

MODELOS AUTOCONSISTENTES DE
SISTEMAS ESTELARES PLANOS
AXIALMENTE SIMÉTRICOS EN EQUILIBRIO
EN LA APROXIMACIÓN POST-NEWTONIANA

PROYECTO DE GRADO

CAMILO AKIMUSHKIN

CÓDIGO: 2000020

DIRECTOR:

MSc. JAVIER F. RAMOS

CO-DIRECTOR:

DR. GUILLERMO A. GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

5 DE AGOSTO DE 2009

MODELOS AUTOCONSISTENTES DE
SISTEMAS ESTELARES PLANOS
AXIALMENTE SIMÉTRICOS EN EQUILIBRIO
EN LA APROXIMACIÓN POST-NEWTONIANA
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

PRESENTADO POR

CAMILO AKIMUSHKIN VALENCIA

DIRECTOR

MSc. JAVIER F. RAMOS

CO-DIRECTOR

Dr. GUILLERMO A GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

2009

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	III
Índice de cuadros	IV
1. RESUMEN	V
2. ABSTRACT	VI
3. INTRODUCCIÓN	1
4. DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA DE SISTEMAS ESTELARES	3
4.1. Sistemas estelares	4
4.2. Ecuación de Boltzmann	6
4.3. Ecuación de Liouville	7
4.4. Teorema de Jeans	9
5. LA APROXIMACIÓN POST-NEWTONIANA	11
5.1. La primera aproximación post-newtoniana	12
5.1.1. Método de Weinberg	15
5.2. Ecuación post-newtoniana de Boltzmann	15
6. DISCOS ESTELARES EN LA APROXIMACIÓN 1PN	16
6.1. Modelos autoconsistentes en equilibrio	16
6.2. Discos delgados	17
6.3. Método de Hunter	18
6.4. Post-newtonianización	20
6.4.1. Funciones de distribución de la integral de Jacobi	22
7. MODELOS	24
7.1. Discos generalizados de Kalnajs	24
7.1.1. Primer disco	25
7.1.2. Segundo disco	28
7.2. Discos de Pedraza, Ramos y González	34

8. CONCLUSIONES	44
I Apendices	49
A. Ecuación de Laplace en coordenadas oblatas	50
B. Verificación de las integrales de movimiento	52
C. Velocidad circular	54
Bibliografía	56

Índice de figuras

7.1. Densidad de masa para el primer disco de Kalnajs	29
7.2. Velocidad circular para el primer disco de Kalnajs	29
7.3. Densidad de masa para el segundo disco de Kalnajs	35
7.4. Velocidad circular para el segundo disco de Kalnajs	36
7.5. Densidad de masa para el modelo PRG2	41
7.6. Velocidad circular para el modelo PRG2	41
7.7. Densidad de masa para el modelo PRG3	42
7.8. Velocidad circular para el modelo PRG3	42
7.9. Densidad de masa para el modelo PRG4	43
7.10. Velocidad circular para el modelo PRG4	43
8.1. Curva de rotación de la Via Láctea	47

Índice de cuadros

4.1. Características macroscópicas de algunos sistemas estelares.	6
7.1. Constantes de expansión para los primeros modelos de Kalnajs.	25
7.2. Constantes α_{2i} para el segundo disco de Kalnajs	33
7.3. Constantes μ_{2i} para el segundo disco de Kalnajs	35
7.4. Constantes de expansión $B_m^{(k)}$ para los modelos de Pedraza, Ramos y González	36
8.1. Factor global γ de algunos sistemas estelares.	46

Capítulo 1

RESUMEN

TÍTULO: MODELOS AUTOCONSISTENTES DE SISTEMAS ESTELARES PLANOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS EN EQUILIBRIO EN LA APROXIMACIÓN POST-NEWTONIANA.¹

AUTOR: AKIMUSHKIN VALENCIA, Camilo.²

PALABRAS CLAVE: dinámica estelar – galaxias: cinemática y dinámica; aproximación post-Newtoniana.

DESCRIPCIÓN:

Para poder explicar el comportamiento de las variables observadas, en particular de las curvas de rotación, de sistemas estelares macroscópicos como las galaxias, se han desarrollado diversos modelos para diferentes escogencias del campo gravitacional como la ley de Newton, las teorías de dinámica newtoniana modificada y la relatividad general.

Se presentan modelos autoconsistentes (que incluyen la función de distribución, FD) para la gravedad en la aproximación post-newtoniana de la relatividad general sin considerar materia oscura. La primera aproximación post-newtoniana (1PN) consiste en incluir las correcciones relativistas en la dinámica de las partículas hasta los términos menores v^2/c^2 veces respecto a la gravedad clásica de Newton, donde v es la velocidad media. Existen varias razones para utilizar la aproximación post-newtoniana, entre ellas su utilidad para modelar fuertes campos presentes en los centros de las galaxias y la claridad y familiaridad del lenguaje no covariante utilizado. Es la primera vez que se obtienen modelos autoconsistentes axialmente simétricos en equilibrio en la aproximación 1PN.

