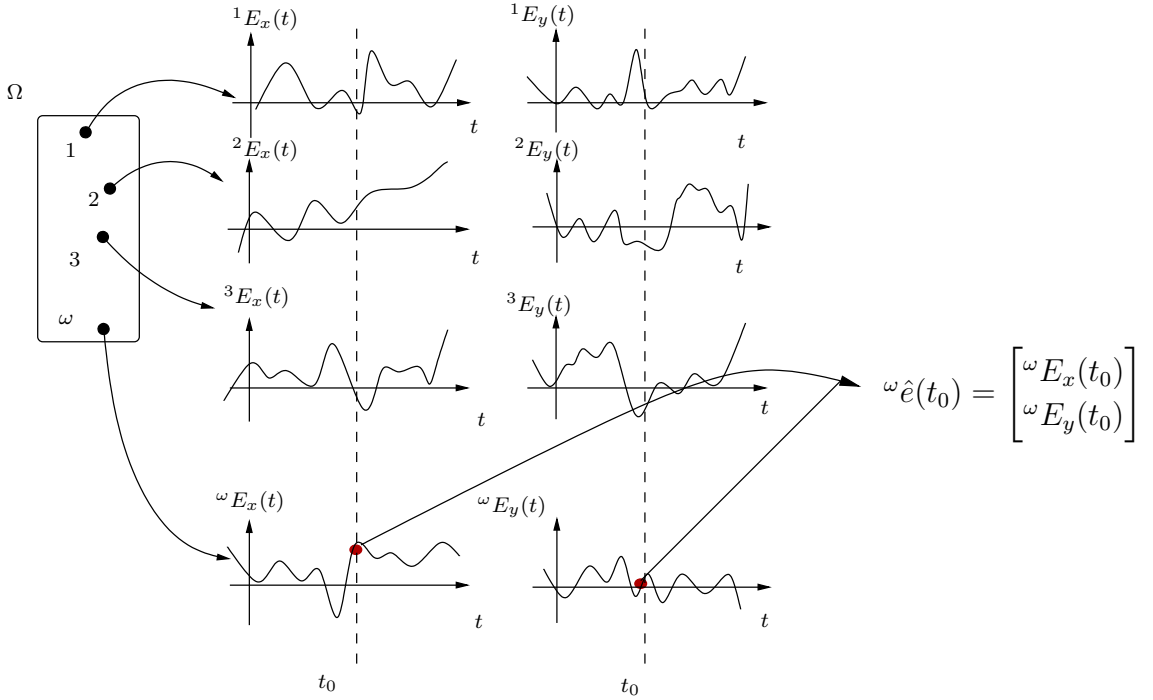


Figura 5.1: Representación del modelo matemático para el estudio estadístico de las oscilaciones del campo eléctrico. El conjunto Ω contiene todas las posibles realizaciones del campo eléctrico en función del tiempo en un punto fijo en el espacio. Para el tiempo t_0 los campos representan variables aleatorias. Teniendo en cuenta la ω -ésima realización del campo para dicho tiempo, se encuentra que la señal es determinista, es decir representa un estado de polarización bien definido, por lo tanto se le puede asociar un vector de Jones ${}^\omega\hat{e}(t_0)$.

como se muestra en la figura 5.1, describe un estado de polarización en particular, ya que los valores que toman las componentes del campo son deterministas, teniendo en cuenta que el periodo del campo eléctrico debe ser menor que el tiempo de variación del campo eléctrico. El cuaternión de luz polarizada para la ω -ésima realización del ensamble Ω en términos del campo eléctrico está dado mediante las siguientes ecuaciones

$${}^\omega Q_1(t_0) = \frac{{}^\omega q_1(t_0)}{{}^\omega q_0(t_0)} = i \frac{{}^\omega E_x(t_0) \overline{{}^\omega E_x(t_0)} - {}^\omega E_y(t_0) \overline{{}^\omega E_y(t_0)}}{{}^\omega E_x(t_0) \overline{{}^\omega E_x(t_0)} + {}^\omega E_y(t_0) \overline{{}^\omega E_y(t_0)}} \hat{e}_1, \quad (5.1)$$

$${}^\omega Q_2(t_0) = \frac{{}^\omega q_2(t_0)}{{}^\omega q_0(t_0)} = i \frac{\overline{{}^\omega E_x(t_0) \overline{{}^\omega E_y(t_0)} + {}^\omega E_y(t_0) \overline{{}^\omega E_x(t_0)}}}{{}^\omega E_x(t_0) \overline{{}^\omega E_x(t_0)} + {}^\omega E_y(t_0) \overline{{}^\omega E_y(t_0)}} \hat{e}_2, \quad (5.2)$$

$${}^\omega Q_3(t_0) = \frac{{}^\omega q_3(t_0)}{{}^\omega q_0(t_0)} = i \frac{{}^\omega E_x(t_0) \overline{{}^\omega E_y(t_0)} - {}^\omega E_y(t_0) \overline{{}^\omega E_x(t_0)}}{{}^\omega E_x(t_0) \overline{{}^\omega E_x(t_0)} + {}^\omega E_y(t_0) \overline{{}^\omega E_y(t_0)}} \hat{e}_3. \quad (5.3)$$

Las ecuaciones anteriores están relacionadas de la forma

$$[{}^\omega Q_1(t_0)]^2 + [{}^\omega Q_2(t_0)]^2 + [{}^\omega Q_3(t_0)]^2 = 1, \quad (5.4)$$

en donde la ecuación anterior, corresponde a la ecuación de una esfera con centro en el origen y radio uno. Dado que ${}^\omega Q(t_0)$ representa un cuaternión determinista se le asocia un estado de polarización bien definido sobre la esfera de Poincaré (Ver Fig.(5.2)).

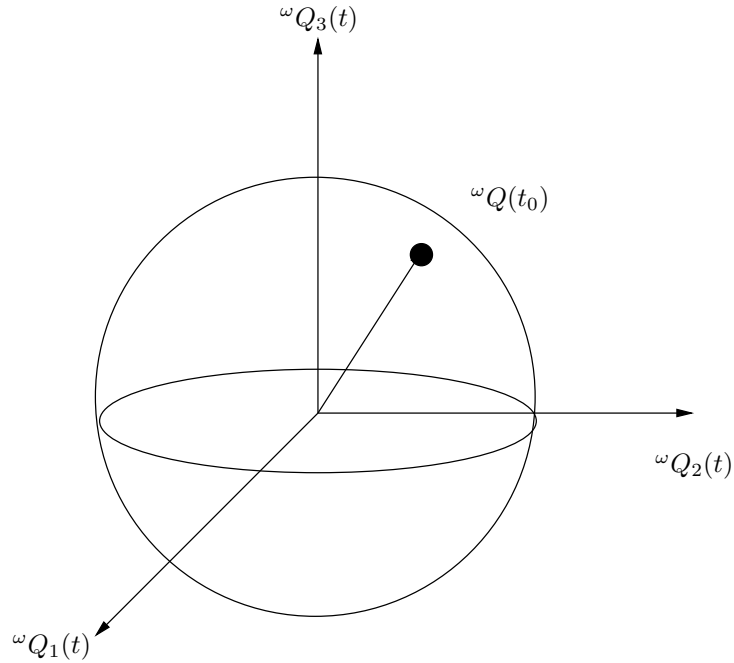


Figura 5.2: Representación cuaterniónica de un estado de polarización bien definido sobre la esfera de Poincaré, correspondiente a la ω -ésima realización del ensamble cuaterniónico, en el tiempo t_0 .

Teniendo la función cuaterniónica ${}^\omega Q(t)$ para la ω -ésima realización en función de las variables aleatorias, las cuales corresponden a las componentes del campo eléctrico en un punto del espacio \mathbf{r}_0 para cualquier tiempo t , está representada por un cuaternión aleatorio mediante las siguientes ecuaciones

$${}^\omega Q_1(t) = \frac{{}^\omega q_1(t)}{{}^\omega q_0(t)} = i \frac{{}^\omega E_x(t) \overline{{}^\omega E_x(t)} - {}^\omega E_y(t) \overline{{}^\omega E_y(t)}}{{}^\omega E_x(t) \overline{{}^\omega E_x(t)} + {}^\omega E_y(t) \overline{{}^\omega E_y(t)}} \hat{e}_1, \quad (5.5)$$

$${}^\omega Q_2(t) = \frac{{}^\omega q_2(t)}{{}^\omega q_0(t)} = i \frac{{}^\omega E_x(t) \overline{{}^\omega E_y(t)} + {}^\omega E_y(t) \overline{{}^\omega E_x(t)}}{{}^\omega E_x(t) \overline{{}^\omega E_x(t)} + {}^\omega E_y(t) \overline{{}^\omega E_y(t)}} \hat{e}_2, \quad (5.6)$$

$${}^\omega Q_3(t) = \frac{{}^\omega q_3(t)}{{}^\omega q_0(t)} = i \frac{{}^\omega E_x(t) \overline{{}^\omega E_y(t)} - {}^\omega E_y(t) \overline{{}^\omega E_x(t)}}{{}^\omega E_x(t) \overline{{}^\omega E_x(t)} + {}^\omega E_y(t) \overline{{}^\omega E_y(t)}} \hat{e}_3. \quad (5.7)$$

Las ecuaciones anteriores representan sobre la esfera de Poincaré la distribución de puntos correspondiente a la ω -ésima realización. Su representación sobre la esfera de Poincaré de cada realización se muestra en la Fig.(5.3).

Ahora el conjunto Ω será el nuevo modelo matemático que contiene todas las posibles realizaciones de la fuente, representadas mediante distribuciones de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré. La evolución de la variable aleatoria en cada uno de las realizaciones del ensamble cuaterniónico (Ver figura 5.3) para un tiempo determinado t_0 , formará la distribución de puntos sobre la esfera de Poincaré que caracteriza la fuente de luz, y la cual será limitada por el grado de polarización que presente la fuente (Ver figura 5.4).

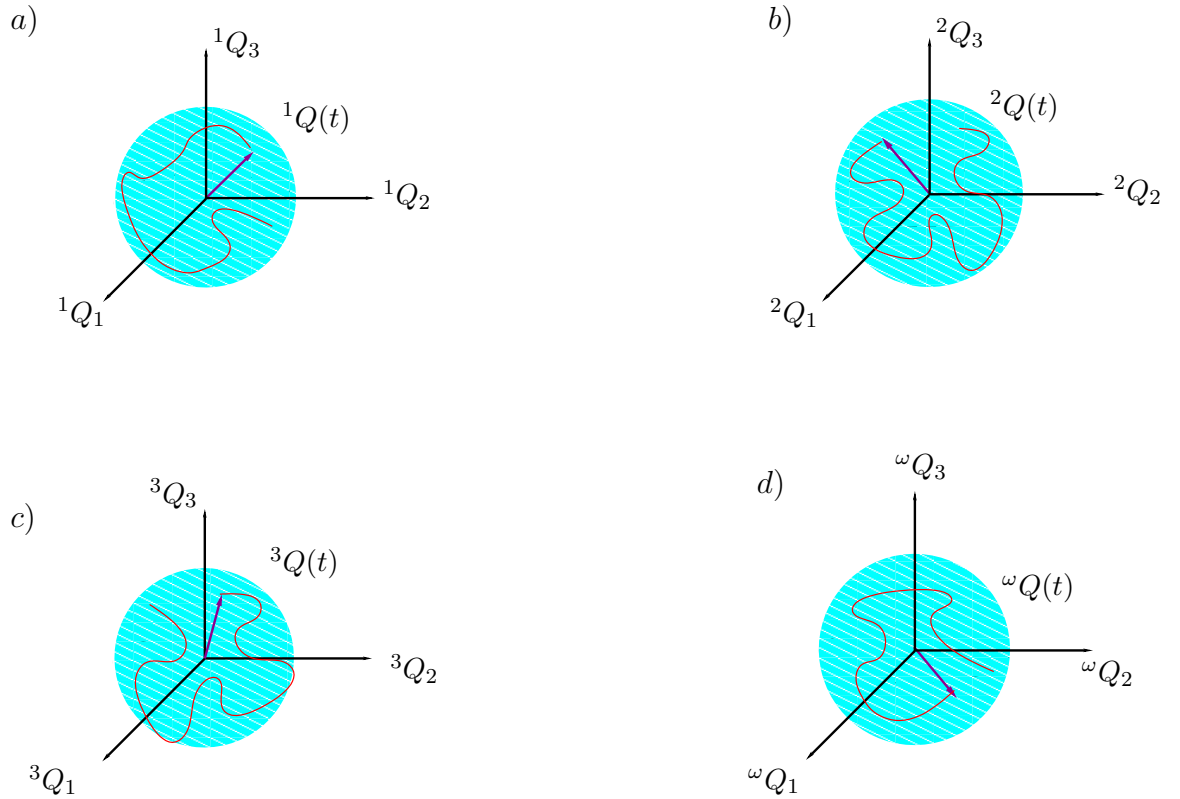


Figura 5.3: **Representación sobre la esfera de Poincaré mediante una formulación cuaternionica.** Representación de todas las posibles realizaciones del cuaternión en función del tiempo para un punto fijo en el espacio \mathbf{r}_0 . Cada realización para un tiempo en particular presenta un estado de polarización bien definido. Para la primera realización del campo eléctrico se le asigna un cuaternión ${}^1Q(t)$, para la segunda realización se le asigna el cuaternión ${}^2Q(t)$ y así para todas las posibles ω -realizaciones del campo eléctrico. En principio cada cuaternión para cada realización puede pasar por todos los puntos de la esfera, es decir todos los estados de polarización son igualmente probables (Luz no polarizada), pero eso no será siempre el caso, ya que pueden haber estados de polarización más probables que otras, en donde dependerá del grado de polarización que tenga el campo eléctrico (Luz parcialmente polarizada).

La distribución de puntos sobre la esfera indica cuales polarizaciones tienen mayor ocurrencia con respecto a otras, y aquellas que su probabilidad de ocurrencia es nula. En las siguientes secciones se presentarán la relación entre las distribuciones de probabilidad de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré y las funciones de distribución de probabilidad de la variable aleatoria del campo eléctrico.

