

ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN DEL ANCHO DE BANDA DE BANDA DE MATRICES DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONALES



MAYA SIAN CAYCEDO GARCIA
DIEGO FERNANDO GOMEZ PARRA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE FISICO MECANICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA, ENERO 2008

ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN DEL ANCHO DE BANDA DE BANDA DE MATRICES DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONALES



PRESENTADO POR

MAYA SIAN CAYCEDO GARCIA
DIEGO FERNANDO GOMEZ PARRA

DIRECTOR

LEONARDO DAVID DONADO

Tesis de grado como requisito para optar al título de
Ingeniero Civil

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE FISICO MECANICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA, ENERO 2008

AGRADECIMIENTOS

A nuestros padres Cecilia Parra, Magda García, Hernando Gómez y Rafael Caycedo, por su amor y apoyo incondicional, para cumplir nuestras metas. A nuestras parejas Paloma Bahamón y Alejandro Ramírez, por estar a nuestro lado siendo los confidentes de nuestras vidas.

A nuestros amigos Vikter Ortiz, Andrés Rojas y Arturo Rojas por compartir tantos momentos gratos y darnos fuerzas en las dificultades

A Leonardo Donado, que con su paciencia y compromiso, nos permitió aprender de él, el dar lo mejor de nosotros mismos.

A Juan Carlos Bastos por su ayuda, la cual nos permitió alcanzar nuestro objetivo en este proyecto.

A todos muchas gracias, sabemos que este triunfo no es sólo nuestro, es suyo también.

ABLA DE CONTENIDO

| | |
|---|------------|
| RESUMEN | 5 |
| ABSTRACT | 6 |
| 1. INTRODUCCIÓN | 7 |
| 2. METODOLOGÍA | 11 |
| 2.1. REORDENAMIENTO DE DATOS | 12 |
| 2.2. ANÁLISIS COMPARATIVO DEL ANCHO DE BANDA MÍNIMO. | 13 |
| 2.3. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD | 14 |
| 3. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD | 18 |
| 4. APLICACIÓN | 26 |
| 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN | 28 |
| 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 32 |
| 7. ANEXOS | 355 |
| 7.1. ANCHO DE BANDA | 355 |
| 7.2. CÓDIGO | 377 |
| 7.3. MATRICES DE LAS REDES FRACTURADAS | 40 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Fig. 2.1 Representación de funciones de enfriamiento.(a) Forma Lineal. (b) Forma Exponencial..... | 15 |
| Fig. 2.2 Diagrama de flujo a) Definición de función de enfriamiento | 16 |
| b) Posición de ancho de banda inicial | 17 |
| c) Calculo del nuevo ancho de banda..... | 18 |
| d) Calculo de la Probabilidad de Boltzmann..... | 19 |
| Fig. 3.1 Ejemplo de red sintética. Red_Sin_1 | 20 |
| Fig. 3.2 Ejemplo de red sintética. Red_Sin_2..... | 21 |
| Fig. 3.3 Ejemplo de red sintética. Red_Sin_3..... | 21 |
| Fig. 3.4 Ejemplo de red sintética. Red_Sin_4..... | 22 |
| Fig. 3.5 Matriz ejemplo para la red sintética Red_Sin_3 con su respectivo máximo ancho de banda | 22 |
| Fig. 4.1 (a) Representación gráfica de un medio geológico fracturado mediante Redes de Fracturas Discretas (DFN, Discrete Fracture Network en inglés). (b) Red de elementos finitos en 1D para la modelación de flujo y transporte en el medio geológico. Tomado de (Donado et al ., 2006) | 27 |
| Fig. 7.1 Interconexión de un sistema de tipo lineal. (a)Elementos del sistema lineal (b) Conformación de matriz global. (c) Discretización vectorial. (d) Sistema matricial..... | 35 |
| Fig. 7.2 Matrices para redes sintéticas con sus respectivos ancho de banda inicial (a) Red_Sin _1. (b) Red_Sin_2. | 40 |
| (c) Matriz para red sintética Red_Sin_4 | 41 |

LISTA DE TABLAS

| | |
|---|-----|
| Tabla 3.1 Resultados utilizando la ecuación lineal donde “l” representa cálculo instantáneo, “n” número de iteraciones empleadas y “m” representa la pendiente de la función de enfriamiento | 224 |
| Tabla 3.2 Resultados utilizando la ecuación exponencial. donde “l” representa cálculo instantáneo, “n” número de iteraciones empleadas y “m” representa la pendiente de la función de enfriamiento | 24 |
| Tabla 4.1 Resultados obtenidos con redes de fracturas discretas unidimensionales. | 28 |
| Tabla 7.1 Conexiones discretizadas para cada elemento (Zienkiewicz,1977) | 36 |

AUTORES: MAYA SIAN CAYCEDO GARCÍA

DIEGO FERNANDO GÓMEZ PARRA

PALABRAS CLAVES: Simulated Annealing, Matriz de rigidez o conductancia, Ancho de banda, Elementos finitos.

Modelar fenómenos presentes en el medio natural es posible a través de ecuaciones diferenciales, las cuales pueden ser resueltas mediante métodos numéricos como elementos finitos, el cual arroja un sistema lineal matricial a solucionar. El obstáculo que se presenta al resolver dichos sistemas, es el tiempo computacional demandado para esto.

Como solución a ello, en este documento presenta un algoritmo de optimización, que, basado en el algoritmo *Simulated Annealing*, permite la reducción del ancho de banda de los sistemas matriciales o matrices de rigidez o conductancia alcanzando un mínimo global, obteniendo una reducción en los tiempos computacionales. Cabe resaltar que este aporte está dirigido en particular a modelos en una dimensión y redes abiertas. En esta investigación se presenta un análisis de sensibilidad a partir de dos funciones de enfriamiento una lineal y otra exponencial, además el algoritmo se prueba en cuatro redes sintéticas haciendo una reenumeración de sus nodos y así comparar anchos de banda y obtener el mínimo posible.

Conjuntamente se probaron seis redes de fracturas discretas que modelan un medio fracturado para evaluar el flujo de agua subterránea y el transporte de solutos alcanzando una disminución del ancho de banda en todas las matrices de rigidez o conductancia.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD: FÍSICO MECÁNICAS

ESCUELA: INGENIERÍA CIVIL

DIRECTOR: LEONARDO DAVID DONADO GARZÓN

TITULO: ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN DEL ANCHO DE BANDA DE MATRICES DE RIGIDEZ O CONDUCTANCIA DE ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONALES.

AUTORES : MAYA SIAN CAYCEDO GARCÍA

DIEGO FERNANDO GÓMEZ PARRA

PALABRAS CLAVES: Simulated Annealing, Matriz de rigidez o conductancia, Ancho de banda, Elementos finitos.

It is possible to simulate phenomena present in natural environments by the use of differential equations, which can be resolved using numerical methods like finite elements. This methodology requires the resolution of a linear matricial system. The associated burden to such systems is the computational time required for their resolution. As an alternative, this report introduces an optimization algorithm based on the *Simulated Annealing* algorithm, which reduces the bandwidth of the matricial systems, rigidity or conductance matrices by reaching a global minimum that achieves a reduction of the overall computational load.

It is worthwhile to stress the fact that this contribution is targeted to open networks and uni-dimensional models. This research introduces a sensibility analysis based on two types of cooling functions; a linear function and an exponential function. Additionally, the algorithm is proven in four synthetic networks by renumbering its nodes, which facilitates the comparison of bandwidths in order to obtain the intended global minimum.

Furthermore, six discrete fracture networks were analysed in order to model a fractured environment and evaluate the groundwater flow and the transport of solutes, concluding with a reduction of the bandwidth of all the rigidity or conductance matrices.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD: FISICO MECÁNICAS

ESCUELA: INGENIERÍA CIVIL

DIRECTOR: LEONARDO DAVID DONADO GARZÓN

1. INTRODUCCIÓN

Las propiedades físicas y químicas de los materiales existentes en el medio natural ofrecen una vasta cantidad de oportunidades al ser humano de mejorar su calidad de vida. Sin embargo, para materializar estas oportunidades, es necesario entender de qué manera se comportan diferentes tipos de fenómenos presentes en los medios y materiales utilizados.

Los problemas de flujo de calor, de agua, de corriente eléctrica, de transporte de contaminantes o de elasticidad, son algunos ejemplos de dichos fenómenos, los cuales se representan mediante funciones de carácter continuo (al igual que sus respectivas derivadas) lo que permite modelarlos como un medio continuo, en el cual las discontinuidades a escala micro son despreciadas (*Oliver & Agelet, 2000*). Esto permite la representación de los fenómenos y sus variaciones mediante ecuaciones diferenciales, cuya solución analítica en muchos casos es difícil determinar. Por lo tanto, se hace pertinente la aplicación de métodos numéricos, como por ejemplo el de elementos finitos para determinar la solución.

Al emplearlo, se obtiene un sistema matricial de la forma (*Zienkiewicz, 1977*).

