

Comparación de los modelos de factor de intensidad de esfuerzo equivalente para el modo mixto  
de fractura I y II.

Estefanía Gómez Gamboa

Trabajo de Grado para Optar al Título de Ingeniera Mecánica

Director

Jorge Guillermo Díaz Rodríguez

Ingeniero Mecánico, PhD.

Codirector

Jairo Andrés Mantilla Villalobos

Ingeniero Mecánico

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ingenierías Físico-Mecánicas.

Escuela de Ingeniería Mecánica

Bucaramanga

2023

### **Dedicatoria**

Dedico este trabajo a aquellos que han sido mi fuente inagotable de inspiración y apoyo a lo largo de este viaje académico.

A mis padres, por su amor incondicional, paciencia y confianza en mí. Su constante apoyo ha sido mi motivación.

A mis amigos y seres queridos, quienes me han acompañado en cada paso del camino, compartiendo alegrías y desafíos.

A mis profesores y mentores, cuya sabiduría y dedicación han sido fundamentales en mi formación académica.

A todos aquellos que han contribuido de alguna manera a mi crecimiento personal y profesional, esta tesis es un reflejo de su influencia en mi vida.

Gracias a todos por acompañarme en este camino de conocimiento y aprendizaje.

### **Agradecimientos**

A lo largo de este camino hacia la culminación de esta tesis, he tenido el privilegio de contar con el apoyo y la colaboración de muchas personas a las cuales deseo expresar mi más sincero agradecimiento.

En primer lugar, agradezco a mi director de proyecto Jorge Guillermo, por su valioso tiempo, paciencia y orientación, sus consejos y retroalimentación fueron fundamentales para el desarrollo de este trabajo y mi crecimiento académico.

A mi codirector Jairo Mantilla por compartir su conocimiento y guiarme a lo largo de este y otros proyectos.

A mi familia, en especial a mis padres, por su apoyo, comprensión y amor durante toda mi vida y durante este desafiante proceso de investigación. Sin ustedes, este logro no sería posible.

A mis amigos, quienes me animaron y me acompañaron, compartimos momentos inolvidables a lo largo de estos años.

A todas las personas que participaron en este proyecto, ya sea proporcionando datos, colaborando en investigaciones, o simplemente brindando su apoyo de diversas formas, les agradezco sinceramente por su contribución.

**Tabla de Contenido**

	<b>Pág.</b>
Introducción .....	16
1. Planteamiento del problema.....	18
1.1 Justificación .....	19
2. Objetivos .....	21
2.1 Objetivo General.....	21
2.2 Objetivos Específicos.....	21
3. Marco teórico .....	22
3.1 Mecánica de la fractura lineal elástica .....	22
3.2 Iniciación y propagación de grietas .....	23
3.2.3 Modos de falla.....	23
3.2.3.1 Modo I.....	23
3.2.3.2 Modo II .....	24
3.2.3.3 Modo III .....	24
3.2.3.4 Modo mixto.....	25
3.2.4 Factor de intensidad de esfuerzos .....	25
3.2.4.1 Tanaka.....	26
3.2.4.2 Pook .....	26
3.2.4.3 Richard.....	27
3.2.4.4 Demir .....	27
3.2.5 Plasticidad en la punta de la grieta.....	27
3.2.6 Modelos de crecimiento de grietas .....	28

3.2.6.1 Regla de Paris .....	30
3.2.6.2 Forman .....	30
3.3 Correlación digital de imágenes.....	30
3.4 Estudios previos .....	31
4. Materiales y métodos .....	33
4.1 Tracción uniaxial .....	33
4.2 Ensayos de crecimiento de grieta.....	34
4.3 Ensayos de fatiga de modo mixto .....	37
4.3.4 Procesamiento de datos.....	39
4.4.1 Ensayos de tracción.....	39
4.4.2 Pruebas de fatiga .....	39
4.4.2.1 Modo <i>I</i> .....	42
4.4.2.2 Modo <i>II</i> .....	43
4.4.2.3 Correlación digital de imágenes.....	44
4.4.3 Método de elementos finitos: SMART Fracture.....	47
4.4.4 Método dual de elementos de contorno: DBEM.....	48
4.4.6 Comparación de los modelos de SIF equivalente y modelos de crecimiento.....	49
5. Resultados y discusión .....	51
5.1 Propiedades mecánicas .....	51
5.2 Simulaciones.....	55
5.3 Fatiga en modo mixto, ensayos experimentales .....	59
5.3 Evaluación de los modelos de SIF equivalente.....	63
6. Conclusiones .....	67

7. Recomendaciones .....	68
Referencias Bibliográficas .....	69
Apéndices.....	76

**Lista de Tablas**

	<b>Pág.</b>
Tabla 1 <i>Parámetros DIC</i> .....	45
Tabla 2 <i>Propiedades mecánicas estáticas</i> .....	52
Tabla 3 <i>Constantes para la regla de Paris para probetas en modo I</i> .....	54
Tabla 4 <i>Constantes para el modelo de crecimiento de Forman</i> .....	55
Tabla 5 <i>Parámetros experimentales y calculados para determinar los SIF (<math>MPa\sqrt{m}</math>) equivalentes</i> .....	63

## Lista de Figuras

	<b>Pág.</b>
Figura 1 <i>Modos de falla. a) Modo I; b) Modo II; c) Modo III</i> .....	24
Figura 2 <i>Regla de Paris</i> .....	29
Figura 3 <i>Geometría sometida a tensión uniaxial</i> .....	33
Figura 4 <i>a) Dimensiones del espécimen; b) Montaje</i> .....	34
Figura 5 <i>Programa de adquisición de datos de ensayos de fatiga</i> .....	35
Figura 6 <i>Probetas sometidas al ensayo de crecimiento de grietas</i> .....	36
Figura 7 <i>Dimensiones geometría C(T) modificada</i> .....	37
Figura 8 <i>a) Trayectoria simulada b) Trayectoria experimental</i> .....	38
Figura 9 <i>Montaje para pruebas de modo mixto</i> .....	40
Figura 10 <i>Procesamiento de imágenes manual y DIC</i> .....	41
Figura 11 <i>Zonas de interés a identificar en las imágenes</i> .....	42
Figura 12 <i>Interfaz de Ncorr</i> .....	45
Figura 13 <i>Resultados arrojados por Ncorr a) Imagen original; b) Campos de desplazamiento en V; c) Campos de desplazamiento en U</i> .....	46
Figura 14 <i>Geometría y condiciones de frontera DBEM</i> .....	49
Figura 15 <i>Curvas esfuerzo-deformación</i> .....	51
Figura 16 <i>da/dN respecto a <math>\Delta K</math></i> .....	53
Figura 17 <i>Resultados de las simulaciones FEM y BEM comparados con los datos obtenidos experimentalmente a) <math>\Delta KI</math> vs N; b) <math>\Delta KI</math> vs a</i> .....	56
Figura 18 <i>Simulaciones FEM y BEM, a) a vs N; b) <math>\Delta KI</math> vs a; c) <math>\Delta KII</math> vs a</i> .....	58
Figura 19 <i>Trayectoria de la grieta a) Experimental; b) BEM; c) FEM</i> .....	59

Figura 20 <i>Crecimiento de grieta respecto a número de ciclos en modo mixto, datos experimentales y simulación</i> .....	60
Figura 21 <i>Resultados para las pruebas de modo mixto a) <math>\Delta KI</math> vs <math>a</math>; b) <math>\Delta KII</math> vs <math>a</math></i> .....	62
Figura 22 <i>Numero de ciclos calculado respecto al experimental, a) Regla de Paris; b) Modelo de crecimiento de Forman</i> .....	64

**Lista de Apéndices**

	<b>Pág.</b>
Apéndice A. <i>Código de entrada para BEM para probeta modo I</i> .....	76
Apéndice B. <i>Código de entrada para BEM para probeta modo mixto</i> .....	85

## Glosario

**BEM (Método de Elementos de Contorno):** método numérico que se enfoca en la superficie de un objeto o dominio y se utiliza para resolver problemas de valores límite.

**CTOD (Tamaño Crítico de Apertura de la Grieta):** medida que describe la apertura crítica de una grieta en un material antes de que se propague de manera significativa.

**DIC (Correlación Digital de Imágenes):** técnica de medición que compara imágenes digitales para medir desplazamientos en objetos.

**Esfuerzo Último:** máxima tensión que un material puede soportar antes de que ocurra la falla.

**Fatiga:** fenómeno progresivo de falla de un material que ocurre cuando se somete a cargas cíclicas o fluctuantes que están por debajo de su límite de resistencia, con el tiempo se debilita y puede conducir a la fractura.

**FEM (Método de Elementos Finitos):** método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un sistema, especialmente en análisis estructurales y de mecánica de materiales.

**Fractografía:** estudio de las características de fractura y las superficies de fractura para analizar cómo y por qué un material falla.

**Grieta:** discontinuidad en el sólido de un material, que puede ser una pequeña fisura o abertura en su estructura.

**Metrología Óptica:** técnica de medición que utiliza herramientas ópticas y análisis de imágenes para medir propiedades en la superficie de objetos.

**MFLE (Mecánica de la Fractura Lineal Elástica):** un enfoque teórico que se utiliza para analizar el comportamiento de materiales con grietas.

**Modelos de Crecimiento de Grieta:** representaciones matemáticas que describen la tasa de crecimiento de una grieta en función de varios parámetros, como el factor de intensidad de esfuerzos y constantes específicas del material.

**Modo I:** modo de falla de fractura caracterizado por la apertura de la grieta en la dirección del eje principal de la grieta.

**Modo II:** modo de falla caracterizado por el deslizamiento relativo de las caras de la grieta, también conocido como cizallamiento.

**Modo Mixto:** estado de carga que involucra una combinación de más de un modo de falla.

**Módulo de Young:** una medida de la rigidez de un material, que cuantifica la relación entre la tensión aplicada y la deformación elástica resultante.

**PMMA (Polimetilmetacrilato):** polímero termoplástico transparente conocido como plexiglás o acrílico.

**SIF (Factor de Intensidad de Tensiones):** medida que cuantifica la magnitud y dirección de los esfuerzos en la punta de una grieta.

$\Delta K_{IC}$ : factor de intensidad de tensiones donde inicia la propagación inestable de una grieta.

$\Delta K_{th}$ : factor de intensidad de tensiones necesario para iniciar la propagación de una grieta.

**Lista de variables**

$A$ : Área

$a$ : Longitud de grieta

$da$ : Incremento en el tamaño de grieta

$da/dN$ : Incremento en el tamaño de grieta por ciclo  $N$

$E$ : Módulo de Young

$P$ : Carga aplicada

$K$ : Factor de intensidad de esfuerzos

$K_{IC}$ : Factor de intensidad de esfuerzos crítico para modo I

$K_{th}$ : Factor de intensidad de esfuerzos umbral para modo I

$K_{eq}$ : Factor de intensidad de esfuerzos equivalente

$u$ : Desplazamiento en la dirección  $X$

$v$ : Desplazamiento en la dirección  $Y$

$\nu$ : Módulo de Poisson

$\Delta$ : Incremento

$\sigma$ : Esfuerzo normal

$\sigma_U$ : Esfuerzo último

$R$ : Relación de cargas

$Y_I$ : Factor geométrico para modo I

$Y_{II}$ : Factor geométrico para modo II

## Resumen

**Título:** Comparación de los modelos de factor de intensidad de esfuerzo equivalente para el modo mixto de fractura I y II\*

**Autor:** Estefanía Gómez Gamboa\*\*

**Palabras Clave:** Factor de intensidad de esfuerzos equivalente, PMMA, Modo mixto de fatiga.

**Descripción:** Este estudio tiene como objetivo determinar el modelo de factor de intensidad de esfuerzos (SIF) equivalente que mejor se ajusta al comportamiento experimental del PMMA en fractura de modo mixto I y II. Se evaluaron los modelos de SIF de Tanaka, Richard y Pook. Los valores teóricos utilizados para la comparación corresponden a resultados experimentales en una geometría C(T) modificada mediante la mecanización de un agujero en la región cercana a la grieta, sometida a cargas de fatiga con una relación de carga de  $R = 0.1$ . Se compararon los SIF de veintiún puntos experimentales con los valores calculados a través de los modelos. Para analizar la predicción en el número estimado de ciclos, se utilizaron los modelos de crecimiento de grieta Paris y Forman con cada SIF equivalente. Se concluye que el modelo de Paris tiene la mejor predicción, ya que el error entre el número de ciclos calculado y registrado experimentalmente es el más bajo. Además, se observó que, debido a la baja curvatura en la trayectoria de la grieta, es apropiado el uso de cualquiera de los tres modelos propuestos, ya que todos convergen. Basándose en su simplicidad y validez según estudios de otros autores, se define que el modelo de SIF equivalente de Tanaka es el mejor, prediciendo una vida con un error del 14.83% en el número total de ciclos y un error del 12.83% en sus intervalos, siempre con una tendencia conservadora.

---

\* Trabajo de Grado

\*\*Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Ingeniería Mecánica. Director: Jorge Guillermo Díaz Rodríguez. Ingeniero Mecánico, PhD. Codirector: Jairo Andrés Mantilla Villalobos. Ingeniero Mecánico.

### Abstract

**Title:** Comparison of equivalent stress intensity factor models for mixed mode fracture I and II\*

**Author(s):** Estefanía Gómez Gamboa \*\*

**Key Words:** Equivalent Stress Intensity factor, PMMA, Mixed Mode Fatigue.

**Description:** This study aims to determine the equivalent stress intensity factor (SIF) model that best fits the experimental behavior of PMMA under mixed mode (I and II). The equivalent SIF models of Tanaka, Richard, and Pook were evaluated. The theoretical values used for comparison correspond to experimental results in a modified C(T) geometry by machining a hole ahead of the crack tip, subjected to fatigue loads with a load ratio of  $R = 0.1$ . The SIF for twenty-one experimental points was compared with the values computed through the numerical simulation. The Paris and Forman crack growth models were used with each equivalent SIF to analyze the prediction in the estimated number of cycles. It is concluded that the Paris model showed the closest prediction since the error between the calculated and experimentally recorded number of cycles is the lowest. Furthermore, the material's behavior follows a straight line with a constant slope. Furthermore, due to the low curvature in the crack path, using any of the three proposed models is appropriate, as they all converge. Based on their simplicity and validity from studies by other authors, it is defined that Tanaka's equivalent SIF model is the best, predicting a life with an error of 14.83% in the total number of cycles and 12.83% error in their crack growth, always with a conservative trend.

---

\* Trabajo de Grado

\*\*Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Ingeniería Mecánica. Director: Jorge Guillermo Díaz Rodríguez. Ingeniero Mecánico, PhD. Codirector: Jairo Andrés Mantilla Villalobos. Ingeniero Mecánico.

## Introducción

En 1988, en Alemania ocurrió el peor accidente ferroviario en un tren de altas velocidades. La fractura súbita de una rueda causó un descarrilamiento que posteriormente hizo que el tren se estrellara, este ocurre debido a la propagación de una grieta al interior de la rueda (Esslinger et al., 2004). Este y muchos otros accidentes en industrias como aeronáutica, O&G, construcción entre otras, hacen importante el estudio de cuerpos agrietados o susceptibles a presentar fallas internas.

La mecánica de la fractura se centra en el estudio de cuerpos con discontinuidades o agrietados. Una de las vertientes de esta disciplina estudia el estado de esfuerzos en la punta de la grieta una vez esta alcanza una longitud considerable, y esto se logra determinando factores de intensidad de esfuerzos (Richard & Sander, 2016).

Entre los materiales ampliamente estudiados, se encuentran los polímeros, siendo el polimetilmetacrilato (PMMA) uno de los más accesibles. Algunas de las propiedades del material son, alta resistencia a impactos, durabilidad en condiciones medioambientales adversas, resistencia a rasguños, entre otras.

Inicialmente utilizado como sustituto del vidrio inorgánico (Ali et al., 2015), este material ha encontrado aplicaciones significativas en la industria biomédica, siendo utilizado como ingrediente para el cemento óseo y en diversas aplicaciones dentales (Diaz-Arnold et al., 2008).

En este contexto es importante cuantificar las propiedades mecánicas del material, ya que las aplicaciones mencionadas anteriormente pueden presentar estados de cargas multiaxiales, Por lo tanto, se vuelve crucial investigar el comportamiento de este material en situaciones de fatiga bajo modos mixtos de carga, con el objetivo de mejorar el diseño de diversos componentes y garantizar su integridad estructural.

Este documento se organiza en las siguientes secciones. En primer lugar, se presenta el planteamiento de problema, donde se explora la necesidad de abordar el estudio de la temática en cuestión, destacando la recurrencia del fenómeno de fatiga en diferentes materiales. A continuación, un breve marco teórico, destinado a contextualizar al lector sobre temas relevantes en el trabajo.

La sección de materiales y métodos, donde se explica la metodología implementada para el desarrollo de ensayos mecánicos y la adquisición de datos en especial, con un enfoque especial a los datos por medio de fotografías. Luego, resultados y discusión, donde los resultados obtenidos, se presentan los valores de interés obtenidos experimentalmente por medio de simulaciones con el método de elementos finitos y el método de los elementos de contorno.

Finalmente, se presentan las conclusiones resaltando los hallazgos. Se termina con una serie de recomendaciones para el desarrollo de trabajos de seguimiento a futuro.

## 1. Planteamiento del problema

Una grieta es una discontinuidad presente en el dominio de un sólido, inicialmente con un carácter microscópico que se propaga hasta generar la falla del elemento. Su aparición puede ser causada por diversos factores, como tensiones aplicadas, deformaciones plásticas, fatiga, corrosión entre otros (Schijve, 2003).

Es importante destacar que todos los materiales ingenieriles tienen microgrietas en su interior, ya sea debido a su manufactura, a su composición o a las condiciones de servicio. En este contexto, la mecánica de fractura lineal elástica (MFLE) estudia el comportamiento de dichas grietas cuando la punta no se plastifica significativamente (Ayatollahi et al., 2006).

La propagación de una grieta exhibe tres maneras, se les conoce como los modos de fractura I, II y III, estos dependen de la dirección de la carga aplicada, modelos que describen cada uno de estos modos han sido ampliamente estudiados (Diaz Rodriguez, 2018). Sin embargo, diversos elementos se encuentran cargados de manera multiaxial, esto altera la propagación de la grieta ya que se presenta más de un modo simultáneamente, a esto se le conoce como modo mixto.

El factor que cuantifica el esfuerzo en la punta de la singularidad se conoce como factor de intensidad de esfuerzos (SIF), depende de la geometría, la aplicación de la carga (Radaj, 2014) y es específico para cada modo. Este factor es importante debido a que la regla de crecimiento de grietas es una relación entre la tasa de propagación y el SIF. La comprensión del crecimiento de la grieta en condiciones de carga mixta es fundamental para el diseño y la evaluación de la integridad estructural de componentes sometidos a cargas cíclicas, así como para seleccionar el método de ensayos no destructivos más apropiado.

En el caso de presentarse carga en modo mixto, es necesario conocer un SIF equivalente que contemple el efecto causado por la combinación de los modos.

Por lo tanto, este estudio se propone determinar ¿Cuál es el modelo de factor de intensidad de esfuerzos equivalente que mejor describe el crecimiento de la grieta respecto al número de ciclos, trayectoria de propagación y razón de crecimiento en un modo mixto de fractura?

### **1.1 Justificación**

La vida útil de un componente depende de sus condiciones de carga y servicio. Cuando este se encuentra sometido a cargas cíclicas con valores inferiores a su límite elástico se presenta un fenómeno plástico, localizado y aleatorio conocido como fatiga. Este mecanismo de falla acumula daño en el material hasta la aparición de una grieta macroscópica, que se propaga de manera controlada hasta la falla súbita del elemento. La mecánica de fractura lineal elástica (MFLE) estudia el comportamiento de un sólido en presencia de una grieta en materiales con comportamiento lineal elástico. Adicionalmente, proporciona herramientas para resolver el problema de estimación de la vida remanente (Leander & Al-Emrani, 2016).

En la mecánica de fractura se reconocen tres modos de fractura: modo I, en donde los esfuerzos normales actúan en dirección perpendicular a la grieta, generando la separación de las caras opuestas de la grieta; modo II, donde los esfuerzos cortantes provocan el deslizamiento de las caras en dirección paralela a la caras de la grieta; y modo III, el cual implica cargas aplicados en dirección fuera del plano de la grieta, usualmente asociados con elementos sometidos a torsión (Richard & Sander, 2016).

El más estudiado es el modo I, debido a que muchos componentes se encuentran sometidos a cargas de tracción en su operación normal. Sin embargo, un elemento en servicio puede presentar una combinación de modos, ya sea debido a la aplicación de la carga o la geometría del componente. Esta combinación puede cambiar la trayectoria de la grieta (Díaz & Freire, 2022) y

generar concentradores de tensión (Fageehi & Alshoaibi, 2020). En estos casos, se suele trabajar con un modo equivalente que evalúe los efectos del modo mixto, y se utiliza el factor de intensidad de esfuerzos (SIF) como parámetro para cuantificar el campo de esfuerzos en la punta de la grieta.

Actualmente existen varias reglas de crecimiento de grieta. Sin embargo, cuando se aplican cargas mixtas, la propagación de la grieta cambia la trayectoria de la dirección perpendicular a la carga, así como la velocidad de propagación. Por lo tanto, se han propuesto tres diversos modelos para establecer una relación para el factor de intensidad de esfuerzos (SIF) equivalente (Sajith et al., 2018). Es relevante comprender el SIF equivalente en la propagación de grietas, especialmente bajo diferentes condiciones de carga y geometrías. Además, el conocimiento del SIF facilita la evaluación de la integridad estructural, lo que ayuda a determinar la seguridad de una pieza, evitando accidentes y garantizando la seguridad de personas y activos (Ali Fageehi, 2022).

De otro lado, como se referencia se tienen los trabajos de (Foti et al., 2021) quienes ensayaron propagación de grietas en modo I para PMMA.

El presente trabajo busca determinar cuál es el modelo de SIF equivalente que mejor describe el crecimiento y dirección de la grieta en un ensayo bajo modo mixto de fractura. Las pruebas fueron realizadas en polimetilmetacrilato (PMMA) en modo mixto I y II, debido a que su comportamiento lineal elástico se conserva durante el desarrollo del ensayo.

## 2. Objetivos

### 2.1 Objetivo General

Evaluar diferentes modelos de factor de intensidad de esfuerzos equivalente en modo mixto de fractura I y II

### 2.2 Objetivos Específicos

Establecer las propiedades mecánicas del PMMA bajo carga estática y alternante para posteriormente por medio de tratamiento de imágenes determinar la rata de crecimiento de grieta por medio de la regla de Paris.

Evaluar los parámetros  $K_I$  y  $K_{II}$  de manera experimental utilizando técnicas de procesamiento de imágenes y a partir de estos datos determinar los factores de intensidad de esfuerzo equivalente para los modelos de Tanaka, Pook y Richard.

Analizar las razones de crecimiento y el número de ciclos estimados por los modelos de crecimiento de grieta (Paris y Forman), teniendo como parámetro de entrada los factores de intensidad de esfuerzo equivalente.

### 3. Marco teórico

Esta sección tiene como propósito contextualizar al lector. Son abordados conceptos y teorías fundamentales relacionadas con la mecánica de la fractura. El objetivo de esta sección es brindar al lector las herramientas conceptuales necesarias para comprender plenamente los resultados del estudio.

#### 3.1 Mecánica de la fractura lineal elástica

La formación de grietas es un proceso complejo que depende de diversos factores, como la microestructura del material, la carga aplicada y el ambiente de trabajo. A pesar de que la teoría de la elasticidad lineal asume que los materiales son homogéneos, isotrópicos y elásticos (Perez, 2017). Esta es una idealización que no describe con precisión el comportamiento de los materiales reales. Es eso por lo que la mecánica de fractura lineal elástica se enfoca en estudiar el comportamiento de cuerpos agrietados bajo carga aplicada.

Para conocer el estado de la carga al cual se encuentra sometido, es posible considerar dos grandes grupos: estáticas y dinámicas. Las cargas estáticas mantienen su magnitud a lo largo del tiempo, mientras que las dinámicas cambian, ya sean en su magnitud o dirección. Cuando la aplicación de la carga es recurrente es posible considerarla como cíclica y es posible caracterízale por su valor máximo  $F_{max}$ , mínimo  $F_{min}$  y medio  $F_m$ . La relación entre las cargas máximas y mínimas se conoce como  $R$  y se define en la ecuación 1.

$$R = \frac{F_{min}}{F_{max}} \quad (1)$$

La variación de la carga a lo largo del tiempo cambia el comportamiento de fallo de un material. En el caso de las aleaciones ferrosas, la fatiga puede ocurrir en un rango del 40 % al 50 % de su resistencia a la tracción (Pang et al., 2013).

### **3.2 Iniciación y propagación de grietas**

Las grietas son discontinuidades locales que pueden aparecer en un material como consecuencia de diversos factores. Estas pueden ser el resultado de defectos en la micro estructura, como inclusiones, límites de grano o porosidad (Chan, 2010), así como pueden generarse durante procesos de manufactura como cambios de temperatura (Elangeswaran et al., 2020). En una superficie homogénea, la falla se iniciará en la zona que propicie su desarrollo de manera más significativa. En caso de que existan entallas o cambios en la sección transversal (Tang et al., 2021). las grietas iniciarán en la zona con el mayor concentrador de esfuerzos. Sin embargo, si el material presenta defectos, estos se consideran como fallas incipientes que pueden iniciar la falla en cualquier punto de la superficie.

El proceso de propagación de una grieta hasta que causa el colapso de una estructura es relativamente rápido, y puede ocurrir en tan solo el 10 % de la vida útil del equipo. Por otro lado, la formación de una grieta, es decir, su iniciación y crecimiento micro estructural, tomará la mayor parte de la vida útil del equipo (Pineau et al., 2016).

#### ***3.2.3 Modos de falla***

Existen tres formas en que las grietas pueden propagarse en cuerpos agrietados, y estas dependen de la dirección de la carga.

