

**EL JUEGO EN LA ENSEÑANZA DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE CONTEO
Y COMBINATORIA**

**LAURA MARISOL MENDOZA MONSALVE
YULI KATHERINE RUEDA GALVIS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS**

2011

**EL JUEGO EN LA ENSEÑANZA DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE CONTEO
Y COMBINATORIA**

LAURA MARISOL MENDOZA MONSALVE

YULI KATHERINE RUEDA GALVIS

Trabajo de grado para obtener el título de
Licenciada en Matemáticas

Director

CARLOS ARTURO RODRÍGUEZ PALMA

Magíster en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

2011

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mis padres Jorge Enrique y Rosalbina, quienes no solo me dieron la vida, sino que además por su apoyo, cariño y amor, me convirtieron en la persona que soy hoy en día.

A mis hermanas Érika Roció y Silvia que siempre me por su apoyo incondicional nunca dejaron que me rindiera ante los problemas que se me presentaban en el camino.

A mi gran amiga Laura Mendoza con quien compartí los mejores momentos académicos y sociales, convirtiéndose más que en una amiga en una hermana, quién me ha dejado las mejores enseñanzas en mi vida. Sabes que sin tú apoyo a lo largo de este proceso, todo hubiera sido más difícil.

También quiero agradecer de todo corazón a personas como Claudia Garavito, Juan David Quiroz, Edinson Ardila, Davinson Marín, y especialmente a Adán Avendaño, por ser parte de mi vida, dejándome ser yo misma y brindándome cada día toda la felicidad que podían ofrecerme.

A la Universidad Industrial de Santander, a la Escuela de matemáticas y a grandes profesores como Gilberto Arenas, Bernardo Mayorga, Rafael Isaacs, Carlos Arturo Rodríguez, por toda su orientación, en mis años de carrera, en especial a Juan de Dios Urbina quien no solo me brindo un apoyo académico, también personal haciéndome crecer cada día como un ser integral.

Y te agradezco porque a pesar de no estar presente, te debo gran parte de este logro.

Katherine Rueda.

En primer lugar, quiero expresar un sincero agradecimiento a Dios por permitirme culminar una meta más en mi realización personal. Le doy gracias a mis padres Luz Marina Monsalve y Rodolfo Mendoza por su apoyo desmedido y motivación, ya que sin ello todo lo logrado no hubiera sido posible, por inculcarme valores que me forman como persona integral. Gracias Padres queridos por que ustedes se sacrificaron y lo dieron todo para concluir una etapa más en mi vida.

No tengo palabras para expresar la gratitud que siento por mi incondicional amiga Yuli Katherine, por sus incomparables consejos, por su incansable dedicación, por compartir conmigo los buenos y malos momentos en esta etapa académica y en especial las enseñanzas que dejan una huella profunda en mi vida.

A mis hermanos de todo corazón les agradezco por estar conmigo siguiendo paso a paso este reto, por su preocupación y por animarme cuando más lo necesita, gracias porque cada uno son extraordinarias personas.

Por su generosidad, su fe y desinteresada ayuda a mis amigos Natali Murillo y especialmente a Davinson Marin que creyó en mi y en mis capacidades, desde el principio, por su simpatía y sinceridad, gracias por brindarme su cariño, comprensión y sobre todo por saber escucharme.

Gracias a los maestros Carlos Arturo Rodríguez y al intachable Juan de Dios Urbina, por dar su luz de conocimiento, gracias por su paciencia, comprensión. Recuerden que lo que ustedes han sembrado durante estos años, pronto darán sus más exquisitos frutos.

Infinitas gracias a todos por cuanto hicieron por nosotras.

Laura Mendoza.

TABLA DE CONTENIDO

1. PRESENTACIÓN	18
2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	21
2.1 Teorías del juego en la educación.....	21
2.2 El juego y la actividad matemática.....	25
2.3 La combinatoria y el juego.....	27
2.4 Principios básicos del conteo y la combinatoria.....	29
3. EL JUEGO COMO RECURSO DIDÁCTICO EN EL AULA	38
3.1 JUEGO ESTRATÉGICO.....	39
3.1.1 Juego tres en línea (Triqui).....	40
3.1.1.1 Análisis del juego tres en línea.....	41
3.2 EL JUEGO EN EL PENSAMIENTO COMBINATORIO.....	48
3.2.1 Juego el laberinto.....	48
3.2.1.1 Análisis del juego el laberinto.....	50
3.2.2 Juego vistiendo a Carlos y María.....	53
3.2.2.1 Análisis del juego vistiendo a Carlos y María.....	55
3.2.3 Juego alcanzando una estrella.....	59
3.2.3.1 Análisis del juego alcanzando una estrella.....	61
3.2.4 Juego las sillas musicales.....	66
3.2.4.1 Análisis del juego las sillas musicales.....	69
3.2.5 Juego del twister.....	75
3.2.5.1 Análisis del juego del twister.....	77
3.2.6 Juego la máquina de las combinaciones.....	81
3.2.6.1 Análisis del juego la máquina de las combinaciones....	83
3.2.7 Juego contenedor de balotas.....	87
3.2.7.1 Análisis del juego contenedor de balotas.....	89

4. LA EFECTIVIDAD DEL JUEGO EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO ..	93
4.1 TEST DE CONOCIMIENTO	93
4.1.1 Análisis del test de conocimiento	94
5. CONCLUSIONES	116
6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	119
7. ANEXOS	121

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Tabulación de resultados del juego tres en línea pregunta 1 y 2	44
Tabla 2: Tabulación de resultados del juego tres en línea pregunta 3	44
Tabla 3: Tabulación de respuestas replanteadas del juego tres en línea 1 y 2	46
Tabla 4: Tabulación de respuestas corregidas del juego tres en línea 3	46
Tabla 5: Registro de respuestas para el juego alcanzando una estrella.....	64
Tabla 6: Registro de los arreglos con las sillas y los puntos (pnt) otorgados	68
Tabla 7: Tabulación de combinaciones correctas y descartadas	82
Tabla 9: Registro de los recorridos	88

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Tablero del juego tres en línea	40
Figura 2: Estrategias planteadas para el juego tres en línea	43
Figura 3: El estudiante explica en forma general los cuadros con los cuales jugaría para ganar o llegar a un empate	45
Figura 4: Este estudiante empieza a generalizar su estrategia pensando en varias opciones de juego.....	46
Figura 5: Juego del laberinto.....	49
Figura 6: Respuestas para el juego del laberinto.....	52
Figura 7: Juego vistiendo a Carlos y María.....	53
Figura 8: Registro de los atuendos	57
Figura 9: Diagrama de árbol para visualizar algunos de los 48 atuendos	59
Figura 10: Juego alcanzando una estrella	59
Figura 11: Variantes del juego dominó	61
Figura 12: Respuestas para la primera y segunda estrella.....	64
Figura 13: Respuesta correcta para las estrella 3 y 4.....	65
Figura 14: Solución al problema del dominó dada por el grupo 3.....	65
Figura 15: Juego tradicional de las sillas musicales	66
Figura 16: Análisis de los registros para el juego.....	68
Figura 17: Registro de los arreglos hechos por los estudiantes.....	71
Figura 18: Arreglos para 4 participantes en juego	72
Figura 19: Ejemplo de respuestas para la pregunta 1	73

Figura 20: Respuesta para la pregunta 4.....	73
Figura 21: Juego tradicional del Twister	75
Figura 22: Respuesta a la pregunta 1	79
Figura 23: Respuesta para la pregunta 2.....	80
Figura 24: Conclusiones obtenidas en la pregunta 3	80
Figura 25: Máquina de las combinaciones	81
Figura 26: Respuesta correcta para la primera pregunta	85
Figura 27: Respuestas para la segunda pregunta	86
Figura 28: Respuestas para la tercera pregunta.....	86
Figura 29: Juego contenedores de balotas.....	87
Figura 30: Algunas respuestas de los estudiantes.....	90
Figura 31: Respuestas para la pregunta 2.....	96
Figura 32: Respuesta correcta para la pregunta 3.....	97
Figura 33: Respuesta incorrecta para la pregunta 3.....	98
Figura 34: Respuesta correcta para la pregunta 5.....	99
Figura 35: Respuesta incorrecta para la pregunta 5.....	101
Figura 36: Respuesta incorrecta para la pregunta 5.....	101
Figura 37: Respuesta para la pregunta 8.....	104
Figura 38: Respuesta incorrecta la pregunta 9	106
Figura 39: Respuesta correcta para pregunta 9.....	106
Figura 40: Respuesta correcta para la figura 11	108
Figura 41: Respuesta correcta para la figura 11 (a).....	109
Figura 42: Respuesta correcta para la pregunta 11 (b)	109

Figura 43: Respuesta incorrecta para la pregunta 11(b).....	110
Figura 44: Respuesta correcta para la pregunta 12(a)	111
Figura 45: Respuesta correcta para la pregunta 12(a)	112
Figura 46: Respuesta correcta para la pregunta 12(b)	113
Figura 47: Respuesta incorrecta para la pregunta 12(b).....	113
Figura 48: Respuesta correcta para la pregunta 13.....	114
Figura 49: Cuadro guía	121
Figura 50: Iniciando estrategia 1	121
Figura 51: Culminando la estrategia 1	122
Figura 52: Iniciando estrategia 2.....	122
Figura 53: Culminando al estrategia 2	122
Figura 54: Estrategia 3.....	123
Figura 55: Iniciando estrategia 4.....	123
Figura 56: Culminando la estrategia 4	124
Figura 57: Estrategia 5.....	124
Figura 58: Estrategia 6.....	125
Figura 59: Estrategia 7.....	125
Figura 60: Estrategia 8.....	125

LISTA DE FOTOS

Foto 1: Estudiantes protagonistas de la propuesta	38
Foto 2: Material para el juego tres en línea	40
Foto 3: Estudiantes manipulando el material y creando estrategias	42
Foto 4: Ronda de eliminación del juego tres en línea	45
Foto 5: Material para el juego del laberinto	49
Foto 6: Estudiantes experimentando con el juego del laberinto	51
Foto 7: Estudiantes aplicando estrategias para encontrar los caminos del primer laberinto	51
Foto 8: Estudiantes aplicando la estrategia para encontrar los caminos del segundo laberinto	51
Foto 9: Material del juego vistiendo a Carlos y María	54
Foto 10: Estudiantes aplicando estrategias	56
Foto 11: Estudiantes planeando una forma de obtener el número total de atuendos	57
Foto 12: Materiales juego alcanzando una estrella y el dominó.....	60
Foto 13: Identificando las características de las fichas del dominó.....	62
Foto 14: Materiales para el juego sillas musicales	67
Foto 15: Estudiantes participando en el juego sillas musicales.....	71
Foto 16: Juego del twister	76
Foto 17: Estudiantes jugando Twister	78
Foto 18: Permutaciones con repetición	78

Foto 19: Materiales juego la máquina de las combinaciones	82
Foto 20: Estudiantes registrando los arreglos de las combinaciones.....	84
Foto 21: Estudiantes respondiendo las preguntas	85
Foto 22: Materiales juego contenedores de balotas	88
Foto 23: Estudiantes preparados para iniciar el juego, de izquierda a derecha, grupo 1, grupo2, grupo 3, grupo 4 y grupo 5	89
Foto 24: Registro de los grupos de cada uno de los arreglos	90

LISTA DE ANEXOS

Anexo A: Estrategias para ganar tres en línea	121
--	-----

RESUMEN

TITULO*

EL JUEGO EN LA ENSEÑANZA DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE CONTEO Y COMBINATORIA

AUTORAS**

MENDOZA MONSALVE, Laura Marisol
RUEDA GALVIS, Yuli Katherine.

PALABRAS CLAVES:

Juego – Aprendizaje – Reforzamiento – Pensamiento – Combinatorio – Resolución – Problemas.

En la enseñanza de la matemática es muy importante que los docentes muestren las aplicaciones que tiene con la realidad, para que de esta forma los estudiantes identifiquen y comprendan las situaciones reales que puedan ser explicadas mediante el uso de la misma; para ello es necesario aplicar un recurso didáctico que acerque a los estudiantes a identificar la matemática que practican, en las actividades tanto académicas, como sociales de su entorno y descubran su importancia en los aprendizajes particulares vinculados con su contexto.

Lo anterior nos motivó a elaborar una propuesta didáctica basada en el uso de los juegos en el aula, con la cual sea posible ofrecer a los estudiantes una visión renovada ante el aprendizaje matemático, estimulando no solo su motivación y participación, sino también su capacidad de liderazgo, contribuyendo a la adquisición de conocimiento con el cual sea posible favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en especial del pensamiento combinatorio.

En este texto se exponen juegos fundamentados en una base teórica con la cual se pretende demostrar su concepción práctica y concreta en torno al desarrollo del pensamiento matemático, mostrando la posibilidad de relacionar los procesos de enseñanza y aprendizaje con actividades lúdicas. Haciendo un especial hincapié en los elementos conceptuales que se puedan transmitir desde el interior de las clases para comprender de forma significativa la aplicación de los principios básicos del conteo y la combinatoria superando los obstáculos que la mayoría de los estudiantes presentan ante la verdadera actividad matemática: la resolución de problemas.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Licenciatura en Matemáticas.

Director: Carlos Arturo Rodríguez. Magíster en Matemáticas.

SUMMARY

TITLE*

GAME IN THE TEACHING OF THE BASIC CONCEPTS OF COUNTING AND COMBINATORIAL

AUTHORS**

MENDOZA MONSALVE, Laura Marisol.
RUEDA GALVIS, Yuli Katherine.

KEYWORDS:

Game – Learning – Strengthening – Thinking – Combinatorial – Resolution – Problems.

In the teaching of mathematics is very important for teachers to show the applications you have with reality, so this way students identify and understand the real situations that can be explained using the same testing it is necessary to apply a teaching resource that brings students to identify the mathematical practice, activities in both academic and social environment and discover its importance in learning linked to their particular context.

This motivated us to develop an educational proposal based on the use of games in the classroom, with which it is possible to provide students with a renewed vision to learning math, encouraging not only their motivation and participation, but also their ability to leadership, contributing to the acquisition of knowledge with which it is possible to encourage the development of mathematical thinking in particular of combinatorial thinking.

This text presents a game grounded in theoretical basis which aims to demonstrate practical and concrete understanding on the development of mathematical thinking, showing the ability to relate the teaching and learning with fun activities. With particular emphasis on the conceptual elements that can be transmitted from inside the class to understand significantly the application of basic principles of combinatorial counting and overcoming obstacles that most students submit to the true mathematical activity: problems resolutions.

* Graduation Project

** Faculty of Sciences. Mathematics School – Mathematics Licensure.
Director: RODRÍGUEZ, Carlos Arturo. Magister in Mathematics

1. PRESENTACIÓN

El proceso de enseñanza y de aprendizaje, han sufrido cambios constantes a medida que pasa el tiempo; antiguamente los docentes se apoyaban de libros y discursos bien preparados para dictar una clase, convirtiendo al estudiante en un ente pasivo, receptor y memorístico. Hoy en día, estos no son los únicos medios que existen para la enseñanza de la matemática, debido a la evolución tanto académica como tecnológica que han proporcionado nuevos recursos didácticos que favorecen el aprendizaje de los alumnos y los métodos de enseñanza de los docentes.

No todos los alumnos aprenden de la misma forma ni al mismo tiempo, por eso es importante que al momento de escoger la herramienta a utilizar en clase, esta brinde al estudiante los mecanismos para confrontar y analizar sus errores y así desarrollar su capacidad de trabajar autónomamente; para ello el “juego” puede ser un excelente recurso didáctico, porque se puede considerar “como un escenario pedagógico natural, que permite al profesor establecer estrategias de aprendizajes basadas en él” (*Ortega y Aguilar 1990*).

Aunque para ciertas personas la matemática y los juegos no tienen relación alguna, para muchos matemáticos, la matemática nunca deja de ser totalmente un juego y estos siempre serán una alternativa para su enseñanza, debido a que muchos de sus conceptos tienen un carácter lúdico y en varios juegos se involucran contenidos matemáticos profundos.

Pero existe una pregunta capciosa formulada por Guzmán (1984) **¿Dónde termina el juego y donde comienza la matemática seria?** Desde nuestro punto de vista muchos juegos que se usan en la enseñanza de la matemática, en ocasiones, no proporcionan conceptos formales al estudiante, por esta razón se

debe ser cuidadosos al momento de escoger el “juego” como recurso didáctico, para que proporcione al alumno una construcción significativa del conocimiento, con el cual se puedan superar las dificultades del aprendizaje, especialmente las que respectan a la resolución de problemas.

Esta propuesta nace de la importancia de incluir el juego como recurso didáctico para la enseñanza de la matemática, específicamente para el desarrollo del pensamiento combinatorio, alcanzando de esta forma las exigencias que el Ministerio de Educación Nacional (MEN) propone a través de los Lineamientos Curriculares, en los cuales expone que los docentes elaboren estrategias metodológicas que generen una motivación continua en los educandos, con el fin de encaminarlos a ser competentes tanto en la interpretación de situaciones, argumentación de hipótesis y proposición de soluciones, con las cuales adquieran la capacidad de resolver problemas de su entorno.

La ejecución consiste en diseñar actividades novedosas, que estarán sustentadas dentro de la fundamentación teórica expuesta más adelante en el primer capítulo para que los estudiantes de sexto grado desarrolle los concepto básicos del conteo como la regla de la suma y la del producto, y los de la teoría combinatoria como combinaciones y permutaciones.

En el segundo capítulo se presentarán cada uno de los juegos aplicados en el aula, los cuales estaban acompañados por una serie de preguntas que orientaron al estudiante a conceptualizar los temas trabajados; ya que a medida que iban jugando e interactuando con su ambiente, se crearon espacios donde se fomentó un aprendizaje colectivo de manera que en lugar de recibir los contenidos de forma pasiva, descubrieron los conceptos y sus relaciones adaptándolas a su esquema cognitivo.

Después de utilizar el escenario del juego con los estudiantes, se aplicó una prueba expuesta en el tercer capítulo, con la cual se analizó la efectividad del juego, percibiendo como construyeron sus propios conocimientos en las temáticas propuestas. Además la guía proporcionó un acercamiento a la resolución de problemas. En la parte final se presentarán las conclusiones obtenidas en esta propuesta de trabajo y se propondrá algunas sugerencias para aplicarlos en trabajos futuros.

2. FUNDAMENTACIÓN TEORICA

2.1 Teorías del juego en la educación.

Históricamente la teoría de la combinatoria y la probabilidad ha estado ligada a las actividades lúdicas; en consecuencia podríamos afirmar que el juego ha sido de gran importancia para el estudio de la matemática convirtiéndose también en una herramienta de gran utilidad para mejorar los métodos de enseñanza de la misma, como expresa Guzmán (1984) “por la semejanza entre la estructura del juego y la matemática, es claro que existen muchos tipos de actividades y muchas actitudes fundamentales comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados tan bien o mejor que escogiendo contenidos matemáticos de apariencias más seria, en muchos casos son claras ventajas de tipo psicológico y motivacional para el juego sobre los contenidos propiamente matemáticos”

Algunos pensadores clásicos como Platón y Aristóteles le dieron gran importancia al aprendizaje por medio del juego, animando a los padres a que dieran a sus hijos juguetes que ayudaran a formar sus mentes para actividades futuras como adultos.

Platón fue uno de los primeros en mencionar y reconocer el valor práctico del juego, en su obra más importante La República donde mencionó su importancia en la vida de los niños y en la educación, también hizo distinciones significativas entre el juego falso y el juego verdadero. Para Platón, el juego falso era el que se practicaba con fines específicos como los deportes, en cambio los juegos a los que llamaba verdaderos eran actividades lúdicas que se podían aprovechar para la educación, haciendo aseveraciones como “los niños deben utilizar manzanas para aprender mejor las matemáticas”. Por su parte Aristóteles relacionaba el

juego con la felicidad y la virtud, entendiéndolo como una actividad que se desarrolla en un plano superior del ser humano libre.

En el siglo XVII también surge el pensamiento pedagógico moderno y consigo el juego se empieza a concebir como un elemento facilitador del aprendizaje, de esta forma para el siglo XVIII el juego es visto como instrumento pedagógico imponiéndose con más fuerza, empezando a convertirse en objeto de estudio entre los pensadores, que en su afán de entender sus características, empiezan a compartir diversas teorías que se plantean sobre el mismo.

En la teoría psicológica de Jean William Fritz Piaget (1896-1980) el juego es considerado como una conducta de orientación, una ayuda para consolidar esquemas psicofísicos de comportamiento mental y nervioso, convirtiéndose en una herramienta para el desarrollo de la inteligencia, Piaget intenta explicar la evolución de las estructuras básicas del conocimiento y su relación con el comportamiento lúdico del niño; para ello clasifica el juego en cuatro manifestaciones: Juego Sensoriomotor, Juego Simbólico, Juego Reglado y Juego de Construcción.

JUEGO SENSORIOMOTOR (Desde los 2 años)	JUEGO SIMBÓLICO (De los 2 a los 6)	JUEGO REGLADO (A partir de los 6 años)	JUEGO DE CONSTRUCCIÓN (Cualquier edad)
En esta etapa el niño obtiene placer al realizar ejercicios en los que interviene la coordinación sensorial y motriz. Son una repetición de movimientos (reacciones circulares) como chupar un objeto, coger y tirar una pelota una y otra vez, etc.	Durante este periodo los aprendizajes más significativos tienen lugar a través del juego. Una aportación fundamental de este tipo de juegos es descubrir que los objetos no sirven sólo para aquello que fueron hechos, sino que pueden utilizarse para otras actividades más interesantes por ejemplo: un simple palo se transforma en caballo, en espada o en puerta de una casa.	Tienen una función esencialmente social y suelen ser juegos organizados, que con frecuencia se realizan en equipo y que entrañan algún tipo de competitividad. Estos juegos son ejercicios sensoriales y motores que se vuelven colectivos, los cuales hay que aprender a jugar, la competición tiene lugar dentro de un acuerdo que son las propias reglas	Desde el primer año el niño se conforma fácilmente en hacer paredes con cuatro bloques para construir una granja, pero a medida que crezca querrá que su construcción se parezca más al modelo de la vida real o al que se había trazado al iniciarla. Justamente en la medida en que tiene un objetivo establecido de antemano y que los resultados se evaluarán en función de dicho objetivo se aleja de lo que es mero juego para acercarse a lo que llamamos trabajo.

Esta teoría explica la importancia del juego para el desarrollo físico y mental del individuo, el desarrollo físico se estimula por medio del juego libre que favorece la espontaneidad, la actividad creadora, desarrolla la imaginación, libera presiones y permite actuar con plena libertad e independencia y el desarrollo mental se puede incentivar por medio del juego dirigido el cual ayuda a variar las situaciones formativas, incrementar el aprendizaje, favorece el desarrollo intelectual, social afectivo y motriz, ofreciendo modelos positivos para satisfacer las necesidades individuales de cada niño.

Son muchos los autores que han estudiado la necesidad de ofrecer una pedagogía lúdica con la cual se brinden posibilidades didácticas que el alumno pueda aprovechar, quizá uno de los más importantes en el desarrollo de la teoría del juego, como pieza clave para la educación, fue Friedrich Fröbel (1782-1852) quien construyó un sistema de enseñanza en el valor educacional del juego

estimulando el impulso del niño hacia la investigación, desarrollando todas sus capacidades cognitivas.