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{f} \quad (1.1)$$

Donde \mathbf{K} representa la matriz de rigidez o conductancia del fenómeno a analizar, δ representa el vector de variables de estudio y \mathbf{f} las condiciones de frontera. Es claro que para desarrollar el sistema, es necesario despejar

el vector δ de la ecuación, y esto se logra mediante la obtención de la matriz inversa de \mathbf{K} .

$$\delta = \mathbf{K}^{-1}f \quad (1.2)$$

El inconveniente que se presenta al hallar dicha inversa, es la gran cantidad de tiempo computacional que requiere y por ende el elevado costo que ello implica. Dicho tiempo se comporta de manera proporcional (potencial) al ancho de banda de la matriz \mathbf{K} , por tal motivo, se hace imperiosa la reducción de éste, para así lograr la optimización del método.

Para la optimización en el desarrollo del sistema, se han creado diferentes tipos de algoritmos tales como *GPS Method* (Gibbs & Poole, 1976), *PFM Method* (Hoit & Wilson, 1983) y *Cuthill & McKee*, (2007), los cuales reenumeran los nodos de la matriz de rigidez para encontrar un ancho de banda menor. A pesar de ser efectivos estos algoritmos en modelos 3D y 2D, no funcionan de manera idónea en 1D, por tanto, el objeto de esta investigación fue encontrar un algoritmo de optimización que redujera el ancho de banda de la matriz de rigidez, permitiendo así la modelación de fenómenos en medios continuos, basado en el método numérico de elementos finitos unidimensionales, de manera tal que el resultado arroje el máximo beneficio - costo.

El desarrollo de este procedimiento está basado en el método *Simulated Annealing*, el cual es un algoritmo probabilístico derivado de una analogía al proceso físico del recocido de sólidos (Kirkpatrick et al., 1983) el cual consta sustancialmente de dos pasos (Bergeret & Besse, 1997): (i) Un incremento rápido a una temperatura de valor máximo a la cual el sólido se funde. Aquí, el calor produce una separación de los átomos de su

posición inicial (un mínimo local de energía interna), induciéndolos a vagar al azar a través de estados de mayor energía y (ii) Un decremento lento de la temperatura, lo cual produce una pérdida en la movilidad térmica, otorgando así, más oportunidades de encontrar configuraciones con energía más baja que la inicial.

Así, la esencia del proceso es un enfriamiento lento, con un amplio tiempo que permita la redistribución de los átomos mientras pierden movilidad. Esta es la definición de la técnica de recocido, la cual asegurará que un estado de baja energía será alcanzado.

El proceso de optimización presentado en esta investigación es de tipo combinatorio discreto ya que garantiza encontrar un mínimo global y no uno local (Cook., et al, 1997). En este sentido se obtendrá una función objetivo la cual busca minimizar el ancho de banda de la matriz de rigidez o conductancia.

El documento se compone de 5 apartados. Así, ésta introducción se complementa con otras 4 secciones de la siguiente manera: la sección 2 presenta la metodología implementada en esta investigación, basada en el algoritmo de optimización *Simulated Annealing*. Además en dicho capítulo se encuentra el objetivo inicial trazado, es decir, el algoritmo de optimización para reducir el ancho de banda de matrices de rigidez o conductancia de elementos finitos unidimensionales. Fue desarrollado en el lenguaje computacional de uso libre (GNU) *OCTAVE*, que cuenta con la capacidad de realizar cálculos numéricos con vectores y matrices. Seguido de esto fue realizada una serie de pruebas sintéticas con el fin de comprobar el correcto funcionamiento del algoritmo sobre elementos finitos unidimensionales representados mediante redes de fracturas

discretas, las cuales permiten modelar flujo y transporte en medios fracturados. El capítulo 4 presenta una breve reseña acerca de la aplicación del algoritmo. Por último se encuentran las conclusiones respecto a los resultados del algoritmo.

2. METODOLOGÍA

El algoritmo propuesto en esta investigación se basa en el método heurístico de optimización *Simulated Annealing* [SA], el cual presenta una analogía termodinámica con los principios de los metales al templarse, intentando dar soluciones modelando los cambios de energía que sufre el material durante el proceso de enfriamiento (Pérez, 2005), proporcionando además la ventaja de encontrar mínimos locales, los cuales son comparados entre sí para obtener un mínimo global. Conjuntamente permite precisar los parámetros correctos para el esquema de enfriamiento, tales como temperatura, pendiente de la función de enfriamiento y número de iteraciones, con los cuales se podrá alcanzar la disminución del costo computacional.

Para aplicar el método del SA, en el proceso de optimización de redes de elementos finitos, se reemplazan los valores de energía utilizados en el recocido simulado, por los valores de ancho de banda obtenidos de una matriz de rigidez o conductancia. De esta forma se logra introducir el esquema del SA en el problema de optimización del ancho de banda de dicha matriz, la cual es creada a partir de una red unidimensional de un medio fracturado (e.g. una estructura geológica, un conjunto de fallas tectónicas, etc).

Lo anterior conlleva a plantear el algoritmo para la optimización del ancho de banda de matrices de rigidez o conductancia de elementos finitos unidimensionales, el cual se compone de tres partes: (i) reordenamiento de

datos, (ii) análisis comparativo del ancho de banda mínimo y, (iii) por último un análisis de sensibilidad.

2.1. Reordenamiento de datos

En primera instancia se define la matriz de una red sintética unidimensional, la cual permite simular fenómenos en una dimensión, con elementos y nodos numerados que son las variables a analizar (detallados en la siguiente sección). Conjuntamente, el número de columnas empleado en la matriz de rigidez o conductancia está definido por el ancho de banda, resultante del máximo valor absoluto de la diferencia de los números asignados a cada nodo que unen un elemento.

La metodología a emplear para disminuir el ancho de banda de la matriz de rigidez o conductancia se inicia reordenando la numeración de los nodos en la red sintética, escogiendo inicialmente dos elementos (Fig. 2.2.a), el primero será el que esté generando el máximo ancho de banda, el segundo será hallado de forma aleatoria. Una vez seleccionados estos elementos, se reenumera la red, cambiando el número asignado al nodo inicial del elemento aleatorio por el número asignado al nodo inicial del segundo elemento (Fig. 2.2.c). Este nuevo ordenamiento genera un máximo ancho de banda, que será comparado con el obtenido inicialmente.

Con el anterior análisis obtenemos la función objetivo, definida de la siguiente manera:

$$\min = |\text{Ancho de banda inicial} - \text{Ancho de banda del nuevo reordenamiento}|$$

2.2. Análisis comparativo del ancho de banda mínimo.

Al obtener el nuevo ancho de banda generado por el reordenamiento de datos (Fig. 2.2.c), éste se compara con el ancho de banda inicial de la siguiente manera:

Si el nuevo ancho de banda es menor al ancho de banda inicial, la reenumeración de la red es aceptada y el análisis continúa hasta encontrar un valor menor a partir de este reordenamiento; por el contrario, si existe un incremento del ancho de banda inicial con respecto al nuevo ancho de banda, se realiza un análisis basado en la probabilidad de Boltzman (Fig. 2.2.d), fundamentada en las leyes termodinámicas que rigen el recocido de los metales (De Vicente et al.,2003), donde se formula que a una temperatura T la probabilidad de un incremento energético ΔE se puede dar por la siguiente ecuación:

$$P(\Delta E) = \exp^{-\Delta E/KT} \quad (2.1)$$

Siendo " P " la función de probabilidad de un incremento energético de magnitud " ΔE ", y " k " la constante física de Boltzmann (Dowland & Díaz,2001). Para la aplicación en un problema de aplicación, dicha constante no se considera debido a que no tiene significado físico en el problema de optimización (Peláez, 2005), por lo tanto se obtiene la siguiente ecuación:

$$P(BB) = \exp^{-\Delta BB/T} \quad (2.2)$$

Donde BB es el ancho de banda (*Broad Band en inglés*). Obteniendo el valor de la probabilidad, se compara con un número aleatorio generado

por una función de distribución normal. Si la probabilidad es mayor al número aleatorio, el nuevo reordenamiento de la red es aceptado, de lo contrario, la probabilidad es menor, la redistribución es rechazada y el programa seguirá trabajando con la matriz inicial hasta encontrar un valor menor del ancho de banda.

2.3. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El S.A se inicia con una temperatura predeterminada que se irá enfriando a medida que se encuentran mínimos locales. Análogamente, el algoritmo presentado inicia especificando los componentes de la función de enfriamiento T , (Fig. 2.2.a), la cual está definida de dos formas, una lineal y otra exponencial (Fig. 2.1), de las cuales se adoptará la que menor tiempo tarde en obtener el mínimo ancho de banda posible, mediante un análisis de sensibilidad.

$$T = T_0 - m * n \quad (2.3)$$

$$T = T_0 e^{m*n} \quad (2.4)$$

Donde " T_0 " es la temperatura inicial, m es la pendiente que representa el cambio de T , y " n " es el número de iteraciones máximo.