##### **3.2.3.1 Modo I**

Ocurre en elementos sometidos a cargas uniaxiales, la grieta que se abre en dos caras paralelas (figura 1.a), y no cambia su dirección. La propagación de la grieta se produce por la separación progresiva de las dos caras, reduciendo significativamente la resistencia e integridad estructural del elemento. Cabe resaltar que es el modo de fractura más común.

### 3.2.3.2 Modo II

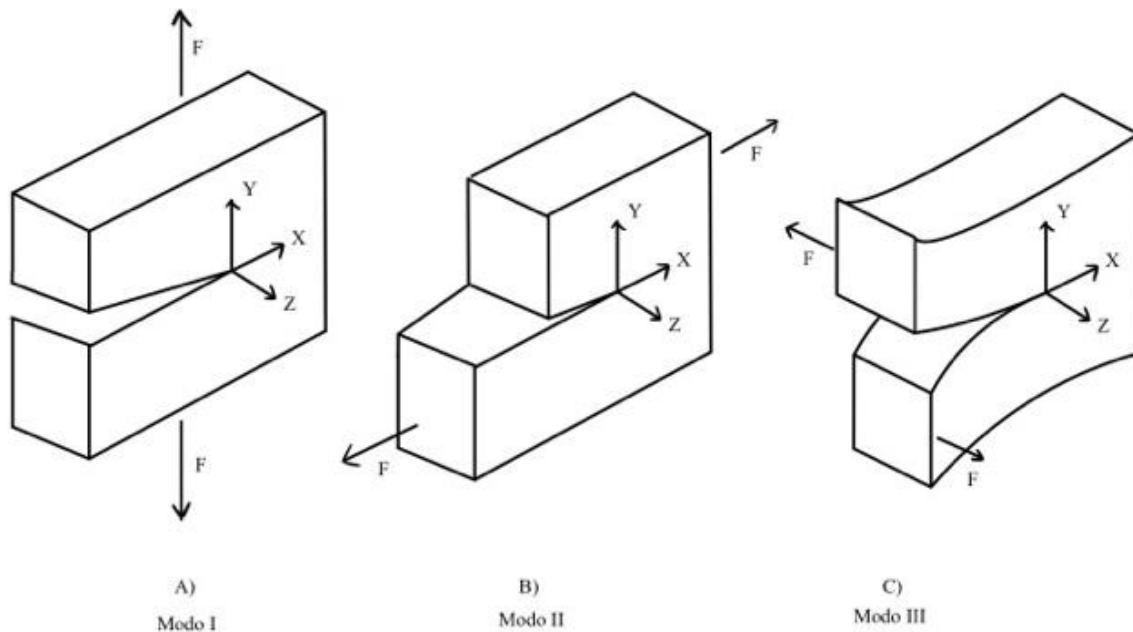
Se presenta en elementos sometidos a esfuerzos cortantes, genera un deslizamiento de las dos caras en la dirección paralela a la grieta, ver figura 1.b en este caso la grieta puede cambiar su dirección, propagándose a un ángulo medido desde la dirección original.

### 3.2.3.3 Modo III

Este es el caso de los elementos sometidos a torsión, las dos caras de la grieta se desplazan en sentido opuesto alrededor del eje perpendicular a la dirección de la grieta, ver figura 1.c.

**Figura 1**

*Modos de falla. a) Modo I; b) Modo II; c) Modo III*



### 3.2.3.4 Modo mixto

La presencia de otros estados de carga, como el cortante y la torsión, en un elemento puede llevar a una interacción mixta y generar concentradores de esfuerzos. Así mismo, la aplicación asimétrica de la carga, caso de compuestos, juntas soldadas, elementos reforzados, entre otros. La combinación de estos modos de carga puede presentarse de manera variada y no exclusiva, lo que significa que existe una superposición de los diferentes modos de falla en fatiga. En el presente estudio resulta relevante la interacción entre los modos I y II, en este caso se produce una fisura que no se propaga en una dirección única, existe apertura y deslizamiento, esta combinación acelera significativamente la velocidad de propagación de la grieta, por esta razón las ecuaciones usadas para describir este fenómeno son diferentes a las empleadas en los casos descritos previamente.

### 3.2.4 Factor de intensidad de esfuerzos

La forma de cuantificar el esfuerzo en la punta de la singularidad se conoce como factor de intensidad de esfuerzos (SIF), este describe la intensidad de los esfuerzos, así como mide la magnitud de los desplazamientos en la zona agrietada, tiene una manera específica de calcularse según el modo de falla y cuando este alcanza el valor de la tenacidad a la fractura  $K_{IC}$  la falla se propaga.

Depende de varios factores, la carga externa, geometría de la grieta, así como su profundidad, longitud y posición. Es importante resaltar que describe la intensidad, mas no la distribución, de manera general pueden describirse de la siguiente manera:

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_I \quad (2)$$

$$K_{II} = \tau \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_{II} \quad (3)$$

Donde  $\sigma$  y  $\tau$  dependen de las fuerzas o momentos aplicados, las constantes  $Y_I$  y  $Y_{II}$  pueden obtenerse de diagramas o tablas según la geometría a evaluar (Schijve, 2003).

En los casos donde se presenta un estado de carga de modo mixto, el concepto de SIF equivalente es aplicable. En estos casos es necesario contemplar un SIF que integre el efecto de todas las cargas en la punta de la grieta (Radaj, 2014). A continuación, se presentan los modelos que serán evaluados en este trabajo.

#### 3.2.4.1 Tanaka

Este modelo (Tanaka, 1974) se deriva del modelo de dislocaciones de (Weertman, 1984), determina que la propagación de la grieta ocurre cuando las deformaciones en la zona plástica alcanzan el valor crítico. Inicialmente fue probado en una lámina delgada de aluminio y se describe mediante la ecuación 4.

$$K_{Tanaka} = \left( K_I^4 + 8K_{II}^4 + \frac{(8 \cdot K_{III}^4)}{1 - \nu} \right)^{0.25} \quad (4)$$

#### 3.2.4.2 Pook

En su estudio (Pook, 1990) propone un criterio para un elemento sometido a flexión de tres puntos. En las pruebas realizadas al espécimen se esperaba apreciar un modo I dominante, sin embargo, la punta de la grieta roto hasta encontrarse perpendicularmente respecto al lateral del espécimen, estos resultados se expresan con la ecuación 5.

$$K_{Pook} = \frac{0.83K_I + \sqrt{0.4489K_I^2 + 3K_{II}^2}}{1.5} \quad (5)$$

### 3.2.4.3 Richard

(Richard & Sander, 2016) presenta un criterio basado en el esfuerzo equivalente se presenta en la ecuación 6.

$$K_{Richard} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 5.33K_{II}^2} \quad (6)$$

### 3.2.4.4 Demir

El modelo presentado en la ecuación 7 modelo es una relación empírica creada para una probeta de tensión compacta y para un espécimen tipo T (Demir et al., 2018).

$$K_{Demir} = (1.0519K_I^4 - 0.035K_{II}^4 + 2.3056K_I^2K_{II}^2)^{0.5} \quad (7)$$

### 3.2.5 Plasticidad en la punta de la grieta

Cuando se aplica una carga a un material agrietado, la transmisión de fuerzas se ve alterada y las tensiones se concentran en la punta de la grieta. Esto puede causar una región plásticamente deformada en la punta de la grieta. En materiales frágiles, esta deformación plástica es mínima debido a su baja capacidad de deformación, sin embargo, en materiales dúctiles si se presenta una plastificación significativa en la punta, esto retrasa o en algunos casos detiene la propagación de la grieta (Li et al., 2023). Una idealización es suponer que el área endurecida es pequeña, esto es válido para materiales frágiles.

En el caso de materiales con gran capacidad plástica, existen modelos que describen el comportamiento de la zona plástica de deformación en la punta de la grieta. Dos de los modelos más utilizados son el de la tasa de liberación de energía y la integral J (Schijve, 2003). Estos se basan en la idea de que la energía necesaria para propagar la grieta es proporcional al área bajo la

curva de carga-deformación, otros factores que pueden afectar la zona plástica de deformación en la punta de la grieta, como el espesor de la placa y la geometría de la grieta.

Para estudiar la propagación de grietas en materiales frágiles, se ha utilizado el polimetilmetacrilato (PMMA) en diferentes investigaciones debido a su plasticidad limitada. Aunque se ha observado que se produce una zona plástica de deformación en la punta de la grieta cuando se somete a cargas, esta ha sido medida en diferentes estudios y no se considera significativa (Gain et al., 2011).

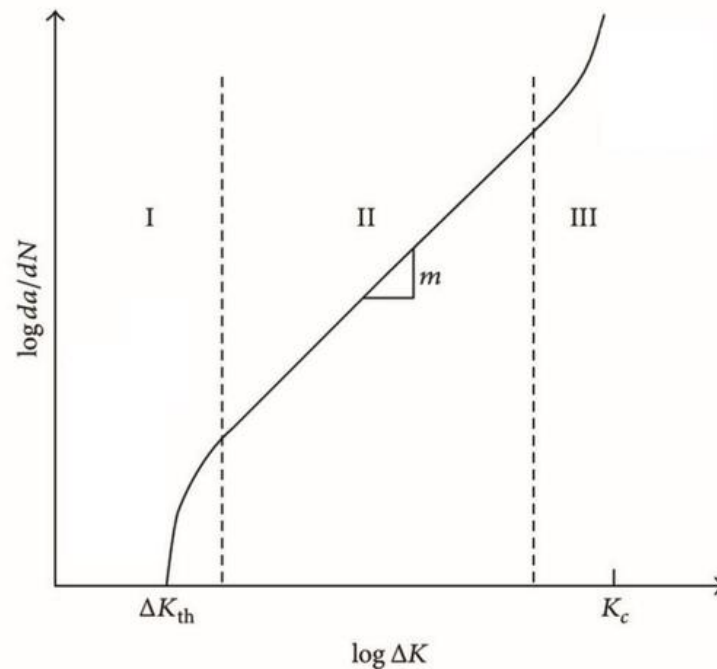
### 3.2.6 Modelos de crecimiento de grietas

La propagación de grietas en materiales se puede describir mediante modelos que establecen la relación entre la velocidad de propagación y los factores que influyen en ella. Uno de estos modelos se basa en la condición de que la energía de deformación elástica almacenada en la punta de la grieta es la energía necesaria para propagar la grieta en cada ciclo de carga. Esta condición se puede expresar mediante la relación:

$$\Delta K_{th} < \Delta K < \Delta K_{IC} \quad (8)$$

La figura 2 se conoce como regla de Paris, representa las regiones de propagación describiendo su velocidad de crecimiento se propagación se encuentra dividida en tres regiones:

- **Región I:** En esta región, la tasa de crecimiento de la grieta es muy baja, del orden de  $10^{-6}$  [mm/ciclo] o menor, según la norma ASTM E647. Lo más relevante de esta región es que una intensidad de esfuerzo inferior a  $\Delta K_{th}$  no produce propagación de la grieta.

**Figura 2***Regla de Paris*

- **Región II:** En esta región, la tasa de crecimiento de la grieta es estable y puede describirse mediante una línea recta. La velocidad de propagación se encuentra en el orden de  $10^{-6}$  a  $10^{-3}$  [mm/ciclo].
- **Región III:** En esta región, la tasa de crecimiento de la grieta es alta, superior a  $10^{-3}$  [mm/ciclo], y la curva tiende a convertirse en una asíntota. Predecir la propagación en esta zona es difícil y otros factores, como el espesor de la placa, son relevantes.

Aunque existen muchos modelos para predecir la propagación de grietas, este estudio se enfocará en la regla de Paris y el modelo de Forman, los cuales se presentarán a continuación

### 3.2.6.1 Regla de Paris

Uno de los primeros conceptos de propagación (Paris & Erdogan, 1963) este describe el crecimiento estable de la grieta, se define según la ecuación 9:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K)^m \quad (9)$$

Los coeficientes C y m dependen de las condiciones de carga a las que está sometido el material y deben ser determinados experimentalmente (Radhakrishnan, 1979).

Es importante destacar que el valor de C puede verse influenciado por la relación de cargas. Este modelo resulta ser bastante conservativo en la predicción del número de ciclos residuales antes de la falla de un material. Por esta razón, múltiples modelos han añadido parámetros adicionales para mejorar la precisión de las predicciones (Luo & Chen, 2019).

### 3.2.6.2 Forman

Un modelo que toma en cuenta el efecto de  $R$  así como la tenacidad del material, este modelo toma en cuenta los cambios hechos por (Walker, 2009). Presenta un modelo capaz de describir la región de crecimiento inestable. Este modelo ha reportado mejores ajustes con datos experimentales (Kim & Shim, 2000) y se describe por la ecuación 10.

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^m}{(1 - R)K_{IC} - \Delta K} \quad (10)$$

Al igual que en la regla de Paris C y m dependen de las condiciones de carga.

## 3.3 Correlación digital de imágenes

Esta técnica de metrología óptica sin contacto que se fundamenta en la comparación de imágenes sucesivas para cuantificar las variaciones de posición a lo largo del tiempo. La técnica permite detectar desplazamientos, deformaciones y cambios en la geometría del espécimen. En los

últimos años DIC ha sido aplicada en una variedad de problemas relacionados con el agrietamiento (Vasco-Olmo et al., 2019).

Actualmente existe una serie de programas comerciales disponibles para el análisis de estas imágenes, tales como GOM Correlate y VIC-2D, por mencionar solo algunos. A pesar de su fiabilidad, es importante destacar que resultan costosos. Por esta razón, en este proyecto se optó por implementar el software libre Ncorr (Blaber et al., 2015). Es relevante mencionar que Ncorr ha sido sometido a pruebas comparativas con los programas previamente citados, demostrando su efectividad y eficacia (Harilal & Ramji, 2014), este programa permite generar los gráficos de desplazamiento en la dirección  $V$  así como en  $U$ , además de calcular la deformación  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$  y  $e_{xy}$  para cada una de las imágenes.

### ***3.4 Estudios previos***

En este estudio, se ha abordado una amplia gama de investigaciones relacionadas con el tema, todas ellas debidamente documentadas en el presente informe. Sin embargo, se destaca la atención especial que se ha prestado a tres estudios particulares debido a su relevancia destacada:

- (Baleani & Viceconti, 2011) Este estudio se centró en la evaluación de las características de la adición de sulfato de bario al cemento óseo de PMMA. En este caso, se llevó a cabo una caracterización de la mezcla como del material en sí. Además, se realizaron pruebas de propagación de grietas por fatiga utilizando la geometría C(T), pruebas de tenacidad a la fractura crítica y análisis fractográfico. Los resultados de este estudio se utilizarán como punto de referencia, particularmente el valor de la tenacidad a la fractura y las constantes de crecimiento de grieta.

- (Hao et al., 2016) En este estudio, se realizó una comparación de la propagación de grietas en dos modelos geométricos diferentes de PMMA, a saber, las geometrías C(T) y M(T). Se utilizarán los valores de las constantes C y m de propagación como puntos de referencia y para fines de comparación.
- (Zhao et al., 2018) Este estudio se enfocó en la caracterización del comportamiento a fatiga del PMMA, centrándose en los valores de umbral de tenacidad. Los autores llevaron a cabo las pruebas utilizando probetas C(T). Los resultados de este estudio son de gran interés y se consideran importantes para determinar la carga a aplicar en los ensayos de propagación de grietas.

#### 4. Materiales y métodos

A continuación, se presenta una descripción general de los materiales y métodos utilizados en este estudio. Se detallarán los instrumentos, las técnicas y los procedimientos empleados para recopilar y analizar los datos. Además, se explicarán las razones detrás de la elección de estos enfoques, describiendo su relevancia para los objetivos de la investigación.

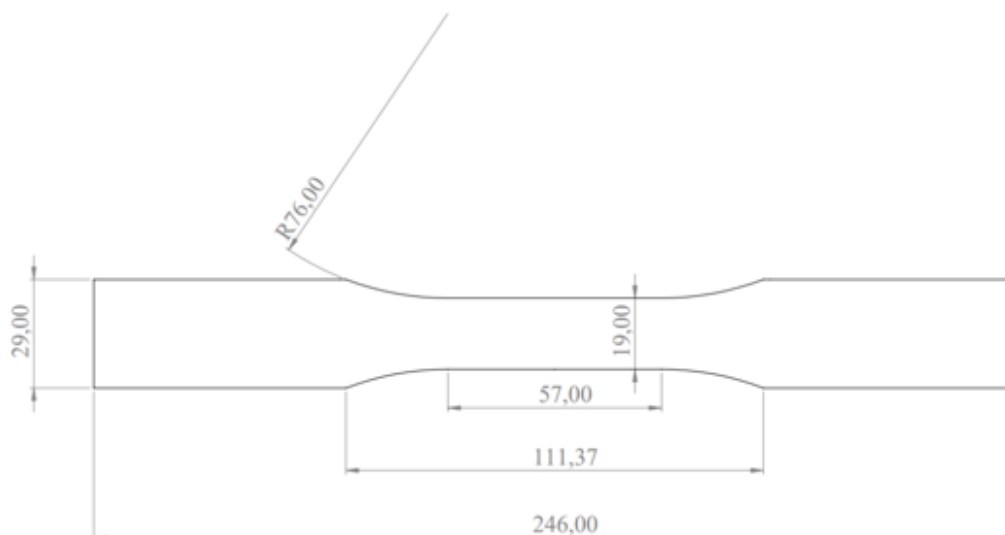
. Los ensayos se llevaron a cabo en una maquina universal de ensayos MTS Bionix con una capacidad nominal de carga de 25kN y se emplearon láminas de PMMA de 10 mm de espesor.

##### 4.1 Tracción uniaxial

Los ensayos se desarrollaron siguiendo la norma ASTM D638-22 para materiales plásticos, los especímenes correspondieron al tipo III y fueron manufacturados con una cortadora laser y la geometría se presenta en la figura 3. La adquisición se datos fue realizada con un extensómetro análogo MTS 634.12f con una longitud de calibre de 25 mm.

#### Figura 3

*Geometría sometida a tensión uniaxial*



## 4.2 Ensayos de crecimiento de grieta

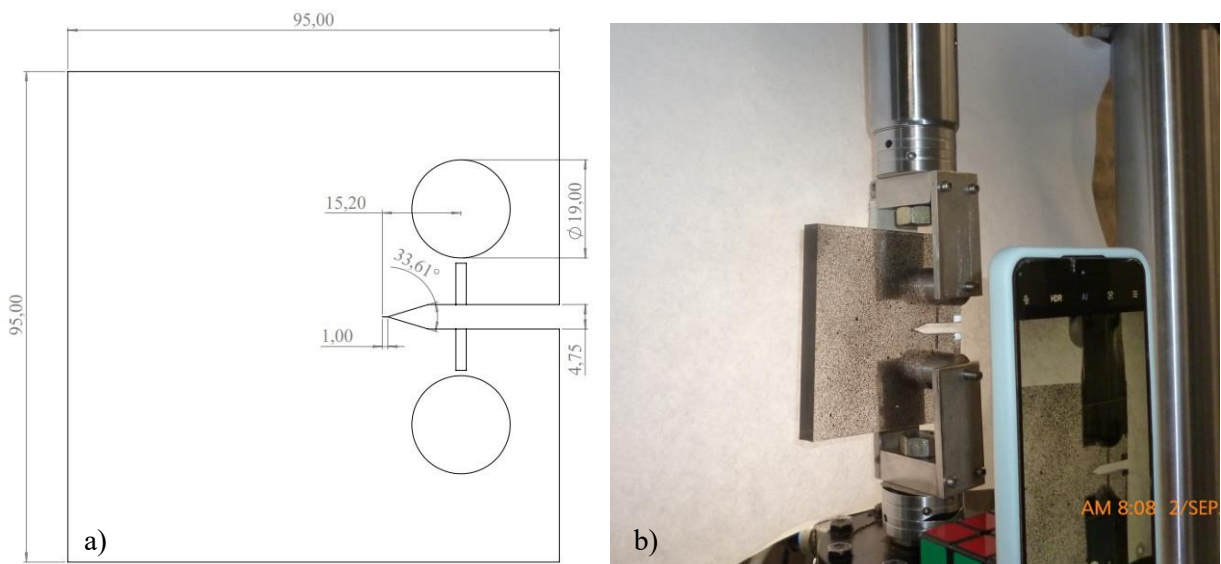
La norma ASTM E647-23a presenta 3 tipos de geometrías para la medición de las tasas de crecimiento estable para probetas sometidas a fatiga, las probetas presentadas en el documento no tienen ninguna limitación de material ni espesor, fue seleccionada la geometría de tensión compacta C(T), debido a su practicidad de montaje y su poco uso de material.

Las dimensiones de la probeta se encuentran detalladas en la figura 4(a), mientras que el montaje experimental se ilustra en la figura 4(b). La frecuencia de carga fue 3.5 Hz con el objetivo de evitar comportamientos viscoelásticos (Cheng et al., 1990).

La adquisición de datos se llevó a cabo por medio de imágenes registradas cada 500 ciclos, la cámara empleada contaba con una resolución de 108 MP, un lente 5P, distancia focal del lente equivalente a 48mm y una apertura  $f/2.24$ . Con el fin de evitar ruido en las imágenes y garantizar la captura de la imagen en el momento de apertura, se redujo la frecuencia de aplicación de la carga se redujo hasta 0.1 Hz durante 3 ciclos. Posteriormente la frecuencia fue restablecida de 5

### Figura 4

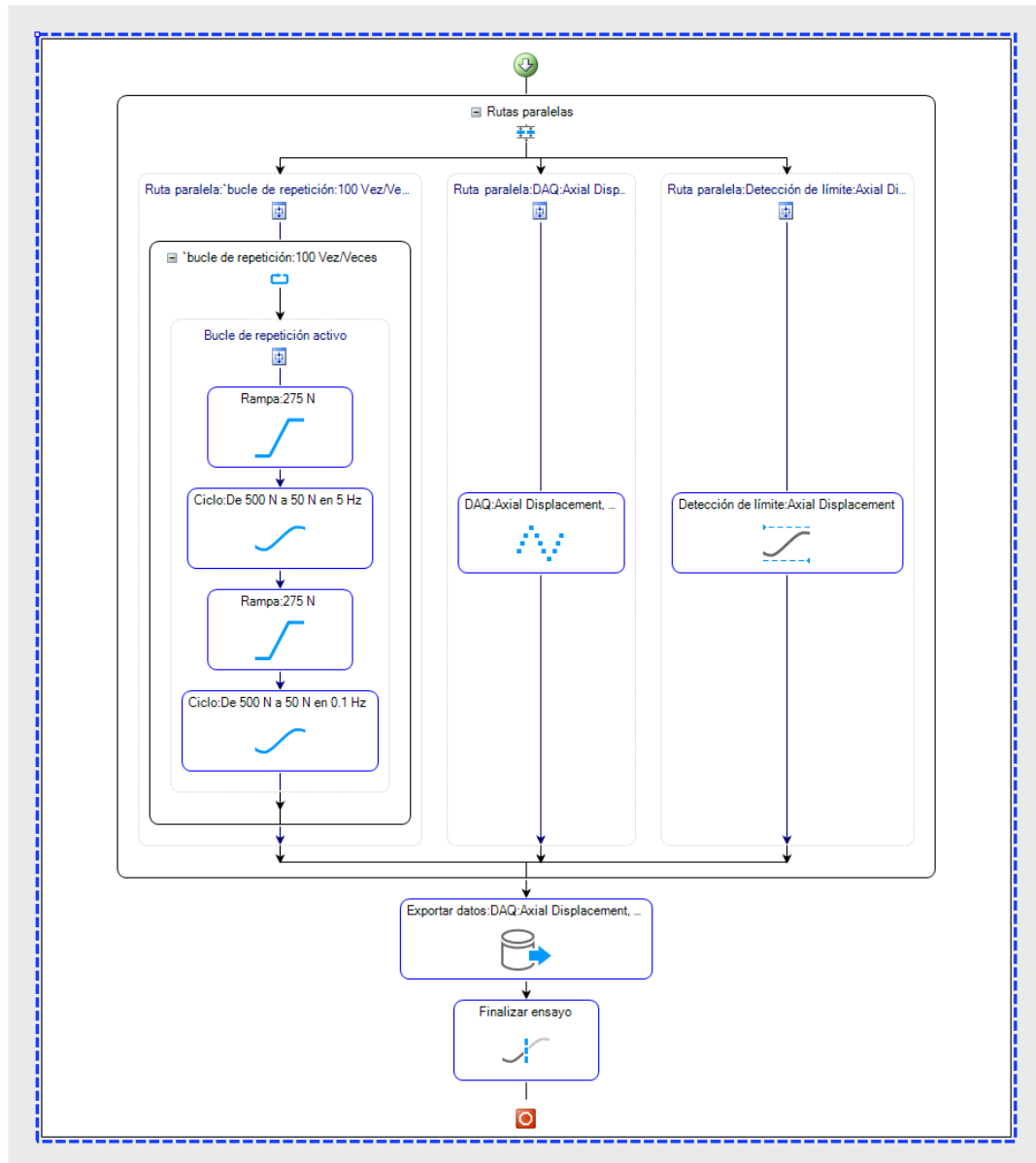
a) Dimensiones del espécimen; b) Montaje



Hz, este proceso se repitió hasta la fractura del espécimen. El procedimiento de adquisición de datos se muestra en la figura 5.