Los modelos en la aproximación 1PN se pueden obtener a partir de las expresiones para la función de distribución y el par potencial-densidad de modelos newtonianos. Se encuentra que, para todos los modelos obtenidos, las curvas de rotación son más planas que en el caso newtoniano: en los dos primeros discos de Kalnajs las curvas tienen comportamientos visiblemente diferentes al caso newtoniano llegando al borde del disco. Mientras que para modelos más refinados (familia PRG), utilizando parámetros habituales, las correcciones son comparativamente menores. La corrección de la densidad de masa es menos apreciable que la corrección de la velocidad circular o curva de rotación en todos los casos.

¹Trabajo de Grado.

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Javier F. Ramos Caro.

Capítulo 2

ABSTRACT

TITLE: SELF-CONSISTENT MODELS FOR FLAT AXIALLY SYMMETRIC STELLAR SYSTEMS IN EQUILIBRIUM IN POST-NEWTONIAN APPROXIMATION.¹

AUTHOR: AKIMUSHKIN VALENCIA, Camilo.²

KEY WORDS: stellar dynamics – galaxies: kinematics and dynamics; post-Newtonian approximation.

DESCRIPTION:

To explain the behaviour of the variables, specially the rotation curves, seen on macroscopic stellar systems such as galaxies, many models for diverse choices of gravitational force such as Newton's law, modified Newtonian dynamics theories and general relativity. Para poder explicar el comportamiento de las variables observadas, en particular de las curvas de rotación, de sistemas estelares macroscópicos como las galaxias, se han desarrollado diversos modelos para diferentes escogencias del campo gravitacional como la ley de Newton, las teorías de dinámica newtoniana modificada y la relatividad general.

We introduce self-consistent models (including the distribution function, DF) for the gravitation in the post-Newtonian approximation without dark matter. The first post-Newtonian approximation (1PN) include relativistic corrections into particle dynamics to terms of order v^2/c^2 respect to classical Newtonian gravity, where v is the mean speed. There are many reasons to use post-Newtonian approximation, among them, its usefulness to model strogg fields appearing in galactic centers, and the clear and familiar non-covariant language used. This is the first time that self-consistent axially symmetric equilibrium models in post-Newtonian approximation are obtained.

The post-Newtonian models can be obtained from the expressions for the DF and the density-potential pair of Newtonian models. For all models, we find that, rotation curves can be flatter than those of the Newtonian limit: for the first two Kalnajs discs, the rotation curves clearly differs from Newtonian ones, reaching the disc border. While for more refined models (PRG family), with typical values for the parameters, corrections become comparatively smaller. The mass density correction is less notorious than the rotation curve correction for all cases.

¹Graduate work.

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Javier F. Ramos Caro.

Capítulo 3

INTRODUCCIÓN

La investigación de las propiedades cinemáticas de grandes sistemas observados en el Universo como las galaxias y los *clusters* de estrellas es una de las áreas de mas interés en la astrofísica actual y la descripción de su comportamiento es tema de muchos trabajos incluyendo el presente. La motivación principal de su estudio es el hecho de estar en las fronteras del conocimiento científico, simplemente porque su comportamiento no se puede describir de forma sencilla. Además, el avance en los aparatos de medición permite descubrir cada vez mas detalles del firmamento desconocidos hasta ahora.

Uno de los retos mas complicados ha sido el ajuste de las gráficas de velocidad circular, tambien conocidas como curvas de rotación, ya que las mismas no reproducen correctamente las predicciones obtenidas únicamente con la masa visible. En general, mientras que la gravedad de Newton predice que la velocidad a grandes radios disminuye aproximadamente segun la ley de Kepler, las curvas de rotación observadas muestran un valor casi constante de la velocidad entre uno y tres radios, que es hasta donde se alcanzan a observar las estrellas mas externas de una galaxia.

Para corregir esta inconsistencia, los diferentes autores han encontrado diversas soluciones, por una parte, algunos tratan de refinar los modelos consiguiendo comportamientos mas aceptables (como en los modelos de Pedraza, Ramos y González), otros mas audaces, plantean teorías donde la gravedad (de Newton) se modifica para escalas de longitud lo suficientemente grandes (las llamadas teorías MOND) y otros conservan las ecuaciones de campo pero agregan convenientemente una densidad de materia oscura invisible¹.

Debido a que la relatividad general ha demostrado ser la mejor teoría disponible en la actualidad para describir la fuerza gravitacional por encima de la ley newtoniana y las teorías MOND [16] por las evidencias experimentales de sus principios fundamentales; la mejor descripción de los grandes sistemas estelares, dominados por la gravedad, se obtiene considerando las ecuaciones de campo de Einstein. Infortunadamente, tanto

¹El hecho de que se tenga que agregar una gran cantidad de materia oscura se debe en parte a que esta se toma como un halo esférico que rodea a la galaxia.

la obtención como la interpretación de la solución de las ecuaciones, no lineales, de Einstein resulta muy dispendiosa. Mas aún, las velocidades características de las partículas son no relativistas por lo cual en la mayoría de los casos se acostumbra trabajar con modelos bajo la ley de gravedad newtoniana.

