

CARACTERIZACIÓN DE INVERTIBILIDAD DE UN SISTEMA COMPRESIVO DE
IMÁGENES ESPECTRALES USANDO MINIMIZACIÓN DEL RANGO DE UN
TENSOR

YESID FERNEY FONSECA VARGAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2020

CARACTERIZACIÓN DE INVERTIBILIDAD DE UN SISTEMA COMPRESIVO DE
IMÁGENES ESPECTRALES USANDO MINIMIZACIÓN DEL RANGO DE UN
TENSOR

YESID FERNEY FONSECA VARGAS

Trabajo de Grado para optar al título de
Magister en Matemáticas

Director

Henry Argüello Fuentes

PhD. en Ingeniería Eléctrica y de Computación

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2020

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	11
1. OBJETIVOS	16
2. MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRALES	17
2.1. IMÁGENES ESPECTRALES	17
2.2. MUESTREO COMPRESIVO	17
2.2.1. Escasez (Enfoque 1D)	18
2.2.2. Bajo Rango (Enfoque 2D)	19
2.3. ALGUNOS MODELOS REALES DE MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRALES	21
2.3.1. Captura de único pixel	22
3. RANGO TENSORIAL Y MUESTREO COMPRESIVO	23
3.1. RANGO TENSORIAL	23
3.1.1. Variaciones del Rango Tensorial	25
3.2. MUESTREO COMPRESIVO DESDE UN ENFOQUE 3D	26
3.2.1. La propiedad isométrica restringida en tensores	27
3.2.2. Unicidad de reconstrucciones de bajo rango tensorial	29
3.3. MUESTREO CUASI-ISOMÉTRICO	38
4. CONCLUSIONES	49
BIBLIOGRAFÍA	50
ANEXOS	54

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Ejemplo de una imagen espectral.	17
Figura 2. Ilustración de una transformación que induce bajo rango	23

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. La propiedad del espacio nulo relativo a un conjunto	54
Anexo B. Propiedad de la norma nuclear matricial	56
Anexo C. Teorema de las ρ -nets	58

GLOSARIO

MUESTREO COMPRESIVO es una técnica de procesamiento de señales para adquirir eficientemente y reconstruir una señal mediante el hallazgo de soluciones de un sistema de ecuaciones indeterminado.

OPERADOR LINEAL Es una función entre espacios vectoriales que preserva las operaciones de suma y de producto por un escalar.

OPERADORES LINEALES ESTOCÁSTICOS es una familia de operadores lineales cuyas matrices asociadas a su representación matricial como operador lineal provienen de una distribución estocástica.

TENSOR es un arreglo multidimensional de n -dimensiones. Entiéndase como una abstracción de las matrices 2-dimensiones.

TRANSFORMACIÓN ORTOGONAL Es un operador lineal entre espacios vectoriales que poseen producto interno conservando la operación de producto interno.

RESUMEN

TÍTULO: CARACTERIZACIÓN DE INVERTIBILIDAD DE UN SISTEMA COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRALES USANDO MINIMIZACIÓN DEL RANGO DE UN TENSOR *

AUTOR: YESID FERNEY FONSECA VARGAS **

PALABRAS CLAVE: MUESTREO COMPRESIVO, RANGO TENSORIAL, PROPIEDAD ISOMÉTRICA RESTRINGIDA, OPTIMIZACIÓN CONVEXA

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo de investigación, el problema de muestreo compresivo para un tensor de 3 dimensiones se aborda asumiendo que los datos 3D dimensionales reconstruidos a partir de las mediciones comprimidas tienen una representación de bajo rango tensorial. En particular, en esta tesis se define la Propiedad Isométrica Restringida (PIR) que establece que un operador lineal que comprime los datos satisface cierta desigualdad entre normas Frobenius para todos los tensores con rango tensorial más bajo que el rango tensorial del tensor original a reconstruir. Además, este trabajo muestra tres formas diferentes de definir el rango tensorial como una generalización del rango matricial (para datos con 2 dimensiones). Basado en estas definiciones, se presenta un teorema principal de unicidad que indica que un tensor original puede ser completamente reconstruido resolviendo un problema de optimización convexo donde el objetivo es minimizar la norma nuclear tensorial sujeto a que las medidas comprimidas con el operador lineal permanezcan iguales. Este teorema de unicidad tiene como condición suficiente que el operador lineal que comprime los datos satisfaga la PIR. Por otro lado, se analizan los operadores lineales cuasi-isométricos, el cual es una familia de operadores lineales estocásticos, y proporciona un límite de probabilidad asociado con el evento de que un operador lineal cuasi-isométrico satisfaga la PIR.

* Trabajo de investigación

** Facultad de Ciencias. Escuela Matemáticas. Director: Henry Arguello Fuentes, Doctorado en Ingeniería Eléctrica y de Computación.

ABSTRACT

TITLE: INVERTIBILITY CHARACTERIZATION OF A COMPRESSIVE SYSTEM OF SPECTRAL IMAGES USING MINIMIZATION OF THE TENSORIAL RANK *

AUTHOR: YESID FERNEY FONSECA VARGAS **

KEYWORDS: COMPRESSIVE SENSING, TENSOR RANK, RESTRICTED ISOMETRY PROPERTY, CONVEX OPTIMIZATION

DESCRIPTION:

In this work the problem of compressive sensing for a tensor of 3 dimensions is boarded by assuming that the reconstructed 3D dimensional data from the compressed measurements has a low 3D tensor rank representation. In particular, this work defines the Restricted Isometric Property (RIP) which states that the linear operator that compresses the data satisfy certain bound inequality of norms for all tensors with 3D tensorial rank lower than the 3D tensorial rank of the tensor to be reconstructed. Furthermore, this work shows three different ways to define the 3D tensorial rank as a generalization of the matricial rank (for data with 2 dimensions). Based on these definitions, this work presents a principal theorem of uniqueness which states that the original tensor can be completely reconstructed by solving a convex optimization problem where the objective is to minimize the nuclear tensor norm subject to the compressed measures with the linear operator stay equal. This uniqueness theorem has as sufficient condition that the linear operator that compresses the data must satisfy the RIP. Besides, this work analyzes the quasi-isometric linear operators which is a family of stochastic linear operators, and provides a probability bound associated with the event that a quasi-isometric linear operator satisfies the RIP.

* Research work

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Henry Arguello Fuentes, Doctorado en Ingeniería Eléctrica y de Computación.

INTRODUCCIÓN

Las imágenes espectrales, representadas como cubos grandes de datos, son una colección apilada de imágenes 2D donde cada imagen es una captura de la intensidad de la luz en una longitud específica de onda ¹. El análisis de estas imágenes espectrales en zonas localizadas ha permitido el desarrollo de aplicaciones en los campos de tele-detección ², imágenes médicas ³ y astronomía ⁴. En general, existen aplicaciones en las que se manejan grandes cantidades de datos, por esto plantear modelos eficientes de adquisición y procesamiento de los mismos se ha vuelto a un tema de investigación de gran impacto ^{5,6}.

La teoría del muestreo compresivo ha sido ampliamente aceptada en el procesamiento de imágenes espectrales debido a que permite reducir la dimensionalidad del conjunto de datos ⁵. Específicamente, esta teoría plantea que una señal $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ puede ser reconstruida de un conjunto capturado de datos $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, donde el pro-

-
- ¹ Su MAY HSU y Hsiao-hua K BURKE. "Multisensor Fusion with Hyperspectral Imaging Data: Detection and Classification". En: *Lincoln Laboratory Journal* 14.1 (2003).
 - ² Michael E. SCHAEPMAN y col. "Earth system science related imaging spectroscopy-An assessment". En: *Remote Sens. Environ.* 113.123–137 (2009). DOI: 10.1016/j.rse.2009.03.001.
 - ³ Svetlana V PANASYUK y col. "Medical hyperspectral imaging to facilitate residual tumor identification during surgery". En: *Cancer biology & therapy* 6.3 (2007), págs. 439-446.
 - ⁴ E. Keith HEGE y col. "Hyperspectral imaging for astronomy and space surveillance". En: *Optical Science and Technology, SPIE's 48th Annual Meeting*. 2004, págs. 380-391.
 - ⁵ Saad QAISAR y col. "Compressive sensing: From theory to applications, a survey". En: *Journal of Communications and networks* 15.5 (2013), págs. 443-456.
 - ⁶ Zhuming BI y David COCHRAN. "Big data analytics with applications". En: *Journal of Management Analytics* 1.4 (2014), págs. 249-265.

ceso físico de captura se modela mediante una matriz de muestreo $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \ll n$, dada por $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f}$. Por ejemplo, los sistemas de adquisición de imágenes espectrales CASSI ⁷ y Single Pixel (Captura de Único Pixel) ⁸ siguen a este modelo matemático. Claramente, el sistema de ecuaciones que relaciona los datos \mathbf{y} con la señal \mathbf{f} es indeterminado, por lo tanto, se hace necesario asumir propiedades sobre los datos originales \mathbf{f} para obtener una solución. En particular, las dos propiedades sobre \mathbf{f} que generalmente se asumen son la escasez y bajo rango ^{9,10}. La escasez se refiere al soporte de \mathbf{f} en un espacio dado y el bajo rango se refiere a la menor forma de descomponer a \mathbf{f} como suma de elementos de rango 1.

El concepto de rango en una señal está ligado a la cantidad mínima de elementos básicos, también llamado átomos, con los cuales la señal puede ser representada. De esta manera, dependiendo de los elementos básicos que se consideren, y en consecuencia, dependiendo del tipo de descomposición que se utilice, el concepto de rango puede variar. Algunas descomposiciones comunes incluyen: la descomposición del rango tensorial ¹¹, la descomposición tucker ¹², la descomposición t-SVD

⁷ Xun CAO y col. "Computational snapshot multispectral cameras: Toward dynamic capture of the spectral world". En: *IEEE Signal Processing Magazine* 33.5 (2016), págs. 95-108.

⁸ Marco F DUARTE y col. "Single-pixel imaging via compressive sampling". En: *IEEE Signal Process. Mag* 25.2 (2008), págs. 83-91.

⁹ Emmanuel J CANDÈS y Michael B WAKIN. "An introduction to compressive sampling". En: *IEEE signal processing magazine* 25.2 (2008), págs. 21-30.

¹⁰ Henry ARGUELLO y Gonzalo R ARCE. "Rank minimization code aperture design for spectrally selective compressive imaging". En: *IEEE Trans. Image Process.* 22.3 (2013), págs. 941-954.

¹¹ Frank L HITCHCOCK. "The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products". En: *Journal of Mathematics and Physics* 6.1-4 (1927), págs. 164-189.

¹² Ledyard R TUCKER. "Some mathematical notes on three-mode factor analysis". En: *Psychometrika* 31.3 (1966), págs. 279-311.

¹³ y su versión mas general la descomposición tt-SVD ¹⁴ . En particular, la descomposición tt-SVD es de gran interés pues aprovecha la estructura tridimensional de los datos y además permite examinar en qué dominio los datos tienen una representación de menor rango a través de la elección de una transformación ortogonal.

De esta manera conocer las propiedades matemáticas de la descomposición tensorial tt-SVD y su aplicación en el muestreo compresivo se convierte en una herramienta fundamental de este trabajo de investigación. Específicamente, este trabajo determina una relación entre la probabilidad de recuperación de una señal y la tasa de compresión de la misma cuando se considera un sistema físico de adquisición de imágenes espectrales (Single-Pixel), usando la hipótesis de que estas imágenes tienen una representación de bajo rango tensorial en el sentido de la descomposición tt-SVD.

Motivación y Justificación La teoría de muestreo compresivo (CS) se basa en varias ramas de la matemática como álgebra lineal, análisis convexo, optimización y teoría de la probabilidad ¹⁵. En general, la teoría de CS busca explotar las propiedades matemáticas que tiene un conjunto de datos con el fin de representarlo con la menor cantidad de información posible. Así, existen dos tipos de propiedades que se presentan en ciertos datos físicos como son (1) la escasez en una base de representación y (2) bajo rango. Estos tipos de propiedades permiten reconstruir datos

¹³ Misha E KILMER y col. "Third-order tensors as operators on matrices: A theoretical and computational framework with applications in imaging". En: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 34.1 (2013), págs. 148-172.

¹⁴ Guang-Jing SONG y col. "Robust Tensor Completion Using Transformed Tensor Singular Value Decomposition". En: ()

¹⁵ Yonina C ELDAR y Gitta KUTYNIOK. *Compressed sensing: theory and applications*. Cambridge University Press, 2012.

físicos aún cuando son muestreados por debajo del límite que establece el teorema de Shannon-Nyquist.

Entre las aplicaciones de la teoría de CS se encuentra el procesamiento de imágenes, con ventajas en la disminución de medidas necesarias para la adquisición de imágenes espectrales ¹⁰, y la aceleración del proceso de resonancia magnética, preservando la calidad del diagnóstico ¹⁶ entre otras aplicaciones médicas ¹⁷, ¹⁸.

El concepto de rango en estructuras de datos tridimensionales o de mayor dimensión tiene diversas definiciones dependiendo del tipo de descomposición que se utilice. Por ejemplo, existen la descomposición del rango tensorial ¹¹, la descomposición Tucker ¹², la descomposición t-SVD ¹³ y su versión más general la descomposición tt-SVD ¹⁴. Entre estas, la descomposición tt-SVD es de interés pues preserva muchas propiedades de la descomposición en valores singulares (SVD) para matrices y además aprovecha la estructura tridimensional de los datos.

Por otro lado, antes de analizar la descomposición tt-SVD de una imagen espectral o cualquier otro dato tridimensional, es necesario escoger una transformación ortogonal Θ . Por ejemplo, en ¹⁴ encuentran experimentalmente que para el problema de completación de datos faltantes en estructuras 3D, la transformada Wavelet permite mejores resultados que la transformada de Fourier. Así, la elección de la transfor-

¹⁶ Shreyas S VASANAWALA y col. "Improved pediatric MR imaging with compressed sensing". En: *Radiology* 256.2 (2010), págs. 607-616.

