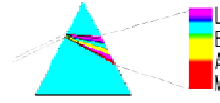


UNIVERSIDAD
INDUSTRIAL DE
SANTANDER



GOTS
GRUPO DE ÓPTICA Y
TRATAMIENTO DE
SEÑALES

CARACTERIZACIÓN DE LA DISPERSIÓN CROMÁTICA DE UNALENTE DE FRESNEL

MERY ELIEN OCHOA RAMIREZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS**

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2006

**CARACTERIZACIÓN DE LA DISPERSIÓN CROMÁTICA DE UNA LENTE DE
FRESNEL**

MERY ELIEN OCHOA RAMIREZ

Trabajo de grado para optar al título de
Físico

Director
Msc. RAFAEL CABANZO HERNANDEZ.

Codirector
Dr. ARTURO PLATA GOMEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2006

A mis padres Hernando y Luz Stella, pilares fundamentales de mi vida, los cuales con su constante ejemplo, amor y apoyo incondicional, hicieron posible alcanzar tan preciada meta.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su agradecimiento a:

- Msc. Rafael Cabanzo, por su paciencia, orientación y apoyo en la realización de este trabajo.
- Dr. Arturo Plata, por su apoyo y valiosa colaboración.
- Todas las personas que forman parte del grupo del Laboratorio de Espectroscopia Atómica Molecular, por su compañerismo y colaboración.
- Todas las personas que forman parte del Laboratorio de Óptica y Tratamiento de Señales por su compañerismo y colaboración.
- Personal administrativo de la Escuela de Física por su colaboración.
- Maria del Rosario Pérez, Alexander Arguello y Javier Ernesto Mejia, por su amistad, apoyo, motivación y acompañamiento.
- Mis queridos padres por su comprensión, motivación, fortaleza, acompañamiento y apoyo incondicional. Gracias por estar y compartir todos los momentos especiales de mi vida.
- Todas las personas que de una u otra forma contribuyeron al logro de mis objetivos.

TITULO: CARACTERIZACIÓN DE LA DISPERSIÓN CROMÁTICA DE UNALENTE DE FRESNEL *

AUTOR: MERY ELIEN OCHOA RAMIREZ **

PALABRAS CLAVES: Zona plana de Fresnel, dispersión cromática, difracción, análisis espectral.

DESCRIPCIÓN

Una zona plana de Fresnel actúa como elemento dispersor, debido a que está conformada por una serie de anillos concéntricos opacos y transparentes. Al hacer incidir sobre la zona plana de Fresnel una onda plana monocromática, por efectos de difracción, la radiación se distribuye a lo largo el eje óptico en diferentes órdenes focales, presentándose tantos puntos focales como zonas tiene la lente.

Si se ilumina la zona plana de Fresnel con una fuente policromática, se genera un segmento cromático a lo largo del eje óptico, en el que están contenidas todas las longitudes de onda presentes en el espectro de la fuente. A partir del uso de un espectrómetro para el análisis del comportamiento del espectro de la fuente a lo largo del eje óptico, se obtuvieron las posiciones focales en las cuales se presentaron los máximos de emisión para unas longitudes de onda determinadas

A causa del fenómeno de difracción, la imagen de una fuente policromática formada por la zona plana de Fresnel, presenta en cada foco la forma compleja $sen\theta +icos\theta$, razón por la cual, en el mismo punto focal, se observa la superposición del pico de máxima intensidad correspondiente a una longitud de onda determinada, junto con pequeñas componentes espectrales, provenientes de picos de ordenes superiores de difracción, que corresponden a los focos de las otras longitudes de onda. Al utilizar una fuente de luz policromática y haciendo uso de un espectrómetro, se pudo medir experimentalmente la dispersión cromática longitudinal, generada por una zona plana de Fresnel.

* Trabajo de grado

** Facultad Ciencias. Escuela de Física. Director: Msc. Rafael Cabanzo Hernandez.
Codirector: Dr. Arturo Plata Gómez.

TITLE: CHARACTERIZATION OF THE CHROMATIC DISPERSION OF A FRESNEL LENS .

AUTHOR: MERY ELIEN OCHOA RAMIREZ **

KEY WORDS: Fresnel zone plate, chromatic dispersion, diffraction, spectral analysis.

DESCRIPTION

A Fresnel zone plate acts as dispersive element, due to the fact that it is constituted by a series of transparent and opaque concentric rings. When a monochromatic flat wave is put on the Fresnel zone plate, for effects of diffraction, the radiation is distributed along the optical axis in different focal orders, presenting the same quantity of focal points as the lens.

If it is illuminated the Fresnel zone plate with a polychromatic source, it is generated a chromatic segment along the optical axis, in which are content all the wavelength present in the spectrum of the source. Since the use of a spectrometer for the analysis of the spectrum behavior of the source along the optical axis, it was obtained the focal positions in which it was presented the maximums of emission for wavelength determined.

Because of the phenomenon of diffraction, the image of a polychromatic source formed by the Fresnel zone plate, presents in each focus the complex form $sen\theta +icos\theta$, reason for which in the same focal point it is observed the superposition of the maximum intensity point corresponding to a wavelength determined, with small spectral components that come from points of superior orders of diffraction that correspond to the focus of the other wavelength. With the use of a polychromatic light and the use of a spectrometer, it was measured experimentally the longitudinal chromatic dispersion generated by a Fresnel zone plate.

* Graduation Project

** Faculty of Ciencias. School of Physics. Director: Msc. Rafael Cabanzo Hernandez.
Codirector: Dr. Arturo Plata Gómez.

CONTENIDO

	Pág.
LISTA DE FIGURAS	I
LISTA DE TABLAS	V
INTRODUCCIÓN	5
1. DISPERSIÓN CROMÁTICA Y LENTE DE FRESNEL	7
1.1 DISPERSIÓN CROMÁTICA	7
1.2 ELEMENTOS OPTICOS DISPERSIVOS	9
1.3 LA LENTE DE FRESNEL	10
1.4 ZONA PLANA	11
1.5 CARACTERISTICAS DE UNA ZONA PLANA DE FRESNEL	23

2. MONTAJE EXPERIMENTAL	27
2.1 SISTEMA DE ILUMINACIÓN	28
2.2 SISTEMA DE CODIFICACIÓN DE LONGITUD DE ONDA	30
2.3 SISTEMA DE DETECCIÓN	32
3. ANALISIS DE DATOS	34
3.1 RESOLUCIÓN DEL SISTEMA	42
4. CONCLUSIONES GENERALES	45
BIBLIOGRAFIA	46

LISTA DE FIGURAS

	Pág
Figura 1.1. Gráfica de AC Longitudinal. Los planos focales de varias longitudes de onda no coinciden.	4
Figura 1.2. Gráfica de AC Lateral. El tamaño de la imagen varía con la longitud de onda.	4
Figura 1.3. (a) Prisma (b) Fibra óptica (c) Lente de Fresnel.	5
Figura 1.4. Dispersión cromática generada por una lente de Fresnel.	6
Figura 1.5. Zona plana.	7
Figura 1.6. Focalización de zona plana	8
Figura 1.7. Zona plana de Fresnel.	9
Figura 1.8. Función de transmitancia sinusoidal de una zona plana (a) como función de ν (b) como función de r	14

Figura 1.9. Función sinusoidal y su aproximación cuadrada.	14
Figura 1.10. Comparación entre una zona plana de Fresnel y una zona plana sinusoidal	15
Figura 1.11. Intensidad para una zona plana sinusoidal como función de z	19
Figura 1.12. Poder espectral para una zona plana de Fresnel	22
Figura 1.13. Intensidad para una zona plana de Fresnel	23
Figura 2.1. Esquema general del montaje experimental utilizado en este trabajo.	24
Figura 2.2. Sistema de iluminación	25
Figura 2.3. Espectro de los diferentes leds utilizados como fuentes. En el inserto se presenta la longitud de onda del máximo de cada uno.	26

Figura 2.4. Cubo conformado por cuatro prismas que permite la mezcla de la radiación emitida por los tres leds	27
Figura 2.5. (a)Imagen de la zona plana de Fresnel utilizada. (b)Segmento cromático generado por la zona plana de Fresnel.	28
Figura 2.6. Esquema general del sistema de detección.	29
Figura 2.7. (a)Espectrómetro HR4000 de Ocean Optics (b) Esquema interno del espectrómetro.	30
Figura 3.1. Espectro normalizado de la radiación emitida por los leds versus coordenada z para la cual se obtiene el máximo de emisión.	33
Figura 3.2. Espectro obtenido cuando se ilumina simultáneamente con los tres leds. La coordenada z corresponde a las posiciones óptimas de la tabla 3.1. (A) $z = 7.4mm$ (B) $z = 13.6mm$ (C) $z = 19.4mm$	34

Figura 3.3. Espectros normalizados, obtenidos cuando se ilumina con el led blanco. 36
(A) Espectro del Led blanco, sin la zona plana de Fresnel. Espectros obtenidos para las coordenadas: (B) $z = 7.4mm$ (C) $z = 13.6mm$ (D) $z = 19.4mm$

Figura 3.4. Espectro de la lámpara de halógeno con filamento. (a) Espectro de la 38
lámpara sin la zona plana de Fresnel. Espectros obtenidos para las coordenadas:
(b) $z = 19.4mm$ (c) $z = 13.6mm$ (d) $z = 7.4mm$

Figura 3.5. Gráfica de intensidades para una longitud de onda cuando se barre el 41
segmento cromático. (a) $\lambda = 653.75nm$, (b) $\lambda = 637.21nm$, (c) $\lambda = 475.46nm$.

Figura 3.6. Grafica que representa la resolución del sistema. Posiciones optimas en 42
 z para varias longitudes de onda.

LISTA DE TABLAS

	Pág
Tabla 1.1 Características de algunos LEDS utilizados en el desarrollo de esta tesis.	26
Tabla 3.1. Coordenadas de los máximos de emisión de los tres LEDS utilizados.	32

INTRODUCCIÓN GENERAL

Seguramente cuando Fresnel introdujo la idea de dividir un frente de onda en zonas semiperiódicas calculando el efecto de difracción esperado en una posición dada, no imaginó que su idea llegaría a utilizarse en concentradores solares, proyectores de televisión, faroles de automóviles, sistemas condensadores, faros de luz, hornos de altas temperaturas, etc.

La primera zona plana construida constaba de 15 zonas (anillos concéntricos) y fue elaborada por Rayleigh en 1875, a partir de allí este dispositivo ha sido perfeccionado de forma que hoy día pueden fabricarse zonas planas de Fresnel de más de 100 zonas [10]. Además de lentes cuyas zonas presentan una forma dentada que permite la focalización de toda la radiación incidente en un único punto sin que haya pérdida de energía.

En este trabajo se estudia el comportamiento de una zona plana de Fresnel, pues una de sus principales características es que dispersa longitudinalmente la radiación incidente, focalizando cada longitud de onda en ciertos puntos a lo largo de su eje óptico, de forma que codifica cromáticamente la radiación, factor que puede utilizarse para reconstrucción tridimensional de objetos utilizando luz blanca.

Es así como en un futuro se visualiza a la zona plana de Fresnel como un medio que permita reconstrucciones 3D de objetos con 360° de libertad, además de proyectores portátiles de dimensiones muy pequeñas, etc.

El presente libro comprende cuatro capítulos, el primero describe las bases teóricas del comportamiento de la zona plana de Fresnel. En el segundo capítulo se detalla el montaje experimental realizado, que permitió a partir del uso de un espectrómetro el análisis de la dispersión cromática generada por la zona plana de Fresnel, esta fue iluminada por fuentes

cuasimonocromáticas (leds) y policromáticas (lámpara de halógeno con filamento, led blanco).

La descripción y análisis de los resultados obtenidos experimentalmente se presentan en el tercer capítulo, donde se comprueba la presencia de un segmento cromático a lo largo del eje óptico del sistema (eje z), con lo cual se corrobora la teoría expuesta en el capítulo uno, pues es la zona plana de Fresnel el mecanismo que permite realizar la codificación cromática observada a lo largo de z , además de establecerse la resolución del sistema implementado.

Finalmente en el capítulo cuatro se presentan las conclusiones de este trabajo, haciendo hincapié en los principales aspectos observados durante la realización de este proyecto de grado y proyecciones de la continuidad de este estudio.

1. DISPERSION CROMÁTICA Y LENTE DE FRESNEL

La dispersión cromática, se presenta en innumerables situaciones. Un dispositivo que permite generar este fenómeno es la lente de Fresnel. Estas lentes pueden ser parte de instrumentos ópticos más complejos y es justamente esta la razón por la cual es interesante estudiar y caracterizar el fenómeno originado por una lente específica.

1.1. DISPERSIÓN CROMÁTICA

La dispersión es un fenómeno en el cual se separan las ondas de diferentes frecuencias al atravesar un material, esta separación se debe a que la velocidad de una onda depende de su frecuencia (y por tanto de su longitud de onda). Todos los medios materiales son más o menos dispersivos, y la dispersión afecta a todas las ondas.