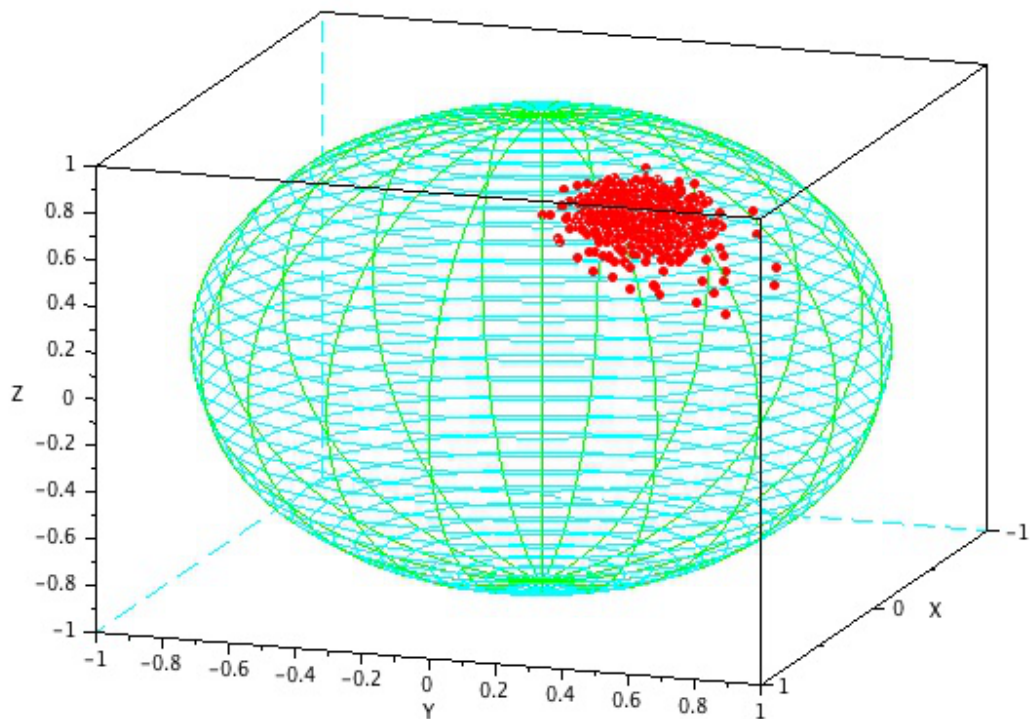


Figura 5.4: La gráfica representa la variable aleatoria $Q(t_0)$, La cual genera la distribución de puntos sobre la esfera de Poincaré que estará limitada por el grado de polarización que caracteriza la fuente, indica el estado de polarización que presenta la fuente y que se forma a partir del ensamble cuaterniónico mostrado en la figura anterior. Cada punto sobre la esfera corresponde a un estado de polarización bien definido, en donde se encontrarán que unos estados de polarización son más probables que otros y otros estados que tengan una probabilidad de ocurrencia nula, de ahí que a dicha distribución de puntos le corresponde una distribución de probabilidad.

5.2. Distribuciones cuaterniónicas sobre la esfera de Poincaré

Las funciones de distribución de probabilidad representan todos los posibles valores que puede o no tomar las variables aleatorias. Un parámetro que describe un aspecto importante de una variable aleatoria, se conoce como un promedio de ensamble que no es más que un promedio sobre todas las realizaciones posibles del conjunto Ω , permitiendo

conocer cual es el valor más probable que toman los componentes del campo eléctrico. Los promedios de ensamble de los cuaterniones aleatorias $Q(t_0)$ en términos de las variables aleatorias del campo eléctrico para un tiempo específico (Ver Fig.(5.1)), se definen mediante las siguientes ecuaciones:

$$\langle Q_1 \rangle_e = \frac{i}{I} \left[\langle E_x(t_0) \overline{E_x(t_0)} \rangle_e - \langle E_y(t_0) \overline{E_y(t_0)} \rangle_e \right] \hat{e}_1 \quad (5.8)$$

$$\langle Q_2 \rangle_e = \frac{i}{I} \left[\langle E_x(t_0) \overline{E_y(t_0)} \rangle_e + \langle E_y(t_0) \overline{E_x(t_0)} \rangle_e \right] \hat{e}_2 \quad (5.9)$$

$$\langle Q_3 \rangle_e = \frac{i}{I} \left[\langle E_x(t_0) \overline{E_y(t_0)} \rangle_e - \langle E_y(t_0) \overline{E_x(t_0)} \rangle_e \right] \hat{e}_3. \quad (5.10)$$

Las ecuaciones anteriores representan la autocorrelación y correlación cruzada de las variables aleatorias del campo eléctrico. En las siguientes ecuaciones se define el promedio de ensamble cuaterniónico mediante la función de distribución de probabilidades $\rho(E_x)$ y $\rho(E_y)$ y la función de densidad de probabilidades conjunta $\rho(E_x, E_y)$ del campo eléctrico

$$\langle Q_1 \rangle_e = \frac{i}{I} \left(\int E_x(t_0) \overline{E_x(t_0)} \rho(E_x) dE_x - \int E_y(t_0) \overline{E_y(t_0)} \rho(E_y) dE_y \right) \hat{e}_1, \quad (5.11)$$

$$\langle Q_2 \rangle_e = \frac{i}{I} \left(\int \int E_x(t_0) \overline{E_y(t_0)} \rho(E_x, E_y) dE_x dE_y + \int \int E_y(t_0) \overline{E_x(t_0)} \rho(E_x, E_y) dE_x dE_y \right) \hat{e}_2, \quad (5.12)$$

$$\langle Q_3 \rangle_e = \frac{i}{I} \left(\int \int E_x(t_0) \overline{E_y(t_0)} \rho(E_x, E_y) dE_x dE_y - \int \int E_y(t_0) \overline{E_x(t_0)} \rho(E_x, E_y) dE_x dE_y \right) \hat{e}_1. \quad (5.13)$$

La distribución de puntos que se forma sobre la esfera de Poincaré le corresponde una función de distribución de probabilidad, la cual indica que estados de polarización son más probables que otros y aquellos que su probabilidad de ocurrencia es cero. Además se encuentra una relación entre los promedios de ensamble de los cuaterniones con las correlaciones de los campos eléctricos que dan como resultado los parámetros de Stokes.

Ahora que se encontró una relación entre los parámetros de Stokes y los cuaterniones aleatorios, es importante relacionar la distribución de puntos sobre la esfera de

Poincaré con las distribuciones de probabilidad conjunta de las variables aleatorias del campo eléctrico. Tal relación entre las distribuciones ya mencionadas se muestra a continuación.

Sobre la esfera de Poincaré un estado de polarización bien definido se representa mediante un punto caracterizado por los ángulos α , χ y r (Ver Apéndice B). Así que de manera general se escribe una función de distribución de puntos, en términos de las ángulos que la determinan. Ahora haciendo una transformación de coordenadas de la siguiente manera

$$(r, 2\alpha, 2\chi) \longrightarrow (Q_1, Q_2, Q_3), \quad (5.14)$$

mediante el valor absoluto del determinante de la matriz Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial Q_1} & \frac{\partial r}{\partial Q_2} & \frac{\partial r}{\partial Q_3} \\ \frac{\partial(2\alpha)}{\partial Q_1} & \frac{\partial(2\alpha)}{\partial Q_2} & \frac{\partial(2\alpha)}{\partial Q_3} \\ \frac{\partial(2\chi)}{\partial Q_1} & \frac{\partial(2\chi)}{\partial Q_2} & \frac{\partial(2\chi)}{\partial Q_3} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

La nueva función de distribución de probabilidad queda en función de los cuaterniones Q_1, Q_2 y Q_3 mediante la siguiente transformación

$$\rho(Q_1, Q_2, Q_3) = |\det(J)|\rho(r, 2\alpha, 2\chi) \quad (5.16)$$

Las funciones de distribución de probabilidad $\rho(Q_1)$, $\rho(Q_2)$ y $\rho(Q_3)$ son las proyecciones sobre las coordenadas Q_1 , Q_2 y Q_3 de la esfera de Poincaré.

$$\rho(Q_1) = \int \int \rho(Q_1, Q_2, Q_3) dQ_2 dQ_3, \quad (5.17)$$

$$\rho(Q_2) = \int \int \rho(Q_1, Q_2, Q_3) dQ_1 dQ_3, \quad (5.18)$$

$$\rho(Q_3) = \int \int \rho(Q_1, Q_2, Q_3) dQ_1 dQ_2. \quad (5.19)$$

Estas funciones de distribución de probabilidad se representan gráficamente en la Fig.(5.5), en donde cada distribución de probabilidad $\rho(Q_1)$, $\rho(Q_2)$ y $\rho(Q_3)$ caracterizan el cuaternión aleatorio de polarización sobre cada eje [46], es decir da información de la estadística de los cuaterniones para una fuente de luz parcialmente polarizada.

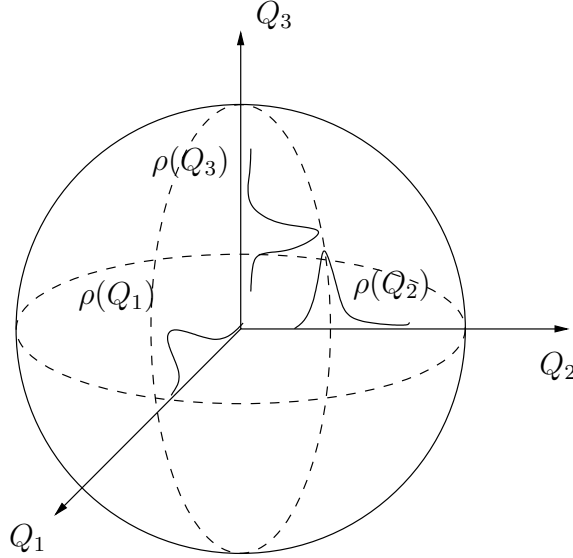


Figura 5.5: Las funciones de distribución de probabilidad $\rho(Q_1)$, $\rho(Q_2)$ y $\rho(Q_3)$ son las proyecciones sobre las coordenadas Q_1 , Q_2 y Q_3 que se representan gráficamente sobre la esfera de Poincaré, las cuales caracterizan el cuaternión aleatorio.

El valor esperado del cuaternión aleatorio que es proyectado sobre los ejes de coordenadas Q_1 , Q_2 y Q_3 de la esfera de Poincaré, debe ser igual al valor esperado dados por las ecuaciones 5.11,5.12 y 5.13 mediante las siguientes ecuaciones

$$\int Q_1 \rho(Q_1) dQ_1 = \frac{i}{I} \int \int (E_x(t_0) \overline{E_x}(t_0) - E_y(t_0) \overline{E_y}(t_0)) \rho(E_x, E_y) dE_x dE_y, \quad (5.20)$$

$$\int Q_2 \rho(Q_2) dQ_2 = \frac{i}{I} \int \int (E_x(t_0) \overline{E_y}(t_0) - E_y(t_0) \overline{E_x}(t_0)) \rho(E_x, E_y) dE_y dE_x, \quad (5.21)$$

$$\int Q_3 \rho(Q_3) dQ_3 = \frac{i}{I} \int \int (E_x(t_0) \overline{E_y}(t_0) - E_y(t_0) \overline{E_x}(t_0)) \rho(E_x, E_y) dE_y dE_x. \quad (5.22)$$

Las ecuaciones anteriores permiten encontrar una relación entre las funciones de distribución de probabilidad asociadas a la variable aleatoria del campo eléctrico con las

funciones de distribución de probabilidad del cuaternión aleatorio. Además sus valores medios deben corresponder a los promedios de ensamble de los parámetros de Stokes, de manera que, como un aspecto importante para destacar, es que esta metodología alterna permite caracterizar luz parcialmente polarizada la cual puede asociarse mediante cálculos explícitos sobre la esfera de Poincaré.

Capítulo 6

Descripción de luz parcialmente polarizada mediante distribuciones de cuaterniones: Simulación

En el capítulo anterior se presentó un modelo teórico para caracterizar fuentes de luz parcialmente polarizadas o no polarizadas mediante distribuciones de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré. Para eso fue necesario partir de un modelo matemático que permitió esquematizar todas las posibles realizaciones del campo eléctrico (Ver Fig(5.1)). Con ese modelo se encontró el cuaternión aleatorio para una de las realizaciones y a su vez en lugar de tener un ensamble que contenía las realizaciones del campo eléctrico se halló un ensamble de realizaciones cuaterniónicas (Ver Fig.(5.3)), y así poder obtener la distribución cuaterniónica sobre la esfera de Poincaré (Ver Fig.(5.4)) [50, 48, 45].

La distribución cuaterniónica sobre la esfera de Poincaré corresponde a una distribución de puntos, en donde cada punto es un estado de polarización bien definido y está caracterizado por los ángulos α , χ y el radio r . Esa distribución $\rho(2\alpha, 2\chi, r)$ mediante una transformación de coordenadas se obtiene la distribución $\rho(Q_1, Q_2, Q_3)$, la cual es proyectada sobre cada eje de la esfera para encontrar las distribuciones marginales correspondientes a las cuaterniones aleatorias Q_1 , Q_2 y Q_3 (Ver Fig.5.5), en donde cada uno de los valores esperado de las variables son los mismos que los promedios de ensamble del vector de Stokes (Ver Ecs. 5.20-5.22).

En este capítulo se utilizará una herramienta computacional para generar a manera de ejemplo un ensamble cuaterniónico para el cual se calcularón 500 realizaciones de todas las posibles emisiones de fuente. A partir del ensamble se encontrará el cuaternión

aleatorio para un tiempo determinado y así poder construir la distribución de puntos sobre la esfera de Poincaré. Posteriormente se obtendrán las correspondientes distribuciones marginales de cada cuaternión para finalmente comprobar que los promedios de ensamble de los parámetros de Stokes corresponde al valor esperado de las variables cuaterniónicas.

6.1. Simulación de una fuente de luz con estadística gaussiana

El modelo matemático que se explicó en la sección anterior, permite estudiar las variaciones de las componentes del campo eléctrico, mediante un conjunto Ω que contiene todas las posibles realizaciones de la fuente. En la figura (6.1) sólo se mostró dos de las posibles realizaciones de la fuente del conjunto Ω , las cuales se obtuvieron mediante una simulación (Ver Apéndice E). Además en la figura se puede apreciar que ambas señales son diferentes, sin embargo obedecen a la estadística de oscilación de la fuente, que en este caso corresponde a una estadística gaussiana.