¹⁷ M LUSTIG, DL DONOHO y JM PAULY. "Rapid MR imaging with compressed sensing and randomly under-sampled 3DFT trajectories". En: *Proc. 14th Ann. Meeting ISMRM*. Citeseer. 2006.

¹⁸ Joshua TRZASKO y Armando MANDUCA. "Highly Undersampled Magnetic Resonance Image Reconstruction via Homotopic l0-Minimization". En: *IEEE Transactions on Medical imaging* 28.1 (2009), págs. 106-121.

mación Θ es un problema abierto que depende del sistema de adquisición que se analice y de la estructura de los datos. Es por esto que en este trabajo se desea determinar una relación entre la probabilidad de recuperación de una señal y la tasa de compresión de la misma cuando se considera un sistema físico de adquisición de imágenes espectrales (SD-CASSI, DD-CASSI y/o 3D-CASSI), usando como hipótesis que estas imágenes tienen una representación de bajo rango tensorial en el sentido de la descomposición tt-SVD.

1. OBJETIVOS

Objetivo general

Determinar teóricamente la probabilidad de recuperación de una imagen hiperespectral representada por un tensor de bajo rango en el sentido tt-SVD a partir de las medidas de un sistema de adquisición compresivo de imágenes.

Objetivos específicos

Determinar la inyectividad de un sistema de ecuaciones lineal indeterminado en el conjunto de tensores atómicos de bajo rango en el sentido tt-SVD;

Determinar la unicidad al problema de minimización de rango en tensores en el sentido tt-SVD para un sistema de ecuaciones lineal dado, mediante la minimización de la norma nuclear tensorial;

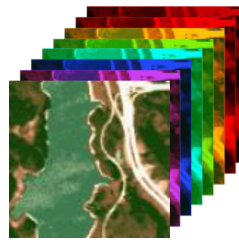
Determinar una relación entre la probabilidad de restauración de datos y el factor de compresión en una arquitectura de adquisición física que emplean la teoría de muestreo compresivo.

2. MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRALES

2.1. IMÁGENES ESPECTRALES

Una imagen espectral es una fotografía que, a diferencia de las imágenes convencionales a color, capta la intensidad de energía de muchas longitudes de ondas en una escena 2D. Mas precisamente, una imagen espectral $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{N \times M \times L}$ es un arreglo tridimensional con dimensiones espaciales $N \times M$ en donde se captan la energía de L longitudes de ondas. En la figura 1 se muestra un ejemplo de una imagen espectral que fotografía desde el espacio una porción de un río.

Figura 1. Ejemplo de una imagen espectral.



2.2. MUESTREO COMPRESIVO

La teoría de muestreo compresivo (MC) permite adquirir y reconstruir una señal mediante la solución de un sistema indeterminado de ecuaciones lineales, en donde el número de ecuaciones en el sistema es muy pequeño comparado con la cantidad de variables involucradas. De esta manera, los datos quedan comprimidos lo cual reduce los costos de almacenamiento, transmisión y procesamiento de los datos.

Formalmente, el muestreo compresivo establece que dada una señal $f_o \in \mathbb{R}^n$, un sistema de sensado lineal modelado por una matriz $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \ll n$ y las

medidas capturadas $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ de la señal f_o , esto es $\mathbf{y} = \mathbf{H}f_o$, es posible obtener de nuevo f_o conociendo solo \mathbf{H} y \mathbf{y} . Naturalmente, este tipo de problema se clasifica como un problema mal condicionado ya que no es posible garantizar solución única. Sin embargo, es posible imponer propiedades sobre f_o de tal manera que se pueda reconstruir de manera única. Particularmente, para resolver este problema mal puesto se asume que f_o tiene una representación escasa en algún dominio (con soporte pequeño) o que f_o es de bajo rango cuando se reorganiza de manera matricial. A estas dos asunciones se les conoce como el enfoque 1D y 2D, respectivamente, puesto que con la asunción de la escasez se encuentra una señal 1-dimensional (vector) y con la asunción de bajo rango se encuentra una señal 2-dimensional (matriz).

2.2.1. Escasez (Enfoque 1D) La escasez de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se define como el número de componentes no nulos de \mathbf{x} . Equivalentemente, es el cardinal del soporte de \mathbf{x} . Por ejemplo, la escasez de $\mathbf{x} = [1, 0, 2, 0, 1] \in \mathbb{R}^5$ es 3. Por otro lado, existen señales $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ cuya representación en un dominio es escasa, esto es, existe una matriz invertible $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\mathbf{f} = \Phi\mathbf{x}$, donde la escasez de \mathbf{x} es mucho menor que n . De esta manera, el modelo de adquisición físico del muestreo compresivo queda determinado como $\mathbf{y} = \mathbf{H}\Phi\mathbf{x}$, el cual sigue siendo un problema mal condicionado si no se tiene en cuenta que \mathbf{x} tiene una representación escasa. La Definición 1 y el Teorema 1 dejan ver cómo la norma $\|\cdot\|_1$, conocida como la norma-1 o la norma de manhattan, impone escasez sobre \mathbf{x} .

Definición 1. Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se dice que satisface *la propiedad del espacio nulo relativo a un conjunto* $S \subset \{1, \dots, n\}$, si $\|\mathbf{v}_S\|_1 < \|\mathbf{v}_{S^c}\|_1$ para todo $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$, donde S^c es el complemento de S y \mathbf{v}_S se refiere al vector \mathbf{v} restringido al conjunto S .

Teorema 1. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ con soporte en $S \subset \{1, \dots, n\}$ es la única solución de (1) con $y = Ax$, si y solo si, A satisface la propiedad del espacio nulo relativo a S .

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \|z\|_1 \quad \text{sujeto a } Az = y. \quad (1)$$

Demostración. Ver Apéndice A, 1. □

Es aquí donde el regularizador de la norma $\|\cdot\|_1$ impone la escasez en x ¹⁹. Dicho de otra manera, para encontrar un f_o , el cual tiene una representación escasa $x := \Phi^{-1}f_o$, a partir de solo las medidas $y := Hf_o$, nos interesa resolver el siguiente problema de optimización convexo

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1 \quad \text{sujeto a } y = H\Phi x. \quad (2)$$

2.2.2. Bajo Rango (Enfoque 2D) El rango de una matriz $X \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ se define como el número de filas linealmente independientes. De esta manera, una señal $f_o \in \mathbb{R}^n$ tiene siempre rango 1 lo cual no es muy útil. Sin embargo, existen maneras de reorganizar matricialmente una señal f_o de tal forma que el rango de la representación matricial sigue siendo bajo. Por ejemplo, la señal $f := [1, 2, 3, 6, 4, 8] \in \mathbb{R}^6$ representada matricialmente como $X := [1, 3, 4; 2, 6, 8] \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ tiene rango 1. De esta manera, reconstruir una señal $f_o \in \mathbb{R}^n$ a partir de solo el conocimiento de $y \in \mathbb{R}^m$ y $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ donde $y = Hf_o$, bajo la asunción de que f_o tiene una representación matricial de bajo rango $X_o \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ con $n = n_1 n_2$, se traduce en resolver el siguiente problema

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}} \text{rank}(X) \quad \text{sujeto a } \mathcal{H}_{\text{mat}}(X) = y, \quad (3)$$

¹⁹ Simon FOUCART y Holger RAUHUT. *A mathematical introduction to compressive sensing*. Vol. 1. 3. Birkhäuser Basel, 2013.

donde $\mathcal{H}_{\text{mat}} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un operador lineal que modela la matriz de sensado \mathbf{H} . Nótese que $\mathcal{H}_{\text{mat}}(\mathbf{X}_o) = \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f}_o$. Las desventajas del problema (3) es que no es de optimización convexo y además se categoriza como uno de tipo NP²⁰. Lo que se presentará a continuación, busca relajar este problema para volverlo convexo y de esta manera que se pueda resolver con algoritmos iterativos.

Definición 2 (Norma Nuclear Matricial). La norma nuclear de una matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ se define como $\|\mathbf{X}\|_* := \sum_{k=1}^r \sigma_k$, donde σ_k son los valores singulares no nulos de la matriz \mathbf{X} .

Se conoce que la norma nuclear $\|\cdot\|_*$ es una función convexa tal que

$$\|\mathbf{X}\|_* \leq \text{rank}(\mathbf{X}) \quad \text{para todo } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \text{ con } \|\mathbf{X}\| \leq 1, \quad (4)$$

donde $\|\mathbf{X}\|$ se refiere a la norma espectral de \mathbf{X} . Además, la norma nuclear es una función óptima en el sentido de que si $g : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función convexa tal que $g(\mathbf{X}) \leq \text{rank}(\mathbf{X})$ para todo $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ con $\|\mathbf{X}\| \leq 1$, entonces $g(\mathbf{X}) \leq \|\mathbf{X}\|_*$, esto es, la norma nuclear es la envolvente convexa de la función $\text{rank}(\cdot)$ en el conjunto $\mathcal{C} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} : \|\mathbf{X}\| \leq 1\}$, ver²¹. Es por esto que la mejor aproximación convexa al problema (3) es la siguiente

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}} \|\mathbf{X}\|_* \quad \text{sujeto a } \mathcal{H}_{\text{mat}}(\mathbf{X}) = \mathbf{y}. \quad (5)$$

²⁰ Maryam FAZEL, Haitham Hindi y S Boyd. "Rank minimization and applications in system theory". En: *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*. Vol. 4. IEEE. 2004, págs. 3273-3278.

²¹ Benjamin RECHT, Maryam FAZEL y Pablo A PARRILO. "Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization". En: *SIAM review* 52.3 (2010), págs. 471-501.

Lo interesante de este problema es existen condiciones suficientes para que la solución a (5) sea única. Estas condiciones de suficiencia para la unicidad se dan en ²¹ y se basan en la *propiedad de isometría restringida* la cual se define a continuación.

Definición 3 (Propiedad de Isometría Restringida). Sea $\mathcal{H}_{\text{mat}} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ un operador lineal y $r \in \{1, \dots, \min(n_1, n_2)\}$. Se define la *constante isométrica r-restringida* como el real positivo $\delta_r := \delta_r(\mathcal{H}_{\text{mat}})$ más pequeño tal que

$$(1 - \delta_r) \|\mathbf{X}\|_F \leq \|\mathcal{H}_{\text{mat}}(\mathbf{X})\|_F \leq (1 + \delta_r) \|\mathbf{X}\|_F, \quad (6)$$

para todo $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ con rango menor o igual que r .

Existen dos resultados importantes que se desprenden de la *Propiedad de Isometría Restringida (PIR)*. El primero es que si $\delta_{2r}(\mathcal{H}_{\text{mat}}) < 1$, entonces el operador \mathcal{H}_{mat} es inyectivo sobre el conjunto $B_r = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} : \text{rank}(\mathbf{X}) \leq r\}$. El segundo es que permite demostrar la unicidad de (5) tal y como se muestra a continuación.

Teorema 2. Sea $\mathbf{X}_o \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ una matriz dada con rango r y sea $\mathcal{H}_{\text{mat}} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal tal que $\delta_{5r}(\mathcal{H}_{\text{mat}}) < 1/10$. Entonces, \mathbf{X}_o es la única solución al problema (5).

Demostración. Ver Teorema 3.3 en ²¹. Sin embargo, este trabajo presenta una generalización de éste Teorema el cual es el Teorema de Unicidad 8. Así, el Teorema 2 se puede concluir del mismo Teorema 8 para cuando $n_3 = 1$. \square

2.3. ALGUNOS MODELOS REALES DE MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRALES

Existen principalmente dos formas de adquirir las imágenes espectrales las cuales son a partir de los sistemas de muestreo completo y los sistemas de sub-muestreo. Los modelos de adquisición con muestreo completo, están generalmente basados

en el teorema de Nyquist-Shannon, el cual plantea que la tasa de muestreo debe ser el doble de la máxima frecuencia de Fourier en los datos. Esto implica que solo es posible adquirir una imagen espectral con resolución espacial buena o resolución espectral buena, pero no las dos al tiempo, ya que para estos sistemas la cantidad de información adquirida es muy grande. Es por esto, que los sistemas de muestreo completo son poco prácticos, motivando el uso de sistemas basados en medidas comprimidas (submuestreo). Uno de los sistemas de submuestreo más conocidos es el sistema Single-Pixel (Captura de único pixel).

2.3.1. Captura de único pixel La arquitectura de captura de único pixel (Single-Pixel) es sistema de adquisición físico simple ⁸, el cual modula cada banda espectral con un código de apertura binario y suma cada una de estas modulaciones para obtener las medidas comprimidas finales. Matemáticamente se puede modelar de la siguiente manera. Partamos de una imagen espectral $\mathcal{X}_o \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ con dimensiones espaciales $n_1 \times n_2$ e información espectral asociada a la intensidad de luz de n_3 longitudes de ondas diferentes. Sea $\mathbf{H}_o \in \{-1, 1\}^{m \times n_1 n_2}$ una matriz de modulación cuyas entradas son -1 o 1. El proceso de captura de único pixel se puede modelar como sigue

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \text{vect}(\mathcal{X}_o) \quad \text{con} \quad \mathbf{H} := \mathbf{I}_{n_3} \otimes \mathbf{H}_o, \quad (7)$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m \times n_3}$ son llamadas las medidas comprimidas, " \otimes " es el producto Kronecker entre matrices y $\text{vect}(\cdot)$ significa la vectorización de la imagen espectral \mathcal{X}_o . En el capítulo 3, se verán algunas garantías de recuperación de la imagen espectral \mathcal{X}_o conociendo solo \mathbf{H}_o y \mathbf{y} .

3. RANGO TENSORIAL Y MUESTREO COMPRESIVO

En este capítulo se presentará el concepto de rango tensorial y cómo éste es usado en el muestreo compresivo. Además, se darán algunas garantías para que la recuperación sea exacta. Finalmente, se dará una estimación de la probabilidad de una recuperación cuando el muestreo compresivo se hace a partir de matrices de sensado aleatorios.