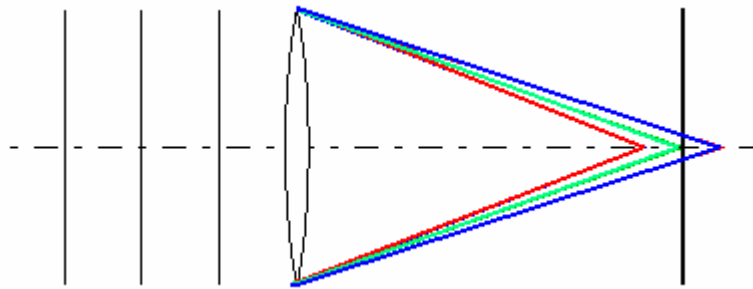
Un sistema óptico siempre se ve afectado por aberraciones ya sean de tipo esférico, cromático, coma, etc..., razón por la cual no se forma una figura geoméricamente igual a la imagen ideal del objeto. En este caso es de interés la aberración cromática (AC), la cual se genera debido a dos aspectos, el primero es la variación del índice de refracción del medio en función de la longitud de onda de la luz incidente sobre el sistema, y el segundo es consecuencia de las condiciones geométricas de interferencia constructiva cuando actúan elementos difractantes.

La aberración cromática puede ser longitudinal o lateral; en la práctica dichas aberraciones se presentan juntas.

La aberración cromática longitudinal es la incapacidad de la lente de focalizar diferentes longitudes de onda en el mismo plano focal. Para una fuente puntual policromática cada

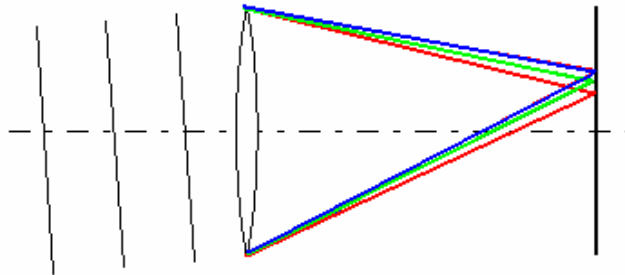
punto focal esta localizado sobre el eje óptico del sistema pero desplazado longitudinalmente [11], Ver Figura 1.1.

Figura 1.1. Gráfica de AC Longitudinal. Los planos focales de varias longitudes de onda no coinciden.



En la aberración cromática lateral el aumento de la imagen depende de la longitud de onda, por lo tanto, cada λ se focaliza en el mismo punto sobre el eje óptico del sistema, pero en una diferente posición sobre el plano imagen, ver Figura 1.2.

Figura 1.2. Gráfica de AC Lateral. El tamaño de la imagen varía con la longitud de onda.



1.2. ELEMENTOS OPTICOS DISPERSIVOS

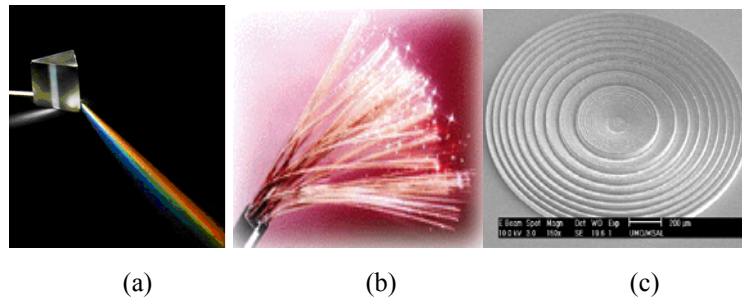
Usualmente, los dispositivos utilizados para generar la dispersión son: prismas triangulares, fibras ópticas, redes de difracción, lentes de Fresnel, etc.

En algunos de estos elementos, como en el caso de la fibra óptica, se busca disminuir al máximo la dispersión cromática pues genera problemas a la hora de recuperar la información transportada a través de la fibra, debido a que cada pulso luminoso se compone de un intervalo de frecuencias, que avanzan por la fibra con velocidades ligeramente distintas, esto aumenta la duración del pulso a la salida de la fibra, haciendo más difícil separar una secuencia de pulsos[3].

Cuando la luz atraviesa un prisma, el rayo de salida ya no es paralelo al rayo incidente. Como el índice de refracción de una sustancia varía con la longitud de onda, un prisma puede separar las diferentes longitudes de onda contenidas en un haz incidente y formar un espectro[3].

En el caso de una red de difracción, el dispositivo esta formado por una superficie reflectante sobre la que se han trazado miles de surcos paralelos muy finos. Al incidir la luz sobre la superficie, el haz de luz se ve dispersado en todas las direcciones o difractado en cada surco[3].

Figura 1.3. (a) Prisma (b) Fibra óptica (c) Lente de Fresnel¹.



¹ Hecht E. Óptica. Addison-Wesley Iberoamericana S. A. Wilmington, Delaware, E. U. A. p. 432, 1998

Todos los anteriores dispositivos producen dispersión cromática, pero es la lente de Fresnel la que presenta, en forma marcada la dispersión cromática longitudinal, por esta razón en este trabajo de tesis se estudiará la aberración cromática longitudinal.

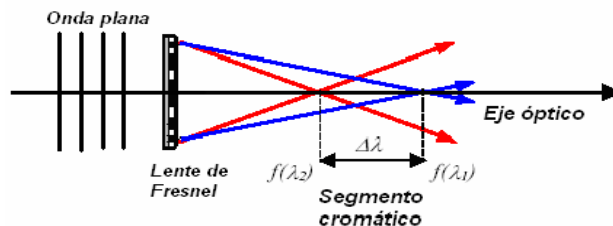
1.3. LA LENTE DE FRESNEL

La lente de Fresnel fue inventada por el físico francés Augustin Jean Fresnel, quien utilizó este diseño para construir una lente de vidrio de un faro en 1822.

Luego en 1875 con base en la teoría propuesta por Fresnel, Soret construyó una zona plana de Fresnel, la cual consiste en una pequeña rejilla que difracta la radiación incidente hacia su foco [10]. Como la distancia de cada anillo de la zona plana de Fresnel al eje óptico se incrementa con el radio del anillo, se requieren mayores desviaciones angulares y por lo tanto la separación de los anillos disminuye al incrementar el radio, ver Figura 1.3c. Es este aspecto el que hace a la zona plana de Fresnel un excelente dispositivo para el estudio de la dispersión cromática longitudinal, puesto que cada longitud de onda tiende a focalizarse en un punto específico; dicha distancia focal depende de la longitud de onda de la luz incidente, por tanto si se ilumina la lente con luz policromática se generará un segmento cromático que abarcará todo el espectro de la fuente.

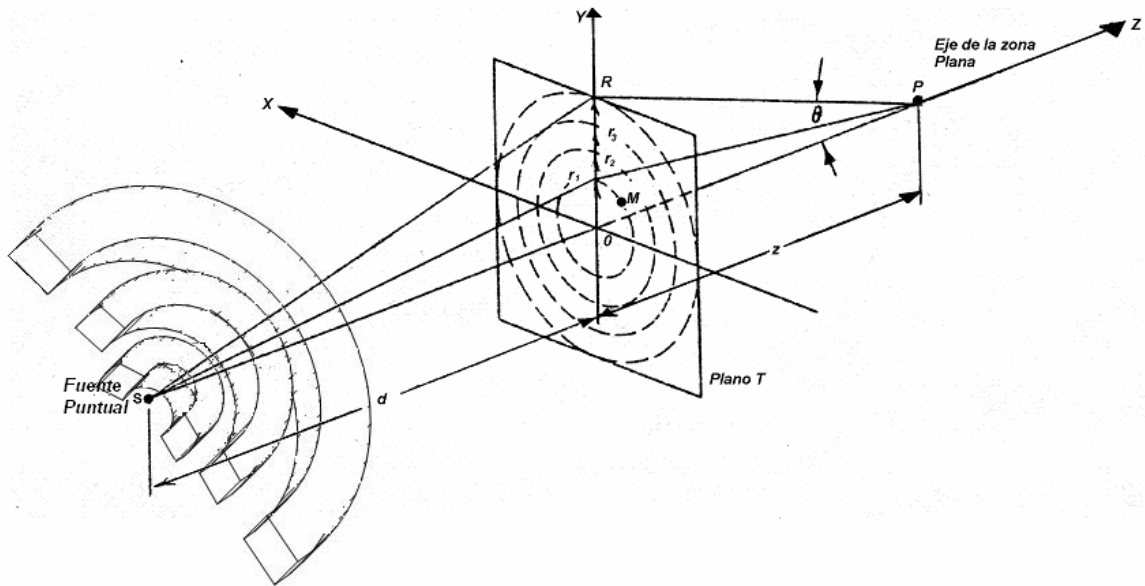
Como se muestra en la figura 1.4, si λ_1 y λ_2 son dos componentes espectrales de la fuente policromática ($\lambda_2 > \lambda_1$), entonces sus focos $f(\lambda_1)$ y $f(\lambda_2)$ están localizados en posiciones diferentes a lo largo del eje óptico de la lente.

Figura 1.4. Dispersión cromática generada por una lente de fresnel



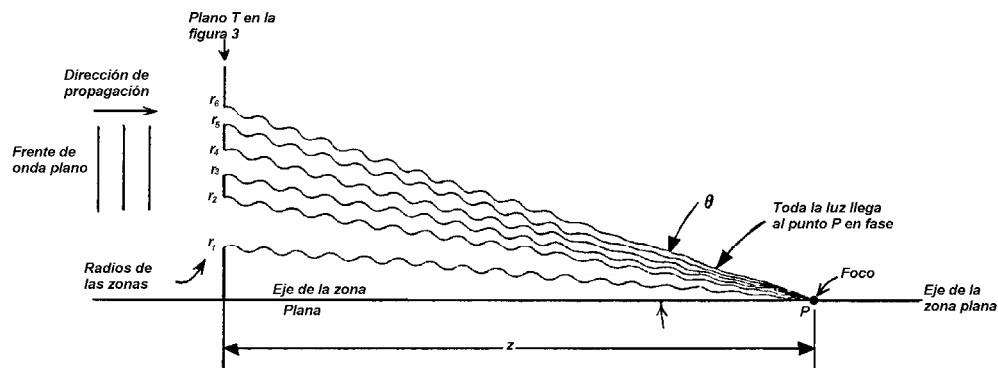
1.4. ZONA PLANA

Figura 1.5. Zona plana



La difracción de Fresnel de una onda esférica puede explicarse considerando la figura 1.5. El plano T contiene puntos que provocarían que la luz se difracte a su alrededor. Para determinar la amplitud de la luz en un punto P causada por una onda plana que incide sobre el plano T (superficie difractiva) localizado a una distancia z de P, se consideran dos caminos ópticos desde el plano T al punto P (OP y r_1P), dependiendo de la diferencia entre ambos, la luz podría llegar al punto P en fase o no, como se muestra en la figura 1.6 donde para simbolizar colocamos la propagación de la onda de emisión secundaria. Para conocer todos los puntos en el plano T que difractan la luz de forma constructiva, se considera que el plano T está dividido en una serie de zonas limitadas por circunferencias de radios r_1, r_2, r_3, \dots , donde r_1 es la circunferencia de radio más pequeño.

Figura 1.6. Focalización de zona plana



Las distancias a estas circunferencias son:

$$\begin{aligned}
 r_1P &= z + \frac{\lambda}{2} \\
 r_2P &= z + \frac{2\lambda}{2} \\
 r_3P &= z + \frac{3\lambda}{2} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 r_nP &= z + \frac{n\lambda}{2}
 \end{aligned}$$

Por el teorema de Pitágoras el radio de la n-ésima zona es

$$r_n^2 + z^2 = \left(z + \frac{n\lambda}{2} \right)^2 \tag{1.1}$$

Por tanto

$$r_n^2 = n\lambda z + \frac{n^2\lambda}{4} \quad (1.2)$$

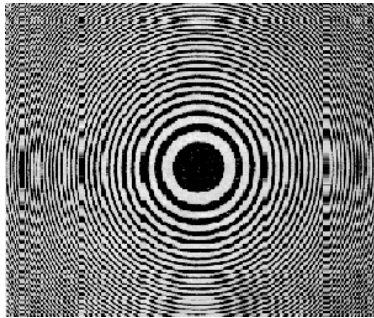
Si se considera que $n\lambda$ es pequeño comparado con z entonces

$$r_n^2 = n\lambda z \quad (1.3)$$

$$r_n = \sqrt{n\lambda z} \quad (1.4)$$

La ecuación (1.4) puede utilizarse para construir una zona plana, de forma que para una distancia focal z , los radios de las zonas son proporcionales a la raíz cuadrada de números naturales. En la figura 1.7 se muestra la fotografía de una típica zona plana de Fresnel [5].

Figura 1.7. Zona plana de Fresnel ²



Considerando el caso en que una fuente puntual S en el infinito sobre el eje (figura 1.5) ilumine el plano T con una onda plana de longitud de onda λ y amplitud A_0 , las variaciones de la transmitancia en el plano provocan la difracción de la onda plana, la amplitud compleja de la luz difractada en el punto P esta determinada por la formula de difracción de Rayleigh-Sommerfield en la aproximación de Fresnel [5] ²

² Grilli S., Ferraro P., De Nicola S., Finizio A., Pierattini G., Meucci., Whole optical wavefields reconstruction bay digital holography. Optics Express, Vol 9 No. 6, September 2001.

$$U(P) = \int_0^R \frac{A_0}{j\lambda} t(r) \frac{\exp(-jk\sqrt{z^2 + r^2})}{\sqrt{z^2 + r^2}} 2\pi r dr \quad (1.5)$$

Si consideramos a R como el radio máximo de la zona plana, entonces

$$U(P) = \int_0^R \frac{A_0}{j\lambda} t(r) \frac{\exp(-jk\sqrt{z^2 + r^2})}{\sqrt{z^2 + r^2}} 2\pi r dr \quad (1.6)$$

$$U(P) = \frac{2\pi A_0}{j\lambda} \int_0^R \frac{t(r)r}{\sqrt{z^2 + r^2}} \exp(-jk\sqrt{z^2 + r^2}) dr \quad 3 \quad (1.7)$$

Si la fuente puntual S no esta en el infinito, las ondas que llegaran a la zona plana son esféricas, por tanto para que la ecuación (1.7) pueda ser utilizada de forma optima, la distancia d debe ser grande y por tanto su fase e^{-jk} se asuma constante.