Según Fröebel los niños aprenden de una forma más entusiasta con el juego porque relacionan estas actividades con experiencias vividas en su entorno social, satisfaciendo las necesidades intelectuales, emocionales, físicas y los intereses espontáneos de los niños en sus etapas particulares de crecimiento. Fröebel afirma que el juego es el nivel más alto de desarrollo del niño, con el cual expresa espontáneamente sus pensamientos y sentimientos, desarrollando sus cualidades para la vida adulta.

De manera similar María Montessori (1870-1952) exponía que el docente debe proporcionar juegos y materiales adecuados para la necesidad de los niveles de conocimientos y destrezas de los niños, con los cuales la participación activa de ellos con los materiales y el medio ambiente les faciliten la asimilación del conocimiento y del aprendizaje. Montessori planteo ideas que iban contra los métodos de las escuelas tradicionales como se muestra a continuación.

Método Montessori
<ul style="list-style-type: none">•La maestra desempeña un papel sin obstáculos en la actividad del salón y el alumno es un participante activo.•Los niños son motivados a enseñar, colaborar y ayudarse mutuamente.•El niño formula sus propios conceptos y descubre sus errores a través de la retroalimentación del material.•El aprendizaje es reforzado internamente a través de la repetición de una actividad.•El niño puede trabajar donde se sienta confortable, donde se mueva libremente y hable sin molestar a los compañeros.•El niño escoge su propio trabajo de acuerdo a su interés y habilidad.

Método Tradicional
<ul style="list-style-type: none">•La maestra desempeña un papel dominante y activo en la actividad del salón y el estudiante es un participante pasivo.•La enseñanza la hace la maestra y la colaboración no se motiva.•El niño es guiado hacia los conceptos y sus errores son corregidos y señalados por la maestra.•El aprendizaje es reforzado externamente por el aprendizaje de memoria, repetición.•Al niño solamente se le asignan sus propias sillas estimulando el que se sienta quieto y oiga, durante las sesiones en grupos.•La estructura curricular está hecha con poco enfoque hacia el interés del niño.

Como se ha podido analizar son muchos los factores que hacen del juego un medio didáctico ideal con el cual se puede estimular diferentes tipos de aprendizaje tales como:

Aprendizaje constructivo	Aprendizaje significativo	Aprendizaje cooperativo
<ul style="list-style-type: none">• Es un proceso activo en que el estudiante desarrolla sus propios conocimientos y capacidades, en interacción con el entorno, utilizando ciertas informaciones y recursos didácticos. El estudiante no es un receptor pasivo, interpreta la información organizándola de acuerdo a sus conocimientos, objetivos o necesidades.	<ul style="list-style-type: none">• El aprendizaje significativo está referido a utilizar los conocimientos previos del alumno para construir un nuevo aprendizaje. El profesor se convierte sólo en el mediador entre los alumnos y el conocimiento. Los alumnos participan en lo que aprenden; pero para lograr su participación se deben crear estrategias que permitan que el alumno se halle dispuesto y motivado para aprender.	<ul style="list-style-type: none">• Es una estrategia metodológica donde se resalta la importancia de la interacción que se establece entre los alumnos. En la actividad cooperativa son muy importantes las actitudes y las cualidades favorables del carácter y de la personalidad, pues el buen éxito de la acción cooperativa se apoya en las manifestaciones positivas que permiten alcanzar los objetivos propuestos.

El desarrollo de dichos aprendizajes permite que los estudiantes adopten una actitud positiva ante los trabajos escolares, estimulando no solo su creatividad, sino también su capacidad de razonamiento, de lógica y de investigación, piezas claves en el estudio de las ciencias básicas como la matemática.

2.2 El juego y la actividad matemática.

Son muchas las personas que consideran que la matemática es una materia difícil de comprender y estudiar, debido en gran parte a que muchos educadores pretenden enseñarla como una asignatura aislada y poco relacionada con el contexto social y académico del alumno; es claro que la enseñanza de la matemática no es tarea fácil, por un lado la matemática es una ciencia intensamente cambiante lo cual no permite un abordaje sencillo de la misma y por otro lado la educación tiene como fin formar personas capaces de adaptarse a una sociedad de constante desarrollo intelectual, emocional y social.

El docente no se puede limitar a impartir conocimiento sino también a buscar nuevos medios educativos que se adapten a dichos cambios y proporcionen en el alumno un aprendizaje significativo. En la búsqueda de estos medios pueden surgir numerosas estrategias didácticas que generen interés en el estudio matemático, una de las herramientas fundamentales en este propósito es **el juego** que según García, debe reunir cuatro características importantes para ser empleado en la clase de matemáticas tales como:

Tener reglas sencillas y desarrollo corto	Ser atractivos en su presentación y desarrollo	No ser puramente azar	Juegos que el alumno conozca
<ul style="list-style-type: none"> •No hace falta utilizar juegos complejos, tal como el ajedrez, para que los niños desarrollen su pensamiento, se pueden usar juegos con reglas más sencillas que también cumplen con esa finalidad. 	<ul style="list-style-type: none"> •Además del interés en la actividad de investigación, si el juego es atractivo, el niño lo utiliza con agrado, si no lo es estaría realizando tareas que le parecerían repetitivas y aburridas. 	<ul style="list-style-type: none"> •Los juegos y pasatiempos tienen unas grandes posibilidades educativas, pues fomentan las relaciones humanas, enseñan a respetar normas, a ganar o perder con deportividad, y, si no son puramente de azar, estimulan la habilidad y el ingenio. 	<ul style="list-style-type: none"> •De ser posible que sean juegos que el estudiante practique fuera del ambiente escolar y que puedan ser “matematizados”

Un juego bien elaborado debe llevar al estudiante a la planeación de estrategias que le permitan resolver cualquier problema matemático. Además que dichos problemas pueden verse como juegos, tal como expresa Abrantes, “los problemas matemáticos no son más que juegos que, convenientemente escogidos y dosificados, pueden ser muy útiles para el desarrollo del pensamiento matemático”

La capacidad para resolver problemas es un proceso de largo aliento que requiere de una orientación persistente de parte del educador. Si se emplea el juego como herramienta en los procesos de enseñanza, los estudiantes podrían desarrollar habilidades que le permitan dar solución a problemas matemáticos en particular

los de tipo combinatorio. Así como expresa Abrantes “es necesario presentar situaciones de resolución de problemas a partir de la filosofía del juego, de manera que cualquiera pueda elaborar diversas estrategias de resolución”

Por ejemplo al presentarle a un niño entre los 6 y 7 años de edad un juego sencillo como el de tomar cuatro fichas de diferentes colores, repartirlas dos en cada mano y preguntarle por los colores que se puedan tener en la mano derecha, el niño podría nombrar de forma incompleta algunas parejas como: roja y amarilla, verde y roja, azul y amarilla. Un niño de 12 años de edad aunque empiece tratando de adivinar, pronto comprende que debe proceder con más orden para no repetir las parejas de fichas que puede conformar y llegaría a saber cómo encontrar todas las posibilidades, aunque no piense en una fórmula concreta para ello.

Así al presentarle acertijos, crucigramas, el juego de palabras cruzadas (Scrabble), los cuadros de letras para encontrar palabras, y otros juegos con un grado de dificultad más alto el niño puede empezar a desarrollar su capacidad de pensar, separándose poco a poco de las situaciones concretas y de esta forma iniciar la práctica de desarrollar los diferentes pensamientos matemáticos, en especial el combinatorio.

2.3 La combinatoria y el juego.

Los juegos de azar desde la antigüedad se han convertido en el motor impulsor de la combinatoria y la probabilidad. El primer libro que se escribió sobre estos juegos fue “Liber de Ludo Aleae” del matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576), el cual se publicó en 1663, casi cien años después de la muerte de su autor. En este texto se encuentran 8 capítulos dedicados a introducir las reglas de los cálculos de los juegos de azar. Posteriormente, Galileo (1564-1642), quien aparentemente no tenía conocimiento del trabajo de Cardano, también se ocupó

del estudio de dichos juegos en “Sopra le Scoperte dei Dadi”, obra que fue publicada hasta 1718.

Otro hecho importante fue el planteamiento que Richard de Fournival (1200-1250), hizo en el poema De Vetula acerca de las 216 combinaciones posibles que se obtienen al lanzar tres dados y el cálculo exacto de los diferentes valores para la suma obtenida por los dados, aunque en tiempo actual esto podría considerarse una cuestión trivial, en aquella época no era algo tan simple, ni obvio, y fueron muchos los que erraron al intentar resolverla, generalmente porque no tenían en cuenta las posibles permutaciones de una misma combinación.

Si se continúa hablando de matemáticos que realizaron diversas investigaciones acerca de los juegos de azar, es importante mencionar al italiano del renacimiento Niccolo Tartaglia (1499-1557), que ocupó un lugar de honor en la historia como uno de los pioneros en el estudio de la combinatoria. Una de sus contribuciones fue el resaltar las propiedades de los números combinatorios, Tartaglia utilizó el triangulo aritmético para demostrar que para cualquier m y n naturales, con $m = 1, 2, 3, \dots$ y $n = 0, 1, 2, \dots$, se cumple que el número que ocupa el lugar $n + 1$ de la $m - \text{ésima}$ fila del triángulo coincide con la expresión del número combinatorio:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Donde $m!$ es el conocido número factorial, en general,

$$m! = m \times (m - 1) \times (m - 2) \times (m - 3) \times \dots \times 2 \times 1.$$

El estudio teórico de los problemas combinatorios fue abordado a partir del siglo XVII por los científicos Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665), los cuales comenzaron a recoger muestras de experimentos que realizaban en las

mesas de juegos y los registraban estadísticamente para estudiar las leyes y regularidades que los regían, también fundamentaron la teoría de la probabilidad y determinaron el número de combinaciones posibles de k elementos tomados de un conjunto de n elementos.

Con los aportes de Pascal y Fermat los juegos de azar dejaron de ser pasatiempos para convertirse en retos intelectuales en los que participaban las mejores mentes científicas de la época, convirtiendo a la combinatoria en una nueva e independiente rama de las matemáticas, como fue el caso de Wihem Leibniz (1646-1716) que en su *Dissertatio de Arte Combinatoria* demostró su interés en el análisis de dichos juegos introduciendo así el término “combinatoria” tal y como lo usamos actualmente, el matemático Jakob Bernouilli (1654-1705) que en el artículo *Ars Conjectandi* (El arte de conjeturar) publicado en 1713 abarca el estudio de los juegos de cartas, de dados y la solución de algunos problemas de azar estableciendo así las nociones básicas de la probabilidad, convirtiéndose en una base de gran importancia para la consolidación de la combinatoria, y el matemático suizo Leonard Euler quien desarrolló a principios del siglo XVIII una auténtica escuela de matemática combinatoria.

2.4 Conceptos básicos del pensamiento combinatorio

Los principios básicos del conteo

Se presentarán dos principios básicos de combinatoria, la regla de la suma y la regla del producto. Se mostrará cómo pueden ser utilizados para resolver problemas combinatorios.

La regla de la suma es uno de los principios fundamentales de conteo que se establece de la siguiente forma:

“Si hay m formas de realizar una primera tarea y n formas de realizar una segunda tarea; y si las tareas son independientes, entonces hay $m + n$ formas de realizar las tareas”

Ejemplo: Supongamos que para elegir un representante de la Escuela de matemáticas en una comisión universitaria se puede escoger bien un profesor o bien un estudiante de doctorado. ¿De cuántas formas se puede escoger el representante si hay 37 profesores y 8 estudiantes de doctorado?

Solución: En este caso, consideremos como primera tarea la de elegir un profesor como representante. Esta tarea se puede hacer de 37 formas distintas. La segunda tarea, elegir como representante un estudiante, se puede realizar de 83 maneras distintas. Por tanto, la regla de la suma nos dice que hay $37 + 8 = 120$ formas posibles de escoger el representante para la comisión.

Otro de los principios fundamentales es **regla del producto**, la cual permite contar con más comodidad procesos que consisten en acciones sucesivas, este principio se enuncia de la siguiente forma:

“Supongamos que una tarea se puede dividir en tareas consecutivas. Si hay m formas de realizar una primera tarea y n formas de realizar una segunda tarea, entonces hay $m \times n$ formas de completar la tarea”.

Ejemplo 2: Se quiere etiquetar las sillas de un auditorio con una letra del alfabeto (27 letras) y un número entero positivo menor ó igual a 100. ¿Cuál es el máximo número de sillas a las que se les puede asignar una etiqueta?

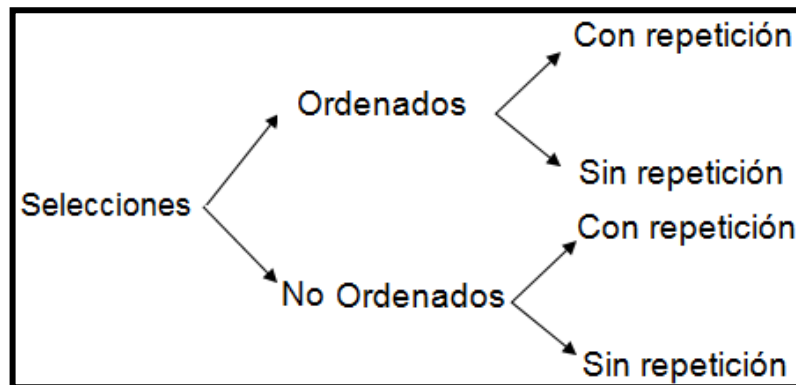
Solución: El proceso de etiquetar una silla consiste de dos tareas; asignar una letra del alfabeto y asignar un entero positivo menor que 100. Por lo tanto de la regla del producto el máximo número de sillas que se pueden etiquetar son:

$$27 \times 100 = 2700$$

Conceptos elementales de la combinatoria

- **Combinaciones y permutaciones**

Se dará inicio con un recorrido por la combinatoria elemental contando de cuantas maneras se pueden seleccionar un cierto número de elementos de un conjunto. Para contara este número es preciso fijar los criterios con que se diferencian una selección de otra. Aquí se tendrá en cuenta dos tipos de criterios: el orden de los elementos y el número de veces que pueda aparecer cada uno. El siguiente diagrama indica cómo deben ser las selecciones.



Si tenemos selecciones donde el orden de los elementos importa (selecciones ordenadas) se estará hablando de **permutaciones**. Por otro lado, si el orden de los elementos no importa, entonces se estará hablando de **combinaciones** (selecciones no ordenadas). Además, si cada elemento puede aparecer como mucho una vez, se hablará de selecciones sin repetición, mientras que, si no hay

esta restricción, se hablará de selecciones con repetición. Por ejemplo si tenemos el conjunto

$$M = \{a, b, c\}$$

Se puede formar 6 permutaciones, sin repetición de dos elementos.

	<i>ab</i>	<i>ac</i>
<i>ba</i>		<i>bc</i>
<i>ca</i>	<i>cb</i>	

9 permutaciones, con repetición, de dos elementos.

<i>aa</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>
<i>ba</i>	<i>bb</i>	<i>bc</i>
<i>ca</i>	<i>cb</i>	<i>cc</i>

3 combinaciones, sin repetición, de dos elementos.

	<i>ab</i>	<i>ac</i>
		<i>bc</i>

6 combinaciones, con repetición, de dos elementos.

<i>aa</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>
	<i>bb</i>	<i>bc</i>
		<i>cc</i>

Vamos a considerar selecciones ordenadas o permutaciones. **Las permutaciones sin repetición** de n elementos de k en k , se denota por P_n^k . Como cada elemento puede aparecer a lo sumo una vez, es preciso que $k \leq n$. Si tenemos n opciones para elegir, y se eligen k de ellas distintas, el número de permutaciones posibles son:

$$P_n^k = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1).$$

En particular cuando $k = n$, se obtienen las permutaciones de n elementos, el número de las cuales se denota como $P_n = n \times (n - 1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$. Este número se representa con el símbolo $n!$ y se lee factorial de n , el cual permite escribir P_n^k de la siguiente forma:

$$P_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

En el ejemplo anterior obtenemos $P_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ permutaciones sin repetición tomadas de un conjunto de tres elementos de dos en dos.

Ahora consideremos el número de selecciones ordenadas con repetición de n elementos tomados de k en k . Este número se denota por PR_n^k y se lee **permutaciones con repetición** de elementos tomados de k en k . Como hay n posibilidades para la primera elección, n posibilidades para la segunda elección y así sucesivamente, se tendrá que

$$PR_n^k = \underbrace{n \times n \times n \times \dots \times n}_{k\text{-veces}} = n^k.$$

Es decir si queremos obtener las permutaciones con repetición del conjunto $M = \{a, b, c\}$ tomadas de dos en dos, tendremos $PR_3^2 = 3^2 = 9$ selecciones.

Ahora vamos a considerar selecciones no ordenadas o combinaciones. Dos selecciones serán diferentes si y solo si tienen elementos diferentes. Primero se

contaran **las combinaciones sin repetición** de n elementos tomados de k en k (donde $k \leq n$), y se denotará este número como C_n^k . Para esto se considera temporalmente todas las P_n^k agrupando aquellas que sólo difieren en el orden sus elementos, si usamos el ejemplo anterior tendríamos los grupos.

	ab	ac
	ba	ca
		bc
		cb

En general, cada uno de los grupos contiene $k!$ permutaciones que representan la misma combinación, de manera que

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Ahora se abordará el estudio de **las combinaciones con repetición** de n elementos tomados de k en k , que se denotará por CR_n^k , donde k puede ser más grande que n . La estrategia que sirve para contar las combinaciones con repetición consiste en pensar en $n - 1$ barras que definen n espacios, uno para cada elemento del conjunto. Se identifica cada una de las combinaciones con repetición poniendo en cada uno de estos espacios tantas estrellas como elementos correspondientes haya en la combinación. Para nuestro ejemplo tenemos

$$\begin{aligned}
aa &= ** | | \\
ab &= * |**| \\
ac &= * | | * \\
bb &= |**| \\
bc &= | * | * \\
cc &= | | **
\end{aligned}$$

De acuerdo con esta correspondencia hay tantas combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k como permutaciones de dos elementos (barras y estrellas) con exactamente $n - 1$ barras y k estrellas. En el ejemplo inicial se observa que P_n^k coincide con el de las combinaciones de $k + n - 1$ elementos dados de k en k , de manera que.

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Ejemplos de aplicación.

- **Permutación sin repetición**

Ejemplo: ¿De cuántas maneras podemos colocar 3 monedas (de 500, de 200, de 100) en fila?

Solución: De los tres elementos que tenemos en el conjunto se puede elegir 3 y hacer selecciones como

$$\begin{aligned}
&\{500,200,100\}, \{500,100,200\}, \{200,500,100\}, \{200,100,500\}, \\
&\{100,200,500\}, \{100,500,200\}
\end{aligned}$$

Es decir el problema consiste en contar el número de selecciones ordenadas de 3 elementos tomados de 3 en 3, por lo tanto se halla $P_3^3 = 3! = 6$.

- **Permutaciones con repetición**

Ejemplo: ¿Cuántas palabras de 3 letras se pueden formar con las 27 letras del alfabeto español, si se permite repetir letras?

El problema consiste en contar las selecciones ordenadas con tres elementos de un conjunto de 27 elementos y como podemos repetir los elementos entonces para escoger la primera letra tengo 27 opciones, para escoger la segunda letra de la palabra tengo de nuevo 27 opciones y para escoger la última letra volvemos a tener 27 opciones. Es decir

$$PR_{27}^3 = 27^3 = 19683.$$

- **Combinaciones sin repetición**

Ejemplo: Un grupo de 30 personas han sido entrenadas como astronautas para participar en la primera misión tripulada a Marte. ¿De cuántas formas se puede seleccionar una tripulación de seis miembros para la misión?

Solución: Como el orden de las personas es irrelevante, el número de formas de seleccionar una tripulación de un grupo de 30 personas tomadas de 6 en 6 es

$$C_{30}^6 = \frac{30!}{(30-6)!6!} = \frac{30!}{24! \times 6!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 593.775.$$

- **Combinaciones con repetición**

Ejemplo: Tenemos 5 sabores de helados: Banana, Vainilla, Fresa, Limón y Chocolate y se puede escoger sabores ¿De cuántas formas se puede hacer dicha selección, si se permite repetir los sabores?

Solución: Algunas de las combinaciones que se pueden obtener son:

{banana, vainilla, fresa}, {fresa, fresa, fresa}, {fresa, fresa, chocolate},
{banana, vainilla, chocolate} ...

Es decir como no nos interesa el orden de los sabores y estos se pueden repetir, el número de formas de escoger el cono de helado, de los cinco sabores diferentes, tomados de 3 en 3 es.

$$CR_5^3 = \binom{5+3-1}{3} = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35.$$

3. EL JUEGO COMO RECURSO DIDÁCTICO EN EL AULA

Es fundamental proporcionar en el aula de clase una visión renovada sobre la enseñanza de los conceptos matemáticos, proporcionando experiencias que satisfagan las necesidades académicas que los alumnos requieren hoy en día para contribuir con el desarrollo de su actitud crítica y reflexiva.

En este capítulo se resaltaré la relación estrecha que tiene la matemática con el juego, convirtiéndose en una excelente alternativa para desarrollar el pensamiento combinatorio de los estudiantes, incentivando la creatividad, el entusiasmo y la asimilación de nuevos conceptos matemáticos.

Para llevar a cabo este objetivo se contó con la participación de 10 alumnos¹ del grado sexto de primaria, escogidos mediante el análisis obtenido por la aplicación del juego estratégico llamado tres en línea.



Foto 1: Duvan Lozano Rivera Niñas (izq. – der.) Dayre Araujo, Daniela Rueda, Luz Elena Rojas, Brenda Hernández, Jennifer Calderón. Niños: Anderson Guerrero, Edward Rojas, Brayan Valbuena, Brayan Ramírez.

¹ Se trabajó con alumnos de la Institución Educativa las Américas de Bucaramanga, cuyas edades oscilan entre los 9 y 10 años. Cada una de las actividades trabajadas con dichos alumnos, se realizaron de forma en extracurricular fuera del aula.

La implementación del juego estratégico permitió identificar en este grupo de alumnos algunas falencias que presentan al momento de seguir instrucciones, crear y explicar las estrategias que les permite encontrar una solución a un problema dado. Además se pudo constatar que este grupo de alumnos presentan bajo rendimiento académico, debido en gran parte a la indisciplina constante que mantienen en el aula, factor determinante en la educación, como expresa Larrosa y Carda (2007). La indisciplina produce una educación infantil deficiente, pobre en estímulos positivos hacia el aprendizaje, hace que los alumnos presenten un retraso escolar, poco interés por lo que se hace en clase, escasas habilidades sociales y con necesidades educativas especiales.

3.1 JUEGO ESTRATÉGICO

Los juegos estratégicos contribuyen en mejorar los procesos de enseñanza, elevar el trabajo independiente de los estudiantes, resolver situaciones problemáticas en la actividad práctica, estimular la capacidad mental y desarrollar el pensamiento estratégico². Con base en esto, la primera actividad aplicada en el aula fue el juego estratégico tres en línea, con el fin de analizar en los estudiantes aspectos como:

- ❖ Comprensión de las reglas del juego (capacidad para seguir instrucciones)
- ❖ Capacidad para crear estrategias.
- ❖ Capacidad para expresar y explicar las estrategias creadas para el juego.
- ❖ Comportamiento en actividades lúdicas y cooperativas.

² El pensamiento estratégico requiere gran intuición, lógica, observación, metacognición, motivación, imaginación, capacidad analítica y sintética, argumentación y es altamente requerido en cualquier area de planteamiento matemático.