3.1. RANGO TENSORIAL

En esta sección se describen algunas operaciones matemáticas básicas entre tensores y la definición de rango tensorial. Este último, el rango tensorial, requiere llevar los tensores de dimensiones $n_1 \times n_2 \times n_3$ a otro dominio a partir de una transformación ortogonal $\Theta : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$. Esta transformación Θ es de libre elección y es motivada dado que existen formas de organizar o transformar la información para que tenga una representación de bajo rango, tal y como se describe en el ejemplo de la Figura 3.1.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix} & \xRightarrow{\Theta} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \\ \text{Rango 3} & & \text{Rango 1} \end{array}$$

Figura 2. Ilustración de una transformación que induce bajo rango

Definición 4. Sea $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ un tensor. La Θ -transformada del tensor \mathcal{X} se define como el tensor $\hat{\mathcal{X}} := \Theta(\mathcal{X})$.

Observación Durante todo este trabajo el símbolo de énfasis “ $\hat{}$ ” es muy importante pues indica en que ocasiones se requiere la Θ -transformada. En lo que sigue, se usará este símbolo indistintamente sin aclaración intermedia de su significado.

Definición 5. Todo tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ puede ser visto como el apilamiento de n_3 matrices de dimensiones $n_1 \times n_2$. De esta forma, para cada $k \in \{1, \dots, n_3\}$ la k -ésima matriz apilada $\mathbf{X}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ se define como $\mathbf{X}^{(k)(i,j)} := \mathcal{X}^{(i,j,k)}$ para todo $i \in \{1, \dots, n_1\}$, $j \in \{1, \dots, n_2\}$. Además, a partir de un conjunto de matrices $\{\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n_3)}\} \subset \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ podemos definir un tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ como el apilamiento de estas n_3 matrices y lo denotaremos como la siguiente “suma”

$$\mathcal{X} = \overline{\sum_k \mathbf{X}^{(k)}} \quad (8)$$

Definición 6. La operación binaria Θ -producto (\diamond_{Θ}) aplicada a los tensores $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ y $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_4 \times n_3}$ da como resultado un tensor $\mathcal{Z} := \mathcal{X} \diamond_{\Theta} \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_4 \times n_3}$ donde

$$\mathcal{Z} = \Theta^{-1} \left(\overline{\sum_k \hat{\mathbf{X}}^{(k)} \cdot \hat{\mathbf{Y}}^{(k)}} \right) \quad (9)$$

Notese que $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ es la k -ésima matriz apilada del tensor Θ -transformado $\hat{\mathcal{X}}$. De acuerdo a la definición previa, se puede notar que

$$\hat{\mathcal{Z}}^{(k)} = \hat{\mathbf{X}}^{(k)} \cdot \hat{\mathbf{Y}}^{(k)} \quad (10)$$

Definición 7. Sean $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ y $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_4 \times n_3}$ tensores. Se definen las normas Frobenius y Nuclear en tensores como sigue

▪ **(Norma Frobenius)**

$$\|\mathcal{X}\|_F := \sqrt{\sum_{i,j,k} |\mathcal{X}^{(i,j,k)}|^2} = \sqrt{\sum_{i,j,k} |\hat{\mathcal{X}}^{(i,j,k)}|^2} \quad (11)$$

■ (Norma Nuclear Tensorial)

$$\|\mathcal{X}\| := \sum_{1 \leq k \leq n_3} \|\widehat{\mathbf{X}}^{(k)}\|_* \quad (12)$$

Primero nótese que la igualdad $\sqrt{\sum_{i,j,k} |\mathcal{X}^{(i,j,k)}|^2} = \sqrt{\sum_{i,j,k} |\widehat{\mathcal{X}}^{(i,j,k)}|^2}$ se debe a que la transformación Θ es una transformación ortogonal y por tanto conserva la norma euclidiana. Segundo, la definición (12) tiene a su derecha la suma de las normas nucleares matriciales de las n_3 matrices apiladas del tensor Θ -transformado $\widehat{\mathcal{X}}$.

3.1.1. Variaciones del Rango Tensorial En ¹⁴²² se presentan tres conceptos diferentes de rango tensorial donde la transformación ortogonal Θ depende de la transformada de Fourier, la transformada discreta de Coseno o la Transformada Wavelet. Específicamente, la transformación Θ que usan se puede representar mediante la matriz $\mathbf{A}_\Theta := \mathbf{A}_\theta \otimes \mathbf{I}_{n_1} \otimes \mathbf{I}_{n_2}$, donde \otimes es el producto Kronecker y $\mathbf{A}_\theta \in \mathbb{R}^{n_3}$ representa la matriz de la transformada de Fourier, discreta de Coseno o la transformada Wavelet. Es fácil extender estos tres conceptos de rango cuando se usa una transformación ortogonal $\Theta : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ arbitraria.

Definición 8 (Rango Tensorial). Sea $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ un tensor. Se definen las siguientes funciones de rango tensorial de \mathcal{X} como

$$\text{tubal-rank}(\mathcal{X}) := [\text{rank}(\widehat{\mathbf{X}}^{(1)}), \dots, \text{rank}(\widehat{\mathbf{X}}^{(n_3)})], \quad (13)$$

$$\text{t-rank}(\mathcal{X}) := \sum_{k=1}^{n_3} \text{rank}(\widehat{\mathbf{X}}^{(k)}), \quad (14)$$

$$\text{t-rank}_{\text{máx}}(\mathcal{X}) := \max_{1 \leq k \leq n_3} \text{rank}(\widehat{\mathbf{X}}^{(k)}). \quad (15)$$

²² Eric KERNFELD, Misha KILMER y Shuchin AERON. “Tensor–tensor products with invertible linear transforms”. En: *Linear Algebra and its Applications* 485 (2015), págs. 545-570.

Nótese que las definiciones (14) y (15) son números reales por lo que naturalmente tienen un orden, contrario al tubal-rank que es una n_3 -tupla de reales. Por esta razón, se define el siguiente orden parcial para el tubal-rank:

$$\text{tubal-rank}(\mathcal{X}) \leq \text{tubal-rank}(\mathcal{Z}) \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n_3\} \quad \text{rank}(\widehat{\mathbf{X}}^{(k)}) \leq \text{rank}(\widehat{\mathbf{Z}}^{(k)}) \quad (16)$$

Existe una relación entre estas tres definiciones de rango tensorial: Bajo $\text{tubal-rank}(\cdot)$ implica bajo $\text{t-rank}(\cdot)$ y bajo $\text{t-rank}_{\text{máx}}(\cdot)$ al mismo tiempo en el siguiente sentido. Sea $[r_1, \dots, r_{n_3}]$ una n_3 -tupla de reales no negativos, entonces, si $\text{tubal-rank}(\mathcal{X}) \leq [r_1, \dots, r_{n_3}]$ se tiene que $\text{t-rank}(\mathcal{X}) \leq \sum_k r_k$; y además $\text{t-rank}_{\text{máx}}(\mathcal{X}) \leq \text{máx}_k r_k$. En la siguiente sección veremos como la norma nuclear tensorial induce bajo $\text{t-rank}(\cdot)$.

3.2. MUESTREO COMPRESIVO DESDE UN ENFOQUE 3D

En el capítulo anterior se introdujo el muestreo compresivo el cual planteaba que una señal $\mathbf{f}_o \in \mathbb{R}^n$ se podía reconstruir a partir de las medidas $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ las cuales se modelan como $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f}_o$ donde $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \ll n$. También se mencionó que la reconstrucción de \mathbf{f}_o a partir de \mathbf{y} y \mathbf{H} es un problema mal puesto y que era posible imponer propiedades como escasez y bajo rango matricial sobre \mathbf{f}_o para condicionar bien el problema. Reconstruir \mathbf{f}_o mediante las asunciones de escasez y bajo rango matricial se les conoce como soluciones desde un enfoque 1D y 2D, respectivamente, puesto que al asumir escasez se encuentra una version 1-dimensional (vector) de \mathbf{f}_o y al asumir bajo rango matricial se encuentra version 2-dimensional (matriz) de \mathbf{f}_o . En esta sección, se mostrará como es posible reconstruir a \mathbf{f}_o si lo representamos como un tensor $\mathcal{X}_o \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ y si además imponemos propiedades de bajo rango tensorial. A esto le llamaremos soluciones desde un enfoque 3D.

Formalmente, sea $\mathcal{X}_o \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ la representación tensorial de \mathbf{f}_o y $\mathbf{y} = \mathcal{H}_{\text{ten}}(\mathcal{X}_o)$

donde $\mathcal{H}_{\text{ten}} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un operador lineal que modela la operación $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f}_o$. Imponer la propiedad de bajo rango tensorial sobre \mathcal{X}_o implica resolver el siguiente problema

$$\min_{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}} \text{t-rank}(\mathcal{X}) \quad \text{sujeto a } \mathcal{H}_{\text{ten}}(\mathcal{X}) = \mathbf{y}. \quad (17)$$

Sin embargo, el problema (17) no es convexo y al igual que en el enfoque 2D existe una forma de “suavizarlo” para que sea convexo. En ¹⁴, se demuestra que la norma nuclear tensorial es la envolvente convexa de la función t-rank(\cdot), esto es,

$$\|\mathcal{X}\|_* \leq \text{t-rank}(\mathcal{X}) \quad \forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \text{ con } \max_k \left\| \widehat{\mathbf{X}}^{(k)} \right\|_2 \leq 1, \quad (18)$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma espectral de una matriz. Así, el problema (17) puede replantearse como

$$\min_{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}} \|\mathcal{X}\|_* \quad \text{sujeto a } \mathcal{H}_{\text{ten}}(\mathcal{X}) = \mathbf{y}. \quad (19)$$

A continuación caracterizaremos este problema de optimización mediante la Propiedad Isométrica Restringida y daremos unas condiciones suficientes para que el problema (17) tenga solución única de bajo rango tensorial.

3.2.1. La propiedad isométrica restringida en tensores La propiedad isométrica restringida (PIR) es un concepto que ya ha sido utilizado y busca analizar una propiedad en un subconjunto de elementos denominado habitualmente como un subconjunto de *átomos*. Por ejemplo, en ¹⁹ se define la PIR cuando el subconjunto de *átomos* son vectores con soporte pequeño y en ²³ se define la PIR tomando como átomos las matrices de bajo rango. En esta sub-sección se define la PIR cuando

²³ Yaniv PLAN. “Compressed sensing, sparse approximation, and low-rank matrix estimation”. Tesis doct. California Institute of Technology, 2011.

los átomos son tensores de bajo rango tensorial y se darán algunas propiedades de esta definición.

Definición 9. Sea $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ un operador lineal. Se puede asumir que $n_1 \leq n_2$. Para cada $r \in \{1, \dots, n_1 n_3\}$ se define la constante isométrica r -restringida $\delta_r(\mathcal{H})$ como

$$\delta_r(\mathcal{H}) = \inf_{\delta > 0} \{ |\|\mathcal{H}(\mathcal{X})\| - \|\mathcal{X}\|_F| < \delta : \|\mathcal{X}\|_F = 1 \text{ y } \text{t-rank}(\mathcal{X}) \leq r \}. \quad (20)$$

La siguiente proposición caracteriza la invertividad del sistema lineal $\mathbf{y} = \mathcal{H}(\mathcal{X})$ cuando se restringe el sistema al subconjunto de tensores de bajo rango B_r , donde

$$B_r = \{ \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} : \text{t-rank}(\mathcal{X}) \leq r \}.$$

Proposición 3. Suponga que $\delta_{2r}(\mathcal{H}) < 1$ para algún $r \geq 1$. Entonces, el operador \mathcal{H} es inyectivo en el conjunto de tensores de rango menor o igual que r .

Demostración. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ tensores diferentes con rango menor o igual que r . Entonces, $\mathcal{Z} := \mathcal{X} - \mathcal{Y}$ es un tensor de rango a lo sumo $2r$. Con lo que se tiene que

$$\|\mathcal{H}(\mathcal{Z})\| = \|\mathcal{H}(\mathcal{X} - \mathcal{Y})\| \geq (1 - \hat{\delta}_{2r}) \|\mathcal{Z}\|_F > 0$$

, para algún $\hat{\delta}_{2r}$ tal que $0.5 < \hat{\delta}_{2r} \leq \delta_{2r} < 1$. Así, $\mathcal{H}(\mathcal{X}) \neq \mathcal{H}(\mathcal{Y})$. □

Debido a que la definiciones de rango se ubican en el dominio transformado de Θ se requiere dar una equivalencia de la PIR en el dominio transformado de Θ . Sea $\mathcal{G}_\Theta : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ la transformación lineal biyectiva tal que

$$\mathcal{G}_\Theta(\mathcal{X}) = \hat{\mathcal{X}}. \quad (21)$$

Denotaremos al operador lineal $\mathcal{H}_\Theta : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ como $\mathcal{H}_\Theta := \mathcal{H} \circ \mathcal{G}_\Theta^{-1}$. Nótese

que $\mathcal{H}_\Theta(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\mathcal{X}})$.

Proposición 4. Sea $\delta_r(\mathcal{H})$ la constante isométrica r -restringida del operador \mathcal{H} . Entonces vale que

$$\delta_r(\mathcal{H}) = \inf_{\delta > 0} \left\{ \left| \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}) \right\| - \left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \right\|_F \right| \leq \delta : \left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \right\|_F = 1 \text{ y } \sum_{k=1}^{n_3} \text{rank}(\hat{\mathbf{X}}^{(k)}) \leq r \right\}. \quad (22)$$

Demostración. El resultado es directo ya que $\mathcal{H}_\Theta(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\mathcal{X}})$, $\left\| \boldsymbol{\mathcal{X}} \right\|_F = \left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \right\|_F$ y $\text{t-rank}(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = \sum_{k=1}^{n_3} \text{rank}(\hat{\mathbf{X}}^{(k)})$. \square

3.2.2. Unicidad de reconstrucciones de bajo rango tensorial En esta sección se demostrará que si un operador lineal $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ cumple la PIR con un δ_r específico, entonces es posible recuperar cualquier tensor $\boldsymbol{\mathcal{X}}_o$ con rango tensorial menor o igual que r . A continuación se describen una serie de resultados que serán usados para la demostración del Teorema de Unicidad 8.