**Figura 5**

*Programa de adquisición de datos de ensayos de fatiga*

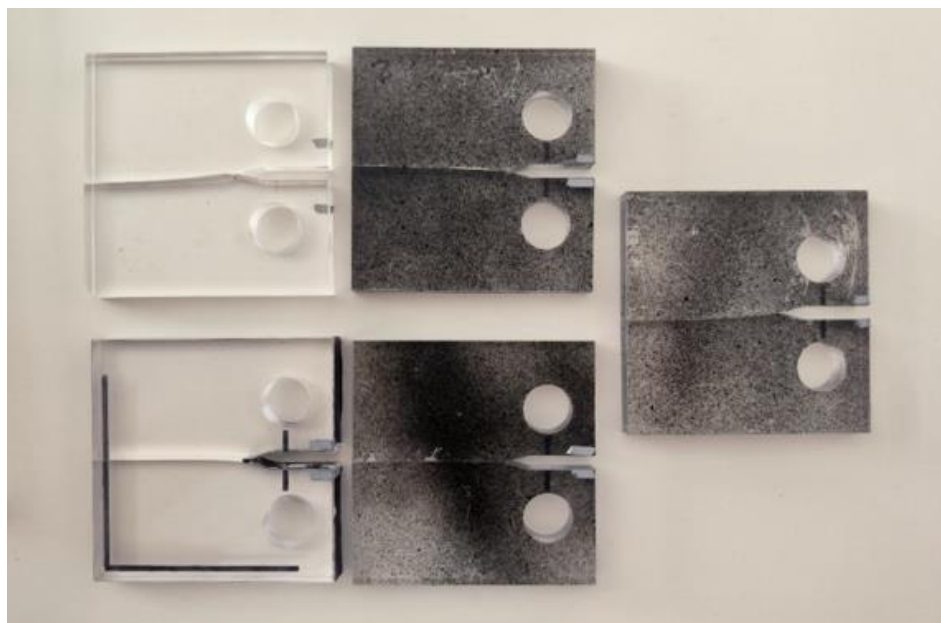


La aplicación de la carga  $P$  adoptó un patrón sinusoidal, debido a que el objetivo fue tomar datos en la región de crecimiento estable, se buscó un valor de  $\Delta P$  indujera un  $\Delta K$  superior al umbral de tenacidad sin sobrepasar la tenacidad a la fractura.

Se dispuso de un conjunto de 6 especímenes, que se muestran en la figura 6. El primero fue utilizado para determinar los parámetros de calibración del material. Posteriormente las muestras restantes fueron procesadas. Dado que la recopilación de datos se basó en el procesamiento de imágenes, se exploraron diversas estrategias para mejorar el contraste de las regiones de interés. Inicialmente, se empleó el uso de pintura negra; sin embargo, finalmente se aplicó un patrón de puntos aleatorios por medio de pintura en aerosol, la calidad del mismo fue verificada según los datos reportados por (Lecompte et al., 2006).

### Figura 6

*Probetas sometidas al ensayo de crecimiento de grietas*

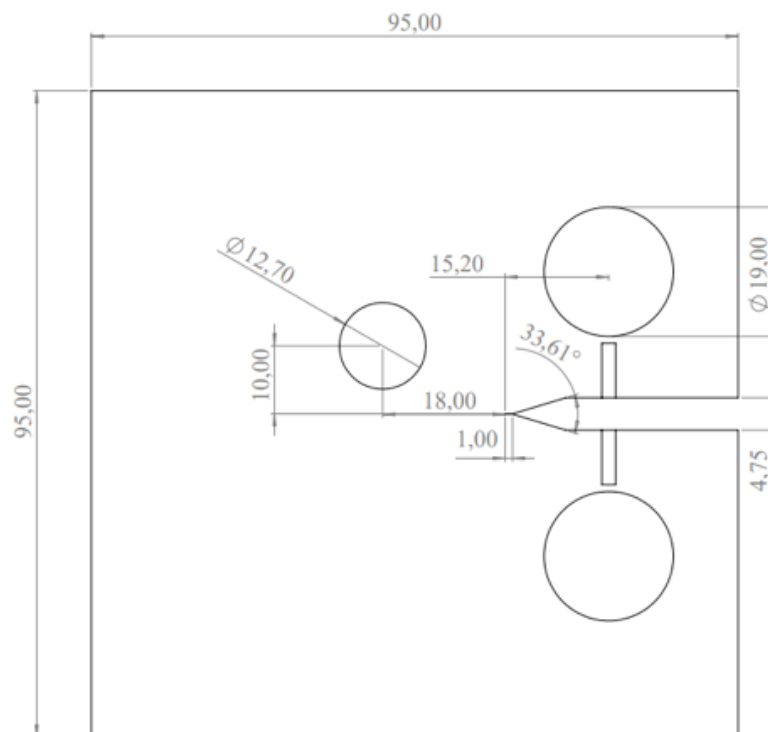


### 4.3 Ensayos de fatiga de modo mixto

La inducción del modo mixto puede lograrse de dos maneras, aplicando la carga de forma inclinada o introduciendo una discontinuidad geométrica que altere la ruta de la grieta al propagarse. En este proyecto, se optó por utilizar una probeta C(T) modificada. Utilizando la geometría representada en la figura 4 se realizó una perforación de  $\varnothing = 12,7 \text{ mm}$  para generar el modo mixto según ensayos planteados en literatura (Díaz Rodríguez et al., 2018). La figura 7 muestra las dimensiones de la probeta C(T) modificada.

**Figura 7**

*Dimensiones geometría C(T) modificada*



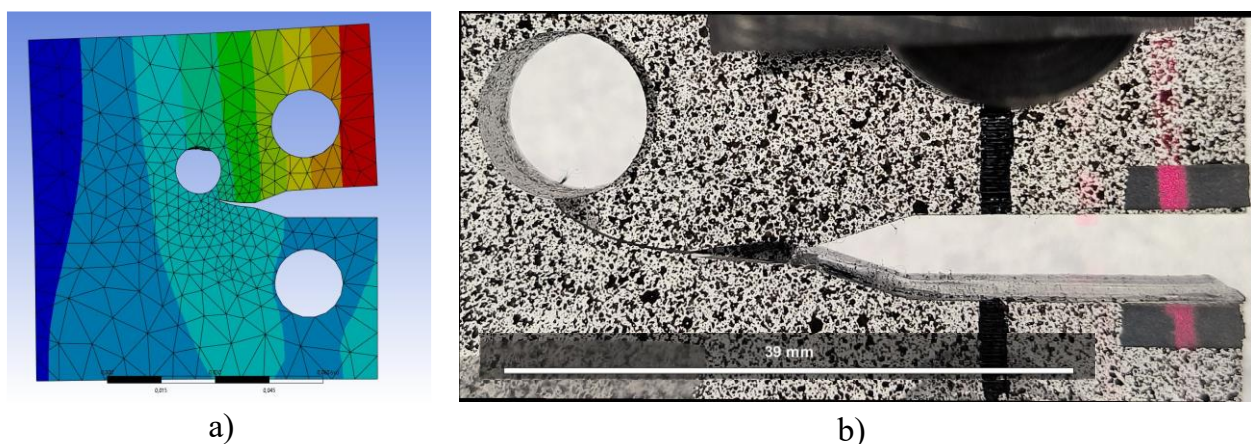
La ubicación del concentrador de esfuerzos se determinó utilizando el software de elementos finitos ANSYS, haciendo uso de la herramienta SMART Fracture. Esta herramienta utiliza la regla de Paris para crecimiento de grietas, el objetivo de la simulación fue lograr la mayor longitud y ángulo de inclinación de la grieta. La figura 8(a) ilustra la trayectoria de la grieta para una probeta presentada en la figura 7. La simulación se llevó a cabo hasta que el valor calculado de  $K_I$  alcanzó  $\Delta K_{IC}$ . Es importante detener la simulación cuando se alcanza este valor debido a que la herramienta puede continuar la simulación más allá del valor límite de la fractura generando resultados irrealistas.

En la figura 8(b) se presenta la trayectoria registrada experimentalmente de una de las probetas, se observó una tendencia similar en todos los especímenes evaluados experimentalmente.

Estos ensayos no se encuentran estandarizados. Sin embargo, adoptando el enfoque de otros investigadores (Díaz & Freire, 2022) se conservaron las condiciones de la norma ASTM E647-23a aplicándolas a las probetas modificadas geoméricamente. Debido a que se anticipaba una vida menor de la probeta debido a la inducción de modo mixto, fueron ajustadas algunas

### Figura 8

a) *Trayectoria simulada* b) *Trayectoria experimental*



condiciones experimentales. La frecuencia de aplicación de la carga, según el procedimiento mostrado en la figura 5, fue reducida a 3.5 Hz y la frecuencia de adquisición de datos fue incrementada a 350 ciclos.

#### **4.3.4 Procesamiento de datos**

En esta subsección se aborda el proceso de tratamiento de los datos recopilados, esto incluye procesos de filtrado, obtención de parámetros clave y herramientas de tratamiento de datos.

##### ***4.4.1 Ensayos de tracción***

Usando los datos obtenidos en las pruebas de tracción se realizó un proceso de filtrado y limpieza, esto evito resultados incoherentes y ruido. El cálculo del esfuerzo implicó la división de la fuerza aplicada entre el área transversal de la probeta  $A_o$ . La deformación se obtuvo al dividir el valor registrado por el extensómetro entre su longitud de calibración. Con estos datos se construyeron las curvas de esfuerzo-deformación.

El módulo de Young fue determinado calculando la pendiente de la curva en un intervalo de deformación desde 0 hasta el límite proporcional, estos procedimientos se desarrollaron siguiendo las indicaciones de la norma ASTM D638-22.

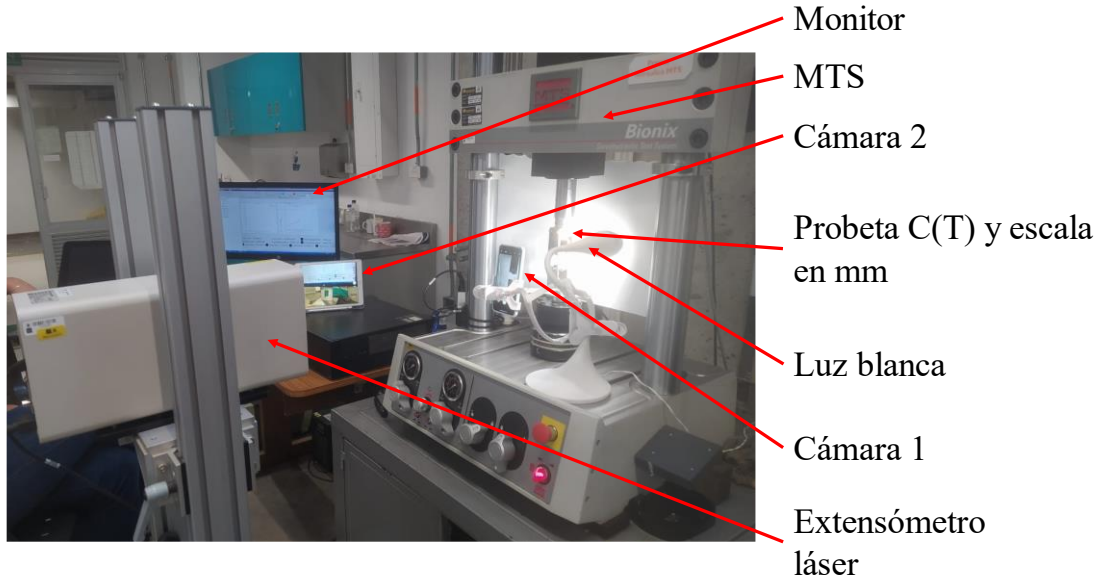
##### ***4.4.2 Pruebas de fatiga***

En las pruebas realizadas fue necesario registrar cuatro tipos de datos simultáneamente: el número de ciclos  $N$ , la carga aplicada, la fotografía de la probeta en el instante de apertura y el desplazamiento de la apertura de la punta de la grieta.

Adicionalmente al montaje presentado en la figura 9 incorporaron dos pulsadores Bluetooth. Uno vinculado con la cámara que documentaba la probeta, cámara 1, y otro a la cámara

**Figura 9**

*Montaje para pruebas de modo mixto*



2, la cual registraba el monitor de la máquina de ensayo. Cuando era reducida la frecuencia ambos pulsadores eran accionados al tiempo, con esto, uno registra el valor de N, así como la fuerza aplicada y el otro la fotografía de la probeta. Simultáneamente el extensómetro láser registraba datos de manera constante. La metodología de medición se hizo siguiendo resultados de literatura (Díaz Rodríguez et al., 2023).

Concluido el ensayo se procedió a buscar los valores registrados por el extensómetro, utilizando los valores registrados en el monitor, se identificó el valor coincidente mediante marcas temporales y el número de ciclos.

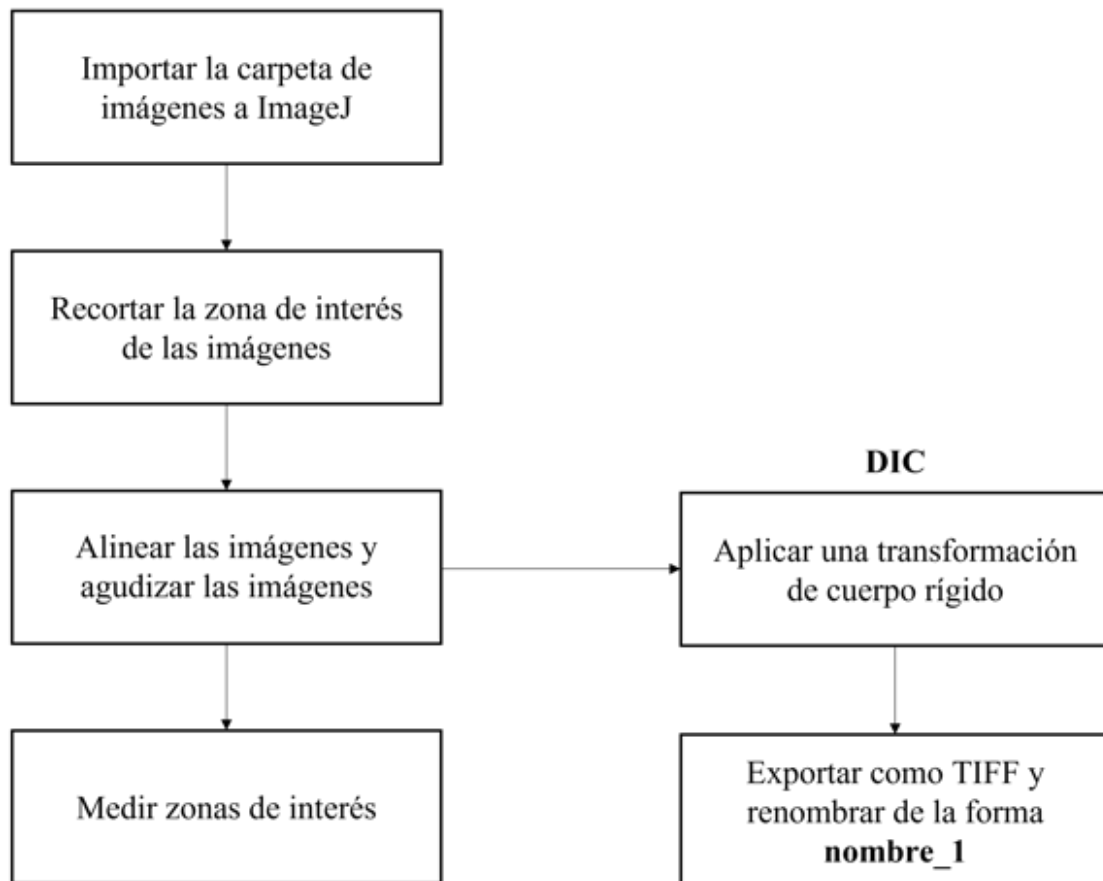
Una vez identificadas las fotografías destinadas al análisis estas son archivadas con el nombre correspondiente al número de ciclos que representaban. El procesamiento de las imágenes empleó el software ImageJ siguiendo el proceso detallado en la figura 10. Para el procesamiento de imágenes manual fue necesario identificar 6 zonas de interés en cada imagen, las cuales se

detallan en la figura 11, cada una de estas fue medida en 5 ocasiones para retirar la subjetividad de la medición del usuario. A partir de estas mediciones se calculó el valor promedio y este se convirtió en el valor de referencia para cada conjunto de datos. En los casos donde la punta de la grieta no era aparente fue necesario hacer uso de DIC, sin embargo, el uso de esta técnica se profundiza en otra sección.

### Figura 10

*Procesamiento de imágenes manual y DIC*

#### Procesamiento de imágenes manual

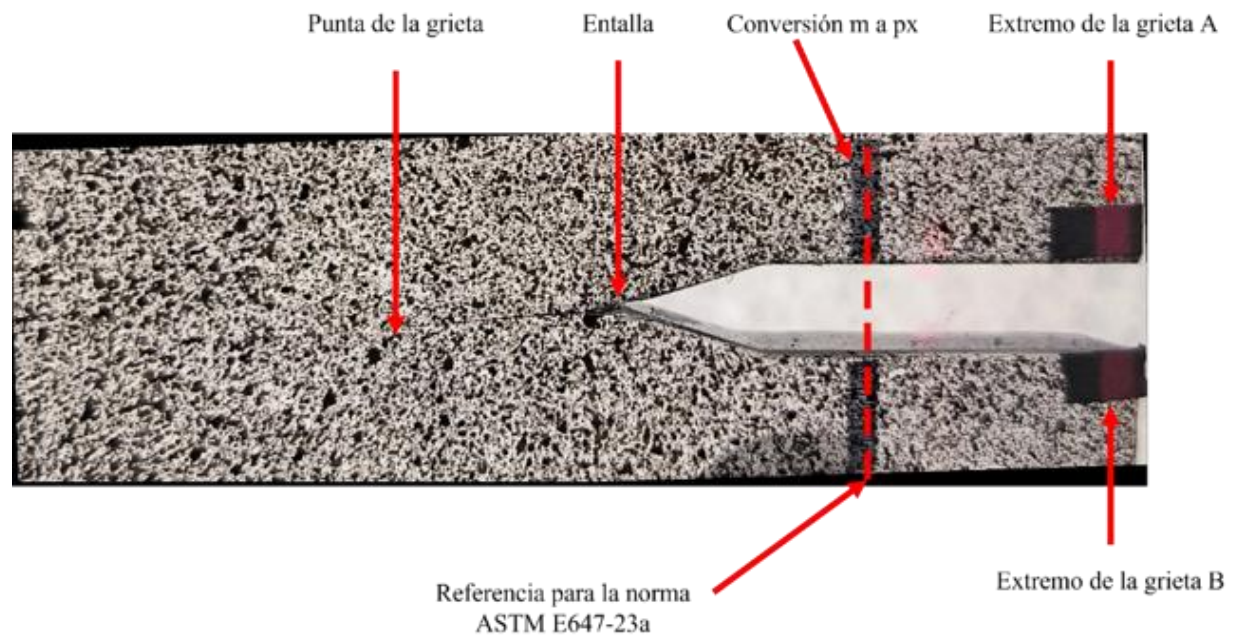


En el caso de los ensayos de modo mixto, no fue necesario calcular el valor de referencia según la norma ya que este es válido únicamente para pruebas de modo I.

Estas mediciones proporcionaron un conjunto de coordenadas, para convertir estas medidas en pixeles a metros se obtuvo un factor de conversión midiendo horizontalmente el grabado presente en el espécimen el cual cuenta con dimensiones de 0.002 m.

**Figura 11**

*Zonas de interés a identificar en las imágenes*



#### 4.4.2.1 Modo I

La determinación de  $\Delta K$  según la norma ASTM E647-23a se realiza por medio de la ecuación 11, esta es un ajuste paramétrico a los datos numéricos que representan el valor máximo de  $K_I$  y este generalmente se presenta al interior de la probeta, mientras que superficialmente son menores. Como los SIF se tomaron desde desplazamientos medidos en la superficie, se espera que los SIF experimentales sean menores que los numéricos.

$$\Delta K_I = \frac{\Delta P}{B\sqrt{W}} * \frac{(2 + \frac{a}{W})}{(1 - \frac{a}{W})^{\frac{3}{2}}} * (0.886 + 4.64 \frac{a}{W} - 13.32 (\frac{a}{W})^2 + 14.72 (\frac{a}{W})^3 - 5.6 (\frac{a}{W})^4) \quad (11)$$

- $\Delta P$  corresponde a la  $P_{max} - P_{min}$
- $B$  corresponde al calibre de la probeta
- $a$  representa la medida de la punta de la grieta respecto a la referencia especificada en la norma, referirse a figura 11
- $W$  es una dimensión paramétrica para cada probeta, en este caso fue 0.076 m

Para el cálculo de la tasa de crecimiento fue necesario usar la ecuación 12 para cada uno de los intervalos registrados.

$$\frac{da}{dN} = \frac{a_f - a_o}{N_f - N_o} \approx \frac{\Delta a}{\Delta N} \quad (12)$$

Una vez han sido calculadas las ecuaciones 11 y 12 para cada una de las imágenes, se generó un gráfico de dispersión con escalas logarítmicas, posteriormente se procedió a hacer un ajuste potencial para obtener las constantes de crecimiento de la regla de Paris ( $C$  y  $m$ ) esto se realizó con la ecuación 9. Posteriormente se realizó el ajuste con la ecuación 10 con el fin de obtener las constantes de crecimiento de Forman.

#### 4.4.2.2 Modo II

Para las probetas de modo mixto, no es posible emplear la ecuación 11, en este caso es necesario calcular el desplazamiento de la apertura de la punta de la grieta (CTOD) presentada en las ecuaciones 13 y 14 (Díaz Rodríguez et al., 2018) que son obtenidas a partir de la solución de Williams para los campos de desplazamiento de una placa infinita.

$$\Delta K_I = \frac{E\Delta V}{2(1+\nu)} \left[ \sqrt{\frac{r_a}{2\pi}} * \sin \frac{\theta_a}{2} \left[ \frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta_a}{2} \right] - \sqrt{\frac{r_b}{2\pi}} * \sin \frac{\theta_b}{2} \left[ \frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta_b}{2} \right] \right]^{-1} \quad (13)$$

$$\Delta K_{II} = \frac{E\Delta U}{2(1+\nu)} \left[ \sqrt{\frac{r_a}{2\pi}} * \sin \frac{\theta_a}{2} \left[ \frac{2}{1+\nu} + \cos^2 \frac{\theta_a}{2} \right] - \sqrt{\frac{r_b}{2\pi}} * \sin \frac{\theta_b}{2} \left[ \frac{2}{1+\nu} + \cos^2 \frac{\theta_b}{2} \right] \right]^{-1} \quad (14)$$

Donde:

- $E$  corresponde al modulo de Young
- $\Delta V$  es el desplazamiento relativo vertical de los extremos de la grieta, A y B
- $\nu$  es el modulo de Poisson
- $r_a$  constituye la distancia desde la punta de la grieta hasta el extremo  $a$
- $\theta_a$  es el ángulo medido desde el extremo  $a$  de la grieta hasta la punta, se mide respecto a la entalla
- $r_b$  constituye la distancia desde la punta de la grieta hasta el extremo  $b$
- $\theta_b$  es el ángulo medido desde el extremo  $b$  de la grieta hasta la punta, se mide respecto a la entalla
- $\Delta U$  es el desplazamiento relativo horizontal de los extremos de la grieta, A y B

Los valores de  $r_a$ ,  $\theta_a$ ,  $r_b$  y  $\theta_b$  pueden ser determinados por el procesamiento de imágenes manual, el procedimiento para determinar  $\Delta U$  se presenta en la siguiente sección.

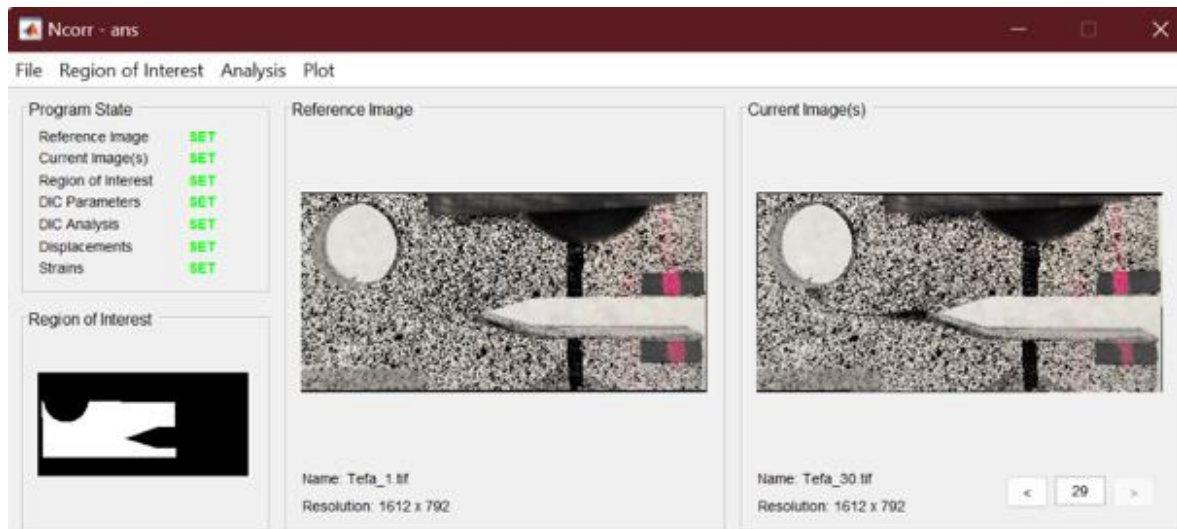
#### 4.4.2.3 Correlación digital de imágenes

En primer lugar, una vez se realizó el proceso ilustrado en la figura 10, se cargó en el programa la imagen de referencia, así como las imágenes subsiguientes. Se retiró el movimiento de cuerpo rígido. Posteriormente se define la región de interés ROI, esta contempla la zona que recorre la grieta, así como su vecindad, también es importante definirla incluyendo el lugar donde se midió el CTOD. Una vez han sido definidos estos parámetros, la interfaz se presenta como

indica la figura 12. Los parámetros que fueron definidos para el análisis de las imágenes se presentan en la tabla 1.