3.1.1 Juego tres en línea (TRIQUI)

El tres en línea es un juego de lápiz y papel donde los jugadores para llegar a una situación ganadora, deben mantener una continúa atención sobre las jugadas que realice su contrincante. En este juego el jugador gana si realiza una línea de tres de sus símbolos, la línea puede ser: horizontal, vertical o diagonal como se muestra en la *Figura 1*.



Figura 1: Tablero del juego tres en línea.

Objetivos:

- Observar el comportamiento de los estudiantes ante actividades lúdicas.
- Propiciar un ambiente de confianza en el cual los alumnos presenten libremente sus ideas y opiniones.
- Mostrar la importancia de plantearse estrategias que les permita ganar un juego o solucionar algún problema.

Materiales:

- Tarjetas de juego que contengan tableros de 3x3 para jugar tres en línea.
- Tablero y marcadores.

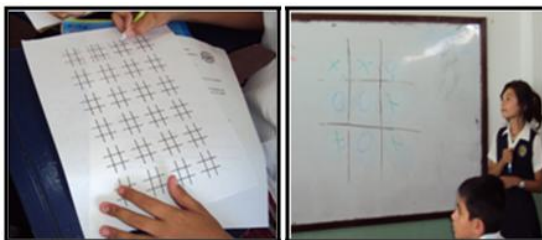


Foto 2: Material para el juego tres en línea.

Para desarrollar la actividad se trabajo con un grupo de 32 estudiantes los cuales formaron grupos de cuatro integrantes, para crear estrategias, tanto para el jugador que tiene el primer turno (X), como para el que tiene el segundo (O), que les permita ganar o empatar el juego. Esto se pretende conseguir al jugar tres en línea 10 veces consecutivas. Al descubrir las estrategias, el paso a seguir es elegir un participante del grupo, que deberá ponerlas en práctica en las rondas de eliminación, donde grupo que pierda será eliminado automáticamente.

Reglas del juego:

- Es un juego entre dos jugadores.
- Cada jugador tiene turnos alternados para poner su marca en un cuadro desocupado de 3x3 y lograr una línea de tres de sus marcas para ganar.
- El primero que haga la línea obtendrá dos puntos.
- Si ninguno de los dos jugadores logra hacer una línea, esto será considerado un empate y ambos obtendrán un punto.

3.1.1.1 Análisis del juego tres en línea

Como el tres en línea es un juego de dos participantes, la idea al aplicarlo en un grupo grande es poner a prueba la capacidad de trabajo en equipo, el comportamiento, la participación y la capacidad competitiva del individuo. El juego se realizó en dos etapas, la primera consistía en experimentarlo en los grupos formados, para plantearse una estrategia ganadora y explicarlas; y la segunda en aplicar las estrategias creadas para el juego.

Etapas 1: Creando estrategias.

La actividad dio inicio formando los grupos de trabajo y repartiéndoles el material necesario (tarjetas, listas de preguntas, etc.). Al poco tiempo de conformar los

grupos se empezó a observar la apatía y el poco entusiasmo que algunos estudiantes empezaban a mostrar, ocasionando desorden en el aula, desintegración de los grupos y la pérdida de la concentración, esto hace evidente lo que expresan Zarate y Moiraghi, “al realizar trabajos en grupo existen algunos inconvenientes como lentitud, el trabajo en grupo requiere mucho más tiempo; el control de la manipulación del propio grupo y de sus recursos por parte de unos pocos; la reducción del esfuerzo individual dando lugar a la denominada “holgazanería”; difusión de responsabilidades y la polarización de la toma de decisiones o desarrollo de un pensamiento grupal”

Para evitar perder el control sobre la actividad, se trabajó con cada uno de los grupos, para conservar el orden y la concentración, se repartieron responsabilidades individuales para que todos los estudiantes tuvieran una participación activa y se destacaran por el rendimiento y las virtudes que poseen.



Foto 3: Estudiantes manipulando el material y creando estrategias.

La recopilación de las estrategias creadas por cada uno de los grupos, se llevó a cabo con el compendio de las respuestas proporcionadas por los estudiantes a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles estrategias puedes utilizar para ganar o empatar en el juego tres en línea cuando tú inicias la partida?
2. ¿Cuáles estrategias puedes utilizar para ganar o empatar en el juego tres en línea cuando tú oponente inicia la partida?

- ¿Preferirías ser el primero en iniciar el juego o el segundo? Explica tu respuesta.

A continuación se mostrará en conjunto algunos ejemplos de las estrategias propuestas por lo estudiantes y se harán algunas observaciones, sobre las mismas.

Conjeturas de los estudiantes para la mejor estrategia de juego

La mayoría de las respuestas proporcionadas por los estudiantes eran cortas y carecían de argumentación, muchos de ellos se limitaron a dar una estrategia sin tener en cuenta todas las opciones que se pueden presentar en el juego, tanto para el primer jugador como para el segundo, en ocasiones se limitaban a dibujar una partida sin explicar exactamente en qué consistía su estrategia, estos se puede observa en la figura 2.

The figure shows two boxes containing handwritten student answers to three questions about tic-tac-toe strategies. The questions are: 1. Strategies to win or draw when you start. 2. Strategies to win or draw when your opponent starts. 3. Preference for starting first or second.

Top Box:

- ¿Cuáles estrategias puedes utilizar para ganar o empatar en el juego tres en línea cuando tú inicias la partida? *Poniendo xoo en la izquierda o derecha*
- ¿Cuáles estrategias puedes utilizar para ganar o empatar en el juego tres en línea cuando tú oponente inicia la partida? *Poniendo xoo Palo central o*
- ¿Preferirías ser el primero en iniciar el juego o el segundo? Explica tu respuesta *Empatar*
Primero o empatado de lo mismo.

Bottom Box:

- ¿Cuáles estrategias puedes utilizar para ganar o empatar en el juego tres en línea cuando tú inicias la partida?
- ¿Cuáles estrategias puedes utilizar para ganar o empatar en el juego tres en línea cuando tú oponente inicia la partida?
- ¿Preferirías ser el primero en iniciar el juego o el segundo? Explica tu respuesta

1º *Yo la X para ganar soy*

2º *X soy la X para empatar*

3º *prefiero ser primerero porque el primero tiene mas posibilidades de ganar*

Figura 2: Estrategias planteadas para el juego tres en línea.

Los resultados que se muestran en la tabla 1 corresponden al número de estudiantes que ofrecieron una respuesta a las preguntas 1 y 2, con cierta justificación basadas en la experiencia vivida durante el juego, independientemente que haya sido la estrategia adecuada para ganar o empatar, lo que se resalta es la forma como expresaron sus ideas; también se muestra la cantidad de estudiantes que dieron respuestas cortas sin argumentación, como las expuestas anteriormente, y aquellos que no respondieron a las preguntas dadas.

Pregunta N°	Respuesta con justificación	Respuesta sin justificación	No sabe/No responde
1	5	13	14
2	3	12	17

Tabla 1: Tabulación de resultados del juego tres en línea pregunta 1 y 2.

En la tabla 2 se presentan las respuestas para la tercera pregunta.

Pregunta N°	Primer Jugador	Segundo Jugador	No sabe / No responde
3	14	0	18

Tabla 2: Tabulación de resultados del juego tres en línea pregunta 3.

A pesar que fueron muy pocos los que proporcionaron una estrategia de juego, la mayoría de los estudiantes expusieron que el jugador que tenía el primer turno, era quien tenía más posibilidad de ganar, argumentando que: *“al iniciar con el juego tenía la ventaja de escoger cualquier cuadro”*.

A medida que se avanzaba en la actividad fue posible percibir como los estudiantes expresaban sus opiniones, discutían alrededor de ellas y concluían algunas estrategias, las cuales pensaban que los podrían llevar a ganar el juego. Esto permitió concluir que los estudiantes crearon estrategias permitiendo percibir que más del 50% de los estudiantes crearon estrategias ganadoras, sin embargo tienen dificultad para plasmar estas ideas por escrito.

Etapa 2: Poniendo en práctica las estrategias.

En esta etapa se dio inicio a la ronda de eliminación en la cual los estudiantes debían exponer las estrategias creadas poniéndolas en práctica en el juego.



Foto 4: Ronda de eliminación del juego tres en línea.

Para que los estudiantes mejoraran la descripción de su estrategia, se les pidió que a través de lo experimentado en la ronda de eliminación, replantearan sus respuestas, algunas de estas se muestran a continuación.

Conjeturas de los estudiantes para jugar tres en línea.

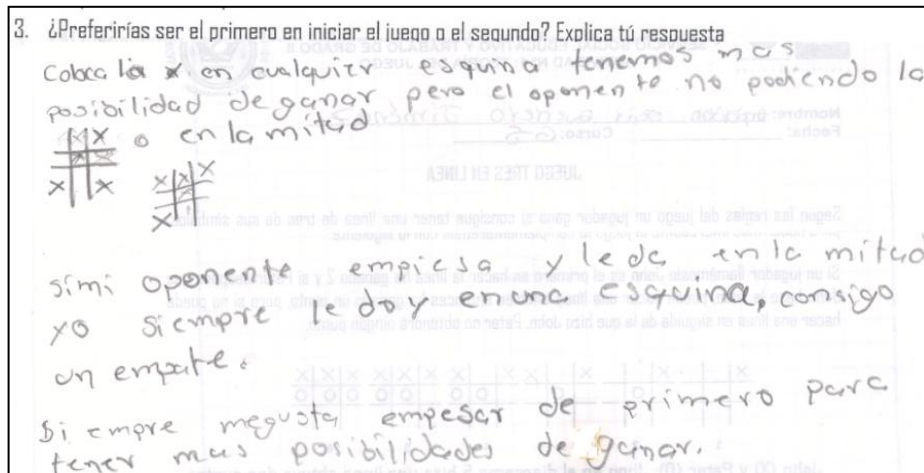


Figura 3: El estudiante explica en forma general los cuadros con los cuales jugaría para ganar o llegar a un empate.

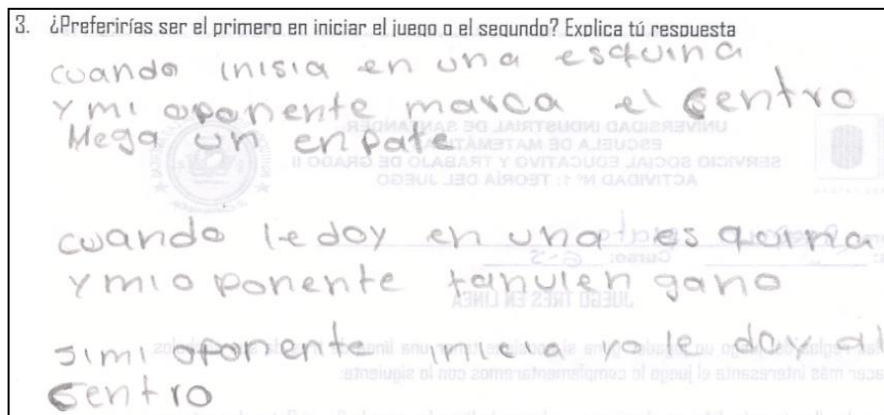


Figura 4: Este estudiante empieza a generalizar su estrategia pensando en varias opciones de juego.

En la tabla 3 se puede observar que fueron pocos los estudiantes que justificaron sus respuestas. El 65% de ellos realizaron estrategias enfocándose en una sola idea de juego, dando de nuevo respuestas cortas y sin justificación.

Pregunta N°	Respuesta con justificación	Respuesta sin justificación	No sabe / No responde
1	11	11	10
2	11	12	9

Tabla 3: Tabulación de respuestas replanteadas del juego tres en línea 1 y 2.

Para la tercera pregunta los estudiantes reafirmaron que el primer jugador es quien tiene más posibilidades de ganar, basándose en que durante el juego cada vez que empezaban de segundos, perdían o llegaban a un empate, lo cual los llevo a concluir que el segundo jugador tenía una desventaja, porque siempre iba a estar contraatacando.

Pregunta N°	Primer Jugador	Segundo Jugador	No sabe / No responde
3	23	0	9

Tabla 4: Tabulación de respuestas corregidas del juego tres en línea 3.

Al analizar la actividad se pudo concluir que los estudiantes presentan grandes falencias, para explicar los procesos y las soluciones que aplican para resolver un problema, en este caso para dar a conocer su estrategia de juego.

Para que todo el grupo tuvieran la oportunidad de comparar sus respuestas con las estrategias del tres en línea y mostrarles que los juegos pueden tener un fin educativo, se realizó una presentación sobre todas las posibles partidas que se podían plantear (ver anexo A), así podían ver cómo debían jugar, en cualquiera de los dos turnos.

Al finalizar el juego se les entregó un formato que contenían las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Les pareció interesante la actividad?
- ✓ ¿Creen que la estrategia que plantearon para ganar fue la adecuada? Si, No ¿Por qué?
- ✓ ¿Al jugar antes tres en línea habías considerado en aplicar una estrategia?

De esta forma se pretendía que los estudiantes manifestaran su opinión sobre el juego aplicado y la estrategia que habían decidido plantear. Algunas respuestas de los estudiantes fueron las siguientes: “Me pareció muy interesante y divertida, mi estrategia fue la adecuada porque ganábamos varias veces”, “me divertí en el juego con mis compañeros de clase y mi estrategia me hizo pensar y ganar limpiamente”, “me pareció chévere divertida y así nos comunicamos con nuestros compañeros y mi estrategia no funcionó porque no gane ningún juego”, “¡si! Porque por fin jugamos en matemáticas y fue un juego bacano y con nuestra estrategia ganábamos y perdíamos justamente”. Solo dos estudiantes afirmaron decir que solo les había parecido un poco interesante porque sus estrategias no les permitieron ganar ninguna partida.

Con estas últimas respuestas se evidencia que el juego como herramienta pedagógica es bien aceptada por los estudiantes creando un ambiente de participación y relajación en una área en la cual no habían tenido la oportunidad de realizar actividades de este estilo.

3.2 EL JUEGO EN EL PENSAMIENTO COMBINATORIO

Cada uno de los juegos que se presentan a continuación están basados en los postulados que Piaget ha denominado juego simbólico, reglado y de construcción, porque con estos, los estudiantes tienen la oportunidad de trabajar con un material manipulable que les permite crear situaciones que se asemejen a la realidad, teniendo un aprendizaje significativo; de igual forma son juegos basados en el marco de unas reglas que los estudiantes deberán aprender, trabajando en equipo y por último cada juego tiene como fin que los estudiantes construyan por si mismos conceptos matemáticos formales. Citando nuevamente a Piaget “Justamente en la medida en que se tiene un objetivo establecido de antemano y que los resultados se evaluarán en función de dicho objetivo el niño se aleja de lo que es mero juego para acercarse a lo que llamamos trabajo”.

Cada uno de los juegos que se presentaran a continuación se conto con la participación de los 10 estudiantes seleccionados mediante la aplicación del juego estratégico.

3.2.1 Juego el laberinto

Un laberinto es un lugar formado por calles y encrucijadas, intencionadamente complejo para confundir a quien se adentre en él. El diseño básico de un laberinto es un camino largo con bifurcaciones donde hay que tomar decisiones. Sólo las opciones correctas llevan a la salida, la figura 5 es un ejemplo de un laberinto.

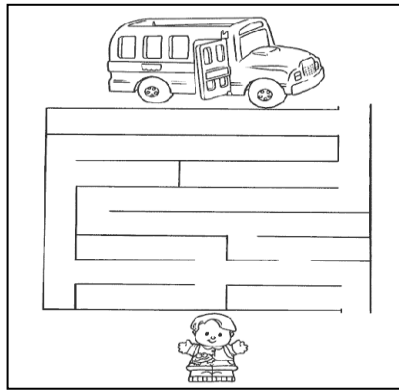


Figura 5: Juego el laberinto.

Objetivo:

Utilizar el juego el laberinto como recurso didáctico para que el estudiante descubra y aprendan el concepto de la regla de la suma.

Materiales:

- Dos juegos de laberintos gigantes.
- Guía taller



Foto 5: Material para el juego del laberinto.

Los laberintos cuentan con tres países de partida, cada uno con una cantidad de caminos que permiten llegar a la meta, que en este caso es el país de llegada (Alemania para el primer laberinto y Perú para el segundo). El juego consiste en encontrar todos los caminos que hay de los países de partida al país de llegada, una vez encontrados dichos caminos, deberán responder las preguntas de la guía taller. El primer grupo en encontrar los caminos de los dos laberintos y responder correctamente las preguntas será el ganador.

Reglas del juego:

- Se puede jugar en grupos de cinco estudiantes.
- Los estudiantes deben ir buscando los caminos del primer laberinto.
- Cuando encuentren todos los caminos y responda las preguntas podrán acceder al segundo laberinto y hacer el mismo proceso.
- El primer grupo en encontrar todos los caminos y responder las preguntas será el ganador.

3.2.1.1 Análisis del juego laberinto

El juego se dividió en dos etapas; en la primera de ellas los estudiantes debían experimentar con los laberintos y encontrar los caminos correctos que los llevarían a la meta; en la segunda, basados en la experiencia adquirida a través del juego, debían responder algunas preguntas, diseñadas con el fin de alcanzar el concepto de la regla de la suma.

Etapas iniciales: Experimentando con el laberinto

A medida que avanzaba el juego, se podía percibir que los grupos empezaban a aplicar estrategias para poder ganar. Como los laberintos eran grandes, los estudiantes se distribuyeron responsabilidades, tres integrantes del grupo buscaban los caminos de cada uno de los países y los otros dos se encargaban de rectificarlos y contarlos; hay que resaltar que el grupo formado por las niñas fue más cuidadoso en este proceso, puesto que trabajaron con varios colores para diferenciar los caminos, facilitando el conteo de los mismos.



Foto 6: Estudiantes experimentando con el material del juego del laberinto.

Como se hicieron dos grupos, uno conformado por los niños y el otro por las niñas, la competencia hizo que se fomentara el trabajo cooperativo, aumentando la motivación, el intercambio de ideas y el contraste de opiniones.



Foto 7: Estudiantes aplicando estrategias para encontrar los caminos del primer laberinto.

Los niños al ver que la estrategia aplicada por sus compañeras era efectiva, decidieron adoptarla en su método de trabajo, encontrando de esa forma todos los caminos correctos del laberinto, convirtiéndolos en los ganadores en la etapa experimental del juego.



Foto 8: Estudiantes aplicando la estrategia para encontrar los caminos del segundo laberinto.

Con este juego los estudiantes trabajaron de forma eficiente encontrando en conjunto una estrategia para garantizar la victoria, citando así a Moreno y García

(2008) “mediante el aprendizaje cooperativo se presupone un clima de aula que permite la interacción positiva entre los estudiantes y el profesor, es una forma de abordar las tareas basadas en la colaboración y la ayuda mutua”.

Etapas Final: Conceptualizando la regla de la suma.

La guía taller proporcionada a los estudiantes para que conceptualizaran la regla de la suma contenía las siguientes preguntas:

- ¿De cuántas formas puedo llegar desde Colombia a Perú?
- ¿De cuántas formas puedo llegar desde Brasil a Perú?
- ¿De cuántas formas puedo llegar de Chile a Perú?
- Supongamos que debemos escoger entre los caminos de los tres países Colombia, Brasil y Chile para llegar a Perú, ¿cuántas opciones tengo para llegar a Perú?

En las tres primeras preguntas los estudiantes simplemente debían escribir el número de caminos que encontraron en cada uno de los laberintos. Para la última, se les pidió justificar su respuesta, basados en lo que habían experimentado en el juego, de esta forma se obtuvieron argumentaciones como las que muestra la figura 6.

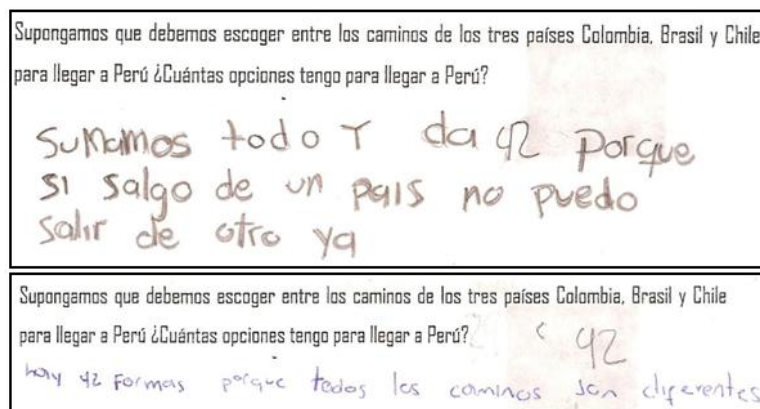


Figura 6: Respuestas para el juego del laberinto.

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes, fue posible concluir que habían construido una noción a cerca de la regla de la suma, por lo cual se procedió a dar una explicación de la misma basada en el juego del laberinto, de la siguiente forma:

En el laberinto se podía observar que para realizar la primera tarea (ir de Colombia a Perú) hay 12 caminos, para la segunda tarea (ir de Brasil a Perú) hay 10 caminos y para la tercera tarea (ir de Chile a Perú) hay 20 caminos; es decir, tenemos $12+10+20=42$ formas de realizar la tarea que es llegar a Perú, desde los tres países (Colombia, Brasil y Chile). Además se explicaron los conceptos consignados en el capítulo anterior.

Con esta actividad se demostró a los estudiantes cómo de forma implícita utilizaron la regla fundamental de la suma para responder a las preguntas, y vivenciaron como a través de un juego sencillo podrían enfrentarse a nuevos y complejos retos, todos encaminados a la búsqueda de los conceptos formales de la matemática en este caso en el área de la combinatoria.

3.2.2 Juego vistiendo a Carlos y María

Vistiendo a Carlos y María es un juego sobre las posibles elecciones que un hombre y una mujer tienen para vestirse con la ropa de su armario, como se observa en la figura 7.



Figura 7: Juego vistiendo a Carlos y María

Objetivo:

Utilizar la actividad Vistiendo a Carlos y María como recurso didáctico para que el estudiante descubra y aprenda la regla del producto.

Materiales:

- Prendas de vestir como camisas, pantalones, medias, chalecos, bufandas, zapatos etc.
- Guía taller



Foto 9: Material del juego vistiendo a Carlos y María.

Este juego consiste en que cada grupo escogerá un integrante, ya sea mujer u hombre (Carlos o María), ellos simularán ser unos muñecos a los cuales sus compañeros deberán vestir con las prendas que tengan a su alcance, los grupos deben hacer todas las formas posibles de vestir (las cuales llamaremos atuendo³). El primer grupo que realice todos los posibles atuendos y los registre en el menor tiempo posible será el ganador.

Reglas del juego

- Vestir a un integrante con las prendas que llevaron para esta actividad.
- Registrar cuales y cuántas prendas utilizaron para crear los atuendos.
- Registrar todos los atuendos que hicieron con esas prendas.

³ Un ejemplo de un atuendo es un pantalón, una camisa y un par de zapatos ó una falda, una camisa y un par de zapatos.

- Buscar un método con el que puedan obtener el número total de atuendos, pensando solo en la cantidad de prendas que tienen.

3.2.2.1 Análisis del juego vistiendo a Carlos y María

La idea principal al jugar con las prendas, es que los estudiantes visualicen el concepto de la regla del producto, buscando en forma recreativa el número de atuendos que se pueden hacer con n camisas, m pantalones y p pares de zapatos.

Al igual que en las actividades anteriores, esta también se realizó en dos etapas.

Etapas 1: Experimentando con las prendas de vestir.