La no linealidad de las ecuaciones de campo relativistas impide hacer afirmaciones *a priori* acerca de la relevancia de las correcciones relativistas, respecto al comportamiento newtoniano² y mucho menos considerando que se tiene un problema abierto: la discordancia entre las predicciones teóricas y la observación en las curvas de rotación. La mejor forma de entender la relevancia de las correcciones relativistas es a través de una descripción del campo gravitacional como una serie de correcciones sucesivas respecto al campo newtoniano clásico.

Por lo tanto, y para efectos prácticos, se toman las ecuaciones de campo de Einstein solo hasta la primera aproximación post-newtoniana (1PN), que consiste en tomar el campo gravitacional de Newton junto con las primeras correcciones relativistas en magnitud (expandiendo en series de la velocidad) las cuales son en general, menores en un factor v^2/c^2 . La aproximación 1PN es famosa por haber sido desarrollada y utilizada por el mismo Einstein para calcular la precesión del perihelio de Mercurio [5] donde lograba conciliar los valores teóricos con los experimentales. Es de esperarse que en este trabajo se asuman simplificaciones solo porque las mismas aclaran y aíslan el problema de cuantificar las primeras correcciones relativistas. En particular, se consideran sistemas en equilibrio, axialmente simétricos e idealmente distribuidos en un disco delgado de radio a .

El esquema del trabajo consiste en: primero, obtener las ecuaciones que describen un modelo autoconsistente³ (capítulo 4) en la aproximación post-newtoniana (capítulo 5). En el capítulo 6 se presenta un método para resolver dichas ecuaciones para sistemas planos, axialmente simétricos en equilibrio. El método permite obtener iterativamente los potenciales post-newtonianos a partir de modelos bajo el potencial de Newton. Por último, en el capítulo 7, se aplica el método sobre modelos autoconsistentes clásicos (newtonianos) y se obtienen los correspondientes modelos a orden 1PN.

Los resultados obtenidos para los modelos se discuten en el capítulo 8. Los resultados tienen muchas características nuevas e interesantes ya que se encuentra que las correcciones 1PN son relevantes según el modelo tomado. Además, se encuentran similitudes en todos los casos, como el hecho de obtener curvas mas planas y con mayor resolución con un mínimo cambio en la densidad de masa.

²La inseparable relación entre caos y no linealidad no se explora en este trabajo.

³Como se verá mas adelante, un modelo autoconsistente es aquel que incluye la función de distribución y por lo tanto está completamente descrito desde el punto de vista de la estadística.

Capítulo 4

DESCRIPCIÓN ESTADÍSTICA DE SISTEMAS ESTELARES

Cualquier sistema físico admite dos formas de análisis, la descripción microscópica y la descripción macroscópica o estadística. La primera tiene como objetivo resolver las ecuaciones de movimiento de cada una de las N partículas en las cuales se puede descomponer el sistema utilizando sus condiciones iniciales (las posiciones y velocidades de las partículas), la segunda permite precedir el estado mas probable de un sistema a partir de cantidades estadísticas (función de distribución) lo cual en muchos casos no requiere de las condiciones iniciales, especialmente despues de un largo tiempo. Esto es especialmente cierto para sistemas macroscópicos, ya que a medida que aumenta el número de partículas (grados de libertad), disminuye la desviacion estadística de la distribución de probabilidad respecto al valor medio, por lo tanto los resultados estadísticos son cuantitativamente exactos¹.

La transición entre una descripción y otra se logra mediante la teoría cinética, la cual tiene en cuenta los encuentros individuales estadísticamente [11]. Existen casos en los cuales una resulta mas apropiada que otra, por ejemplo, cuando el sistema consiste en un único cuerpo se prefiere la descripción microscópica y cuando el sistema es un gas compuesto de átomos o moleculas se prefiere la descripción estadística (especialmente si el sistema se encuentra en equilibrio) ya que para casi cualquier situación, el número de partículas es muy grande.

En este capítulo se presentan las características generales de los grandes sistemas estelares, que se tratan en la siguiente sección (4.1), con este conocimiento, se introduce al lector directamente en la descripción estadística de los sistemas relevantes presentando la ecuación utilizada: la ecuación de Boltzmann sin colisiones (sección 4.2). A continuación, ya con mas familiaridad, se presenta la descripción estadística mas gene-

¹Considere el ejemplo de la distribución binomial, el valor medio es $\bar{n} = Np$ y la desviación estándar está dada por $\Delta n = \sqrt{Npq}$, donde $p + q = 1$ son las probabilidades y N es el número de eventos estadísticamente independientes. Así que la desviación disminuye comparativamente como $\Delta n/\bar{n} \sim N^{-1/2}$.

ral posible partiendo del Teorema de Liouville para evidenciar tanto su relación con la descripción microscópica tradicional como con la ecuación de Boltzmann sin colisiones (sección 4.3). Finalmente, (sección 4.4) se presenta, tal vez, el resultado individual más útil para resolver la ecuación de Boltzmann: el teorema de Jeans, presentado en su forma débil y fuerte.