**Figura 12**

*Interfaz de Ncorr*



**Tabla 1**

*Parámetros DIC*

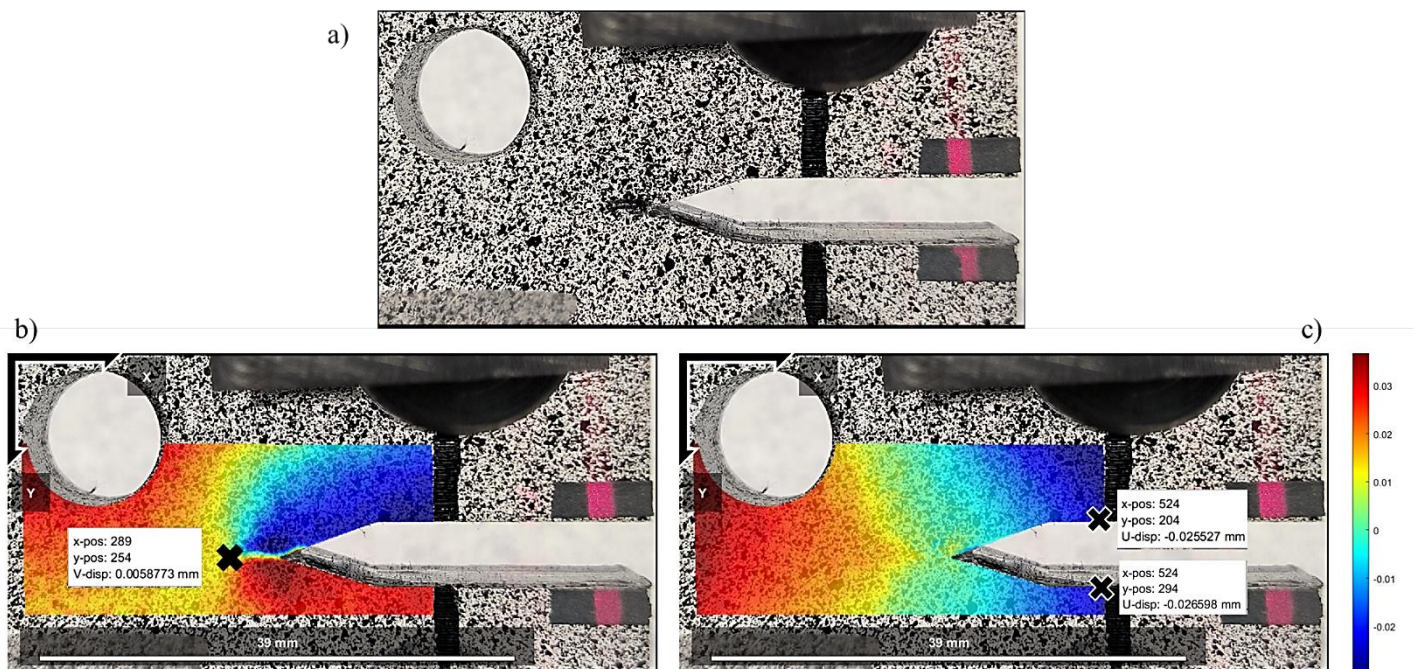
Parámetro	Valor
Radio del subconjunto	20
Espaciamiento del subconjunto	1
Radio de deformación	15
Análisis por pasos	Desactivado
Coefficiente de distorsión radial de los lentes	0
Truncamiento de subconjuntos	Desactivado
Coefficiente de correlación de corte	1.5885

Tras completar el análisis DIC, solo se requieren los campos de desplazamiento en las direcciones  $V$  y  $U$ .

La figura 13 muestra cómo se usaron los desplazamientos. En la figura 13.a, la punta de la grieta no era visible claramente. Debido a esto, se recurre al campo de desplazamientos en  $V$ , figura 13.b, esto permite identificar la posición de la punta de la grieta con más facilidad que con el campo  $U$ . Para resolver la ecuación 14, se emplea el campo de desplazamientos en  $U$ , figura 13.c. Así mismo  $\Delta U$  se compone de la suma de los desplazamientos en los puntos A y B.

### Figura 13

Resultados arrojados por Ncorr a) Imagen original; b) Campos de desplazamiento en  $V$ ; c) Campos de desplazamiento en  $U$



Una vez extraídos los campos  $U$  y  $V$ , junto con las propiedades mecánicas y la posición de la punta de la grieta se alimentaron las ecuaciones 13 y 14 para el cálculo de los SIF.

#### **4.4.3 Método de elementos finitos: SMART Fracture**

ANSYS ha introducido un novedoso método de mallado no estructurado, permitiendo reducir el tiempo de preprocesamiento usando una malla tetraédrica generada automáticamente, reduciendo el tiempo requerido para ejecutar la simulación de días a minutos. Adicionalmente se ha introducido la metodología SMART (Separating, Morphing & Adapting Technology) la cual permite ajustar la malla dinámicamente según la evolución de la simulación (Alshoabi & Fageehi, 2022).

Para usar esta herramienta es necesario programar las propiedades del material. Este se define con el esfuerzo último, el módulo de Poisson (Ali et al., 2015) y las constantes de la regla de Paris determinadas por medio de la ecuación 9.

La geometría descrita en la figura 7 fue modelada utilizando ANSYS Discovery, posteriormente se aplicó un método de mallado tetraédrico cuadrático y fue refinada la zona que comprende la trayectoria de la grieta, se definió una esfera de influencia de 0.02 m y un tamaño de elementos de 0.001 m. El resultado fue una malla con 117427 nodos y 82492 elementos.

En la herramienta de fractura, se insertó la grieta previamente mallada, ubicando el sistema de referencia en el extremo interno de la entalla. Posteriormente, se introdujo el crecimiento de grietas SMART, seleccionando la grieta premallada como grieta inicial, el tipo de crecimiento seleccionado fue de ciclo por ciclo con incrementos cada 350 ciclos y se definió  $R = 0.1$ .

Las condiciones de cargas incluyeron un soporte cilíndrico libre en la dirección radial y la condición de carga de rodamiento, definiendo la fuerza en  $Y = 500 N$ .

En la configuración del análisis, el número de pasos establecido fue 21 debido a que la grieta tenía la misma longitud que la registrada experimentalmente con este número de

incrementos. Se utilizó solo un subpaso. En el control de fractura se configuró únicamente la obtención de SIFS (Stress Intensity Factor Solutions).

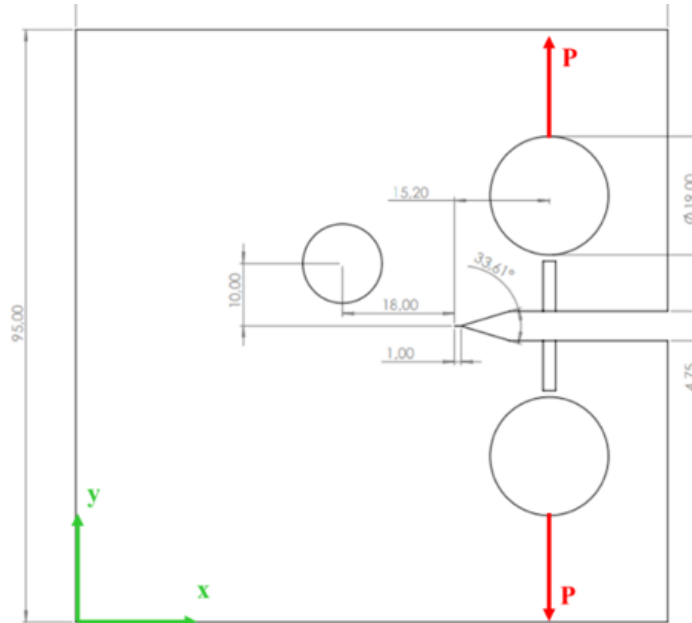
Para la solución, se consideró la deformación total y direccional en el eje  $Y$ , se incorporó la herramienta de fractura. Los resultados obtenidos fueron  $K_I$ ,  $K_{II}$ , la extensión total de la grieta y el número total de ciclos.

#### ***4.4.4 Método dual de elementos de contorno: DBEM***

Este método numérico resuelve ecuaciones integrales de contorno usando las condiciones de frontera establecidas de tracción y desplazamiento. Puede aplicarse a gran variedad de simulaciones del medio continuo, incluyendo la mecánica de la fractura. Al permitir la discretización exclusiva de la zona de frontera, el problema se reduce en su complejidad una dimensión, en este caso a un problema unidimensional, facilitando el proceso de mallado y reduciendo el recurso computacional necesario.

La implementación de este método se hace por medio del software DBEM (Mantilla & Poveda, 2023). Para desarrollar inicialmente este análisis, fue modelada la geometría descrita en la figura 7 utilizando el software GID. Se establecieron condiciones de frontera, estas incluyen la restricción de desplazamientos  $u_x = 0, u_y = 0$  en el origen, así como  $u_x = 0$  en la esquina superior izquierda. Las condiciones de carga se presentan en la figura 14.

Esta simulación empleó una serie de parámetros detallados en secciones anteriores, estos incluyen:  $R, P, E, \nu, \Delta K_{th}, \Delta K_{ic}$ , así mismo se especifica que debido al calibre de la probeta el tipo de problema corresponde a esfuerzo plano. El número de nodos fue de 670 y de elementos 335, siendo las zonas de interés los agujeros y la punta de la entalla.

**Figura 14***Geometría y condiciones de frontera DBEM***4.4.6 Comparación de los modelos de SIF equivalente y modelos de crecimiento**

Utilizando los valores de  $K_I$  y  $K_{II}$  estimados por medio de simulaciones y mediciones experimentales, se determinó el valor promedio de cada uno de los SIF equivalentes para intervalos de  $a$  que aumentan en incrementos de 0.0002 m.

Para comparar los modelos de crecimiento fue necesario modificar las ecuaciones 9 y 10, con el objetivo de contemplar el efecto del modo mixto se obtienen las ecuaciones 15 y 16 respectivamente.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eq})^m \quad (15)$$

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K_{eq})^m}{(1-R)K_{IC} - \Delta K_{eq}} \quad (16)$$

La metodología utilizada consistió en utilizar la longitud de grieta incremental de 0.002 m y los valores de  $\Delta K_{eq}$  obtenido de cada uno de los modelos (Sajith et al., 2020). A partir de estos datos fue calculado el número de ciclos estimado y se comparó con el número de ciclos experimentales, para ello. Este cálculo se realizó por medio de la ecuación 17.

$$\int_0^{\Delta a} \frac{da}{f(C, K_{IC}, R)(\Delta K_{eq})^m} = \int_0^{\Delta N} dN = \Delta N_{numerico} \quad (17)$$

El cálculo del error entre el número de ciclos experimentales y el numérico esta dado por la ecuación 18.

$$\% Error = \left( \frac{\Delta N_{numerico} - \Delta N_{experimental}}{\Delta N_{experimental}} \right) * 100\% \quad (18)$$

Finalmente, se determinó que el mejor SIF equivalente es aquel que, en combinación con el modelo de crecimiento, exhibe el menor error porcentual respecto a las observaciones experimentales.

## 5. Resultados y discusión

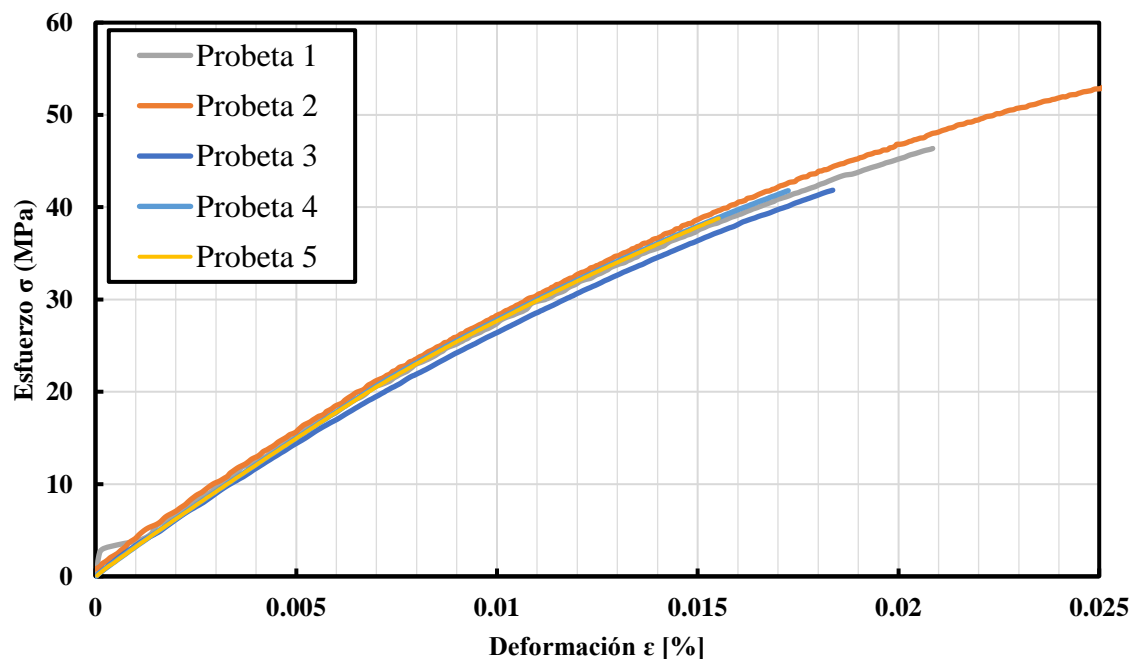
En este apartado se presentan los resultados de los ensayos mecánicos desarrollados, así como el análisis de los datos obtenidos y se comparan con resultados presentados por diversos autores.

### 5.1 Propiedades mecánicas

En la figura 15 se muestran las curvas esfuerzo-deformación que se obtuvieron a partir de los ensayos a tracción, aunque fueron ensayadas 8 pruebas, solo se incluyen los datos arrojados por 5 probetas. Los resultados que fueron descartados presentaban secuencias atípicas y errores en la adquisición de datos. Las curvas exhiben un comportamiento lineal, que es el comportamiento esperado al material debido a su comportamiento frágil.

**Figura 15**

*Curvas esfuerzo-deformación*



Las propiedades del material se presentan en la tabla 1, los valores reportados por el autor coinciden con resultados encontrados en la literatura (Ali et al., 2015) (Triclot et al., 2023).

**Tabla 2**

*Propiedades mecánicas estáticas*

<b>Propiedades</b>	<b>Valor</b>	<b>Coefficiente de variación (%)</b>
Esfuerzo último $\sigma_u$ (MPa)	44,5 $\bar{\pm}$ 5,72	12,8748
Módulo de Young $E$ (MPa)	2894,39 $\bar{\pm}$ 95	3,2825
(Ali et al., 2015) $\sigma_u$ (MPa)	72	N/A
(Ali et al., 2015) $E$ (MPa)	3100	N/A
(Triclot et al., 2023) $E$ (MPa)	2770 $\bar{\pm}$ 1	N/A
(Triclot et al., 2023) $\nu$	0.36	

Se observa una diferencia notoria en el valor del esfuerzo último en este material; sin embargo, es importante destacar que esta discrepancia no influye en los resultados obtenidos. En este contexto, el parámetro verdaderamente relevante es el módulo de Young. No obstante, se reporta el valor del esfuerzo último con el propósito de caracterizar el material utilizado en el estudio. Adicionalmente, dado que no fue posible caracterizar experimentalmente el módulo de Poisson, se ha optado por utilizar el valor de referencia reportado en la Tabla 2.

Para el estudio de las constantes de crecimiento de grieta, fueron reportadas mediciones cada 500 ciclos hasta la fractura de las probetas, siguiendo el esquema de medición descrito en la figura 5, solo 2 de los especímenes ensayados arrojaron resultados consistentes. La carga máxima fue determinada con la ecuación 11, tomando en cuenta los valores de referencia:  $\Delta K_{th} =$

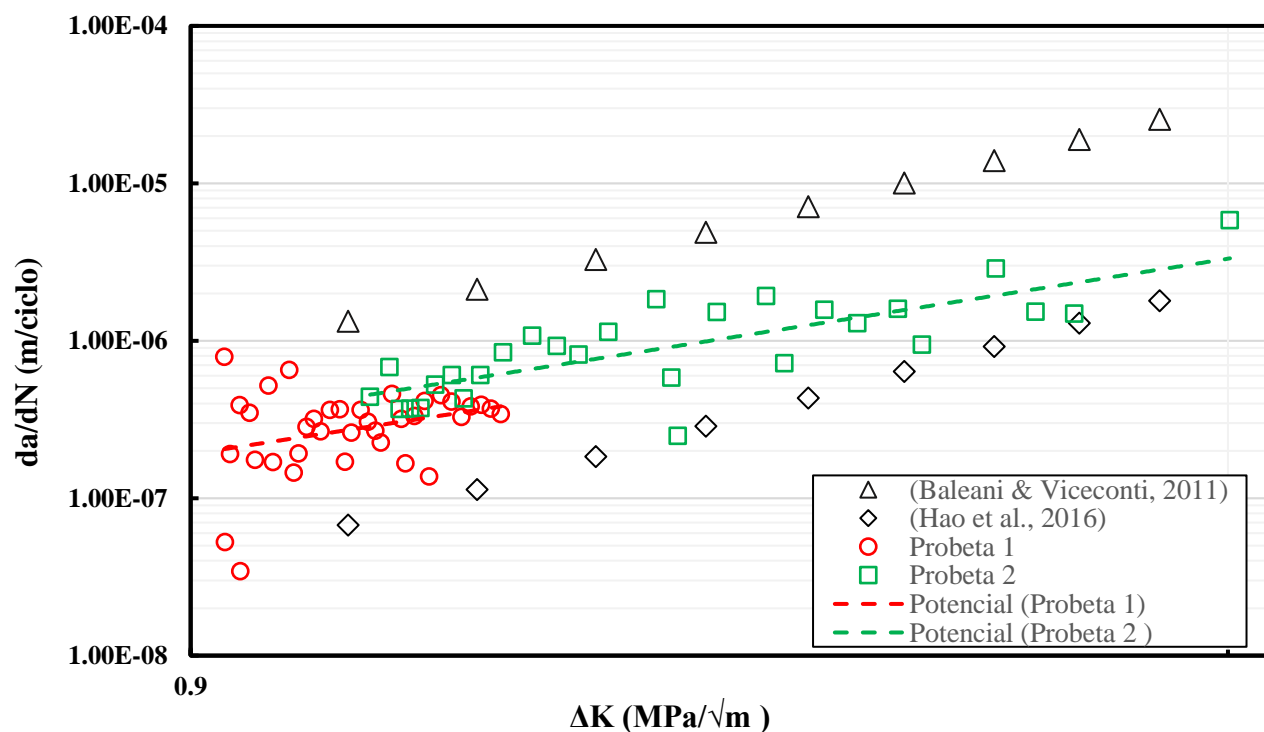
$0.635 \text{ MPa} \sqrt{m}$  (Zhao et al., 2018) y  $\Delta K_{IC} = 1.56 \text{ MPa} \sqrt{m}$  (Baleani & Viceconti, 2011). En consecuencia, la carga máxima aplicada fue  $P = 610 \text{ N}$  y la mínima  $P = 0 \text{ N}$ .

La limitada vida de las probetas puede atribuirse a la presencia de defectos internos que reducen significativamente la vida del espécimen, un comportamiento registrado por otros autores (Shi & Shan, 2014). Al examinar los especímenes con vidas cortas o que presentaron fallas súbitas, se observaron líneas de estriación cortas seguidas de una superficie lisa.

La figura 16 muestra la gráfica de la tasa de crecimiento de grieta en función de  $\Delta K_I$  en una escala logarítmica. Se presentan los datos correspondientes a 2 probetas, ya que el objetivo de esta prueba era obtener las constantes de Paris  $C$  y  $m$ . Fue realizado un ajuste potencial, con el objetivo de conocer el comportamiento de las constantes respecto a las reportadas por otros

**Figura 16**

$da/dN$  respecto a  $\Delta K$



autores, se incorporan dos series de datos ajustadas con las constantes reportadas por (Baleani & Viceconti, 2011) y (Hao et al., 2016) para fines de comparación.

La tabla 3 presenta las constantes determinadas usando la ecuación 9, así como el coeficiente de determinación de estas. Los datos arrojados por la primera probeta fueron descartados ya que, a pesar de encontrarse dentro del rango reportado por otros investigadores, presentaron un coeficiente de determinación  $R^2 = 0.0171$ .

Las constantes resultantes de la segunda probeta son las que caracterizan al material en las condiciones especificadas. Su comportamiento coincidió con los modelos reportados en la literatura. Adicionalmente comprobó por medio de simulaciones realizadas, las propiedades del material fueron definidas con los datos reportados en las tablas 1 y 2.

Las constantes de Forman se obtuvieron implementando un toolbox de optimización en Matlab. Se emplearon como condiciones iniciales reportadas en la tabla 3, y se impuso la condición de  $C > 0$ . Después de un proceso iterativo, fueron seleccionadas las constantes que presentaron el mayor  $R^2$ . Los resultados arrojados por el software se detallan en la tabla 4.

**Tabla 3**

*Constantes para la regla de Paris para probetas en modo I*

	$C \left[ \frac{m}{\text{ciclo}} (MPa\sqrt{m})^{-m} \right]$	$m$	$R^2$
<b>Probeta 1</b>	2,7142E-07	3,375	0,0171
<b>Probeta 2</b>	4,3193E-07	3,47	0,69
<b>Probeta 2 con reducción de ruido</b>	4,701E-07	5,689	0,77

Al programar el material en el software DBEM se encontró que estas no presentaban resultados precisos a pesar de presentar un comportamiento adecuado en ANSYS; por ello fue necesario hacer una reducción de ruido en los datos de la probeta 2, en secciones posteriores se profundiza la implicación de este proceso de filtrado.

**Tabla 4**

*Constantes para el modelo de crecimiento de Forman*

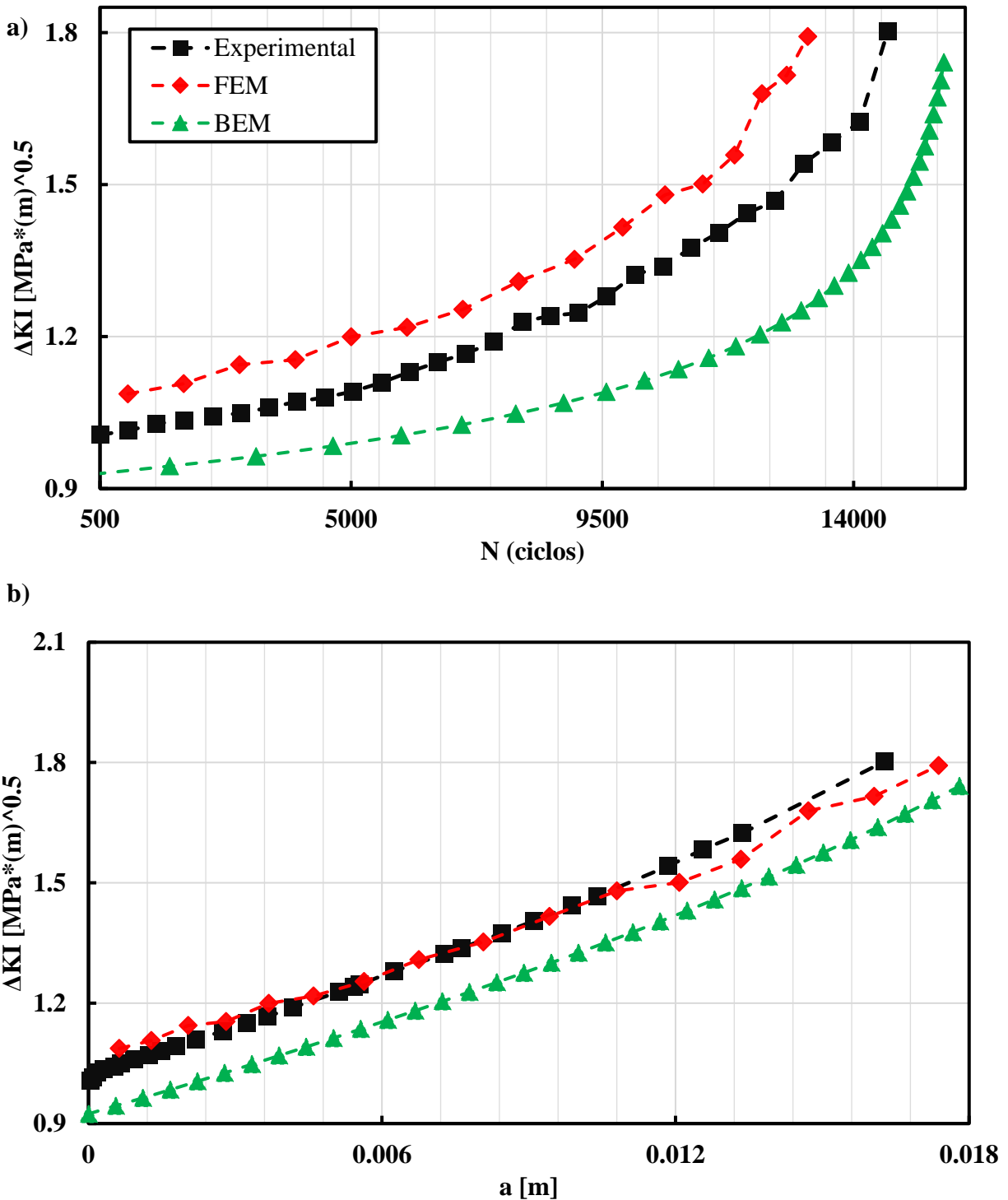
$C \left[ \frac{m}{\text{ciclo}} (MPa\sqrt{m})^{-m} \right]$	$m$	$R^2$
5.4139E-07	1.170	0,8084

## 5.2 Simulaciones

Los resultados de las simulaciones de BEM y FEM para el modo I se muestran en la figura 17. En este caso, se observa que los resultados experimentales se encuentran dentro del rango de valores arrojados por ambas simulaciones

En la figura 17.a, se presenta  $\Delta K_I$  respecto al número de ciclos,  $\Delta K$  experimental es calculado según indica la norma, es decir teniendo en cuenta el factor geométrico del tamaño de la grieta, las simulaciones cuentan con otros métodos como la tasa de liberación de energía y la integral J, sin embargo, es posible afirmar que los resultados convergen. En la figura 17.b se observa que los datos experimentales y los FEM se solapan, mientras que los datos de la simulación por BEM presentan valores de  $\Delta K_I$  ligeramente inferiores, esto puede atribuirse a las condiciones de frontera establecidas.