Se inició con la explicación de las reglas del juego y la conformación de los grupos de cinco estudiantes cada uno. Por último se repartieron las prendas de forma equitativa, garantizando un juego justo, así cada grupo tenía a su disposición las siguientes prendas

Grupo 1: 4 pantalones, 4 camisas y 3 pares de zapatos.

Grupo 2: 3 pantalones, 1 falda, 4 camisas y 3 pares de zapatos.

Los dos grupos empezaban con un atuendo base, el cual era *pantalón, camisa y un par de zapatos*. El integrante que habían elegido inicialmente debía estar vestido según lo indicado y con su debido registro, así podían acceder a la información para crear el siguiente atuendo.

Durante el desarrollo del juego, cada grupo empezó a plantearse una estrategia para ganar. La estrategia de juego planteada por el grupo 1, fue repartir

responsabilidades entre sus integrantes, así mientras uno registraba los atuendos, los otros ayudaban a su compañero a cambiarse de ropa. En cambio la estrategia usada por el grupo 2, fue clasificar las prendas según el tipo, pero no repartieron responsabilidades dentro del grupo, de esta forma todos se dedicaban a ayudar a su compañero a cambiarse de ropa sin tener quien hiciera los registros, olvidando que era una condición necesaria para avanzar en el juego, dando una ventaja considerable a sus contrincantes.



Foto 10: Estudiantes aplicando estrategias.

Debido a la organización y a la estrategia aplicada por el grupo 1, hizo que este, fuera el ganador del juego, demostrando una vez más que el trabajo en equipo, bien dirigido, organizado y con un planteamiento de estrategias, permite una buena interacción entre los educandos, resaltando las manifestaciones positivas que cada uno puede ofrecer en el grupo, alcanzando de esta forma los objetivos propuestos.

Cada grupo al finalizar la actividad, tenían registrado los atuendos que hicieron durante el juego. En la figura 8 se da un ejemplo de algunos de sus registros.

GRUPO 1	GRUPO 2
<p>1) 1 pantalón¹ camisa rosado y zapatos</p> <p>2) 1 pantalón² camisa rosado y zapatos</p> <p>1) 1 pantalón³ camisa rosado y zapatos</p> <hr/> <p>2) 1 pantalón¹ buso y zapatos</p> <p>2) 1 pantalón² buso y zapatos</p> <p>2) 1 pantalón³ buso y zapatos</p> <hr/> <p>3) 1 pantalón¹ camisa azul y zapatos</p> <p>3) 1 pantalón² camisa azul y zapatos</p> <p>3) 1 pantalón³ camisa azul y zapatos</p>	<p>1 falda verde</p> <p>1 buso rosado</p> <p>1 zapatos</p> <hr/> <p>1 capri</p> <p>1 buso rosado</p> <p>1 zapatos</p> <hr/> <p>1 pantalón</p> <p>1 camisa</p> <p>1 zapatos</p>

Figura 8: Registro de los atuendos.

Para la siguiente etapa del juego, los estudiantes debían analizar la información que habían conseguido y plantear una forma para contar el número de atuendos, sin necesidad de vestir a su compañero.

Etapas 2: Conceptualizando la regla del producto.

Cada estudiante empezó a plantearse una forma rápida de obtener los 48 atuendos que habían registrado, la mayoría por el método tradicional de ensayo y error, empezaron a aplicar las operaciones básicas que conocían.



Foto 11: Estudiantes planeando una forma de obtener el número total de los atuendos.

Como ya sabían cuántos atuendos podían hacer con la cantidad de prendas que tenían a su alcance, no tardaron en darse cuenta que la operación suma, no era la adecuada para aplicar en este problema y empezaron a realizar multiplicaciones hasta obtener el valor esperado.

Como ya habían descubierto que debían realizar una multiplicación, pero no tenían claro el por qué, se procedió a hacer la explicación del concepto de la regla del producto basada en la experiencia vivida en el juego de la siguiente forma:

Cada grupo debe escoger como vestir a su compañero, para esto, tiene 4 opciones de pantalones, 4 camisas y 3 pares de zapatos, entonces ¿de cuántas pueden realizar dicha escogencia?

La tarea es vestir a Carlos o a María con un pantalón, una camisa, y un par de zapatos, entonces el primer paso es escoger el pantalón (tarea 1) del cual tengo 4 opciones, después de realizada esta selección puedo escoger la camisa (tarea 2), teniendo 4 opciones para hacerlo y por último puedo escoger entre las 3 opciones de pares de zapatos (tarea 3). Como las tareas son dependientes y consecutivas, entonces el número de atuendos que se pueden hacer es $4 \times 4 \times 3 = 48$.

Para que lo visualizaran mejor se explicó mediante el siguiente diagrama de árbol. Además se explicaron los conceptos de manera formal:

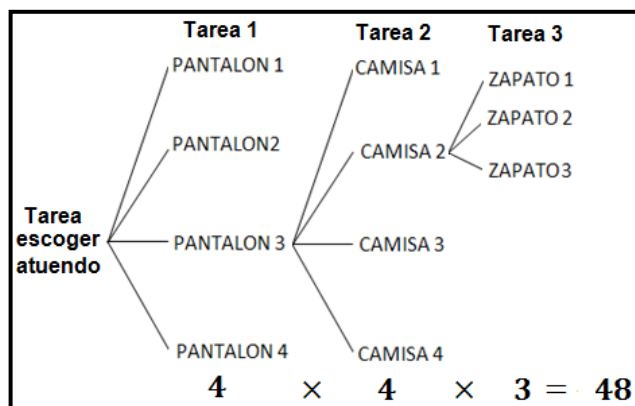


Figura 9: Diagrama de árbol para visualizar algunos de los 48 atuendos.

Con estas actividades los estudiantes, empezaron a percibir los juegos como medios atractivos para acercarse a conceptos matemáticos formales, también estimularon su motivación, desenvolvimiento y el desarrollo de las capacidades cognitivas encaminadas en un proceso positivo hacia su aprendizaje.

3.2.3 Juego alcanzando una estrella

El juego consiste en responder correctamente las preguntas que contiene cada una de las estrellas elaboradas ya sea en cartulina, cartón o papel, sobre cualquier área del conocimiento humano, como matemáticas, lengua, ciencias etc.



Figura 10: Juego alcanzando una estrella.

Objetivos:

- Utilizar el juego alcanzando una estrella para que el estudiante refuerce los conceptos de la regla de la suma y la regla del producto.

- Familiarizar al estudiante con la aplicación de los dos conceptos para resolver un problema.

Materiales:

- Estrellas de colores, que contendrán unas preguntas.
- Juego clásico del dominó.

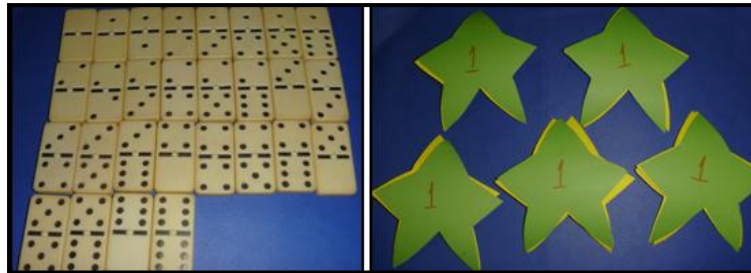


Foto 12: Materiales juego alcanzando una estrella y el dominó.

Cada grupo dispone de cinco estrellas las cuales contienen unas preguntas que los estudiantes deberán responder basados en las características de las fichas del juego del dominó, cada pregunta conduce a la solución del *problema del dominó* el cual consiste en

¿De cuantas formas se pueden escoger dos fichas de dominó, de las 28 que hay, de forma que se puede aplicar una a la otra (es decir, que podamos formar una pareja⁴ con las fichas)?

Por medio de este juego el estudiante podrá resolver un problema de conteo que involucra los dos principios básicos de la suma y el producto.

Reglas del juego

- Reunirse en grupos de dos personas.
- Analizar el juego del dominó.
- Responder en una hoja la primera pregunta que se les formulará después de analizar el juego, para acceder a la primera estrella.

⁴ Por ejemplo la ficha 1-3 y la ficha 3-4 formarían una pareja porque comparten el 3.

- Para acceder a cada una de las estrellas siguientes, deben responder las preguntas correspondientes.
- El puntaje de cada respuesta se obtiene de la siguiente forma:
 - ❖ El primer grupo en responder correctamente⁵ la pregunta obtendrá 5 puntos, el segundo obtendrá 4 puntos y así sucesivamente.
 - ❖ Si el grupo responde de forma incorrecta la pregunta, podrá acceder a la siguiente estrella y solo obtendrá 1 punto.
- El grupo que al finalizar el juego tenga el mayor puntaje será el ganador.

3.2.3.1 Análisis del juego alcanzando una estrella

Al juego del dominó se le han hecho diversas modificaciones para reforzar el estudio de algunos temas en matemáticas como las fracciones, sumas, restas, potencias, raíces, entre otras, como se observa en la figura 11.



Figura 11: Variantes del juego dominó.

A continuación analizaremos como el uso del juego clásico del dominó puede reforzar los conceptos básicos del conteo.

Etapas 1: Experimentando con las estrellas.

Para dar inicio, se conformaron grupos de dos personas y se pusieron a su disposición las fichas del dominó para que realizaran el respectivo análisis sobre las características de las mismas.

⁵ La respuesta debe tener un procedimiento lógico para ser considerada como correcta.



Foto 13: Identificando las características de las fichas del dominó.

Seguido a esto se formuló la primera pregunta que debían responder correctamente para acceder a la primera estrella.

❖ ¿Cuántas fichas tiene el domino?

Esta pregunta no tuvo ningún grado de dificultad para los jugadores, porque los cinco grupos la respondieron correctamente, accediendo de esta forma a la primera estrella.

La competencia creada por los grupos, destacó la capacidad de liderazgo de algunos estudiantes, que proporcionaron ideas fundamentales para la solución de las preguntas, acercándose a lograr su principal objetivo el cual era obtener la victoria del juego.

Por otro lado la falta de comunicación y trabajo colaborativo en otros grupos ocasionó que los integrantes de los mismo se empezaran a desanimar y no procuraban autocorregirse para seguir en la competencia. Al ver que otros compañeros ya habían culminado con la actividad, respondían por inercia las preguntas, obteniendo resultados incorrectos que los alejaba de su propósito inicial que era ganar.

Etapa 2: Reforzando los conceptos de la regla de la suma y del producto.

Las estrellas proporcionadas a los grupos tenían las siguientes preguntas:

- ❖ **Estrella 1:** ¿Cuántas fichas dobles tiene el domino?
- ❖ **Estrella 2:** ¿Cuántas fichas con número diferente (por ejemplo 0-5, 1-3, etc.) tiene el domino?
- ❖ **Estrella 3:** ¿Si pongo en juego una ficha doble, cuántas fichas le puedo asociar a ésta?
- ❖ **Estrella 4:** ¿Si pongo en juego una ficha con números diferentes, cuantas fichas le puedo asociar a ésta?
- ❖ **Estrella 5:** ¿De cuantas formas se pueden escoger dos fichas de dominó, de las 28 que hay, de forma que se puede aplicar una a la otra (es decir, que podamos formar una pareja con la fichas)?

Cada una de estas preguntas se formularon con el fin de encaminar a los estudiantes a la solución del *problema del dominó*.

A continuación se presentará un análisis de cada uno de las respuestas obtenidas en el juego.

Análisis de respuestas

A medida que las preguntas aumentaban su grado de dificultad, disminuía la cantidad de grupos que respondía correctamente, como se puede observar en la tabla 5.

Pregunta	Respuesta correcta	Respuesta incorrecta
1	3	2
2	3	2
3	2	3
4	2	3
5	1	4

Tabla 5: Registro de respuestas para el juego alcanzando una estrella.

Estos resultados se atribuyen a que los estudiantes no comprendieron el grado de dependencia que tenían las preguntas es decir, si se responde incorrectamente la primera pregunta es muy posiblemente que se tendrá una solución errónea para la siguiente, como se muestra en la figura 12,

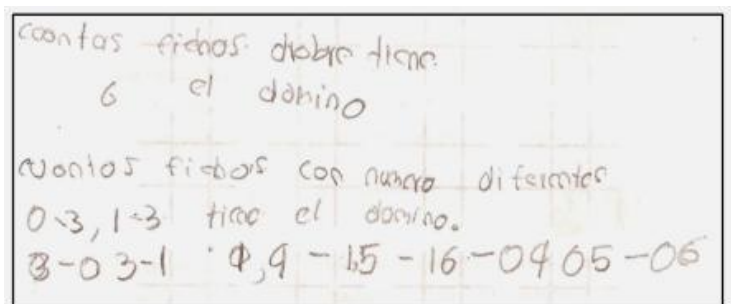


Figura 12: Respuestas para la primera y segunda estrella.

Lo mismo ocurrió para la tercera y cuarta pregunta donde solo el grupo 2 y 3 emplearon un procedimiento adecuado para responderlas, el cual consistía en aplicar la regla del producto como se muestra en la figura 13.

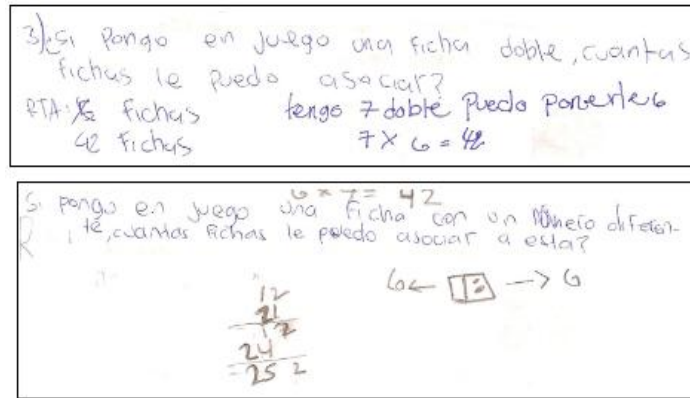


Figura 13: Respuesta correcta para las estrella 3 y 4.

Es importante resaltar que solo la pareja del grupo 3 logro dar solución al problema del dominó, usando la información que había obtenido con las respuestas de las preguntas anteriores y aplicando la regla de la suma.

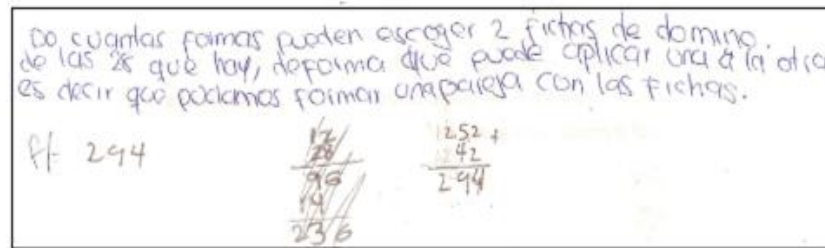


Figura 14: Solución al problema del dominó dada por el grupo 3.

Mediante esta actividad fue posible concluir que el juego proporciona grandes ventajas en el aprendizaje de los estudiantes, pero cuando se enfrentan a problemas que requieren de análisis lógico y matemático, demuestran las falencias que tiene para poner en práctica los conceptos aprendidos y analizar los problemas a los que deben dar solución.

En este punto del proyecto se evidencio un desempeño positivo de los cuatro estudiantes que conformaban los grupos 2 y 3, porque se involucraban y se acoplaban a los diversos problemas aplicados, para dar solución, desarrollando paulatinamente su capacidad analítica.

Al finalizar la actividad y al socializar las respuestas de cada pregunta los estudiantes pudieron observar cómo se combinaba la regla de la suma y del producto para resolver problemas, entendieron la importancia de tener clara las reglas del juego para así poder aplicar una estrategia basada en las mismas.

3.2.4 Juego de las sillas musicales.

El juego de las sillas musicales es un juego competitivo utilizado en animación sociocultural o dinámica de grupos, como juego de conocimiento, en el que la música marca el ritmo y la emoción.



Figura 15: Juego tradicional de las sillas musicales.

Objetivo:

Utilizar el juego de las sillas musicales como recurso didáctico para que el estudiante descubra y aprenda el concepto de permutación sin repetición.

Materiales

- Sillas enumeradas.
- 2 pliegos de papel.
- Marcadores.

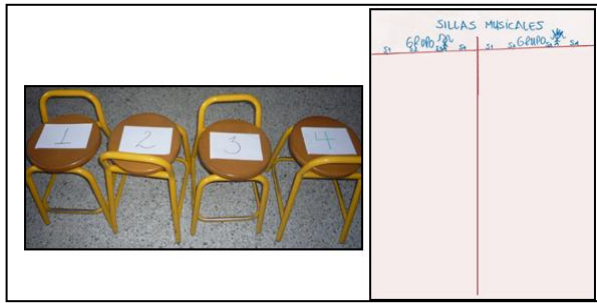


Foto 14: Materiales para el juego sillas musicales.

Se formaron grupos de cinco estudiantes, los cuales deben escoger a un integrante que obrará como juez del grupo contrario; Las sillas estarán enumeradas y dispuestas en hilera como se aprecia en la foto 14.

La forma de jugar será la siguiente, para iniciar solo un jugador de ambos grupos dará vueltas alrededor de las sillas cada vez que suene la música, al momento de detenerla deberá sentarse rápidamente en una silla. Cada grupo debe buscar la forma de obtener cuatro puntos en esta primera etapa, puntos que serán otorgados por los jueces de la siguiente forma: para obtener el primer punto el jugador debe sentarse en cualquier silla, para conseguir el segundo punto deberá sentarse en una silla diferente a la anterior, si decide sentarse en la misma no obtendrá puntos y seguirá jugando hasta que realice los cuatro arreglos que se pueden obtener, es decir, hasta que el juez registre en el papel la letra inicial del nombre del jugador en cada una de las sillas. Los demás jugadores deben estar concentrados en los registros que haga el juez para ayudar a su compañero a ganar dichos puntos.

Al tener los cuatro arreglos registrados, podrá pasar a la siguiente fase en donde entrará a concursar un segundo jugador del grupo, de forma análoga los dos deberán hacer los diferentes arreglos de ordenar dos sillas de las cuatro que se encuentran en juego. Para que los jugadores no se confundan, los jueces realizarán los registros en una tabla como la que se muestra a continuación.

		SILLAS MUSICALES									
		GRUPO 1				GRUPO 2					
		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄		
1pnt	✓	D			E	L	S			✓	1pnt
1pnt	✓	E	D					L	S	✓	1pnt
1pnt	✓			D	E	S	L			✓	1pnt
0pnt	✗			D	E		L	S		✓	1pnt
1pnt	✓			E	D			S	L	✓	1pnt

Tabla 6: Registro de los arreglos con las sillas y los puntos (pnt) otorgados.

En este caso nos interesa identificar los arreglos de dos sillas ocupadas por dos estudiantes (en el orden D y E), de las cuatro que hay. Por ejemplo, de la tabla 6, el primer arreglo del grupo 1 es $\{S_1, S_4\}$, correspondientes a la silla 1 y silla 4, mientras que el tercero es $\{S_3, S_4\}$. Además observe que el cuarto arreglo que obtiene el grupo 1 es igual al tercero, por lo tanto este no se cuenta (no da punto). Por otro lado vamos a distinguir los arreglos tres $\{S_3, S_4\}$ y cinco $\{S_4, S_3\}$, debido a que en el tercero D se encuentra sentado en la silla 3 y E en la silla 4, mientras que en el quinto E es quien se encuentra sentado en la silla 3 y D en la silla 4, como se muestra en la figura 16

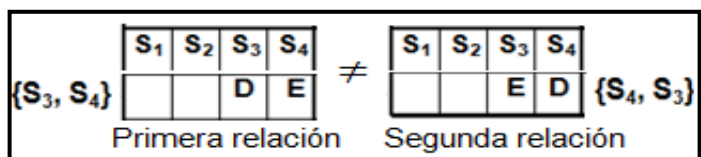


Figura 16: Análisis de los registros para el juego.

Al completar los doce arreglos que se pueden obtener de ordenar dos elementos de un conjunto de cuatro elementos. Se procederá a que entren a jugar todos los participantes, en este caso los cuatro jugadores. El primer grupo que tenga todos los arreglos de cada una de las etapas será el ganador.

Reglas del juego

Para realizar este juego se necesitan tantas sillas como personas haya y música que se pueda iniciar y parar a voluntad.

- Se colocan las sillas formando una línea.
- Entran a jugar la cantidad de estudiantes que indique cada fase.
- Cuando empiece a sonar la música, los jugadores deben girar alrededor de las sillas siguiendo el ritmo. En el momento que pare la música, cada uno deberán sentarse en una de las sillas.
- Los jugadores deben buscar la forma de realizar todos los arreglos diferentes para obtener los puntos de cada una de las fases.

3.2.4.1 Análisis del juego de las sillas musicales

En la quinta sesión los estudiantes ya se mostraban más interesados, destacando la responsabilidad y el deseo de participar en los juegos propuestos. Con este juego se pretendía que los estudiantes descubrieran el concepto de permutaciones sin repetición, con ayuda del método ensayo y error⁶ proporcionado por el mismo juego, puesto que los únicos que sabían cuales eran los arreglos correctos eran los jueces de cada grupo.

Etapas 1: Experimentando con las sillas.

Se inicio con la explicación detallada de las reglas del juego, los estudiantes tenían claro que cada integrante del grupo debía sentarse en una de las cuatro

⁶ Es un método usado en las ciencias exactas y consiste en que se prueba una opción y si funciona se encuentra una solución, si no es así se denomina un error.

sillas en el momento que dejara de sonar la música y que un juez que registraría los arreglos.

Fase 1: Un jugador alrededor de las sillas.

Los dos grupos parten con un solo integrante moviéndose alrededor de las sillas, el cual con la ayuda de sus compañeros de juego, debían buscar la forma de obtener los cuatro puntos.

A medida que avanzaba la actividad, los estudiantes descubrieron de forma intuitiva como ganar dichos puntos, obteniendo rápidamente los cuatro arreglos que necesitaban para pasar a la siguiente fase, los cuales eran.

$$\{s_1\}, \{s_2\}, \{s_3\}, \{s_4\}, (s_1 = \text{Silla 1}).$$

Fase 2: Dos jugadores alrededor de las sillas.

La experiencia proporcionada en la fase 1, permitió que los jugadores entendieran, como debían elegir la silla para sentarse cada vez que se detuviera la música. En esta fase era indispensable que los integrantes de cada grupo estuvieran pendientes de los diferentes registros que los jueces hacían en el cartel, para no repetirlos. A pesar de tener claro la forma en cómo debían jugar, los dos grupos cometían el error de realizar un mismo arreglo más de dos veces como se muestra en la figura 16.

SILLAS MUSICALES

GRUPO 1				GRUPO 2			
SI	SA	SA	SA	SI	SA	SA	SA
1	D			D			
2	D			D			
3	D			D			
4	D			D			
5	D			D			
6	D			D			
7	D			D			
8	D			D			
9	D			D			
10	D			D			
11	D			D			
12	D			D			
13	D			D			
14	D			D			
15	D			D			
16	D			D			
17	D			D			
18	D			D			
19	D			D			
20	D			D			
21	D			D			
22	D			D			
23	D			D			
24	D			D			
25	D			D			
26	D			D			
27	D			D			
28	D			D			
29	D			D			
30	D			D			
31	D			D			

Figura 17: Registro de los arreglos hechos por los estudiantes.

Debido a esto el grupo dos tardó mucho en encontrar los arreglos que faltaban, dando gran ventaja a su contrincante.

Fase 3: Todos los jugadores alrededor de las sillas.