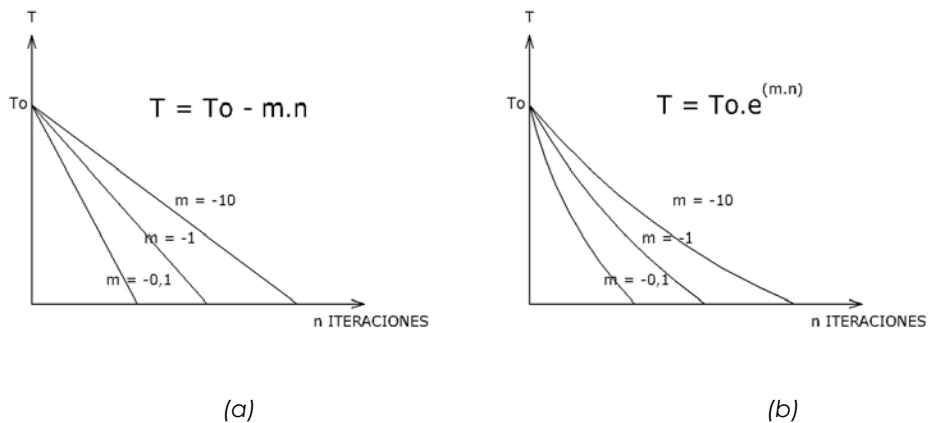


Fig. 2.1 Representación de funciones de enfriamiento. (a) Forma Lineal. (b) Forma Exponencial.

Las ecuaciones trabajaron con tres parámetros: temperatura inicial, pendiente y número de iteraciones necesarias para que la función llegase a cero desde la temperatura máxima. Los valores iniciales para la temperatura fueron de 1, 10, 100 y 1000, los cuales son una equivalencia de la utilizada en el temple de los metales, y los valores de pendiente fueron -0.1, -1 y -10. Con estos parámetros se realizaron las posibles combinaciones en cada una de las ecuaciones, para así finalmente obtener los tiempos computacionales empleados en encontrar el mínimo ancho de banda en cada red sintética y evaluar que combinación arroja el mejor resultado.

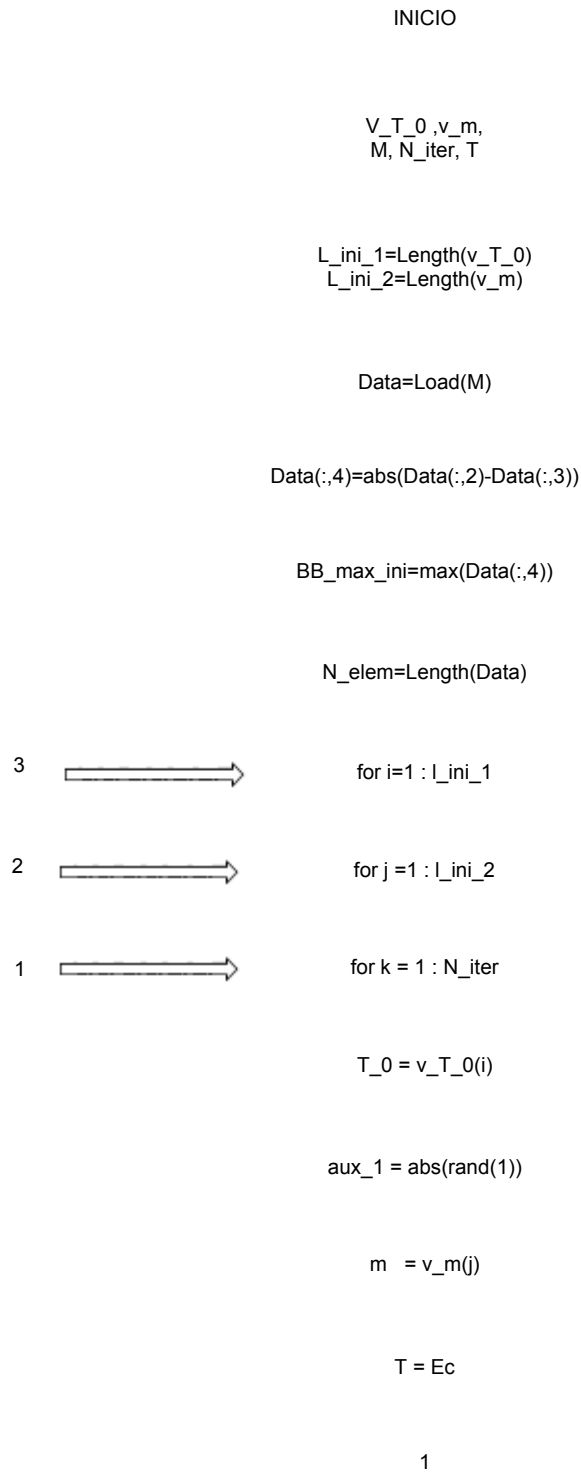
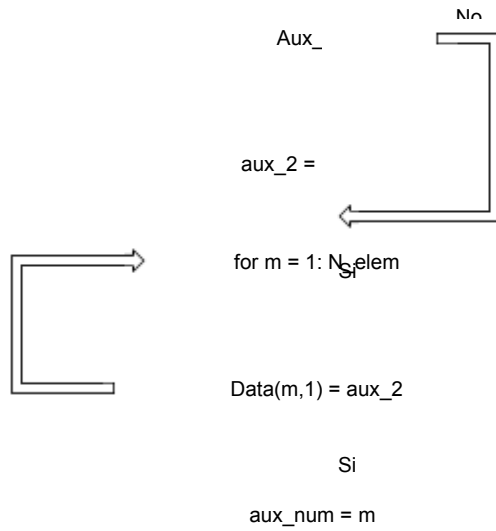


Fig. 2.2 Diagrama de flujo.
 (a)Definición función de enfriamiento.

1

$aux_2 = \text{round}(aux_1 .* N_elem)$



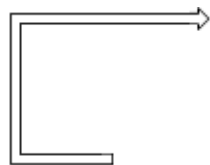
$Data(m,1) = aux_2$

Si

$aux_num = m$

$A = 0$

$aux_ini = Data(aux_num,2)$



$for\ m = 1: N_elem$

$Data(m,4) = BB_max_ini$

Si

$EB = m$

$A = 0$

2

(b) Posición del ancho de banda Inicial.

2

Z

```
aux_ini_B = Data(EB,2)
```

```
New_Data = Data
```

```
L(:,1) = New_Data(:,2)
```

```
L(:,1) = New_Data(:,3)
```

```
mask1 = (L==aux_ini_B)
```

```
mask = (L==aux_ini)
```

```
N_mask = ~mask
```

```
N_mask1 = ~mask1
```

```
L = L.*N_mask+mask*aux_ini_B
```

```
L = L.*N_mask1+mask1*aux_ini
```

```
New_Data(:,2)=L(:,1)
```

```
New_Data(:,3)=L(:,2)
```

```
New_Data(:,4) = abs(New_Data(:,2) - New_Data(:,3))
```

```
New_BB_max_ini = max( New_Data(:,4))
```

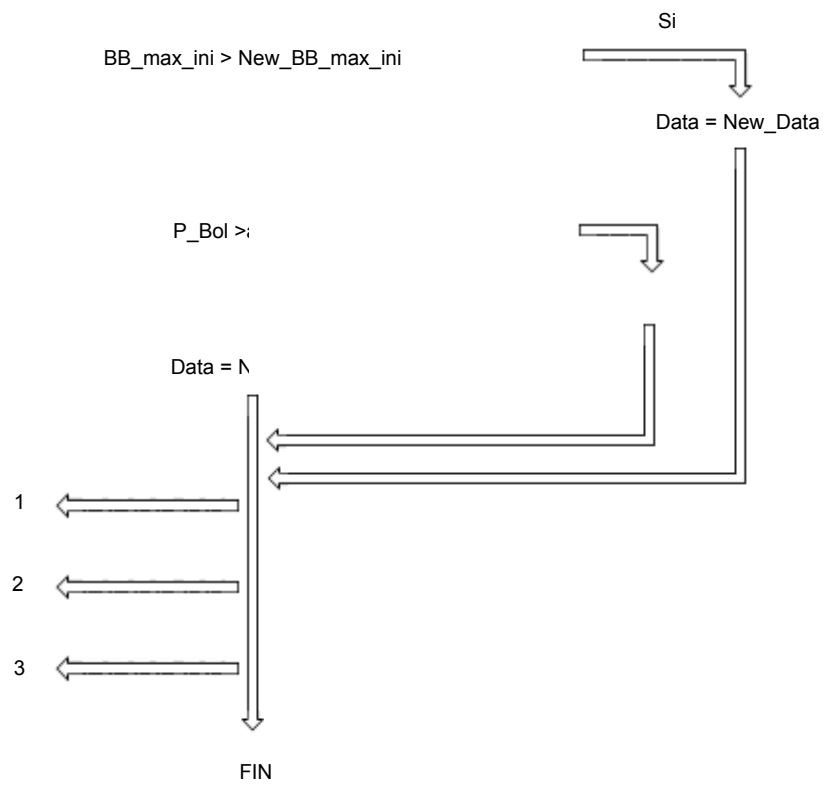
3

(c) Cálculo de nuevo ancho de banda

3

$aux_3 = \text{abs}(\text{rand}(1))$

$P_Bol = \exp(-(\text{abs}(\text{New_BB_max_ini} - \text{BB_max_ini}))/T)$



(d) Cálculo de probabilidad de Boltzmann.

3. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad para el algoritmo de optimización del ancho de banda de matrices de rigidez de elementos finitos unidimensionales, se evaluó basado en el tiempo computacional que tarda el programa en hallar el mínimo ancho de banda en una red sintética que simula un medio fracturado.