**Figura 17** Resultados de las simulaciones FEM y BEM comparados con los datos obtenidos experimentalmente a)  $\Delta KI$  vs  $N$ ; b)  $\Delta KI$  vs  $a$



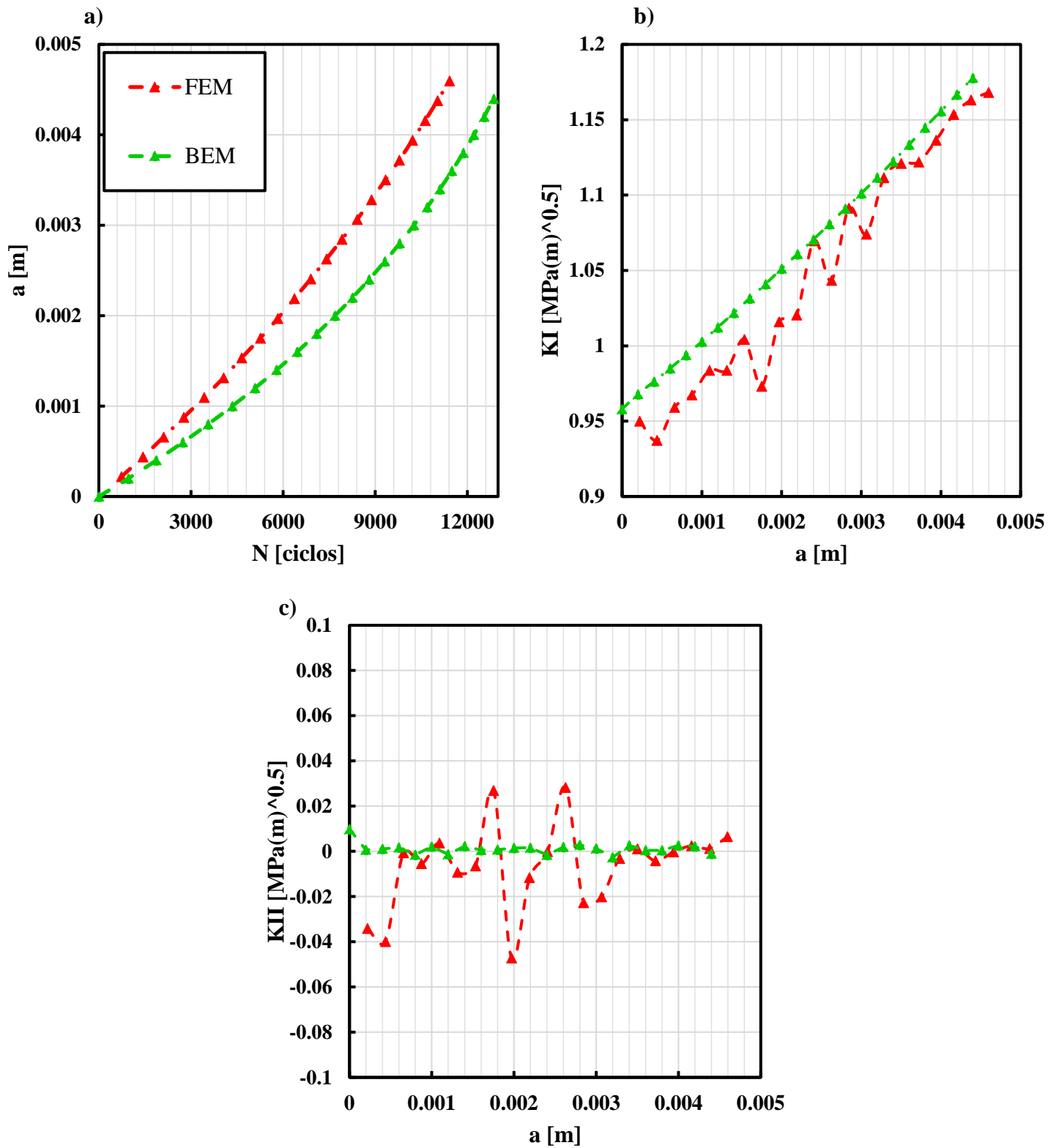
En la figura 18 se presentan los resultados de las pruebas de modo mixto, las condiciones de la prueba se mantuvieron en ambas. En la figura 18.a, se presenta el tamaño de grieta en función al número de ciclos, similar a las simulaciones de modo I se encuentra que para BEM el número de ciclos registrados es mayor.

En la figura 18.b, se observa que los datos de  $\Delta K_I$  crecen de una manera más estable en BEM. Esto podría atribuirse a que en el caso de FEM, el mallado se regenera a medida que avanza la grieta y depende de los resultados arrojados en el intervalo anterior. Esta misma tendencia se refleja en la figura 18.c, donde la presencia de este ruido se debe a la misma razón, aunque los valores para FEM parecen fluctuar significativamente, Los valores del eje Y, la variación del  $\Delta K_{II}$  muestran que esta fluctuación es realmente mínima, los valores se encuentran constantemente cercanos al cero.

Estos resultados validan numéricamente las constantes de propagación encontradas experimentalmente.

Figura 18

Simulaciones FEM y BEM, a)  $a$  vs  $N$ ; b)  $\Delta KI$  vs  $a$ ; c)  $\Delta KII$  vs  $a$



### 5.3 Fatiga en modo mixto, ensayos experimentales

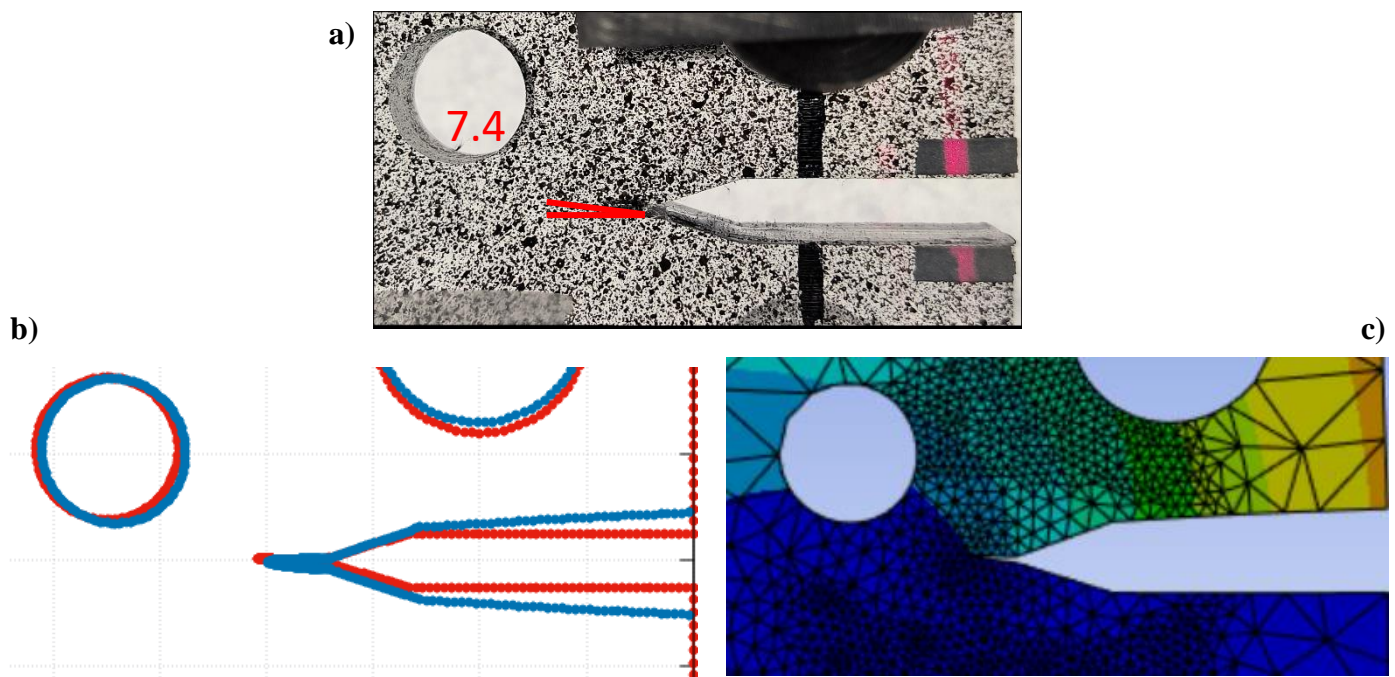
Fueron llevados a cabo 10 ensayos, sin embargo, debido a la fragilidad del material y a la naturaleza aleatoria de la fatiga, solo fue posible recopilar datos de 5 especímenes.

Inicialmente, se construyó la gráfica de tamaño de grieta respecto a número de ciclos, tal como se ilustra en la figura 20. Las probetas 1, 2 y 3 fueron descartadas por su corta vida y por su tendencia atípica, la pendiente de crecimiento de estas resulta elevada en comparación con otros datos registrados, este crecimiento acelerado pudo ser atribuido a la presencia de defectos internos o la creación de precarga en el montaje de estas.

La medida de  $\Delta K_{II}$  refleja la inclinación que toma la grieta, como se ilustra en la figura 19. Cuando se simula la región de crecimiento estable, es decir la que compete a la regla de Paris, se observa que el ángulo de inclinación de la grieta es de  $7.4^\circ$ . El criterio que se usó para detener la simulación fue la longitud total de la grieta registrada en el último intervalo registrado antes de la fractura.

**Figura 19**

*Trayectoria de la grieta a) Experimental; b) BEM; c) FEM*

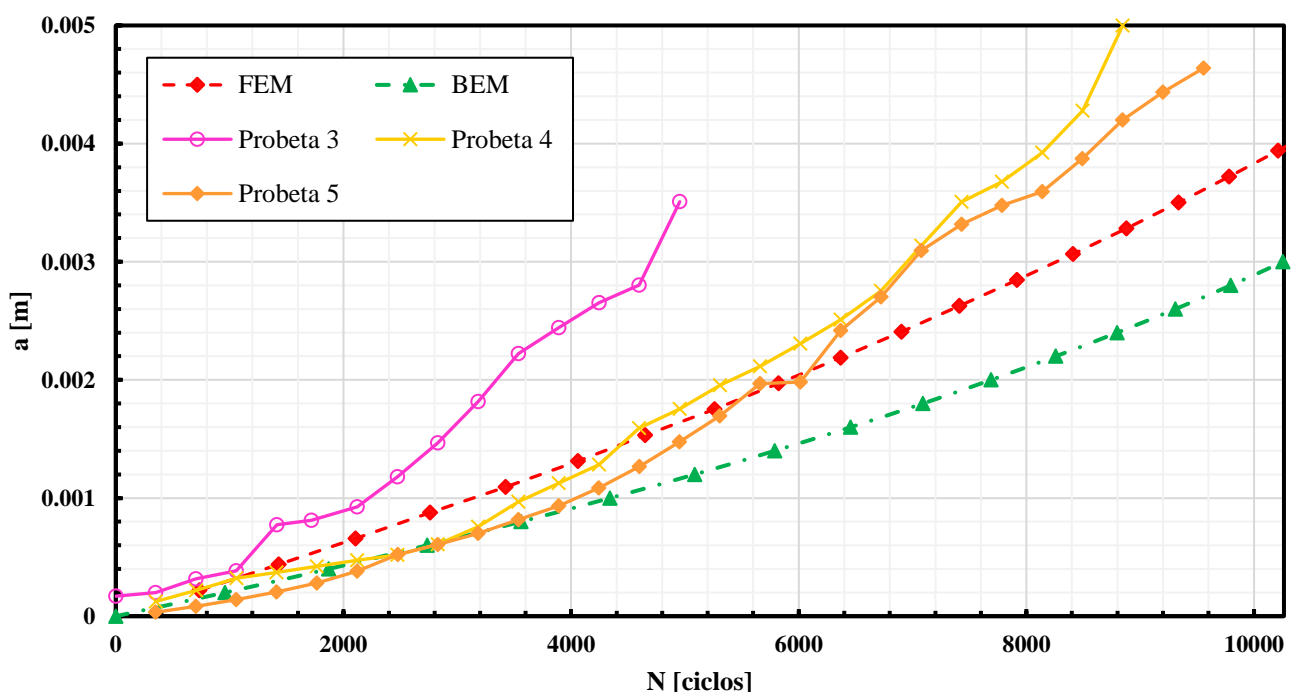


Las probetas 4 y 5 exhiben una región de crecimiento estable y convergente hasta aproximadamente 6000 ciclos, momento donde la tasa de crecimiento aumenta. Este cambio esto podría atribuirse al inicio de una zona inestable de propagación, es interesante comparar el crecimiento de estas probetas con los datos arrojados por las simulaciones, las tasas de crecimiento son similares hasta este valor de 6000 ciclos, esto respalda la hipótesis de la entrada a una región inestable. Es importante destacar que las simulaciones únicamente simulan en la región 2 de la regla de Paris. Por lo tanto, el hecho de que ambas probetas presenten este comportamiento puede implicar que la pendiente de crecimiento deja de ser constante y aumenta ligeramente, de ahí la discrepancia en la longitud total de la grieta respecto a los valores reportados por las simulaciones.

La figura 21 presenta los valores de  $\Delta K_I$  y  $\Delta K_{II}$  para las probetas mencionadas, así como los resultados arrojados por las simulaciones.

**Figura 20**

*Crecimiento de grieta respecto a número de ciclos en modo mixto, datos experimentales y simulación*



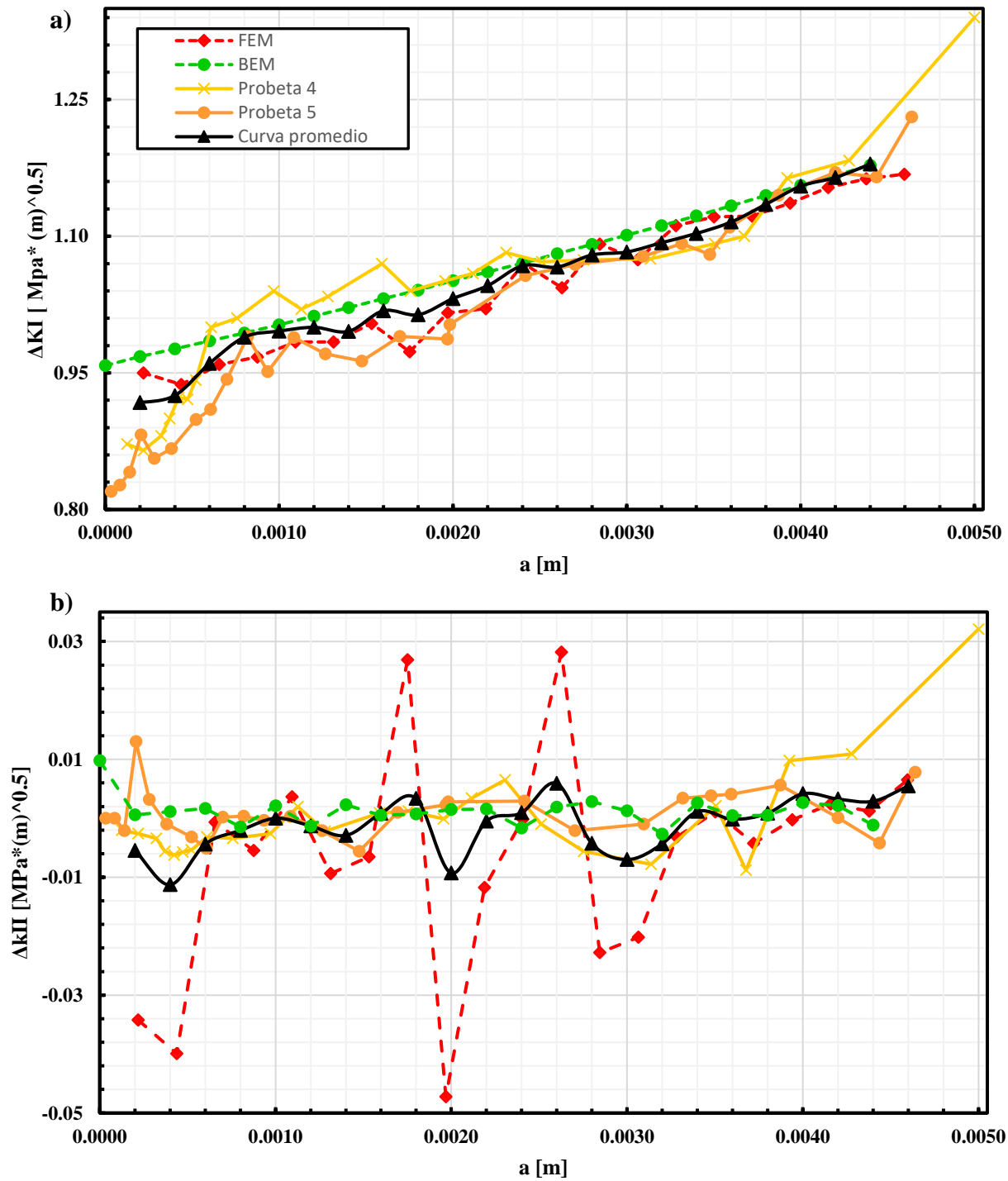
El desplazamiento en  $U$  es bastante pequeño y es difícil medirlo con los instrumentos usados ya que en algunos casos es inferior a 1 px, por ello, la mayoría de los valores registrados no presentan una tendencia y siempre se encuentran cercanos al valor de 0. Adicionalmente debido a la fragilidad del material, la curvatura de la grieta fue mínima, es decir no se esperaban grandes valores para  $\Delta K_{II}$ , este hecho es soportado por los resultados de las simulaciones.

Sin embargo, los resultados de  $\Delta K_I$  sí pudieron ser cuantificados de una manera acertada, esto debido a la presencia del extensómetro laser, adicionalmente algunos desplazamientos en la dirección  $V$  fueron medidos con el método presentado en la figura 13, se encontró que este desplazamiento arrojaba valores bastante cercanos.

Con los valores registrados experimentalmente y los arrojados por las simulaciones se creó una curva promedio de los SIF. Esta curva fue construida con el valor promedio de los SIF en intervalos incrementales de  $a = 0.002 m$ . Con los valores definidos por esta curva procedió a realizar el cálculo de los SIF equivalentes.

**Figura 21**

Resultados para las pruebas de modo mixto a)  $\Delta KI$  vs  $a$ ; b)  $\Delta KII$  vs  $a$



### 5.3 Evaluación de los modelos de SIF equivalente

La tabla 5 presenta los datos empleados, así como los resultados para cada uno de los modelos de SIF equivalente, estos se obtuvieron con las ecuaciones 4, 5, 6 y 7.

**Tabla 5**

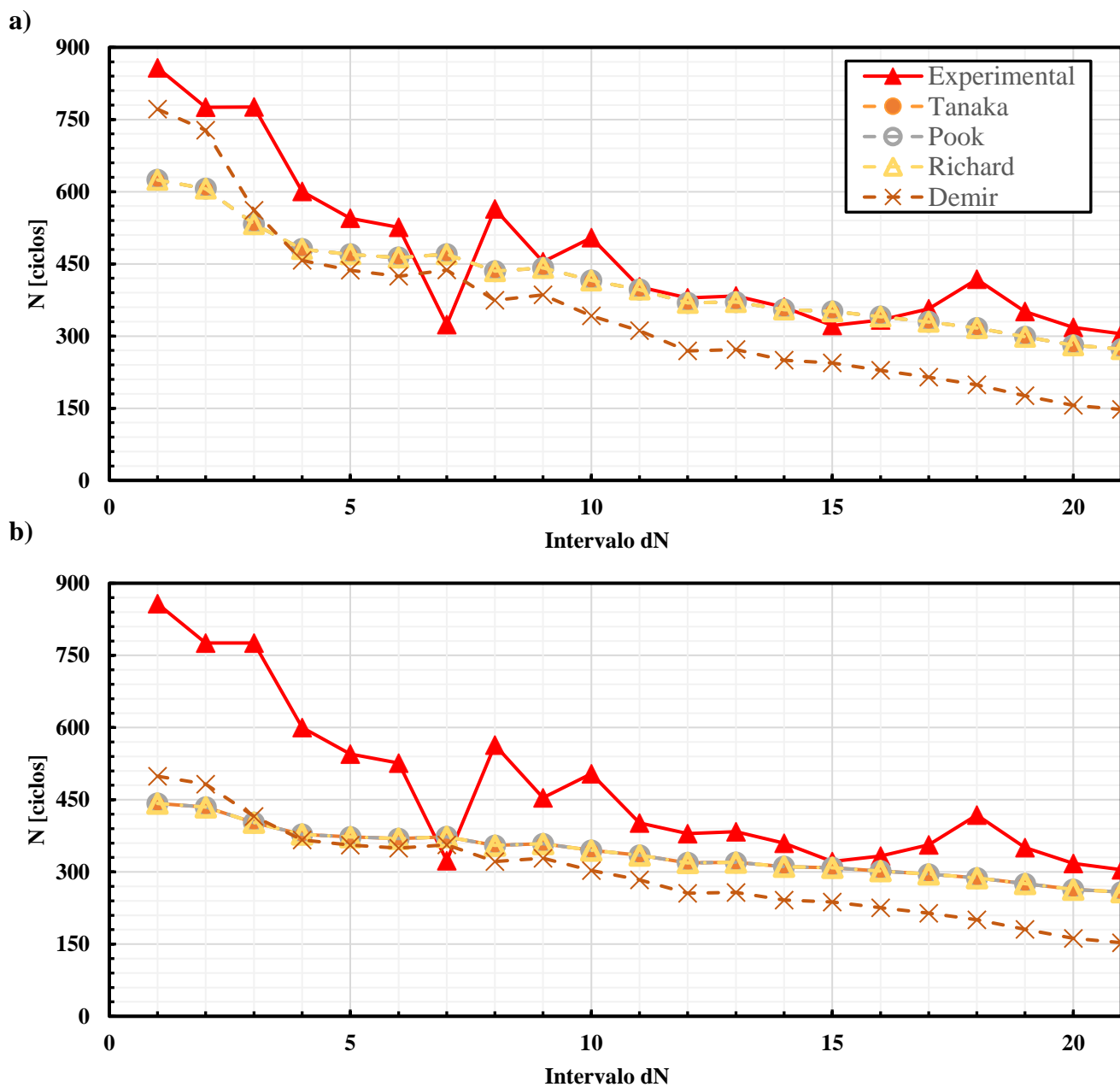
*Parámetros experimentales y calculados para determinar los SIF (MPa√m) equivalentes*

N	a	$\Delta K_I$	$\Delta K_{II}$	$\Delta K_{Tanaka}$	$\Delta K_{Pook}$	$\Delta K_{Richard}$	$\Delta K_{Demir}$
[Ciclos]	[m]	[MPa * √m]					
857	2.0E-04	0.91737	-0.00546	0.91745	0.91742	0.91741	0.86317
1633	4.0E-04	0.92511	-0.01127	0.92543	0.92531	0.92529	0.87789
2409	6.0E-04	0.96042	-0.00439	0.96047	0.96045	0.96045	0.94607
3009	8.0E-04	0.98929	-0.00205	0.98930	0.98929	0.98929	1.00377
3554	1.0E-03	0.99586	0.00001	0.99586	0.99586	0.99586	1.01714
4080	1.2E-03	1.00005	-0.00129	1.00006	1.00006	1.00006	1.02573
4404	1.4E-03	0.99559	-0.00292	0.99561	0.99561	0.99560	1.01661
4968	1.6E-03	1.01823	0.00085	1.01823	1.01823	1.01823	1.06336
5422	1.8E-03	1.01377	0.00335	1.01379	1.01379	1.01379	1.05408
5926	2.0E-03	1.03157	-0.00929	1.03172	1.03169	1.03168	1.09149
6328	2.2E-03	1.04575	-0.00048	1.04575	1.04575	1.04575	1.12161
6708	2.4E-03	1.06766	0.00093	1.06767	1.06766	1.06766	1.16911
7091	2.6E-03	1.06617	0.00591	1.06623	1.06622	1.06622	1.16589
7451	2.8E-03	1.07944	-0.00427	1.07947	1.07947	1.07947	1.19507
7773	3.0E-03	1.08269	-0.00700	1.08276	1.08275	1.08275	1.20230
8106	3.2E-03	1.09289	-0.00433	1.09292	1.09292	1.09291	1.22504
8463	3.4E-03	1.10299	0.00115	1.10299	1.10299	1.10299	1.24776
8881	3.6E-03	1.11558	-0.00016	1.11558	1.11558	1.11558	1.27641
9232	3.8E-03	1.13501	0.00085	1.13501	1.13501	1.13501	1.32126
9550	4.0E-03	1.15491	0.00416	1.15493	1.15493	1.15493	1.36801
9854	4.2E-03	1.16448	0.00327	1.16449	1.16449	1.16449	1.39076
9589	4.4E-03	1.17916	0.00289	1.17917	1.17917	1.17917	1.42606

Calculando el número de ciclos estimado para cada uno de los intervalos de  $dN$ , se obtienen los resultados presentados en la figura 22 para el modelo de crecimiento de Paris y el modelo de crecimiento de Forman respectivamente.

**Figura 22**

*Numero de ciclos calculado respecto al experimental, a) Regla de Paris; b) Modelo de crecimiento de Forman*



La figura 22.a permite apreciar que los modelos de Tanaka, Pook y Richard predicen un número de ciclos cercano al registrado experimentalmente después del intervalo 9. Los intervalos anteriores indican una tasa de crecimiento lenta, aproximadamente un 40% de ciclos más para todos los SIF equivalentes excepto Demir. Esta discrepancia concuerda con el comportamiento físico de los materiales sometidos a caras de fatiga, la tasa de propagación inicial siempre es menor en la región I, es posible afirmar que los datos registrados en estos intervalos corresponden a la transición entre la región I y II. Siempre se presentan errores más altos para grietas cortas.

La figura 22.b refuerza el argumento anterior, debido a que el modelo de crecimiento de formán contempla regiones II y III, las tasas de crecimiento son significativamente más elevadas (Akramin et al., 2020), por ello el número de ciclos precedido resulta aproximadamente 50% inferior con cada uno de los modelos.

Para ambos modelos de crecimiento, el SIF con un rendimiento menos preciso en relación con el comportamiento real del material resulta ser el de Demir. Los otros modelos convergen en sus resultados, esto se debe a que los valores de  $\Delta K_{II}$  son bajos en todos los intervalos y, por lo tanto, no tiene un impacto significativo. Esto puede comprobarse al revisar los datos reportados en la tabla 5, donde se observa que usar el valor de  $\Delta K_I$  o el de los modelos propuestos por Tanaka, Pook o Richard es prácticamente lo mismo. resulta interesante apreciar como a pesar de ser deducidos por teorías diferentes  $\Delta K_I$  resulta constante ante bajos valores de  $\Delta K_{II}$ .