Dado que incrementó el número de jugadores alrededor de las sillas, los dos grupos se demoraron en identificar la cantidad de arreglos que faltaban para ganar el juego. Por esta razón, teniendo en cuenta lo que plantea Piaget “el niño al sentirse en un ambiente de libertad, podrá tener la opción de crear sus propias reglas, adquiriendo de esta forma una gran confianza y seguridad en sus acciones” se les permitió realizar una reunión de grupo para que analizaran los errores que estaban cometiendo.



Foto 15: Estudiantes participando en el juego sillas musicales.

Los estudiantes del grupo 1 identificaron las sillas que debían ocupar y de esta forma ser los ganadores del juego, en la figura 18 se muestra algunos de los registros realizados por los jueces para esta fase.

The image shows a handwritten table titled "SILLAS MUSICALES" (Musical Chairs). The table is divided into two main sections by a vertical line, labeled "GRUPO 1" (with a stick figure icon) on the left and "GRUPO 2" (with a stick figure icon) on the right. Each section has four columns representing chairs, labeled S1, S2, S3, and S4. The rows are numbered from 1 to 34. Each cell in the table contains a letter (D, V, E, O, L, J) and a checkmark (✓) or an 'x' mark, indicating the seating arrangement for each participant in each round.

Figura 18: Arreglos para 4 participantes en juego.

Etapa 2: Conceptualizando las permutaciones sin repetición.

En esta etapa según los registros realizado en el juego los estudiantes debían responder las siguientes preguntas:

- ¿De cuántas formas te puedes sentar en las cuatro sillas numeradas?
- ¿De cuantas formas diferentes se pueden sentar dos personas en cuatro sillas numeradas?
- ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar cuatro personas en cuatro sillas?
- ¿Qué características observas en los arreglos?

Para las tres primeras preguntas los estudiantes simplemente contaron los arreglos que se habían obtenido en cada una de las fases del juego como se muestra en la siguiente figura.

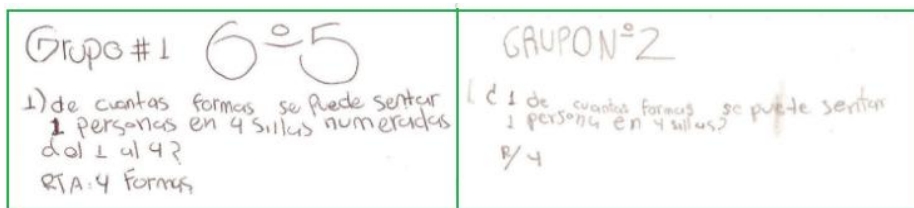


Figura 19: Ejemplo de respuestas para la pregunta 1.

Para dar respuesta a la última pregunta los estudiantes debían analizar las características de los arreglos, de forma llegaron a conclusiones como las que se presentan a continuación.

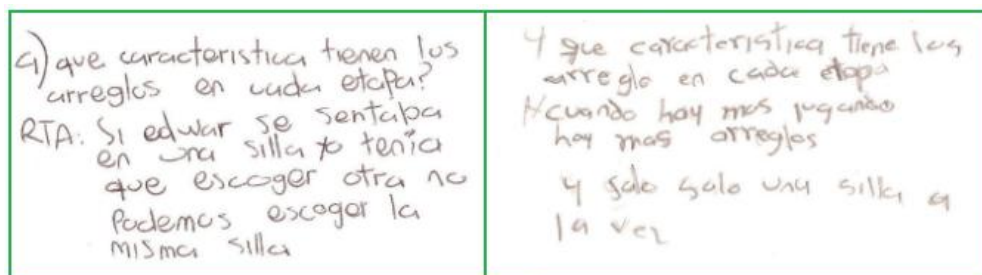


Figura 20: Respuesta para la pregunta 4.

A través de estas respuestas es posible percibir que los estudiantes entendían de forma implícita el concepto de permutaciones sin repetición. Durante la socialización de las respuestas, corroborando la percepción anterior, un participante del grupo ganador comento “si yo me siento en la silla 1 y Duvan en la silla 2, eso es diferente a decir que Duvan se sentó en la silla 1 y yo en la silla 2”. Es importante resaltar que este estudiante en la mayoría de las actividades, fue poco participativo, pero en esta actividad demostró interés dando aportes significativos a su grupo ayudándolos a obtener la victoria.

Al observar que los estudiantes tenían claro las condiciones que se cumplen al momento de realizar permutaciones sin repetición se procedió a explicar el concepto basados en el juego, de la siguiente forma.

Para la primera etapa como tenemos 4 sillas diferentes, y un jugador para sentarse, las permutaciones posibles en este caso son:

$$\{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_4\}$$

Estos arreglos se pueden obtener utilizando la siguiente fórmula:

$$P_4^1 = \frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 4.$$

Ahora que ocurre cuando hay dos jugadores que desean sentarse en las sillas, los posibles arreglos que obteníamos eran:

$$\{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_1, S_4\}, \{S_2, S_1\}, \{S_2, S_3\}, \{S_2, S_4\}, \{S_3, S_1\}, \{S_3, S_2\}, \{S_3, S_4\}, \{S_4, S_1\}, \{S_4, S_2\}, \{S_4, S_3\}$$

Pero estos arreglos los podemos contar de una forma más rápida y cómoda, utilizando la formula anterior.

$$P_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12.$$

En el último caso todos los jugadores iban a escoger entre las cuatro sillas para poder sentarse veamos por qué aumenta la cantidad de arreglos.

Es decir si uno de los jugadores se sienta en la silla 1, quedarían tres sillas para escoger, si otro jugador desea sentarse en la silla 2, sólo quedarían dos sillas disponibles y así sucesivamente, como se puede observar las opciones de escoger sillas van disminuyendo. Por lo cual lo podemos plantear de la siguiente forma: $P_n = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$. Es decir $P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Los estudiantes aprendieron por medio del descubrimiento y el método de ensayo y error que existe el concepto de permutaciones sin repetición, gracias a que la actividad fue muy recreativa y sirvió para que construyeran un nuevo conocimiento.

3.2.5 Juego del twister.

El juego twister está conformado por una gran malla plástica la cual es extendida en el suelo. La malla tiene cuatro filas de círculos de colores: rojo, amarillo, azul y verde. Una persona es eliminada cuando cae o cuando su codo o rodilla toca la malla. No hay límite de cuantos pueden jugar en una partida.



Figura 21: Juego tradicional del Twister

Objetivo:

Utilizar el juego twister como recurso didáctico para que el estudiante descubra y aprenda el concepto de permutaciones con repetición.

Materiales

- Tres juegos de twister grandes.
- Balotas con tres colores diferentes.



Foto 16: Juego del twister.

Para el juego se contó con tres mallas de papel que tenían tres filas de círculos de colores rojo, amarillo y verde, y una urna que contenían 9 balotas, tres, de cada uno de colores de la malla del twister que servirán para la elección de los arreglos a jugar.

De los 10 estudiantes será escogido uno al azar, el cual tendrá la tarea de escribir en el tablero los diferentes arreglos que se conforman según las balotas que se extraigan de la urna, con los demás estudiantes se conformaran 3 grupos los cuales jugarán sobre las mallas, el jugador que esté registrando los arreglos también podrá participar en el juego siguiendo las reglas del mismo. El juego terminará cuando se hayan jugado todos los posibles arreglos que se pueden hacer con tres colores diferentes, con la posibilidad de repetir el color.

Reglas del juego.

- Cada malla contará con tres jugadores.
- Se sacará al azar tres balotas de la urna y se anotará en el tablero el arreglo obtenido y se devolverán las balotas a la urna, por ejemplo:

$$\{\text{rojo, verde, amarillo}\} = \{R, V, A\}$$

El orden de los colores del arreglo depende del orden en que salgan las balotas.

- Los jugadores que están sobre las mallas deben ubicar sus extremidades en los colores escogidos de las balotas siguiendo esta condición: cada integrante del grupo deberá utilizar una extremidad diferente, el estudiante que no cumpla esta condición saldrá de la malla y tomará el lugar de quien este registrando los arreglos.

- Los estudiantes deben estar atentos de los arreglos que se registren, porque es muy probable que estos se repitan, si esto ocurre y el juez es el primero en darse cuenta, este tendrá la oportunidad de cambiar su lugar con cualquier jugador.
- Para conservar su puesto en la malla, los jugadores deberán darse cuenta de los arreglos que se repiten antes de que el juez los señale.
- El primer grupo que se dé cuenta que no se puede hacer ningún arreglo nuevo y cante Twister será el ganador.

3.2.5.1 Análisis del juego del twister

Para el desarrollo de esta actividad los estudiantes trabajaron en equipo con el fin del intercambio de ideas, conocimientos y por supuesto estrategias para ser los ganadores del juego.

En este caso la pregunta que los estudiantes podrán responder jugando Twister es ¿Cuántos arreglos de tres colores se pueden formar si se permite repetir color? Reconociendo la diferencia entre una permutación sin repetición y una permutación con repetición.

El problema consiste en contar las selecciones ordenadas de los colores del conjunto $\{\text{rojo, amarillo, verde}\}$ si se permite repetir los colores.

Etapa 1: Experimentando con el twister.

El juego dio inicio con una breve explicación de las reglas, ya que era necesario para el buen desarrollo del mismo, se escogió al azar al juez, quien registraría los arreglos, seguido de esto se realizaron los grupos de tres estudiantes. En el transcurso de la explicación de las reglas se notó que muchos de los estudiantes ya estaban planeando las estrategias de juego, tenían muy claro que cada uno

debía usar una extremidad diferente para tocar los colores, y que debían estar pendientes de los arreglos para no salir de la malla y ser el juez. En este juego se resalta lo siguiente:

Dos de los tres grupos basaron sus estrategias en el trabajo cooperativo, se repartieron responsabilidades, mientras uno de ellos estaba pendiente de las extremidades que utilizaban sus compañeros de grupo, los otros dos estudiantes observaban los arreglos para identificar si se repetían o no. El otro grupo no logró vincularse ni crear una estrategia para el juego, en muchas ocasiones dos de los integrantes del grupo utilizaban la misma extremidad, razón por la cual uno de ellos, debía salir del juego y convertirse en el juez.



Foto 17: Estudiantes jugando Twister.

La siguiente imagen muestra la forma como registraron los diferentes arreglos, que les servirían de base para la etapa dos del juego.

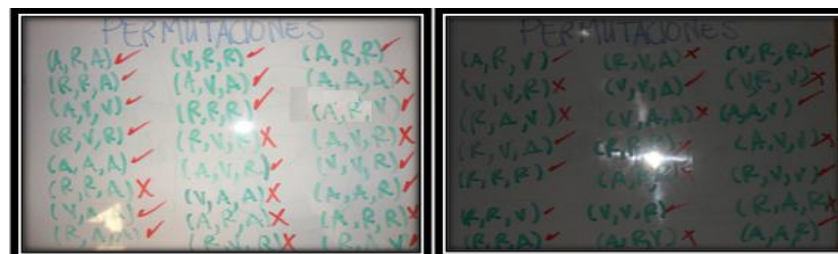


Foto 18: Permutaciones con repetición

El grupo ganador demostró más organización, seriedad, compromiso con el trabajo y ante todo propiedad y seguridad de lo que estaban realizando. Se resalta

en los dos grupos la colaboración de los integrantes por sacar adelante el juego y obtener los mejores resultados.

Etapa 2: Conceptualizando las permutaciones sin repetición.

Al finalizar la esta experimental se realizaron las siguientes preguntas.

- ¿De cuántas formas se puede ordenar los colores del conjunto $\{\text{rojo, amarillo, verde}\}$ si se permite repetir color?
- ¿De cuántas formas se puede ordenar los colores del conjunto $\{\text{rojo, amarillo, verde}\}$ sin repetir color? ¿Cuáles fueron los arreglos que contaste?
- ¿Qué diferencia encuentras entre una permutación sin repetición y una permutación con repetición?

Para la primera pregunta los estudiantes realizaron el conteo de los registros correctos que había en el tablero dando la siguiente respuesta.

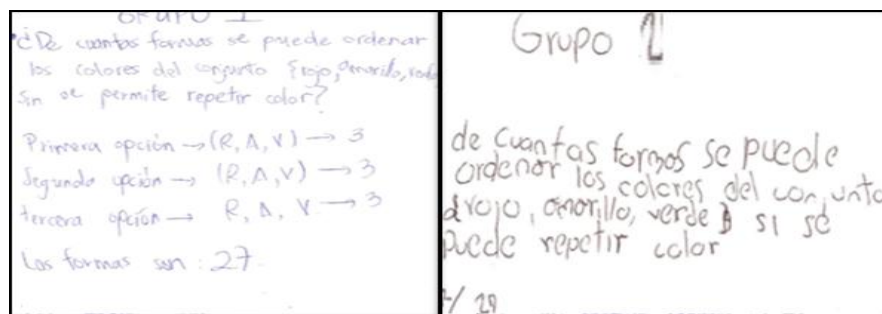


Figura 22: Respuesta a la pregunta 1.

En la segunda pregunta los estudiantes lograron dar solución al problema planteándolo como se observa en la figura 23, demostrando tener claro el concepto de permutaciones sin repetición.

<p>2) de cuantas formas se puede ordenar los colores del conjunto {rojo, amarillo, verde} sin repetir color? Cuales fueron los arreglos que contaste</p> <p>RTA: 6 formas. Las que no tienen colores repetidos</p>	<p>de cuantas formas se puede ordenar los colores del conjunto {rojo, amarillo, verde} si se puede repetir color Cuales arreglos contaste</p> <p>{r,r,v} {r,v,r} {r,v,v} {v,r,r} {v,r,v} {v,v,r} son 6.</p> <p>que diferencia hay entre permutaciones con repeticion y sin repeticion</p>
--	---

Figura 23: Respuesta para la pregunta 2.

La última pregunta como se observa en la figura 24 gran parte de los estudiantes entendieron la diferencia de las dos permutaciones.

<p>3) que diferencia encuentras entre una permutacion sin repeticion y una permutacion con repeticion</p> <p>en una con repeticion hay mas arreglos que en una sin</p>	<p>que diferencia hay entre permutaciones con repeticion y sin repeticion</p> <p>En una los colores se repite</p>
--	---

Figura 24: Conclusiones obtenidas en la pregunta 3.

Al tener claro como ordenar los arreglos con o sin repetición se intervino explicando de forma detallada que para escoger el primer color se tenía 3 posibilidades, para escoger el segundo color se tiene 3 posibilidades y para escoger el último color se vuelve a tener 3 posibilidades. Es decir usando el concepto formal de las permutaciones con repetición, tenemos.

$$PR_n^k = n^k,$$

tenemos

$$PR_3^3 = 3^3 = 27$$

En este juego los aspectos positivos que se deben destacar de los estudiantes son: su agilidad mental, la capacidad de seguir las reglas, la aceptación de las penitencias que en este caso era ser el juez, la seriedad y agrado con la que participaron en el juego, los estudiantes demostraron haber alcanzado un aprendizaje significativo con los juegos que se habían aplicado hasta el momento, porque cada análisis que realizaban lo hacían, relacionando los conceptos enseñados en cada una de las actividades, reafirmando lo expresado por Piaget

“una enseñanza activa y personalizada requiere por parte del maestro la utilización de técnicas y recursos didácticos que faciliten a cada alumno los instrumentos necesarios para investigar, estudiar y un último término aprender haciendo”.

3.2.6 Juego la máquina de las combinaciones.

La máquina de las combinaciones se juega empleando vasos desechables, que facilitan el conteo de todas las parejas que se pueden formar partiendo de los nombres que se presentan sobre el material ilustrado en la siguiente imagen.



Figura 25: Máquina de las combinaciones.

Objetivos:

- Utilizar la máquina de las combinaciones para que los estudiantes construyan el concepto de combinaciones sin repetición.
- Identificar la diferencia entre una permutación y una combinación.

Materiales:

- 4 vasos desechables.
- En cada uno de los vasos se colocan etiquetas con los siguientes nombres: Ana, Andrea, Sergio, Marcos, Adán y María.
- Etiquetas de flechas que indican la orientación del giro.
- Tarjetas que indican los giros de las máquinas.

- Globos de cuatro colores diferentes.
- Pliegos de papel



Foto 19: Materiales juego la máquina de las combinaciones.

Se forman grupos de cinco personas y se sitúan los globos en cuatro puntos diferentes del salón, cada grupo tendrá un punto de salida y uno de llegada donde estarán situadas las dos máquinas de las combinaciones con sus respectivas tarjetas.

El juego consiste en llevar un globo del punto de salida al punto de llegada, realizada esta acción, se gira el vaso superior de la máquina según indique la primera tarjeta, seguido a esto, se memorizan todas las parejas que se forman, devolviéndose así al punto de salida con un globo del punto de llegada, por último se registra los arreglos memorizados de la siguiente forma.

COMBINACIONES	
Correctas	Descartada
$\{Ana, María\}$	$\{María, Ana\}$ $\{María, María\}$

Tabla 7: Tabulación de combinaciones y descartadas

Las parejas $\{Ana, María\} = \{María, Ana\}$ por lo cual una de ellas se registra en la columna de descartadas, si se obtiene una pareja donde se repite nombre ejemplo

{*María, María*} ésta también se ubica en la columna de descartadas. Al final solo se cuentan las parejas ubicadas en la columna de correctas.

En este juego los grupos usando la máquina de las combinaciones, identifica los arreglos que se pueden hacer al formar parejas con un conjunto de 6 elementos, visualizando la diferencia que hay entre una permutación y una combinación.

Reglas del juego

- Reunirse en grupos de 5 personas.
- Formar parejas dentro de los grupos, las cuales se turnarán para realizar los recorridos.
- El integrante que no tenga pareja, ayudará a su grupo a realizar los registros.
- Llevar cada una de los globos por parejas del punto de salida al punto de llegada y viceversa (de a un globo por recorrido), pasándolo el uno al otro, evitando que toque el piso
- Si el globo cae al piso antes de llegar a cada punto, la pareja deberá iniciar de nuevo.
- Dejar el globo en el punto de llegada y hacer las combinaciones según indiquen los giros, memorizarlas y devolverse con un globo al punto de partida.
- Registrar las parejas obtenidas con la máquina.
- El grupo ganador será el que descubra que no es posible formar nuevas parejas con la máquina de las combinaciones.

3.2.6.1 ANÁLISIS DEL JUEGO DE LA MÁQUINA DE LAS COMBINACIONES

El juego dio inicio con la explicación de las reglas y el uso de la máquina de las combinaciones, se realizaron ejemplos sobre las parejas que se podían obtener y la forma como debían registrarlas.

Etapas 1: Experimentando con el juego la máquina de las combinaciones.

Los estudiantes estuvieron muy atentos y mientras avanzaba la actividad iban identificando cuales arreglos debían ir descartando como se muestra en la foto 24.



Foto 20: Estudiantes registrando los arreglos de las combinaciones.

En esta actividad el grupo conformado por los niños tuvo un protagonista importante, no solo fueron los ganadores del juego sino que durante la actividad dejaron ver la capacidad de liderazgo y el desarrollo del pensamiento estratégico que habían desarrollado en el transcurso de todas las actividades propuestas. Desde el inicio del juego ya tenían claro la estrategia que aplicarían perfeccionándola en el transcurso de la actividad obteniendo el resultado deseado. Caso contrario con el grupo de las niñas, que se preocuparon por jugar con los globos olvidando memorizar las parejas que obtenían con la máquina, debido a su falta de organización y de concentración se demoraron en realizar los registros que necesitaban para ganar el juego.

Etapas 2: Conceptualizando las combinaciones sin repetición.

Al finalizar con el juego se les pidió que analizaran y contaran las combinaciones correctas para que respondieran las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas parejas se pueden formar con los nombres que tiene la máquina de las combinaciones, si el orden no importa y no se puede repetir nombre?
- En la pregunta anterior “si el orden no importa” ¿A qué crees que hace referencia?
- ¿Cuál es la diferencia entre una combinación y una permutación?



Foto 21: Estudiantes respondiendo las preguntas

Al contar todos los arreglos que los grupos tenían registrados, no demoraron en darse cuenta que la respuesta a la primera pregunta eran 15 arreglos como se muestra a continuación.

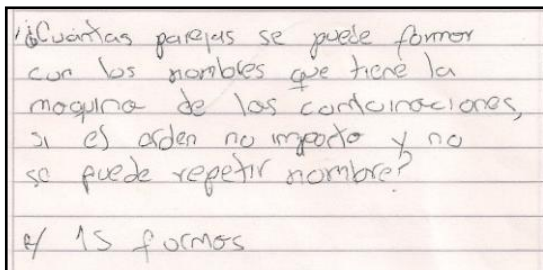


Figura 26: Respuesta correcta para la primera pregunta.

A través de las respuestas obtenidas en la segunda pregunta, se pudo visualizar que los estudiantes comprendieron de forma implícita una de las características principales de una combinación como se muestra a continuación.

<p>2 En la pregunta anterior, "si el orden no importa" ¿A que crees que hace referencia?</p> <p>R/ a los nombres.</p>	<p>En la pregunta anterior "si el orden no importa" ¿A que crees que hace referencia?</p> <p>A que si hay una pareja. {Maria, Andrea}...}</p> <p>{Andrea, Maria} son diferentes</p>
---	---

Figura 27: Respuestas para la segunda pregunta.

La forma en que se registraron los arreglos permitió a los estudiantes visualizar que la pareja $\{María, Ana\} = \{Ana, María\}$, facilitándoles de esta forma responder la última pregunta, donde proporcionaron respuestas como

<p>3 ¿Cuál es la diferencia entre una combinación y una permutación?</p> <p>R/ En una se tiene mas parejas en una que la otra.</p>	<p>¿Cuál es la diferencia entre una combinación y una permutación?</p> <p>En que la permutación importa el orden y la otra no.</p>
--	--

Figura 28: Respuestas para la tercera pregunta.

Por medio de este juego fue posible explicarles a los estudiantes, la diferencia entre una combinación y una permutación. Al dejar claro estos dos conceptos se dio inicio a la explicación de combinaciones sin repetición de la siguiente forma.

Como la máquina de las combinaciones tiene los siguientes nombres: Ana, Andrea, Sergio, María, Marcos y Adán entonces las parejas que se pueden hacer con estos nombres son:

$$\begin{aligned}
 &\{Ana, Andrea\}, \{Ana, Sergio\}, \{Ana, María\}, \{Ana, Marcos\}, \{Ana, Adán\} \\
 &\{Andrea, Sergio\}, \{Andrea, María\}, \{Andrea, Marcos\}, \{Andrea, Adán\} \\
 &\{Sergio, María\}, \{Sergio, Marcos\}, \{Sergio, Adán\}, \{María, Marcos\} \\
 &\{María, Adán\}, \{Marcos, Adán\}
 \end{aligned}$$

Para realizar el conteo de forma más rápida y cómoda de todas las parejas que se pueden formar con un conjunto de seis nombres de personas diferentes, sin

repetir nombre y sin importar el orden de los mismos, se puede aplicar la fórmula de las combinaciones sin repetición.

$$C_2^6 = \frac{6!}{2! \times (6-2)!} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

3.2.7 Juego contenedores de balotas

El contenedor de balotas se juega utilizando tres cajas cada una con tres balotas de un color en específico. Este juego permite realizar el conteo de todas las selecciones de balotas que se pueden hacer repitiendo el color y sin importar el orden de las mismas.



Figura 29: Juego contenedores de balotas

Objetivos

Utilizar el juego contenedor de balotas para que el estudiante construya y aprenda el concepto de combinaciones con repetición.

Materiales:

- 15 Cajas.
- 15 balotas verdes, 15 amarillas y 15 rojas.
- Conos.
- Tarjetas que contienen los recorridos.