Para comprobar la eficiencia del algoritmo propuesto en esta investigación, se diseñaron cuatro redes sintéticas unidimensionales, que se llamaron Red_Sin_1 (Fig. 3.1), Red_Sin_2 (Fig. 3.2), Red_Sin_3 (Fig. 3.3), y Red_Sin_4, (Fig. 3.4), que son esquemas de posibles medios, cada vez uno más complejo que el anterior; en cada red se numeraron los nodos y elementos que la componen, con esta información se creó la matriz que se cargó en el programa, consignando 3 columnas, número de elemento, nodo inicial y nodo final de cada componente, la cuarta columna, ancho de banda inicial, es calculada por el algoritmo, (Fig. 3.5).

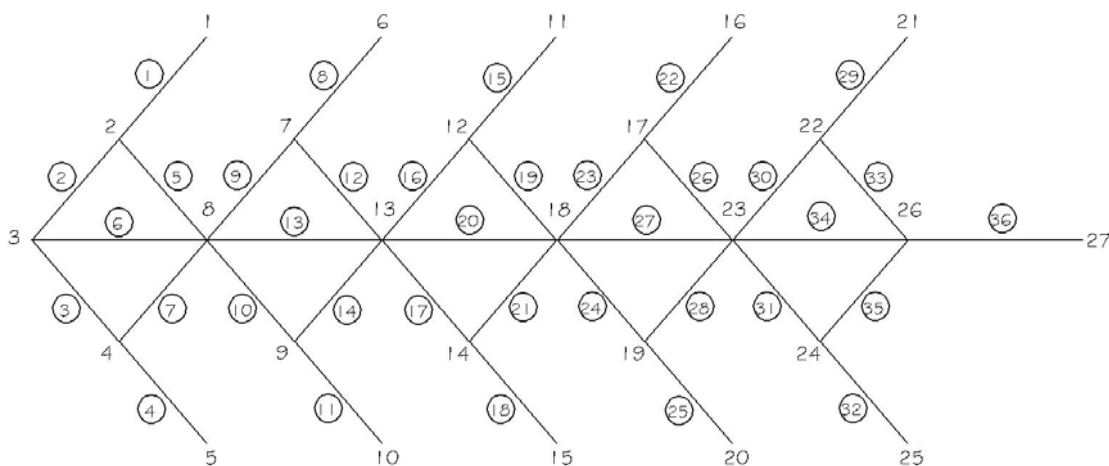


Fig. 3.1 Ejemplo de red sintética. Res_Sin_1

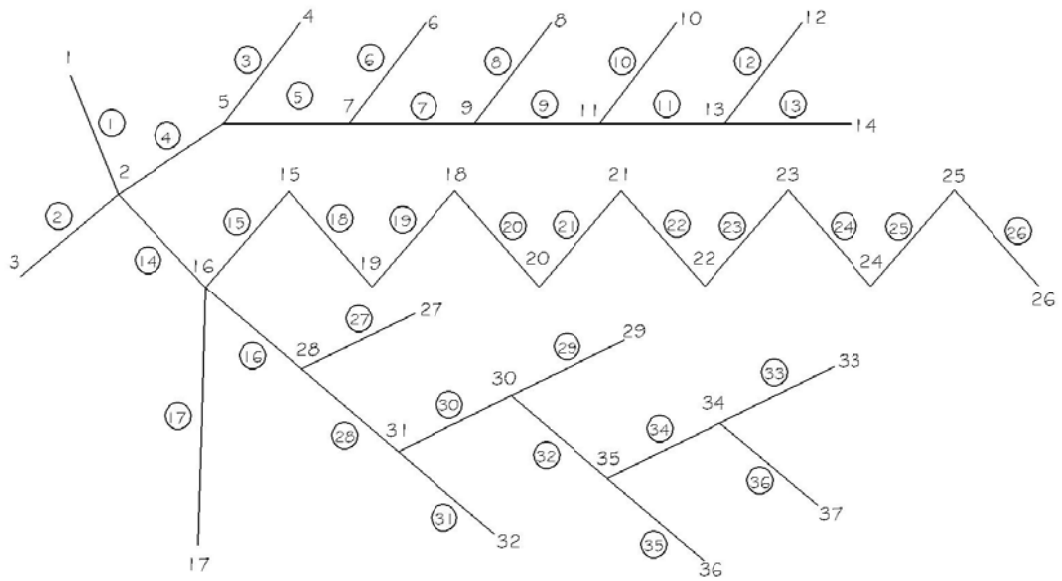


Fig. 3.2 Ejemplo de red sintética. Red_Sin_2

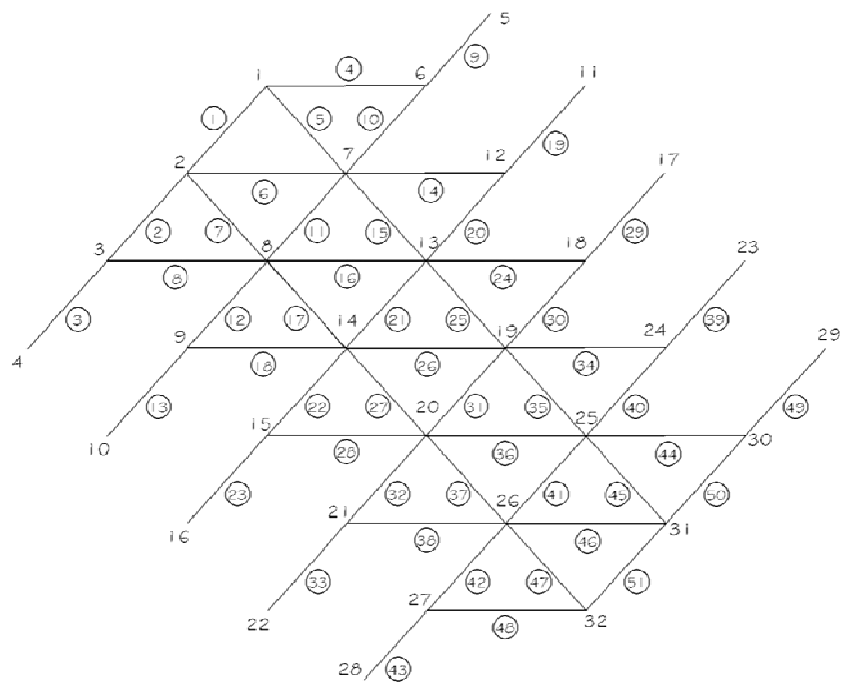


Fig. 3.3 Ejemplo de red sintética. Red_Sin_3

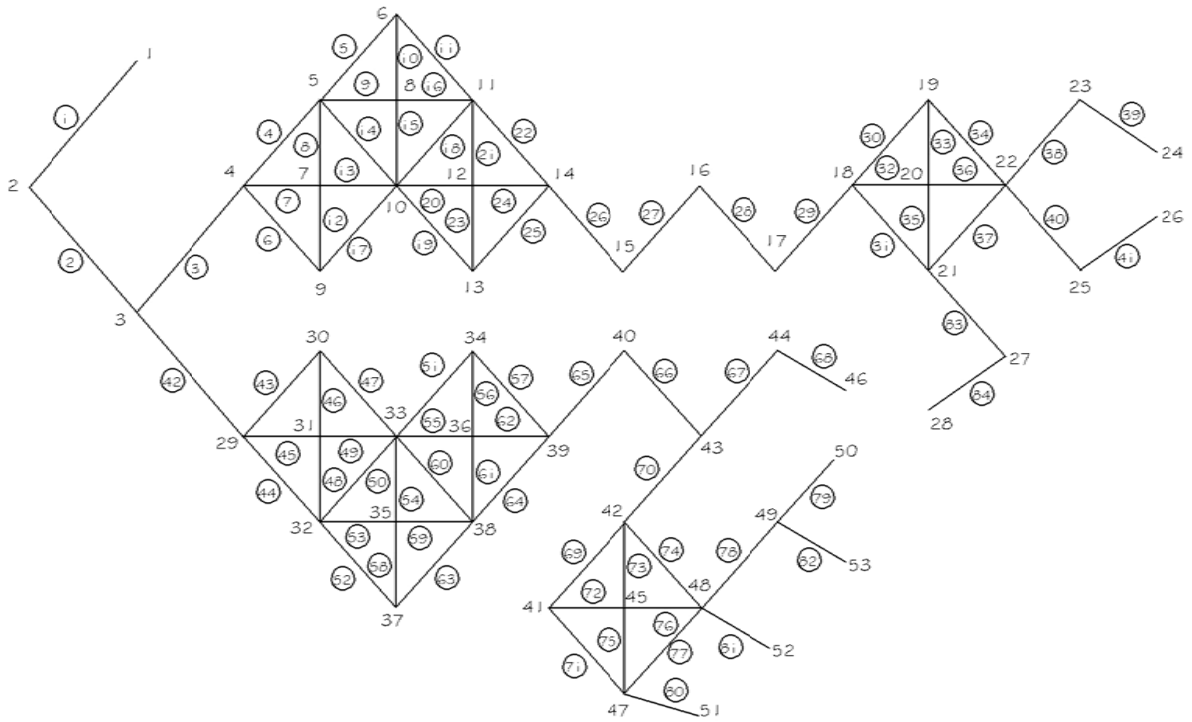


Fig. 3.4 Ejemplo de red sintética.Red_Sin_4

| ELEMENTO | NODO INICIAL | NODO FINAL | ANCHO BANDA INICIAL |
|----------|--------------|------------|---------------------|
|----------|--------------|------------|---------------------|