4.1. Sistemas estelares

Los sistemas estelares macroscópicos en el universo observable (Universo) son aquellas agrupaciones de hasta millones de millones de partículas individuales que se forman y evolucionan impulsados principalmente por la mutua fuerza gravitacional, de ahí el nombre autogravitante. Las partículas de las que se compone el sistema pueden ser de diferentes clases (estrellas, agujeros negros, materia oscura, medio interestelar, etc.) pero en la práctica, los sistemas estelares generalmente son agrupaciones de estrellas de características similares al Sol. En la Vía Láctea, por ejemplo, las masas se encuentran entre $0,2$ y $10M_{\odot}$, con la mayoría de las estrellas perteneciendo a la *secuencia principal* es decir con valores de magnitud absoluta y color ($B - V, M_V$) entre $(0, 0)$ y $(1,5, 11)$ ([2] §1.1 p.7) y compuestas de Hidrógeno. Por lo tanto en la mayoría de los casos se estudian sistemas de partículas idénticas. En este trabajo, una partícula en un sistema estelar tiene las mismas características que nuestro Sol.

Se pueden mencionar sistemas estelares macroscópicos como las galaxias, galaxias enanas (dwarfs), galaxias enanas ultra compactas (UCD), galaxias de bajo brillo superficial (LSB), *clusters* de galaxias, *clusters* de estrellas, entre otros. En la actualidad, cada una de estas clases se estudia en detalle. En este trabajo, se enfatiza el estudio de las galaxias debido a su gran abundancia y variedad, entre las cuales se pueden contar diferentes tipos como, [2]: elípticas (E0 a E7), espirales (S), lenticulares (S0), además de un creciente número de galaxias y *clusters* irregulares como las galaxias enanas (se estiman entre 300 y 500 solo en la Vía Láctea) y las enanas ultra compactas (UCD). Muchas de ellas se pueden modelar como una distribución de masa plana con simetría axial (cilíndrica).

Gracias al avance técnico de los aparatos de medición se han podido estudiar diversas características cinemáticas de los sistemas estelares macroscópicos e incluso encontrar nuevas clases, como las UCD, recientemente descubiertas. En particular se destacan las mediciones espectroscópicas en diferentes frecuencias del corrimiento debido al efecto Doppler. Teniendo en cuenta que la mayoría de las estrellas se componen principalmente de hidrógeno, se comparan los corrimientos de una determinada frecuencia de absorción del hidrógeno en las dos mitades respecto al centro de una determinada galaxia para poder obtener las gráficas de velocidad media en la dirección angular o curvas de rotación HI (por el hidrógeno) [17].

Los sistemas estelares en general se describen utilizando modelos en equilibrio (a través de un conjunto microcanónico ya que se puede considerar un sistema aislado) lo cual implica la existencia de al menos una integral de movimiento, la energía. Esta práctica es habitual y se justifica porque el sistema realmente no va a alcanzar ningún estado de equilibrio, pero igualmente, va a evolucionar en una escala de tiempo mucho mayor que cualquier tiempo de observación. Por otra parte, muchos sistemas presentan simetría esférica o cilíndrica, se puede esperar que los sistemas más jóvenes sean esféricos y debido a la rotación, pierdan energía potencial manteniendo constante el momento angular pasando a ser cada vez más planos. Si bien no existen sistemas perfectamente planos, esta útil aproximación se puede aplicar en muchos casos, por ejemplo, el grosor (Δz) de la Vía Láctea es de 0,5 Kpc, mientras que su radio es de 10 Kpc.

Los sistemas estelares observados en el Universo se estudian mediante modelos idealizados. Existen dos clases de modelos, aquellos caracterizados por un perfil de densidad de masa con su correspondiente potencial gravitacional (utilizando gravedad de Newton) lo que se conoce como el *par densidad-potencial* (PDP), relacionados a través de las ecuaciones de campo y en donde la masa se asume como una densidad continua y suave. Estos modelos son los más simples, dado que no describen estadísticamente el sistema, la otra clase son los llamados modelos autoconsistentes que incluyen, además del par densidad-potencial, una expresión para la función de distribución. Dicha función de distribución debe ser consistente con el potencial mediante la ecuación de Boltzmann y debe generar $\langle \sigma \rangle$, el valor medio de la densidad, mediante la expresión (4.2), también conocida como la ecuación fundamental².

Por otra parte, estimando los órdenes de magnitud del volumen y número de estrellas típicos de un sistema estelar, se puede ver que las galaxias en general (excepto en sus regiones centrales) son conjuntos de partículas muy diluidos. Cuantitativamente, esto se mide mediante el tiempo libre medio, que es el intervalo de tiempo promedio entre dos colisiones sucesivas de una partícula, y el cual, en general, resulta ser mucho mayor que el tiempo de vida de los sistemas estelares. Otro parámetro más estricto para considerar la evolución de un sistema es el tiempo de relajación que se estima a partir del tiempo de cruce t_{cross} que es del orden del diámetro del sistema dividido en la velocidad media de una partícula,

$$t_{relax} \approx \frac{0,1N}{\log N} t_{cross} \quad (4.1)$$

El tiempo de relajación se asocia con el tiempo que tarda el sistema en *perder la memoria de sus condiciones iniciales*. Después de haber transcurrido dicho intervalo de tiempo, la perturbación media en la velocidad debida al efecto acumulativo de las colisiones es del mismo orden de magnitud de la velocidad inicial. En la tabla (4.1) se muestran algunos sistemas estelares típicos con sus tiempos de relajación [2]. Si el tiempo de relajación es mayor al tiempo de vida, el sistema siempre se puede considerar

²Se verá que en la aproximación post-newtoniana se tienen dos potenciales, tres componentes del tensor energía-momento y dos ecuaciones fundamentales.