Lema 5. Sea $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ un tensor con $\text{t-rank}(\boldsymbol{\mathcal{X}}) \leq r$. Entonces,

$$\left\| \boldsymbol{\mathcal{X}} \right\|_* \leq \sqrt{r} \left\| \boldsymbol{\mathcal{X}} \right\|_F. \quad (23)$$

Demostración. Para cada $k = 1, \dots, n_3$, sean $\{\sigma_m^{(k)}\}_{m=1}^{r_k}$ los valores singulares de las matrices $\hat{\mathbf{X}}^{(k)}$ donde $r_k = \text{rank}(\hat{\mathbf{X}}^{(k)})$. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \boldsymbol{\mathcal{X}} \right\|_* &= \sum_k \left\| \hat{\mathbf{X}}^{(k)} \right\|_* = \sum_k \sum_{m=1}^{r_k} \sigma_m^{(k)} \leq \sqrt{\sum_k r_k} \sqrt{\sum_k \sum_m^{r_k} (\sigma_m^{(k)})^2} \\ &= \sqrt{\text{t-rank}(\boldsymbol{\mathcal{X}})} \sqrt{\sum_k \left\| \hat{\mathbf{X}}^{(k)} \right\|_F^2} = \sqrt{\text{t-rank}(\boldsymbol{\mathcal{X}})} \left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \right\|_F \\ &\leq \sqrt{r} \left\| \boldsymbol{\mathcal{X}} \right\|_F. \end{aligned}$$

\square

Proposición 6. Sean $M, K \in \mathbb{N}$ y $\{\sigma_m\}_{m=1}^{MK}$ una familia de reales no negativos tales que $\sigma_{m+1} \leq \sigma_m$ para todo $m < MK$, entonces,

$$\sum_{m=1+M}^{MK} \sigma_m^2 \leq \frac{1}{2M+1} \left(\sum_{m=1}^{MK} \sigma_m \right)^2. \quad (24)$$

Demostración. Expandiendo el cuadrado de la suma se tiene que

$$\left(\sum_{m=1}^{MK} \sigma_m \right)^2 = \sum_{m=1}^{MK} \sigma_m^2 + 2 \sum_{m=1}^{MK} \sigma_m \sum_{\hat{m}=1}^{m-1} \sigma_{\hat{m}}.$$

Luego, como $\sigma_{m+1} \leq \sigma_m$ se sigue que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=1}^{MK} \sigma_m \right)^2 &\geq \sum_{m=1}^{MK} \sigma_m^2 + 2 \sum_{m=1}^{MK} \sigma_m^2 (m-1) = \sum_{m=1}^{MK} \sigma_m^2 (2m-1) \\ &\geq \sum_{m=1+M}^{MK} \sigma_m^2 (2m-1) \geq (2M+1) \sum_{m=1+M}^{MK} \sigma_m^2. \end{aligned}$$

□

Lema 7. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ tensores de dimensiones iguales. Entonces, existen dos tensores $\mathcal{U}, \mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ tales que

- i) $\mathcal{R} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$,
- ii) $\text{t-rank}(\mathcal{U}) \leq 2\text{t-rank}(\mathcal{X})$,
- iii) $\|\mathcal{X}\|_* + \|\mathcal{W}\|_* = \|\mathcal{X} + \mathcal{W}\|_*$,
- iv) $\|\mathcal{U}\|_F^2 + \|\mathcal{W}\|_F^2 = \|\mathcal{U} + \mathcal{W}\|_F^2$,
- v) Para todo $L \in \mathbb{N}$ con $L \leq \min(n_1, n_2)n_3 - \text{t-rank}(\mathcal{X})$ y $N := \lceil (\min(n_1, n_2)n_3 - \text{t-rank}(\mathcal{X})) / L \rceil$ existe una familia de tensores ortogonales entre sí $\{\mathcal{W}_n\}_{n=1}^N$ tal que

- $\mathcal{W} = \sum_n \mathcal{W}_n$,

- $\text{t-rank}(\mathcal{W}_n) \leq L$ para todo $n = 1, \dots, N$,
- $\left\| \sum_{n=2}^N \mathcal{W}_n \right\|_F^2 = \sum_{n=2}^N \|\mathcal{W}_n\|_F^2 \leq \frac{1}{2L+1} \|\mathcal{W}\|_*^2$,
- $\|\mathcal{U} + \mathcal{W}_n\|_F^2 = \|\mathcal{U}\|_F^2 + \|\mathcal{W}_n\|_F^2$ para todo $n = 1, \dots, N$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $n_1 \leq n_2$. Primero se llevan estas propiedades al dominio transformado de Θ . Estos es,

- $\widehat{\mathcal{R}} = \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{W}}$,
- $\sum_k \text{rank}(\widehat{\mathcal{U}}^{(k)}) \leq 2 \sum_k \text{rank}(\widehat{\mathcal{X}}^{(k)})$,
- $\sum_k \left\| \widehat{\mathcal{X}}^{(k)} \right\|_* + \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{W}}^{(k)} \right\|_* = \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{X}}^{(k)} + \widehat{\mathcal{W}}^{(k)} \right\|_*$,
- $\left\| \widehat{\mathcal{U}} \right\|_F^2 + \left\| \widehat{\mathcal{W}} \right\|_F^2 = \left\| \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{W}} \right\|_F^2$,
- v) Para todo $L \in \mathbb{N}$ con $L \leq n_1 n_3 - \sum_k r_k$ y $N := \lceil (n_1 n_3 - \sum_k r_k) / L \rceil$, donde $r_k := \text{rank}(\widehat{\mathcal{X}}^{(k)})$, existe una familia de tensores ortogonales entre sí $\{\widehat{\mathcal{W}}_n\}_{n=1}^N$ tal que

- $\widehat{\mathcal{W}} = \sum_n \widehat{\mathcal{W}}_n$,
- $\sum_k \text{rank}(\widehat{\mathcal{W}}_n^{(k)}) \leq L$ para todo $n = 1, \dots, N$,
- $\left\| \sum_{n=2}^N \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2 = \sum_{n=2}^N \left\| \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2 \leq \frac{1}{2L+1} \left(\sum_k \left\| \widehat{\mathcal{W}}_n^{(k)} \right\|_* \right)^2$,
- $\left\| \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2 = \left\| \widehat{\mathcal{U}} \right\|_F^2 + \left\| \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2$ para todo $n = 1, \dots, N$.

En el Lema 3.4 de ²¹ se considera el caso $n_3 = 1$. Basándose en la demostración de ese lema, se extenderá el resultado cuando n_3 es un entero arbitrario. Para cada $k = 1, \dots, n_3$ se considera la descomposición completa en valores singulares de las matrices $\widehat{\mathcal{X}}^{(k)}$. Sean $\mathbf{P}^{(k)}, \mathbf{Q}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ matrices unitarias y $\mathbf{S}^{(k)} \in \mathbb{R}^{r_k \times r_k}$ matrices diagonales tales que

$$\widehat{\mathcal{X}}^{(k)} = \mathbf{P}^{(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{(k)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{Q}^{(k)})^T. \quad (25)$$

Sea $\mathbf{A}^{(k)} := (\mathbf{P}^{(k)})^T \widehat{\mathbf{R}}^{(k)} \mathbf{Q}^{(k)}$ y considerese la siguiente partición regular de todas las matrices $\mathbf{A}^{(k)}$

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(k)} & \mathbf{A}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{A}_{21}^{(k)} & \mathbf{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

donde $\mathbf{A}_{11}^{(k)} \in \mathbb{R}^{r_k \times r_k}$. Con esto se pueden definir

$$\widehat{\mathbf{U}}^{(k)} := \mathbf{P}^{(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(k)} & \mathbf{A}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{A}_{21}^{(k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{Q}^{(k)})^T \quad \text{y} \quad \widehat{\mathbf{W}}^{(k)} := \mathbf{P}^{(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} (\mathbf{Q}^{(k)})^T. \quad (27)$$

Veamos que las propiedades i) a iv) se cumplen.

i)

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{U}} + \widehat{\mathbf{W}} &= \sum_k \widehat{\mathbf{U}}^{(k)} + \widehat{\mathbf{W}}^{(k)} = \sum_k \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{A}^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)})^T \\ &= \sum_k \mathbf{P}^{(k)} (\mathbf{P}^{(k)})^T \widehat{\mathbf{R}}^{(k)} \mathbf{Q}^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)})^T = \sum_k \widehat{\mathbf{R}}^{(k)} = \widehat{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

ii) Dado que para todo $k = 1, \dots, n_3$ se cumple que $\text{rank}(\widehat{\mathbf{U}}^{(k)}) \leq 2r_k$ y además $\sum_k \text{rank}(\widehat{\mathbf{X}}^{(k)}) = \sum_k r_k$, entonces se tiene que $\text{t-rank}(\mathbf{U}) \leq 2\text{t-rank}(\mathbf{X})$.

iii) Para todo $k = 1, \dots, n_3$ se tiene que $\widehat{\mathbf{X}}^{(k)} \cdot (\widehat{\mathbf{W}}^{(k)})^T = \mathbf{0}$ y $(\widehat{\mathbf{X}}^{(k)})^T \cdot \widehat{\mathbf{W}}^{(k)} = \mathbf{0}$. Así, por Lema 12 del el Apéndice B, se sigue que

$$\left\| \widehat{\mathbf{X}}^{(K)} \right\|_* + \left\| \widehat{\mathbf{W}}^{(K)} \right\|_* = \left\| \widehat{\mathbf{X}}^{(K)} + \widehat{\mathbf{W}}^{(K)} \right\|_*.$$

Esto implica directamente iii).

iv) Primero nótese que a partir de la Definición 5 se tiene que para todo tensor $\widehat{\mathbf{Y}}$ se cumple

$$\left\| \widehat{\mathbf{Y}} \right\|_F^2 = \sum_k \left\| \widehat{\mathbf{Y}}^{(k)} \right\|_F^2. \quad (28)$$

Dado que las matrices $\widehat{\mathbf{P}}^{(k)}$ y $\widehat{\mathbf{Q}}^{(k)}$ son unitarias, de la ecuación (27) se tiene que para todo $k = 1, \dots, n_3$

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathbf{U}}^{(k)} + \widehat{\mathbf{W}}^{(k)} \right\|_F^2 &= \left\| \mathbf{A}^{(k)} \right\|_F^2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(k)} & \mathbf{A}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{A}_{21}^{(k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_F^2 + \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \right\|_F^2 \\ &= \left\| \widehat{\mathbf{U}}^{(k)} \right\|_F^2 + \left\| \widehat{\mathbf{W}}^{(k)} \right\|_F^2, \end{aligned}$$

implicando lo que se busca, esto es,

$$\left\| \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{w}} \right\|_F^2 = \left\| \widehat{\mathbf{u}} \right\|_F^2 + \left\| \widehat{\mathbf{w}} \right\|_F^2.$$

Para el ítem v) se hace la descomposición en valores singulares de las matrices $\mathbf{A}_{22}^{(k)}$. Primero nótese que $\mathbf{A}_{22}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n_1-r_k) \times (n_2-r_k)}$, pues $\mathbf{A}_{11}^{(k)} \in \mathbb{R}^{r_k \times r_k}$. Así, por la descomposición en valores singulares se sigue que para cada $k = 1, \dots, n_3$ existen matrices unitarias $\mathbf{T}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n_1-r_k) \times (n_1-r_k)}$ y $\mathbf{O}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n_2-r_k) \times (n_2-r_k)}$ y matrices diagonales $\Sigma^{(k)} \in \mathbb{R}^{(n_1-r_k) \times (n_1-r_k)}$ con $\Sigma^{(k)} = \text{diag} \left(\sigma_1^{(k)}, \dots, \sigma_{n_1-r_k}^{(k)} \right)$ y $\sigma_1^{(k)} \geq \dots \geq \sigma_{n_1-r_k}^{(k)} \geq 0$ tales que

$$\mathbf{A}_{22}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)} \begin{bmatrix} \Sigma^{(k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{O}^{(k)})^T.$$

Nótese que el vector $\sigma := [\sigma_1^{(1)}, \dots, \sigma_{n_1-r_1}^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \dots, \sigma_{n_1-r_2}^{(2)}, \dots, \sigma_1^{(n_3)}, \dots, \sigma_{n_1-r_{n_3}}^{(n_3)}]$ se puede ordenar con una función inyectiva $\gamma : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ donde $d = n_1 n_3 - \sum_k r_k$ y además $\sigma(\gamma(m+1)) \leq \sigma(\gamma(m))$. Para cada $n = 1, \dots, N$ se define el conjunto de índices $I_n := \{m \in \mathbb{N} : (n-1)L + 1 \leq m \leq \min(nL, d)\}$. Se puede observar que $\{I_n\}$ es una partición disyunta del conjunto de índices $\{1, \dots, d\}$ donde cada elemento de la partición tiene a lo sumo L elementos. A partir de $\{I_n\}$ es posible definir la familia de matrices $\{\Sigma_n^{(k)}\}_n$ como $\Sigma_n^{(k)} = \text{diag}(\hat{\sigma}_{n,1}^{(k)}, \dots, \hat{\sigma}_{n,n_1-r_k}^{(k)})$ donde

$$\hat{\sigma}_{n,m}^{(k)} = \begin{cases} \sigma_m^{(k)} & , \text{ si } \sum_{\hat{k}=1}^{k-1} (n_1 - r_{\hat{k}}) + m \in \gamma(I_n) \\ 0 & , \text{ caso contrario.} \end{cases} \quad (29)$$

Puesto que el termino $\sum_{\hat{k}=1}^{k-1} (n_1 - r_{\hat{k}}) + m$ en la ecuación (29) es la posición de $\sigma_m^{(k)}$ en el vector σ , entonces, para I_1 , la condición $\sum_{\hat{k}=1}^{k-1} (n_1 - r_{\hat{k}}) + m \in \gamma(I_1)$ confirma si $\sigma_m^{(k)}$ está entre los primeros L valores mas grandes de σ . Esta idea se puede extender fácilmente para todo I_n .