| | | | |
|----|----|----|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 6 | 5 |
| 5 | 1 | 7 | 6 |
| 6 | 2 | 7 | 5 |
| 7 | 2 | 8 | 6 |
| 8 | 3 | 8 | 5 |
| 9 | 5 | 6 | 1 |
| 10 | 6 | 7 | 1 |
| 11 | 7 | 8 | 1 |
| 12 | 8 | 9 | 1 |
| 13 | 9 | 10 | 1 |
| 14 | 7 | 12 | 5 |
| 15 | 7 | 13 | 6 |
| 16 | 8 | 13 | 5 |
| 17 | 8 | 14 | 6 |
| 18 | 9 | 14 | 5 |
| 19 | 11 | 12 | 1 |
| 20 | 12 | 13 | 1 |
| 21 | 13 | 14 | 1 |
| 22 | 14 | 15 | 1 |
| 23 | 15 | 16 | 1 |
| 24 | 13 | 18 | 5 |
| 25 | 13 | 19 | 6 |
| 26 | 14 | 19 | 5 |

| ELEMENTO | NODO INICIAL | NODO FINAL | ANCHO BANDA INICIAL |
|----------|--------------|------------|---------------------|
|----------|--------------|------------|---------------------|

| | | | |
|----|----|----|---|
| 27 | 14 | 20 | 6 |
| 28 | 15 | 20 | 5 |
| 29 | 17 | 18 | 1 |
| 30 | 18 | 19 | 1 |
| 31 | 19 | 20 | 1 |
| 32 | 20 | 21 | 1 |
| 33 | 21 | 22 | 1 |
| 34 | 19 | 24 | 5 |
| 35 | 19 | 25 | 6 |
| 36 | 20 | 25 | 5 |
| 37 | 20 | 26 | 6 |
| 38 | 21 | 26 | 5 |
| 39 | 23 | 24 | 1 |
| 40 | 24 | 25 | 1 |
| 41 | 25 | 26 | 1 |
| 42 | 26 | 27 | 1 |
| 43 | 27 | 28 | 1 |
| 44 | 25 | 30 | 5 |
| 45 | 25 | 31 | 6 |
| 46 | 26 | 31 | 5 |
| 47 | 26 | 32 | 6 |
| 48 | 27 | 32 | 5 |
| 49 | 29 | 30 | 1 |
| 50 | 30 | 31 | 1 |
| 51 | 31 | 32 | 1 |

Fig. 3.5 Matriz ejemplo para la red sintética Red_Sin_3 con su respectivo máximo ancho de banda

Al ingresar la matriz de rigidez o conductancia, se definen los parámetros con los cuales se corre el programa, tales como: la función de enfriamiento inicial, temperatura inicial, pendiente y número de iteraciones con los cuales la temperatura llega a cero.

En primera instancia, se toma como base la Ecuación 2.3, para combinar las pendientes definidas, -0.1, -1 y -10, y las temperaturas iniciales, 1, 10, 100 y 1000, consignando el valor de ancho de banda inicial y el mínimo ancho de banda encontrado por el programa, además es registrado el tiempo que se tarda en terminar la iteración, es decir, el enfriamiento del sistema, seguido se realiza de igual manera un análisis para la Ecuación 2.4.

Seguido de realizar todas las combinaciones posibles, se obtienen las siguientes tablas:

Tabla 3.1. Resultados utilizando la ecuación lineal.

Donde "I" representa cálculo instantáneo, "n" número de iteraciones empleadas y "m" representa la pendiente de la función de enfriamiento

| ECUACIÓN LINEAL $T=To - m*n$ CON $m = -0.1$ | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|------------|----------|-----|------------|----------|------|------------|----------|-------|------------|----------|--|
| To | 1 | | | 10 | | | 100 | | | 1000 | | | |
| n | 10 | | | 100 | | | 1000 | | | 10000 | | | |
| RED | T1 | BB_inicial | BB_Final | T2 | BB_inicial | BB_Final | T3 | BB_inicial | BB_Final | T1 | BB_inicial | BB_Final | |
| 1 | I | 6 | 6 | I | 6 | 6 | I | 6 | 6 | I | 6 | 6 | |
| 2 | I | 14 | 12 | I | 14 | 12 | I | 14 | 12 | I | 14 | 12 | |
| 3 | I | 6 | 6 | I | 6 | 6 | I | 6 | 6 | I | 6 | 6 | |
| 4 | I | 26 | 14 | I | 26 | 14 | I | 26 | 14 | I | 26 | 14 | |

| ECUACIÓN LINEAL $T=To - m*n$ CON $m = -1$ | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|------------|----------|----|------------|----------|-----|------------|----------|------|------------|----------|--|
| To | 1 | | | 10 | | | 100 | | | 1000 | | | |
| n | 1 | | | 10 | | | 100 | | | 1000 | | | |
| RED | T1 | BB_inicial | BB_Final | T2 | BB_inicial | BB_Final | T3 | BB_inicial | BB_Final | T1 | BB_inicial | BB_Final | |
| 1 | | | | I | 6 | 6 | I | 6 | 6 | I | 6 | 6 | |
| 2 | | | | I | 12 | 12 | I | 14 | 14 | I | 14 | 12 | |
| 3 | | | | I | 6 | 6 | I | 6 | 6 | I | 6 | 6 | |
| 4 | | | | I | 14 | 14 | I | 26 | 14 | I | 26 | 14 | |

| ECUACIÓN LINEAL $T=To - m \cdot n$ CON $m = -10$ | | | | | | | | | | | | |
|--|----|------------|----------|----|------------|----------|-----|------------|----------|------|------------|----------|
| To | 1 | | | 10 | | | 100 | | | 1000 | | |
| n | 10 | | | 1 | | | 10 | | | 100 | | |
| RED | T1 | BB_inicial | BB_Final | T2 | BB_inicial | BB_Final | T3 | BB_inicial | BB_Final | T1 | BB_inicial | BB_Final |
| 1 | | | | | | | | 6 | | | 6 | 6 |
| 2 | | | | | | | | 14 | | | 14 | 12 |
| 3 | | | | | | | | 6 | | | 6 | 6 |
| 4 | | | | | | | | 26 | | | 26 | 14 |

Tabla 3.2. Resultados utilizando la ecuación exponencial.
 Donde "l" representa cálculo instantáneo, "n" número de iteraciones
 empleadas y "m" representa la pendiente de la función de enfriamiento

| ECUACIÓN EXPONENCIAL $T=To e^{(mn)}$ CON $m = -0.1$ | | | | | | | | | | | | |
|---|------|------------|----------|------|------------|----------|------|------------|----------|------|------------|----------|
| To | 1 | | | 10 | | | 100 | | | 1000 | | |
| n | 1000 | | | 1000 | | | 1000 | | | 1000 | | |
| RED | T1 | BB_inicial | BB_Final | T2 | BB_inicial | BB_Final | T3 | BB_inicial | BB_Final | T3 | BB_inicial | BB_Final |
| 1 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 |
| 2 | | 14 | 12 | | 12 | 12 | | 14 | 12 | | 14 | 12 |
| 3 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 |
| 4 | | 26 | 14 | | 14 | 14 | | 26 | 14 | | 26 | 14 |

| ECUACIÓN EXPONENCIAL $T=To e^{(mn)}$ CON $m = -1$ | | | | | | | | | | | | |
|---|------|------------|----------|------|------------|----------|------|------------|----------|------|------------|----------|
| To | 1 | | | 10 | | | 100 | | | 1000 | | |
| n | 1000 | | | 1000 | | | 1000 | | | 1000 | | |
| RED | T1 | BB_inicial | BB_Final | T2 | BB_inicial | BB_Final | T3 | BB_inicial | BB_Final | T3 | BB_inicial | BB_Final |
| 1 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 |
| 2 | | 14 | 12 | | 12 | 12 | | 14 | 12 | | 14 | 12 |
| 3 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 |
| 4 | | 26 | 14 | | 14 | 14 | | 26 | 14 | | 26 | 14 |

| ECUACIÓN EXPONENCIAL $T=To e^{(mn)}$ CON $m = -10$ | | | | | | | | | | | | |
|--|-----|------------|----------|----|------------|----------|----|------------|----------|------|------------|----------|
| To | 1 | | | 10 | | | 1 | | | 1 | | |
| n | 100 | | | 10 | | | 1 | | | 1000 | | |
| RED | T1 | BB_inicial | BB_Final | T2 | BB_inicial | BB_Final | T3 | BB_inicial | BB_Final | T3 | BB_inicial | BB_Final |
| 1 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 |
| 2 | | 14 | 12 | | 12 | 12 | | 14 | 12 | | 14 | 12 |
| 3 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 | | 6 | 6 |
| 4 | | 26 | 14 | | 14 | 14 | | 26 | 14 | | 26 | 14 |

Como se observa en la tabla anterior, no fueron consignados valores para la combinación al emplear la ecuación lineal con T_0 igual a 1 y pendiente -1, al igual que para T_0 con valores de 10 y 1, con pendiente -0.1. Esto se debe a que, en el primer caso no es posible evaluar el programa, puesto que en la primera iteración el sistema alcanza el enfriamiento, y en el segundo caso, los valores de temperatura son negativos.