La máxima diferencia esta entre la fase instantánea en 0 y la fase correspondiente a cualquier punto R en el borde de la zona plana, siendo R el radio máximo de la zona plana, la diferencia de camino óptico esta dada por

$$\overline{SR} - \overline{SO} = \sqrt{d^2 + R^2} - d$$

Finalmente, para $d \gg R$ y $d^2 \gg R^2$ se tiene que

$$\overline{SR} - \overline{SO} = \frac{R^2}{\sqrt{d^2 + d}} = \frac{R^2}{2d} \quad (1.8)$$

Como la diferencia de fase a lo largo de la zona plana es muy pequeña, se puede considerar que la diferencia de camino óptico entre las líneas \overline{SR} y \overline{SO} es mucho menor que $\lambda/2$ por tanto $d \gg R^2/\lambda$.

Retomando la ecuación (1.7), cuando $z \gg R$ se pueden llegar a las siguientes expresiones

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \cong \frac{1}{z} \quad (1.9)$$

$$\exp[-jk\sqrt{z^2 + r^2}] = \exp\left[jk\left(z + \frac{r^2}{2z}\right)\right] = \exp[-jkz] \exp\left[-jk\frac{r^2}{2z}\right] \quad (1.10)$$

con la cual se hace la aproximación de una onda esférica a una onda aperiódica

Por tanto

$$U(P) = \frac{2\pi A_0}{j\lambda} \int_0^R t(r) \frac{\exp[-jkz] \exp[-jk(r^2/2z)]}{z} r dr \quad (1.11)$$

debido a que la función de transmitancia de la zona plana es cero ($t(r) = 0$), cuando $r > R$, los límites de integración pueden cambiarse de la siguiente forma

$$U(P) = \frac{2\pi A_0}{j\lambda} \frac{\exp[-jkz]}{z} \int_0^\infty t(r) \frac{\exp[-jk(r^2/2z)]}{z} r dr \quad (1.12)$$

dado que $k = 2\pi/\lambda$

$$U(P) = \frac{2\pi A_0}{j\lambda} \frac{\exp[-jkz]}{z} \int_0^\infty t(r) \exp[-j\pi r^2/\lambda z] r dr \quad (1.13)$$

Haciendo la sustitución $r^2 = v$ entonces $2r dr = dv$, cuando $r \rightarrow 0 \Rightarrow v \rightarrow 0$; $r \rightarrow \infty \Rightarrow v \rightarrow \infty$ y $t(r) \rightarrow t(v)$

$$U(P) = \frac{2\pi A_0}{j\lambda} \frac{\exp[-j(2\pi z/\lambda)]}{z} \int_0^\infty t(v) \exp[-j(\pi v/\lambda z)] dv/2$$

$$U(P) = \frac{\pi A_0}{j\lambda z} \exp[-j(2\pi z/\lambda)] \int_0^\infty t(v) \exp[-j(\pi v/\lambda z)] dv \quad (1.14)$$

De la anterior ecuación puede observarse que la amplitud compleja $U(P)$ esta relacionada directamente con la transformada de Fourier de $t(v)$, puesto que (1.14) es de la forma

$$F(w) = \int_{-\infty}^\infty f(\tau) \exp[-jw\tau] d\tau$$

donde w es la frecuencia angular. La intensidad en el punto P es

$$I(P) = U(P)U^*(P)$$

donde

$$U^*(P) = \frac{\pi A_0^* \exp[-j(2\pi z/\lambda)]}{-j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} t^*(v) \exp[j(\pi v/\lambda z)] dv$$

$$I(P) = U(P)U^*(P) = \frac{\pi^2 A_0 A_0^*}{(\lambda z)^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} t(v) \exp[-j(\pi v/\lambda z)] dv \right] \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^*(v) \exp[j(\pi v/\lambda z)] dv \right]$$

la intensidad de la luz incidente es $I_0 = A_0 A_0^*$, entonces

$$I_p = I_0 \left[\frac{\pi^2}{(z\lambda)^2} \right] [P_p] \quad (1.15)$$

donde P_p es la componente del poder espectral de $t(v)$ para la frecuencia angular. Si se escribe la transformada de Fourier de $t(v)$ como

$$F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t(v) \exp[-j(\pi v/\lambda z)] dv \quad (1.16)$$

El poder espectral esta dado por

$$P\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) F^*\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) \quad (1.17)$$

Por tanto la intensidad puede escribirse como

$$I(\lambda, z) = I_0(\lambda) \left(\frac{\pi}{\lambda z}\right)^2 P\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) \quad (1.18)$$

La anterior ecuación muestra la distribución de la intensidad de la luz para cualquier onda plana $I_0(\lambda)$ y cualquier zona plana esta definida por su poder espectral $P(\pi/\lambda z)$. El termino $(\pi/\lambda z)^2$ es un factor de atenuación que implica que la intensidad decrece como $1/z^2$ desde la zona plana. Existen dos importantes aspectos a considerar

- La intensidad de la luz esta directamente relacionada con el poder espectral de la función de transmitancia de la zona plana.
- Para una onda plana $I_0(\lambda)$ que ilumina la zona plana, la intensidad de la luz solo es función de λz .

Debido a que la distribución de la intensidad esta determinada por λz , no es posible crear una zona plana libre de aberración cromática, puesto que de (1.18) se puede ver que

$$I(z, \lambda) = 0 \quad \text{para } z \neq z_0 \quad (1.19)$$

y

$$I(z, \lambda) \neq 0 \quad \text{para } z = z_0 \quad (1.20)$$

Por tanto

$$\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right)^2 P\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = 0 \quad \text{excepto para } \lambda z = \lambda_0 z_0 \quad (1.21)$$

De las anteriores expresiones se tiene que $P(\pi/\lambda z)$ debe ser cero para todo punto excepto en $(\pi/\lambda z) = (\pi/\lambda_0 z_0)$. Si consideramos que $\lambda_0 z_0 = a^2$, la función de transmitancia que satisface dicha condición es

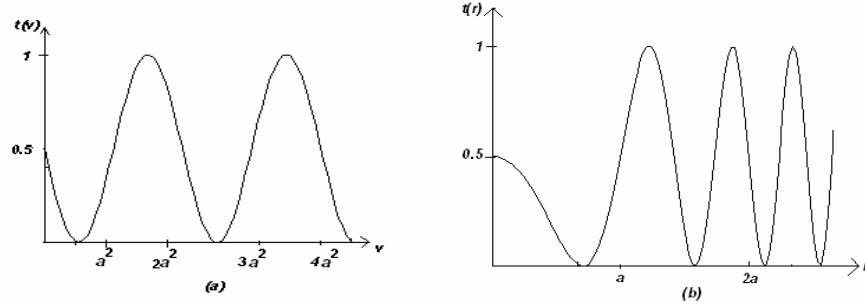
$$t(v) = \frac{1}{2} \left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2} \right) \quad (1.22)$$

si $v = r^2$, entonces

$$t(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \text{sen} \frac{\pi r^2}{a^2} \right) \quad (1.23)$$

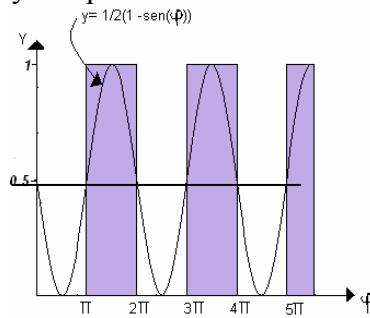
Usualmente la zona plana de Fresnel es una onda cuadrada que se aproxima a la función de transmitancia descrita por (1.22). La función de transmitancia de onda sinusoidal para una zona plana se muestra en la figura 1.8a.

Figura 1.8. Función de transmitancia sinusoidal de una zona plana (a) como función de v (b) como función de r



Cuando la función de transmitancia se dibuja como una función de v , esta varía sinusoidalmente con v (donde v es igual al radio de la zona plana al cuadrado). Por el contrario si la función de transmitancia se dibuja como una función del radio r , dicha función es una onda de forma sinusoidal que se incrementa frecuentemente como muestra la figura 1.8b.

Figura 1.9. Función sinusoidal y su aproximación cuadrada



La onda cuadrada $t(r)$ que aproxima la zona plana se puede determinar fácilmente observando la Figura 1.9, la cual muestra una onda sinusoidal sobre la línea $y = 1/2$, los puntos de corte pueden localizarse haciendo

$$y = \frac{1}{2}(1 - \text{sen } \varphi) = \frac{1}{2} \quad (1.24)$$

cuando $\text{sen } \varphi = 0 \rightarrow \varphi = N\pi$

donde $N = 0, 1, 2, \dots$

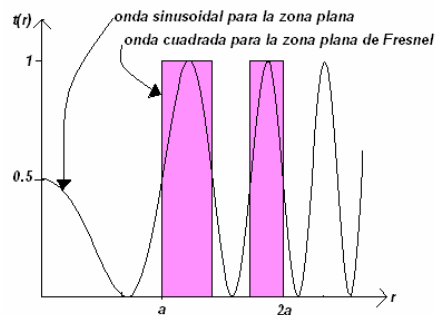
Además se presenta que

$$f(\varphi) = 1 \quad \text{para} \quad (2N - 1)\pi \leq \varphi \leq 2N\pi \quad (1.25)$$

donde $N = 1, 2, 3, \dots$. Para todos los otros valores la onda cuadrada es cero.

Si se hace $\varphi = (\pi r^2/a^2)$, puede observarse la diferencia entre una zona plana de onda sinusoidal y su onda cuadrada aproximada como se muestra en la figura 1.10

Figura 1.10. Comparación entre una zona plana de Fresnel y una zona plana sinusoidal



Según (1.17) el poder espectral de la zona plana de onda sinusoidal puede calcularse utilizando la transformada de Fourier, en el caso de la función de transmitancia dada por (1.22) $F[t(v)]$ tiene la forma

$$F[t(v)] = \int_0^\infty t(v) \exp[-j(\pi v/\lambda z)] dv = \int_0^\infty \frac{1}{2} \left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2} \right) \exp[-j(\pi v/\lambda z)] dv \quad (1.26)$$

Como $t(v)=0$ cuando $v>R^2$ y cuando $v<0$, los limites de integración varían, entonces el poder espectral esta dado por

$$P\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = \int_0^{R^2} \frac{1}{2} \left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) \exp[-j(\pi v/\lambda z)] dv \int_0^{R^2} \frac{1}{2} \left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) \exp[j(\pi v/\lambda z)] dv \quad (1.27)$$

Sustituyendo en (1.27) el término

$$\exp[\pm j\theta] = \cos \theta \pm j \text{sen} \theta$$

se tiene que

$$P\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = \int_0^{R^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) \cos \frac{\pi v}{\lambda z} - \frac{1}{2} \left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) j \left(\text{sen} \frac{\pi v}{\lambda z}\right) \right] dv \times$$

$$\int_0^{R^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) \cos \frac{\pi v}{\lambda z} + \frac{1}{2} \left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) j \left(\text{sen} \frac{\pi v}{\lambda z}\right) \right] dv \quad (1.28)$$

Si

$$\alpha = \int_0^{R^2} \left[\left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) \cos \frac{\pi v}{\lambda z} \right] dv \quad (1.29)$$

$$\beta = \int_0^{R^2} \left[\left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) \text{sen} \frac{\pi v}{\lambda z} \right] dv \quad (1.30)$$