En resumen, se puede concluir que el uso de los SIF equivalentes de Tanaka, Pook o Richard no muestra diferencias significativas para el PMMA. Se determina que el modelo de Tanaka proporciona la mejor predicción de ciclos. Este modelo suele estar incorporado en varios programas de simulación computacional. Dado que el material es inherentemente frágil, no se observa un modo mixto pronunciado. Sin embargo, es importante destacar que el modelo de Paris

proporciona una aproximación adecuada al comportamiento real del material, con un error medio del 12.8% en la estimación de ciclos por intervalos y un error del 14.83% en el número total de ciclos, siempre con una tendencia conservadora. Mientras que el modelo de Forman con un error medio del 35.8% en la estimación de ciclos por intervalos y un error del 39% en el número total de ciclos.

Para realizar una medición de  $\Delta K_{II}$  se sugiere incorporar un espécimen de flexión de tres puntos, así como utilizar una probeta de un tamaño considerablemente mayor, otros estudios reportan una vida más larga (Dirik & Yalçinkaya, 2018). Sin embargo, estos estudios se basaron en simulaciones computacionales. Como se mencionó en secciones anteriores, las simulaciones pueden prolongar la propagación de una grieta incluso cuando en realidad el material ya ha llegado al punto de fractura.

## 6. Conclusiones

En este estudio se muestran los mecanismos de fractura del PMMA bajo modo mixto I y II, se logró caracterizar las propiedades mecánicas del material bajo carga estática y alternante usando técnicas ópticas. El uso de técnicas de metrología óptica probaron ser una solución efectiva para la medición de los campos de desplazamientos que se presentaron en la superficie de la probeta.

Por medio de técnicas de procesamiento de imágenes se logró medir satisfactoriamente los valores de  $\Delta K_I$  y  $\Delta K_{II}$ . Es importante destacar que la adquisición de datos fue realizada con un montaje de bajo costo, usando un teléfono móvil y equipos de laboratorio estándar, estas mediciones fueron contrastadas con los obtenidos en simulaciones computacionales por medio de elementos finitos y método de elementos de contorno donde se comprueba su convergencia.

Usando los valores obtenidos de manera experimental así como por medio de simulaciones numéricas, fueron determinados los SIF equivalentes, empleando los modelos propuestos por Tanaka, Pook, Richard y Demir, se encontró que debido a la poca influencia del modo II en la probeta, el uso de cualquiera de esos modelos resulta aceptable, debido a su menor complejidad, amplio estudio por parte de diferentes autores y su incorporación en diferentes métodos de simulación, el modelo de Tanaka se considera el mejor de los tres propuestos.

Al evaluar los modelos de crecimiento de grietas de Paris y Forman se encontró que con un error medio del 12.83% en los intervalos y 14.83% en el error total. Esto se debe a que los datos registrados siguen un comportamiento lineal que sugiere la transición entre la región I y II, y se adentra en la región II, mas no se registraron datos de crecimiento inestable.

## 7. Recomendaciones

Debido a la naturaleza frágil del material, se recomienda implementar un tipo diferente de geometría como la Single Edge Notch Bend (SENB) Esta geometría elimina la necesidad de someter la probeta a tensiones en el montaje experimental, lo que reduce la posibilidad de introducir precargas en la probeta o micro fisuras internas.

Así mismo se sugiere implementar una geometría de mayor tamaño, esto permite obtener un ángulo de inclinación de grieta más pronunciado, así como una longitud total mayor.

En cuanto a la adquisición de imágenes, se recomienda el uso de un lente macro. Este lente permite acercar la cámara al objeto de interés sin comprometer la resolución de la cámara, mejorando significativamente la calidad de las fotografías. En caso de mejorar la calidad de las imágenes también se sugiere una frecuencia menor en la adquisición de datos, es posible que se logre medir la propagación de la grieta en las zonas I y III.

El desarrollo de un estudio fractográfico para analizar la falla súbita observada en la mayoría de las probetas aprovechando los fragmentos ya disponibles. Este análisis permitirá cuantificar la región de nucleación, evaluar la velocidad de propagación de la fractura mediante el estudio de las líneas de estriación, determinar la longitud crítica de las grietas y analizar las velocidades de fractura cuasi estática y dinámica.

**Referencias Bibliográficas**

- Akramin, M. R. M., Marizi, M. S., Husnain, M. N. M., & Shamil Shaari, M. (2020). Analysis of Surface Crack using Various Crack Growth Models. *Journal of Physics: Conference Series*, 1529(4). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1529/4/042074>
- Ali Fageehi, Y. (2022). Prediction of Fatigue Crack Growth Rate and Stress Intensity Factors Using the Finite Element Method. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/2705240>
- Ali, U., Karim, K. J. B. A., & Buang, N. A. (2015). A Review of the Properties and Applications of Poly (Methyl Methacrylate) (PMMA). *Polymer Reviews*, 55(4), 678–705. <https://doi.org/10.1080/15583724.2015.1031377>
- Alshoaibi, A. M., & Fageehi, Y. A. (2022). Finite Element Simulation of a Crack Growth in the Presence of a Hole in the Vicinity of the Crack Trajectory. *Materials*, 15(1). <https://doi.org/10.3390/ma15010363>
- Ayatollahi, M. R., Aliha, M. R. M., & Hassani, M. M. (2006). Mixed mode brittle fracture in PMMA - An experimental study using SCB specimens. *Materials Science and Engineering: A*, 417(1–2), 348–356. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2005.11.002>
- Baleani, M., & Viceconti, M. (2011). The effect of adding 10% of barium sulphate radiopacifier on the mechanical behaviour of acrylic bone cement. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 34(5), 374–382. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2010.01535.x>
- Blaber, J., Adair, B., & Antoniou, A. (2015). Ncorr: Open-Source 2D Digital Image Correlation Matlab Software. *Experimental Mechanics*, 55(6), 1105–1122. <https://doi.org/10.1007/s11340-015-0009-1>
- Chan, K. S. (2010). Roles of microstructure in fatigue crack initiation. *International Journal of*

- Fatigue*, 32(9), 1428–1447. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2009.10.005>
- Cheng, W. M., Miller, G. A., Manson, J. A., Hertzberg, R. W., & Sperling, L. H. (1990). Mechanical behaviour of poly (methyl methacrylate). *Journal of Materials Science*, 25(4), 1924–1930. <https://doi.org/10.1007/bf01045744>
- Demir, O., Ayhan, A. O., Iric, S., & Lekesiz, H. (2018). Evaluation of mixed mode-I/II criteria for fatigue crack propagation using experiments and modeling. *Chinese Journal of Aeronautics*, 31(7), 1525–1534. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2018.05.009>
- Diaz-Arnold, A. M., Vargas, M. A., Shaul, K. L., Laffoon, J. E., & Qian, F. (2008). Flexural and fatigue strengths of denture base resin. *Journal of Prosthetic Dentistry*, 100(1), 47–51. [https://doi.org/10.1016/S0022-3913\(08\)60136-5](https://doi.org/10.1016/S0022-3913(08)60136-5)
- Díaz, J. G., & Freire, J. L. de F. (2022). LEFM crack path models evaluation under proportional and non-proportional load in low carbon steels using digital image correlation data. *International Journal of Fatigue*, 156(November 2021). <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2021.106687>
- Díaz Rodríguez, J. G. (2018). *Linear elastic fracture mechanics analysis of fatigue crack growth under complex loading using the Digital Image Correlation technique*. September 2018, 178. <https://doi.org/10.17771/PUCRio.acad.36283>
- Díaz Rodríguez, J. G., Gonzales, G., Ortiz Gonzalez, J. A., & Freire, J. (2018). *Analysis of Mixed-mode Stress Intensity Factors using Digital Image Correlation Displacement Fields*. <https://doi.org/10.26678/abcm.cobem2017.cob17-0684>
- Díaz Rodríguez, J. G., Pertúz Comas, A. D., Ariza González, C. J., Garcia López, D. D., & Pinto Hernández, W. (2023). Monotonic crack propagation in a notched polymer matrix composite reinforced with continuous fiber and printed by material extrusion. *Progress in Additive*

- Manufacturing*, 8(4), 733–744. <https://doi.org/10.1007/s40964-023-00423-w>
- Dirik, H., & Yalçinkaya, T. (2018). Crack path and life prediction under mixed mode cyclic variable amplitude loading through XFEM. *International Journal of Fatigue*, 114, 34–50. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2018.04.026>
- Elangeswaran, C., Cutolo, A., Muralidharan, G. K., Vanmeensel, K., & Van Hooreweder, B. (2020). Microstructural analysis and fatigue crack initiation modelling of additively manufactured 316L after different heat treatments. *Materials and Design*, 194, 108962. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.108962>
- Esslinger, V., Kieselbach, R., Koller, R., & Weisse, B. (2004). The railway accident of Eschede - technical background. *Engineering Failure Analysis*, 11(4), 515–535. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2003.11.001>
- Fageehi, Y. A., & Alshoaibi, A. M. (2020). Numerical Simulation of Mixed-Mode Fatigue Crack Growth for Compact Tension Shear Specimen. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/5426831>
- Foti, P., Razavi, S. M. J., & Berto, F. (2021). Fracture assessment of U-notched PMMA under mixed mode I/II loading conditions by means of local approaches. *Procedia Structural Integrity*, 33(C), 482–490. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.055>
- Gain, A. L., Carroll, J., Paulino, G. H., & Lambros, J. (2011). A hybrid experimental/numerical technique to extract cohesive fracture properties for mode-I fracture of quasi-brittle materials. *International Journal of Fracture*, 169(2), 113–131.
- Hao, W., Ma, L., Chen, X., Yuan, Y., & Ma, Y. (2016). Comparison of the Fatigue Crack Propagation Behavior of Two Different Forms of PMMA Using Two-Stage Zone Model. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 25(2), 493–501.

<https://doi.org/10.1007/s11665-015-1852-z>

Harilal, R., & Ramji, M. (2014). Adaptation of Open Source 2D DIC Software Ncorr for Solid Mechanics Applications. *9th International Symposium on Advanced Science and Technology in Experimental Mechanics, November*, 1–6.

Kim, J. K., & Shim, D. S. (2000). Variation in fatigue crack growth due to the thickness effect. *International Journal of Fatigue*, 22(7), 611–618. [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(00\)00032-3](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(00)00032-3)

Leander, J., & Al-Emrani, M. (2016). Reliability-based fatigue assessment of steel bridges using LEFM – A sensitivity analysis. *International Journal of Fatigue*, 93, 82–91. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2016.08.011>

Lecompte, D., Smits, A., Bossuyt, S., Sol, H., Vantomme, J., Van Hemelrijck, D., & Habraken, A. M. (2006). Quality assessment of speckle patterns for digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering*, 44(11), 1132–1145. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2005.10.004>

Li, J., Yang, B., Wang, S., James, M. N., Xiao, S., Zhu, T., & Yang, G. (2023). Modified Model of Crack Tip Stress Field Considering Dislocation Slip Accumulation and Crack Tip Blunting. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 36(1), 1–14.

Luo, R., & Chen, H. (2019). An improved method of characterizing fracture resistance of asphalt mixtures using modified Paris' law: Part II—Establishment of index for fracture resistance. *Mechanics of Materials*, 138, 103168. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.103168>

Mantilla, J. A., & Poveda, D. E. (2023). *Análisis comparativo de diferentes modelos de propagación de grietas por fatiga utilizando el método dual de elementos de contorno*. <https://doi.org/10.5944/bicim2022.339>

- Pang, J. C., Li, S. X., Wang, Z. G., & Zhang, Z. F. (2013). General relation between tensile strength and fatigue strength of metallic materials. *Materials Science and Engineering A*, 564, 331-341. <file:///C:/Users/PERSONAL/OneDrive%20-%20UN>.  
<https://doi.org/10.1016/j.msea.2012.11.103>
- Paris, P., & Erdogan, F. (1963). A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, 85(4), 528–533. <https://doi.org/10.1115/1.3656900>
- Perez, N. (2017). Linear-Elastic Fracture Mechanics. In *Fracture Mechanics* (Vol. 23, Issue 6, pp. 79–130). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-24999-5\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-24999-5_3)
- Pineau, A., McDowell, D. L., Busso, E. P., & Antolovich, S. D. (2016). Failure of metals II: Fatigue. *Acta Materialia*, 107, 484–507.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.actamat.2015.05.050>
- Pook, L. P. (1990). Stress Intensity Factor Expressions for Regular Crack Arrays in Pressurised Cylinders. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 13(2), 135–143.  
<https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.1990.tb00585.x>
- Radaj, D. (2014). State-of-the-art review on extended stress intensity factor concepts. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 37(1), 1–28.  
<https://doi.org/10.1111/ffe.12120>
- Radhakrishnan, V. M. (1979). Parameter representation of fatigue crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 11(2), 359–372. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0013-7944\(79\)90011-0](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0013-7944(79)90011-0)
- Richard, H. A., & Sander, M. (2016). Fatigue Crack Growth: Detect—Assess—Avoid. In *Solid Mechanics and Its Applications* (Vol. 227). <http://www.springer.com/series/6557>
- Sajith, S., Murthy, K. S. R. K., & Robi, P. S. (2018). Fatigue crack growth and life prediction

- under mixed-mode loading. *AIP Conference Proceedings*, 1943(April 2018), 1–8.  
<https://doi.org/10.1063/1.5029644>
- Sajith, S., Murthy, K. S. R. K., & Robi, P. S. (2020). Experimental and numerical investigation of mixed mode fatigue crack growth models in aluminum 6061-T6. *International Journal of Fatigue*, 130(September 2019), 105285. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2019.105285>
- Schijve, J. (2003). Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art. *Fiziko-Khimicheskaya Mekhanika Materialov*, 39(3), 7–28.  
[https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(03\)00051-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0142-1123(03)00051-3)
- Shi, X. H., & Shan, M. J. (2014). Effect of scratch depths on fatigue properties of PMMA for aircraft canopies. *Applied Mechanics and Materials*, 687–691, 81–84.  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.687-691.81>
- Tanaka, K. (1974). Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis. *Engineering Fracture Mechanics*, 6(3). [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(74\)90007-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(74)90007-1)
- Tang, K., Du, Z., Ferro, P., & Berto, F. (2021). Crack initiation and propagation from geometric microdefects: Experiment and transition fatigue behavior. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 44(9), 2323–2336. <https://doi.org/10.1111/ffe.13492>
- Triclot, J., Corre, T., Gravouil, A., & Lazarus, V. (2023). Key role of boundary conditions for the 2D modeling of crack propagation in linear elastic Compact Tension tests. *Engineering Fracture Mechanics*, 277(October 2022), 109012.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2022.109012>
- Vasco-Olmo, J. M., Díaz, F. A., Antunes, F. V., & James, M. N. (2019). Characterisation of fatigue crack growth using digital image correlation measurements of plastic CTOD. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 101(December 2018), 332–341.

<https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.03.009>

Walker, K. (2009). The Effect of Stress Ratio During Crack Propagation and Fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 Aluminum. *Effects of Environment and Complex Load History on Fatigue Life*, 1-1–14. <https://doi.org/10.1520/stp32032s>

Weertman, J. (1984). Rate of growth of fatigue cracks calculated from the theory of infinitesimal dislocations distributed on a plane. *International Journal of Fracture*, 26(4), 308–315. <https://doi.org/10.1007/BF00962962>

Zhao, J., Blackman, B. R. R. K., Yan, Y., Zhang, X., & Zhang, X. (2018). Fatigue Crack Propagation Property of YB-DM-10 Directional PMMA. *Cailiao Gongcheng/Journal of Materials Engineering*, 46(8), 156–162. <https://doi.org/10.11868/j.issn.1001-4381.2017.000370>

## Apéndices

## Apéndice A. Código de entrada para BEM para probeta modo I

```

%=====
% MAT-fem 1.0 - MAT-fem is a learning tool for understanding
%   the Finite Element Method with MATLAB and GiD
%=====
% PROBLEM TITLE = Modo I
%
% Material Properties
%
young =      2933.10000 ;
poiss =      0.36000 ;
denss = 0.00 ;
pstrs = 1 ;
thick =      0.10000 ;
%
% Coordinates
%
global coordinates
coordinates = [
    0.00000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    2.37500 ;
    2.37500 ,    0.00000 ;
    4.75000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    4.75000 ;
    0.00000 ,    7.12500 ;
    7.12500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    9.50000 ;
    9.50000 ,    0.00000 ;
    11.87500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    11.87500 ;
    14.25000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    14.25000 ;
    16.62500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    16.62500 ;
    0.00000 ,    19.00000 ;
    19.00000 ,    0.00000 ;
    21.37500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    21.37500 ;
    23.75000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    23.75000 ;
    0.00000 ,    26.12500 ;
    26.12500 ,    0.00000 ;
    28.50000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    28.50000 ;
    30.87500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    30.87500 ;
    33.25000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    33.25000 ;
    35.62500 ,    0.00000 ;
    38.00000 ,    0.00000 ;
    38.00000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    38.00000 ;
    40.37500 ,    0.00000 ;
    42.75000 ,    0.00000 ;
    42.75000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    42.75000 ;
    45.12500 ,    0.00000 ;
    45.12500 ,    0.00000 ;
    47.50000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    47.50000 ;
    49.87500 ,    0.00000 ;
    49.87500 ,    0.00000 ;
    52.25000 ,    0.00000 ;
    52.25000 ,    0.00000 ;
    54.62500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    54.62500 ;
    57.00000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    57.00000 ;
    59.37500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    59.37500 ;
    61.75000 ,    0.00000 ;
    61.75000 ,    0.00000 ;
    64.12500 ,    0.00000 ;
    64.12500 ,    0.00000 ;
    66.50000 ,    0.00000 ;
    66.50000 ,    0.00000 ;
    68.87500 ,    0.00000 ;
    68.87500 ,    0.00000 ;
    71.25000 ,    23.12926 ;
    67.15670 ,    23.12926 ;
    73.62500 ,    23.79983 ;
    66.92206 ,    23.79983 ;

```

67.44080	,	22.47810	;	61.91250	,	47.50000	;
66.73818	,	24.48605	;	61.91250	,	47.50000	;
67.77276	,	21.85000	;	62.32609	,	47.50000	;
66.60611	,	25.18410	;	62.32609	,	47.50000	;
71.25000	,	0.00000	;	0.00000	,	78.37500	;
0.00000	,	71.25000	;	78.37500	,	0.00000	;
68.15073	,	21.24846	;	76.70994	,	17.12656	;
66.52656	,	25.89006	;	70.64846	,	34.44927	;
68.57260	,	20.67685	;	62.73969	,	47.50000	;
66.50000	,	26.60000	;	62.73969	,	47.50000	;
69.03601	,	20.13836	;	63.15328	,	47.50000	;
66.52656	,	27.30994	;	63.15328	,	47.50000	;
69.53836	,	19.63601	;	77.41590	,	17.20611	;
66.60611	,	28.01590	;	71.25000	,	34.82724	;
70.07685	,	19.17260	;	63.56688	,	47.50000	;
66.73818	,	28.71395	;	63.56688	,	47.50000	;
70.64846	,	18.75073	;	63.98047	,	47.50000	;
66.92206	,	29.40017	;	63.98047	,	47.50000	;
71.25000	,	18.37276	;	78.11395	,	17.33818	;
67.15670	,	30.07074	;	71.87810	,	35.15920	;
73.62500	,	0.00000	;	64.39406	,	47.50000	;
0.00000	,	73.62500	;	64.39406	,	47.50000	;
71.87810	,	18.04080	;	64.80766	,	47.50000	;
67.44080	,	30.72190	;	64.80766	,	47.50000	;
72.52926	,	17.75670	;	65.22125	,	47.50000	;
67.77276	,	31.35000	;	65.22125	,	47.50000	;
73.19983	,	17.52206	;	78.80017	,	17.52206	;
68.15073	,	31.95154	;	72.52926	,	35.44330	;
73.88605	,	17.33818	;	80.75000	,	0.00000	;
68.57260	,	32.52315	;	0.00000	,	80.75000	;
76.00000	,	0.00000	;	65.63484	,	47.50000	;
0.00000	,	76.00000	;	65.63484	,	47.50000	;
74.58410	,	17.20611	;	66.04844	,	47.50000	;
69.03601	,	33.06164	;	66.04844	,	47.50000	;
60.80000	,	47.50000	;	79.47074	,	17.75670	;
75.29006	,	17.12656	;	73.19983	,	35.67794	;
69.53836	,	33.56399	;	66.46203	,	47.50000	;
61.07813	,	47.50000	;	66.46203	,	47.50000	;
61.07813	,	47.50000	;	66.87562	,	47.50000	;
61.35625	,	47.50000	;	66.87562	,	47.50000	;
61.35625	,	47.50000	;	80.12190	,	18.04080	;
61.63437	,	47.50000	;	73.88605	,	35.86182	;
61.63437	,	47.50000	;	67.28922	,	47.50000	;
76.00000	,	17.10000	;	67.28922	,	47.50000	;
70.07685	,	34.02740	;	67.70281	,	47.50000	;

67.70281	,	47.50000	;	73.07953	,	47.50000	;
80.75000	,	18.37276	;	73.07953	,	47.50000	;
74.58410	,	35.99389	;	84.55920	,	22.47810	;
68.11641	,	47.50000	;	80.12190	,	35.15920	;
68.11641	,	47.50000	;	73.49312	,	47.50000	;
0.00000	,	83.12500	;	73.49313	,	47.50000	;
83.12500	,	0.00000	;	73.90672	,	47.50000	;
68.53000	,	47.50000	;	73.90672	,	47.50000	;
68.53000	,	47.50000	;	0.00000	,	87.87500	;
81.35154	,	18.75073	;	87.87500	,	0.00000	;
75.29006	,	36.07344	;	84.84330	,	23.12926	;
68.94359	,	47.50000	;	80.75000	,	34.82724	;
68.94359	,	47.50000	;	74.32031	,	47.50000	;
69.35719	,	47.50000	;	74.32031	,	47.50000	;
69.35719	,	47.50000	;	85.07794	,	23.79983	;
81.92315	,	19.17260	;	81.35154	,	34.44927	;
76.00000	,	36.10000	;	74.73391	,	47.50000	;
69.77078	,	47.50000	;	74.73391	,	47.50000	;
69.77078	,	47.50000	;	85.26182	,	24.48605	;
70.18438	,	47.50000	;	81.92315	,	34.02740	;
70.18438	,	47.50000	;	75.14750	,	47.50000	;
82.46164	,	19.63601	;	75.14750	,	47.50000	;
76.70994	,	36.07344	;	85.39389	,	25.18410	;
70.59797	,	47.50000	;	82.46164	,	33.56399	;
70.59797	,	47.50000	;	75.56109	,	47.50000	;
82.96399	,	20.13836	;	75.56109	,	47.50000	;
77.41590	,	35.99389	;	85.47344	,	25.89006	;
71.01156	,	47.50000	;	82.96399	,	33.06164	;
71.01156	,	47.50000	;	85.50000	,	26.60000	;
85.50000	,	0.00000	;	83.42740	,	32.52315	;
0.00000	,	85.50000	;	75.97469	,	47.50000	;
71.42516	,	47.50000	;	75.97469	,	47.50000	;
71.42516	,	47.50000	;	85.47344	,	27.30994	;
83.42740	,	20.67685	;	83.84927	,	31.95154	;
78.11395	,	35.86182	;	85.39389	,	28.01590	;
71.83875	,	47.50000	;	84.22724	,	31.35000	;
71.83875	,	47.50000	;	76.38828	,	47.50000	;
72.25234	,	47.50000	;	76.38828	,	47.50000	;
72.25234	,	47.50000	;	85.26182	,	28.71395	;
83.84927	,	21.24846	;	84.55920	,	30.72190	;
78.80017	,	35.67794	;	85.07794	,	29.40017	;
72.66594	,	47.50000	;	84.84330	,	30.07074	;
72.66594	,	47.50000	;	90.25000	,	0.00000	;
84.22724	,	21.85000	;	0.00000	,	90.25000	;
79.47074	,	35.44330	;	76.80187	,	47.50000	;

76.80187	,	47.50000	;	82.17859	,	47.50000	;
77.21547	,	47.50000	;	82.17859	,	47.50000	;
77.21547	,	47.50000	;	95.00000	,	0.00000	;
77.62906	,	47.50000	;	0.00000	,	95.00000	;
77.62906	,	47.50000	;	95.00000	,	2.37500	;
78.04266	,	47.50000	;	2.37500	,	95.00000	;
78.04266	,	47.50000	;	74.58410	,	59.00611	;
78.45625	,	47.50000	;	95.00000	,	4.75000	;
78.45625	,	47.50000	;	4.75000	,	95.00000	;
78.86984	,	47.50000	;	7.12500	,	95.00000	;
78.86984	,	47.50000	;	95.00000	,	7.12500	;
79.28344	,	47.50000	;	82.59219	,	47.50000	;
79.28344	,	47.50000	;	82.59219	,	47.50000	;
0.00000	,	92.62500	;	66.50000	,	68.40000	;
92.62500	,	0.00000	;	9.50000	,	95.00000	;
69.03601	,	61.93836	;	95.00000	,	9.50000	;
68.57260	,	62.47685	;	75.29006	,	58.92656	;
79.69703	,	47.50000	;	83.00578	,	47.50000	;
79.69703	,	47.50000	;	83.00578	,	47.50000	;
69.53836	,	61.43601	;	11.87500	,	95.00000	;
68.15073	,	63.04846	;	95.00000	,	11.87500	;
70.07685	,	60.97260	;	66.52656	,	69.10994	;
67.77276	,	63.65000	;	83.41938	,	47.50000	;
70.64846	,	60.55073	;	83.41938	,	47.50000	;
80.11062	,	47.50000	;	14.25000	,	95.00000	;
80.11062	,	47.50000	;	95.00000	,	14.25000	;
67.44080	,	64.27810	;	76.00000	,	58.90000	;
71.25000	,	60.17276	;	83.83297	,	47.50000	;
67.15670	,	64.92926	;	83.83297	,	47.50000	;
80.52422	,	47.50000	;	95.00000	,	16.62500	;
80.52422	,	47.50000	;	16.62500	,	95.00000	;
71.87810	,	59.84080	;	66.60611	,	69.81590	;
66.92206	,	65.59983	;	84.24656	,	47.50000	;
80.93781	,	47.50000	;	84.24656	,	47.50000	;
80.93781	,	47.50000	;	76.70994	,	58.92656	;
72.52926	,	59.55670	;	95.00000	,	19.00000	;
66.73818	,	66.28605	;	19.00000	,	95.00000	;
81.35141	,	47.50000	;	84.66016	,	47.50000	;
81.35141	,	47.50000	;	84.66016	,	47.50000	;
73.19983	,	59.32206	;	66.73818	,	70.51395	;
66.60611	,	66.98410	;	77.41590	,	59.00611	;
81.76500	,	47.50000	;	95.00000	,	21.37500	;
81.76500	,	47.50000	;	21.37500	,	95.00000	;
73.88605	,	59.13818	;	85.07375	,	47.50000	;
66.52656	,	67.69006	;	85.07375	,	47.50000	;