Cuadro 4.1: Características macroscópicas de algunos sistemas estelares.

Sistemas estelares	N	t_{cross}	t_{life}	t_{relax} [yr]	colisiones
Galaxias	10^{11}	100 Myr	10 Gyr	$9,09 \times 10^{15}$	no
<i>Clusters</i> globulares	10^5	10^5 yr	10 Gyr	2×10^8	si
<i>Clusters</i> abiertos	10^2	1 Myr	100 Myr	5×10^6	si
parsec central de las galaxias	10^6	10^4 yr	10 Gyr	$1,67 \times 10^8$	si
centros de <i>clusters</i> de galaxias	10^3	1 Gyr	10 Gyr	$3,33 \times 10^{10}$	no
galaxias enanas	10^8	157791 yr†	10 Gyr	$1,97 \times 10^{11}$	no
galaxias ultra enanas	10^8	9467,46 yr†	10 Gyr	$1,18 \times 10^{10}$	no

†. Calculado como el cociente entre el radio y la velocidad media.

libre de colisiones.

4.2. Ecuación de Boltzmann

Para obtener una descripción completa y equivalente a la descripción microscópica de un sistema (ya sea en equilibrio o en desequilibrio) desde un punto de vista macroscópico se deben considerar simultáneamente todas las variables que definen el sistema, las cuales suelen ser las posiciones y velocidades (o los momentos canónicos) de todas las partículas que lo componen. Una forma sistemática de hallar las variables macroscópicas de interés como presión, flujo, conductividad, etc. consiste en definir una función que mida la probabilidad de encontrar una partícula con posición y velocidad alrededor de un valor, es decir:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} = \text{Probabilidad de encontrar una partícula con posición entre } \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{x} + d\mathbf{x} \text{ y con velocidad entre } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{v} + d\mathbf{v} \text{ en el instante } t.$$

La función f es conocida como la función de distribución de una partícula y está normalizada de tal forma que su integral en todo el espacio de fase es igual a uno³. Sea $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ una función que representa una propiedad de la partícula (un escalar como la energía, o un vector como el momento), su valor medio $\langle \chi \rangle$, en el instante t en la posición \mathbf{x} es,

$$\langle \chi(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \chi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}}{\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}}. \quad (4.2)$$

Definiendo la velocidad peculiar como $\mathbf{U} = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle$, se puede obtener el flujo de la

³Algunos autores utilizan otras definiciones de la función de distribución tales que su integral es igual al numero total de partículas o a la masa total (como en el capítulo 6), por lo tanto se presentan las definiciones mas generales, por ejemplo en la ecuación (4.2).

cantidad χ a través de una superficie definida por el vector $\hat{\mathbf{n}}$,

$$\mathcal{F}_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathcal{F}}, \quad (4.3)$$

$$\vec{\mathcal{F}} = \langle \mathbf{U}\chi \rangle. \quad (4.4)$$

La función de distribución de una partícula satisface una ecuación de continuidad en el espacio de fase 6-dimensional (\mathbf{x}, \mathbf{v}) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}}f) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\dot{\mathbf{v}}f) = 0,$$

teniendo en cuenta que se utilizan variables independientes, $\partial \dot{\mathbf{x}}/\partial \mathbf{x} = \partial \dot{\mathbf{v}}/\partial \mathbf{v} = 0$, y por las ecuaciones de movimiento, $\dot{\mathbf{v}} = -\partial\phi/\partial\mathbf{x}$, donde ϕ es el potencial gravitacional de Newton; se obtiene,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (4.5)$$

la cual es llamada la ecuación de Boltzmann sin colisiones [2]. En la siguiente sección se muestra que un sistema de partículas idénticas donde se puedan despreciar los encuentros o colisiones, se describe correctamente con la ecuación de Boltzmann para la función de distribución de una partícula (4.5).

4.3. Ecuación de Liouville

La ecuación de Boltzmann sin colisiones es una forma simplificada de la ecuación de Liouville, en la cual, como lo indica su nombre, no se tienen en cuenta colisiones o encuentros, ni el número finito de partículas N . Una descripción completa de un sistema se logra con la ecuación de Liouville para N partículas la cual es el equivalente macroscópico de $6N$ ecuaciones de movimiento de Hamilton [2]. Considerese en general un volumen del espacio de fase $6N$ -dimensional llamado espacio Γ ,

$$d\Gamma = d^3x_1 d^3v_1 d^3x_2 d^3v_2 \dots d^3x_N d^3v_N. \quad (4.6)$$

Según el teorema de Liouville, al describir estadísticamente un sistema aislado, se puede considerar un conjunto de sistemas idénticamente preparados llamado ensamble, ya que el promedio temporal de la evolución de un sistema puede reemplazarse por el promedio estadístico sobre el ensamble. Por lo tanto, se puede definir una función $f^{(N)}$ de las coordenadas y el tiempo tal que $f^{(N)}(\Gamma, t)d\Gamma$ sea la fracción de los sistemas del ensamble, es decir, la probabilidad de encontrar al sistema en el punto Γ en el instante t . La función $f^{(N)}$ se llama función de distribución (FD) para N cuerpos y por definición, su integral sobre todo el espacio Γ vale uno. Igualmente, la FD de N cuerpos satisface una ecuación de continuidad en el espacio Γ , la cual se puede obtener sumando las contribuciones sobre todas las caras de un volumen fijo,