Entonces el poder espectral estará dado por:

$$P\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = \frac{1}{4} \left[\int_0^{R^2} \left[\left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) \cos \frac{\pi v}{\lambda z} \right] dv - \int_0^{R^2} \left[j \left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) \text{sen} \frac{\pi v}{\lambda z} \right] dv \right] \times$$

$$\left[\int_0^{R^2} \left[\left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) \cos \frac{\pi v}{\lambda z} \right] dv + \int_0^{R^2} \left[j \left(1 - \text{sen} \frac{\pi v}{a^2}\right) \text{sen} \frac{\pi v}{\lambda z} \right] dv \right]$$

$$= \frac{1}{4} [(\alpha - j\beta)(\alpha + j\beta)]$$

$$P\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \quad (1.31)$$

Utilizando la propiedad trigonométrica

$$\text{sen}A \cos B = \frac{1}{2} [\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B)] \quad (1.32)$$

$$\alpha = \int_0^{R^2} \cos \frac{\pi v}{\lambda z} dv - \int_0^{R^2} \left[\text{sen} \frac{\pi v}{a^2} \cos \frac{\pi v}{\lambda z} \right] dv \quad (1.33)$$

$$\alpha = \int_0^{R^2} \cos \frac{\pi v}{\lambda z} dv - \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \text{sen} \left(\frac{\pi v}{a^2} + \frac{\pi v}{\lambda z} \right) dv - \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \text{sen} \left(\frac{\pi v}{a^2} - \frac{\pi v}{\lambda z} \right) dv \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda z}{\pi} \text{sen} \frac{\pi v}{\lambda z} \Big|_0^{R^2} + \frac{1}{2(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \cos \left(\frac{\pi v}{a^2} + \frac{\pi v}{\lambda z} \right) \Big|_0^{R^2} \\ &+ \frac{1}{2(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \cos \left(\frac{\pi v}{a^2} - \frac{\pi v}{\lambda z} \right) \Big|_0^{R^2} \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda z}{\pi} \text{sen} \frac{\pi R^2}{\lambda z} + \frac{1}{2(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \\ &\times \left[\left(\cos \left(\frac{\pi R^2}{a^2} + \frac{\pi R^2}{\lambda z} \right) \right) - 1 \right] + \frac{1}{2(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \\ &\times \left[\left(\cos \left(\frac{\pi R^2}{a^2} - \frac{\pi R^2}{\lambda z} \right) \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Para calcular β se utiliza la fórmula trigonométrica

$$\text{sen}A \text{sen}B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\beta = \int_0^{R^2} \text{sen} \frac{\pi v}{\lambda z} dv + \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \cos \left(\frac{\pi v}{a^2} - \frac{\pi v}{\lambda z} \right) dv - \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \cos \left(\frac{\pi v}{a^2} + \frac{\pi v}{\lambda z} \right) dv \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} &= - \left(\frac{\lambda z}{\pi} \right) \cos \frac{\pi v}{\lambda z} \Big|_0^{R^2} + \frac{1}{2(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \text{sen} \left(\frac{\pi v}{a^2} - \frac{\pi v}{\lambda z} \right) \Big|_0^{R^2} \\ &+ \frac{1}{2(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \text{sen} \left(\frac{\pi v}{a^2} + \frac{\pi v}{\lambda z} \right) \Big|_0^{R^2} \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \beta &= - \frac{\lambda z}{\pi} \left[\left(\cos \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z} \right) \right) - 1 \right] + \frac{1}{2(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \text{sen} \left(\frac{\pi R^2}{a^2} - \frac{\pi R^2}{\lambda z} \right) \\ &- \frac{1}{2(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \text{sen} \left(\frac{\pi R^2}{a^2} + \frac{\pi R^2}{\lambda z} \right) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Teniendo en cuenta que el periodo de la función de transmitancia dada es $2a^2$, entonces cuando $r^2 = 2a^2$ la función seno comienza a repetirse debido a que el ángulo es 2π . Asumiendo que la zona plana consiste en una integral numérica de N ciclos, el limite máximo de v esta dado por $v = R^2 = 2Na^2$, sustituyendo este valor en las ecuaciones (1.36) y (1.39) se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda z}{\pi} \text{sen} \left(\frac{2N\pi a^2}{\lambda z} \right) + \frac{1}{2(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \left[\left\{ \cos 2\pi N \left(1 + \frac{a^2}{\lambda z} \right) \right\} - 1 \right] \\ &+ \frac{1}{2(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \left[\left\{ \cos 2\pi N \left(1 - \frac{a^2}{\lambda z} \right) \right\} - 1 \right] \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\beta = - \frac{\lambda z}{\pi} \left[\left\{ \cos \left(\frac{2N\pi a^2}{\lambda z} \right) \right\} - 1 \right] + \frac{1}{2(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \text{sen} 2\pi N \left(1 - \frac{a^2}{\lambda z} \right)$$

$$-\frac{1}{2(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \text{sen} 2\pi N \left(1 + \frac{a^2}{\lambda z}\right) \quad (1.41)$$

Si se considera que el valor $\lambda z \rightarrow a^2$, entonces eventualmente $\alpha \rightarrow 0$ y

$$\beta \approx + \frac{1}{2(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \left[\text{sen} 2\pi N \left(1 - \frac{a^2}{\lambda z}\right) \right] \quad (1.42)$$

Por tanto

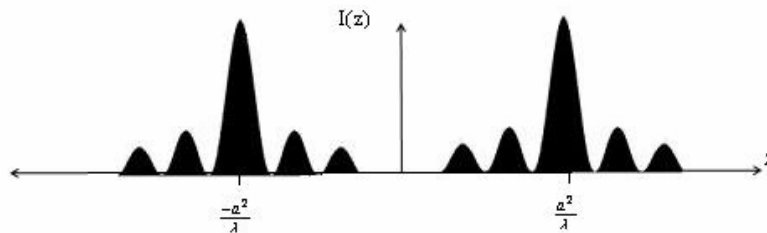
$$P\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = \frac{1}{4} \left[\frac{Na^2 \text{sen} 2\pi N (1 - a^2/\lambda z)}{2\pi N (1 - a^2/\lambda z)} \right]^2 \quad (1.43)$$

$$I(\lambda, z) = \frac{I_0}{4} \left(\frac{\pi}{\lambda z}\right)^2 \left[\frac{Na^2 \text{sen} 2\pi N (1 - a^2/\lambda z)}{2\pi N (1 - a^2/\lambda z)} \right]^2 \quad (1.44)$$

Si $\pi/\lambda z \rightarrow \pi/a^2$ entonces $P\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = \frac{N^2 a^4}{4}$. Por el contrario si $z \rightarrow \infty$ entonces $P(0) = Na^4$

y la intensidad será nula.

Figura 1.11. Intensidad para una zona plana sinusoidal como función de z



1.5. CARACTERISTICAS DE UNA ZONA PLANA DE FRESNEL

Como la zona plana de Fresnel es esencialmente una aproximación cuadrada de la función de transmitancia dada por la ecuación (1.23), la expansión de esta ecuación puede escribirse como

$$t(v) = 0.5 - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi v}{a^2} - \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen} \frac{3\pi v}{a^2} - \frac{2}{5\pi} \operatorname{sen} \frac{5\pi v}{a^2} \dots \quad (1.45)$$

Si se reescribe la transformada de Fourier como una suma de integrales desde $-\infty$ hasta ∞ , donde $\omega = \pi/\lambda z$

$$F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = \int_{-\infty}^0 t(v) e^{-j\pi v/\lambda z} dv + \int_0^{R^2} t(v) e^{-j\pi v/\lambda z} dv + \int_{R^2}^{\infty} t(v) e^{-j\pi v/\lambda z} dv \quad (1.46)$$

Haciendo $v = r^2$, no es posible la presencia de valores negativos, así que $t(v) = 0$ si v es negativo, de ahí que la primera y tercera integral de (1.46) sean cero. Entonces:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) &= \int_0^{R^2} t(v) e^{-j\pi v/\lambda z} dv \\ &= \int_0^{R^2} \left(0.5 - \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi v}{a^2} - \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen} \frac{3\pi v}{a^2} - \frac{2}{5\pi} \operatorname{sen} \frac{5\pi v}{a^2} \dots\right) e^{-j\pi v/\lambda z} dv \quad (1.47) \\ &= \int_0^{R^2} 0.5 e^{-j\pi v/\lambda z} dv - \int_0^{R^2} \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi v}{a^2} e^{-j\pi v/\lambda z} dv - \int_0^{R^2} \dots \\ &= 0.5 \int_0^{R^2} e^{-j\pi v/\lambda z} dv - \frac{2}{\pi} \int_0^{R^2} \frac{e^{j(\pi v/a^2 - \pi v/\lambda z)} - e^{-j(\pi v/a^2 - \pi v/\lambda z)}}{2j} dv - \int_0^{R^2} \dots \\ &= 0.5 \left[-\frac{\lambda z}{j\pi} e^{-j\pi v/\lambda z} \right]_0^{R^2} - \frac{1}{\pi j} \left[\frac{1}{j(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} e^{j(\pi v/a^2 - \pi v/\lambda z)} \right]_0^{R^2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi j} \left[\frac{1}{-j(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} e^{-j(\pi v/a^2 - \pi v/\lambda z)} \right]_0^{R^2} \\ &= 0.5 \left[-\frac{\lambda z}{j\pi} \left\{ e^{j\pi R^2/\lambda z} - 1 \right\} \right] + \frac{1}{\pi(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \left[e^{j(\pi R^2/a^2 - \pi R^2/\lambda z)} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\pi(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \left[e^{-j(\pi R^2/a^2 + \pi R^2/\lambda z)} - 1 \right] \quad (1.48)$$

$$F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = \frac{1 - e^{j\pi R^2/\lambda z}}{2j\pi/\lambda z} + \frac{1}{\pi(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \left[e^{j(\pi R^2/a^2 - \pi R^2/\lambda z)} - 1 \right] \\ - \frac{1}{\pi(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \left[1 - e^{-j(\pi R^2/a^2 + \pi R^2/\lambda z)} \right] \quad (1.49)$$

Utilizando la forma exponencial de la función seno, la ecuación (1.49) puede verse de la siguiente forma

$$F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = \exp\left[-j(\pi R^2/2\lambda z)(R^2/2)\right] \frac{\text{sen}(\pi R^2/2\lambda z)}{\pi R^2/2\lambda z} \\ + j \exp\left[j \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{a^2} - \frac{\pi}{\lambda z}\right)\right] \left(\frac{2 R^2}{\pi}\right) \frac{\text{sen}(R^2/2)(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)}{(R^2/2)(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \\ - j \exp\left[-j \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{a^2} + \frac{\pi}{\lambda z}\right)\right] \left(\frac{2 R^2}{\pi}\right) \frac{\text{sen}(R^2/2)(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)}{(R^2/2)(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \quad (1.50)$$

Entonces si:

$$\frac{\pi}{\lambda z} \rightarrow 0 \quad F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) \approx \exp\left[-j(\pi R^2/2\lambda z)(R^2/2)\right] \frac{\text{sen}(\pi R^2/2\lambda z)}{\pi R^2/2\lambda z} \quad (1.51)$$

$$\frac{\pi}{\lambda z} \rightarrow \frac{\pi}{a^2} \quad F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) \approx j \exp\left[j \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{a^2} - \frac{\pi}{\lambda z}\right)\right] \left(\frac{R^2}{\pi}\right) \frac{\text{sen}(R^2/2)(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)}{(R^2/2)(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \quad (1.52)$$

$$\frac{\pi}{\lambda z} \rightarrow -\frac{\pi}{a^2} \quad F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) \approx -j \exp\left[-j \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{a^2} + \frac{\pi}{\lambda z}\right)\right] \left(\frac{R^2}{\pi}\right) \frac{\text{sen}(R^2/2)(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)}{(R^2/2)(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \quad (1.53)$$

Como el poder espectral esta definido como

$$P\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) = F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right)F^*\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right)$$

Entonces

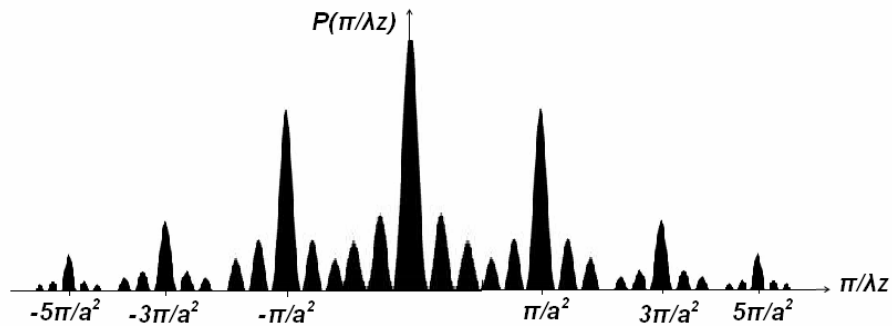
$$\frac{\pi}{\lambda z} \rightarrow 0 \quad F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) \approx \frac{R^4}{4} \left[\frac{\text{sen}(\pi R^2/2\lambda z)}{\pi R^2/2\lambda z} \right]^2 \quad (1.54)$$

$$\frac{\pi}{\lambda z} \rightarrow \frac{\pi}{a^2} \quad F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) \approx \frac{R^4}{\pi^2} \left[\frac{\text{sen}(R^2/2)(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)}{(R^2/2)(\pi/a^2 - \pi/\lambda z)} \right]^2 \quad (1.55)$$

$$\frac{\pi}{\lambda z} \rightarrow -\frac{\pi}{a^2} \quad F\left(\frac{\pi}{\lambda z}\right) \approx \frac{R^4}{\pi} \left[\frac{\text{sen}(R^2/2)(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)}{(R^2/2)(\pi/a^2 + \pi/\lambda z)} \right]^2 \quad (1.56)$$

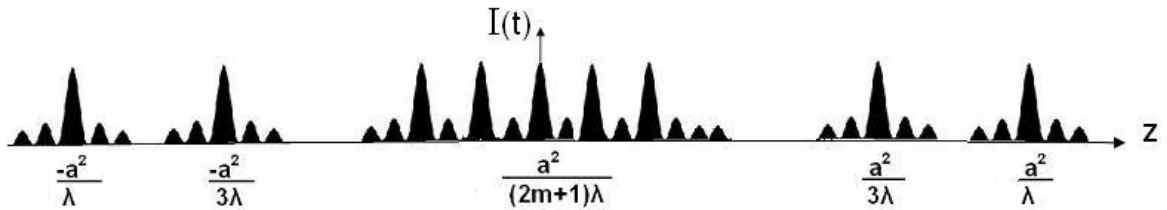
Si se considera que $\text{sen}x/x = 1$ entonces el poder espectral tiene la siguiente forma