66.92206 ,	71.20017 ;	35.62500 ,	95.00000 ;
85.48734 ,	47.50000 ;	90.03687 ,	47.50000 ;
85.48734 ,	47.50000 ;	90.03687 ,	47.50000 ;
95.00000 ,	23.75000 ;	69.03601 ,	74.86164 ;
23.75000 ,	95.00000 ;	81.92315 ,	60.97260 ;
78.11395 ,	59.13818 ;	90.45047 ,	47.50000 ;
85.90094 ,	47.50000 ;	90.45047 ,	47.50000 ;
85.90094 ,	47.50000 ;	38.00000 ,	95.00000 ;
67.15670 ,	71.87074 ;	95.00000 ,	38.00000 ;
86.31453 ,	47.50000 ;	90.86406 ,	47.50000 ;
86.31453 ,	47.50000 ;	90.86406 ,	47.50000 ;
95.00000 ,	26.12500 ;	69.53836 ,	75.36399 ;
26.12500 ,	95.00000 ;	82.46164 ,	61.43601 ;
78.80017 ,	59.32206 ;	91.27766 ,	47.50000 ;
86.72813 ,	47.50000 ;	91.27766 ,	47.50000 ;
86.72813 ,	47.50000 ;	40.37500 ,	95.00000 ;
67.44080 ,	72.52190 ;	95.00000 ,	40.37500 ;
95.00000 ,	28.50000 ;	70.07685 ,	75.82740 ;
28.50000 ,	95.00000 ;	91.69125 ,	47.50000 ;
87.14172 ,	47.50000 ;	91.69125 ,	47.50000 ;
87.14172 ,	47.50000 ;	82.96399 ,	61.93836 ;
79.47074 ,	59.55670 ;	92.10484 ,	47.50000 ;
87.55531 ,	47.50000 ;	92.10484 ,	47.50000 ;
87.55531 ,	47.50000 ;	70.64846 ,	76.24927 ;
67.77276 ,	73.15000 ;	92.51844 ,	47.50000 ;
30.87500 ,	95.00000 ;	92.51844 ,	47.50000 ;
95.00000 ,	30.87500 ;	95.00000 ,	42.75000 ;
87.96891 ,	47.50000 ;	42.75000 ,	95.00000 ;
87.96891 ,	47.50000 ;	83.42740 ,	62.47685 ;
80.12190 ,	59.84080 ;	92.93203 ,	47.50000 ;
88.38250 ,	47.50000 ;	92.93203 ,	47.50000 ;
88.38250 ,	47.50000 ;	71.25000 ,	76.62724 ;
68.15073 ,	73.75154 ;	93.34562 ,	47.50000 ;
33.25000 ,	95.00000 ;	93.34562 ,	47.50000 ;
95.00000 ,	33.25000 ;	83.84927 ,	63.04846 ;
88.79609 ,	47.50000 ;	93.75922 ,	47.50000 ;
88.79609 ,	47.50000 ;	93.75922 ,	47.50000 ;
80.75000 ,	60.17276 ;	45.12500 ,	95.00000 ;
89.20969 ,	47.50000 ;	95.00000 ,	45.12500 ;
89.20969 ,	47.50000 ;	71.87810 ,	76.95920 ;
68.57260 ,	74.32315 ;	94.17281 ,	47.50000 ;
81.35154 ,	60.55073 ;	94.17281 ,	47.50000 ;
89.62328 ,	47.50000 ;	84.22724 ,	63.65000 ;
89.62328 ,	47.50000 ;	94.58641 ,	47.50000 ;
95.00000 ,	35.62500 ;	94.58641 ,	47.50000 ;

72.52926 ,	77.24330 ;	59.37500 ,	95.00000 ;
95.00000 ,	47.50000 ;	61.75000 ,	95.00000 ;
47.50000 ,	95.00000 ;	95.00000 ,	61.75000 ;
95.00000 ,	47.50000 ;	95.00000 ,	64.12500 ;
84.55920 ,	64.27810 ;	64.12500 ,	95.00000 ;
73.19983 ,	77.47794 ;	95.00000 ,	66.50000 ;
84.84330 ,	64.92926 ;	66.50000 ,	95.00000 ;
73.88605 ,	77.66182 ;	68.87500 ,	95.00000 ;
95.00000 ,	49.87500 ;	95.00000 ,	68.87500 ;
49.87500 ,	95.00000 ;	71.25000 ,	95.00000 ;
85.07794 ,	65.59983 ;	95.00000 ,	71.25000 ;
74.58410 ,	77.79389 ;	73.62500 ,	95.00000 ;
85.26182 ,	66.28605 ;	95.00000 ,	73.62500 ;
75.29006 ,	77.87344 ;	76.00000 ,	95.00000 ;
95.00000 ,	52.25000 ;	95.00000 ,	76.00000 ;
52.25000 ,	95.00000 ;	78.37500 ,	95.00000 ;
85.39389 ,	66.98410 ;	95.00000 ,	78.37500 ;
76.00000 ,	77.90000 ;	95.00000 ,	80.75000 ;
85.47344 ,	67.69006 ;	80.75000 ,	95.00000 ;
76.70994 ,	77.87344 ;	83.12500 ,	95.00000 ;
85.50000 ,	68.40000 ;	95.00000 ,	83.12500 ;
54.62500 ,	95.00000 ;	85.50000 ,	95.00000 ;
95.00000 ,	54.62500 ;	95.00000 ,	85.50000 ;
77.41590 ,	77.79389 ;	95.00000 ,	87.87500 ;
85.47344 ,	69.10994 ;	87.87500 ,	95.00000 ;
78.11395 ,	77.66182 ;	90.25000 ,	95.00000 ;
85.39389 ,	69.81590 ;	95.00000 ,	90.25000 ;
78.80017 ,	77.47794 ;	95.00000 ,	92.62500 ;
85.26182 ,	70.51395 ;	92.62500 ,	95.00000 ;
95.00000 ,	57.00000 ;	95.00000 ,	95.00000 ] ;
57.00000 ,	95.00000 ;		%
79.47074 ,	77.24330 ;		% Elements
85.07794 ,	71.20017 ;		%
80.12190 ,	76.95920 ;		global elements
84.84330 ,	71.87074 ;		elements = [
80.75000 ,	76.62724 ;		1 , 4 , 3 ;
84.55920 ,	72.52190 ;		4 , 9 , 7 ;
81.35154 ,	76.24927 ;		9 , 12 , 10 ;
84.22724 ,	73.15000 ;		12 , 17 , 14 ;
81.92315 ,	75.82740 ;		17 , 20 , 18 ;
83.84927 ,	73.75154 ;		20 , 24 , 23 ;
82.46164 ,	75.36399 ;		24 , 28 , 26 ;
83.42740 ,	74.32315 ;		28 , 33 , 31 ;
82.96399 ,	74.86164 ;		33 , 37 , 35 ;
95.00000 ,	59.37500 ;		37 , 40 , 39 ;

40 , 45 , 43 ;	210 , 201 , 204 ;
45 , 48 , 46 ;	201 , 193 , 198 ;
48 , 53 , 51 ;	193 , 187 , 189 ;
53 , 56 , 55 ;	187 , 179 , 184 ;
56 , 66 , 59 ;	179 , 172 , 176 ;
66 , 92 , 82 ;	172 , 166 , 170 ;
92 , 135 , 112 ;	166 , 160 , 163 ;
135 , 181 , 158 ;	160 , 151 , 156 ;
181 , 239 , 206 ;	151 , 146 , 150 ;
239 , 289 , 256 ;	146 , 140 , 144 ;
289 , 294 , 291 ;	140 , 132 , 137 ;
294 , 302 , 297 ;	132 , 127 , 129 ;
302 , 312 , 307 ;	127 , 122 , 123 ;
312 , 322 , 316 ;	122 , 115 , 118 ;
322 , 335 , 328 ;	115 , 108 , 109 ;
335 , 349 , 343 ;	108 , 102 , 103 ;
349 , 366 , 358 ;	102 , 96 , 99 ;
366 , 385 , 376 ;	96 , 101 , 100 ;
385 , 403 , 393 ;	101 , 107 , 104 ;
403 , 425 , 415 ;	107 , 116 , 110 ;
425 , 418 , 420 ;	116 , 121 , 117 ;
418 , 409 , 413 ;	121 , 128 , 124 ;
409 , 402 , 407 ;	128 , 131 , 130 ;
402 , 396 , 398 ;	131 , 139 , 138 ;
396 , 386 , 390 ;	139 , 145 , 143 ;
386 , 378 , 383 ;	145 , 152 , 149 ;
378 , 370 , 375 ;	152 , 159 , 155 ;
370 , 363 , 367 ;	159 , 165 , 164 ;
363 , 354 , 360 ;	165 , 171 , 169 ;
354 , 347 , 351 ;	171 , 180 , 175 ;
347 , 339 , 342 ;	180 , 188 , 183 ;
339 , 330 , 334 ;	188 , 194 , 190 ;
330 , 319 , 324 ;	194 , 202 , 197 ;
319 , 310 , 314 ;	202 , 209 , 203 ;
310 , 298 , 305 ;	209 , 217 , 213 ;
298 , 284 , 287 ;	217 , 227 , 221 ;
284 , 276 , 279 ;	227 , 241 , 233 ;
276 , 267 , 272 ;	241 , 245 , 243 ;
267 , 254 , 259 ;	245 , 249 , 247 ;
254 , 250 , 252 ;	249 , 253 , 251 ;
250 , 246 , 248 ;	253 , 266 , 260 ;
246 , 242 , 244 ;	266 , 275 , 271 ;
242 , 228 , 234 ;	275 , 283 , 280 ;
228 , 218 , 222 ;	283 , 299 , 288 ;
218 , 210 , 214 ;	299 , 309 , 304 ;

309 , 320 , 315 ;	240 , 182 , 205 ;
320 , 331 , 325 ;	182 , 136 , 157 ;
331 , 338 , 333 ;	136 , 93 , 111 ;
338 , 346 , 341 ;	93 , 67 , 83 ;
346 , 355 , 352 ;	67 , 57 , 58 ;
355 , 362 , 359 ;	57 , 52 , 54 ;
362 , 371 , 368 ;	52 , 49 , 50 ;
371 , 379 , 374 ;	49 , 44 , 47 ;
379 , 387 , 382 ;	44 , 41 , 42 ;
387 , 395 , 391 ;	41 , 36 , 38 ;
395 , 401 , 399 ;	36 , 32 , 34 ;
401 , 410 , 406 ;	32 , 29 , 30 ;
410 , 417 , 412 ;	29 , 25 , 27 ;
417 , 423 , 421 ;	25 , 21 , 22 ;
423 , 436 , 430 ;	21 , 16 , 19 ;
436 , 451 , 444 ;	16 , 13 , 15 ;
451 , 469 , 466 ;	13 , 8 , 11 ;
469 , 472 , 470 ;	8 , 5 , 6 ;
472 , 477 , 475 ;	5 , 1 , 2 ;
477 , 481 , 479 ;	300 , 318 , 308 ;
481 , 484 , 483 ;	318 , 332 , 326 ;
484 , 489 , 487 ;	332 , 348 , 340 ;
489 , 493 , 490 ;	348 , 364 , 356 ;
493 , 496 , 494 ;	364 , 380 , 372 ;
496 , 492 , 495 ;	380 , 394 , 388 ;
492 , 488 , 491 ;	394 , 408 , 400 ;
488 , 485 , 486 ;	408 , 422 , 416 ;
485 , 480 , 482 ;	422 , 429 , 427 ;
480 , 476 , 478 ;	429 , 435 , 433 ;
476 , 473 , 474 ;	435 , 441 , 439 ;
473 , 468 , 471 ;	441 , 447 , 445 ;
468 , 452 , 467 ;	447 , 453 , 449 ;
452 , 437 , 443 ;	453 , 457 , 455 ;
437 , 424 , 431 ;	457 , 461 , 459 ;
424 , 404 , 414 ;	461 , 465 , 463 ;
404 , 384 , 392 ;	465 , 462 , 464 ;
384 , 365 , 377 ;	462 , 458 , 460 ;
365 , 350 , 357 ;	458 , 454 , 456 ;
350 , 336 , 344 ;	454 , 448 , 450 ;
336 , 323 , 329 ;	448 , 442 , 446 ;
323 , 311 , 317 ;	442 , 438 , 440 ;
311 , 301 , 306 ;	438 , 432 , 434 ;
301 , 295 , 296 ;	432 , 426 , 428 ;
295 , 290 , 292 ;	426 , 411 , 419 ;
290 , 240 , 255 ;	411 , 397 , 405 ;

```

397 , 381 , 389 ;
381 , 369 , 373 ;
369 , 353 , 361 ;
353 , 337 , 345 ;
337 , 321 , 327 ;
321 , 303 , 313 ;
303 , 285 , 293 ;
285 , 277 , 281 ;
277 , 269 , 273 ;
269 , 263 , 265 ;
263 , 257 , 261 ;
257 , 262 , 258 ;
262 , 268 , 264 ;
268 , 274 , 270 ;
274 , 282 , 278 ;
282 , 300 , 286 ;
71 , 75 , 73 ;
75 , 79 , 77 ;
79 , 85 , 81 ;
85 , 89 , 87 ;
89 , 95 , 91 ;
95 , 106 , 98 ;
106 , 120 , 114 ;
120 , 134 , 126 ;
134 , 148 , 142 ;
148 , 162 , 154 ;
162 , 174 , 168 ;
174 , 186 , 178 ;
186 , 196 , 192 ;
196 , 208 , 200 ;
208 , 216 , 212 ;
216 , 224 , 220 ;
224 , 230 , 226 ;
230 , 236 , 232 ;
236 , 237 , 238 ;
237 , 231 , 235 ;
231 , 225 , 229 ;
225 , 219 , 223 ;
219 , 211 , 215 ;
211 , 199 , 207 ;
199 , 191 , 195 ;
191 , 177 , 185 ;
177 , 167 , 173 ;
167 , 153 , 161 ;
153 , 141 , 147 ;

141 , 125 , 133 ;
125 , 113 , 119 ;
113 , 97 , 105 ;
97 , 90 , 94 ;
90 , 86 , 88 ;
86 , 80 , 84 ;
80 , 76 , 78 ;
76 , 72 , 74 ;
72 , 68 , 70 ;
68 , 62 , 64 ;
62 , 61 , 60 ;
61 , 65 , 63 ;
65 , 71 , 69 ];

%
% Fixed Nodes
%
fixnodes = [
    1 , 1 , 0.00000 ;
    1 , 2 , 0.00000 ;
    290 , 1 , 0.00000 ];

%
% Point loads
%
pointload = [
    97 , 1 , 0.00000 ;
    97 , 2 , -43.06230 ;
    105 , 1 , 0.00000 ;
    105 , 2 , -43.06230 ;
    113 , 1 , 0.00000 ;
    113 , 2 , -43.06230 ;
    435 , 1 , 0.00000 ;
    435 , 2 , 43.06230 ;
    439 , 1 , 0.00000 ;
    439 , 2 , 43.06230 ;
    441 , 1 , 0.00000 ;
    441 , 2 , 43.06230 ];

%
% Uniform Side loads
%
sideload = [ ];

```

**Apéndice B.** *Código de entrada para BEM para probeta modo mixto*

```

%=====
% MAT-fem 1.0 - MAT-fem is a learning tool for understanding
%   the Finite Element Method with MATLAB and GiD
%=====
% PROBLEM TITLE = Modo Mixto
%
% Material Properties
%
young =      2933.10000 ;
poiss =      0.36000 ;
denss = 0.00 ;
pstrs = 1 ;
thick =      0.10000 ;
%
% Coordinates
%
global coordinates
coordinates = [
    0.00000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    1.15854 ;
    0.00000 ,    2.31707 ;
    2.37500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    3.47561 ;
    0.00000 ,    4.63415 ;
    4.75000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    5.79268 ;
    0.00000 ,    6.95122 ;
    7.12500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    8.10976 ;
    0.00000 ,    9.26829 ;
    9.50000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    10.42683 ;
    0.00000 ,    11.58537 ;
    11.87500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    12.74390 ;
    0.00000 ,    13.90244 ;
    14.25000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    15.06098 ;
    0.00000 ,    16.21951 ;
    16.62500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    17.37805 ;
    0.00000 ,    18.53659 ;
    19.00000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    19.69512 ;
    0.00000 ,    20.85366 ;
    21.37500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    22.01220 ;
    0.00000 ,    23.17073 ;
    23.75000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    24.32927 ;
    0.00000 ,    25.48780 ;
    26.12500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    26.64634 ;
    0.00000 ,    27.80488 ;
    28.50000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    28.96341 ;
    0.00000 ,    30.12195 ;
    30.87500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    31.28049 ;
    0.00000 ,    32.43902 ;
    33.25000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    33.59756 ;
    0.00000 ,    34.75610 ;
    35.62500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    35.91463 ;
    0.00000 ,    37.07317 ;
    0.00000 ,    38.00000 ;
    0.00000 ,    38.23171 ;
    0.00000 ,    39.39024 ;
    40.37500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    40.54878 ;
    0.00000 ,    41.70732 ;
    42.75000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    42.86585 ;
    0.00000 ,    44.02439 ;
    45.12500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    45.18293 ;
    0.00000 ,    46.34146 ;
    0.00000 ,    47.50000 ;
    47.50000 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    48.65854 ;
    0.00000 ,    49.81707 ;
    49.87500 ,    0.00000 ;
    0.00000 ,    50.97561 ;
    0.00000 ,    52.13415 ;
    52.25000 ,    0.00000 ;

```

0.00000	,	53.29268	;	36.58876	,	56.17976	;
0.00000	,	54.45122	;	43.46376	,	51.18479	;
54.62500	,	0.00000	;	0.00000	,	67.19512	;
0.00000	,	55.60976	;	36.52818	,	56.50664	;
0.00000	,	56.76829	;	43.79336	,	51.22818	;
57.00000	,	0.00000	;	36.48479	,	56.83624	;
0.00000	,	57.92683	;	44.12024	,	51.28876	;
0.00000	,	59.08537	;	36.45870	,	57.16767	;
59.37500	,	0.00000	;	44.44350	,	51.36637	;
0.00000	,	60.24390	;	36.45000	,	57.50000	;
0.00000	,	61.40244	;	44.76226	,	51.46079	;
61.75000	,	0.00000	;	0.00000	,	68.35366	;
0.00000	,	62.56098	;	36.45870	,	57.83233	;
0.00000	,	63.71951	;	45.07564	,	51.57176	;
64.12500	,	0.00000	;	36.48479	,	58.16376	;
0.00000	,	64.87805	;	45.38278	,	51.69899	;
39.06756	,	52.36274	;	68.87500	,	0.00000	;
38.80382	,	52.56512	;	36.52818	,	58.49336	;
39.34154	,	52.17444	;	45.68284	,	51.84211	;
38.55102	,	52.78103	;	36.58876	,	58.82024	;
39.62500	,	52.00074	;	45.97500	,	52.00074	;
38.30987	,	53.00987	;	0.00000	,	69.51220	;
39.91716	,	51.84211	;	36.66637	,	59.14350	;
38.08103	,	53.25102	;	46.25846	,	52.17444	;
40.21722	,	51.69899	;	36.76079	,	59.46226	;
37.86512	,	53.50382	;	46.53244	,	52.36274	;
40.52436	,	51.57176	;	36.87176	,	59.77564	;
37.66274	,	53.76756	;	46.79618	,	52.56512	;
40.83774	,	51.46079	;	36.99899	,	60.08278	;
37.47444	,	54.04154	;	0.00000	,	70.67073	;
41.15650	,	51.36637	;	47.04898	,	52.78103	;
37.30074	,	54.32500	;	37.14211	,	60.38284	;
41.47976	,	51.28876	;	67.15670	,	23.12926	;
0.00000	,	66.03659	;	66.92206	,	23.79983	;
37.14211	,	54.61716	;	47.29013	,	53.00987	;
41.80664	,	51.22818	;	67.44080	,	22.47810	;
36.99899	,	54.91722	;	66.73818	,	24.48605	;
42.13624	,	51.18479	;	67.77276	,	21.85000	;
36.87176	,	55.22436	;	66.60611	,	25.18410	;
42.46767	,	51.15870	;	37.30074	,	60.67500	;
66.50000	,	0.00000	;	71.25000	,	0.00000	;
36.76079	,	55.53774	;	47.51897	,	53.25102	;
42.80000	,	51.15000	;	68.15073	,	21.24846	;
36.66637	,	55.85650	;	66.52656	,	25.89006	;
43.13233	,	51.15870	;	37.47444	,	60.95846	;

68.57260 ,	20.67685 ;	68.15073 ,	31.95154 ;
66.50000 ,	26.60000 ;	0.00000 ,	75.30488 ;
47.73488 ,	53.50382 ;	49.14130 ,	57.16767 ;
0.00000 ,	71.82927 ;	40.83774 ,	63.53921 ;
37.66274 ,	61.23244 ;	49.15000 ,	57.50000 ;
69.03601 ,	20.13836 ;	41.15650 ,	63.63363 ;
66.52656 ,	27.30994 ;	49.14130 ,	57.83233 ;
47.93726 ,	53.76756 ;	73.88605 ,	17.33818 ;
37.86512 ,	61.49618 ;	68.57260 ,	32.52315 ;
69.53836 ,	19.63601 ;	76.00000 ,	0.00000 ;
66.60611 ,	28.01590 ;	41.47976 ,	63.71124 ;
48.12556 ,	54.04154 ;	49.11521 ,	58.16376 ;
38.08103 ,	61.74898 ;	41.80664 ,	63.77182 ;
70.07685 ,	19.17260 ;	49.07182 ,	58.49336 ;
66.73818 ,	28.71395 ;	0.00000 ,	76.46341 ;
48.29926 ,	54.32500 ;	42.13624 ,	63.81521 ;
38.30987 ,	61.99013 ;	74.58410 ,	17.20611 ;
0.00000 ,	72.98780 ;	69.03601 ,	33.06164 ;
48.45789 ,	54.61716 ;	49.01124 ,	58.82024 ;
70.64846 ,	18.75073 ;	42.46767 ,	63.84130 ;
66.92206 ,	29.40017 ;	48.93363 ,	59.14350 ;
38.55102 ,	62.21897 ;	42.80000 ,	63.85000 ;
48.60101 ,	54.91722 ;	48.83921 ,	59.46226 ;
38.80382 ,	62.43488 ;	43.13233 ,	63.84130 ;
71.25000 ,	18.37276 ;	48.72824 ,	59.77564 ;
67.15670 ,	30.07074 ;	60.80000 ,	47.50000 ;
73.62500 ,	0.00000 ;	43.46376 ,	63.81521 ;
48.72824 ,	55.22436 ;	75.29006 ,	17.12656 ;
39.06756 ,	62.63726 ;	69.53836 ,	33.56399 ;
48.83921 ,	55.53774 ;	60.90000 ,	47.50000 ;
71.87810 ,	18.04080 ;	60.90000 ,	47.50000 ;
67.44080 ,	30.72190 ;	48.60101 ,	60.08278 ;
39.34154 ,	62.82556 ;	61.00000 ,	47.50000 ;
0.00000 ,	74.14634 ;	61.00000 ,	47.50000 ;
48.93363 ,	55.85650 ;	43.79336 ,	63.77182 ;
39.62500 ,	62.99926 ;	61.10000 ,	47.50000 ;
49.01124 ,	56.17976 ;	61.10000 ,	47.50000 ;
72.52926 ,	17.75670 ;	48.45789 ,	60.38284 ;
67.77276 ,	31.35000 ;	61.20000 ,	47.50000 ;
39.91716 ,	63.15789 ;	61.20000 ,	47.50000 ;
49.07182 ,	56.50664 ;	44.12024 ,	63.71124 ;
40.21722 ,	63.30101 ;	61.30000 ,	47.50000 ;
49.11521 ,	56.83624 ;	61.30000 ,	47.50000 ;
73.19983 ,	17.52206 ;	48.29926 ,	60.67500 ;
40.52436 ,	63.42824 ;	44.44350 ,	63.63363 ;