Ahora bien, se define la familia de matrices $\{\widehat{\mathbf{W}}^{(k)}\}_n$ así

$$\widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)} := \mathbf{P}^{(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{(k)} \begin{bmatrix} \Sigma_n^{(k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{O}^{(k)})^T \end{bmatrix} (\mathbf{Q}^{(k)})^T. \quad (30)$$

Entonces, para todo $k = 1, \dots, n_3$ esta familia satisface lo siguiente

(a) $\widehat{\mathbf{W}}^{(k)} = \sum_{n=1}^N \widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)}$. Esto es así pues

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)} &= \mathbf{P}^{(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{(k)} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \Sigma_n^{(k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{O}^{(k)})^T \end{bmatrix} (\mathbf{Q}^{(k)})^T \\ &= \mathbf{P}^{(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{(k)} \begin{bmatrix} \Sigma^{(k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{O}^{(k)})^T \end{bmatrix} (\mathbf{Q}^{(k)})^T = \mathbf{P}^{(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix} (\mathbf{Q}^{(k)})^T \\ &= \widehat{\mathbf{W}}^{(k)}. \end{aligned}$$

(b) $\|\widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)}\|_F^2 = \|\Sigma_n^{(k)}\|_F^2 = \sum_{m=1}^{n_1-r_k} (\hat{\sigma}_{n,m}^{(k)})^2$ para todo $n = 1, \dots, N$. Esta afirmación es cierta pues las matrices $\mathbf{P}^{(k)}$, $\mathbf{Q}^{(k)}$, $\mathbf{O}^{(k)}$ y $\mathbf{T}^{(k)}$ son unitarias y las matrices $\Sigma_n^{(k)}$ son diagonales positivas.

(c) $\text{tr}(\widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)} (\widehat{\mathbf{W}}_{n'}^{(k)})^T) = \text{tr}(\Sigma_n^{(k)} \Sigma_{n'}^{(k)}) = 0$ para todo $n \neq n'$. Esto se debe por la inyectividad de $\gamma(\cdot)$.

$$(d) \operatorname{tr}\left(\widehat{\mathbf{U}}^{(k)}(\widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)})^T\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{(k)} & \mathbf{A}_{11}^{(k)} \\ \mathbf{A}_{21}^{(k)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{(k)} \left[\begin{smallmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_n^{(k)} & \mathbf{0} \end{smallmatrix} \right] (\mathbf{O}^{(k)})^T \end{bmatrix}\right) = 0 \text{ para todo } n = 1, \dots, N.$$

Así, consideremos la familia de tensores $\{\widehat{\mathcal{W}}_n\}$ con $\widehat{\mathcal{W}}_n := \overline{\sum_k \widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)}}$. Veamos que esta familia cumple el literal v). El primer ítem de v) se cumple por el literal (a). De acuerdo a los literales (b) y (c) se sigue que

$$\left\| \sum_{n=2}^N \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2 = \sum_k^{n_3} \left\| \sum_{n=2}^N \widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)} \right\|_F^2 = \sum_k^{n_3} \sum_{n=2}^N \left\| \widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)} \right\|_F^2 = \sum_k^{n_3} \sum_{n=2}^N \sum_{m=1}^{n_1-r_k} (\hat{\sigma}_{n,m}^{(k)})^2 \quad (31)$$

$$= \sum_{n=2}^N \sum_{m \in I_n} \sigma(\gamma(m))^2. \quad (32)$$

Luego, usando la Proposición 6 se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=2}^N \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2 &= \sum_{n=2}^N \sum_{m \in I_n} \sigma(\gamma(m))^2 \leq \frac{1}{2L+1} \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m \in I_n} \sigma(\gamma(m)) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2L+1} \left(\sum_k \sum_{m=1}^{n_1-r_k} \sigma_m^{(k)} \right)^2 = \frac{1}{2L+1} \left(\sum_k \|\boldsymbol{\Sigma}^{(k)}\|_* \right)^2 \\ &= \frac{1}{2L+1} \left(\sum_k \left\| \widehat{\mathbf{W}}^{(k)} \right\|_* \right)^2, \end{aligned}$$

cumpléndose así el tercer ítem de v). Por el literal (d) se tiene que $\left\| \widehat{\mathbf{U}}^{(k)} + \widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)} \right\|_F^2 = \left\| \widehat{\mathbf{U}}^{(k)} \right\|_F^2 + \left\| \widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)} \right\|_F^2$ para todo $n = 1, \dots, N$, satisfaciendo el cuarto ítem de v). Finalmente, para todo n y k se tiene que

$$\sum_k \operatorname{rank}\left(\widehat{\mathbf{W}}_n^{(k)}\right) = \sum_k \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{\Sigma}_n^{(k)}\right) \leq |I_n| \leq L, \quad (33)$$

así $\operatorname{t-rank}(\mathcal{W}_n) \leq L$. □

Teorema 8 (Teorema de Unicidad). Sea $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ un operador lineal y sea \mathcal{X}_o un tensor con $\text{t-rank}(\mathcal{X}_o) = r$. Sea $\mathbf{b} := \mathcal{H}(\mathcal{X}_o)$ y definamos el siguiente problema de optimización

$$\mathcal{X}_\dagger := \arg \min_{\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}} \|\mathcal{X}\|_* \quad \text{sujeto a } \mathcal{H}(\mathcal{X}) = \mathbf{b}. \quad (34)$$

Si $\delta_{2r+L}(\mathcal{H}) < \frac{1 - \sqrt{\frac{2r}{2L+1}}}{1 + \sqrt{\frac{2r}{2L+1}}}$ para algún $L \geq r$, entonces $\mathcal{X}_\dagger = \mathcal{X}_o$.

Demostración. El problema (34) puede escribirse cómo

$$\hat{\mathcal{X}}_\dagger := \arg \min_{\hat{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}} \|\hat{\mathcal{X}}\|_* \quad \text{sujeto a } \mathcal{H}_\Theta(\hat{\mathcal{X}}) = \mathbf{b}. \quad (35)$$

Basta probar que $\hat{\mathcal{R}} := \hat{\mathcal{X}}_\dagger - \hat{\mathcal{X}}_o = 0$.

De acuerdo al Lema 7, existen tensores $\hat{\mathcal{U}}$ y $\hat{\mathcal{W}}$ tales que cumplen las siguientes propiedades:

- i) $\hat{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{U}} + \hat{\mathcal{W}}$,
- ii) $\sum_k \text{rank}(\hat{\mathcal{U}}^{(k)}) \leq 2 \sum_k \text{rank}(\hat{\mathcal{X}}_o^{(k)})$,
- iii) $\sum_k \|\hat{\mathcal{X}}_o^{(k)}\|_* + \sum_k \|\hat{\mathcal{W}}^{(k)}\|_* = \sum_k \|\hat{\mathcal{X}}_o^{(k)} + \hat{\mathcal{W}}^{(k)}\|_*$,
- iv) $\|\hat{\mathcal{U}}\|_F^2 + \|\hat{\mathcal{W}}\|_F^2 = \|\hat{\mathcal{U}} + \hat{\mathcal{W}}\|_F^2$,
- v) Para todo $L \in \mathbb{N}$ con $L \leq n_1 n_3 - \sum_k r_k$ y $N := \lceil (n_1 n_3 - \sum_k r_k) / L \rceil$, donde $r_k := \text{rank}(\hat{\mathcal{X}}_o^{(k)})$, existe una familia de tensores ortogonales entre sí $\{\hat{\mathcal{W}}_n\}_{n=1}^N$ tal que
 - $\hat{\mathcal{W}} = \sum_n \hat{\mathcal{W}}_n$,
 - $\sum_k \text{rank}(\hat{\mathcal{W}}_n^{(k)}) \leq L$ para todo $n = 1, \dots, N$,

- $\left\| \sum_{n=2}^N \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2 = \sum_{n=2}^N \left\| \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2 \leq \frac{1}{2L+1} \left(\sum_k \left\| \widehat{\mathcal{W}}_n^{(k)} \right\|_* \right)^2$,
- $\left\| \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2 = \left\| \widehat{\mathcal{U}} \right\|_F^2 + \left\| \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2$ para todo $n = 1, \dots, N$.

Más adelante utilizaremos las propiedades que poseen estos tensores. Por la optimalidad de $\widehat{\mathcal{X}}_{\dagger}$ se tiene que

$$\sum_k \left\| \widehat{\mathcal{X}}_{\dagger}^{(k)} \right\|_* \leq \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{X}}_o^{(k)} \right\|_*.$$

Entonces, de i) y iii) se sigue

$$\begin{aligned} \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{X}}_o^{(k)} \right\|_* &\geq \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{R}}^{(k)} + \widehat{\mathcal{X}}_o^{(k)} \right\|_* \geq \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{X}}_o^{(k)} + \widehat{\mathcal{W}}^{(k)} \right\|_* - \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{U}}^{(k)} \right\|_* \\ &= \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{X}}_o^{(k)} \right\|_* + \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{W}}^{(k)} \right\|_* - \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{U}}^{(k)} \right\|_* . \end{aligned}$$

lo cual implica

$$\sum_k \left\| \widehat{\mathcal{U}}^{(k)} \right\|_* \geq \sum_k \left\| \widehat{\mathcal{W}}^{(k)} \right\|_* . \quad (36)$$

Luego, de la propiedad v) y ii) se sigue

$$\sum_{n=2}^N \left\| \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2 \leq \frac{1}{2L+1} \left(\sum_k \left\| \widehat{\mathcal{W}}^{(k)} \right\|_* \right)^2 \leq \frac{1}{2L+1} \left(\sum_k \left\| \widehat{\mathcal{U}}^{(k)} \right\|_* \right)^2 = \frac{1}{2L+1} \left\| \mathcal{U} \right\|_*^2 ,$$

y usando el Lema (5) se tiene

$$\sum_{n=2}^N \left\| \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F^2 \leq \frac{2t - \text{rank}(\mathcal{U})}{2L+1} \left\| \mathcal{U} \right\|_F^2 \leq \frac{2r}{2L+1} \left\| \widehat{\mathcal{U}} \right\|_F^2 . \quad (37)$$

De i) y v) se tiene que $\widehat{\mathcal{R}} = \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{W}}$ y $\widehat{\mathcal{W}} = \sum_{n=1}^N \widehat{\mathcal{W}}_n$. Así,

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{H}_\Theta \left(\widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{W}}_1 \right) \right\|_F &\leq \left\| \mathcal{H}_\Theta(\widehat{\mathcal{R}}) \right\|_F + \left\| \mathcal{H}_\Theta \left(\sum_{n=2}^N \widehat{\mathcal{W}}_n \right) \right\|_F \\ &\leq \left\| \mathcal{H}_\Theta(\widehat{\mathcal{R}}) \right\|_F + \sum_{n=2}^N \left\| \mathcal{H}_\Theta \left(\widehat{\mathcal{W}}_n \right) \right\|_F. \end{aligned} \quad (38)$$

Puesto que para todo $n = 2, \dots, N$ se tiene que $\sum_k \text{rank} \left(\widehat{\mathcal{W}}_n^{(k)} \right) \leq L$ y $\sum_k \text{rank} \left(\widehat{\mathcal{U}}^{(k)} + \widehat{\mathcal{W}}_1^{(k)} \right) \leq 2r + L$, se sigue por la Proposición 4 que

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{H}_\Theta(\widehat{\mathcal{R}}) \right\|_F &\geq \left\| \mathcal{H}_\Theta \left(\widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{W}}_1 \right) \right\|_F - \sum_{n=2}^N \left\| \mathcal{H}_\Theta \left(\widehat{\mathcal{W}}_n \right) \right\|_F \\ &\geq (1 - \delta_{2r+L}) \left\| \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{W}}_1 \right\|_F - (1 + \delta_L) \sum_{n=2}^N \left\| \widehat{\mathcal{W}}_n \right\|_F. \end{aligned} \quad (39)$$

Por otro lado, de v) se observa que $\left\| \widehat{\mathcal{U}} + \widehat{\mathcal{W}}_1 \right\|_F \geq \left\| \widehat{\mathcal{U}} \right\|_F$. Por lo tanto, de la ecuación (37)

$$\left\| \mathcal{H}_\Theta(\widehat{\mathcal{R}}) \right\|_F \geq (1 - \delta_{2r+L}) \left\| \widehat{\mathcal{U}} \right\|_F - (1 + \delta_L) \sqrt{\frac{2r}{2L+1}} \left\| \widehat{\mathcal{U}} \right\|_F \quad (40)$$

Dado que $\delta_{2r+L} < \frac{1 - \sqrt{\frac{2r}{2L+1}}}{1 + \sqrt{\frac{2r}{2L+1}}}$ para algún $L > r$, $\delta_{2r+L} \geq \delta_{2r}$ y $\mathcal{H}_\Theta(\widehat{\mathcal{R}}) = 0$, se tiene que $\widehat{\mathcal{U}} = 0$. De la ecuación (36) se sigue que $\widehat{\mathcal{W}} = 0$. Así, $\widehat{\mathcal{R}} = 0$. \square

3.3. MUESTREO CUASI-ISOMÉTRICO

En esta sección, se verá que si un operador lineal $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ proviene de una familia de operadores cuasi-isométrico, entonces \mathcal{H} cumple la propiedad isométrica restringida con cierta probabilidad. La siguiente definición caracteriza esta familia de operadores lineales.

Definición 10. Decimos que un operador lineal $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es *cuasi-isométrico* si para todo $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ y para todo $0 < \epsilon < 1$ se cumple que

$$\mathbb{P} (|\|\mathcal{H}(\mathcal{X})\|^2 - \|\mathcal{X}\|_F^2| \geq \epsilon \|\mathcal{X}\|_F^2) \leq f(\epsilon), \quad (41)$$

para alguna función $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$.