Figura 1.12. Poder espectral para una zona plana de Fresnel



Conociendo que la respuesta total es la convolución con la respuesta impulsional de la pupila principal, que es la lente, se obtienen todos los picos ensanchados

Figura 1.13. Intensidad para una zona plana de Fresnel

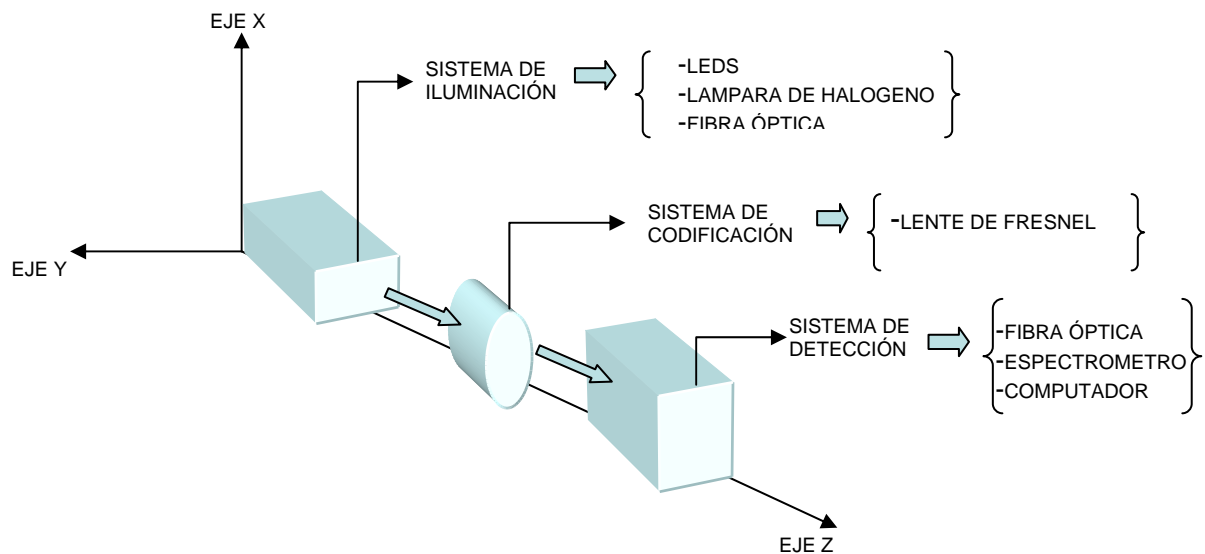


La intensidad en dichos puntos se presenta como se observa en la Figura 1.13, aquí todos los puntos focales poseen igual valor en intensidad, pero al dirigirse al origen dichos focos se van acumulando cada vez más debido al factor $(2m+1)$ superponiéndose unos con otros puesto que por cada anillo m irá aumentando. Además, conociendo que la respuesta total es la convolución con la respuesta impulsional de la pupila principal, que es la lente se obtiene todos los picos ensanchados.

2. MONTAJE EXPERIMENTAL

En este capítulo se describirá el montaje experimental, utilizado, ver Figura 2.1, y cada uno de los componentes necesarios para generar un segmento cromático. El montaje puede dividirse en tres áreas: sistema de iluminación, sistema de codificación y sistema de detección.

Figura 2.1. Esquema general del montaje experimental utilizado en este trabajo.



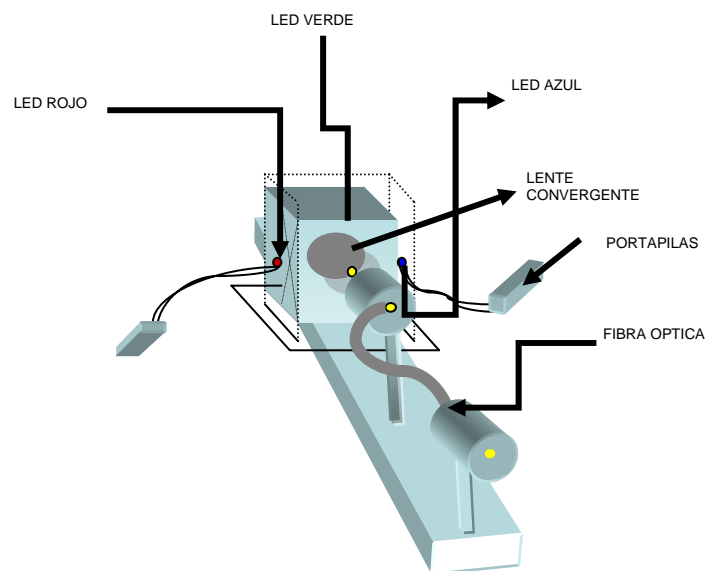
El sistema de iluminación está comprendido por varios tipos de LEDs (azul, verde, rojo, blanco) y una lámpara de halógeno con filamento. La radiación de la fuente pasa a través de una fibra óptica, que se convierte en fuente puntual secundaria y que ilumina la zona plana de Fresnel que realiza la codificación cromática. La información de cada punto del segmento cromático es analizada mediante un espectrómetro, que utiliza una fibra óptica

para introducir la radiación al sistema. El espectro puede ser almacenado en un computador para su posterior análisis.

2.1 SISTEMA DE ILUMINACIÓN

Inicialmente se utilizaron diodos emisores de luz (LEDS) de diversos colores, los cuales hacen las veces de fuentes puntuales cuasimonocromáticas cuya radiación se lleva hasta la zona plana de Fresnel a través de una fibra óptica multimodo, marca Edmund Optics, de 5mm de diámetro y 60cm de longitud. La Figura 2.2 presenta un esquema general de la fuente de iluminación.

Figura 2.2. Sistema de iluminación

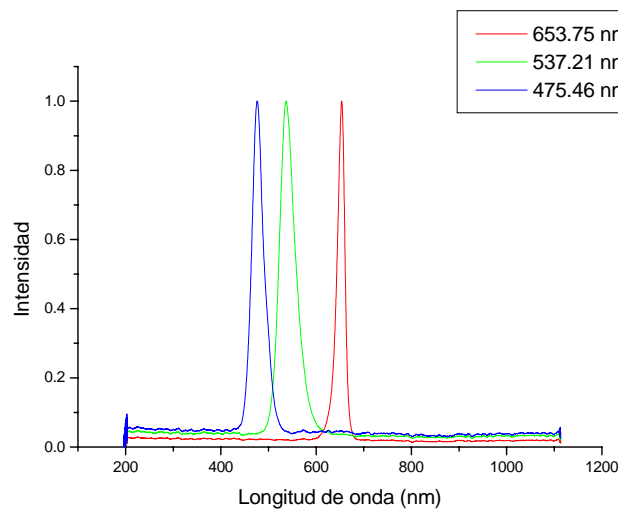


La longitud de onda de emisión de un led varía dependiendo del material con el cual se construye. La tabla 1.1 presenta un listado de las características de algunos leds que se utilizaron en el montaje experimental. El espectro de cada led obtenido sin la presencia de la zona plana de Fresnel se observa en la Figura 2.3, de esta forma se estableció el rango espectral que cada led emite.

Tabla 1.1 Características de algunos LEDS utilizados en el desarrollo de esta tesis

Material	Longitud de Onda	Color	V _d Típica
AsGa (Arseniuro de galio)	904 nm	IR	1 V
InGaAsP (Arseniuro fosfuro de galio)	1300 nm	IR	1 V
AsGaAl (Arseniuro de galio y aluminio)	700-690 nm	Rojo	1,5 -2.5 V
AsGaP (Arseniuro fosfuro de galio)	590 nm	Amarillo	1,6 V
InGaAlP	520-570 nm	Verde	2,7 V
Nitruro de galio e indio (InGaN)	450 nm	Azul	2.7 V
Csi (Carburo de Silicio)	470-480 nm	Azul	3 V

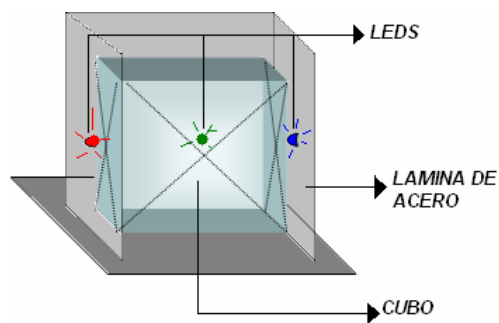
Figura 2.3. Espectro de los diferentes leds utilizados como fuentes. En el inserto se presenta la longitud de onda del máximo de cada uno.



Otro aspecto que se tuvo en cuenta en el proceso de adquisición de datos, fue utilizar los mismos leds durante todo el proceso, pues la intensidad de dichos dispositivos varía de un led a otro, aunque aparenten ser de la misma longitud de onda y material.

Los diodos se ubicaron alrededor de un cubo formado por cuatro prismas, Figura 2.4, cuya función es mezclar la radiación emitida por los tres leds. Una lente convergente focalizó la radiación en la fibra óptica y esta ilumina la zona plana de Fresnel.

Figura 2.4. Cubo conformado por cuatro prismas que permite la mezcla de la radiación emitida por los tres leds.



Como fuente puntual policromática se utilizó un led blanco y una lámpara de halógeno con filamento, frente a la lámpara se le colocó un difusor para originar una onda plana.

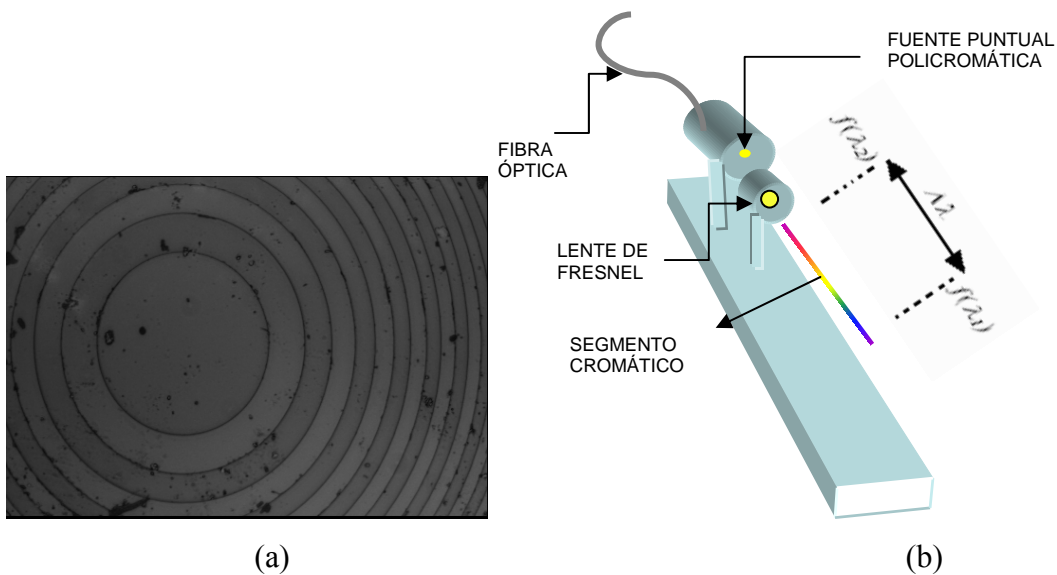
2.2 SISTEMA DE CODIFICACIÓN DE LONGITUD DE ONDA

La codificación cromática de las longitudes de onda se realizó mediante una zona plana de Fresnel (Zona Plana de Fresnel) la cual posee un diámetro de 8mm y radio de la primera

zona $a=151.52\mu\text{m}$ datos obtenidos a partir de una imagen tomada con un interferómetro de luz blanca con un objetivo de microscopio de 10x (ver Figura 2.5a)

Cuando se utiliza una fuente policromática (tres leds combinados, led blanco ó lámpara de halógeno con filamento), cada longitud de onda contenida en su espectro presenta una intensidad máxima en determinados puntos sobre el eje óptico, y en esa misma posición las demás longitudes de onda se verán disminuidas con respecto a sus valores originales en intensidad, ver Figura 2.5b.

Figura 2.5. (a) Imagen de la zona plana de Fresnel utilizada (b) Segmento cromático generado por la zona plana de Fresnel



Es así como se determina la existencia de un segmento cromático a lo largo del eje óptico de la zona plana que comprende cada una de las longitudes de onda presentes en el espectro de la fuente puntual.