Foto 22: Materiales juego contenedores de balotas.

El grupo se divide en parejas las cuales deberán realizar los recorridos que se les indique en las fichas de juego, dichos recorridos estarán escritos de la siguiente forma $\rightarrow \bigcirc \bigcirc \bigcirc \rightarrow$ donde la flecha indica siga y el círculo indica el número de balotas que debe coger de la caja, es decir

Caja 1	Caja 2	Caja 3
	$\rightarrow \bigcirc \bigcirc \bigcirc \rightarrow$	

Tabla 9: Registro de los recorridos.

Cuando la pareja recoja las balotas, deberá relacionar al frente de cada recorrido la combinación que hicieron y la registrará de la siguiente forma:

$\rightarrow \bigcirc \bigcirc \bigcirc \rightarrow = (\text{Azul, Azul, Azul})$
 $\bigcirc \rightarrow \bigcirc \bigcirc \rightarrow = (\text{Azul, Rojo, Rojo})$
 $\bigcirc \rightarrow \rightarrow \bigcirc \bigcirc = (\text{Azul, Verde, Verde})$

La pareja que tenga todos los recorridos será la ganadora.

Reglas del juego

- ✓ Los estudiantes formaran parejas (niño y niña)
- ✓ La pareja tendrá atados los pies.
- ✓ Los grupos deberán registrar cada una de las combinaciones realizadas en los diferentes recorridos.
- ✓ El ganador es la primera pareja que haya hecho todas las combinaciones dadas.

3.2.7.1 Análisis de juego contenedores de balotas

Se les explicó cómo debían hacer los recorridos y lo que significaba las flechas y los círculos, cuando comprendieron las reglas del juego se dio inicio con la competencia.

Etapa 1: Experimentando el juego contenedor de balotas

En esta última actividad los estudiantes realizaban un mejor trabajo en equipo, se complementaban el uno con el otro aportando ideas y estrategias que les permitiera tener éxito en el juego.



Foto 23: Estudiantes preparados para iniciar el juego, de izquierda a derecha, grupo 1, grupo2, grupo 3, grupo 4 y grupo 5.

A medida que avanzaba la actividad el grupo 1 se iba perfilando como el ganador del juego, debido a que gracias a su concentración ya tenían registradas la mayoría de las combinaciones que debían hacer, a diferencia de sus compañeros que perdían tiempo superando los obstáculos puestos en escena.

Etapa 2: Conceptualización de combinaciones con repetición

Al tener los arreglos en el tablero como se muestra en la fotos 28 cada grupo debía analizarlos y responder las siguientes preguntas

- ❖ ¿Cuántas flechas y cuántos círculos observas que hay en cada uno de los recorridos?
 - ❖ ¿Para llegar de la caja 1 a la caja 3, cuántas veces (flechas) debíamos movernos?
 - ❖ Si generalizaras la fórmula de obtener el número de flechas ¿Qué expresión matemática utilizarías?
- Ayuda:** El número de cajas se puede representar por n .
- ❖ ¿El número de círculos que está representando en las combinaciones que se obtuvieron en cada uno de los recorridos?



Foto 24: Registro de los grupos de cada uno de los arreglos.

La mayoría de los grupos respondieron correctamente las preguntas dadas, en este caso es importante resaltar la respuesta de la pregunta 3, los grupos intentaron generalizar la fórmula de la siguiente forma:

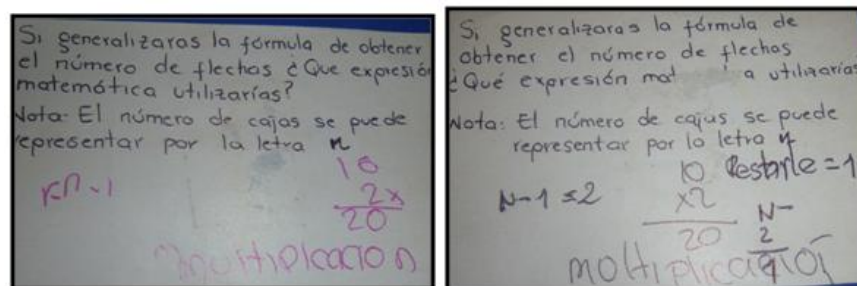


Figura 30: Algunas respuestas de los estudiantes.

Como se puede observar en la figura 32 los estudiantes intentaron dar una fórmula generalizada para obtener el número de flechas, se intervino para enseñarles basados en el juego, como obtener las combinaciones con repetición de un conjunto de la siguiente manera.

Como las combinaciones con repetición la podemos representar en flechas y círculos como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \rightarrow \circ \circ \circ \rightarrow &= (\text{Azul, Azul, Azul}) \\ \circ \rightarrow \circ \circ \rightarrow &= (\text{Azul, Rojo, Rojo}) \\ \circ \rightarrow \rightarrow \circ \circ &= (\text{Azul, Verde, Verde}) \end{aligned}$$

Si analizamos los arreglos siempre hay n círculos (balotas) y 2 flechas (hay que moverse 2 veces para ir de la caja 1 a la caja 3)

Así que en general hay $r + (n - 1)$ posiciones, y queremos que r de ellas tengan círculos.

Así en términos generales

$$\binom{n + r - 1}{r} = CR_n^r = \frac{(n + r - 1)!}{r!(n - 1)!}$$

Para nuestro juego tenemos tres cajas, la primera contiene 3 balotas verdes, la segunda 3 amarillas y la tercera 3 rojas, con las cuales queremos saber ¿De cuántas formas puedo escoger tres balotas repitiendo el color de las mismas?

Aplicando la fórmula de combinaciones sin repetición tenemos

$$\binom{3 + 3 - 1}{3} = CR_3^3 = \frac{(3 + 3 - 1)!}{3!(3 - 1)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

Esta actividad fue el último juego que se aplicó en el aula, todos los estudiantes estuvieron muy motivados y atentos, pero algunos estudiantes seguían manteniendo problemas para seguir instrucciones y trabajar en equipo.

En síntesis la experiencia vivida con estas actividades, permitió observar que en su esencia tienen una fundamentación como se expresó en el capítulo 1, cada juego fue de gran ayuda para el desarrollo del trabajo cooperativo, pensamiento estratégico y el pensamiento combinatorio. Los estudiantes se desenvolvían con más confianza, consolidaron sus relaciones cognoscitivas, afectivas, sociales, psicomotoras, su actitud crítica y su capacidad de liderazgo.

4. LA EFECTIVIDAD DEL JUEGO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El estudio de la matemática no consiste en solo en aplicar fórmulas y realizar operaciones básicas; se trata de aprender a contextualizar problemas, para hallarles solución, por eso es importante que el docente proporcione las bases necesarias que le permita al educando adquirir las nociones fundamentales de los procesos matemáticos y desarrolle la capacidad de relacionar la matemática con la realidad de su contexto social y académico.

Es común que los estudiantes presenten dificultades frente a la resolución de problemas matemáticos y son muy pocos los que logran superarlas, estas se pueden atribuir a factores como: El desconocimiento de operaciones matemáticas básicas; necesarias para un proceso de aprendizaje efectivo aplicable a la resolución de problemas y la baja comprensión de lectura. El juego es una herramienta didáctica efectiva que permite solventar dichas carencias.

En este capítulo a través de una prueba escrita se analizarán cada uno de los conceptos estudiados en las actividades expuestas en el segundo capítulo con el fin de verificar la efectividad del juego como recurso didáctico para acercar al estudiante a la planeación de estrategias, la asimilación de nuevas definiciones y la resolución de problemas.

4.1 TEST DE CONOCIMIENTO.

Se aplicó una prueba de resolución de problemas con el fin de identificar el nivel de desarrollo del pensamiento combinatorio en los educandos, teniendo como objeto verificar si los estudiantes tienen claros los conceptos desarrollados en cada uno de los juegos trabajados en el segundo capítulo sobre: la regla de la suma, regla del producto, permutaciones con repetición, permutaciones sin

repetición, combinaciones con repetición y combinaciones sin repetición. Para el desarrollo de esta guía se establecieron algunos aspectos como:

- Desarrollo individual de la guía.
- Comprensión de los conceptos estudiados a través de los juegos.
- Capacidad para contextualizar los problemas planteados.
- Reconocimiento de los datos.
- Respuestas de cada uno de los problemas.
- Socialización de los puntos de la guía.

La prueba contiene 13 preguntas, 4 de ellas se plantearon con 4 posibles respuestas (selección múltiple con única respuesta), las 9 restantes son preguntas abiertas. Para dar solución a cada una de las preguntas es necesario aplicar los conceptos matemáticos aprendidos a través de los juegos.

En el siguiente apartado se puede observar el análisis de las respuestas presentadas en histogramas de frecuencia. Se resaltarán los errores y aciertos hechos por los estudiantes en cada una de las preguntas

4.1.1 Análisis del test de conocimiento.

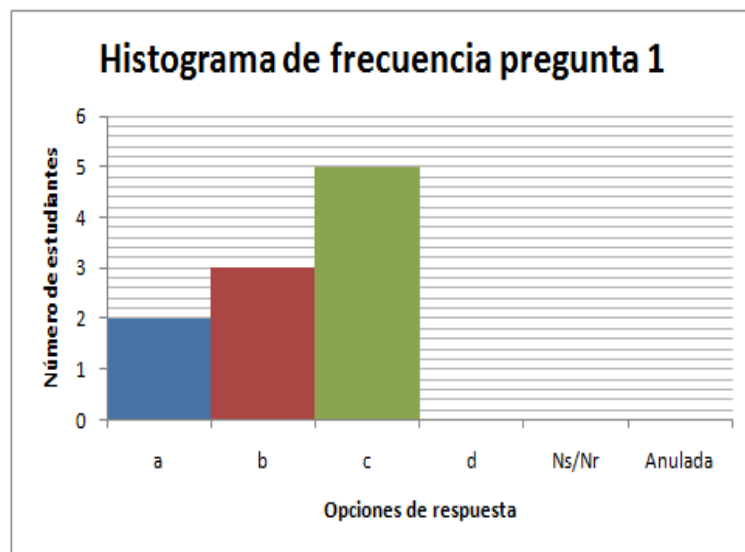
Pregunta No 1.

El concepto matemático que se asocia a la situación: “Carlos tiene 9 formas de realizar un viaje de Bucaramanga a Bogotá, porque salen 2 vuelos de avión, 3 trenes y 4 autobuses” es:

- a)** Regla del producto.
- b)** Permutación sin repetición.

- c) Regla de la suma.
- d) Combinación con repetición.

De los 10 estudiantes evaluados 5 asociaron el concepto de la regla de la suma con el problema planteado, haciendo argumentaciones como “si sumamos obtenemos el resultado correcto” o “si escojo un transporte ya no puedo escoger otro; los estudiantes restantes asociaron la solución del problema con una la regla del producto sin dar una argumentación a dicha respuesta.



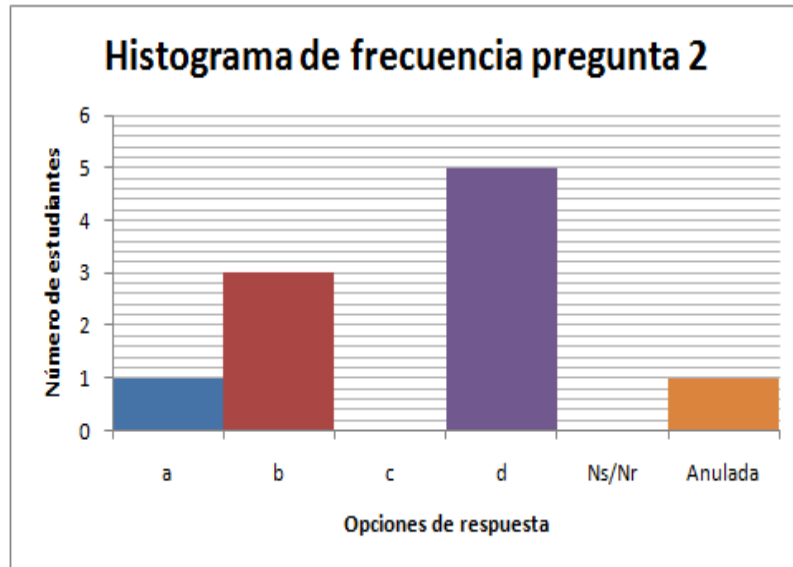
a	b	c	d	Ns/Nr	Anulada
2	3	5	0	0	0

Pregunta No. 2

Juan tiene una cita de negocios muy importante y no sabe cómo vestirse, en su armario tiene 4 pantalones negros, 3 camisas, una blanca, una azul y una verde, 2 pares de zapatos y un par de calcetines. ¿Cuántos atuendos posibles puede formar Juan con lo que tiene en su armario? ¿Cuál de los conceptos sirve para obtener la respuesta?

- a) Regla de la suma
- b) Regla del producto

- c) Permutación sin repetición
- d) Combinación sin repetición



a	b	c	d	Ns/Nr	Anulada
1	3	0	5	0	1

5 de los estudiantes, en la pregunta con opción de selección múltiple escogieron la respuesta errónea pero al momento de contar los atuendos, 4 de ellos realizaron el procedimiento correcto, el consistía en aplicar la regla del producto como se observa en la siguiente figura.

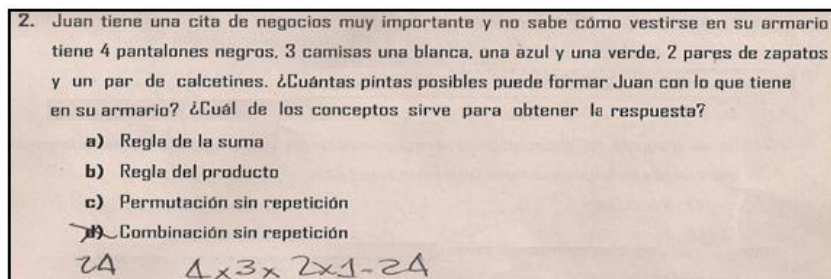
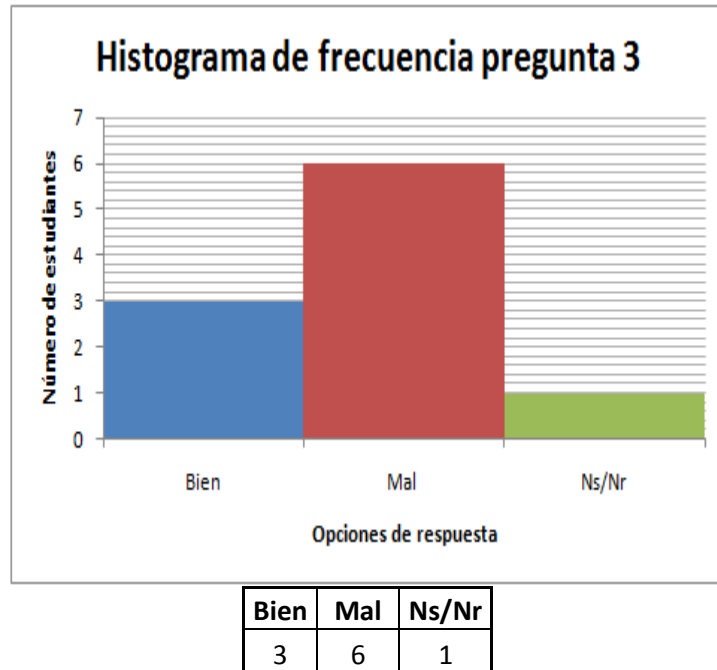


Figura 31: Respuestas para la pregunta 2.

Se puede afirmar que 7 de los 10 estudiantes realizaron el proceso correcto para la situación matemática planteada, teniendo claro cuándo debían aplicar la regla del producto.

Pregunta No. 3

Tres ciudades, designadas como Armenia (A), Bogotá (B) y Córdoba (C), están intercomunicadas por un sistema de carreteras de doble sentido. ¿De cuántas formas puede ir Juan de Armenia a Córdoba, pasando por Bogotá? ¿Cuáles conceptos debes aplicar para obtener la respuesta?



Los resultados en esta pregunta, refutaron la percepción obtenida en el punto anterior. Como se observa en el histograma, solo 3 de los 10 estudiantes ofrecieron una respuesta correcta argumentándola de la siguiente forma.

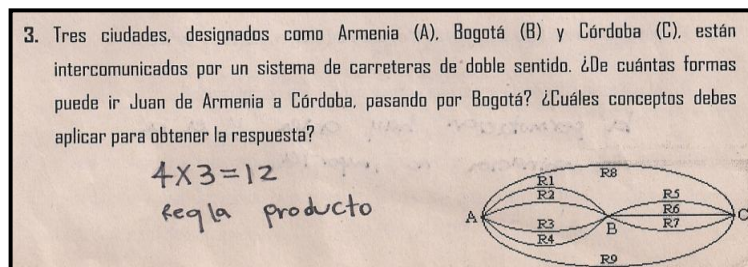


Figura 32: Respuesta correcta para la pregunta 3.

Para dar solución a los numerales 2 y 3 era necesario aplicar la regla del producto; en la pregunta 2 los resultados obtenidos fueron favorables debido a que los estudiantes ya habían experimentado dicho problema en el juego vistiendo a Carlos y María, por lo cual tenían una idea clara de cómo darle solución, pero, al presentarles una situación diferente como la ofrecida en el pregunta 3, no lograron relacionar el planteamiento de las dos situaciones, motivo por el cual no realizaron el debido análisis, ofreciendo respuestas incorrectas como las señaladas en la figura.

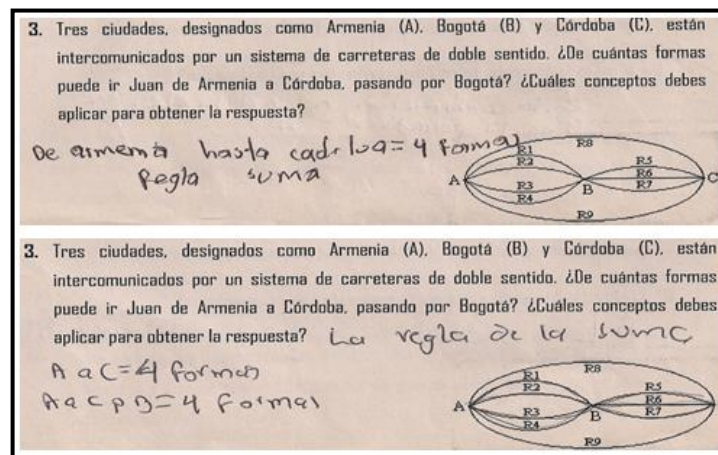
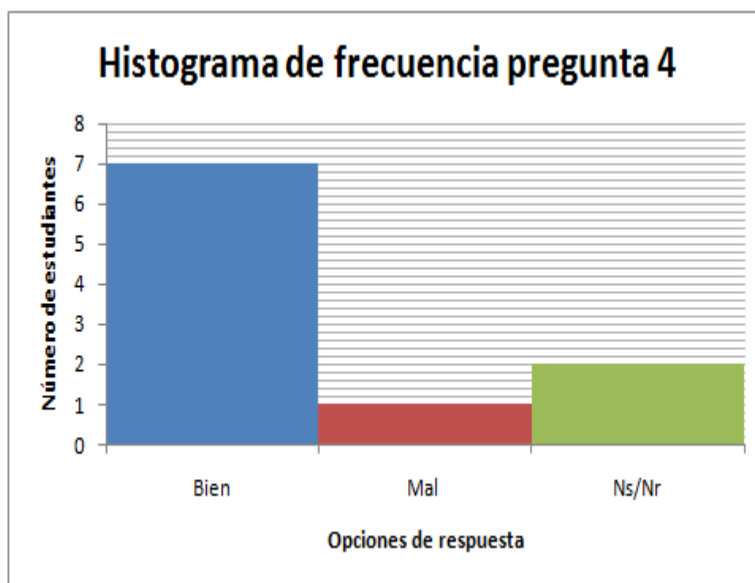


Figura 33: Respuestas incorrectas para la pregunta 3.

Pregunta No. 4

Completa el espacio

La regla del _____ está definida como: Supongamos que una tarea se puede dividir en tarea consecutivas. Si hay m formas de realizar una primera tarea y n formas de realizar una segunda tarea, entonces hay $m \times n$ formas de completar la tarea.



Bien	Mal	Ns/Nr
7	1	2

A pesar que los estudiantes tienen dificultades para aplicar la regla del producto a un problema determinado, es posible observar en el histograma que la mayoría de los estudiantes, tienen clara la definición formal de este concepto.

Pregunta No. 5

Cuatro amigos deciden ir al cine, ¿De cuántas formas pueden sentarse en una hilera donde hay cuatro sillas? ¿Cuál concepto aplicas para obtener la respuesta?

En esta pregunta se puede obtener la misma percepción que en los numerales 2 y 3; el problema planteado fue una situación que los estudiantes ya habían experimentado en el juego de las sillas musicales, motivo por el cual se les facilitó encontrar la solución correcta.

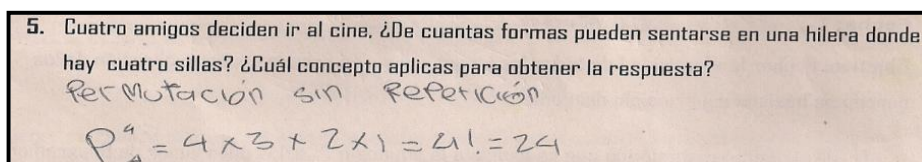
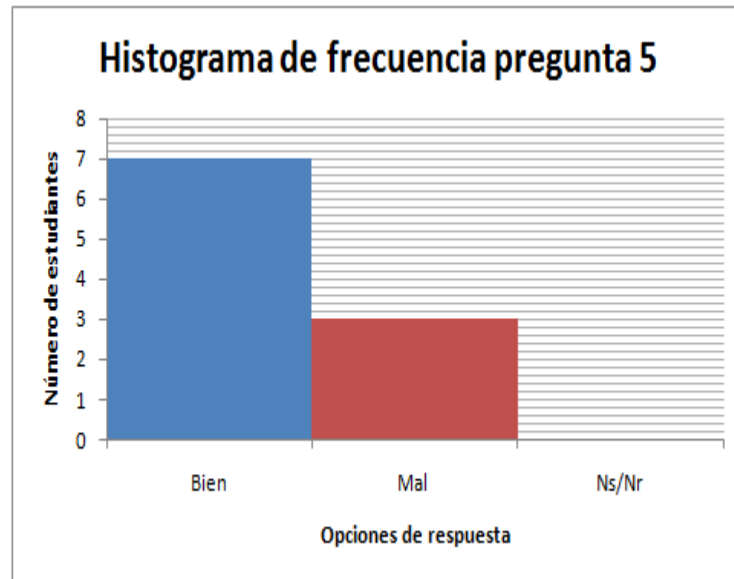


Figura 34: Respuesta correcta para la pregunta 5.

Como se muestra en el histograma la mayoría de los estudiantes acertaron al momento de responder dicha pregunta.



Bien	Mal	Ns/Nr
7	3	0

De las respuestas obtenidas en esta pregunta en particular, sobresale una ofrecida por un estudiante, que con su respuesta demuestra el enorme potencial que representa la aplicación de una metodología de enseñanza fundamentada en el juego como herramienta de aprendizaje, motivándolo a utilizar su intelecto para resolver un problema. El educando en el intento de dar una respuesta satisfactoria propuso su propia fórmula, ver figura 37, que aunque desacertada refleja el esfuerzo realizado para resolver la tarea propuesta, difícilmente se hubiera logrado un resultado similar utilizando metodología tradicional, donde probablemente el alumno se hubiera conformado con entregar una hoja en blanco.