Es usual caracterizar el vector aleatorio del campo eléctrico mediante promedios estadísticos como el promedio de ensamble. El promedio de ensamble de la auto-correlación de una de las componentes del campo eléctrico con el mismo, corresponde a una medida de la dependencia entre los valores de un proceso aleatorio en el mismo tiempo, es decir, que es una medida de la variación del campo eléctrico con el mismo en todas las emisiones de la fuente que se tuvieron en cuenta, mientras que la correlación cruzada mide la dependencia entre las dos componentes del campo eléctrico en un mismo tiempo. Los parámetros de Stokes lo que mide de una fuente son las auto-correlaciones y correlaciones cruzadas mediante promedios de ensamble a través de las ecuaciones:

$$\langle S_0 \rangle = \langle E_{0x}(t) \overline{E_{0x}(t)} + E_{0y}(t) \overline{E_{0y}(t)} \rangle_e, \quad (6.1)$$

$$\langle S_1 \rangle = \langle E_{0x}(t) \overline{E_{0x}(t)} - E_{0y}(t) \overline{E_{0y}(t)} \rangle_e, \quad (6.2)$$

$$\langle S_2 \rangle = \langle 2E_{0x}(t) \overline{E_{0y}(t)} \cos(\Delta\phi) \rangle_e, \quad (6.3)$$

$$\langle S_3 \rangle = \langle 2E_{0y}(t) \overline{E_{0x}(t)} \sin(\Delta\phi) \rangle_e. \quad (6.4)$$

En la simulación se obtienen los parámetros de Stokes midiendo promedios sobre el ensamble Ω que contiene sólo quinientas de las posibles realizaciones del campo eléctrico para un tiempo específico, en donde se obtuvo:

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,238 \\ 0,248 \\ 0,938 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Por otra parte, en los capítulos 3 y 5 se encontró el cuaternión que describe tanto luz polarizada como no polarizada en términos de las componentes del campo eléctrico. En la siguiente sección se encontrará el ensamble cuaterniónico a partir de las emisiones de la fuentes que componen el conjunto Ω .

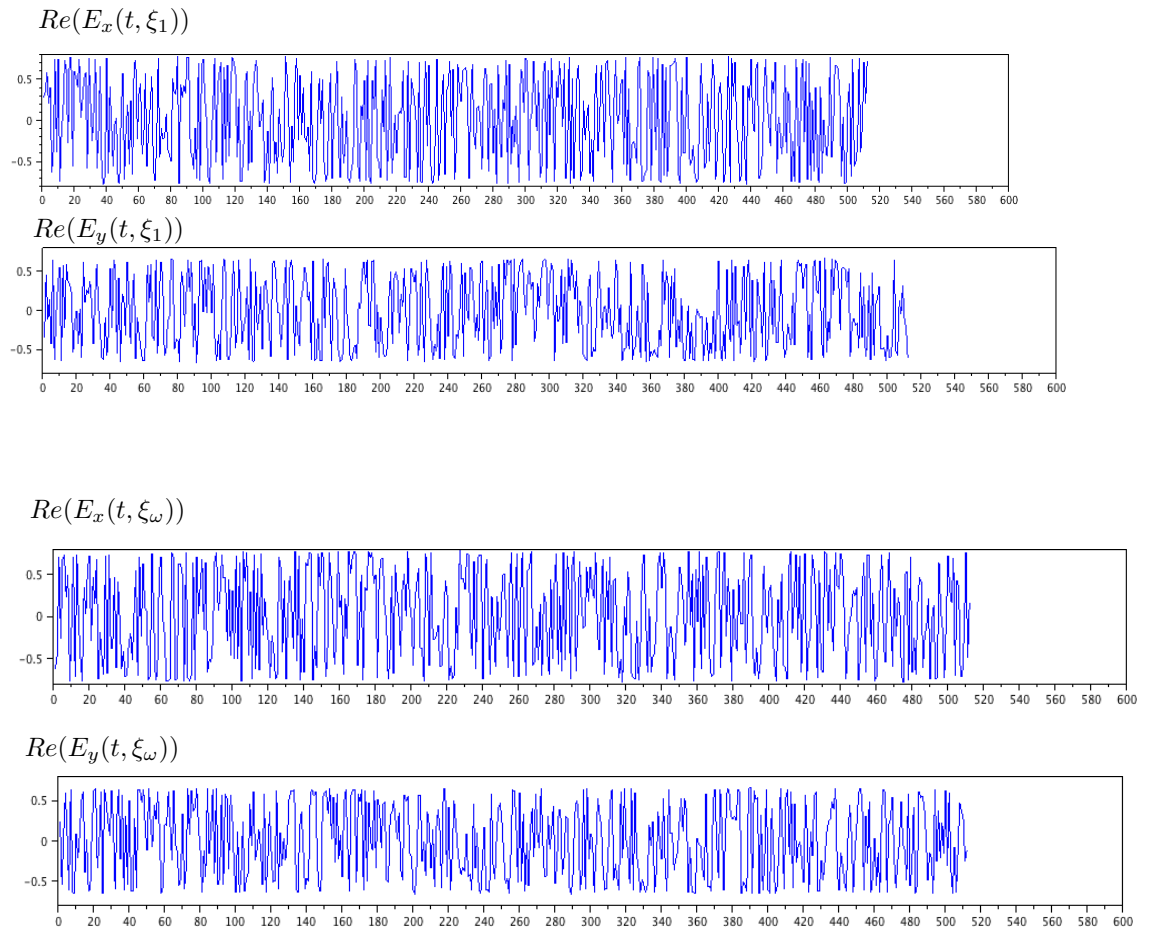


Figura 6.1: En la figura se muestra sólo dos de las 500 posibles realizaciones del campo eléctrico que se tuvieron en cuenta en la simulación, en donde se observa como fluctúa el campo para un intervalo de tiempo determinado. Además la fuente se realiza de acuerdo a la estadística de oscilación de las componentes del campo eléctrico, que en este caso corresponde a una estadística gaussiana

6.2. Distribución de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré.

Ahora bien, se procederá a hallar mediante las ecuaciones 5.5, 5.6 y 5.7 el cuaternión aleatorio de cada uno de las quinientas realizaciones que se tiene en cuenta en el proceso aleatorio, con el fin de obtener el ensamble cuaterniónico que se muestra en la Fig.(6.2), en donde se puede también ver que aunque las distribuciones de puntos varía un poco uno respecto a la otra, la función de distribución sobre la esfera no debe cambiar en cualquiera de la forma que se distribuyen los estados de polarización en el ensamble cuaterniónico, es decir las distribuciones de puntos sobre la esfera en un instante de tiempo fijo es casi la misma para todos los instantes de tiempos, sin embargo, el valor medio se mantiene invariante en el tiempo, de ahí que se dice que el proceso aleatorio es un proceso estacionario en el sentido amplio.

A partir de la Fig.(6.2) se obtiene la variable aleatoria $Q(t_0)$ la cual va a formar la distribución de puntos sobre la esfera de Poincaré que caracteriza la fuente de luz, y estará limitada por el grado de polarización que presente la fuente (Ver figura 5.4), tal distribución de puntos le corresponde una función de distribución de probabilidad, la cual mediante una transformación de coordenadas se obtienen las distribuciones de probabilidad y probabilidad conjunta de la variable aleatoria proyectada sobre cada eje Fig.(5.5) de la esfera.

Las distribuciones de probabilidad de la variable aleatoria $Q(t_0)$ del proceso, se obtienen mediante la asignación de todo el conjunto Ω en un instante de tiempo. Un parámetro que permite obtener información sobre las funciones de distribución es el valor esperado, el cual arrojó los siguientes resultados

$$\langle Q_1 \rangle_e = i0,238\hat{e}_1, \quad (6.6)$$

$$\langle Q_2 \rangle_e = i0,247\hat{e}_2, \quad (6.7)$$

$$\langle Q_3 \rangle_e = i0,936\hat{e}_3. \quad (6.8)$$

Lo anterior demuestra que el valor más probable de las funciones de distribución del cuaternión aleatorio, corresponden al promedio de ensamble del vector de Stokes. Un resultado bastante importante, ya que aunque los parámetros de stokes pueden caracterizar fuentes de luz parcialmente polarizada como no polarizada mediante un vector, no

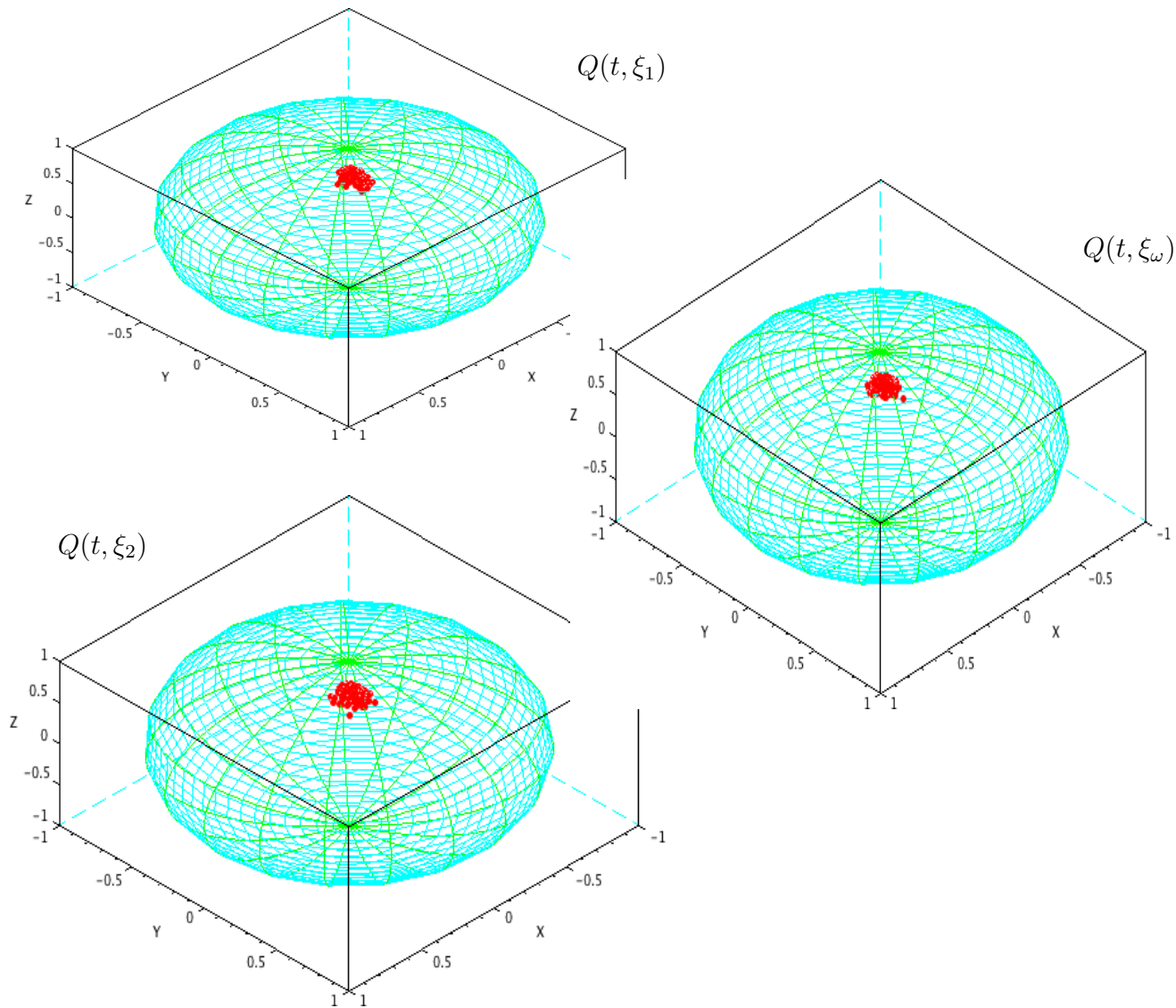


Figura 6.2: Representación de la evolución temporal de sólo tres de las quinientas posibles realizaciones del cuaternión aleatorio que conforma el conjunto Ω .

brinda información acerca de la estadística de oscilación de las componentes del campo eléctrico de la fuente.

El grado de polarización que caracteriza la fuente es:

$$P = 0,98. \quad (6.9)$$

El cual se obtiene sólo teniendo en cuenta dos cifras significativas de los resultados obtenidos de los promedios.

Finalmente en este capítulo se demostró que las distribuciones de probabilidad que se

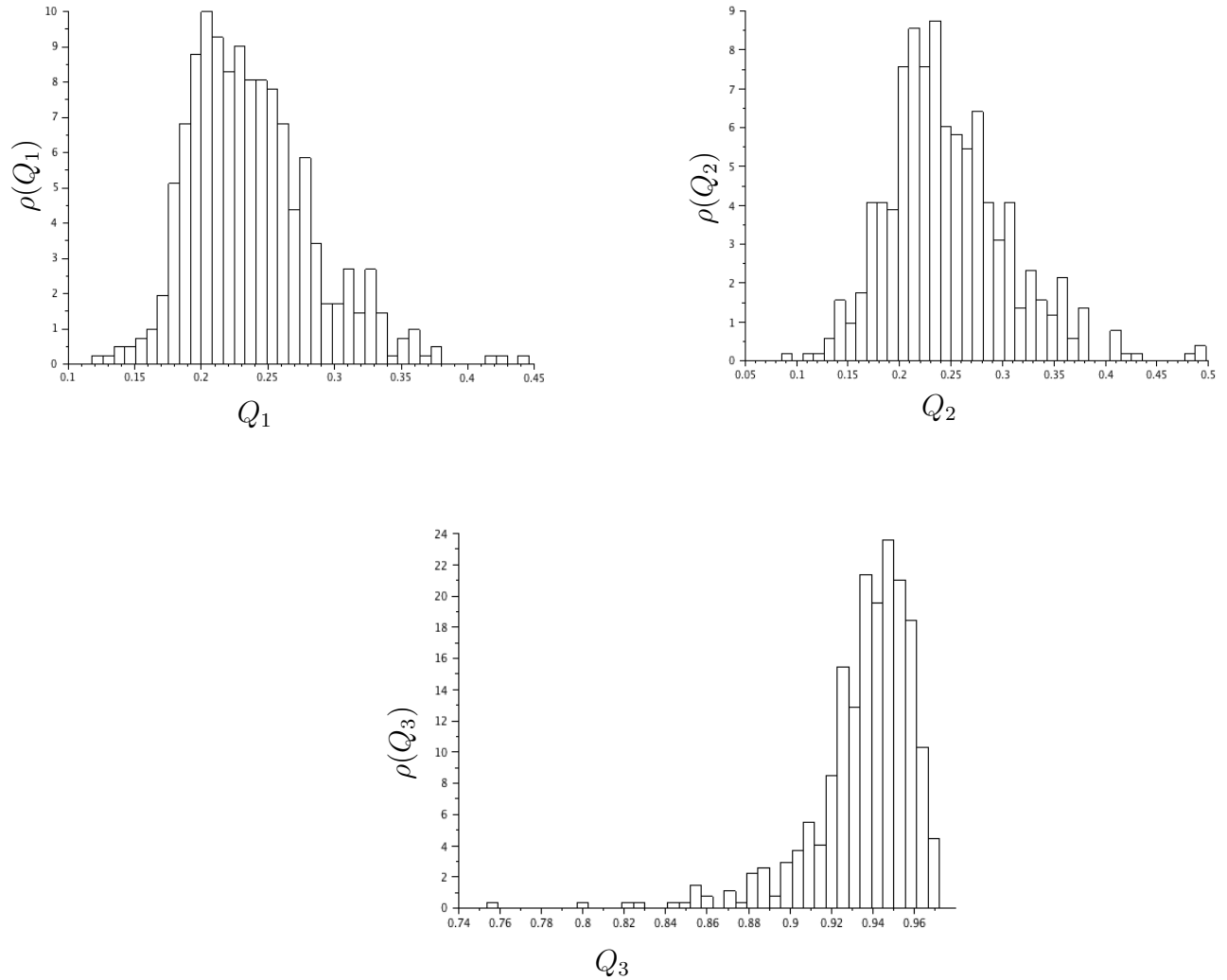


Figura 6.3: Representación de la distribución de probabilidad de cada variable cuaterniónica en forma de barras, en donde la superficie de cada barra indica la probabilidad de los valores que puede tomar cada variable.

encuentran a partir de la proyección sobre cada eje de la esfera, representadas mediante un histogramas muestran los posibles valores que toma cada cuaternión aleatorio y además que el valor medio de cada distribución de probabilidad arroja como resultado los promedios de ensamble del vector de Stokes. Un aspecto importante es que esta metodología utilizada permite estudiar fuentes con polarización parcial o no polarizadas mediante distribuciones de probabilidad que se adapta al método gráfico de la esfera de Poincaré.