Entonces si $f(\lambda_1)$ y $f(\lambda_2)$ son calculados para λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces se crea un segmento de longitudes de onda $\Delta\lambda$ como lo muestra la Figura 2.5, el cual está definido por la relación

$$\Delta\lambda = f(\lambda_1) - f(\lambda_2) \quad (2.1)$$

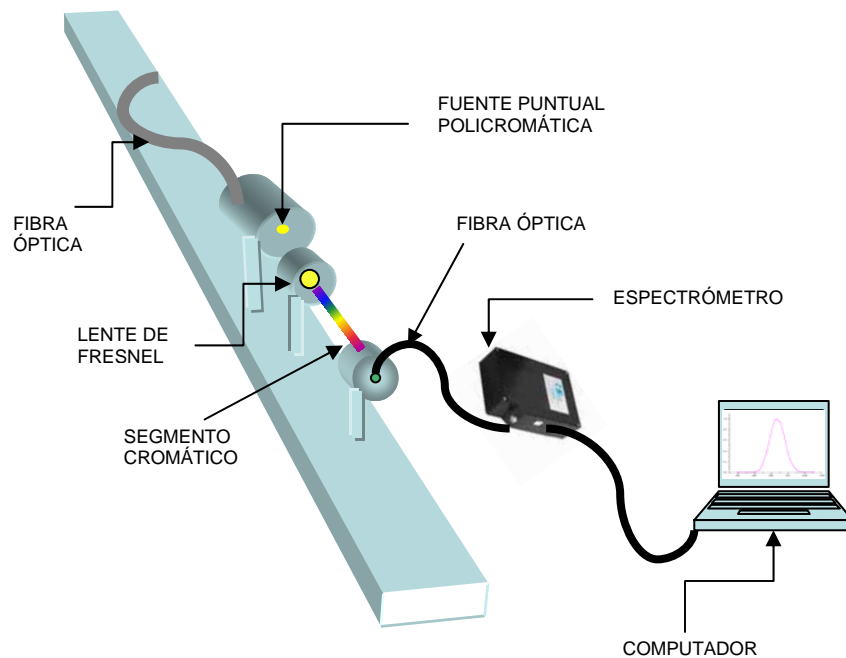
Por lo tanto, para realizar una codificación cromática longitudinal de z (eje óptico), cada posición focal $f(\lambda)$ se puede convertir a posiciones relativas, z_λ sobre el eje óptico mediante la relación:

$$f(\lambda_z) = f(\lambda) - f(\lambda_0) \quad (2.2)$$

Donde, λ_0 es una longitud de onda de referencia.

2.3 SISTEMA DE DETECCIÓN

Figura 2.6. Esquema general del sistema de detección

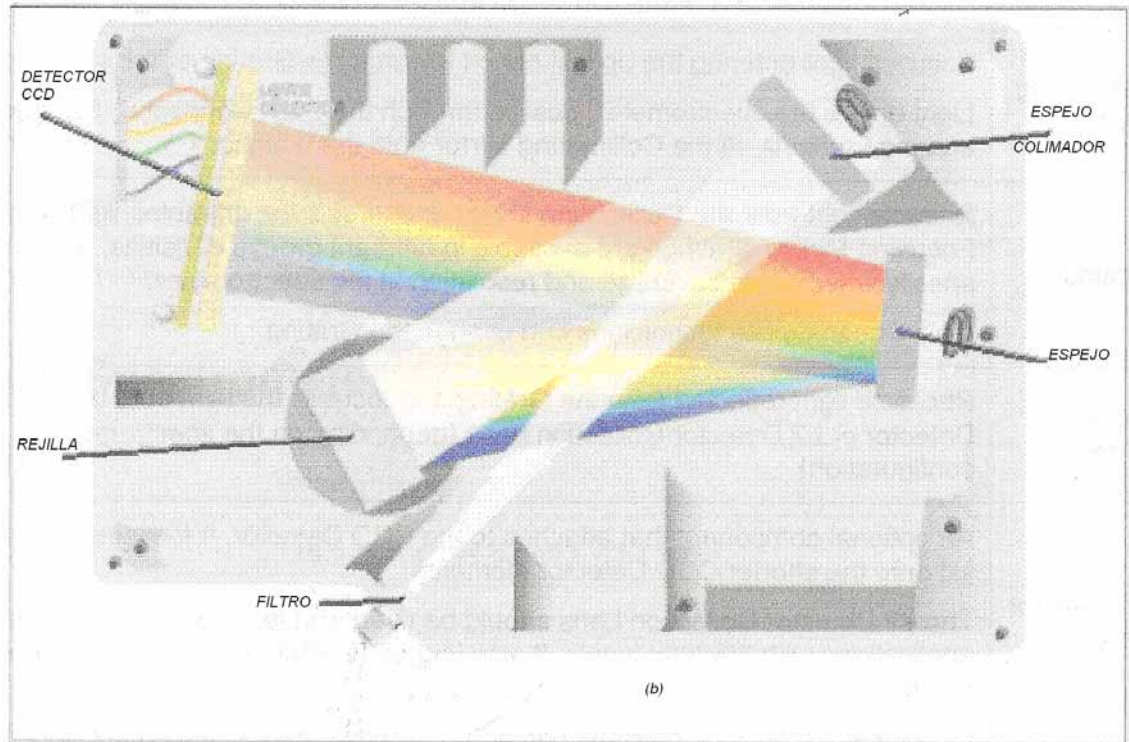


El sistema de detección, Figura 2.6, está conformado por el espectrómetro HR4000 de Ocean Optics, el cual posee una fibra óptica de $50\mu\text{m}$ de núcleo y hendidura fija de $5\mu\text{m}$. La fibra óptica se ubica sobre un sistema de desplazamiento formado por tres microdesplazadores, ubicados de tal forma que permiten mover la fibra sobre tres ejes de coordenadas, y de esta forma se traslada la fibra a lo largo del segmento cromático longitudinal generado por la zona plana de Fresnel.

Como se muestra en la figura 2.7b, el espectrómetro está conformado básicamente por un filtro eliminador de órdenes superiores, un espejo colimador que focaliza la luz incidente sobre la rejilla que difracta la luz y la refleja hacia un espejo que a su vez la focaliza sobre el detector, marca Toshiba TCD1304AP linear CCD array de 3648 píxeles, con tamaño de píxel: $8\mu\text{m} \times 200\mu\text{m}$, que convierte la señal óptica en una señal digital. El rango espectral del espectrómetro es de 200-1100nm.

Figura 2.7. (a) Espectrómetro HR4000 de Ocean Optics (b) Esquema interno del espectrómetro





El espectrómetro transmite la señal digital al computador, para ello utiliza el programa OOIBASE32, el cual es un programa que permite obtener el espectro de la luz incidente y adicionalmente permite controlar los parámetros de adquisición de datos, tales como el tiempo de exposición.

3. ANALISIS DE DATOS

El primer paso es la identificación del eje óptico de la zona plana de Fresnel, pues es en esta región donde se va a observar el segmento cromático.

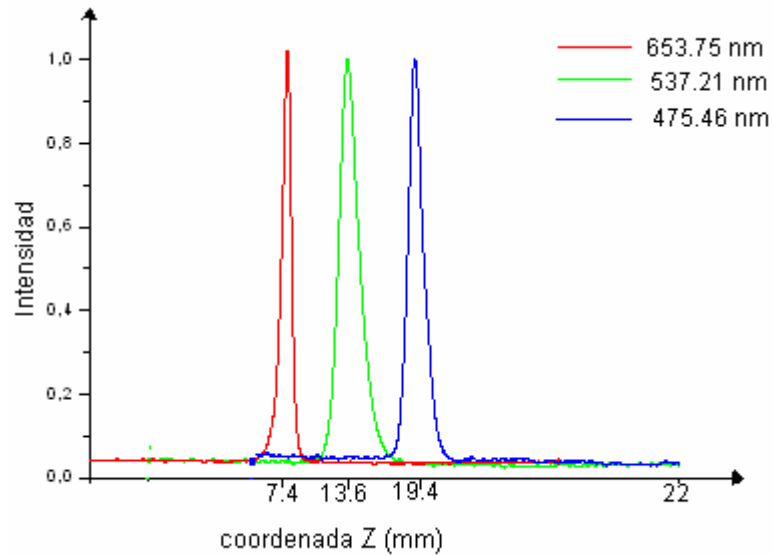
En la tabla 3.1 pueden observarse las coordenadas (x,y,z) correspondientes a los máximos de emisión de cada uno de los leds utilizados. El tiempo de integración utilizado durante el proceso de adquisición de datos se mantuvo constante en 500 [ms]. Como origen de la coordenada z se tomó la posición de la zona plana de Fresnel.

Tabla 3.1. Coordenadas de los máximos de emisión de los tres leds utilizados.

<i>LED</i>	<i>LONGITUD DE ONDA (nm)</i>	<i>X (mm)</i>	<i>Y(mm)</i>	<i>Z(mm)</i>
<i>Rojo</i>	<i>653,75</i>	<i>4,22</i>	<i>15,3</i>	<i>7.4</i>
<i>Verde</i>	<i>537,21</i>	<i>4,22</i>	<i>15,3</i>	<i>13,6</i>
<i>Azul</i>	<i>475,46</i>	<i>4,22</i>	<i>15,3</i>	<i>19.4</i>

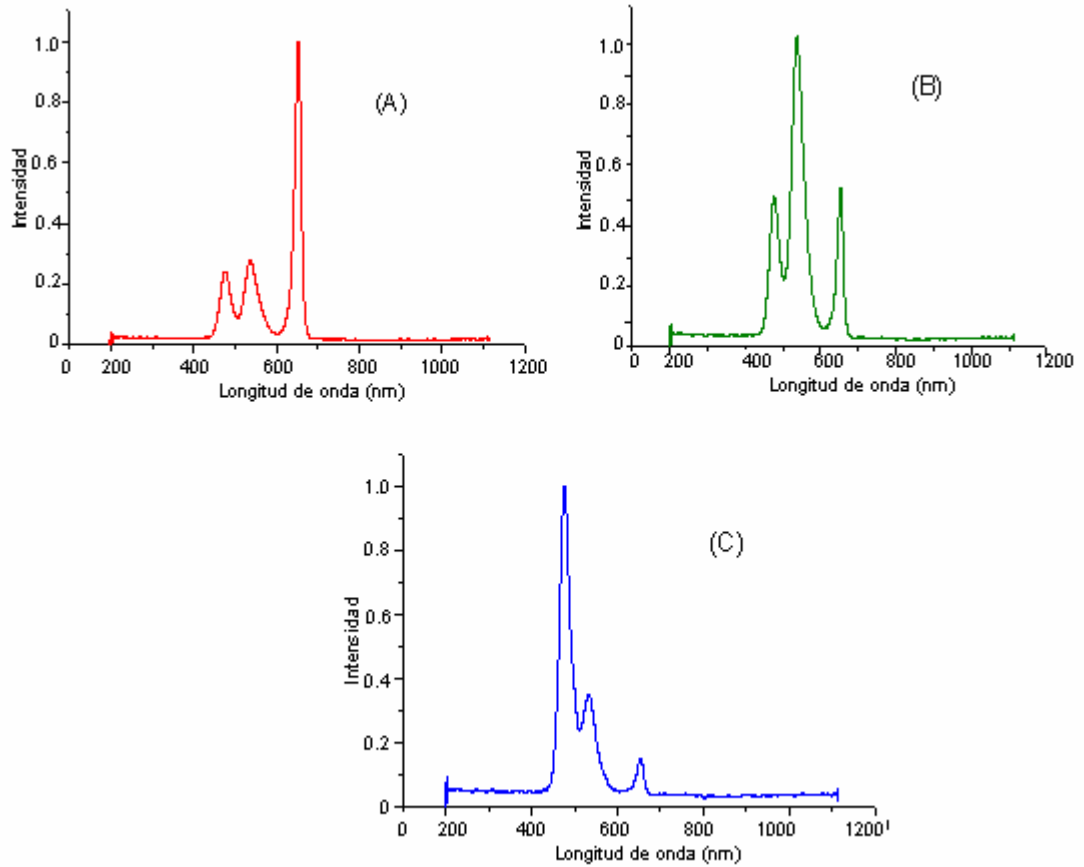
En la Figura 3.1 se muestran los espectros de la radiación emitida por los tres diodos (cada uno de ellos normalizados a su valor de máxima intensidad), en la coordenada z para la cual se obtiene el máximo de emisión.

Figura 3.1. Espectro normalizado de la radiación emitida por los leds versus coordenada z para la cual se obtiene el máximo de emisión.



Si se ilumina la zona plana de Fresnel con los 3 leds simultáneamente, su radiación combinada puede considerarse como una fuente policromática, de forma que al ubicar la fibra óptica del espectrómetro en cada punto focal encontrado con anterioridad (tabla 3.1), la longitud de onda correspondiente a cada posición óptima de z, es mucho mayor en intensidad que las otras dos, con lo cual se corrobora la teoría expuesta en el capítulo anterior.