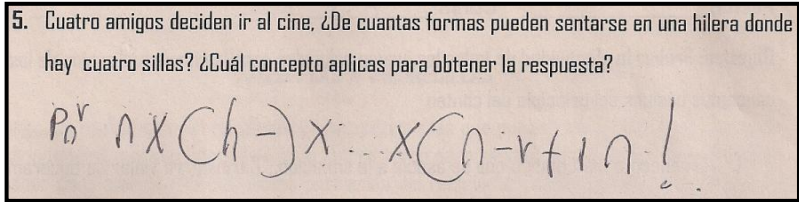


Figura 35: Respuesta incorrecta para la pregunta 5.

La segunda experiencia resaltada se atribuye a una estudiante que en su afán de resolver la situación planteada utilizó la fórmula de permutación con repetición como se puede observar en la figura 38, de nuevo se observa un discente motivado que se esfuerza en dar soluciones aplicando lo aprendido en clase arriesgándose a cometer un error antes de rendirse apáticamente.

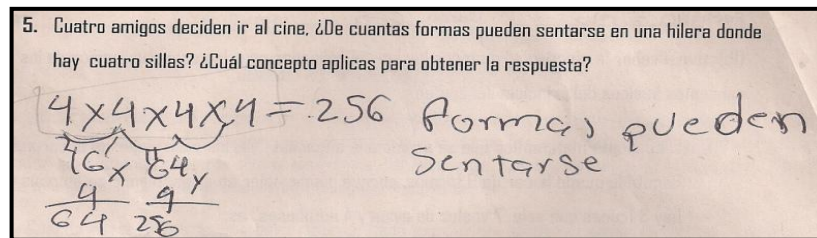


Figura 36: Respuesta incorrecta para la pregunta 5.

Pregunta No. 6

Si de un conjunto $\{a, b, c\}$ se hicieron los siguientes arreglos escogidos de dos en dos

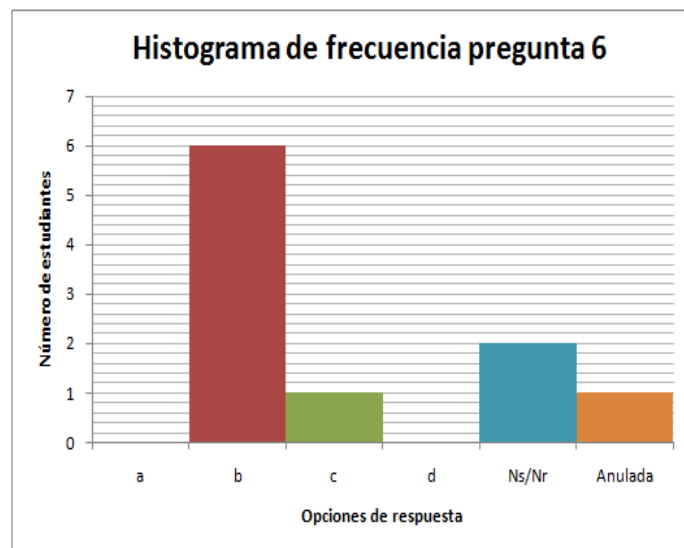
$$(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$$

Entonces se ha realizado:

- a) Permutaciones con repetición
- b) Permutaciones sin repetición
- c) Combinaciones con repetición
- d) Regla del producto

¿Por qué? _____

En esta pregunta 6 de los 10 estudiantes respondieron correctamente dando argumentaciones tales como “no se permite repetir elementos”, “si importa el orden y no se repite elementos”, “se eligen los elementos en orden y no se repiten”. Demostrando que a través del juego percibieron claramente el concepto de permutaciones sin repetición cuando no se trabaja con todos los elementos del conjunto.



a	b	c	d	Ns/Nr	Anulada
0	6	1	0	2	1

Pregunta No. 7

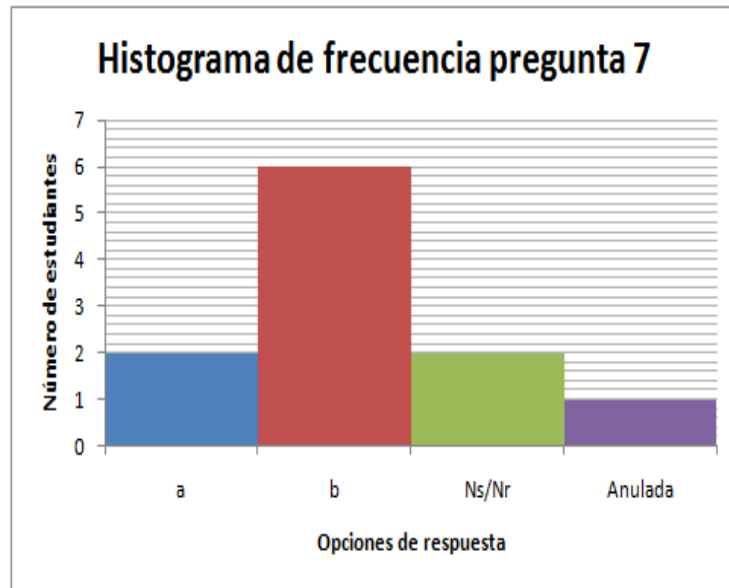
De un conjunto se obtienen más arreglos cuando se hacen permutaciones sin repetición que cuando se hacen permutaciones con repetición:

- a) Verdadero
- b) Falso

¿Por qué? _____

Nota: Para esta pregunta piensa en el conjunto $\{Azul, Rojo, Verde\}$ y los arreglos posibles serían $(Azul, Rojo, Verde)$ ó $(Rojo, Azul, Verde)$

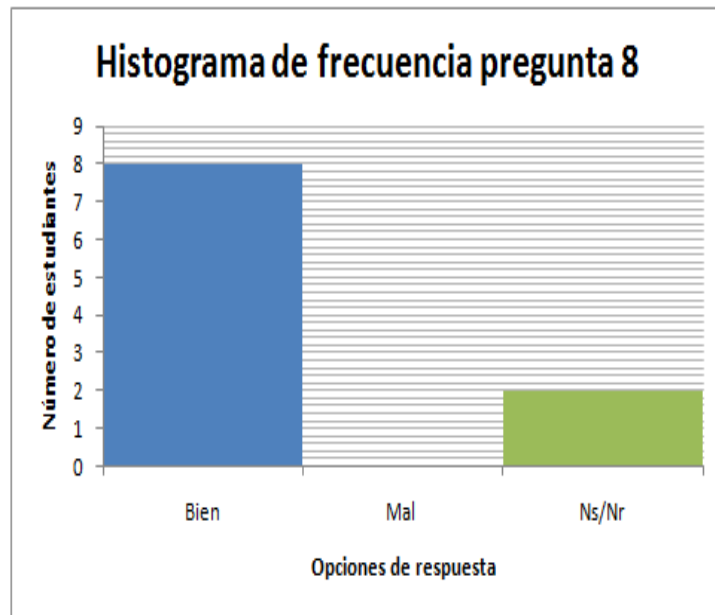
Como se puede observar en el histograma en este numeral la mayoría de los estudiantes reconocen que al realizar una permutación con repetición se obtendrán más arreglos que con una permutación sin repetición, el resto de los estudiantes se muestran confundidos frente al tema, a pesar que en la pregunta se les ofrecía una ayuda extra para responderla.



a	b	Ns/Nr	Anulada
2	6	2	1

Pregunta No. 8

¿Cuál es la diferencia entre una permutación y una combinación?



Bien	Mal	Ns/Nr
8	0	2

Del análisis del numeral 8 se desprende que a través de los juegos experimentados, 8 de cada 10 estudiantes comprendieron la diferencia entre una permutación y una combinación, podemos observar algunas de estas respuestas en la figura 39.

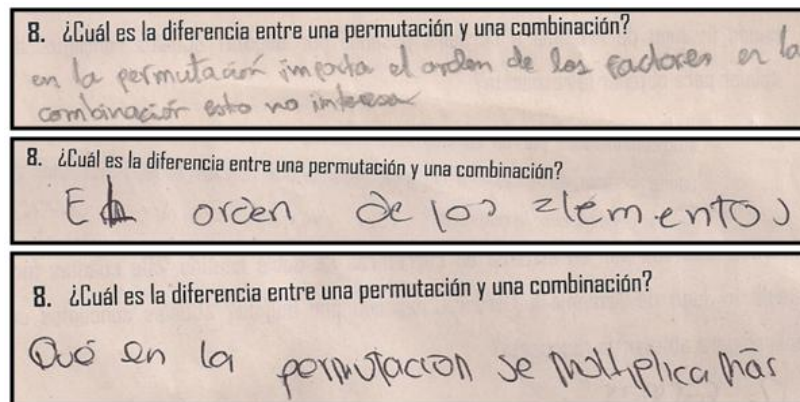


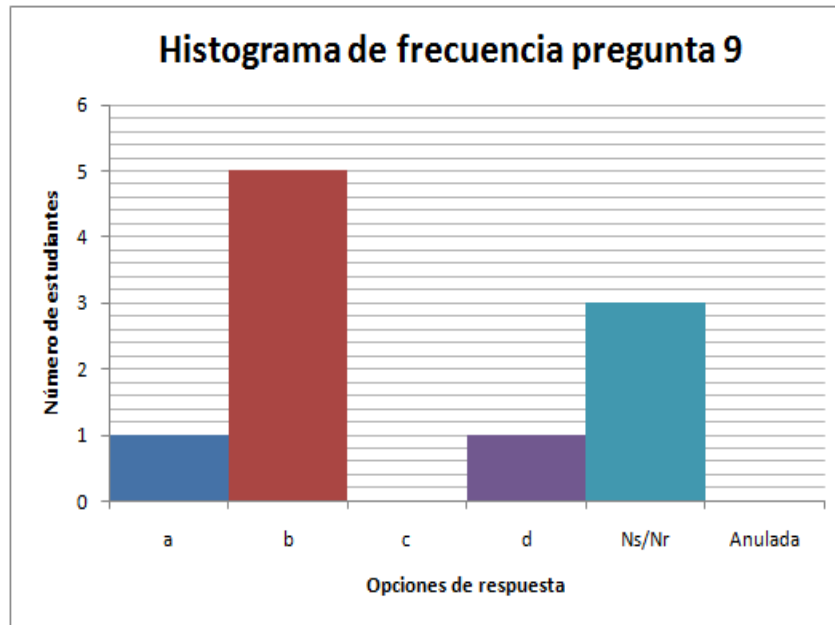
Figura 37: Respuesta para la pregunta 8.

Pregunta No. 9

Si deseamos saber cuáles son los arreglos posibles del siguiente conjunto $\{Perro, Gato, Pajaro\}$ con la condición de repetir elemento, teniendo en cuenta el orden de los mismos importa, entonces el concepto que se aplica es:

- a) Combinación con repetición
- b) Permutación con repetición
- c) Permutación sin repetición
- d) Combinación sin repetición

¿Cuáles son los posibles arreglos?



a	b	c	d	Ns/Nr	Anulada
1	5	0	1	3	0

En esta pregunta solo 5 de los estudiantes contestaron la opción correcta que era la **b**, teniendo claro el concepto de permutaciones con repetición, el resto de los estudiantes demostraron tener dificultades para dar solución a la pregunta cómo se muestra en la siguiente figura.

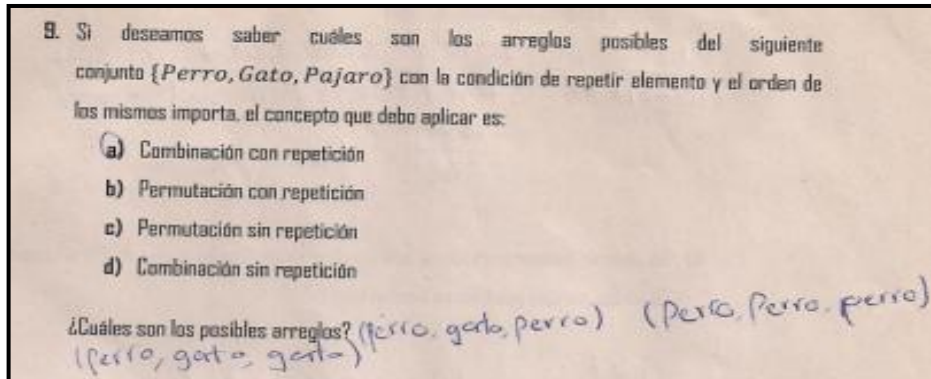


Figura 38: Respuesta incorrecta la pregunta 9.

Los estudiantes que respondieron correctamente demostraron saber cuáles eran los posibles arreglos que se pueden obtener con los elementos del conjunto presentado en el problema como se muestra en la siguiente figura.

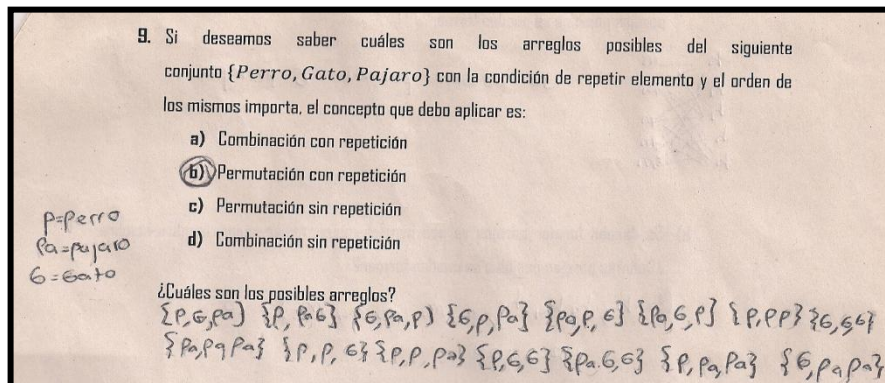
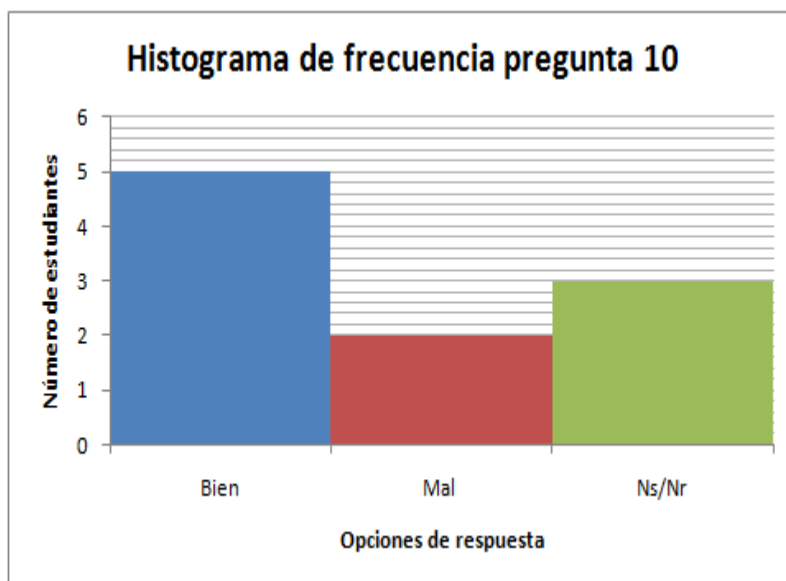


Figura 39: Respuesta correcta para pregunta 9.

Pregunta No. 10

Si se tiene en cuenta el orden de los elementos al momento de seleccionar los posibles arreglos de un conjunto estamos hablando de una _____.



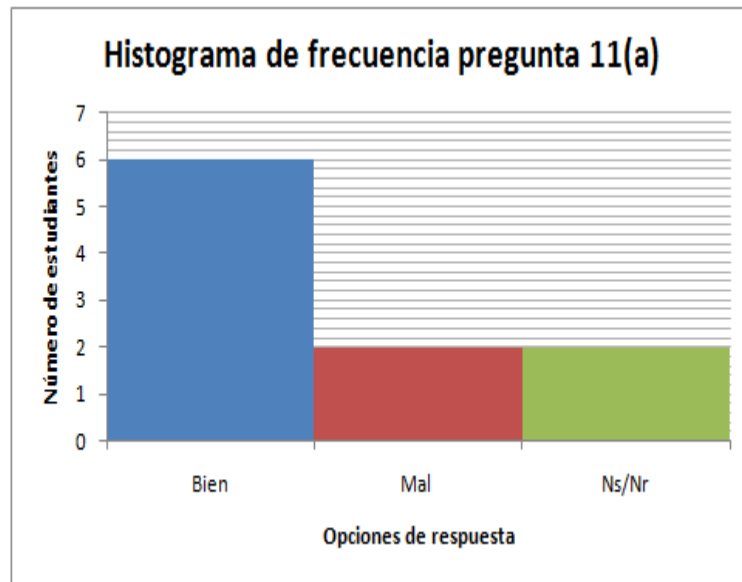
Bien	Mal	Ns/Nr
5	2	3

A pesar que en el numeral 8 la mayoría de los estudiantes demostró saber cuál era la diferencia entre una permutación y una combinación, en esta pregunta solo 5 se mantuvieron demostrando la claridad que tienen sobre estos conceptos. Los 2 estudiantes que respondieron erróneamente la pregunta 8, hicieron un análisis equivocado para esta pregunta, dejando ver que efectivamente no han asimilado este nuevo concepto.

Pregunta No. 11

Digamos que tengo cinco sabores de helado: Banana, Chocolate, Vainilla, Fresa, Coco, y mi cono estará formado por tres bolas de estos sabores.

- a. Para escoger mi cono puedo repetir el sabor, es decir quiero que mi cono tenga dos bolas de chocolate y una de vainilla ¿Cuántas combinaciones posibles puedo tener mi cono de helado?



Bien	Mal	Ns/Nr
6	2	2

En esta pregunta solo 6 estudiantes contestaron de forma correcta, de ellos 2 aplicaron la fórmula de combinación con repetición para encontrar todas las posibles combinaciones como muestra en la siguiente imagen.

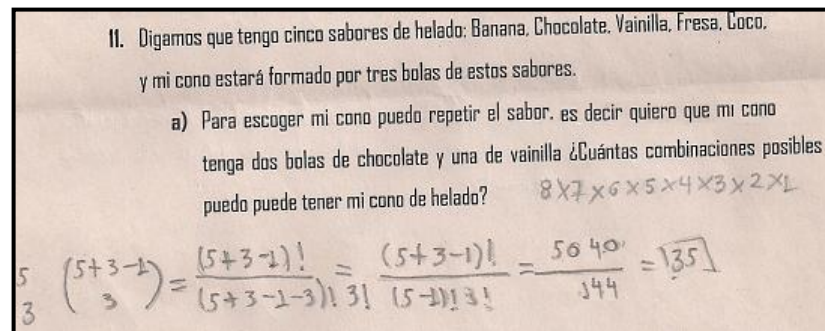


Figura 40: Respuesta correcta para la figura 11 (a).

Los 4 restantes realizaron cada una de las combinaciones como se muestra en la figura para encontrar todos los posibles arreglos, demostrando que a pesar de no saber cuál era la fórmula que debían usar, si tenían claro cómo aplicar el concepto de combinaciones con repetición para dar solución a la situación planteada.

II. Digamos que tengo cinco sabores de helado: Banana, Chocolate, Vainilla, Fresa, Coco.
 y mi cono estará formado por tres bolas de estos sabores.

a) Para escoger mi cono puedo repetir el sabor, es decir quiero que mi cono tenga dos bolas de chocolate y una de vainilla ¿Cuántas combinaciones posibles puede tener mi cono de helado?

(Ba, Ch, Va, Fres, Co)

(Ba, Ch) (Ba, Ba) (Va, Fres) (Ba, Ba) (Va, Va) (Va, Va) (Fres, ch)
 (Ch, Ch) (Ch, Ch) (Va, Co) (Ch, Ch) (Fres, Fres) (Va, Fres) (Fres, Ba)
 (Ba, Va) (Ch, Va) (Va, Co) (Ch, Va) (Co, Co) (Va, Ch) (Co, Co)
 (Ba, Fres) (Ch, Fres) (Fres, Fres) (Ch, Va) (Co, Co) (Va, Ba) (Fres, Fres)
 (Ba, Co) (Ch, Co) (Fres, Co) (Ch, Fres) (Fres, Co) (Co, Co) (Fres, Co)
 (Va, Va) (Co, Co) (Ch, Co) (Fres, Fres) (Fres, Fres) (Fres, Va)

35 combinaciones

Figura 41: Respuesta correcta para la figura 11 (a).

- b. Mi cono no puede tener sabores repetidos, si ya escogí fresa, tendré que escoger otros dos sabores diferentes, entonces ¿Cuántas combinaciones posibles puede tener mi cono de helado?

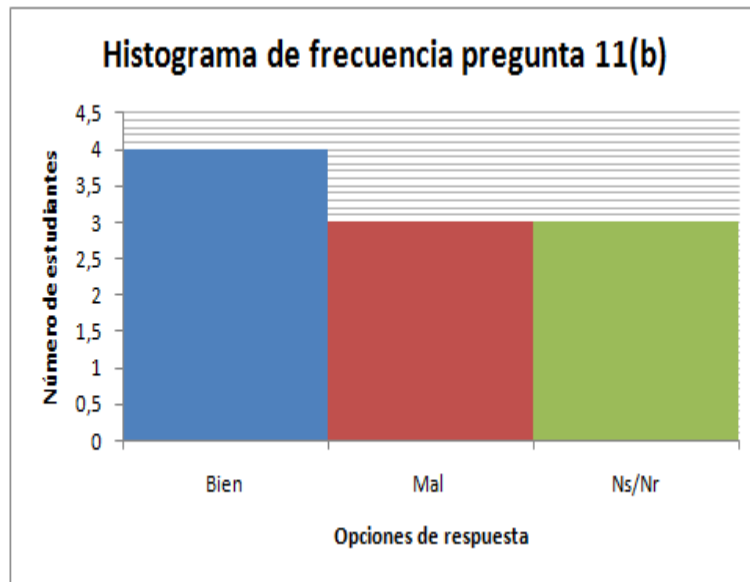
En este numeral los 4 estudiantes que acertaron en la respuesta lo hicieron aplicando la fórmula de combinación sin repetición como se muestra en la figura.

b) Mi cono no puede tener sabores repetidos, si ya escogí fresa, tendré que escoger otros dos sabores diferentes entonces ¿Cuántas combinaciones posibles puede tener mi cono de helado?

$$\frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

Figura 42: Respuesta correcta para la pregunta 11 (b).

En el histograma es posible observar que 6 de los 10 estudiantes tuvieron dificultades en el momento de asociar el concepto de combinaciones sin repetición con el problema,



Bien	Mal	Ns/Nr
4	3	3

En la figura se visualiza como algunos estudiantes intentaron hacer los arreglos para llegar a una solución, pero cometieron el error de repetir los sabores de helados, por esto no consiguieron dar una respuesta correcta. Otros estudiantes al aplicar la regla del producto obtuvieron más de los arreglos que se pedían en el problema.

b) Mi cono no puede tener sabores repetidos, si ya escogí fresa, tendré que escoger otros dos sabores diferentes entonces ¿Cuántas combinaciones posibles puede tener mi cono de helado?

(f, c, c) (f, B, B) (f, c, Co)
 (f, ff) (f, c, c) (f, Co, B)
 (f, v, v) (f, c, f) (f, Co, c)
 (f, Co, Co) (f, c, v)

b) Mi cono no puede tener sabores repetidos, si ya escogí fresa, tendré que escoger otros dos sabores diferentes entonces ¿Cuántas combinaciones posibles puede tener mi cono de helado?