En el siguiente capítulo se presentará otra simulación y mediante la cual se responderán las siguientes preguntas **Dos fuentes estadísticamente diferentes pueden tener el mismo vector de Stokes?**, y si es así puede el método algebraico de Stokes diferenciar entre estas dos fuentes?.

Capítulo 7

Fuentes con diferentes distribuciones de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré: Simulación

En este capítulo se presentará mediante una simulación (Ver Apéndice F), en la cual se mostrará que dos fuentes con distribuciones totalmente diferentes sobre la esfera las caracteriza el mismo vector de Stokes.

7.1. Distribuciones para luz parcialmente polarizada

A continuación se presentarán dos diferentes fuentes de luz parcialmente polarizada, de manera que las distribuciones de puntos sobre la esfera de Poincaré asociada a dichas fuentes presentan una geometría totalmente diferente, las cuales se obtienen de generar un ensamble Ω de algunas de las 500 posibles emisiones del campo eléctrico, donde las fluctuaciones aleatorias de la fase y la amplitud del campo eléctrico se representan en la gráfica 7.1, la gráfica de la parte *a*) corresponde a las variaciones aleatorias del campo eléctrico de la primera fuente, y en la parte *b*) las fluctuaciones correspondientes a la fuente 2.

Se obtienen los vectores de Stokes midiendo promedios sobre el ensamble Ω que se contiene sólo quinientas de las posibles realizaciones del campo eléctrico para un tiempo específico en la simulación, en donde se obtuvo el vector de Stokes de la primera fuente

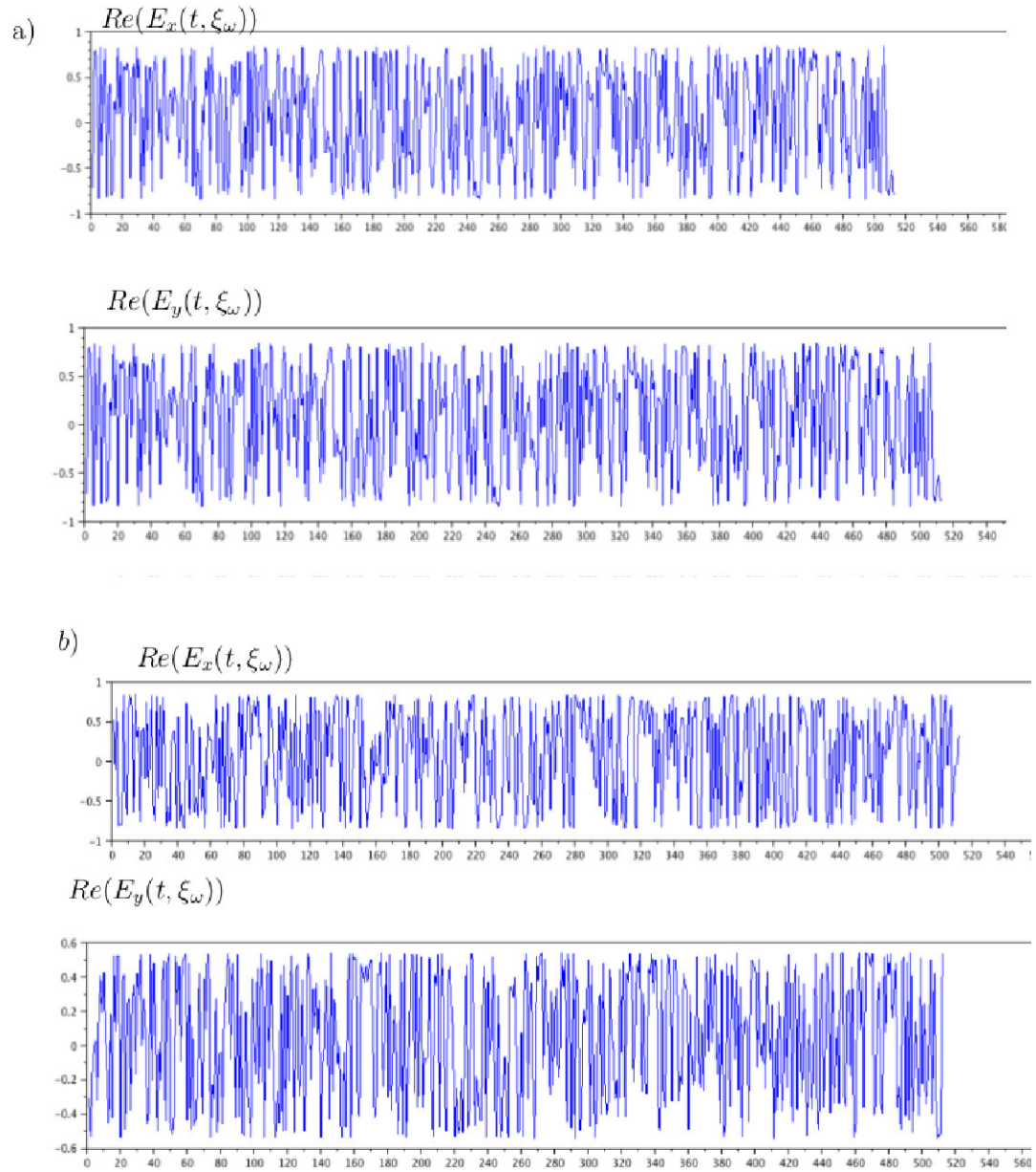


Figura 7.1: Representación de las oscilaciones aleatorias del campo eléctrico. Las emisiones espontáneas de la gráfica a) corresponde a la primera fuente para un intervalo de tiempo determinado y de la b) la realización del campo para la fuente dos.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,403 \\ 0,260 \\ 0,877 \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

El vector de Stokes de la segunda fuente

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,402 \\ 0,266 \\ 0,875 \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Lo anterior muestra que las dos fuentes que se realizan de manera diferente en el tiempo, tiene el mismo vector de Stokes si se tiene en cuenta sólo dos cifras significativas. En la siguiente sección se representará a través de distribuciones de cuaterniones las fluctuaciones aleatorias de cada fuente.

7.2. Distribución de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré de cada fuente.

Teniendo el ensamble de todas las posibles emisiones de cada una de las fuentes, se procederá a encontrar el ensamble pero de realizaciones cuaterniónicas, de la misma manera que se hizo en los dos últimos capítulos. Por lo tanto, en la figura (Ver fig.7.2) se muestra de manera gráfica la representación del cuaternión aleatorio del ensamble para un tiempo fijo, correspondiendo a la distribución de puntos.

Ahora, una vez se tiene la distribución de puntos asociada a cada fuente, la cual se llevo desde el plano hasta la esfera de Poincaré mediante una proyección estereográfica (Ver Apéndice B), en donde cada punto está caracterizado por los ángulos α , χ y r , se busca encontrar las distribuciones sobre cada eje de cuaternión, donde su valor medio o su valor más probable coincide con los parámetros de Stokes. Para encontrar dichas distribuciones se hace mediante una transformación de coordenadas (Ver Ec.5.14), logrando así obtener las siguientes distribuciones para cada una de las fuentes. Las distribuciones que se van a obtener no se encontraron por un método analítico sino mediante una simulación que permite encontrar las distribuciones de probabilidad proyectadas sobre cada cuaternión aleatorio y además calcular el valor más probable de la función de probabilidad y los valores medios que corresponden a los parámetros de Stokes.

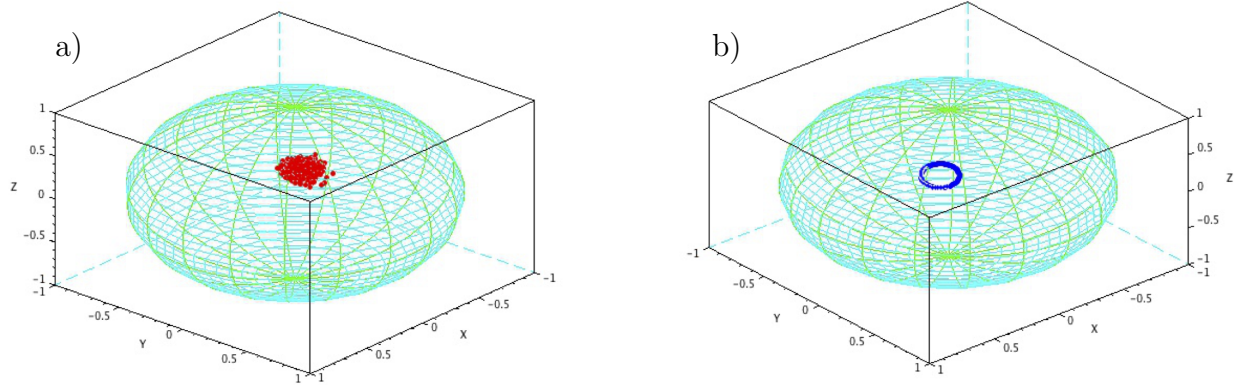


Figura 7.2: Representación gráfica de las distribuciones de puntos asociados a las fluctuaciones del campo eléctrico de dos fuentes de luz parcialmente polarizadas. En la figura *a*) se representa la forma geométrica de la distribución de puntos asociado a una de las fuentes, tal que corresponde a una distribución gaussiana. En la figura *b*) se representa la distribución de puntos correspondiente a la otra fuente, donde se puede observar que la distribución que la caracteriza tiene forma de anillo.

En la figura 7.3 se muestran la función de probabilidad de los cuaterniones Q_1 , Q_2 y Q_3 son representadas mediante histogramas, que corresponde a las proyecciones de la distribución de puntos sobre la esfera de Poincaré (Ver a) de la fig.7.2) de la primera fuente, las cuales como se puede ver corresponde a una distribución, donde sus valores medios de las variables Q_1 , Q_2 y Q_3 aleatorias que se obtienen por un algoritmo son:

$$\langle Q_1 \rangle_e = i0,405\hat{e}_1, \quad (7.3)$$

$$\langle Q_2 \rangle_e = i0,260\hat{e}_2, \quad (7.4)$$

$$\langle Q_3 \rangle_e = i0,876\hat{e}_3, \quad (7.5)$$

En la figura 7.4 se muestran la distribución de probabilidad de los cuaterniones Q_1 , Q_2 y Q_3 correspondiente a la segunda fuente, la cual sobre la esfera la distribución de puntos forma un anillo (Ver la parte b de la fig.7.2) donde sus valores medios son:

$$\langle Q_1 \rangle_e = i0,402\hat{e}_1, \quad (7.6)$$

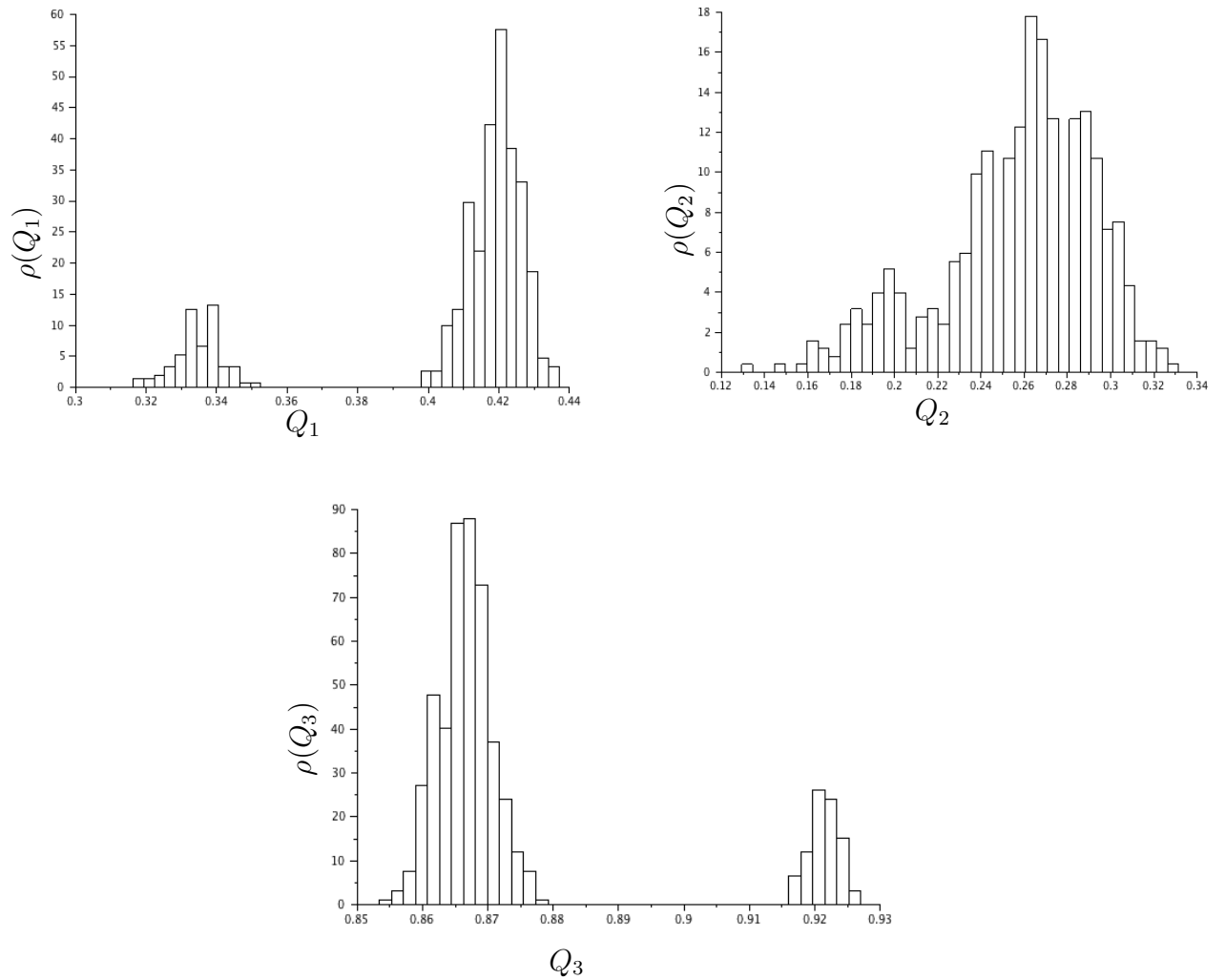


Figura 7.3: Se muestra en cada gráfica un histograma el cual es una representación de cada uno de los cuaterniones aleatorios Q_1 , Q_2 y Q_3 , indicando cuales valores son más probables con respecto a otros, obteniendo así las distribuciones sobre cada eje de la esfera de Poincaré correspondiente a la función de distribución gaussiana multivariable.