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left(\dot{\mathbf{q}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{q}_{\alpha}} + \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \right) = 0, \quad (4.7)$$

donde, \mathbf{q}_α son las coordenadas canónicas y \mathbf{p}_α son sus momentos conjugados. La relación (4.7) se obtiene teniendo en cuenta que \mathbf{q}_α y \mathbf{p}_α son coordenadas independientes en el espacio de fase, esta también se puede escribir como,

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + [f^{(N)}, H_N] = 0, \quad (4.8)$$

donde, H_N es el hamiltoniano del sistema. La relación (4.7) o (4.8) es la ecuación de Liouville⁴ para la función de distribución de N partículas $f^{(N)}$.

La función de distribución reducida de K cuerpos, $f^{(K)}$, con $K < N$, se define como la integral de la FD de N cuerpos,

$$f^{(K)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_K, t) = \int d^6\mathbf{w}_{K+1} \dots \mathbf{w}_N f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N, t), \quad (4.9)$$

donde $\mathbf{w}_i = (\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i)$ son las coordenadas de la partícula i . Una FD es simétrica si se cumple $f(\dots, \mathbf{w}_\alpha, \dots, \mathbf{w}_\beta, \dots) = f(\dots, \mathbf{w}_\beta, \dots, \mathbf{w}_\alpha, \dots)$ para cualquier α y β . Una FD es separable si,

$$f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N, t) = \prod_{\beta=1}^N f(\mathbf{w}_\beta, t). \quad (4.10)$$

Por el contrario, si se tienen en cuenta las interacciones entre dos cuerpos, la FD se puede escribir como,

$$f^{(2)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) = f(\mathbf{w}_1, t)f(\mathbf{w}_2, t) + g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t), \quad (4.11)$$

donde, g se llama función de correlación de dos cuerpos⁵. La ecuación de movimiento para la función de distribución reducida de una partícula $f^{(1)}$ se obtiene integrando la ecuación de Liouville (4.7) sobre $\mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_N$. Asumiendo que: se trabaja en un marco inercial, las coordenadas canónicas son \mathbf{x}_α y \mathbf{v}_α , y el campo gravitacional está dado por $\phi = -Gm/(|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta|)$,

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left(\mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{x}_\alpha} + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N \frac{\partial \phi_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{x}_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) = 0. \quad (4.12)$$

Para tener en cuenta las interacciones entre dos cuerpos, se utiliza la FD dada por

⁴Originalmente enunciada por W. Gibbs poco después de la muerte de Liouville.

⁵Esta se obtiene a partir de la función de correlación de tres cuerpos, la cual a su vez se obtiene sucesivamente integrando las funciones de distribución reducidas y obteniendo el sistema de ecuaciones conocido como jerarquía BBGKY [2].

(4.11). Integrando (4.12) sobre $\mathbf{w}_2 \dots \mathbf{w}_N$ se obtiene,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{w}_1, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{x}_1} - \\
& \sum_{\beta=2}^N \int d^6 \mathbf{w}_2 \dots d^6 \mathbf{w}_N \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \left(\prod_{\alpha=1}^N f(\mathbf{w}_\alpha, t) + \prod_{\alpha=1}^{N-2} g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) f(\mathbf{w}_\alpha, t) \right) \\
& = \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{w}_1, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{x}_1} - (N-1) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int d^6 \mathbf{w}_2 \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} f(\mathbf{w}_2, t) \\
& - (N-1) \int d^6 \mathbf{w}_2 \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}_1} - (N-1) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int d^6 \mathbf{w}_2 \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} g f(\mathbf{w}_2, t) \quad (4.13)
\end{aligned}$$

el último termino se puede despreciar ya que g es menor que f . Usando la expresión anterior con $N-1 \approx N$, se obtiene la ecuación para la función de distribución de una partícula incluyendo colisiones⁶:

$$\frac{\partial f(\mathbf{w}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{w}, t)}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \bar{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \Gamma[f] \quad (4.14)$$

donde,

$$\Gamma[f(\mathbf{w}_1, t)] = N \int d^6 \mathbf{w}_2 \frac{\partial \phi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)}{\partial \mathbf{v}_1} \quad (4.15)$$

y el valor esperado del potencial en \mathbf{x}_1 es,

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}_1, t) = N \int d^6 \mathbf{w}_2 \phi_{12} f(\mathbf{w}_2, t) \quad (4.16)$$

Se puede ver que la ecuación (4.14) se reduce a la ecuación de Boltzmann sin colisiones (4.5) si la FD es separable, el numero de partículas es muy grande y $g = \Gamma = 0$, consecuentemente, el índice 1 se eliminó en (4.14).