Figura 3.2. Espectro obtenido cuando se ilumina simultáneamente con los tres leds. La coordenada z corresponde a las posiciones óptimas de la tabla 3.1. (A) $z = 7.4mm$ (B) $z = 13.6mm$ (C) $z = 19.4mm$

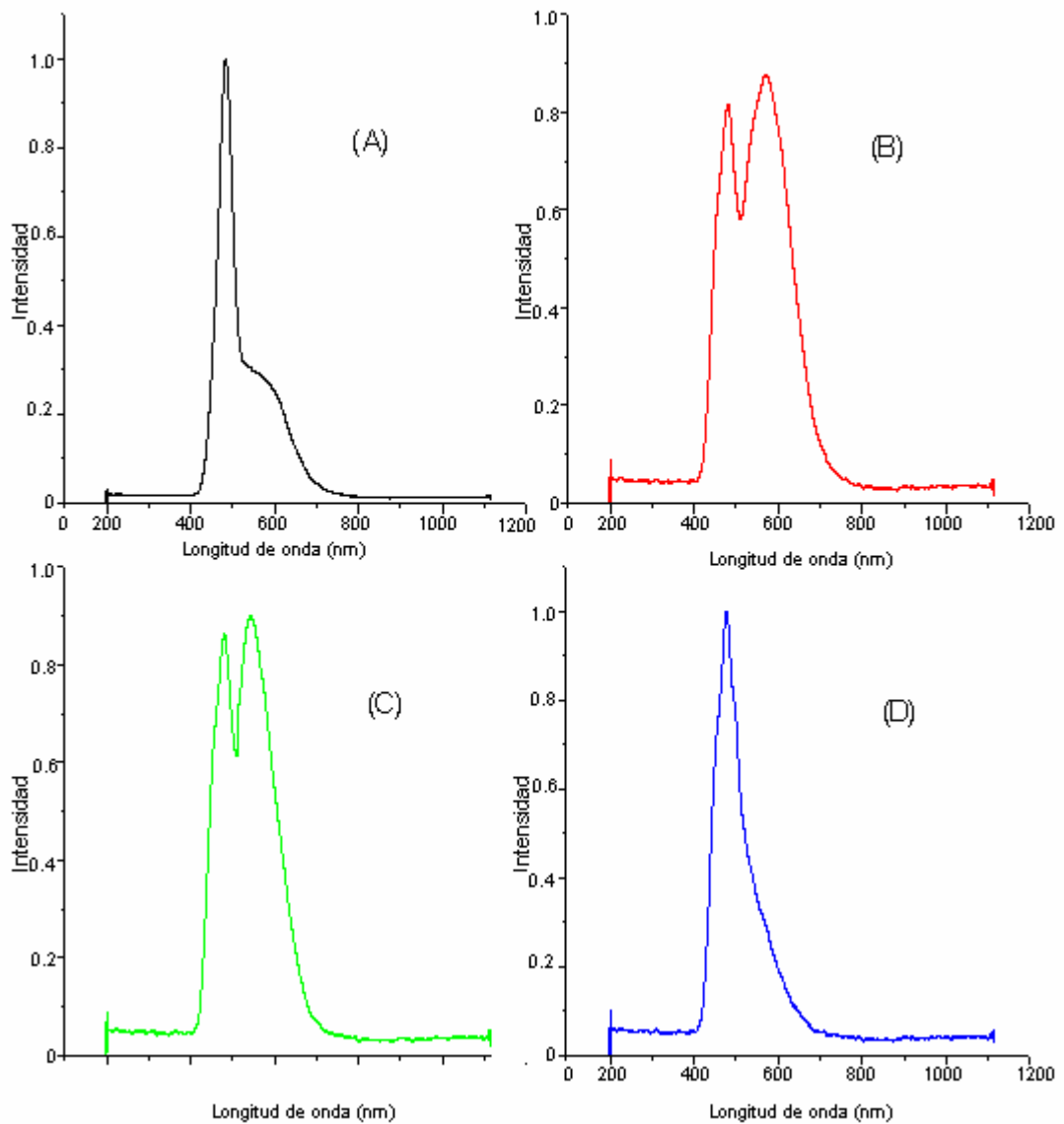


La Figura 3.2(A) muestra el espectro de la fuente para la posición $z=7.4mm$ que corresponde a la distancia focal óptima para la longitud de onda $\lambda=653.75nm$. De igual forma, la Figura 3.2(B)muestra el espectro de la fuente para la posición $z=13.6mm$ que corresponde a la distancia focal óptima para la longitud de onda $\lambda=537.21nm$. La Figura 3.2(C) muestra el espectro de la fuente para la posición $z=19.4mm$ que corresponde a la distancia focal óptima para la longitud de onda $\lambda=475.46nm$. En cada una de las gráficas se puede observar picos correspondientes a la longitud de onda de los otros dos leds, esto se debe a que la lente utilizada es una zona plana de Fresnel la cual por su forma, bloquea la

mitad de la radiación incidente y no toda la energía se transfiere al foco primario, haciendo que la radiación restante pase a focos de orden superior.

Para analizar el comportamiento de la zona plana de Fresnel iluminada por una fuente de luz blanca, primero se utilizó un led blanco, situación que se muestra en la Figura 3.3. En la Figura 3.3(a), se presenta el espectro normalizado del diodo sin la intervención de la zona plana de Fresnel. Puede observarse que el led realmente no es una fuente de luz blanca perfecta pues el pico principal de su espectro está localizado en $\lambda = 475.46nm$. Esto se debe a que para su fabricación se utiliza un led azul, al cual se le hace un recubrimiento fosforescente que transforma la luz azul en amarilla, de forma que ajustando la concentración de dicho recubrimiento se mezclan la luz azul y amarilla, obteniéndose una fuente de apariencia blanca.

Figura 3.3. Espectros normalizados, obtenidos cuando se ilumina con el led blanco. (A) Espectro del Led blanco, sin la zona plana de Fresnel. Espectros obtenidos para las coordenadas: (B) $z = 7.4mm$ (C) $z = 13.6mm$ (D) $z = 19.4mm$



En la figura 3.3(B) la fibra óptica del espectrómetro está ubicada en la coordenada $z=7.4mm$, surge un nuevo pico correspondiente a a $\lambda=653.75nm$ con una intensidad mayor

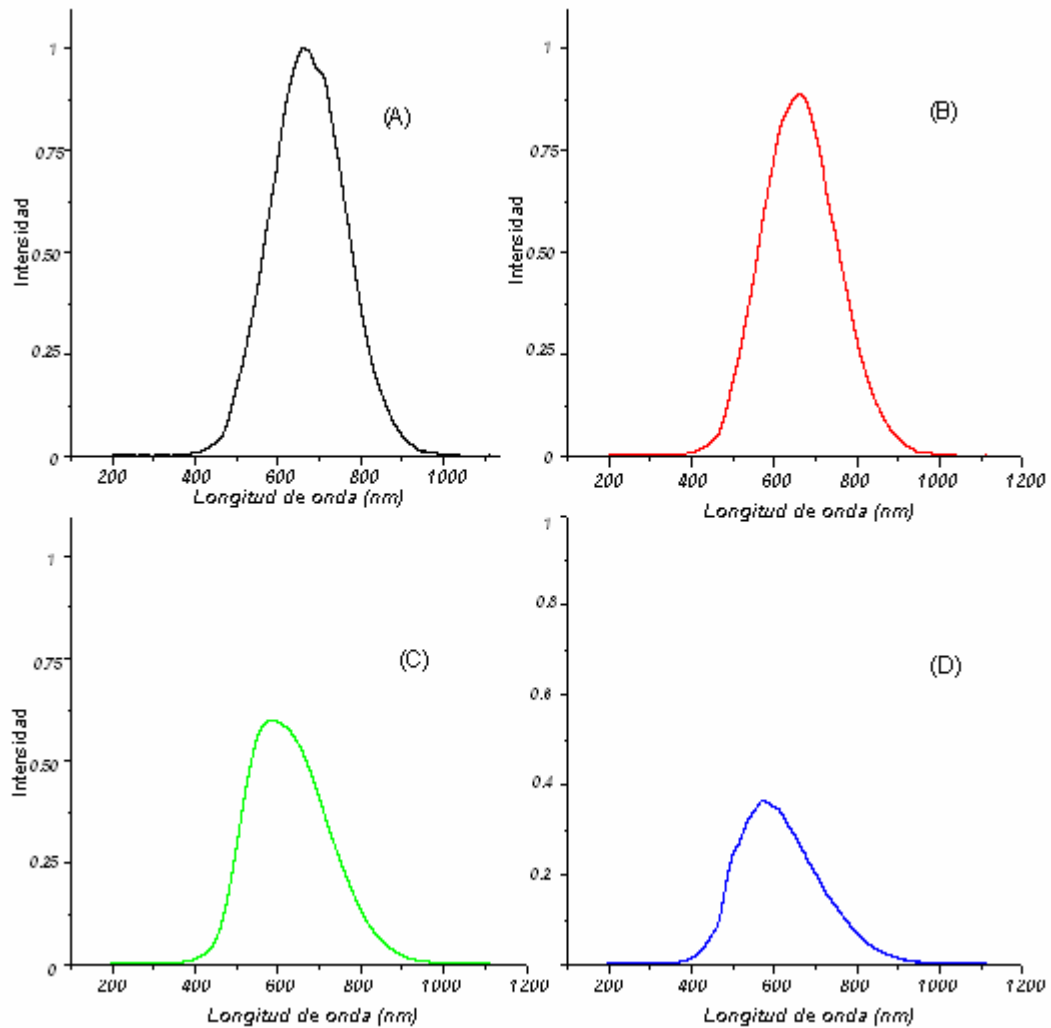
a la del pico correspondiente a $\lambda=475.46nm$. La misma situación se presenta en $z=13.6mm$ (Figura 3.3(C)), donde el pico de mayor intensidad corresponde a $\lambda=537.21nm$. En la Figura 3.3(D), $z=19.4mm$ es la distancia focal optima para $\lambda=475.46nm$, aquí puede observarse que el pico máximo se mantiene con respecto a la Figura 3.3(A), y la intensidad correspondiente a longitudes de onda cercanas o superiores a 600nm disminuye. Cada Espectro fue normalizado a la intensidad del máximo de emisión del led sin la zona plana de Fresnel.

Cuando se utilizó la lámpara de Halógeno con filamento, se observó el desplazamiento del pico máximo del espectro al trasladarse la fibra óptica del espectrómetro a lo largo del eje z. La Figura 3.4(A) muestra el espectro de la lámpara sin la presencia de la zona plana de Fresnel. El rango espectral de emisión de la lámpara corresponde al intervalo 400 - 1100nm y su pico máximo esta en $\lambda=664.08nm$.

La Figura 3.3(B) presenta el espectro de la fuente para la posición $z = 7.4mm$, posición óptima para la longitud de onda $653.75nm$, la mayor intensidad se registra para la longitud de onda $\lambda=655.77nm$. Cabe observar que el valor de la intensidad para $\lambda=653.75nm$ en el espectro de la lámpara sin la presencia de la zona plana de Fresnel (intensidad=0.882) es menor que el valor registrado utilizando la zona plana de Fresnel (intensidad= 0.992) y para $\lambda=655.77nm$ su intensidad disminuye (intensidad sin zona plana= 0.996, intensidad utilizando la zona plana=0.884).

Para la coordenada $z=13.6mm$ (Figura 3.4(C)), posición óptima para la longitud de onda $537.21nm$, el pico de mayor intensidad en esta gráfica corresponde a $\lambda=584.22nm$, se observa que para $\lambda=537.21nm$ el valor de la intensidad aumenta al utilizarse la zona plana de Fresnel (intensidad=0.506) en comparación con su valor correspondiente en el espectro original de la lámpara (intensidad=0.345), por el contrario la intensidad para $\lambda=584.22nm$ disminuye (intensidad=0.994) al utilizar la zona plana de fresnel (intensidad=0.528).

Figura 3.4. Espectro de la lámpara de halógeno con filamento. (A) Espectro de la lámpara sin la zona plana de Fresnel. Espectros obtenidos para las coordenadas: (B) $z = 19.4mm$ (C) $z = 13.6mm$ (D) $z = 7.4mm$



La Figura 3.4(D), muestra el espectro para la coordenada $z=19.4mm$, posición óptima para la longitud de onda $\lambda=475.46nm$. Como era de esperarse, se observa disminución de la intensidad y su valor máximo corresponde a $\lambda= 573.6nm$, al comparar los valores de la intensidad para $\lambda=475.46nm$ en el espectro de la lámpara (intensidad=0.076) y al utilizar la zona plana de fresnel (intensidad=0.142) se observa un gran incremento en su valor,

mientras que para $\lambda=573.6nm$ la intensidad disminuye (intensidad sin la zona plana=0.559, intensidad con la presencia de la zona plana=0.36).

Como en el espectro de emisión de la fuente predomina el rango espectral correspondiente a longitudes de onda mayores de 600nm, es comprensible que al ubicarse la fibra en coordenadas z para longitudes de onda cada vez más alejadas de dicho rango, la intensidad disminuya, y el pico de mayor intensidad sufra un corrimiento como corresponde a la teoría, pero sin llegar a obtenerse el máximo para la longitud de onda predicha por la misma, esto se debe a que en la coordenada z también se localizan componentes de la radiación proveniente de los otros órdenes de difracción que corresponden a las demás longitudes de onda, por tanto como la lámpara emite de forma casi insignificante para longitudes de onda menores de los 500nm, las intensidades correspondientes a longitudes de onda mayores a este valor son tan altas que para otros órdenes de difracción aparte del central, su intensidad es mayor a la máxima intensidad que pueden obtener las longitudes de onda con valores menores de los 550nm.

Gracias a que el espectrómetro permite establecer el valor exacto de la intensidad para cada longitud de onda que conforma el espectro, y habiendo establecido para el desplazamiento a lo largo del eje óptico del sistema (z) un paso de 100 μm , (se tomaron un total de 220 imágenes del espectro de la lámpara). Se pudo para una λ determinada tomar su intensidad en cada uno de los 220 espectros obtenidos, y analizar el comportamiento de dicha longitud de onda en la fuente, para cada posición z a lo largo del segmento cromático generado por la zona plana de Fresnel.

En las Figuras 3.5(A,B,C) se grafica la intensidad de emisión de la fuente para cada una de las longitudes de onda tomadas como referencia y que se muestran en la tabla 3.1, cuando se cambia la posición de la fibra óptica a lo largo del segmento cromático.