$$\langle Q_2 \rangle_e = i0,266\hat{e}_2, \quad (7.7)$$

$$\langle Q_3 \rangle_e = i0,875\hat{e}_3. \quad (7.8)$$

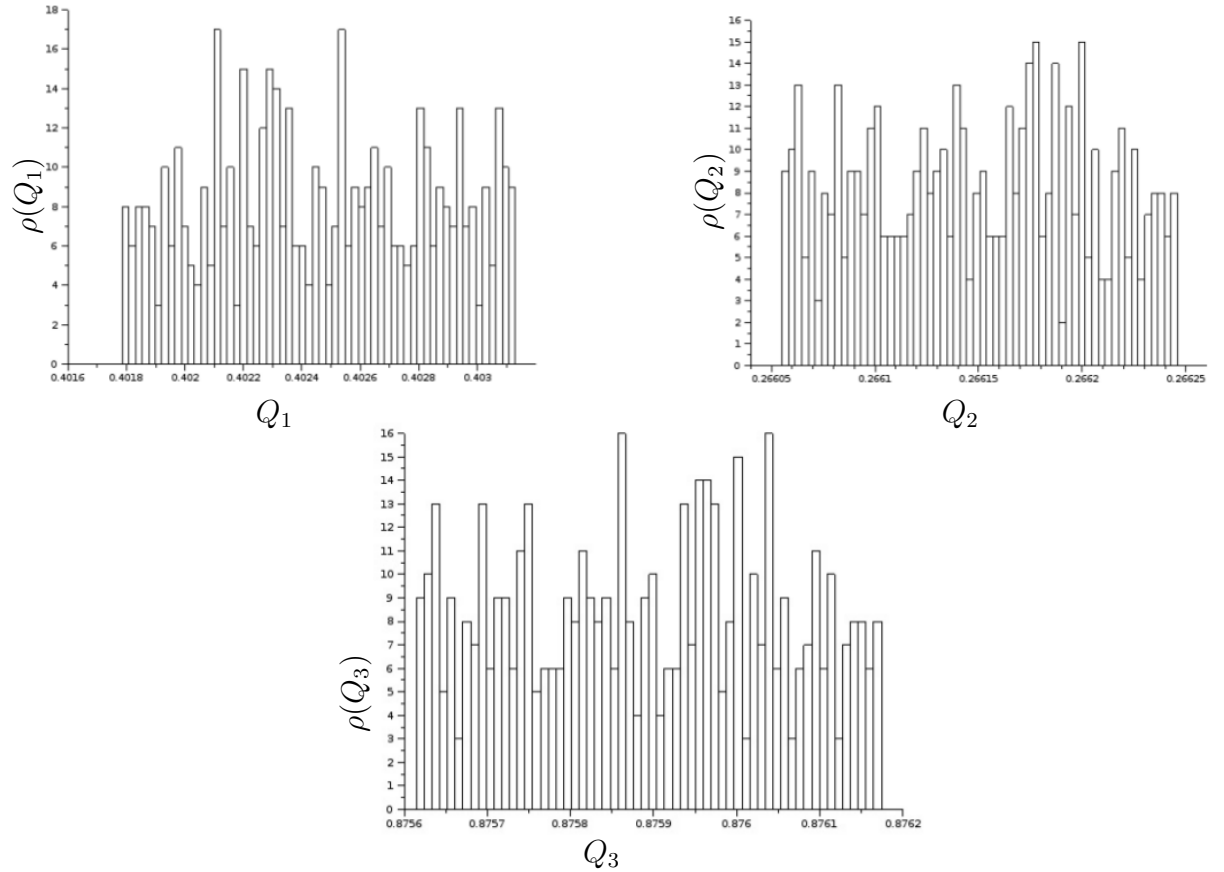


Figura 7.4: Se muestra en cada gráfica un histograma, que representa la función de probabilidad sobre cada uno de los cuaterniones aleatorios Q_1 , Q_2 y Q_3 , indicando cuales valores son más probables con respecto a otros de la función de distribución en forma de anillo sobre la esfera de Poincaré.

Mostrando que ambas fuentes tienen los mismos valores medios (si se tienen en cuenta sólo dos cifras significativas) aunque las oscilaciones del campo eléctrico generen sobre la esfera distribución totalmente diferentes.

El grado de polarización

$$P_1 = 0,99, \quad (7.9)$$

correspondiente a las dos fuentes, el cual se obtiene sólo teniendo en cuenta dos cifras significativas de los resultados obtenidos de los promedios de ensamble del vector de Stokes o del valor esperado de de los cuaterniones.

Los resultados muestran una limitación de los vectores de Stokes, ya que aunque permite medir estados de polarización para luz parcialmente polarizada, no pueden diferenciar entre fuentes con diferentes distribuciones de polarización y el mismo grado de polarización. La metodología alternativa que se propone en este trabajo de investigación puede diferenciar entre estas dos fuentes mediante distribuciones de polarización sobre la esfera de Poincaré.

Capítulo 8

Conclusiones

El principal resultado en este trabajo de investigación es la construcción de una metodología alterna que permite describir fuentes de luz parcialmente polarizadas mediante distribuciones de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré. A continuación se presentan los aspectos más relevantes que se obtuvieron en el desarrollo de la metodología

- Obtención del cuaternión aleatorio (Ver Cap.(5)) que representa la distribución de polarización (o distribución de puntos) sobre la esfera de Poincaré, completa el método algebraico de cuaterniones para describir fuentes parcialmente polarizadas, polarizadas y no polarizadas.
- La distribución de puntos que se forma sobre la esfera de Poincaré representa la estadística de emisión propia de cada fuente de luz, a la cual le corresponde una función de distribución de polarización, permitiendo mediante distribuciones sobre la esfera acoplar la representación del método gráfico con el método algebraico de cuaterniones.
- Las distribuciones marginales sobre cada eje del cuaternión aleatorio (Ver gráfica 5.5) caracterizan a una fuente de luz con cualquier grado de polarización, y en donde su valor medio coincide con los promedios de ensamble de los parámetros de Stokes, como se mostró en el capítulo 5.

Además de presentar de manera analítica la descripción de luz parcialmente polarizada mediante distribuciones de cuaterniones, se ilustró el método por simulaciones que han mostrado la concordancia entre la teoría y los fenómenos físicos relacionados. Los

resultados de esta metodología se acoplan con cálculos explícitos con la esfera de Poincaré permitiendo caracterizar luz parcialmente polarizada a través de distribuciones de probabilidad. También se evidencia una limitación más del método algebraico de Stokes ya que aunque permite medir el estado de polarización para fuentes de luz parcialmente polarizadas o no polarizadas, no pueden diferenciar entre fuentes con diferentes distribuciones de polarización, pero que el vector de Stokes sea el mismo, es decir que tengan el mismo grado de polarización.

Se propone como una aplicación caracterizar materiales en función de la dispersión de distribución de polarización, que este introduce en fuentes con diferentes distribuciones, ya que la formulación de la luz mediante distribuciones de probabilidad que se desarrollo en el trabajo de investigación, permite diferenciar entre fuentes con diferente distribución pero que tienen el mismo vector de Stokes.

Otro desarrollo que se podría aplicar en futuros trabajos de investigación es abordar el estudio de un tratamiento unificado entre la coherencia del campo eléctrico y las distribuciones de polarización de las fuentes.

Bibliografía

- [1] A. V. Boris, Y. Matiks, E. Benckiser, A. Frano, P. Popovich, V. Hinkov, P. Wochner, M. Castro-Colin, E. Detemple, V. K. Malik, C. Bernhard, T. Prokscha, A. Suter, Z. Salman, E. Morenzoni, G. Cristiani, H.-U. Habermeier, and B. Keimer, Dimensionality Control of Electronic Phase Transitions in Nickel-Oxide Superlattices, *Science* **332**(6032), 937–940 (2011).
- [2] H. Y. Fu, S. K. Khijwania, H. Y. Au, X. Dong, H. Y. Tam, P. K. A. Wai, and C. Lu, Novel fiber optic polarimetric torsion sensor based on polarization-maintaining photonic crystal fiber, *Proc. SPIE* **7004**, 70042V–70042V–4 (2008).
- [3] Z. Dai, X. Zhang, Z. Peng, J. Li, Z. Ou, and Y. Liu, Distributed fiber optic stress sensor system based on P-OFDR, *Proc. SPIE* **7659**, 765914–765914–6 (2010).
- [4] J. Xue, C. S. Jung, and M. W. Kim, Phase transitions of liquid-crystal films on an air-water interface, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 474–477 (Jul 1992).
- [5] K. Ragil, J. Meunier, D. Broseta, J. O. Indekeu, and D. Bonn, Experimental Observation of Critical Wetting, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1532–1535 (Aug 1996).
- [6] B. Gompf, J. Braun, T. Weiss, H. Giessen, M. Dressel, and U. Hübner, Periodic Nanostructures: Spatial Dispersion Mimics Chirality, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 185501 (May 2011).
- [7] P. E. Gaskell, H. S. Skulason, W. Strupinski, and T. Szkopek, High spatial resolution ellipsometer for characterization of epitaxial graphene, *Opt. Lett.* **35**(20), 3336–3338 (Oct 2010).
- [8] C.-C. Tsai, H.-C. Wei, S.-L. Huang, C.-E. Lin, C.-J. Yu, and C. Chou, High speed interferometric ellipsometer, *Opt. Express* **16**(11), 7778–7788 (May 2008).
- [9] G. L. J. A. Rikken and E. Raupach, Observation of magneto-chiral dichroism, *Nature* **390**(6659), 493–494 (12 1997).

- [10] H. Rhee, Y.-G. June, J.-S. Lee, K.-K. Lee, J.-H. Ha, Z. H. Kim, S.-J. Jeon, and M. Cho, Femtosecond characterization of vibrational optical activity of chiral molecules, *Nature* **458**(7236), 310–313 (03 2009).
- [11] A. H. Gnauck, G. Charlet, P. Tran, P. J. Winzer, C. R. Doerr, J. C. Centanni, E. C. Burrows, T. Kawanishi, T. Sakamoto, and K. Higuma, 25.6-Tb/s WDM Transmission of Polarization-Multiplexed RZ-DQPSK Signals, *J. Lightwave Technol.* **26**(1), 79–84 (Jan 2008).
- [12] P. Pellat-Finet, *De la biréfringence elliptique*, Tesis,, 1983.
- [13] W. A. Shurcliff, *Polarized Light*, Oxford University Press, 1962.
- [14] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, *Ellipsometry and Polarized Light*, North-Holland, 1977.
- [15] E. Wolf, *Theory of Coherence and Polarization of Light*, Cambridge University Press, 2007.
- [16] C. Brosseau, *Fundamentals of POLARIZED LIGHT A Statistical Optics Approach*, JHON WILEY and SONS, INC., 1998.
- [17] K. K. Sharma, *Optics PRINCIPLES AND APPLICATIONS*, ELSEVIER, 2006.
- [18] A. Kumar and A. Ghatak, *Polarization of Light with Applications in Optical Fibers*, SPIE PRESS, 2011.
- [19] D. Goldstein, *Polarized Light*, Copyright, 2003.
- [20] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, Cambridge University Press, 1999.
- [21] E. Hecht, *Optics*, Pearson Education, 2012.
- [22] J. Goodman, *Statistical Optics*, A Wiley-Interscience publication, Wiley, 2000.
- [23] A. S. HATHAWAY, *A PRIMER OF QUATERNIONS*, Copyright, 1986.
- [24] A. J. HANSON, *VISUALIZING QUATERNIONS*, ELSEVIER, 2006.
- [25] P. Pellat-Finet, Représentation des états et des Opérateurs de Polarisation de la Lumière Par des Quaternions, *Optica Acta* **31**(4), 415–434 (1984).

- [26] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1995.
- [27] E. Wolf, *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*, Cambridge University Press, 2007.
- [28] A. M. Beckley, T. G. Brown, and M. A. Alonso, Full Poincaré beams II: partial polarization, *Opt. Express* **20**(9), 9357–9362 (2012).
- [29] E. Collett, *Field Guide to Polarization*, Spie Press, 2005.
- [30] K. K. Tedjojuwono, W. W. Hunter, and S. L. Ocheltree, Planar Poincaré Chart: a planar graphic representation of the state of light polarization, *Appl. Opt.* **28**(13), 2614–2622 (1989).
- [31] R. C. JONES, A New Calculus for the Treatment of Optical Systems, *J. Opt. Soc. Am.* **31**(7), 488–493 (Jul 1941).
- [32] E. Wolf, Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams, *Phys. Lett. A* **312**(5–6), 263–267 (2003).
- [33] J. Ellis, A. Dogariu, S. Ponomarenko, and E. Wolf, Correlation matrix of a completely polarized, statistically stationary electromagnetic field, *Opt. Lett.* **29**(13), 1536–1538 (2004).
- [34] E. Collett and B. Schaefer, Visualization and calculation of polarized light. I. The polarization ellipse, the Poincaré sphere and the hybrid polarization sphere, *Appl. Opt.* **47**(22), 4009–4016 (2008).
- [35] A. G. Weidner, The Poincare sphere: isolated and real trajectories describing the state of polarization, *J. Opt.* **23**(1), 3–12 (1992).
- [36] P. P.-f. b. Yves Souche a and A. Saadaoui, Compensation Dynamique Entre Deux Biréfringents Application à La Mesure De Léffet Faraday, *Optica Acta* **33**(3), 327–338 (1986).
- [37] L. Ainola and H. Aben, Transformation equations in polarization optics of inhomogeneous birefringent media, *J. Opt. Soc. Am. A* **18**(9), 2164–2170 (2001).
- [38] T. Voipio, T. Setälä, and A. T. Friberg, Polarization changes in temporal imaging with pulses of random light, *Opt. Express* **21**(7), 8987–9004 (2013).