4.4. Teorema de Jeans

Sobre una órbita, una constante de movimiento es una función de las coordenadas del espacio de fase y del tiempo que permanece constante, mientras que una integral de movimiento es una función solamente de las coordenadas del espacio de fase que permanece constante. Cualquier orbita en cualquier campo de fuerzas siempre tiene seis constantes de movimiento independientes pero puede tener entre cero y cinco integrales de movimiento ([2] §3.1.1, p.156).

La solución de la Ecuación de Boltzmann es inmediata gracias al teorema de Jeans, el cual tiene dos formas, la debil y la fuerte. La forma debil del teorema establece que:

⁶Para incluir además, el tiempo de vida finita de las partículas (por ejemplo estrellas), se puede agregar al lado derecho de (4.14) el termino $B - D$ que son, la razón de nacimientos y de muertes, respectivamente. Normalmente se considera que estas son iguales.

Cualquier solución en estado estable de la ecuación de Boltzmann sin colisiones depende de las coordenadas del espacio de fase solo a través de las integrales de movimiento del sistema. Además, cualquier función de las integrales de movimiento constituye una solución en estado estable de la ecuación de Boltzmann sin colisiones.

esto se prueba considerando ambos casos, si f es una solución, entonces es una integral de movimiento, por el contrario, si f es función de integrales de movimiento, utilizando derivadas parciales, f también debe ser una integral de movimiento.

Por otra parte la forma fuerte restringe el número máximo de integrales de movimiento:

La FD de un sistema en estado estable en la cual prácticamente todas las órbitas son regulares con frecuencias no resonantes puede asumirse como una función de solo tres integrales de movimiento independientes aisladas, las cuales se pueden tomar como las acciones.

considerando funciones de distribución de las variables ángulo-acción (θ, \mathbf{J}) y para sistemas en estado estable, se puede invocar el teorema de los promedios temporales. De lo cual se puede expresar cualquier observable como, $\langle Q \rangle = \int d^3\theta d^3\mathbf{J} Q(\theta, \mathbf{J}) f_J(\mathbf{J})$ es decir, utilizando solo $f_J(\mathbf{J})$.

De acuerdo con el teorema de Jeans, el problema de solucionar la ecuación de Boltzmann sin colisiones se reduce al problema de encontrar las integrales de movimiento adecuadas tomando cualquier función arbitraria de las mismas y se sabe que se requieren máximo tres integrales independientes [2].

Capítulo 5

LA APROXIMACIÓN POST-NEWTONIANA

Las ecuaciones de campo definen el comportamiento del campo gravitacional descrito por una teoría particular. Las teorías más aceptadas que describen la fuerza gravitacional son la ley de gravitación de Newton y la Relatividad General de Einstein. A pesar de los resultados correctos de algunas pruebas y del gran rango de valores sobre los que se pueden aplicar las teorías, ninguna de las dos ha sido confirmada sobre todo su dominio de aplicación. Los contraejemplos más importantes vienen precisamente de las curvas de rotación (velocidad circular) en galaxias y mediciones cinemáticas de *clusters* de galaxias, así que se han propuesto las llamadas teorías de dinámica newtoniana modificada (MOND), de las cuales, hasta el momento la gran mayoría se ha descartado mediante pruebas especializadas, permaneciendo aun en pie, las teorías MOND de Beckenstein (2004), Moffat (1995), Moffat (2002) y Moffat (2005).

A pesar de que existen modelos relativistas exactos, los mismos suelen utilizar varias condiciones de simetría para poder resolver las ecuaciones (no lineales) de campo, esto implica que el rango de aplicación de los modelos es limitado, además, por el principio de covarianza, es difícil interpretar los resultados o asociarlos a un sistema de coordenadas particular. Por esto, se han desarrollado dos aproximaciones de las ecuaciones de campo de Einstein para ciertas situaciones: la aproximación de campo débil y la aproximación post-newtoniana. La aproximación de campo débil consiste en suponer una métrica casi plana, con lo cual se puede estudiar la dinámica de partículas que se mueven a cualquier velocidad, por lo tanto se utiliza para modelar radiación y las ondas gravitacionales. La aproximación post-newtoniana, por el contrario, permite estudiar campos gravitacionales de gran magnitud suponiendo que las velocidades de las partículas son muy pequeñas comparadas a la de la luz, por ésto, la aproximación post-newtoniana (a primer orden) resulta muy apropiada para describir los efectos relativistas de sistemas estelares como las galaxias, manteniendo el lenguaje tradicional (no covariante) utilizado con gravedad clásica.

En éste capítulo se presentan las ecuaciones de campo de la primera aproximación

post-newtoniana (1PN) que, por el contrario, consiste en utilizar las mismas ecuaciones de campo de Einstein, simplemente tomando las primeras correcciones relativistas en velocidad de la ley newtoniana. La forma más ilustrativa de cuantificar las correcciones 1PN es a partir de las ecuaciones de movimiento de una partícula (5.1). En esta sección también se presenta un método para obtener las trayectorias 1PN a partir de las trayectorias clásicas (Método de Weinberg) el cual será la base para nuestro procedimiento con modelos autoconsistentes en el siguiente capítulo. Finalmente, para definir completamente el problema del presente trabajo, se presenta la ecuación de Boltzmann 1PN y otros resultados estadísticos en la sección 5.2.