4. APLICACIÓN

Los modelos de fracturas discretas permiten representar la geología estructural de macizos fracturados teniendo en cuenta propiedades como geometría y conductividad hidráulica. El flujo de agua y el transporte de solutos son simulados por medio de elementos finitos unidimensionales. Estos elementos se forman asociando un nudo a cada fractura, uniendo los nudos a partir de elementos a los cuales se les asigna propiedades físicas creando familias de fracturas. Así se forma una red conductiva unidimensional. Esta red crece proporcionalmente al número de parámetros que se desean evaluar, al igual que el ancho de banda, pues es la máxima diferencia entre los números que identifican los nodos que componen cualquier elemento unidimensional, aumentando el tiempo de cálculo del programa (Ruiz *et al.*, 2001). De ahí la importancia del algoritmo presentado en esta investigación.

Para modelar las redes conductivas unidimensionales, se toma inicialmente una red de fracturas tridimensional en forma de discos, generada con datos de campo, teniendo esta información se hace uso del código *TRANSIN II* (Medina *et al.*, 1996), que permite obtener la red, simular el flujo de aguas subterráneas y estimar los parámetros de las ecuaciones de flujo y transporte de solutos (Donado *et al.*, 2006).

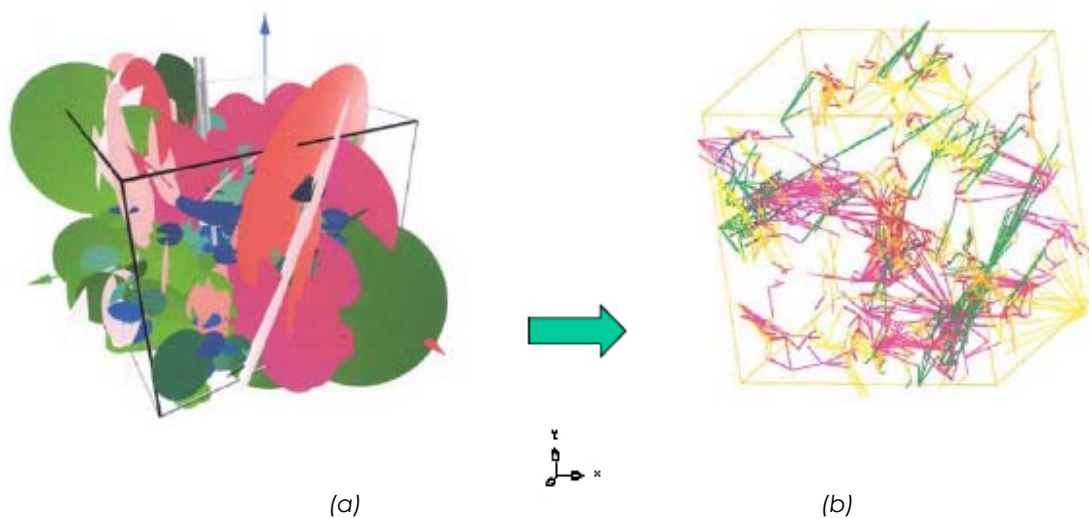


Fig. 4.1 (a) Representación gráfica de un medio geológico fracturado mediante Redes de Fracturas Discretas (DFN, Discrete Fracture Network en inglés). (b) Red de elementos finitos en 1D para la modelación de flujo y transporte en el medio geológico. Tomado de (Donado et al., 2006)

El algoritmo propuesto se prueba para optimizar el modelamiento hidrogeológico de una red de fracturas discretas (DFN), utilizada en la investigación de Donado et al (2006) en el proyecto *HIDROBAP-II*, para lograr disminuir el tiempo de ejecución de cada simulación y por ende el de calibración.

La siguiente tabla es el resultado de aplicar el algoritmo de optimización propuesto a seis redes de la investigación de Donado et al., (2006) con la función de enfriamiento, pendiente y temperatura inicial, que arrojaron el menor ancho de banda posible para cada red de fractura discreta analizada:

Tabla 4.1 Resultados obtenidos con redes de fracturas discretas unidimensionales.

| ECUACIÓN DE ENFRIAMIENTO $T=T_0 e^{(mn)}$ CON $m = -0.001$ | | | |
|--|--------------------------------|------------|----------|
| To | 10000 | | |
| n | 100000 | | |
| RED | Tiempo de ejecución en minutos | BB Inicial | BB Final |
| DFN_20 | 6 | 1019 | 1012 |
| DFN_38 | 6 | 456 | 430 |
| DFN_51 | 6 | 634 | 625 |
| DFN_100 | 6 | 146 | 145 |

Las redes de elementos finitos unidimensionales analizadas, requieren un número mayor de iteraciones para probar diferentes reordenamientos y encontrar el mínimo ancho de banda posible, para lo cual se disminuye la pendiente y se aumenta la temperatura inicial, incrementando así el tiempo computacional en comparación con los resultados de las redes sintéticas anteriormente expuestas.

Al aplicar el algoritmo de optimización a diferentes redes sintéticas, fue posible notar que éste no lograba encontrar el mínimo ancho de banda posible en redes de gran tamaño, esto se debió a que los valores de temperatura inicial y de pendiente de la función de enfriamiento propuestos (Tablas 3.1 y 3.2) no eran idóneos para este tipo de redes, por tanto fue necesario modificar estos datos así: la temperatura inicial fue aumentada a 10000, mientras que la pendiente de la función fue disminuida a -0.001; esto permitió al sistema generar un número mayor de iteraciones dentro de un rango más amplio, para así encontrar el mínimo ancho de banda.

5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

El algoritmo de optimización del ancho de banda de matrices de rigidez o conductancia de elementos finitos unidimensionales mostró resultados satisfactorios, ya que se analizaron seis redes de fracturas discretas unidimensionales, de las cuales el 100% mostraron un decremento en el ancho de banda; demostrando que la temperatura inicial como la pendiente de la función de enfriamiento tienen efectos significativos en los resultados. Una temperatura alta acompañada de un valor bajo de pendiente y una ecuación de enfriamiento adecuada, permite generar un mayor número de iteraciones antes que la temperatura llegue a cero, incrementando así las probabilidades de encontrar un nuevo reordenamiento que garantice encontrar el menor ancho de banda posible.

En las pruebas hechas a las redes de elementos finitos unidimensionales se observó, que al desarrollar la ecuación de enfriamiento exponencial y tomar valores de temperatura inicial de 10000 y una pendiente de -0.001, el número de iteraciones se amplía a 100000, otorgando al algoritmo una probabilidad mayor de encontrar un mínimo global. Lo anterior señala que entre mayor número de elementos tenga la red, el enfriamiento debe ser más lento.

Al disminuir el ancho de banda con el algoritmo presentado, se hace viable modelar diferentes redes de fracturas discretas, asociadas a una gran variedad de fenómenos naturales, permitiendo evaluar un mayor número de variables y así hacer las investigaciones de fenómenos

naturales más aproximadas a la realidad, empleando un menor tiempo computacional y aumentando la relación beneficio-costos.

De igual forma que se evaluaron matrices de conductancia obtenidas a partir de redes de fracturas discretas, para analizar el flujo y transporte de soluto en aguas subterráneas, se hubiera podido ajustar matrices de rigidez para evaluar las propiedades en los elementos estructurales o igualmente optimizar el análisis geotécnico de una zona fracturada.

En esta investigación se planteó el algoritmo de optimización basado en el método de Simulated Annealing, pero bien se puede plantear otras posibles soluciones utilizando métodos como las redes de Markov o sistemas de caja negra, como las Redes Neuronales que son un modelo estadístico, en el que se formula un valor de entrada y se obtiene uno de salida (Rivas, 2003).

Además del aporte del Simulated Annealing en su forma original, pude aportar modificaciones en el algoritmo de optimización a través de su versión modificada TA (*Threshold Accepting* en inglés), la cual no precisa temperatura inicial ni esquema de enfriamiento, sólo requiere de un valor aleatorio, el cual reemplaza a la probabilidad de Boltzmann. De esta manera acepta nuevas soluciones que no son mucho peor que la vieja solución.

El desarrollo de este documento no se hubiera podido realizar si no se contase con acceso a software libre, en este caso OCTAVE, el cual

promueve la investigación, ya que elimina la barrera de la consecución de licencias, que en muchos casos pueden ser muy costosas.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Atencia, J; R. Nestar; (2001) Aprende Matlab como si estuviera en primero; Pág. 27, 28; San Sebastián, España.

Bergeret, F; P. Besse; (1997) Simulated Annealing, Weighted Simulated Annealing and Genetic Algorithm at Work. Toulouse Cedex, Francia.

Cuthill, E; J. McKee; (1969) Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices In Proc. 24th Nat. Conf. ACM; Pág. 157-172.

Cook. William J; William H. Cunningham, William R. Pulleyblank, Alexander Schrijver; Combinatorial Optimization; John Wiley & Sons; 1ª edición (Noviembre 12, 1997)

Donado, L; F. Elorza; E. Ruiz; X. Sánchez-Vila; (2006) Modelación de medios fracturados mediante redes de fracturas discretas; II Congreso Colombiano de Hidrogeología; Bucaramanga, Colombia.

Dowland, K; B. Díaz; (2001) Diseño de heurísticas y fundamentos del Recocido Simulado; Inteligencia Artificial, Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial . No. 20. Pág. 34 – 52; España.