- [39] L. Nikolova and P. S. Ramanujam, *Polarization Holography*, Cambridge University Press, 2009.
- [40] J. N. Damask, *Polarization Optics in Telecommunications*, Springer, 2004.
- [41] A. Al-Qasimi, O. Korotkova, D. James, and E. Wolf, Definitions of the degree of polarization of a light beam, *Opt. Lett.* **32**(9), 1015–1016 (2007).
- [42] R. Espinosa-Luna, Degree of polarization as a criterion to obtain the nine bilinear constraints between the Mueller-Jones matrix elements, *Appl. Opt.* **46**(24), 6047–6054 (2007).
- [43] H. Fujiwara, *Spectroscopic Ellipsometry Principles and Applications*, Wiley, 2007.
- [44] L. B. Castaneda, *Probabilidad*, Universidad Nacional de Colombia, 2010.
- [45] H. Hsu, *Schaum's outline of theory and problems of probability, random variables, and random processes*, Schaum's outline series, McGraw-Hill, 1997.
- [46] H. Kobayashi, B. Mark, and W. Turin, *Probability, Random Processes, and Statistical Analysis: Applications to Communications, Signal Processing, Queueing Theory and Mathematical Finance*, EngineeringPro collection, Cambridge University Press, 2011.
- [47] S. Miller and D. Childers, *Probability and Random Processes: With Applications to Signal Processing and Communications*, Elsevier Science, 2012.
- [48] V. Krishnan, *Probability and Random Processes*, Wiley Survival Guides in Engineering and Science, Wiley, 2006.
- [49] J. A. Gubner, *Probability and random processes for electrical and computer engineers*, Cambridge University Press., New York, Cambridge, 2006.
- [50] W. C. van Etten, *Introduction to Random Signals and Noise*, Wiley, 2005.

Apéndices

Apéndice A

Álgebra de los cuaterniones

A.1. A: Los cuaterniones

A.1.1. Los cuaterniones de Hamilton

Los cuaterniones de Hamilton o cuaterniones reales son considerados una extensión de los números complejos a un espacio de cuatro dimensiones, en donde cada cuaternión está compuesto por una parte real (s) y tres imaginarias (\mathbf{v}):

$$q = s + \mathbf{v} = q_0 + q_1\hat{e}_1 + q_2\hat{e}_2 + q_3\hat{e}_3. \quad (\text{A.1})$$

Los números q_0 , q_1 , q_2 y q_3 son reales. La parte escalar en \mathfrak{H} se considera un subespacio de \mathfrak{R}^4 , ya que la parte vectorial del espacio es cero y se dice que es un cuaternión escalar. De la misma forma todo vector en \mathfrak{R}^3 es un elemento de \mathfrak{R}^4 , en donde su parte escalar es nula y es llamado un cuaternión puro.

Propiedades de los cuaterniones

- Cuaternión conjugado

El cuaternión conjugado se define como:

$$q^* = s - \mathbf{v} = q_0 - q_1\hat{e}_1 - q_2\hat{e}_2 - q_3\hat{e}_3. \quad (\text{A.2})$$

- Inverso de un Cuaternión

Dado el cuaternión q se define su respectivo cuaternión inverso q^{-1} , de la forma:

$$q^{-1} = \frac{q}{\|q\|}. \quad (\text{A.3})$$

- La norma de un cuaternión

$$N(q) = qq^* = s^2 + \|\mathbf{v}\|^2. \quad (\text{A.4})$$

Si la norma de un cuaternión es 1 es llamado un cuaternión unitario. Además si se tiene un cuaternión puro con su norma igual a 1 se dice que es un cuaternión puro unitario.

- Forma exponencial de un cuaternión

Se define un cuaternión cualquiera q :

$$e^q = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \dots + \frac{q^n}{n!} + \dots. \quad (\text{A.5})$$

Siendo la serie siempre convergente. Ahora, dado un cuaternión puro unitario \hat{e}_n , y un ángulo θ real, se tiene:

$$e^{\hat{e}_n \theta} = \cos \theta + \hat{e}_n \sin \theta, \quad (\text{A.6})$$

por la ecuación anterior se puede ver que los cuaterniones unitarios puros son una generalización del número complejo i .

Álgebra de los cuaterniones

- Suma y resta de los cuaterniones

Los cuaterniones se suman o se restan término a término

$$q_1 \pm q_2 = (s_1 \pm s_2) + \mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2. \quad (\text{A.7})$$

- El producto cuaterniónico

Sean los cuaterniones $q_1 = s_1 + \mathbf{v}_1$ y $q_2 = s_2 + \mathbf{v}_2$ dos elementos de \mathfrak{R}^4 . El producto cuaterniónico se define como:

$$q_1 q_2 = s_1 s_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \quad (\text{A.8})$$

en donde \hat{e}_1, \hat{e}_2 y \hat{e}_3 , cumplen:

$$\hat{e}_1^2 = \hat{e}_2^2 = \hat{e}_3^2 = \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 = -1. \quad (\text{A.9})$$

El producto entre cuaterniones no es conmutativo, debido al producto vectorial.

Representación cuaterniónica de una rotación en \mathfrak{R}^3

Los cuaterniones unitarios puros permiten describir matemáticamente las rotaciones de "objetos" en tres dimension \mathfrak{R}^3 . Éstos son de gran importancia debido a que a través de ellos representar rotaciones en \mathfrak{R}^3 es más sencillo comparando con los ángulos de Euler, ya que una rotación de Euler implica tener en cuenta las tres matrices de rotación, mientras que una rotación cuaterniónica se determina en términos de la parte vectorial de \hat{e}_n que son las componentes de cualquier eje y de un ángulo de rotación.

Los cuaterniones complejos

Los cuaterniones complejos están definidos matemáticamente de la misma forma que los cuaterniones de Hamilton, excepto por los números q_0, q_1, q_2 y q_3 definidos en la Ec.(A.1) que son complejos. Las base canónica compuesta por cuatro vectores, en el espacio complejo C^4 , son:

$$\hat{e}_0 = (1, 0, 0, 0), \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{e}_1 = (0, \sqrt{-1}, 0, 0), \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{e}_2 = (0, 0, \sqrt{-1}, 0), \quad (\text{A.12})$$

$$\hat{e}_3 = (0, 0, 0, \sqrt{-1}). \quad (\text{A.13})$$

Se introduce el vector unitario $\hat{e}_0 = 1$, para incluir una simetría.

Propiedades de los cuaterniones complejos

- Cuaternión complejo conjugado

El cuaternión complejo conjugado se define como:

$$\bar{q} = \bar{q}_0 e_0 + \bar{q}_1 e_1 + \bar{q}_2 e_2 + \bar{q}_3 e_3. \quad (\text{A.14})$$

Comparando la ecuación anterior con la Ec.(A.2) del cuaternión conjugado de Hamilton son diferentes, y en general se pueden combinar y cumple con la propiedad conmutativa; es decir:

$$\bar{q}^* = (\bar{q}^*) = \bar{q}_0 e_0 - \bar{q}_1 e_1 - \bar{q}_2 e_2 - \bar{q}_3 e_3. \quad (\text{A.15})$$

Apéndice B

Proyección estereográfica

La Proyección estereográfica es una herramienta matemática que permite construir geoméricamente estados de polarización de una onda de luz polarizada sobre la esfera de Poincaré. En el capítulo 2 se relacionó las características principales de la elipse con los ángulos α y χ , mostrando como resultado que un punto sobre la esfera de Poincaré no es más que un estado de polarización bien definido.

En la figura B.1 se muestra la proyección estereográfica, en donde el plano coincide con el ecuador de la esfera que tiene de centro el origen. El polo de proyección en este caso es el polo norte $N(0, 0, 1)$ y el punto sobre el plano $P(u, v)$ se conectan mediante una línea recta que pasa por un punto sobre la esfera $Q(Q_1, Q_2, Q_3)$. Estos puntos se pueden escribir paraméricamente de la forma

$$(Q_1, Q_2, Q_3) - (0, 0, 1) = t[(u, v) - (0, 0, 1)]. \quad (\text{B.1})$$

De la ecuación anterior se encuentra

$$Q_1 = ut, \quad (\text{B.2})$$

$$Q_2 = vt, \quad (\text{B.3})$$

$$Q_3 = 1 - t. \quad (\text{B.4})$$

Despejando t de la última ecuación e introduciéndola en las Ecs.(B.2, B.3), se obtiene:

$$u = \frac{Q_1}{1 - Q_3}, \quad v = \frac{Q_2}{1 - Q_3}. \quad (\text{B.5})$$

Las coordenadas del punto Q sobre la esfera de Poincaré en términos de los ángulos α y χ son:

$$Q_1 = \cos(2\chi) \cos(2\alpha), \quad Q_2 = \cos(2\chi) \sin(2\alpha), \quad Q_3 = \sin(2\chi). \quad (\text{B.6})$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la Ec.B.5, se obtiene finalmente la proyección del punto $P(u, v)$ sobre la esfera de Poincaré. La expresión matemática del punto P proyectado sobre la esfera está dado por:

$$u = \cot(\pi/4 - \chi) \cos(2\alpha), \quad v = \cot(\pi/4 - \chi) \sin(2\alpha). \quad (\text{B.7})$$

De acuerdo a lo anterior, se concluye que todo punto que están sobre el plano le corresponde un punto sobre la esfera de Poincaré, excepto el polo de proyección, esto se conoce como una singularidad y es llamada como un punto en el infinito.

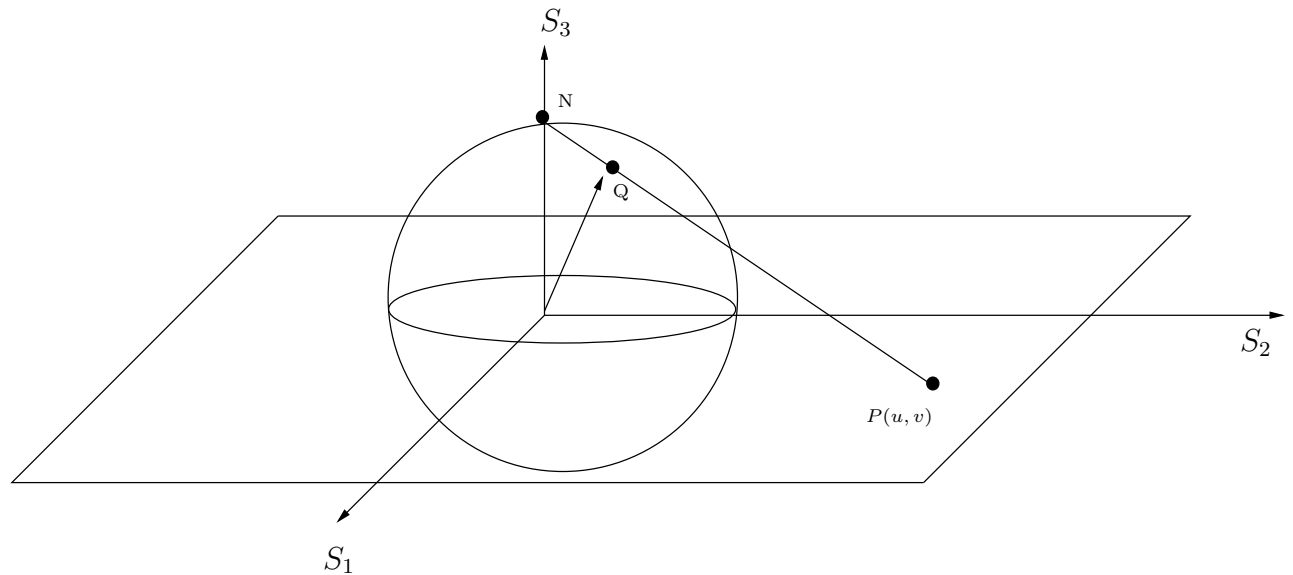


Figura B.1: La proyección se construye de tal manera que el plano coincida con el ecuador de la esfera y se supone que un punto sobre el plano está unido con el polo norte a través de una línea recta. Esta proyección estereográfica muestra como todos los puntos que descansan sobre el plano le corresponde un punto sobre la esfera de Poincaré, excepto uno llamado el polo de proyección, que en este caso es el polo norte de la esfera.

Se define el punto proyectado sobre la esfera de Poincaré como un estado de polarización bien definido, dado por el vector

$$P = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

El punto $P(u, v)$ proyectado sobre la esfera corresponden al vector de Jones y está relacionado con los parámetros de Stokes de acuerdo a las ecuaciones vistas en la capítulo [2](#).

Apéndice C

Nociones de señales aleatorias y teoría de las probabilidades

C.1. Procesos aleatorios

Las funciones deterministas son aquellas que asignan siempre el mismo resultado a la función $X(t)$ para un valor de t , mientras que las funciones no deterministas o funciones aleatorias puede dar resultados que no siempre son los mismo para un valor de t y se le da el nombre de variable aleatoria (Ver figura [C.1](#)). La función completa $X(t)$, es decir tener en cuenta todas las posibles realizaciones del ensamble se conoce como un proceso aleatorio o señal aleatoria.

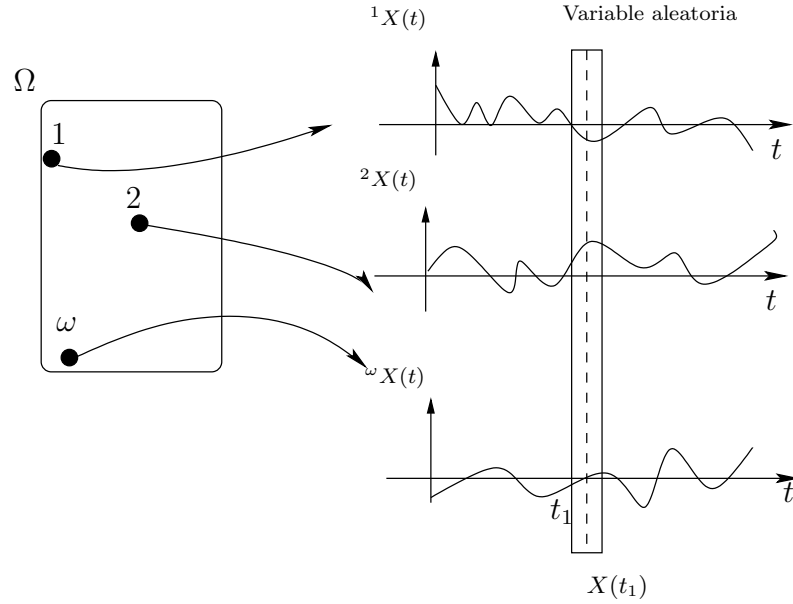


Figura C.1: Sea Ω un conjunto de todas las posibles realizaciones de un experimento de la variable $X(t)$, en donde para el tiempo t_1 cada una de las realizaciones toma un valor diferente para X , por lo tanto si se tiene en cuenta todo el ensamble para dicho tiempo, eso se conoce como una variable aleatoria $X(t_1)$.