La mayoría de operadores lineales cuasi-isométricos son caracterizados a partir de matrices aleatorias, esto es, un operador lineal $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ siempre se puede representar matricialmente de la siguiente forma

$$\mathcal{H}(\mathcal{X}) = \mathbf{H} \text{vect}(\mathcal{X}), \quad (42)$$

donde $\text{vect}(\mathcal{X})$ denota la representación vectorial del tensor \mathcal{X} y \mathbf{H} es una matriz de dimensiones $m \times n_1 n_2 n_3$. A continuación damos algunos de ejemplos de operadores cuasi-isométricos vistos desde esta representación matricial. El más común es aquel cuyas entradas de \mathbf{H} sigue una distribución Gaussiana idénticamente independiente

²⁴

$$\mathbf{H}^{(i,j)} \sim \mathcal{N}(0, 1/p). \quad (43)$$

En ²⁵ se mencionan dos arreglos de matrices que modelan un sensado cuasi-isométrico. La primera es una matriz cuyas entradas siguen una distribución simé-

²⁴ Sanjoy DASGUPTA y Anupam Gupta. “An elementary proof of a theorem of Johnson and Lindenstrauss”. En: *Random Structures & Algorithms* 22.1 (2003), págs. 60-65.

²⁵ Dimitris ACHLIOPTAS. “Database-friendly random projections: Johnson-Lindenstrauss with binary coins”. En: *Journal of computer and System Sciences* 66.4 (2003), págs. 671-687.

trica de Bernoulli, esto es,

$$\mathbf{H}^{(i,j)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{m}} & \text{con probabilidad de } 1/2, \\ -\sqrt{\frac{1}{m}} & \text{con probabilidad de } 1/2, \end{cases} \quad (44)$$

y la segunda tiene ceros en dos terceras partes de sus entradas, esto es,

$$\mathbf{H}^{(i,j)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{m}} & \text{con probabilidad de } 1/6, \\ 0 & \text{con probabilidad de } 2/3, \\ -\sqrt{\frac{3}{m}} & \text{con probabilidad de } 1/6. \end{cases} \quad (45)$$

Captura de Único Pixel Se verá que la arquitectura de sensado de único pixel es un operador cuasi-isométrico. Sea $\mathbf{H}_o \in \mathbb{R}^{m \times n_1 n_2}$ una matriz cuyas entradas siguen una distribución simétrica de Bernoulli tal y como se describe en (44). De acuerdo a la sección 2.3.1, el modelo de sensado de único pixel se puede modelar como

$$\mathbf{y} = \mathcal{H}(\mathcal{X}) = \mathbf{H} \text{vect}(\mathcal{X}) \quad \text{con} \quad \mathbf{H} := \mathbf{I}_{n_3} \otimes \mathbf{H}_o, \quad (46)$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{mn_3}$. Es fácil ver que $\|\mathbf{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{n_3} \|\mathbf{H}_o \text{vect}(\mathbf{X}^{(k)})\|^2$ siendo $\mathbf{X}^{(k)}$ la k -ésima matriz apilada de \mathcal{X} , ver Definición 5. Así tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \|\mathcal{H}(\mathcal{X})\|^2 - \|\mathcal{X}\|_F^2 \right| &= \left| \|\mathbf{H} \text{vect}(\mathcal{X})\|^2 - \|\text{vect}(\mathcal{X})\|^2 \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_3} \left| \|\mathbf{H}_o \text{vect}(\mathbf{X}^{(k)})\|^2 - \|\text{vect}(\mathbf{X}^{(k)})\|^2 \right| \end{aligned} \quad (47)$$

De acuerdo a ²⁵, existen dos constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que para todo $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m \times n_1 n_2}$

$$\mathbf{P} \left(\left| \|\mathbf{H}_o \text{vect}(\mathbf{Z})\|^2 - \|\mathbf{Z}\|_F^2 \right| \leq \epsilon \|\mathbf{Z}\|_F^2 \right) \leq 1 - c_1 \exp(-c_2 \epsilon^2), \quad (48)$$

donde $0 \leq 1 - c_1 \exp(-c_2 \epsilon^2) \leq 1$ para todo $0 < \epsilon < 1$. Entonces, de (47) se tiene que

$$\mathbf{P} \left(\left| \|\mathcal{H}(\boldsymbol{\mathcal{X}})\|^2 - \|\boldsymbol{\mathcal{X}}\|_F^2 \right| \leq \epsilon \|\boldsymbol{\mathcal{X}}\|_F^2 \right) \geq (1 - c_1 \exp(-c_2 \epsilon^2))^{n_3}, \quad (49)$$

implicando que

$$\mathbf{P} \left(\left| \|\mathcal{H}(\boldsymbol{\mathcal{X}})\|^2 - \|\boldsymbol{\mathcal{X}}\|_F^2 \right| \geq \epsilon \|\boldsymbol{\mathcal{X}}\|_F^2 \right) \leq f(\epsilon), \quad (50)$$

con $f(\epsilon) = 1 - (1 - c_1 \exp(-c_2 \epsilon^2))^{n_3}$. Nótese que $0 \leq f(\epsilon) \leq 1$ para todo $0 < \epsilon < 1$, es decir, la arquitectura de sensado de único pixel es un operador cuasi-isométrico.

Una Cota de Probabilidad El resultado principal de esta sección es el Teorema 11 el cual da una medida de probabilidad asociada al evento de que un operador de sensado lineal *quasi-isométricos* cumpla la PIR. Para llegar a este resultado final, se requieren los siguientes resultados previos.

Lema 9. Sea B_r el conjunto de tensores con tubal-rank (ver Definición 8) menor que $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_{n_3}]$ donde $r_k \leq \min(n_1, n_2)$. Específicamente, sea

$$B_r := \{ \boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} : \|\boldsymbol{\mathcal{X}}\|_F = 1 \text{ y tubal-rank}(\boldsymbol{\mathcal{X}}) \leq \mathbf{r} \}. \quad (51)$$

Entonces, existe una cubierta finita $\mathcal{C}_\rho(B_r) \subset B_r$ tal que

$$|\mathcal{C}_\rho(B_r)| \leq (1 + 6/\rho)^{(n_1+n_2+1) \sum_{k=1}^{n_3} r_k}, \quad (52)$$

y para todo $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in B_r$ existe un $\boldsymbol{\mathcal{X}}_* \in \mathcal{C}_\rho(B_r)$ tal que

$$\|\boldsymbol{\mathcal{X}} - \boldsymbol{\mathcal{X}}_*\|_F \leq \rho. \quad (53)$$

Demostración. Considere la constante $r := \sum_k r_k$. Por la descomposición en valores

singulares de matrices se tiene que para todo $\mathcal{X} \in B_r$ existen las familias

$$\begin{aligned}\{\mathbf{p}_m\}_{m=1}^r &= \{\mathbf{p}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{p}_{r_1}^{(1)}, \mathbf{p}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{p}_{r_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{p}_{r_{n_3}}^{(n_3)}\} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \\ \{\mathbf{q}_m\}_{m=1}^r &= \{\mathbf{q}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{q}_{r_1}^{(1)}, \mathbf{q}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{q}_{r_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{q}_{r_{n_3}}^{(n_3)}\} \subset \mathbb{R}^{n_2}, \\ \{\sigma_m\}_{m=1}^r &= \{\sigma_1^{(1)}, \dots, \sigma_{r_1}^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \dots, \sigma_{r_2}^{(2)}, \dots, \sigma_{r_{n_3}}^{(n_3)}\} \subset \mathbb{R},\end{aligned}$$

tales que para todo $k = 1, \dots, n_3$ se tiene

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}^{(k)} &= \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{S}^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)})^T, \\ \mathbf{P}^{(k)} &= [\mathbf{p}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{p}_{r_k}^{(k)}], \quad \mathbf{Q}^{(k)} = [\mathbf{q}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{q}_{r_k}^{(k)}], \quad \mathbf{S}^{(k)} = \text{diag}(\sigma_1^{(k)}, \dots, \sigma_{r_k}^{(k)}),\end{aligned}$$

donde $(\mathbf{P}^{(k)})^T \mathbf{P}^{(k)} = (\mathbf{Q}^{(k)})^T \mathbf{Q}^{(k)} = \mathbf{I}_{r_k}$ siendo \mathbf{I}_{r_k} la matriz identidad de dimensiones $r_k \times r_k$. Primero nótese que

$$\|\widehat{\mathcal{X}}\|_F = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_3} \|\widehat{\mathbf{X}}^{(k)}\|_F^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_3} \|\mathbf{S}^{(k)}\|_F^2} = \sqrt{\sum_{m=1}^r \sigma_m^2} = 1.$$

Se define al conjunto

$$D_r := \left\{ \{\alpha_m\}_{m=1}^r : \sqrt{\sum_{m=1}^r \alpha_m^2} = 1 \right\}. \quad (54)$$

Nótese que $\{\sigma_m\}_{m=1}^r \in D_r$. Por el Teorema de las ρ -net 13 del Apéndice C, existe un subconjunto $\mathcal{C}_{\rho/3}(D_r) \subset D_r$ tales que $|\mathcal{C}_{\rho/3}(D_r)| \leq (1 + 6/\rho)^r$ y para toda familia $\{\alpha_m\}_{m=1}^r \in D_r$ existe $\{\alpha_{*m}\}_{m=1}^r \in \mathcal{C}_{\rho/3}(D_r)$ tal que

$$\sqrt{\sum_{m=1}^r (\alpha_m - \alpha_{*m})^2} \leq \rho/3. \quad (55)$$

Se define el conjunto

$$O_{n,r} := \left\{ \{\mathbf{o}_m\}_{m=1}^r : \max_m \|\mathbf{o}_m\| = 1 \wedge \mathbf{o}_m \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (56)$$

Puesto que $(\mathbf{P}^{(k)})^T \mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{I}_r$ para toda k , se tiene que $\{\mathbf{p}_m\}_{m=1}^r \in O_{n_1,r}$; análogamente $\{\mathbf{q}_m\}_{m=1}^r \in O_{n_2,r}$. Por el teorema de las ρ -net, existe una cobertura $\mathcal{C}_{\rho/3}(O_{n,r}) \subset O_{n,r}$ tales que $|\mathcal{C}_{\rho/3}(O_{n,r})| \leq (1 + 6/\rho)^{nr}$ y para toda familia $\{\mathbf{o}_m\}_{m=1}^r \in O_{n,r}$ existe una familia $\{\mathbf{o}_{*m}\}_{m=1}^r \in \mathcal{C}_{\rho/3}(O_{n,r})$ tal que

$$\max_m \|\mathbf{o}_m - \mathbf{o}_{*m}\| \leq \rho/3. \quad (57)$$

Se considera el conjunto

$$\mathcal{C}_\rho(B_r) := \left\{ \overline{\sum_k} \mathbf{U}^{(k)} \mathbf{D}^{(k)} (\mathbf{V}^{(k)})^T : \begin{array}{l} \mathbf{U}^{(k)} = [\mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{r_k}^{(k)}], \quad \mathbf{V}^{(k)} = [\mathbf{v}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{v}_{r_k}^{(k)}], \\ \mathbf{D}^{(k)} = \text{diag} \left(\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{r_k}^{(k)} \right), \\ \{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^r = \{\mathbf{u}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{r_{n_3}}^{(n_3)}\} \in \mathcal{C}_{\frac{\rho}{3}}(O_{n_1,r}), \\ \{\mathbf{v}_m\}_{m=1}^r = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_{r_{n_3}}^{(n_3)}\} \in \mathcal{C}_{\frac{\rho}{3}}(D_r), \\ \{\alpha_m\}_{m=1}^r = \{\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{r_{n_3}}^{(n_3)}\} \in \mathcal{C}_{\frac{\rho}{3}}(O_{n_2,r}). \end{array} \right\} \quad (58)$$

Es claro que $\mathcal{C}_\rho(B_r) \subset B_r$ y además

$$|\mathcal{C}_\rho(B_r)| \leq |\mathcal{C}_\rho(O_{n_1,r})| |\mathcal{C}_\rho(D_r)| |\mathcal{C}_\rho(O_{n_2,r})| \leq (1 + 6/\rho)^{(n_1+n_2+1)r}. \quad (59)$$

En lo que sigue se verá que el conjunto $\mathcal{C}_\rho(B_r)$ cumple la condición (53). Sean $\{\mathbf{p}_{*m}\}_{m=1}^r \in \mathcal{C}_{\rho/3}(O_{n_1,r})$, $\{\mathbf{q}_{*m}\}_{m=1}^r \in \mathcal{C}_{\rho/3}(O_{n_2,r})$ y $\{\sigma_{*m}\}_{m=1}^r \in \mathcal{C}_{\rho/3}(D_r)$ tales que $\max_m \|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_{*m}\| \leq \rho/3$, $\max_m \|\mathbf{q}_m - \mathbf{q}_{*m}\| \leq \rho/3$ y $\sqrt{\sum_{m=1}^r (\sigma_m - \sigma_{*m})^2} \leq \rho/3$. El

tensor $\hat{\boldsymbol{\chi}}_* := \overline{\sum_k \mathbf{P}_*^{(k)} \mathbf{S}_*^{(k)} (\mathbf{Q}_*^{(k)})^T}$ satisface que $\|\hat{\boldsymbol{\chi}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}_*\|_F \leq \rho$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_*^{(k)} &= [\mathbf{p}_{*1}^{(k)}, \dots, \mathbf{p}_{*r_k}^{(k)}], & \mathbf{Q}_*^{(k)} &= [\mathbf{q}_{*1}^{(k)}, \dots, \mathbf{q}_{*r_k}^{(k)}], & \mathbf{S}_*^{(k)} &= \text{diag}(\sigma_{*1}^{(k)}, \dots, \sigma_{*r_k}^{(k)}), \\ \{\mathbf{p}_{*m}\}_{m=1}^r &= \{\mathbf{p}_{*1}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}_{*r_{n_3}}^{(n_3)}\} \in \mathcal{C}_{\frac{\rho}{3}}(O_{n_1, r}), \\ \{\mathbf{q}_{*m}\}_{m=1}^r &= \{\mathbf{q}_{*1}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}_{*r_{n_3}}^{(n_3)}\} \in \mathcal{C}_{\frac{\rho}{3}}(D_r), \\ \{\sigma_{*m}\}_{m=1}^r &= \{\sigma_{*1}^{(1)}, \dots, \sigma_{*r_{n_3}}^{(n_3)}\} \in \mathcal{C}_{\frac{\rho}{3}}(O_{n_2, r}). \end{aligned} \quad (60)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|\hat{\boldsymbol{\chi}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}_*\|_F &= \left\| \overline{\sum_k \mathbf{P}^{(k)} \mathbf{S}^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)})^T} - \overline{\sum_k \mathbf{P}_*^{(k)} \mathbf{S}_*^{(k)} (\mathbf{Q}_*^{(k)})^T} \right\|_F \\ &\leq \left\| \overline{\sum_k (\mathbf{P}^{(k)} - \mathbf{P}_*^{(k)}) \mathbf{S}^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)})^T} \right\|_F + \left\| \overline{\sum_k \mathbf{P}_*^{(k)} (\mathbf{S}^{(k)} - \mathbf{S}_*^{(k)}) (\mathbf{Q}^{(k)})^T} \right\|_F \\ &\quad + \left\| \overline{\sum_k \mathbf{P}_*^{(k)} \mathbf{S}_*^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)} - \mathbf{Q}_*^{(k)})^T} \right\|_F. \end{aligned} \quad (61)$$