Gibbs, N; W. Poole; P. Stockmeyer; (1976) An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparse Matrix; SIAM journal of Numerical Analysis; Vol.13, No. 2.

Hoit, M; E. Wilson; (1983) An Equatin Numbering Algorithm Based on a Minimum Front Criteria. Computers and Structures, Vol. 16, No's. 1-4; Pág. 225 – 239.

Kirkpatrick,S; C. D. Gelatt; M. P. Vecchi; (1983) Optimization by Simulated Annealing. Science, New Series, Vol. 220, No. 4598. Pág. 671-680.

Medina, A; G Galarza; J. Carrera; (1996) TRANSIN II. FORTRAN code for solving the coupled flow and transport inverse problem in saturated conditions. Topical report 16, volume IV, El Berrocal Project, EC Contract nº FI2W/CT91/0080.

Oliver, X; C. Agelet; (2000) Mecánica del Medio Contínuo. Ediciones UPC. Barcelona, España.

Peláez, J; (2005) Implementación del algoritmo de selección de variables conocido con el nombre de Simulated Annealing; Pág. 25.

Pérez, J; J. Ramón; (2005) Contribución a los métodos de optimización basados en procesos naturales y su aplicación a la medida de antenas en campo próximo, Tesis Doctoral; Pág. 41-47; Universidad de Cantabria. Santander, España.

Rivas, V; (2003) Optimización de redes neuronales de funciones base radiales mediante algoritmos evolutivos; Granada, España.

Ruiz, E; L. Vives; J. Carrera; X. Sánchez-Vila; F. Elorza; C. Paredes; C. Bajos; A. Vela; (2001) Metodología de simulación de flujo y transporte de solutos en modelos de fracturas discretas. VII Simposio de Hidrogeología. Hidrogeología y Recursos Hidráulicos. Pág. 753-764.

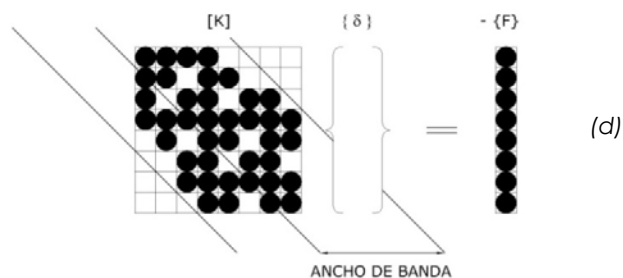
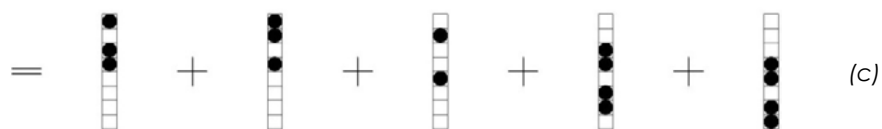
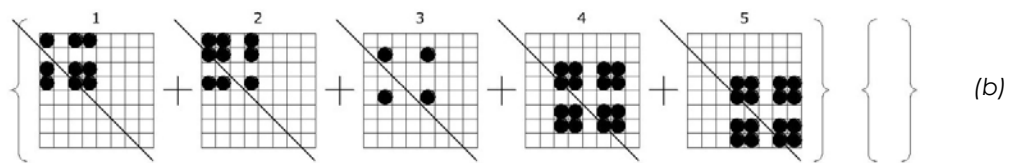
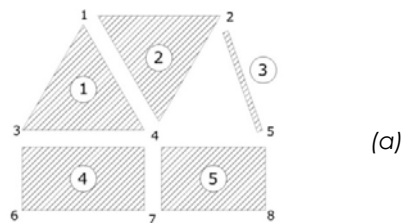
Vicente, J; J. Lanchares; R. Hermida; (2005) Placement by thermodynamic Simulated annealing. Physics Letters A, volume 317, Capítulos 5-6. Pág 415-423; Madrid, España.

Zienkiewicz, C; (1977) The Finite Element Method. McGraw Hill, Tercera Edición. Berhshire, Inglaterra.

7. ANEXOS

7.1. ANCHO DE BANDA

Si se tienen 5 elementos interconectados (Zienkiewicz,1977), pertenecientes a cualquier sistema de tipo lineal, como se muestra en la Fig.7.1.a, en primera instancia se deben numerar dichos elementos al igual que sus interconexiones, para representar claramente cada una de las conexiones nodales presentes.



7.1 Interconexión de un sistema de tipo lineal. (a)Elementos del sistema lineal.

(b) Conformación de matriz global. (c) Discretización vectorial. (d) Sistema matricial.

Algoritmo de optimización del ancho de banda de matrices de rigidez o conductancia de elementos finitos unidimensionales

Tabla 7.1 Conexiones discretizadas para cada elemento (Zienkiewicz, 1977)

| ELEMENTO | CONEXIÓN | | | |
|----------|----------|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 4 | |
| 2 | 1 | 4 | 2 | |
| 3 | | 2 | 5 | |
| 4 | 3 | 6 | 7 | 4 |
| 5 | 4 | 7 | 8 | 5 |

A continuación, dichas conexiones se ingresan en su respectiva posición a una matriz global como se representa en la Fig.7.1.b (la contribución por separado de cada elemento también se puede apreciar en ella). Seguido de esto, mediante el método de adición, se conforma el sistema lineal, (Fig.7.1.c).

En la Fig.7.1.d es posible apreciar que \mathbf{K} es una matriz de carácter simétrico, por consiguiente sólo la mitad superior a partir de la diagonal principal es necesaria para resolverla. Dicha mitad se encuentra constituida por coeficientes diferentes de cero y confinada dentro de un espacio llamado *Banda*, así que la eficiencia para resolver dicho sistema se verá estrechamente ligada al tamaño o *ancho de banda*.

7.2. CÓDIGO

A continuación se presenta el código del programa para la reducción del ancho máximo de banda.

% Declaración de variables

```
% T: Temperatura
% T_0: Temperatura inicial
% m: Pendiente de la función de temperatura
% N_iter: Número de iteraciones
% v_T_0: vector temperatura
% v_m : vector pendiente de la función de temperatura
% l_ini_1: longitud del vector temperatura
% l_ini_2: longitud del vector pendiente de la función de temperatura
% Data: Matriz que carga la configuración inicial
% aux_1: Número aleatorio
% aux_2: Elemento aleatorio
% N_elem: Número de datos
% aux_num: fila igual al número aleatorio en la columna 1
% A contador
% aux_ini: número generado por la fila aleatoria en la columna 2
% BB_max_ini: máximo ancho de banda
% EB: Posición del BB_max_ini
% aux_ini_B : Número generado por BB_max_ini en la columna 2
% New_Data: matriz generada
% L : matriz de la columna 2 y 3
% mask1: matriz L convertida en ceros y uno en la posición de aux_ini_B
% mask : matriz L convertida en ceros y uno en la posición de aux_ini
% N_mask: matriz mask invirtiendo ceros y unos
% N_mask1: matriz mask1 invirtiendo ceros y unos
% New_BB_max_ini: nuevo máximo ancho de banda
% aux_3: numero aleatorio
% P_Bol: probabilidad de Boltzman
% V_save : Vector para guardar los máximos anchos de banda
% My_New_BB_max : El minimo ancho de banda posible

clc
clear
```

% Análisis de Sensibilidad de la temperatura

```
N_iter = 10; % Numero de iteraciones necesarias

v_T_0 = [1,10,100,1000]; % Vector de temperatura
v_m = [-0.1, 1, 10]; % Vector de la pendiente

L_ini_1 = length(v_T_0); % Longitud del vector de la Temperatura
L_ini_2 = length(v_m); % Longitud del vector de la Pendiente

Data = load('Red_Sin_1.txt'); % Matriz que carga la configuración inicial

Data(:,4) = abs(Data(:,2) - Data(:,3)); % Genera la columna de anchos de banda

BB_max_ini = max( Data(:,4) ); % Genera el máximo ancho de banda

N_elem = length(Data);

for i = 1 : L_ini_1 % Ciclo para variar el T_0
    for j = 1 : L_ini_2 % Ciclo para variar m
        for k = 1 : N_iter % Inicio del S.A.

            T_0 = v_T_0(i);
            m = v_m(j); %Se carga primero la función lineal de temperatura, luego la función exponencial
            T = T_0 + ( m * k ); % Ecuación para el análisis de sensibilidad

            aux_1 = abs(rand(1)); % Generar aleatorio para cambio de BB

            aux_2 = round(aux_1 * N_elem);
            if (aux_2 == 0)
                aux_2 = N_elem;
            end
        end
    end
end
```

% Generar vectores con los números de la fila aleatoria

```
for m = 1 : N_elem % Ciclo para la obtener fila igual al número aleatorio en la columna 1
    if (Data(m,1) == aux_2)
        aux_num = m;
    end
end

A = 0;
aux_ini = Data(aux_num,2); % Número generado por la fila aleatoria en la columna 2
```

% Generar vectores con los números el la fila de BB_max_ini

```
for m = 1 : N_elem % Ciclo para obtener Posición del BB_max_ini
    if (Data (m,4) == BB_max_ini)
        EB = m;
    end
end

A = 0;
aux_ini_B = Data (EB,2); % Número generado por BB_max_ini en la columna 2

New_Data = Data;
```