0.00000 ,	77.62195 ;	64.94400 ,	46.55000 ;
61.40000 ,	47.50000 ;	0.00000 ,	79.93902 ;
61.40000 ,	47.50000 ;	78.11395 ,	17.33818 ;
48.12556 ,	60.95846 ;	71.87810 ,	35.15920 ;
61.50000 ,	47.50000 ;	65.33700 ,	46.43125 ;
61.50000 ,	47.50000 ;	64.15800 ,	48.21250 ;
44.76226 ,	63.53921 ;	65.73000 ,	46.31250 ;
47.93726 ,	61.23244 ;	64.55100 ,	48.33125 ;
61.60000 ,	47.50000 ;	66.12300 ,	46.19375 ;
61.60000 ,	47.50000 ;	78.80017 ,	17.52206 ;
45.07564 ,	63.42824 ;	72.52926 ,	35.44330 ;
47.73488 ,	61.49618 ;	80.75000 ,	0.00000 ;
61.70000 ,	47.50000 ;	66.51600 ,	46.07500 ;
61.70000 ,	47.50000 ;	64.94400 ,	48.45000 ;
45.38278 ,	63.30101 ;	0.00000 ,	81.09756 ;
76.00000 ,	17.10000 ;	66.90900 ,	45.95625 ;
70.07685 ,	34.02740 ;	65.33700 ,	48.56875 ;
47.51897 ,	61.74898 ;	67.30200 ,	45.83750 ;
61.80000 ,	47.50000 ;	79.47074 ,	17.75670 ;
61.80000 ,	47.50000 ;	73.19983 ,	35.67794 ;
45.68284 ,	63.15789 ;	67.69500 ,	45.71875 ;
47.29013 ,	61.99013 ;	65.73000 ,	48.68750 ;
45.97500 ,	62.99926 ;	68.08800 ,	45.60000 ;
47.04898 ,	62.21897 ;	80.12190 ,	18.04080 ;
46.25846 ,	62.82556 ;	73.88605 ,	35.86182 ;
46.79618 ,	62.43488 ;	66.12300 ,	48.80625 ;
46.53244 ,	62.63726 ;	68.48100 ,	45.48125 ;
62.19300 ,	47.38125 ;	0.00000 ,	82.25610 ;
62.19300 ,	47.61875 ;	68.87400 ,	45.36250 ;
78.37500 ,	0.00000 ;	66.51600 ,	48.92500 ;
62.58600 ,	47.26250 ;	69.26700 ,	45.24375 ;
76.70994 ,	17.12656 ;	80.75000 ,	18.37276 ;
70.64846 ,	34.44927 ;	74.58410 ,	35.99389 ;
62.97900 ,	47.14375 ;	66.90900 ,	49.04375 ;
62.58600 ,	47.73750 ;	69.66000 ,	45.12500 ;
0.00000 ,	78.78049 ;	83.12500 ,	0.00000 ;
63.37200 ,	47.02500 ;	67.30200 ,	49.16250 ;
62.97900 ,	47.85625 ;	0.00000 ,	83.41463 ;
63.76500 ,	46.90625 ;	81.35154 ,	18.75073 ;
77.41590 ,	17.20611 ;	75.29006 ,	36.07344 ;
71.25000 ,	34.82724 ;	70.29350 ,	45.12500 ;
64.15800 ,	46.78750 ;	67.69500 ,	49.28125 ;
63.37200 ,	47.97500 ;	70.92700 ,	45.12500 ;
64.55100 ,	46.66875 ;	68.08800 ,	49.40000 ;
63.76500 ,	48.09375 ;	81.92315 ,	19.17260 ;

76.00000	,	36.10000	;	82.46164	,	33.56399	;
68.48100	,	49.51875	;	0.00000	,	89.20732	;
0.00000	,	84.57317	;	85.47344	,	25.89006	;
71.56050	,	45.12500	;	82.96399	,	33.06164	;
82.46164	,	19.63601	;	74.09450	,	49.87500	;
76.70994	,	36.07344	;	77.26200	,	45.12500	;
68.87400	,	49.63750	;	85.50000	,	26.60000	;
72.19400	,	45.12500	;	83.42740	,	32.52315	;
69.26700	,	49.75625	;	85.47344	,	27.30994	;
82.96399	,	20.13836	;	83.84927	,	31.95154	;
77.41590	,	35.99389	;	74.72800	,	49.87500	;
85.50000	,	0.00000	;	85.39389	,	28.01590	;
69.66000	,	49.87500	;	84.22724	,	31.35000	;
72.82750	,	45.12500	;	85.26182	,	28.71395	;
0.00000	,	85.73171	;	84.55920	,	30.72190	;
83.42740	,	20.67685	;	85.07794	,	29.40017	;
78.11395	,	35.86182	;	84.84330	,	30.07074	;
70.29350	,	49.87500	;	77.89550	,	45.12500	;
73.46100	,	45.12500	;	90.25000	,	0.00000	;
83.84927	,	21.24846	;	0.00000	,	90.36585	;
78.80017	,	35.67794	;	75.36150	,	49.87500	;
70.92700	,	49.87500	;	78.52900	,	45.12500	;
74.09450	,	45.12500	;	75.99500	,	49.87500	;
0.00000	,	86.89024	;	79.16250	,	45.12500	;
84.22724	,	21.85000	;	76.62850	,	49.87500	;
79.47074	,	35.44330	;	0.00000	,	91.52439	;
71.56050	,	49.87500	;	79.79600	,	45.12500	;
74.72800	,	45.12500	;	77.26200	,	49.87500	;
84.55920	,	22.47810	;	80.42950	,	45.12500	;
80.12190	,	35.15920	;	77.89550	,	49.87500	;
72.19400	,	49.87500	;	92.62500	,	0.00000	;
75.36150	,	45.12500	;	0.00000	,	92.68293	;
87.87500	,	0.00000	;	69.03601	,	61.93836	;
84.84330	,	23.12926	;	68.57260	,	62.47685	;
80.75000	,	34.82724	;	81.06300	,	45.12500	;
0.00000	,	88.04878	;	69.53836	,	61.43601	;
72.82750	,	49.87500	;	68.15073	,	63.04846	;
85.07794	,	23.79983	;	70.07685	,	60.97260	;
81.35154	,	34.44927	;	67.77276	,	63.65000	;
75.99500	,	45.12500	;	78.52900	,	49.87500	;
85.26182	,	24.48605	;	70.64846	,	60.55073	;
81.92315	,	34.02740	;	67.44080	,	64.27810	;
73.46100	,	49.87500	;	71.25000	,	60.17276	;
76.62850	,	45.12500	;	81.69650	,	45.12500	;
85.39389	,	25.18410	;	67.15670	,	64.92926	;

71.87810 ,	59.84080 ;	82.33000 ,	49.87500 ;
79.16250 ,	49.87500 ;	95.00000 ,	15.79375 ;
66.92206 ,	65.59983 ;	16.62500 ,	95.00000 ;
0.00000 ,	93.84146 ;	66.60611 ,	69.81590 ;
72.52926 ,	59.55670 ;	95.00000 ,	16.92188 ;
82.33000 ,	45.12500 ;	85.49750 ,	45.12500 ;
66.73818 ,	66.28605 ;	95.00000 ,	18.05000 ;
79.79600 ,	49.87500 ;	76.70994 ,	58.92656 ;
73.19983 ,	59.32206 ;	82.96350 ,	49.87500 ;
82.96350 ,	45.12500 ;	19.00000 ,	95.00000 ;
66.60611 ,	66.98410 ;	95.00000 ,	19.17813 ;
80.42950 ,	49.87500 ;	66.73818 ,	70.51395 ;
73.88605 ,	59.13818 ;	95.00000 ,	20.30625 ;
66.52656 ,	67.69006 ;	86.13100 ,	45.12500 ;
83.59700 ,	45.12500 ;	77.41590 ,	59.00611 ;
95.00000 ,	0.00000 ;	83.59700 ,	49.87500 ;
0.00000 ,	95.00000 ;	21.37500 ,	95.00000 ;
95.00000 ,	1.12813 ;	95.00000 ,	21.43437 ;
95.00000 ,	2.25625 ;	95.00000 ,	22.56250 ;
2.37500 ,	95.00000 ;	66.92206 ,	71.20017 ;
95.00000 ,	3.38438 ;	86.76450 ,	45.12500 ;
74.58410 ,	59.00611 ;	84.23050 ,	49.87500 ;
95.00000 ,	4.51250 ;	95.00000 ,	23.69063 ;
4.75000 ,	95.00000 ;	23.75000 ,	95.00000 ;
95.00000 ,	5.64063 ;	78.11395 ,	59.13818 ;
81.06300 ,	49.87500 ;	95.00000 ,	24.81875 ;
95.00000 ,	6.76875 ;	87.39800 ,	45.12500 ;
7.12500 ,	95.00000 ;	67.15670 ,	71.87074 ;
95.00000 ,	7.89687 ;	84.86400 ,	49.87500 ;
66.50000 ,	68.40000 ;	95.00000 ,	25.94687 ;
95.00000 ,	9.02500 ;	26.12500 ,	95.00000 ;
9.50000 ,	95.00000 ;	78.80017 ,	59.32206 ;
95.00000 ,	10.15313 ;	95.00000 ,	27.07500 ;
84.23050 ,	45.12500 ;	88.03150 ,	45.12500 ;
75.29006 ,	58.92656 ;	85.49750 ,	49.87500 ;
95.00000 ,	11.28125 ;	67.44080 ,	72.52190 ;
81.69650 ,	49.87500 ;	95.00000 ,	28.20313 ;
11.87500 ,	95.00000 ;	28.50000 ,	95.00000 ;
95.00000 ,	12.40938 ;	79.47074 ,	59.55670 ;
66.52656 ,	69.10994 ;	95.00000 ,	29.33125 ;
95.00000 ,	13.53750 ;	88.66500 ,	45.12500 ;
14.25000 ,	95.00000 ;	86.13100 ,	49.87500 ;
84.86400 ,	45.12500 ;	67.77276 ,	73.15000 ;
95.00000 ,	14.66562 ;	95.00000 ,	30.45938 ;
76.00000 ,	58.90000 ;	30.87500 ,	95.00000 ;

80.12190 ,	59.84080 ;	91.83250 ,	49.87500 ;
89.29850 ,	45.12500 ;	94.36650 ,	45.12500 ;
86.76450 ,	49.87500 ;	71.25000 ,	76.62724 ;
95.00000 ,	31.58750 ;	95.00000 ,	43.99687 ;
68.15073 ,	73.75154 ;	83.84927 ,	63.04846 ;
95.00000 ,	32.71562 ;	92.46600 ,	49.87500 ;
89.93200 ,	45.12500 ;	95.00000 ,	45.12500 ;
87.39800 ,	49.87500 ;	45.12500 ,	95.00000 ;
33.25000 ,	95.00000 ;	71.87810 ,	76.95920 ;
80.75000 ,	60.17276 ;	84.22724 ,	63.65000 ;
95.00000 ,	33.84375 ;	93.09950 ,	49.87500 ;
68.57260 ,	74.32315 ;	72.52926 ,	77.24330 ;
88.03150 ,	49.87500 ;	93.73300 ,	49.87500 ;
90.56550 ,	45.12500 ;	47.50000 ,	95.00000 ;
95.00000 ,	34.97188 ;	84.55920 ,	64.27810 ;
81.35154 ,	60.55073 ;	73.19983 ,	77.47794 ;
35.62500 ,	95.00000 ;	94.36650 ,	49.87500 ;
95.00000 ,	36.10000 ;	84.84330 ,	64.92926 ;
88.66500 ,	49.87500 ;	73.88605 ,	77.66182 ;
91.19900 ,	45.12500 ;	49.87500 ,	95.00000 ;
69.03601 ,	74.86164 ;	95.00000 ,	49.87500 ;
95.00000 ,	37.22812 ;	85.07794 ,	65.59983 ;
81.92315 ,	60.97260 ;	74.58410 ,	77.79389 ;
89.29850 ,	49.87500 ;	95.00000 ,	51.00312 ;
38.00000 ,	95.00000 ;	85.26182 ,	66.28605 ;
91.83250 ,	45.12500 ;	75.29006 ,	77.87344 ;
95.00000 ,	38.35625 ;	95.00000 ,	52.13125 ;
69.53836 ,	75.36399 ;	52.25000 ,	95.00000 ;
82.46164 ,	61.43601 ;	85.39389 ,	66.98410 ;
89.93200 ,	49.87500 ;	76.00000 ,	77.90000 ;
95.00000 ,	39.48438 ;	95.00000 ,	53.25937 ;
92.46600 ,	45.12500 ;	85.47344 ,	67.69006 ;
40.37500 ,	95.00000 ;	76.70994 ,	77.87344 ;
70.07685 ,	75.82740 ;	95.00000 ,	54.38750 ;
95.00000 ,	40.61250 ;	85.50000 ,	68.40000 ;
90.56550 ,	49.87500 ;	54.62500 ,	95.00000 ;
93.09950 ,	45.12500 ;	77.41590 ,	77.79389 ;
82.96399 ,	61.93836 ;	85.47344 ,	69.10994 ;
95.00000 ,	41.74063 ;	95.00000 ,	55.51563 ;
91.19900 ,	49.87500 ;	78.11395 ,	77.66182 ;
70.64846 ,	76.24927 ;	85.39389 ,	69.81590 ;
93.73300 ,	45.12500 ;	78.80017 ,	77.47794 ;
42.75000 ,	95.00000 ;	95.00000 ,	56.64375 ;
95.00000 ,	42.86875 ;	85.26182 ,	70.51395 ;
83.42740 ,	62.47685 ;	57.00000 ,	95.00000 ;

79.47074 ,	77.24330 ;	95.00000 ,	82.59062 ;
85.07794 ,	71.20017 ;	83.12500 ,	95.00000 ;
80.12190 ,	76.95920 ;	95.00000 ,	83.71875 ;
95.00000 ,	57.77188 ;	95.00000 ,	84.84688 ;
84.84330 ,	71.87074 ;	85.50000 ,	95.00000 ;
80.75000 ,	76.62724 ;	95.00000 ,	85.97500 ;
84.55920 ,	72.52190 ;	95.00000 ,	87.10313 ;
81.35154 ,	76.24927 ;	87.87500 ,	95.00000 ;
84.22724 ,	73.15000 ;	95.00000 ,	88.23125 ;
81.92315 ,	75.82740 ;	95.00000 ,	89.35938 ;
83.84927 ,	73.75154 ;	90.25000 ,	95.00000 ;
82.46164 ,	75.36399 ;	95.00000 ,	90.48750 ;
83.42740 ,	74.32315 ;	95.00000 ,	91.61562 ;
82.96399 ,	74.86164 ;	92.62500 ,	95.00000 ;
95.00000 ,	58.90000 ;	95.00000 ,	92.74375 ;
59.37500 ,	95.00000 ;	95.00000 ,	93.87187 ;
95.00000 ,	60.02813 ;	95.00000 ,	95.00000 ] ;
95.00000 ,	61.15625 ;	%	
61.75000 ,	95.00000 ;	% Elements	
95.00000 ,	62.28437 ;	%	
95.00000 ,	63.41250 ;	global elements	
64.12500 ,	95.00000 ;	elements = [	
95.00000 ,	64.54063 ;	1 , 7 , 4 ;	
95.00000 ,	65.66875 ;	7 , 13 , 10 ;	
66.50000 ,	95.00000 ;	13 , 19 , 16 ;	
95.00000 ,	66.79688 ;	19 , 25 , 22 ;	
95.00000 ,	67.92500 ;	25 , 31 , 28 ;	
68.87500 ,	95.00000 ;	31 , 37 , 34 ;	
95.00000 ,	69.05312 ;	37 , 43 , 40 ;	
95.00000 ,	70.18125 ;	43 , 49 , 46 ;	
71.25000 ,	95.00000 ;	49 , 55 , 52 ;	
95.00000 ,	71.30938 ;	55 , 62 , 58 ;	
95.00000 ,	72.43750 ;	62 , 68 , 65 ;	
95.00000 ,	73.56562 ;	68 , 74 , 71 ;	
73.62500 ,	95.00000 ;	74 , 80 , 77 ;	
95.00000 ,	74.69375 ;	80 , 109 , 83 ;	
95.00000 ,	75.82188 ;	109 , 154 , 130 ;	
76.00000 ,	95.00000 ;	154 , 213 , 185 ;	
95.00000 ,	76.95000 ;	213 , 305 , 278 ;	
95.00000 ,	78.07813 ;	305 , 350 , 329 ;	
78.37500 ,	95.00000 ;	350 , 402 , 371 ;	
95.00000 ,	79.20625 ;	402 , 444 , 414 ;	
95.00000 ,	80.33437 ;	444 , 447 , 446 ;	
80.75000 ,	95.00000 ;	447 , 451 , 449 ;	
95.00000 ,	81.46250 ;	451 , 455 , 453 ;	

455 , 459 , 457 ;	285 , 279 , 282 ;
459 , 464 , 461 ;	279 , 268 , 276 ;
464 , 469 , 467 ;	268 , 257 , 262 ;
469 , 475 , 472 ;	257 , 251 , 253 ;
475 , 480 , 478 ;	251 , 243 , 245 ;
480 , 486 , 484 ;	243 , 237 , 239 ;
486 , 492 , 491 ;	237 , 229 , 233 ;
492 , 499 , 496 ;	229 , 236 , 234 ;
499 , 506 , 503 ;	236 , 242 , 240 ;
506 , 513 , 510 ;	242 , 250 , 246 ;
513 , 522 , 517 ;	250 , 258 , 254 ;
522 , 529 , 524 ;	258 , 267 , 261 ;
529 , 536 , 533 ;	267 , 283 , 277 ;
536 , 545 , 540 ;	283 , 291 , 286 ;
545 , 553 , 549 ;	291 , 299 , 293 ;
553 , 562 , 557 ;	299 , 307 , 301 ;
562 , 570 , 567 ;	307 , 315 , 310 ;
570 , 560 , 565 ;	315 , 323 , 319 ;
560 , 550 , 555 ;	323 , 330 , 327 ;
550 , 538 , 544 ;	330 , 337 , 335 ;
538 , 525 , 532 ;	337 , 345 , 340 ;
525 , 514 , 520 ;	345 , 351 , 347 ;
514 , 500 , 507 ;	351 , 360 , 356 ;
500 , 487 , 494 ;	360 , 369 , 365 ;
487 , 471 , 479 ;	369 , 381 , 375 ;
471 , 443 , 462 ;	381 , 394 , 388 ;
443 , 434 , 438 ;	394 , 406 , 404 ;
434 , 418 , 427 ;	406 , 411 , 408 ;
418 , 410 , 412 ;	411 , 423 , 413 ;
410 , 405 , 407 ;	423 , 436 , 430 ;
405 , 389 , 401 ;	436 , 454 , 440 ;
389 , 378 , 382 ;	454 , 474 , 465 ;
378 , 366 , 370 ;	474 , 489 , 482 ;
366 , 357 , 361 ;	489 , 502 , 495 ;
357 , 346 , 352 ;	502 , 515 , 508 ;
346 , 336 , 342 ;	515 , 526 , 521 ;
336 , 328 , 334 ;	526 , 537 , 531 ;
328 , 322 , 324 ;	537 , 548 , 542 ;
322 , 316 , 320 ;	548 , 558 , 554 ;
316 , 311 , 314 ;	558 , 569 , 564 ;
311 , 306 , 309 ;	569 , 576 , 574 ;
306 , 300 , 302 ;	576 , 584 , 580 ;
300 , 294 , 298 ;	584 , 590 , 587 ;
294 , 290 , 292 ;	590 , 597 , 594 ;
290 , 285 , 287 ;	597 , 606 , 602 ;

606 , 623 , 612 ;	218 , 192 , 205 ;
623 , 626 , 625 ;	192 , 162 , 176 ;
626 , 629 , 628 ;	162 , 135 , 143 ;
629 , 632 , 631 ;	135 , 116 , 125 ;
632 , 635 , 634 ;	116 , 84 , 102 ;
635 , 638 , 637 ;	84 , 81 , 82 ;
638 , 641 , 640 ;	81 , 78 , 79 ;
641 , 644 , 642 ;	78 , 75 , 76 ;
644 , 647 , 645 ;	75 , 72 , 73 ;
647 , 650 , 648 ;	72 , 69 , 70 ;
650 , 653 , 651 ;	69 , 66 , 67 ;
653 , 656 , 654 ;	66 , 63 , 64 ;
656 , 659 , 657 ;	63 , 60 , 61 ;
659 , 662 , 660 ;	60 , 57 , 59 ;
662 , 665 , 663 ;	57 , 54 , 56 ;
665 , 668 , 666 ;	54 , 51 , 53 ;
668 , 670 , 669 ;	51 , 48 , 50 ;
670 , 664 , 667 ;	48 , 45 , 47 ;
664 , 658 , 661 ;	45 , 42 , 44 ;
658 , 652 , 655 ;	42 , 39 , 41 ;
652 , 646 , 649 ;	39 , 36 , 38 ;
646 , 639 , 643 ;	36 , 33 , 35 ;
639 , 633 , 636 ;	33 , 30 , 32 ;
633 , 627 , 630 ;	30 , 27 , 29 ;
627 , 608 , 624 ;	27 , 24 , 26 ;
608 , 591 , 599 ;	24 , 21 , 23 ;
591 , 577 , 583 ;	21 , 18 , 20 ;
577 , 561 , 571 ;	18 , 15 , 17 ;
561 , 543 , 551 ;	15 , 12 , 14 ;
543 , 527 , 535 ;	12 , 9 , 11 ;
527 , 511 , 518 ;	9 , 6 , 8 ;
511 , 497 , 504 ;	6 , 3 , 5 ;
497 , 483 , 490 ;	3 , 1 , 2 ;
483 , 470 , 476 ;	458 , 477 , 468 ;
470 , 460 , 466 ;	477 , 493 , 485 ;
460 , 452 , 456 ;	493 , 509 , 501 ;
452 , 445 , 448 ;	509 , 523 , 516 ;
445 , 415 , 432 ;	523 , 539 , 530 ;
415 , 403 , 409 ;	539 , 552 , 546 ;
403 , 374 , 385 ;	552 , 566 , 559 ;
374 , 353 , 362 ;	566 , 575 , 572 ;
353 , 331 , 341 ;	575 , 582 , 579 ;
331 , 308 , 321 ;	582 , 589 , 586 ;
308 , 284 , 295 ;	589 , 596 , 593 ;
284 , 218 , 249 ;	596 , 603 , 600 ;

603 , 609 , 605 ;	380 , 387 , 384 ;
609 , 614 , 611 ;	387 , 393 , 391 ;
614 , 618 , 616 ;	393 , 398 , 396 ;
618 , 622 , 620 ;	398 , 399 , 400 ;
622 , 619 , 621 ;	399 , 395 , 397 ;
619 , 615 , 617 ;	395 , 390 , 392 ;
615 , 610 , 613 ;	390 , 383 , 386 ;
610 , 604 , 607 ;	383 , 376 , 379 ;
604 , 598 , 601 ;	376 , 367 , 372 ;
598 , 592 , 595 ;	367 , 358 , 363 ;
592 , 585 , 588 ;	358 , 348 , 354 ;
585 , 578 , 581 ;	348 , 338 , 343 ;
578 , 568 , 573 ;	338 , 325 , 332 ;
568 , 556 , 563 ;	325 , 312 , 317 ;
556 , 541 , 547 ;	312 , 296 , 303 ;
541 , 528 , 534 ;	296 , 280 , 288 ;
528 , 512 , 519 ;	280 , 231 , 264 ;
512 , 498 , 505 ;	231 , 211 , 220 ;
498 , 481 , 488 ;	211 , 196 , 202 ;
481 , 463 , 473 ;	196 , 183 , 189 ;
463 , 441 , 450 ;	183 , 172 , 178 ;
441 , 433 , 437 ;	172 , 164 , 168 ;
433 , 426 , 429 ;	164 , 156 , 159 ;
426 , 421 , 424 ;	156 , 149 , 151 ;
421 , 416 , 419 ;	149 , 147 , 146 ;
416 , 420 , 417 ;	147 , 152 , 150 ;
420 , 425 , 422 ;	152 , 160 , 157 ;
425 , 431 , 428 ;	123 , 128 , 126 ;
431 , 439 , 435 ;	128 , 133 , 131 ;
439 , 458 , 442 ;	133 , 138 , 136 ;
160 , 169 , 165 ;	138 , 142 , 140 ;
169 , 179 , 173 ;	142 , 153 , 145 ;
179 , 190 , 184 ;	153 , 163 , 158 ;
190 , 204 , 197 ;	163 , 171 , 167 ;
204 , 221 , 212 ;	171 , 180 , 175 ;
221 , 265 , 232 ;	180 , 187 , 182 ;
265 , 289 , 281 ;	187 , 194 , 191 ;
289 , 304 , 297 ;	194 , 200 , 198 ;
304 , 318 , 313 ;	200 , 207 , 203 ;
318 , 333 , 326 ;	207 , 214 , 209 ;
333 , 344 , 339 ;	214 , 219 , 216 ;
344 , 355 , 349 ;	219 , 225 , 223 ;
355 , 364 , 359 ;	225 , 230 , 227 ;
364 , 373 , 368 ;	230 , 244 , 238 ;
373 , 380 , 377 ;	244 , 255 , 248 ;

```

255 , 263 , 259 ;
263 , 271 , 269 ;
271 , 275 , 273 ;
275 , 272 , 274 ;
272 , 266 , 270 ;
266 , 256 , 260 ;
256 , 247 , 252 ;
247 , 235 , 241 ;
235 , 226 , 228 ;
226 , 222 , 224 ;
222 , 215 , 217 ;
215 , 208 , 210 ;
208 , 201 , 206 ;
201 , 195 , 199 ;
195 , 188 , 193 ;
188 , 181 , 186 ;
181 , 174 , 177 ;
174 , 166 , 170 ;
166 , 155 , 161 ;
155 , 144 , 148 ;
144 , 139 , 141 ;
139 , 134 , 137 ;
134 , 129 , 132 ;
129 , 124 , 127 ;
124 , 120 , 122 ;
120 , 115 , 118 ;
115 , 111 , 113 ;
111 , 106 , 108 ;
106 , 101 , 104 ;
101 , 97 , 99 ;
97 , 93 , 95 ;
93 , 89 , 91 ;
89 , 85 , 87 ;
85 , 88 , 86 ;
88 , 92 , 90 ;
92 , 96 , 94 ;
96 , 100 , 98 ;
100 , 105 , 103 ;
105 , 110 , 107 ;
110 , 114 , 112 ;
114 , 119 , 117 ;
119 , 123 , 121 ] ;

%
% Fixed Nodes
%
fixnodes = [
    1 , 1 , 0.00000 ;
    1 , 2 , 0.00000 ;
    445 , 1 , 0.00000 ] ;
%
% Point loads
%
pointload = [
    231 , 1 , 0.00000 ;
    231 , 2 , -42.08000 ;
    264 , 1 , 0.00000 ;
    264 , 2 , -42.08000 ;
    280 , 1 , 0.00000 ;
    280 , 2 , -42.08000 ;
    589 , 1 , 0.00000 ;
    589 , 2 , 42.08000 ;
    593 , 1 , 0.00000 ;
    593 , 2 , 42.08000 ;
    596 , 1 , 0.00000 ;
    596 , 2 , 42.08000 ] ;
%
% Uniform Side loads
%
sideload = [ ] ;

```