Para el primer término tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\sum_k (\mathbf{P}^{(k)} - \mathbf{P}_*^{(k)}) \mathbf{S}^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)})^T} \right\|_F^2 &= \sum_k \left\| (\mathbf{P}^{(k)} - \mathbf{P}_*^{(k)}) \mathbf{S}^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)})^T \right\|_F^2 \\ &= \sum_k \left\| (\mathbf{P}^{(k)} - \mathbf{P}_*^{(k)}) \mathbf{S}^{(k)} \right\|_F^2 = \sum_k \left\| \sum_{m=1}^{r_k} (\mathbf{p}_m^{r_k} - \mathbf{p}_{*m}^{r_k}) \sigma_m^{r_k} \right\|_F^2 \\ &\leq \left(\max_k \max_{1 \leq m \leq r_k} \|\mathbf{p}_m^{(k)} - \mathbf{p}_{*m}^{(k)}\|^2 \right) \sum_k \sum_{m=1}^{r_k} (\sigma_m^{r_k})^2 \\ &= \max_k \max_{1 \leq m \leq r_k} \|\mathbf{p}_m^{(k)} - \mathbf{p}_{*m}^{(k)}\|^2 \leq (\rho/3)^2. \end{aligned}$$

Así, $\left\| \overline{\sum_k (\mathbf{P}^{(k)} - \mathbf{P}_*^{(k)}) \mathbf{S}^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)})^T} \right\|_F \leq \rho/3$. Análogamente, para el tercer término de

(61) se cumple $\left\| \overline{\sum_k \mathbf{P}_*^{(k)} \mathbf{S}_*^{(k)} (\mathbf{Q}^{(k)} - \mathbf{Q}_*^{(k)})^T} \right\|_F \leq \rho/3$. En el segundo término se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\sum_k \mathbf{P}_*^{(k)} (\mathbf{S}^{(k)} - \mathbf{S}_*^{(k)}) (\mathbf{Q}^{(k)})^T} \right\|_F^2 &= \sum_k \left\| \mathbf{P}_*^{(k)} (\mathbf{S}^{(k)} - \mathbf{S}_*^{(k)}) (\mathbf{Q}^{(k)})^T \right\|_F^2 \\ &= \sum_k \left\| \sum_{m=1}^{r_k} \mathbf{p}_{*m}^{r_k} (\sigma_m^{r_k} - \sigma_{*m}^{r_k}) \right\|_F^2 \leq \sum_k \sum_{m=1}^{r_k} \left\| \mathbf{p}_{*m}^{r_k} \right\| (\sigma_m^{r_k} - \sigma_{*m}^{r_k})^2 \\ &\leq \sum_k \sum_{m=1}^{r_k} (\sigma_m^{r_k} - \sigma_{*m}^{r_k})^2 \leq (\rho/3)^2. \end{aligned}$$

Con esto se concluye que $\left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_* \right\|_F \leq \rho$.

□

El anterior resultado tiene en cuenta como rango tensorial el tubal-rank. Sin embargo, para la demostración del Teorema (11) se requiere un resultado similar cuando se tiene en cuenta el t-rank. Para ello, basta responder la pregunta: Dado un $r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n_3 \min(n_1, n_2)$, ¿cuántos vectores $[r_1, \dots, r_{n_3}] \in \mathbb{N}^{n_3}$ con $r_k \leq \min(n_1, n_2)$ cumplen que $\sum_k r_k = r$? Este se puede clasificar como un problema de combinatoria y claramente siempre existe un número finito de vectores que cumplen lo anteriormente dicho y además este número depende de las variables r, n_1, n_2 y n_3 . Se denotará tal número por $\eta_{(r, n_1, n_2, n_3)}$. El siguiente lema deja ver porqué basta conocer $\eta_{(r, n_1, n_2, n_3)}$ para poder obtener un resultado similar al del Lema 9.

Lema 10. Sea B_r el conjunto de tensores con t-rank menor que r . Específicamente, sea

$$B_r := \{ \boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} : \|\boldsymbol{\mathcal{X}}\|_F = 1 \text{ y t-rank}(\boldsymbol{\mathcal{X}}) \leq r \}. \quad (62)$$

Entonces, existe una cubierta finita $\mathcal{C}_\rho(B_r) \subset B_r$ tal que

$$|\mathcal{C}_\rho(B_r)| \leq \eta_{(r, n_1, n_2, n_3)} (1 + 6/\rho)^{(n_1 + n_2 + 1)r}, \quad (63)$$

y para todo $\mathcal{X} \in B_r$ existe un $\mathcal{X}_* \in \mathcal{C}_\rho(B_r)$ tal que

$$\|\mathcal{X} - \mathcal{X}_*\|_F \leq \rho \quad (64)$$

Demostración. La demostración es directa. Sea

$$\mathcal{C}_\rho(B_r) := \bigcup \left\{ \mathcal{C}_\rho(B_r) : \mathbf{r} = [r_1, \dots, r_k] \wedge r_k \leq \min(n_1, n_2) \wedge \sum_k r_k = r \right\}.$$

Es claro que $\mathcal{C}_\rho(B_r) \subset B_r$ y que $|\mathcal{C}_\rho(B_r)| \leq \eta_{(r, n_1, n_2, n_3)} (1 + 6/\rho)^{(n_1+n_2+1)r}$. Además, para cualquier $\mathcal{X} \in B_r$ debe existir un $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_{n_3}] \in \mathbb{N}^{n_3}$ tal que para todo $k = 1, \dots, n_3$ se tiene que $\text{rank}(\widehat{\mathbf{X}}^{(k)}) \leq r_k$ y $\sum_k r_k = r$. Así, por el Lema (9) existe un $\mathcal{X}_* \in \mathcal{C}_\rho(B_r)$ tal que

$$\|\mathcal{X} - \mathcal{X}_*\|_F \leq \rho.$$

□

Teorema 11. Sea $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3} \rightarrow \mathbb{R}^m$ un operador *cuasi-isométrico*. Entonces

$$\delta_r \leq \epsilon + \sqrt{2}\rho \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \sqrt{2}\rho} \right), \quad (65)$$

con una probabilidad de al menos $1 - f(\epsilon)\eta_{(r, n_1, n_2, n_3)}(1 + 6/\rho)^{(n_1+n_2+1)r}$, siempre que $0 < \epsilon < 1$ y $0 < \rho < 1/\sqrt{2}$.

Demostración. Nótese que $\|\mathcal{X}\|_F = \|\widehat{\mathcal{X}}\|_F$ y $\|\mathcal{H}(\mathcal{X})\| = \|\mathcal{H}_\Theta(\widehat{\mathcal{X}})\|$. Así, el operador \mathcal{H}_Θ cumple

$$\mathbb{P} \left(\left| \|\mathcal{H}_\Theta(\widehat{\mathcal{X}})\|^2 - \|\widehat{\mathcal{X}}\|_F^2 \right| \geq \epsilon \right) \leq f(\epsilon). \quad (66)$$

Luego, del Lema 10 se sigue que el conjunto de tensores B_r de rango menor o igual

que r con norma unitaria, ver (62), satisface

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \in \mathcal{C}_\rho(B_r)} \left| \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}) \right\|^2 - \left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \right\|_F^2 \right| \geq \epsilon \right) &\leq f(\epsilon) |\mathcal{C}_\rho(B_r)| \\ &\leq f(\epsilon) \eta_{(r, n_1, n_2, n_3)} (1 + 6/\rho)^{(n_1 + n_2 + 1)r} \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\max_{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \in \mathcal{C}_\rho(B_r)} \left| \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}) \right\|^2 - \left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \right\|_F^2 \right| < \epsilon, \quad (67)$$

con una probabilidad de al menos $1 - f(\epsilon) \eta_{(r, n_1, n_2, n_3)} (1 + 6/\rho)^{(n_1 + n_2 + 1)r}$. Se probará primero la cota superior en la PIR. Se define la constante

$$\kappa_r := \max_{\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \in B_r} \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}) \right\|. \quad (68)$$

Para todo tensor $\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \in B_r$ existe un tensor $\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_* \in \mathcal{C}_\rho(B_r)$ tal que $\left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_* \right\|_F \leq \rho$. Por otro lado, de la ecuación (67) se tiene que

$$\left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}) \right\| \leq \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_*) \right\| + \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_*) \right\| \leq \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_*) \right\| + 1 + \epsilon. \quad (69)$$

Dado que el tensor $\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}} := \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_*$ tiene a lo sumo un rango de $2r$, y usando la misma esencia de la demostración del literal v) en el Lema 7, entonces se puede descomponer al tensor $\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}$ así, $\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}} = \hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_1 + \hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_2$ con $\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_1, \hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_2$ tensores de rango a lo sumo r y $\left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}} \right\|_F^2 = \left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_1 \right\|_F^2 + \left\| \hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_2 \right\|_F^2$. De esta manera, retomando (69) se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\mathcal{X}}) \right\| &\leq \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\mathcal{R}}_1) \right\| + \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\mathcal{R}}_2) \right\| + 1 + \epsilon \\
&\leq \kappa_r \left(\left\| \hat{\mathcal{R}}_1 \right\|_F + \left\| \hat{\mathcal{R}}_2 \right\|_F \right) + 1 + \epsilon \\
&\leq \sqrt{2}\kappa_r \left\| \hat{\mathcal{R}} \right\|_F + 1 + \epsilon \leq \sqrt{2}\kappa_r \rho + 1 + \epsilon.
\end{aligned} \tag{70}$$

Puesto que la desigualdad anterior es válida para todo tensor $\hat{\mathcal{X}} \in B_r$ se sigue que $\kappa_r \leq \sqrt{2}\kappa_r \rho + 1 + \epsilon$ y así $\kappa_r \leq (1 + \epsilon)/(1 - \sqrt{2}\rho)$. Retomando (70) se tiene

$$\left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\mathcal{X}}) \right\| \leq (1 + \epsilon) \left(1 + \frac{\sqrt{2}\rho}{1 - \sqrt{2}\rho} \right) \leq 1 + \epsilon + \sqrt{2}\rho \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \sqrt{2}\rho} \right), \tag{71}$$

con lo cual se completa la prueba de la cota superior de la RIP. Para la cota inferior se tiene en cuenta que $\kappa_r \leq (1 + \epsilon)/(1 - \sqrt{2}\rho)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\mathcal{X}}) \right\| &\geq \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\mathcal{X}}_*) \right\| - \left\| \mathcal{H}_\Theta(\hat{\mathcal{R}}) \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon} - \sqrt{2}\kappa_r \rho \\
&\geq 1 - \epsilon - \sqrt{2}\rho \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \sqrt{2}\rho} \right).
\end{aligned} \tag{72}$$

Así, de (70) y (72) se sigue que

$$\delta_r \leq \epsilon + \sqrt{2}\rho \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \sqrt{2}\rho} \right). \tag{73}$$

□

4. CONCLUSIONES

En el capítulo 2 se mostró cómo las propiedades de escasez vectorial y bajo rango matricial son usadas para analizar el problema del muestreo compresivo de imágenes espectrales dándose algunas garantías para una reconstrucción completa.

En el capítulo 3 se generalizó el concepto de rango matricial por el concepto de rango tensorial y se mostró como es posible reconstruir imágenes tridimensionales, por ejemplo las imágenes espectrales, a partir de un conjunto de medidas compresas cuando se asume que la imagen 3D tiene bajo rango tensorial. Además, se demostró que si un operador lineal cumple la propiedad isométrica r -restringida para imágenes 3D de rango tensorial menor o igual que r , entonces es posible recuperar exactamente cualquier imagen 3D de rango tensorial menor o igual que r mediante un problema de minimización de la norma nuclear tensorial. Finalmente, se analizó la familia aleatoria de operadores de sensado lineal cuasi-isométricos y se dió una medida de probabilidad para que un operador lineal cuasi-isométrico cumpla la propiedad isométrica r -restringida. En particular, se concluyó que el sensado mediante el sistema de captura de unico pixel es cuasi-isométrico.