Una **V.A** está caracterizada por la función de distribución $F_X(x)$, en donde la probabilidad la **V.A** tenga un valor entre x y $x + \varepsilon$ esta dada por:

$$P(x \leq X < x + \varepsilon) = F_X(x + \varepsilon) - F_X(x). \quad (\text{C.1})$$

Definiendo así la distribución de probabilidad (Ver figura C.2), dada por la siguiente ecuación:

$$p_X(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \varepsilon) - F_X(x)}{\varepsilon} = \frac{dF_X(x)}{d\varepsilon}. \quad (\text{C.2})$$

El comportamiento randomico de la **V.A** para una señal $X(t)$ se caracteriza mediante la función de distribución de probabilidad $p_X(x)$, la cual puede usarse para calcular el valor esperado del proceso $X(t)$ por la ecuación:

$$E\langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx = \bar{X}(t), \quad (\text{C.3})$$

La correlación entre los valores de $X(t_1)$ y $X(t_2)$ del proceso aleatorio para los tiempos t_1 y t_2 se miden por la función de autocorrelación

$$\Gamma = \langle X(t_1)^* X(t_2) \rangle = \int \int x_1^* x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (\text{C.4})$$

en que $p(x_1, x_2)$ es la densidad de probabilidad conjunta de la variable $X(t_1)$ para dos tiempos diferentes t_1 y t_2 . Por otra parte la función de correlación cruzada se define mediante la siguiente ecuación

$$\Gamma(t_1, t_2) = \langle X_1(t_1)^* X_2(t_2) \rangle = \int \int x_1^* x_2 p_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (\text{C.5})$$

en donde $p_{12}(x_1, x_2)$ corresponde a la función de probabilidad conjunta de las variables $X_1(t_1)$ y $X_2(t_2)$, para los tiempo t_1 y t_2 . En el caso que la función de correlación sea igual a cero, el proceso indica que las las variables aleatorias $X_1(t_1)$ y $X_2(t_2)$ no están correlacionadas, considerando así que el proceso es estadísticamente independiente, tal que $p_X(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$, en donde $p_{X_1}(x_1)$ y $p_{X_2}(x_2)$ son las funciones de probabilidad de las variables $X_1(t_1)$ y $X_2(t_2)$ respectivamente (Ver Fig.(C.2)).

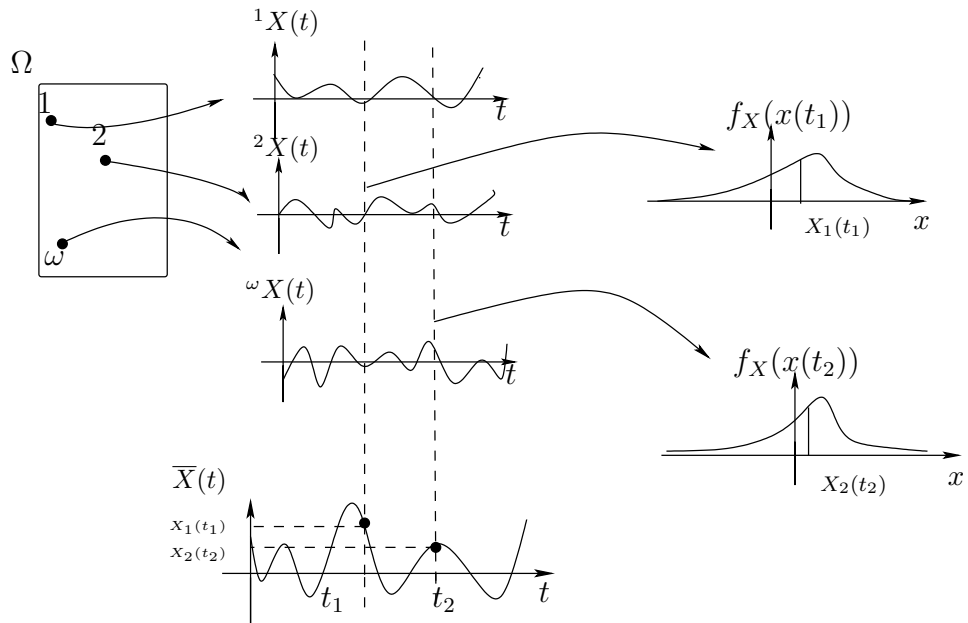


Figura C.2: Representación de distribuciones de probabilidad correspondientes a las variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$, mostrando cuales valores de x tienen mayor o menor ocurrencia. En donde $X_1(t_1)$ y $X_2(t_2)$ son los correspondientes valores esperados de la distribución.

En un proceso estacionario en el sentido fuerte todas las propiedades estadística como la distribución de probabilidad, el valor esperado, entre otras no dependen del tiempo. Para estos procesos aleatorios la distribución de densidad es la misma para todas las variables aleatorias. Los valores esperados que involucran dos variables de tiempo t_1 y t_2 sólo depende de su diferencia $\tau = t_2 - t_1$. Las funciones de autocorrelación y correlaciones cruzadas de las Ecs.(C.4, C.5) convirtiendose

$$\Gamma(\tau) = \langle X(t + \tau)^* X(t) \rangle = \int \int x_1^* x_2 p(x_1 x_2; \tau) dx_1 dx_2, \quad (\text{C.6})$$

y

$$\Gamma(\tau) = \langle X_1(t + \tau)^* X_2(t) \rangle = \int \int x_1^* x_2 p_{12}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2, \quad (\text{C.7})$$

Para simplificar de las propiedades estadística de ciertas magnitudes como el valor medio, los funciones de correlación cruzada y autocorrelación, entre otras, que se obtuvieron mediante promedios de ensamble pueden ahora obtenerse a través de promedios temporales (Ver Fig.(C.3)),

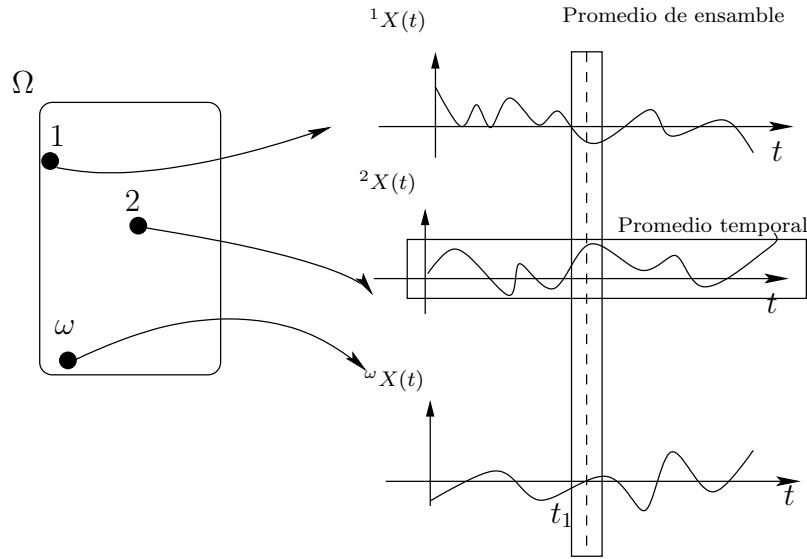


Figura C.3: Un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ se llama ergódico, si el promedio de ensamble es igual al promedio temporal.

Es decir, en lugar de considerar todas las posibles realizaciones de la variable aleatoria $X(t)$, se considera el proceso estacionario, sólo se tiene en cuenta una realización ${}^\omega X(t)$ que ahora lleva toda la información estadística relacionada con el proceso, esto se conoce como un proceso ergódico. Para un proceso ergódico, el promedio temporal correspondiente a una sólo realización.

$$\bar{X}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt \quad (\text{C.8})$$

La función de autocorrelación de $X_1(t)$ para un proceso ergódico es

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)X(t + \tau) dt \quad (\text{C.9})$$

La función de correlación cruzada de dos variables aleatorias $X_1(t)$ y $X_2(t + \tau)$, para un proceso ergódico se define:

$$\Gamma_{x_1x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_1(t)X_2(t + \tau) dt. \quad (\text{C.10})$$

C.2. Señal analítica

La representación real del campo eléctrico $\mathbf{E}^r(z, t)$ para una fuente de luz policromática esta dada por:

$$\mathbf{E}^r(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(z, \nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad (\text{C.11})$$

por lo tanto se debe cumplir $\overline{\mathbf{E}^r(z, t)} = \mathbf{E}^r(z, t)$. Así mismo

$$\mathbf{E}(z, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(z, t)^r e^{-2\pi i \nu t} dt. \quad (\text{C.12})$$

En donde $\mathbf{E}(z, \nu)$ representa la transformada de Fourier de $\mathbf{E}^r(z, t)$. Sacando el complejo conjugado a la ecuación anterior se obtiene:

$$\overline{\mathbf{E}(z, \nu)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(z, t) e^{-2\pi i \nu t} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(z, t) e^{2\pi i \nu t} dt = \mathbf{E}(z, -\nu). \quad (\text{C.13})$$

Definiendo así la señal analítica como

$$\mathbf{E}(z, t) = \int_0^{\infty} 2\mathbf{E}(z, \nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu. \quad (\text{C.14})$$

La representación del campo mediante la señal analítica compleja es ventajosa en varios aspectos, primero por su simplicidad matemática y además por que no considera las frecuencias negativas sólo las

frecuencias positivas que contienen toda la información física del espectro de la función $\mathbf{E}^r(z, t)$. Teniendo en cuenta lo anterior se obtiene

$$\mathbf{E}^r(z, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}(z, t)\}. \quad (\text{C.15})$$

Apéndice D

Distribuciones de polarización sobre la esfera de Poincaré: Montaje experimental

Las distribuciones de puntos o de polarización sobre la esfera de Poincaré caracterizan fuentes parcialmente polarizadas y la dispersión de la distribución de polarización debido a la interacción de la fuente con operadores de polarización. En la figura [D.1](#) se muestran de manera esquemática los montajes experimentales que se tuvieron en cuenta para obtener las correspondientes distribuciones de puntos sobre la esfera de Poincaré. En la parte *a)* de la figura [D.1](#) se mide la polarización de la fuente mediante un polarímetro. En la parte *b)* la fuente se hace interaccionar con un polarizador. En la parte *c)* la fuente se hace interaccionar ahora con un polarizador y con un birrefringente y finalmente en el montaje *d)* la fuente se hace interaccionar con un polarizador y dos birrefringentes. Para todos los montajes se miden la distribución de polarización mediante el polarímetro.

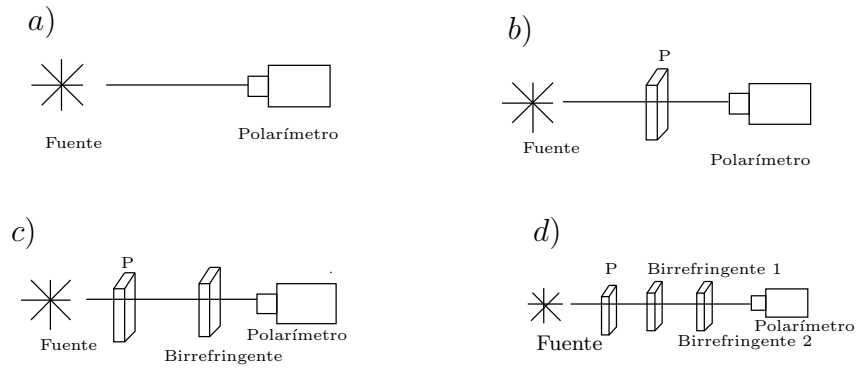


Figura D.1: Representación esquemática de los montajes experimentales que se tuvieron en cuenta para obtener las correspondientes distribuciones de puntos sobre la esfera de Poincaré.

Los parámetros de Stokes que caracterizan cada montaje se obtienen mediante promedios temporales y los resultados obtenidos fueron:

Vector de Stokes asociado a la fuente

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,082 \\ -0,099 \\ 0,47 \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Vector de Stokes para el montaje 2

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,86 \\ 0,51 \\ -0,007 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Vector de Stokes para el montaje 3

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6 \\ -0,09 \\ 0,8 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Vector de Stokes para el montaje 4

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,6 \\ -0,43 \\ -0,7 \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Representación gráfica de las distribuciones de puntos sobre la esfera de Poincaré correspondiente a cada montaje experimental.

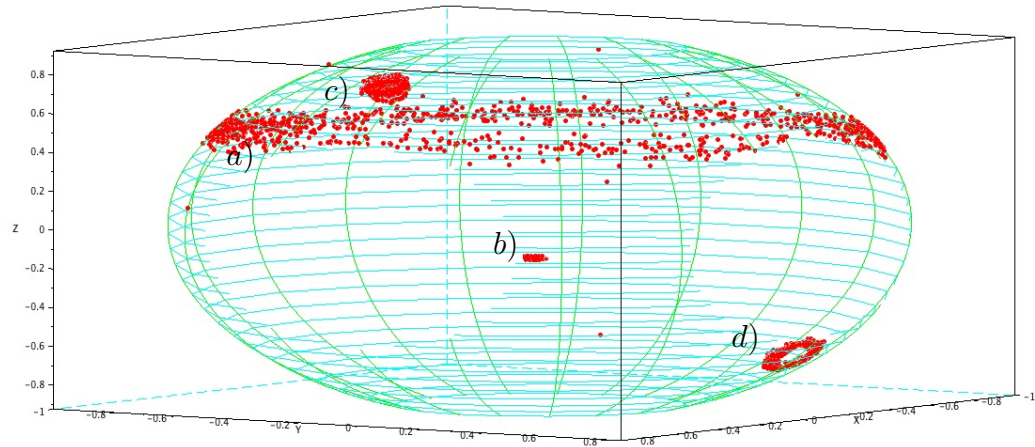


Figura D.2: Representación sobre la esfera de Poincaré de las distribuciones de puntos que caracterizan a cada montaje. En La figura se muestran las distribuciones de polarización *a)* de la fuente, *b)* de la fuente al interactuar con un polarizador, *c)* de la fuente al interactuar con un polarizador y un birrefringente y *d)* de la fuente al interactuar con un polarizador y dos birrefringentes.