% Cambiar filas por medio de máscaras

Algoritmo de optimización del ancho de banda de matrices de rigidez o conductancia de elementos finitos unidimensionales



```

L(:,1)=New_Data(:,2); % Matriz de la columna 2
L(:,2)=New_Data(:,3); % Matriz de la columna 3

mask1 = (L==aux_ini_B); % Matriz L de 0 y 1 siendo 1 las posiciones de aux_ini_B
mask = (L==aux_ini); % Matriz L de 0 y 1 siendo 1 las posiciones de aux_ini

N_mask = ~mask; % Matriz L de 0 y 1 siendo 0 las posiciones de aux_ini_B
N_mask1 = ~mask1; % Matriz L de 0 y 1 siendo 0 las posiciones de aux_ini

L = L.*N_mask+mask*aux_ini_B; % Cambio de aux_ini por aux_ini_B
L = L.*N_mask1+mask1*aux_ini; % Cambio de aux_ini_B por aux_ini

New_Data(:,2)=L(:,1); % Ingresar L a New_Data
New_Data(:,3)=L(:,2); % Ingresar L a New_Data

New_Data(:,4) = abs(New_Data(:,2) - New_Data(:,3)); % Generar la columna 4 de New_Data

New_BB_max_ini = max( New_Data(:,4) ); % Generar nuevo maximo ancho de banda

aux_3 = abs( rand (1) ); % Numero aleatorio para evaluar con la probabilidad de Boltzman

P_Bol = exp(-(abs (New_BB_max_ini - BB_max_ini ))/(T)); % Probabilidad de Boltzman

If BB_max_ini > New_BB_max_ini
Elseif P_Bol > aux_3
Data=Data;

End

V_save ( k) = New_BB_max_ini; % Vector para guardar los máximos anchos de banda

end
end
end % Fin del S.A.

My_New_BB_max = min (V_save) % El minimo ancho de banda posible

```

7.3. Matrices de las redes fracturadas

| ELEMENTO | NODO INICIAL | NODO FINAL | ANCHO BANDA INICIAL |
|----------|--------------|------------|---------------------|
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 4 | 5 | 1 |
| 5 | 2 | 8 | 6 |
| 6 | 3 | 8 | 5 |
| 7 | 4 | 8 | 4 |
| 8 | 6 | 7 | 1 |
| 9 | 7 | 8 | 1 |
| 10 | 8 | 9 | 1 |
| 11 | 9 | 10 | 1 |
| 12 | 7 | 13 | 6 |
| 13 | 8 | 13 | 5 |
| 14 | 9 | 13 | 4 |
| 15 | 11 | 12 | 1 |
| 16 | 12 | 13 | 1 |
| 17 | 13 | 14 | 1 |
| 18 | 14 | 15 | 1 |
| 19 | 12 | 18 | 6 |
| 20 | 13 | 18 | 5 |
| 21 | 14 | 18 | 4 |
| 22 | 16 | 17 | 1 |
| 23 | 17 | 18 | 1 |
| 24 | 18 | 19 | 1 |
| 25 | 19 | 20 | 1 |
| 26 | 17 | 23 | 6 |
| 27 | 18 | 23 | 5 |
| 28 | 19 | 23 | 4 |
| 29 | 21 | 22 | 1 |
| 30 | 22 | 23 | 1 |
| 31 | 23 | 24 | 1 |
| 32 | 24 | 25 | 1 |
| 33 | 22 | 26 | 4 |
| 34 | 23 | 26 | 3 |
| 35 | 24 | 26 | 2 |
| 36 | 26 | 27 | 1 |

| ELEMENTO | NODO INICIAL | NODO FINAL | ANCHO BANDA INICIAL |
|----------|--------------|------------|---------------------|
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 7 | 2 |
| 6 | 6 | 7 | 1 |
| 7 | 7 | 9 | 2 |
| 8 | 8 | 9 | 1 |
| 9 | 9 | 11 | 2 |
| 10 | 10 | 11 | 1 |
| 11 | 11 | 13 | 2 |
| 12 | 12 | 13 | 1 |
| 13 | 13 | 14 | 1 |
| 14 | 2 | 16 | 14 |
| 15 | 16 | 15 | 1 |
| 16 | 16 | 28 | 12 |
| 17 | 16 | 17 | 1 |
| 18 | 15 | 19 | 4 |
| 19 | 19 | 18 | 1 |
| 20 | 18 | 20 | 2 |
| 21 | 20 | 21 | 1 |
| 22 | 21 | 22 | 1 |
| 23 | 22 | 23 | 1 |
| 24 | 23 | 24 | 1 |
| 25 | 24 | 25 | 1 |
| 26 | 25 | 26 | 1 |
| 27 | 27 | 28 | 1 |
| 28 | 28 | 31 | 3 |
| 29 | 29 | 30 | 1 |
| 30 | 30 | 31 | 1 |
| 31 | 31 | 32 | 1 |
| 32 | 30 | 35 | 5 |
| 33 | 33 | 34 | 1 |
| 34 | 34 | 35 | 1 |
| 35 | 35 | 36 | 1 |
| 36 | 34 | 37 | 3 |

(a)

(b)

Fig. 7.2 Matrices para redes sintéticas con sus respectivos ancho de banda inicial.

(a) Red_Sin_1. (b) Red_Sin_2.

| ELEMENTO | NODO INICIAL | NODO FINAL | ANCHO BANDA INICIAL |
|----------|--------------|------------|---------------------|
|----------|--------------|------------|---------------------|

| | | | |
|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 1 |
| 4 | 4 | 5 | 1 |
| 5 | 5 | 6 | 1 |
| 6 | 4 | 9 | 5 |
| 7 | 4 | 7 | 3 |
| 8 | 5 | 7 | 2 |
| 9 | 5 | 8 | 3 |
| 10 | 6 | 8 | 2 |
| 11 | 6 | 11 | 5 |
| 12 | 7 | 9 | 2 |
| 13 | 7 | 10 | 3 |
| 14 | 5 | 10 | 5 |
| 15 | 8 | 10 | 2 |
| 16 | 8 | 11 | 3 |
| 17 | 9 | 10 | 1 |
| 18 | 10 | 11 | 1 |
| 19 | 10 | 13 | 3 |
| 20 | 10 | 12 | 2 |
| 21 | 11 | 12 | 1 |
| 22 | 11 | 14 | 3 |
| 23 | 12 | 13 | 1 |
| 24 | 12 | 14 | 2 |
| 25 | 13 | 14 | 1 |
| 26 | 14 | 15 | 1 |
| 27 | 15 | 16 | 1 |
| 28 | 16 | 17 | 1 |
| 29 | 17 | 18 | 1 |
| 30 | 18 | 19 | 1 |
| 31 | 18 | 21 | 3 |
| 32 | 18 | 20 | 2 |
| 33 | 19 | 20 | 1 |
| 34 | 19 | 22 | 3 |
| 35 | 20 | 21 | 1 |
| 36 | 20 | 22 | 2 |
| 37 | 21 | 22 | 1 |
| 38 | 22 | 23 | 1 |
| 39 | 23 | 24 | 1 |
| 40 | 22 | 25 | 3 |
| 41 | 25 | 26 | 1 |
| 42 | 3 | 29 | 26 |

| ELEMENTO | NODO INICIAL | NODO FINAL | ANCHO BANDA INICIAL |
|----------|--------------|------------|---------------------|
|----------|--------------|------------|---------------------|

| | | | |
|----|----|----|---|
| 43 | 29 | 30 | 1 |
| 44 | 29 | 32 | 3 |
| 45 | 29 | 31 | 2 |
| 46 | 30 | 31 | 1 |
| 47 | 30 | 33 | 3 |
| 48 | 31 | 32 | 1 |
| 49 | 31 | 33 | 2 |
| 50 | 32 | 33 | 1 |
| 51 | 33 | 34 | 1 |
| 52 | 32 | 37 | 5 |
| 53 | 32 | 35 | 3 |
| 54 | 33 | 35 | 2 |
| 55 | 33 | 36 | 3 |
| 56 | 34 | 36 | 2 |
| 57 | 34 | 39 | 5 |
| 58 | 35 | 37 | 2 |
| 59 | 35 | 38 | 3 |
| 60 | 33 | 38 | 5 |
| 61 | 36 | 38 | 2 |
| 62 | 36 | 39 | 3 |
| 63 | 37 | 38 | 1 |
| 64 | 38 | 39 | 1 |
| 65 | 39 | 40 | 1 |
| 66 | 40 | 43 | 3 |
| 67 | 43 | 44 | 1 |
| 68 | 44 | 46 | 2 |
| 69 | 41 | 42 | 1 |
| 70 | 42 | 43 | 1 |
| 71 | 41 | 47 | 6 |
| 72 | 41 | 45 | 4 |
| 73 | 42 | 45 | 3 |
| 74 | 42 | 48 | 6 |
| 75 | 45 | 47 | 2 |
| 76 | 45 | 48 | 3 |
| 77 | 47 | 48 | 1 |
| 78 | 48 | 49 | 1 |
| 79 | 49 | 50 | 1 |
| 80 | 47 | 51 | 4 |
| 81 | 48 | 52 | 4 |
| 82 | 49 | 53 | 4 |
| 83 | 21 | 27 | 6 |
| 84 | 27 | 28 | 1 |

(c)

(c) Matriz para red sintética Red_Sin_4