BIBLIOGRAFÍA

- ACHLIOPTAS, Dimitris. "Database-friendly random projections: Johnson-Lindenstrauss with binary coins". En: *Journal of computer and System Sciences* 66.4 (2003), págs. 671-687 (vid. págs. 39, 40).
- ARGUELLO, Henry y Gonzalo R ARCE. "Rank minimization code aperture design for spectrally selective compressive imaging". En: *IEEE Trans. Image Process.* 22.3 (2013), págs. 941-954 (vid. págs. 12, 14).
- BI, Zhuming y David COCHRAN. "Big data analytics with applications". En: *Journal of Management Analytics* 1.4 (2014), págs. 249-265 (vid. pág. 11).
- CANDÈS, Emmanuel J y Michael B WAKIN. "An introduction to compressive sampling". En: *IEEE signal processing magazine* 25.2 (2008), págs. 21-30 (vid. pág. 12).
- CAO, Xun y col. "Computational snapshot multispectral cameras: Toward dynamic capture of the spectral world". En: *IEEE Signal Processing Magazine* 33.5 (2016), págs. 95-108 (vid. pág. 12).
- DASGUPTA, Sanjoy y Anupam Gupta. "An elementary proof of a theorem of Johnson and Lindenstrauss". En: *Random Structures & Algorithms* 22.1 (2003), págs. 60-65 (vid. pág. 39).
- DUARTE, Marco F y col. "Single-pixel imaging via compressive sampling". En: *IEEE Signal Process. Mag* 25.2 (2008), págs. 83-91 (vid. págs. 12, 22).
- ELDAR, Yonina C y Gitta KUTYNIOK. *Compressed sensing: theory and applications*. Cambridge University Press, 2012 (vid. pág. 13).

- FAZEL, Maryam, Haitham Hindi y S Boyd. "Rank minimization and applications in system theory". En: *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*. Vol. 4. IEEE. 2004, págs. 3273-3278 (vid. pág. 20).
- FOUCART, Simon y Holger RAUHUT. *A mathematical introduction to compressive sensing*. Vol. 1. 3. Birkhäuser Basel, 2013 (vid. págs. 19, 27, 54).
- HEGE, E. Keith y col. "Hyperspectral imaging for astronomy and space surveillance". En: *Optical Science and Technology, SPIE's 48th Annual Meeting*. 2004, págs. 380-391 (vid. pág. 11).
- HITCHCOCK, Frank L. "The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products". En: *Journal of Mathematics and Physics* 6.1-4 (1927), págs. 164-189 (vid. págs. 12, 14).
- KERNFELD, Eric, Misha KILMER y Shuchin AERON. "Tensor-tensor products with invertible linear transforms". En: *Linear Algebra and its Applications* 485 (2015), págs. 545-570 (vid. pág. 25).
- KILMER, Misha E y col. "Third-order tensors as operators on matrices: A theoretical and computational framework with applications in imaging". En: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 34.1 (2013), págs. 148-172 (vid. págs. 13, 14).
- LUSTIG, M, DL DONOHO y JM PAULY. "Rapid MR imaging with compressed sensing and randomly under-sampled 3DFT trajectories". En: *Proc. 14th Ann. Meeting ISMRM*. Citeseer. 2006 (vid. pág. 14).
- MAY HSU, Su y Hsiao-hua K BURKE. "Multisensor Fusion with Hyperspectral Imaging Data: Detection and Classification". En: *Lincoln Laboratory Journal* 14.1 (2003) (vid. pág. 11).

- PANASYUK, Svetlana V y col. "Medical hyperspectral imaging to facilitate residual tumor identification during surgery". En: *Cancer biology & therapy* 6.3 (2007), págs. 439-446 (vid. pág. 11).
- PLAN, Yaniv. "Compressed sensing, sparse approximation, and low-rank matrix estimation". Tesis doct. California Institute of Technology, 2011 (vid. pág. 27).
- QAISAR, Saad y col. "Compressive sensing: From theory to applications, a survey". En: *Journal of Communications and networks* 15.5 (2013), págs. 443-456 (vid. pág. 11).
- RECHT, Benjamin, Maryam FAZEL y Pablo A PARRILO. "Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization". En: *SIAM review* 52.3 (2010), págs. 471-501 (vid. págs. 20, 21, 31, 56).
- SCHAEPMAN, Michael E. y col. "Earth system science related imaging spectroscopy- An assessment". En: *Remote Sens. Environ.* 113.123–137 (2009). DOI: 10.1016/j.rse.2009.03.001 (vid. pág. 11).
- SONG, Guang-Jing y col. "Robust Tensor Completion Using Transformed Tensor Singular Value Decomposition". En: () (vid. págs. 13, 14, 25, 27).
- TRZASKO, Joshua y Armando MANDUCA. "Highly Undersampled Magnetic Resonance Image Reconstruction via Homotopic l_0 -Minimization". En: *IEEE Transactions on Medical imaging* 28.1 (2009), págs. 106-121 (vid. pág. 14).
- TUCKER, Ledyard R. "Some mathematical notes on three-mode factor analysis". En: *Psychometrika* 31.3 (1966), págs. 279-311 (vid. págs. 12, 14).

VASANAWALA, Shreyas S y col. "Improved pediatric MR imaging with compressed sensing". En: *Radiology* 256.2 (2010), págs. 607-616 (vid. pág. 14).

VERSHYNIN, Roman. "Introduction to the non-asymptotic analysis of random matrices". En: *arXiv preprint arXiv:1011.3027* (2010) (vid. pág. 58).

ANEXOS

Anexo A. La propiedad del espacio nulo relativo a un conjunto

Definición 1 (*la propiedad del espacio nulo relativo a un conjunto*) Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se dice que satisface la propiedad del espacio nulo relativo a un conjunto $S \subset \{1, \dots, n\}$, si

$$\|v_S\|_1 < \|v_{S^c}\|_1 \quad \text{para todo } v \in \ker \mathbf{A} \setminus \{0\},$$

donde S^c es el complemento de S y v_S se refiere al vector v restringido al conjunto S .

Teorema 1. (Teorema 4.4 en ¹⁹) Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ con soporte en $S \subset \{1, \dots, n\}$ es la única solución de (74) con $y = \mathbf{A}x$, si y solo si, \mathbf{A} satisface la propiedad del espacio nulo relativo a S .

$$\min_{z \in \mathbb{R}^n} \|z\|_1 \quad \text{sujeto a } \mathbf{A}z = y. \tag{74}$$

Demostración. Sea $S \subset \{1, \dots, n\}$ fijo. Primero se puede asumir que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ con soporte en S es la única solución de (74). Sea $v \in \ker \mathbf{A}$, entonces v_S es el único que minimiza $\|z\|_1$ sujeto a $\mathbf{A}z = \mathbf{A}v_S$. Luego, como $v = v_S + v_{S^c}$, tenemos que $\mathbf{A}(-v_{S^c}) = \mathbf{A}v_S$, por tanto $\|v_S\|_1 < \|v_{S^c}\|_1$. Demostrándose la condición necesaria del teorema.

Asumase que \mathbf{A} cumple la propiedad del espacio nulo relativo a S . Sea $x \in \mathbb{R}^n$ con soporte en S y sea $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{A}z = \mathbf{A}x$ con $z \neq x$. Definamos $v := x - z \in$

$\ker \mathbf{A} \setminus \{0\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &\leq \|x - z_S\|_1 + \|z_S\|_1 = \|v_S\|_1 + \|z_S\|_1 \\ &< \|v_{S^c}\|_1 + \|z_S\|_1 = \|-z_{S^c}\|_1 + \|z_S\|_1 = \|z\|_1\end{aligned}$$

Así, x es el único que minimiza (74).

□

Anexo B. Propiedad de la norma nuclear matricial

Lema 12 (Lema 2.3 de ²¹). Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M \times N}$. Si $\mathbf{A}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}$ y $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{0}$, entonces $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|_* = \|\mathbf{A}\|_* + \|\mathbf{B}\|_*$.

Demostración. Sean $\mathbf{U}_A, \mathbf{U}_B \in \mathbb{R}^{M \times M}$, $\mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ matrices unitarias, $\Sigma_A \in \mathbb{R}^{r_A \times r_A}$ y $\Sigma_B \in \mathbb{R}^{r_B \times r_B}$ matrices diagonales con todas las entradas de su diagonal no nulas tales que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_A \begin{bmatrix} \Sigma_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}_A^T \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mathbf{U}_B \begin{bmatrix} \Sigma_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}_B^T$$

La existencia de tales matrices se da en virtud de la descomposición en valores singulares de una matriz. Por otro lado, la norma nuclear $\|\cdot\|_*$ de una matriz es la suma de sus valores singulares, i.e., $\|\mathbf{A}\|_* = \sum_k (\Sigma_A)_{kk}$ y $\|\mathbf{B}\|_* = \sum_k (\Sigma_B)_{kk}$. Por tanto, basta demostrar que $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ tiene tanto los valores singulares de \mathbf{A} y como los de \mathbf{B} .

Se puede escribir $\mathbf{U}_A = [\mathbf{U}_{A1} \ \mathbf{U}_{A2}]$, $\mathbf{V}_A = [\mathbf{V}_{A1} \ \mathbf{V}_{A2}]$ con $\mathbf{U}_{A1} \in \mathbb{R}^{M \times r_A}$ y $\mathbf{V}_{A1} \in \mathbb{R}^{N \times r_A}$. Además, $\mathbf{U}_B = [\mathbf{U}_{B1} \ \mathbf{U}_{B2}]$, $\mathbf{V}_B = [\mathbf{V}_{B1} \ \mathbf{V}_{B2}]$ con $\mathbf{U}_{B1} \in \mathbb{R}^{M \times r_B}$ y $\mathbf{V}_{B1} \in \mathbb{R}^{N \times r_B}$. Dado que $\mathbf{A} = \mathbf{U}_{A1} \Sigma_A \mathbf{V}_{A1}^T$ y $\mathbf{B} = \mathbf{U}_{B1} \Sigma_B \mathbf{V}_{B1}^T$ se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{B}^T &= \mathbf{U}_{A1} \Sigma_A \mathbf{V}_{A1}^T \mathbf{V}_{B1} \Sigma_B \mathbf{U}_{B1}^T = \mathbf{0}, \\ \Rightarrow (\mathbf{U}_{A1}^T \mathbf{U}_{A1}) \Sigma_A \mathbf{V}_{A1}^T \mathbf{V}_{B1} \Sigma_B (\mathbf{U}_{B1}^T \mathbf{U}_{B1}) &= \mathbf{U}_{A1}^T \mathbf{0} \mathbf{U}_{B1}, \\ \Rightarrow (\mathbf{I}_{r_A}) \Sigma_A \mathbf{V}_{A1}^T \mathbf{V}_{B1} \Sigma_B (\mathbf{I}_{r_B}) &= \mathbf{0}, \\ \Rightarrow \mathbf{V}_{A1}^T \mathbf{V}_{B1} &= \Sigma_A^{-1} \mathbf{0} \Sigma_B^{-1} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Análogamente, dado que $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{0}$, se sigue $\mathbf{U}_{A1}^T \mathbf{U}_{B1} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, existen matrices \mathbf{U}_C y \mathbf{V}_C tales que $[\mathbf{U}_{A1} \ \mathbf{U}_{B1} \ \mathbf{U}_C]$ y $[\mathbf{V}_{A1} \ \mathbf{V}_{B1} \ \mathbf{V}_C]$ son unitarias. Así, las

siguientes son descomposiciones en valores singulares validas

$$\mathbf{A} = [\mathbf{U}_{A1} \ \mathbf{U}_{B1} \ \mathbf{U}_C] \begin{bmatrix} \Sigma_A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{V}_{A1} \ \mathbf{V}_{B1} \ \mathbf{V}_C]^T$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{U}_{A1} \ \mathbf{U}_{B1} \ \mathbf{U}_C] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{V}_{A1} \ \mathbf{V}_{B1} \ \mathbf{V}_C]^T$$

Con esto, la siguiente es una descomposición en valores singulares de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [\mathbf{U}_{A1} \ \mathbf{U}_{B1} \ \mathbf{U}_C] \begin{bmatrix} \Sigma_A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{V}_{A1} \ \mathbf{V}_{B1} \ \mathbf{V}_C]^T$$

Así, $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|_* = \|\mathbf{A}\|_* + \|\mathbf{B}\|_*$.

□

Anexo C. Teorema de las ρ -nets

Teorema 13 (Teorema de las ρ -nets). Sea $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ la esfera euclidiana unitaria. Entonces, para todo $\rho > 0$ existe un subconjunto $\mathcal{C}_\rho(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ tal que para todo $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ existe un $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}_\rho(S^{n-1})$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_F \leq \rho$ y además el cardinal de $\mathcal{C}_\rho(S^{n-1})$ es menor o igual a $(1 + 2/\rho)^n$.

Demostración. Esta es una traducción de la demostración del Lema 5.2 en ²⁶ y es un argumento simple de volumen. Sea $\rho > 0$ fijo. Un subconjunto $\Theta \subset S^{n-1}$ se dice que es ρ -separado si para todo par de puntos distintos $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Theta$ se cumple que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_F > \rho$. Sea $\mathcal{C}_\rho(S^{n-1})$ un conjunto maximal de los ρ -separados. Ahora bien, supongase que existe un $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ tal que para todo $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}_\rho(S^{n-1})$ se cumple que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_F > \rho$. Entonces, $\mathcal{C}_\rho(S^{n-1}) \cup \{\mathbf{x}\}$ es un ρ -separado y además contiene propiamente a $\mathcal{C}_\rho(S^{n-1})$, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{C}_\rho(S^{n-1})$. Con esto se tiene la primera parte del teorema, se verá ahora la cardinalidad.

Dado que $\mathcal{C}_\rho(S^{n-1})$ es ρ -separado se tiene que toda pareja de bolas centradas en dos puntos diferentes de $\mathcal{C}_\rho(S^{n-1})$ con radio $\rho/2$ no se interceptan. Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\mathcal{C}_\rho(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$ se concluye que $\mathcal{C}_\rho(S^{n-1})$ está contenido en la bola centrada en el origen con radio $1 + \rho/2$. Finalmente, dado que el volumen de una esfera de radio ϵ es $\epsilon^n \text{vol}(S^{n-1})$, entonces

$$\text{vol}(\mathcal{C}_\rho(S^{n-1})) \leq |\mathcal{C}_\rho(S^{n-1})| (\rho/2)^n \text{vol}(S^{n-1}) \leq (1 + \rho/2)^n \text{vol}(S^{n-1}),$$

implicando que $|\mathcal{C}_\rho(S^{n-1})| \leq (1 + 2/\rho)^n$. □

²⁶ Roman VERSHYNIN. "Introduction to the non-asymptotic analysis of random matrices". En: *arXiv preprint arXiv:1011.3027* (2010).