La Figura 3.5(A) muestra la variación de la intensidad para la longitud de onda 653.75nm cuando se barre el segmento cromático, puede observarse que el máximo se obtiene para el

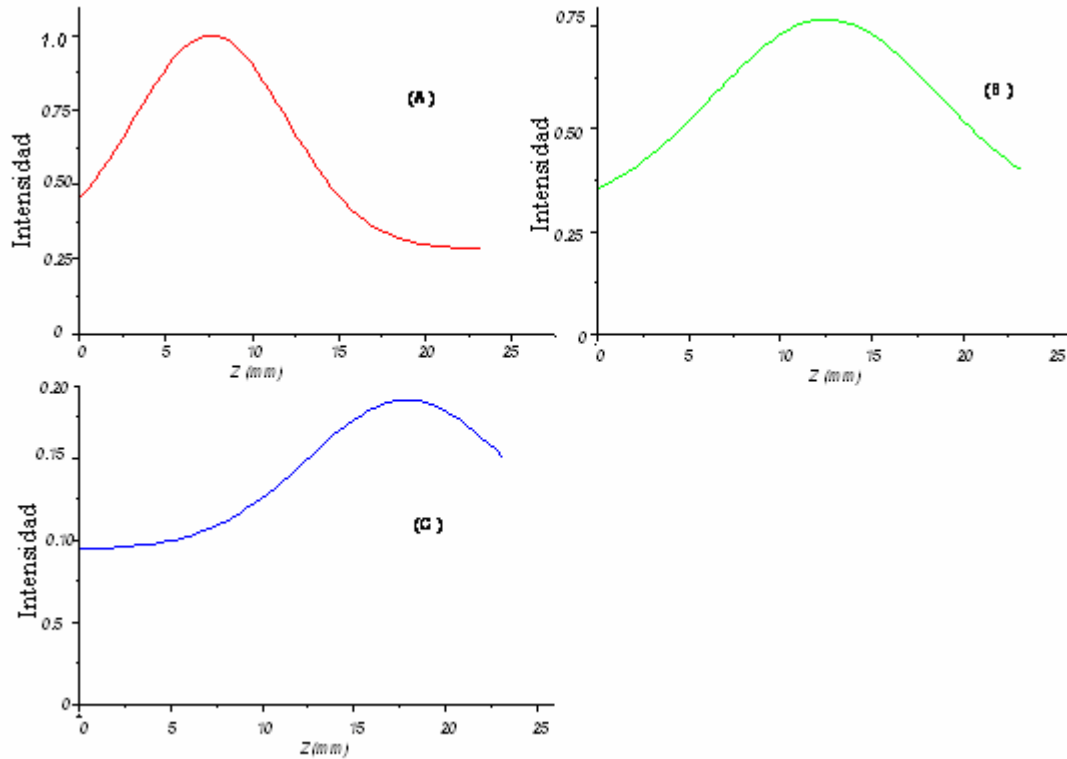
valor de la coordenada $z = 7.4\text{mm}$, tal como lo predice la teoría y que se observa con los leds.

En forma similar, la Figura 3.5(B) muestra el comportamiento cuando se barre el segmento cromático y se mide la intensidad para la longitud de onda 537.21nm . El máximo se obtiene para la coordenada $z=13.6\text{mm}$, valor que coincide con lo predicho por la teoría y observado anteriormente.

De igual modo, la Figura 3.5(c) muestra el efecto para la longitud de onda 475.46nm . Puede observarse una notable disminución de la intensidad, acorde al espectro de la fuente, sin embargo el máximo se observa para $z=19.4\text{mm}$, que nuevamente esta de acuerdo con la teoría y experimentos previos.

Se observa claramente que debido a la presencia de la zona plana de Fresnel, cada longitud de onda presenta una distancia focal (coordenada z), para la cual su intensidad es máxima en dicha posición y las demás longitudes de onda disminuyen en intensidad. Por tanto, tomando como referencia las longitudes de onda $\lambda_1=653.75\text{nm}$ y $\lambda_2=475.46\text{nm}$, se tiene que el segmento cromático formado por la zona plana de Fresnel, para la fuente policromática con la cual se trabajó, tiene 12mm de longitud.

Figura 3.5. Gráfica de intensidades para una longitud de onda cuando se barre el segmento cromático. (A) $\lambda=653.75\text{nm}$, (B) $\lambda=637.21\text{nm}$, (C) $\lambda=475.46\text{nm}$.



3.1 RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

La resolución del dispositivo experimental esta relacionada con la capacidad del montaje de detectar la longitud de onda donde aparece la componente espectral más intensa dentro de la respuesta espectral del sistema. Como la respuesta espectral depende de la distribución de las componentes cromáticas sobre el eje óptico (eje z), entonces cada longitud de onda presenta una coordenada z (distancia focal) diferente.

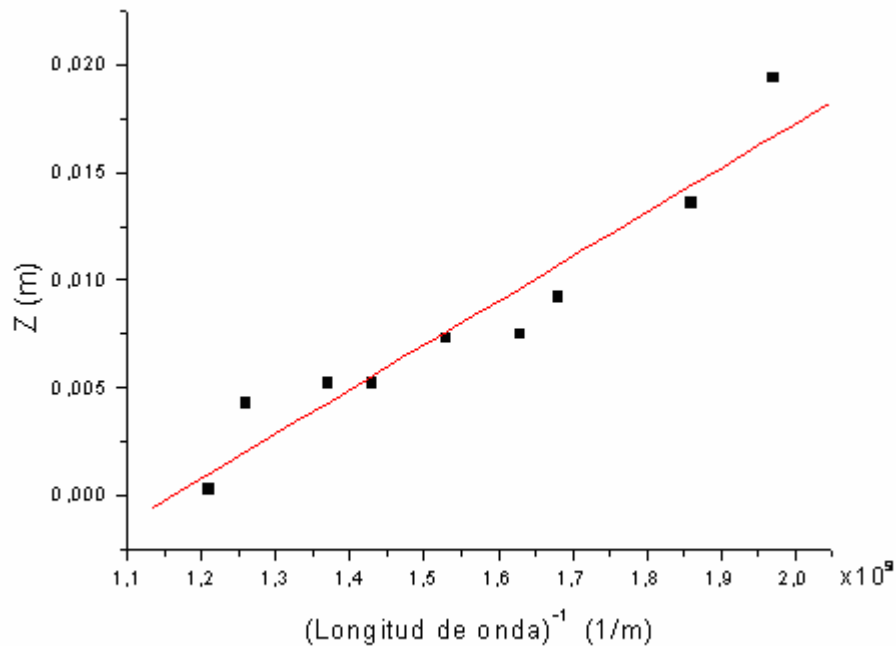
De la teoría expuesta en el capítulo 1, se conoce que la distancia focal z para la longitud de onda (λ) está dada por la relación:

$$z(\lambda) = \frac{a^2}{3\lambda} \quad (3.1)$$

Por tanto, graficando $z(\lambda)$ versus $1/\lambda$, la pendiente de la gráfica está relacionada con la resolución espectral del sistema, ver Figura 3.6. La ecuación obtenida por la regresión lineal es:

$$z(\lambda) = \frac{2.078 \times 10^{-8}}{\lambda} - 0.0246 \quad (3.2)$$

Figura 3.6. Grafica que representa la resolución del sistema. Posiciones optimas en z para varias longitudes de onda.



Donde, el valor $2.8 \times 10^{-8} \text{m}$ representa la pendiente que equivale a $a^2/3$ por tanto se obtiene un valor experimental para el radio del anillo central de la zona plana de Fresnel $a = 143.87 \mu\text{m}$, dicho valor puede compararse con el dato teórico obtenido a partir de la topografía de la zona plana observada por medio de un interferómetro de luz blanca, donde se tiene que el radio de la primera zona es $a = 151.524 \mu\text{m}$.

Entonces para poder observar el grado de fiabilidad de los resultados obtenidos experimentalmente con respecto a la teoría expresada en el capítulo uno se tiene que la diferencia entre un dato y otro es de $7.6 \mu\text{m}$, y su porcentaje de error es del rango del 5%.

De la relación
$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta z} = \frac{\lambda_{LED_ROJO} - \lambda_{LED_AZUL}}{Z_{LED_ROJO} - Z_{LED_AZUL}} = 0.014 \text{nm} / \mu\text{m} \quad \text{ó}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta z} = 1.48 \text{nm} / 100 \mu\text{m}$$

se puede establecer que por cada $100 \mu\text{m}$ que nos desplazemos a lo largo del eje z, estarán contenidos 1.48575nm lo cuales pueden ser resueltos por el espectrómetro ya que este posee una resolución óptica de $0.75 \mu\text{m}$.

4. CONCLUSIONES

La zona plana de Fresnel como agente dispersor de luz generó un segmento cromático conformado por todas las longitudes de onda presentes en las fuentes utilizadas ya fueran policromáticas o cuasimonocromáticas, obteniéndose para cada longitud de onda una coordenada z que corresponde a la distancia focal en que la intensidad de dicha longitud de onda es máxima.

Debido a que el codificador cromático disponible es una zona plana de Fresnel, toda la radiación incidente no se focaliza en un único punto, sino que es distribuida a lo largo de varios focos en el eje óptico de la zona plana de Fresnel. Para distancias cercanas a la zona plana, la concentración de los numerosos focos de órdenes superiores es tan grande que el espectrómetro no alcanza a diferenciar uno de otro, de forma que pareciera que varias longitudes de onda presentaran su máxima intensidad en un mismo punto. De ahí que al observarse los focos de orden 1 ($m=1$) se dificulte hallar las coordenadas óptimas exactas para grandes longitudes de onda.

A causa del fenómeno de difracción la imagen de la fuente puntual formada por la zona plana de Fresnel presenta en cada foco la forma de un sinc^2 , razón por la cual en una misma coordenada z (punto focal), se observa la superposición del pico máximo correspondiente a una longitud de onda determinada, junto con pequeñas componentes espectrales correspondientes a picos de órdenes superiores de difracción, provenientes de focos de otras longitudes de onda.

A partir del segmento cromático generado, que abarca todo el espectro de las fuentes utilizadas, se pudo medir experimentalmente la dispersión cromática longitudinal, presente en la zona plana de Fresnel.

Un aspecto que cabe resaltar es que las coordenadas z (distancias focales) correspondientes a las longitudes de onda de los leds se mantenían al cambiar la fuente por la lámpara de halógeno, pues al analizar el comportamiento de estas longitudes de onda en el espectro de la fuente a lo largo del eje z , se observó que la coordenada z continuó presentando la máxima intensidad para la longitud de onda analizada, con lo cual se corrobora la teoría presentada.

Se estableció una relación entre el modelo teórico y el modelo experimental, dado por la ecuación que representa la resolución espectral, corroborándose de esta forma el comportamiento de la zona plana de Fresnel predicho por la teoría.

De todo lo anterior puede establecerse que la zona plana de Fresnel, puede utilizarse en un futuro estudio para posibles aplicaciones en metrología, como la reconstrucción tridimensional de objetos con luz blanca.

Además si se pudiese trabajar con una fuente de luz policromática de un rango espectral mayor, se podrían obtener mejores resultados para longitudes de onda inferiores a los 500nm. Incluso podría trabajarse con otros rangos espectrales como el infrarrojo, el ultravioleta ó los rayos x si se dispusiera de la fuente necesaria.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Garzón J., Meneses J., Plata A., Tribillon G., y Gharbi T., Chromatic confocal profilometer, *Revista Colombiana de Física*, Vol. 35, No. 2, 2003.
- [2] Garzón J., Meneses J., Plata A., Tribillon G., y Gharbi T., Axial resolution of a chromatic dispersion confocal microscopy, *Proc SPIE*, 5622, pp. 805-810, 2004c.
- [3] Hecht E. *Óptica*. Addison-Wesley Iberoamericana S. A. Wilmington, Delaware, E. U. A. p. 432, 1998.
- [4] Jones A. R., Kowal A, Wooding E. R., Construction and some uses of zone plates, *Phys, Educ.* 7 N_o 6 pp. 361-362, (July 1972).
- [5] Grilli S., Ferraro P., De Nicola S., Finizio A., Pierattini G., Meucci., Whole optical wavefields reconstruction bay digital holography. *Optics Express*, Vol 9 No. 6, September 2001.
- [6] Joo C., Pati G. S., Chen C. G., Konkola P. T., Heilmann R. K., y Schattenburg M.L., Precision fringe metrology using a Fresnel zone plate, *Journal of Vacuum Science and Technology B* (May 2002)

- [7] Zapata-Rodríguez C. J., Matínez-Corral M., Andrés P., y Pons A., Axial behavior of diffractive lenses under Gaussian illumination: complex-argument spectral analysis. *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol 16, No 10, October 1999.
- [8] Perrin H., Sandoz P., y Tribillon G., Longitudinally dispersive profilometer. *Pure Appl. Opt. A*, pp. 219-228. (1995).
- [9] Gil D., Menon r., y Smith H., Fabrication of high-numerical-aperture phase zone plates with a single lithography exposure and no etching. *J. Vac. Sci. Technol. B*, (2003).
- [10] Morgan B., Waits C.M., Krizmani C.J. y Ghodssi R. Development of a deep silicon phase fresnel lens using gray-scale lithography and deep reactive ion etching. *Journal of microelectromechanical systems*, Vol 13, No 1, february 2004.
- [11] Born, M. and Wolf, E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 5a. edición. New York: Pergamon Press.