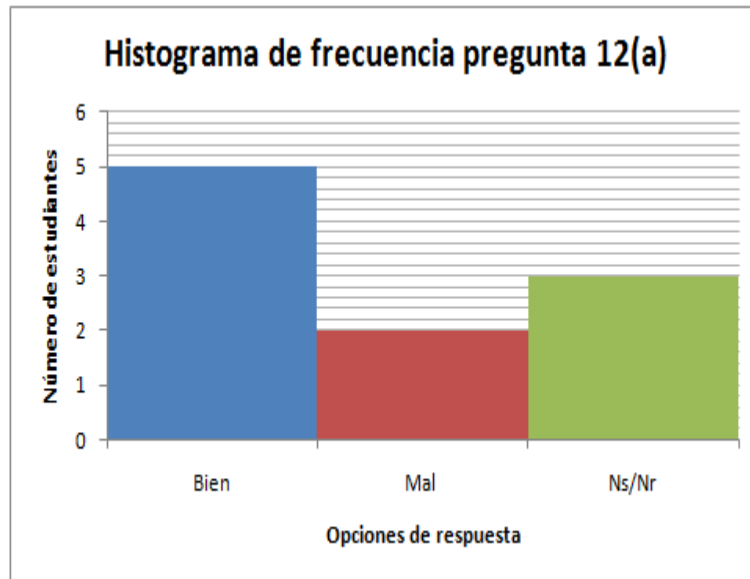
$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$

Figura 43: Respuesta incorrecta para la pregunta 11(b).

Pregunta No. 12

En una reunión hay 5 mujeres y 5 hombres

- a. Se desean formar parejas que estén conformadas por hombre-mujer.
¿Cuántas parejas posibles se pueden formar?



Bien	Mal	Ns/Nr
5	2	3

2 de los 5 estudiantes utilizaron la fórmula debida en este numeral, como se muestra en la figura, para resolver este punto era necesario realizar dos procesos aplicando el concepto de combinaciones sin repetición.

a) Se desean formar parejas que estén conformadas por hombre-mujer. ¿Cuántas parejas posibles se pueden formar?

combinación sin repetición

$$\frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8 \times 2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{90}{2} = 45 \rightarrow 25$$

$$\frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 10 \rightarrow 20$$

Figura 44: Respuesta correcta para la pregunta 12(a).

Para el desarrollo de este punto se requería un alto grado de comprensión de lectura, porque los estudiantes debían identificar que las combinaciones correctas eran las que se obtenían formando parejas hombre-mujer. Los 3 estudiantes restantes no aplicaron fórmulas para solucionar el punto, pero lograron comprender cuáles eran las parejas que debían formar, asociando claramente el concepto aprendido.

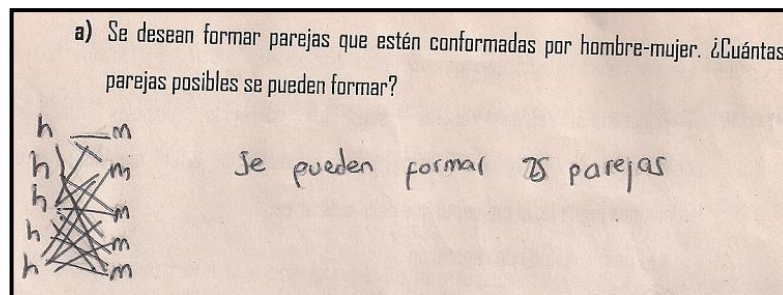
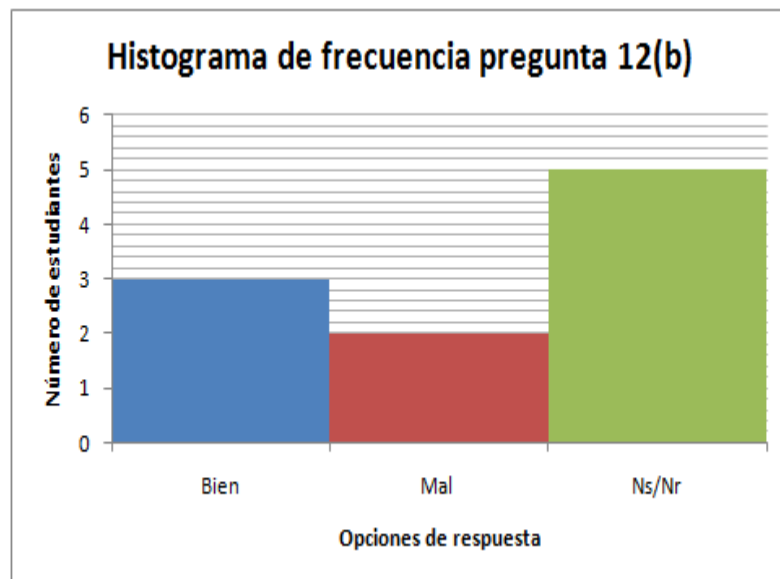


Figura 45: Respuesta correcta para la pregunta 12(a).

b. Se desean formar parejas ya sea hombre-mujer, mujer-mujer, hombre-hombre. ¿Cuántas parejas posibles se pueden formar?



Bien	Mal	Ns/Nr
3	2	5

Como se pueden observar en el histograma fueron muy pocos los estudiantes que lograron interpretar el problema, debido en gran parte a la asociación que hicieron con el juego la máquina de las posibilidades, como en el juego ya habían experimentado la manera de formar las parejas, esto les permitió ofrecer una respuesta como la que muestra la siguiente figura.

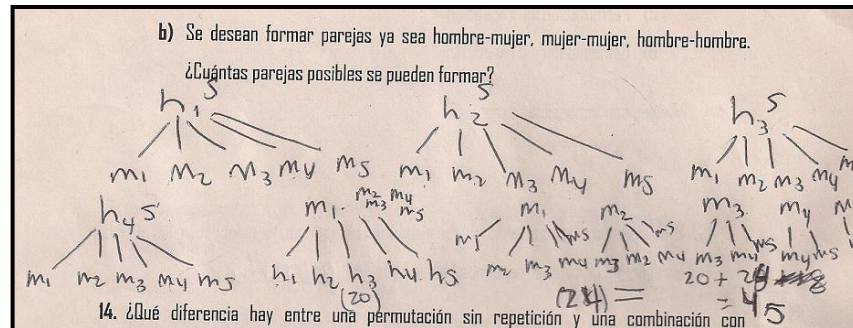


Figura 46: Respuesta correcta para la pregunta 12(b).

El resto de los estudiantes no tuvieron en cuenta que el orden de los elementos en una combinación no importa, debido a esto no obtuvieron las selecciones correctas para este caso como se muestra a continuación.

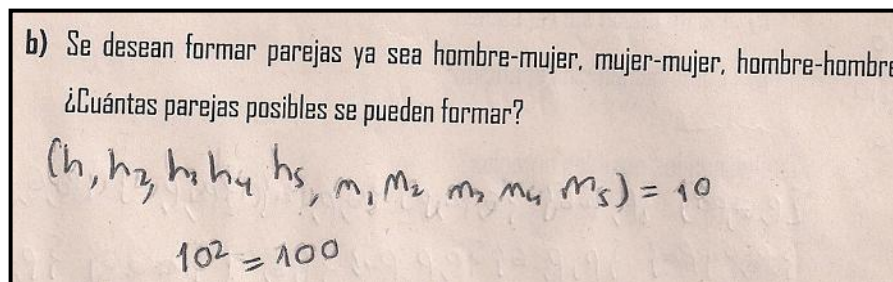
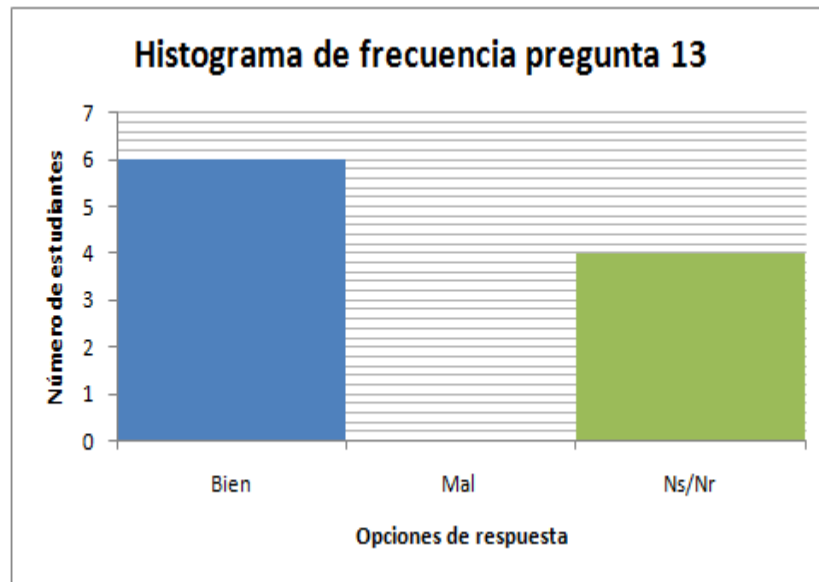


Figura 47: Respuesta incorrecta para la pregunta 12(b).

Pregunta No. 13

¿Qué diferencia hay entre una permutación sin repetición y una combinación con repetición?



Bien	Mal	Ns/Nr
6	0	4

Las respuestas en este punto permite observar que la percepción obtenida en el numeral 8 fue correcta, los estudiantes tienen presente la diferencia entre una combinación y una permutación como se muestra en las imágenes, aquellos que no lograron proporcionar una respuesta se debió a que se confundieron por la información que se ofrece en la pregunta sobre la repetición de los elementos.

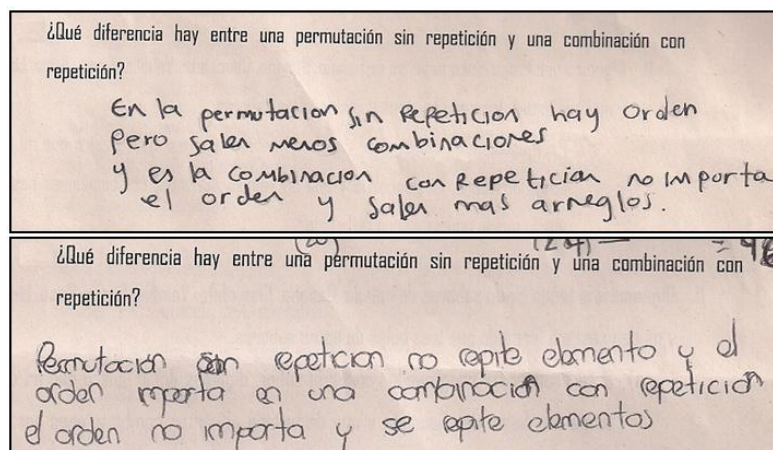


Figura 48: Respuesta correcta para la pregunta 13.

En términos generales los resultados obtenidos en la prueba fueron los siguientes:

Cantidad de Estudiantes	2	1	2	2	1	1	1
Porcentaje correcto de la prueba	96%	77%	70%	65%	30%	15%	8%

Como se puede observar 7 de los 10 estudiantes lograron responder correctamente más del 50% de la prueba, demostrando un progreso favorable en su desempeño académico. Los tres estudiantes que no alcanzaron ni un 50% de la prueba correctamente, son estudiantes que durante la experiencia vivida a través de los juegos, demostraron tener vacíos en el área de matemáticas que les impedía avanzar al ritmo de sus compañeros, debido a esto, mantienen una actitud negativa ante los procesos de aprendizaje por lo cual es fundamental trabajar con ellos en su falta de concentración, voluntad y atención.

5. CONCLUSIONES

1. Los juegos proporcionan a los niños un aprendizaje agradable, relacionando actividades con experiencias vividas en su entorno social, así satisface las necesidades intelectuales, emocionales, físicas y los intereses espontáneos en cada una de sus etapas particulares de crecimiento.
2. Es necesario que el estudiante interactúe con el juego en el aula de clase, pues este representa un factor de integración social, el cual ofrece un espacio lúdico en la formación y desarrollo de valores y conocimientos.
3. Con el juego como recurso creador, tanto en el sentido físico como mental, el estudiante durante su desarrollo pone todo el ingenio e inventiva que posee, la originalidad, la capacidad intelectual e imaginación, contribuyendo a la formación de hábitos de cooperación y ayuda, de enfrentamiento con situaciones de resolución y por tanto a un conocimiento más realista del mundo.
4. El juego proporciona el contexto apropiado en el que se puede satisfacer las necesidades educativas del aprendizaje, su carácter motivar estimula y facilita al estudiante a participar en las actividades que pueden resultarle poco atractivas, convirtiéndose en la alternativa para aquellas actividades poco estimulantes o rutinarias.
5. Gracias a la utilización del juego como finalidad para la educación matemática, se logró comprobar mediante los resultados de nuestro trabajo, que indiscutiblemente es una importante herramienta pedagógica para la difusión de nuevos conceptos y en especial el desarrollo de funciones cognitivas básicas, entre las que se enfatiza el pensamiento combinatorio.

6. Mediante el juego potenciamos las competencias primordiales en combinatoria, introduciendo las nociones de los principios básicos de conteo y lo que refiere a permutaciones y combinaciones, de una forma recreada y enriquecedora.

SUGERENCIAS Y COMENTARIOS

Se considera importante ofrecer algunas variantes indispensables para la buena aplicación de algunos de los juegos propuestos en este proyecto, para llevarlos a cabo en aulas donde el número de alumnos por grupos es alrededor de 40 estudiantes.

1. En el juego el laberinto se pueden realizar laberintos del tamaño de una hoja carta que contenga varios caminos para ser trabajados en parejas, siendo de esta forma fácil la reproducción del material para trabajar con todo el grupo.
2. El juego vistiendo a Carlos y María se puede trabajar con muñecos hechos en cartón pequeños y prendas de vestir hechas del mismo tamaño y material, con los cuales se puedan realizar los atuendos de forma rápida para que no supere el tiempo de clases, que por lo general comprende entre 60 a 120 minutos máximo. Este material puede ser trabajado en grupo por los estudiantes así solo sería necesario realizar cuatro o cinco muñecos para la actividad.
3. Los juegos en los que hay carreras de obstáculos como el de los contenedores de balotas o el de la máquina de las combinaciones, habrá necesidad de dividir al grupo en varios equipos donde cada uno tenga su

propio material, para asegurar que todos los estudiantes tengan la oportunidad de vivenciar la experiencia lúdica.

4. Después de cada juego es importante que el docente realice la retroalimentación, para que pueda identificar los aciertos y desaciertos obtenidos en la actividad.
5. Es importante aplicar juegos basados en un objetivo que pueda ser cumplido mediante los mismos, evitando de esta forma que la actividad se vuelva confusa e inconclusa.

6. REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

ORTEGA, R. (1990). Jugar y Aprender. Ed., Diada Editoras. Sevilla.

FERRERO, L. (1991). El juego y la matemática. Ed., La Muralla, S.A. Madrid. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

FLOR, J. (1992). Recursos para la investigación en el aula. Ed., Diada Editoras. Sevilla.

DE GUZMÁN, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. <http://www.sectormatematica.cl/articulos/juegosmaten.pdf>

NIETO, J. (1996). Teoría Combinatoria. Universidad de Zulia. Maracaibo – Venezuela.

MEN, Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos curriculares. Bogotá. 1998.

GARCÍA, L. (1998). Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en matemáticas. Ministerio de Educación, págs. 15-16

ABRANTES, P. (2002). La resolución de problemas en matemáticas. Ed., GRAO, de IRIK, S.L.

JOSEP., COMELLAS, F., SÁNCHEZ, A., SERRA, O. (2001). Matemática Discreta. Ed., UPC.

ROSEN, K. (2004) Matemática discreta y sus aplicaciones 5ª edición. Ed., McGRAW-HILL.

ÁLCALA, M. (2004). Matemáticas Recreativas. Editorial GRAO. Barcelona.

LARROSA, F., CARDA, R. (2007). La organización del centro educativo: manual para maestros. Ed., ECU.

ZÁRATE, H., MOIRAGHI DE PÉREZ, L. (2004). El grupo en el aprendizaje: Ventajas y desventajas de la técnica de dinámica de grupos. Ed., Comunicaciones Científicas y Tecnológicas.

MORENO, J., GARCÍA R. (2008). El profesorado y la secundaria ¿demasiados retos? 2ª edición. Ed., Nau Llibres - Edicions Culturals Valencianes, S. A.

VILENKIN, N. (1972). ¿De cuantas formas? Combinatoria. Ed., Mir. Moscú.

GOÑI, J., ALSINA, C., ÁVILA, D. (2000). El currículum matemáticas en los inicios del siglo XXI. Editorial GRAO. Barcelona.

DE GUZMÁN, M.; GIL, D. (1993). Enseñanza de las ciencias y las matemáticas. Tendencias e innovaciones. Ed., Popular.

ANEXOS

ANEXO A: ESTRATEGIAS PARA GANAR

SI COMIENZAS LA PARTIDA

Si eres el primer jugador tienes varias opciones, puedes poner tú marca en el centro (5), o en una de las esquinas (1, 3, 7, 9), o en los bordes que no es una buena opción (2, 4, 6, 8) como se muestra en la siguiente figura:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 49: Cuadro guía

1. Si inicia en el cuadro 5 como primera movida, tú oponente entonces podrá poner su marca en algunos de los cuadros 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9.
 - a. Si tu oponente marca en una esquina, por ejemplo en la 7, debes poner tu siguiente marca de modo que las tres marcas hagan una línea diagonal como se muestra en la figura 50.

x		
Tú		

	x	
o		
Otro		

		x
	x	
o		
Tú		

Figura 50: Iniciando la estrategia 1.

2. Si tú primer jugada es marcando en una esquina 1, 3, 7, 9, tendremos tres movidas como respuestas potenciales, el cuadro 5, las esquinas opuestas, o los bordes, 2, 4, 6, 8.

a. Si tú oponente marca la esquina alejada como se muestra en la siguiente figura, puedes ganar colocando tú marca en cualquiera de las esquinas que quedan.

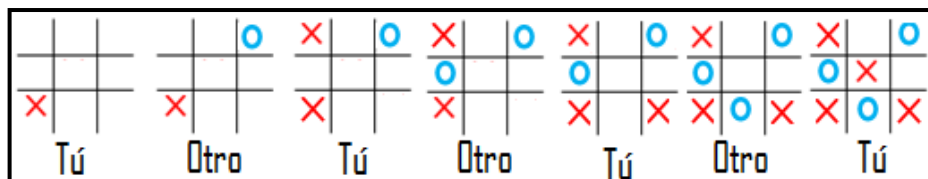


Figura 54: Estrategia 3.

b. Si tú oponente marca el cuadro 5, pon tú marca de modo que puedas crear una diagonal con las tres marcas como se muestra en la figura 55.

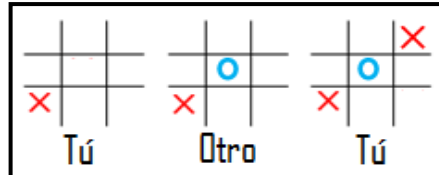


Figura 55: Iniciando estrategia 4.

Después de esto, tú oponente tendrá como dos opciones marcar en los cuadros esquineros (1, 9) o en los cuadros del borde.

- a) Si tu oponente marca en una esquina irás directo a la victoria marcando la última esquina así tendrías dos opciones para ganar como se muestra en la figura 56.
- b) Sin embargo si tú oponente marca uno de los cuadros del borde, el juego terminará en un empate, si los jugadores se mantienen en contraataque.

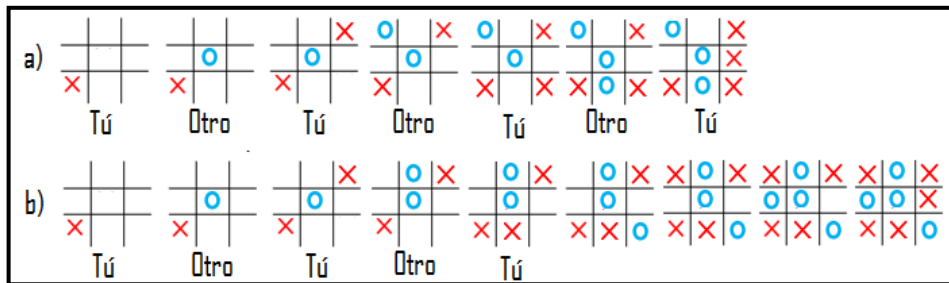


Figura 56: Culminando estrategia 4.

3. Si tú oponente marca uno de los cuadros del borde, pon tú marca lejos de la marca de tú oponente, de esta forma, tú oponente intentará bloquear tu propósito de ganar, al caer en la trampa simplemente debes marcar en la última esquina como se muestra en la figura 57, así tendrás dos opciones de ganar.

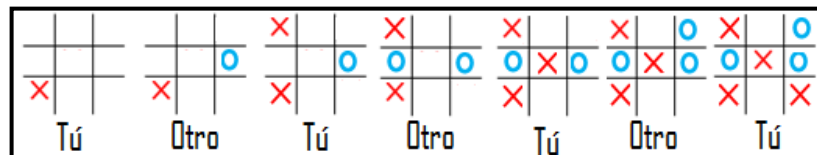


Figura 57: Estrategia 5.

SI TÚ OPONENTE COMIENZA LA PARTIDA

Considera tu estrategia basada en los movimientos de tú oponente. Lo más probable es que tu oponente va a escoger el centro (5) o una de las esquinas (1, 3, 7, 9)

1. Si tú oponente pone su marca en el cuadro 5, debes poner tú marca en una esquina.
 - a. Si tú oponente pone su marca en el lado opuesto a la esquina donde pusiste tú marca, están usando nuestra estrategia en tu contra. Así que

debes poner tú marca en cualquiera de las esquinas que están libres, luego podrás mantener el empate.

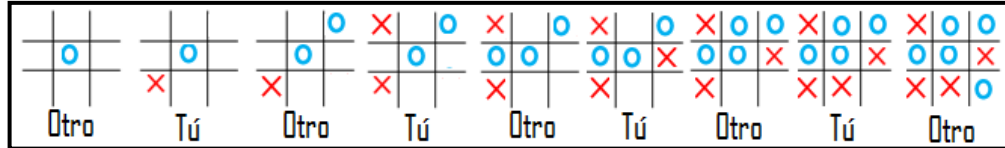


Figura 58: Estrategia 6.

b. Si tú oponente pone su marca en una esquina, puedes poner tu marce en el centro o en una esquina opuesta.

- ✓ Si pones la marca en una esquina alejada y juegas en forma de contraataque podrás llegar a un empate.

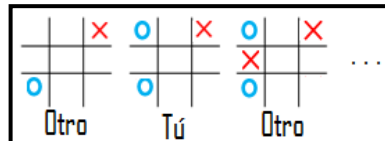


Figura 59: Estrategia 7.

- ✓ Si logras poner tú marca en el centro, entonces tú oponente podrá poner su marca de modo que forme una línea con, así deberás poner tú marca en uno de los bordes en lugar de las esquinas, de esta forma terminarás en un empate como se muestra en la figura 60.

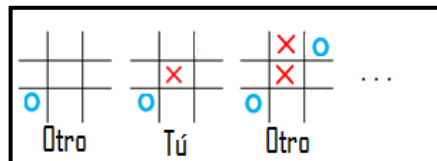


Figura 60: Estrategia 8.

De otra forma, contraataca cada uno de sus movimientos y terminarás en un empate.