En este experimento se muestra la importancia de caracterizar fuentes de luz parcialmente polarizadas mediante distribuciones de polarización sobre la esfera de Poincaré, ya que como se puede apreciar los parámetros de Stokes mediante un arreglo numérico oculta la estadística de oscilación de las componentes del campo eléctrico de la fuente y de la interacción con los operadores de polarización en cada montaje que se tuvo en cuenta, mientras que la caracterización mediante distribuciones de polarización permite estudiar y caracterizar la estadística propia de cada fuente.

Apéndice E

Primera simulación

```
function plotPoints(varargin)
//
// plotPoints(XYZ [, style [, size [, color]])
// -----
// * Action: Draw points onto a 2D or 3D plot, according to the number of
//   given cartesian coordinates of points. These ones are specified into
//   a Nx2 or Nx3 XYZ real matrix, one line per point.
// * Optional input arguments:
//   style: integer 0-14: type of marks. Scalar: Same style for all points
//         See help polyline_properties or getmark() for illustration
//   size:  Size of marks, in point unit (scalar: same size for all points)
//   color: Index (# in the current colormap) or name of color to be used.
//   DEFAULTS: shape dot=0, size=5 points, color=red
// * plotPoints() displays this help

// License: GPL
// Authors & History:
//   2009-05-20 : S. Gougeon (Le Mans, France)
// Creation

N=argn(2); // number of input arguments
    if N==0, head_comments('plotPoints'); return; end
xyz=varargin(1);
if size(xyz,2)<2 | size(xyz,2)>3
```

```

tmp="%s: Coordinates XYZ in 1st argument must be a Nx2 or Nx3 matrix";
error(msprintf(gettext(tmp)+"\n", "plotPoints"));
end
ca=gca();
Aview=ca.rotation_angles;
    if size(xyz,2)==3 & Aview==[0 270], Aview=[45 315]; end

drawlater()
plot2d(xyz(:,1),xyz(:,2));
cc=ca.children(1).children(1);
if size(xyz,2)==3, cc.data(:,3)=xyz(:,3); end
cc.line_mode='off';
cc.mark_mode='on';
if N>1, tmp=varargin(2); else tmp=0; end
cc.mark_style=tmp;
cc.mark_size_unit='point';
if N>2, tmp=varargin(3); else tmp=5; end
cc.mark_size=tmp;
if N>3,
tmp=varargin(4);
if typeof(tmp)=="string", tmp=color(tmp); end
else tmp=color('red');
end
cc.mark_foreground=tmp;
ca.rotation_angles=Aview;
drawnow()
endfunction

// analog elliptic (Bessel), order 2, cutoff 1 Hz
Epsilon = 3; // ripple of filter in pass band (0<epsilon<1)
A        = 60; // attenuation of filter in stop band (A<1)
OmegaC   = 10; // pass band cut-off frequency in Hertz
OmegaR   = 50; // stop band cut-off frequency in Hertz

// Generate the filter
[_zeros,pols,gain] = zpell(3,60,10,50);

// Generate the equivalent linear system of the filter

```

```

num = gain * real(poly(_zeros,'s'));;
den = real(poly(pols,'s'));
elatf = syslin('c',num,den);

for iter=1:500
nn=512;
for i=1:1
X = grand(n,'mn',3,0.9999)
t1 = 1:n;
t = t1*10;
xxx= csim(X,t,elatf)+2;
end

for i=1:1
Y = grand(n,'mn',2,0.8999)
t1 = 1:n;
t = t1*10;
yyy= csim(Y,t,elatf)+2;
end

U=xxx(1,:)' ;
V=yyy(1,:)' ;

//transformacion de coordenadas

for i=1:nn
ch=%pi/2-2*acot(sqrt((U(i))^2+(V(i))^2));
chi(i)=ch;
end

for i=1:nn
aa=sqrt((U(i))^2/((U(i))^2+(V(i))^2));
al=acos(aa);
alp(i)=al;

```

```

end

//REPRESENTACION SOBRE LA ESFERA
for i=1:nn
    Q1(i) = cos(chi(i)).*cos(alp(i));
    Q2(i) = cos(chi(i)).*sin(alp(i));
    Q3(i) = sin(chi(i));
end

for i=1:nn
    EE0x(i) = (1+cos(alp(i)).*cos(chi(i)))/2;
    EE0y(i) = 1-EE0x(i);

    E0x(i) = sqrt(EE0x(i));
    E0y(i) = sqrt(EE0y(i));
    d_phi(i) = acos((sin(alp(i)).*cos(chi(i)))/(2*E0y(i).*E0y(i)));
    phiy(i) = rand()*(2*%pi-0+1);
    phix(i) = phiy(i)-d_phi(i);
end

for i=1:nn
    Ex_re(i) = E0x(i).*cos(phix(i))
    Ey_re(i) = E0y(i).*cos(phiy(i))
    Ex_im(i) = E0x(i).*sin(phix(i))
    Ey_im(i) = E0y(i).*sin(phiy(i))
end

for i=1:nn
    QQ=(abs(EE0x(i))-abs(EE0y(i)))/(abs(EE0x(i))+abs(EE0y(i)));
    QQQ11(i)=QQ;
end

for i=1:nn
    QQ=(2*cos(d_phi(i))*(sqrt(abs(EE0x(i))).*sqrt(abs(EE0y(i)))))/
    (abs(EE0x(i))+abs(EE0y(i)));
    QQQ22(i)=QQ;

```

```

end

for i=1:nn
    QQ=(2*sin(d_phi(i)).*(sqrt(abs(EE0x(i))).*sqrt(abs(EE0y(i)))))/
        (abs(EE0x(i))+abs(EE0y(i)));
    QQQ33(i)=QQ;
end

QQ11(iter,:)=QQQ11';
QQ22(iter,:)=QQQ22';
QQ33(iter,:)=QQQ33';
d_phii(iter,:)=d_phi';
ExR_re(iter,:)=E0x';
EyR_re(iter,:)=E0y';
end

qQ1=QQ11';
qQ2=QQ22';
qQ3=QQ33';

ee1=ExR_re';
ee2=EyR_re';
aa=d_phii';

qQ11=qQ1(50,:)' ;
qQ22=qQ2(50,:)' ;
qQ33=qQ3(50,:)' ;

RqQ1=mean(qQ11);
RqQ2=mean(qQ22);
RqQ3=mean(qQ33);

e1=mean(ee1(50,:));
e2=mean(ee2(50,:));

```

```

the=mean(aa(50,:));

S1=(abs(e1*e1)-abs(e2*e2))/(abs(e1*e1)+abs(e2*e2));
S2=(2*cos(the)*e1*e2)/(abs(e1*e1)+abs(e2*e2));
S3=(2*sin(the)*e1*e2)/(abs(e1*e1)+abs(e2*e2));

T=[qQ11,qQ22,qQ33];
plotPoints(T);

u = linspace(-%pi/2,%pi/2,40);
v = linspace(0,2*%pi,20);

X = cos(u)'*cos(v);
Y = cos(u)'*sin(v);
Z = sin(u)'*ones(v);
plot3d3(X,Y,Z)

```

Apéndice F

Segunda simulación

```
function y = fun_xyz(x,n)
    y=0.0
    if x==0
        return
    end
    if x >= 0
        signo=1;
    else
        signo=-1;
        x=-x;
    end
    m=ceil(log10(x));
    k=10^m;
    t=x/k;
    c=10^n;
    y=round(t*c)/c;
    y=y*k*signo;
endfunction
```

```
for iter=1:500
    n=512;
    //fuente 2
```

```

a = linspace(0,2*%pi,1000);
xo=2;
yo=2;
x=xo+0.2*cos(a);
y=yo+0.2*sin(a);

U=x(:);
V=y(:);

for i=1:n
    ch=%pi/4+acot(sqrt((U(i))^2+(V(i))^2));
    chi(i)=fun_xyz(ch,2);
end
for i=1:n
    al=0.5*acot(U(i)/V(i));
    alp(i)=fun_xyz(al,2);
end
//REPRESENTACION SOBRE LA ESFERA
for i=1:n
    Q1(i) = cos(2*chi(i)).*cos(2*alp(i));
    Q2(i) = cos(2*chi(i)).*sin(2*alp(i));
    Q3(i) = sin(2*chi(i));
end

for i=1:n
    EE0x(i) = (1+cos(alp(i)).*cos(chi(i)))/2;
    EE0y(i) = 1-EE0x(i);
    E0x(i) = sqrt(EE0x(i));
    E0y(i) = sqrt(EE0y(i));
    d_phi(i) = acos((sin(alp(i)).*cos(chi(i)))/(2*E0y(i).*E0y(i)));
    phiy(i) = rand()*(2*%pi-0+1);
    phix(i) = phiy(i)-d_phi(i);
end

for i=1:n

```

```

    Ex_re(i) = E0x(i).*cos(phix(i))
    Ey_re(i) = E0y(i).*cos(phiy(i))
    Ex_im(i) = E0x(i).*sin(phix(i))
    Ey_im(i) = E0y(i).*sin(phiy(i))
end

for i=1:n
    QQ=(abs(EE0x(i))-abs(EE0y(i)))/(abs(EE0x(i))+abs(EE0y(i)));
    QQQ11(i)=QQ;
end
//
for i=1:n
    QQ=(2*cos(d_phi(i))*(sqrt(abs(EE0x(i))).*sqrt(abs(EE0y(i)))))/
    (abs(EE0x(i))+abs(EE0y(i)));
    QQQ22(i)=QQ;
end
//
for i=1:n
    QQ=(2*sin(d_phi(i)).*(sqrt(abs(EE0x(i))).*sqrt(abs(EE0y(i)))))/
    (abs(EE0x(i))+abs(EE0y(i)));
    QQQ33(i)=QQ;
end

QQQ111(iter,:)=QQQ11';
QQQ222(iter,:)=QQQ22';
QQQ333(iter,:)=QQQ33';
d_phii(iter,:)=d_phi';
ExR_re(iter,:)=E0x';
EyR_re(iter,:)=E0y';
///distribucion gaussiana

///fuente2////////////////////////////////////

X = grand(n,n,'nor',2,0.2)

```

```

//plot(X(:,1), X(:,2),'.')

UU=X(:,1);
VV=X(:,2);

//transformacion de coordenadas
for i=1:n
    ch=%pi/4+acot(sqrt((UU(i))^2+(VV(i))^2));
    chii(i)=fun_xyz(ch,2);
end
for i=1:n
    al=0.5*acot(UU(i)/VV(i));
    alpi(i)=fun_xyz(al,2);
end
//REPRESENTACION SOBRE LA ESFERA
for i=1:n
    Q11(i) = cos(2*chii(i)).*cos(2*alpi(i));
    Q22(i) = cos(2*chii(i)).*sin(2*alpi(i));
    Q33(i) = sin(2*chii(i));
end

for i=1:n
    EE0xa(i) = (1+cos(alpi(i)).*cos(chii(i)))/2;
    EE0ya(i) = 1-EE0xa(i);
    E0xa(i) = sqrt(EE0xa(i));
    E0ya(i) = sqrt(EE0ya(i));
    d_phiia(i) = acos((sin(alpi(i)).*cos(chii(i)))/(2*E0ya(i).*E0ya(i)));
    phiya(i) = rand()*(2*%pi-0+1);
    phixa(i) = phiya(i)-d_phiia(i);
end

for i=1:n
    Ex_rea(i) = E0xa(i).*cos(phixa(i))
    Ey_rea(i) = E0ya(i).*cos(phiya(i))
    Ex_ima(i) = E0xa(i).*sin(phixa(i))
    Ey_ima(i) = E0ya(i).*sin(phiya(i))

```

```

end

for i=1:n
    QQ=(abs(EEOxa(i))-abs(EEOya(i)))/(abs(EEOxa(i))+abs(EEOya(i)));
    QQQ1a(i)=QQ;
end
//
for i=1:n
    QQ=(2*cos(d_phi(i))*(sqrt(abs(EEOxa(i))).*sqrt(abs(EEOya(i)))))/
    (abs(EEOxa(i))+abs(EEOya(i)));
    QQQ2a(i)=QQ;
end
//
for i=1:n
    QQ=(2*sin(d_phi(i)).*(sqrt(abs(EEOxa(i))).*sqrt(abs(EEOya(i)))))/
    (abs(EEOxa(i))+abs(EEOya(i)));
    QQQ3a(i)=QQ;
end

```

```

QQQ11a(iter,:)=QQQ1a';
QQQ22a(iter,:)=QQQ2a';
QQQ33a(iter,:)=QQQ3a';
d_phiia(iter,:)=d_phi';
ExR_rea(iter,:)=E0xa';
EyR_rea(iter,:)=E0ya';
end

```

```

qQ1=QQQ111';
qQ2=QQQ222';

```

```
qQ3=QQQ333';
```

```
ee1=ExR_re';
```

```
ee2=EyR_re';
```

```
aa=d_phii';
```

```
RqQ1=mean(qQ1(50,:));
```

```
RqQ2=mean(qQ2(50,:));
```

```
RqQ3=mean(qQ3(50,:));
```

```
e1=mean(ee1(50,:));
```

```
e2=mean(ee2(50,:));
```

```
the=mean(aa(50,:));
```

```
Si=(abs(e1*e1)-abs(e2*e2))/(abs(e1*e1)+abs(e2*e2));
```

```
S2=(2*cos(the)*e1*e2)/(abs(e1*e1)+abs(e2*e2));
```

```
S3=(2*sin(the)*e1*e2)/(abs(e1*e1)+abs(e2*e2));
```

```
qQ1a=QQQ11a';
```

```
qQ2a=QQQ22a';
```

```
qQ3a=QQQ33a';
```

```
ee1a=ExR_rea';
```

```
ee2a=EyR_rea';
```

```
aan=d_phiaa';

RqQ1a=mean(qQ1a(50,:));
RqQ2a=mean(qQ2a(50,:));
RqQ3a=mean(qQ3a(50,:));

e1a=mean(ee1a(50,:));
e2a=mean(ee2a(50,:));

thea=mean(aan(50,:));

Sia=(abs(e1a*e1a)-abs(e2a*e2a))/(abs(e1a*e1a)+abs(e2a*e2a));
S2a=(2*cos(thea)*e1a*e2a)/(abs(e1a*e1a)+abs(e2a*e2a));
S3a=(2*sin(thea)*e1a*e2a)/(abs(e1a*e1a)+abs(e2a*e2a));
```