5.1. La primera aproximación post-newtoniana

Las componentes de la métrica requeridas a orden 1PN se obtienen de la ecuación de movimiento de una partícula. Por definición,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1} \frac{dx^i}{d\tau} \right] = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-2} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-3} \frac{d^2 t}{d\tau^2}, \quad (5.1)$$

donde τ es el tiempo propio invariante. Utilizando las ecuaciones de geodésica [15] se reemplazan las segundas derivadas. Al desarrollar los términos se obtiene:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i - 2\Gamma_{0j}^i \frac{dx^j}{dt} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \left[\Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{0j}^0 \frac{dx^j}{dt} + \Gamma_{jk}^0 \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right] \frac{dx^i}{dt}. \quad (5.2)$$

En la aproximación newtoniana la aceleración está relacionada con el primer término, $-\Gamma_{00}^i \approx \frac{1}{2}(\partial g_{00}/\partial x^i)$. Pero $g_{00} - 1$ es del orden de $G\bar{M}/\bar{r}^2$ es decir del orden de \bar{v}^2/\bar{r} (recordemos que según la mecánica newtoniana, en un sistema estelar la energía cinética típica $\frac{1}{2}\bar{M}\bar{v}^2$ es del mismo orden de magnitud que la energía potencial típica $G\bar{M}^2/\bar{r}$, tal que $\bar{v}^2 \sim G\bar{M}/\bar{r}$). El siguiente término es del orden $\bar{v}^4/c^2\bar{r}$ y es el resultado de las primeras correcciones relativistas. Por tanto, el objetivo de la aproximación 1PN es obtener la aceleración a orden $\bar{v}^4/c^2\bar{r}$, lo cual determina el orden al que se esperan calcular los símbolos de Christoffel: desde Γ_{00}^i a orden $\bar{v}^4/c^2\bar{r}$ hasta Γ_{jk}^0 a orden \bar{v}/\bar{r} .

Las componentes requeridas de los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \overset{3}{\Gamma_{00}^0} + \dots, \\ \Gamma_{0i}^0 &= \overset{2}{\Gamma_{0i}^0} + \dots, \\ \Gamma_{00}^i &= \overset{2}{\Gamma_{00}^i} + \overset{4}{\Gamma_{00}^i} + \dots, \\ \Gamma_{0j}^i &= \overset{3}{\Gamma_{j0}^i} + \dots, \\ \Gamma_{jk}^i &= \overset{2}{\Gamma_{jk}^i} + \dots, \end{aligned} \quad (5.3)$$

en donde la notación $\overset{n}{A}$ indica que la cantidad A depende de c^n . Lo anterior implica que debemos esperar que la métrica obedezca a una expansión como¹,

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \dots, \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \overset{4}{g}_{ij} + \dots, \\ g_{i0} &= \overset{3}{g}_{i0} + \overset{5}{g}_{i0} + \dots, \end{aligned} \quad (5.4)$$

como las componentes del tensor de Ricci son las segundas derivadas de la métrica, se obtiene similarmente,

$$\begin{aligned} R^{00} &= \overset{0}{R}^{00} + \overset{2}{R}^{00} + \dots, \\ R^{ij} &= \overset{2}{R}^{ij} + \overset{4}{R}^{ij} + \dots, \\ R^{i0} &= \overset{1}{R}^{i0} + \overset{3}{R}^{i0} + \dots, \end{aligned} \quad (5.5)$$

lo cual conlleva a que, en concordancia con las ecuaciones de Einstein, exijamos que tensor energía momento satisfaga la expansión

$$\begin{aligned} T^{00} &= \overset{0}{T}^{00} + \overset{2}{T}^{00} + \dots, \\ T^{ij} &= \overset{2}{T}^{ij} + \overset{4}{T}^{ij} + \dots, \\ T^{i0} &= \overset{1}{T}^{i0} + \overset{3}{T}^{i0} + \dots. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Las ecuaciones de campo se simplifican notablemente si se escoge un sistema de coordenadas armónicas, en donde se satisface

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (5.7)$$

Si además establecemos por conveniencia las definiciones,

$$\overset{2}{g}_{00} \equiv -2\phi/c^2, \quad \overset{2}{g}_{ij} = -2\delta_{ij}\phi/c^2, \quad \overset{3}{g}_{i0} \equiv \zeta_i/c^3, \quad \overset{4}{g}_{00} \equiv -2(\phi^2 + \psi)/c^4, \quad (5.8)$$

donde ϕ debe reducirse al potencial newtoniano cuando $c \rightarrow \infty$. Las ecuaciones de campo se pueden escribir como,

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= \frac{4\pi G}{c^2} \overset{0}{T}^{00}, \\ \nabla^2\psi &= 4\pi G(\overset{2}{T}^{00} + \overset{2}{T}^{ii}) + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \\ \nabla^2\zeta_i &= \frac{16\pi G}{c} \overset{1}{T}^{i0}, \\ 0 &= 4\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \zeta. \end{aligned} \quad (5.9)$$

¹El hecho de que la métrica en el infinito es la de Minkowski implica que los potenciales post-newtonianos deben tender a cero en el infinito.

la condición (5.7) con $\lambda = 0$, impone la última relación entre ϕ y ζ . La solución formal de (5.9) es [15],

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= -G \int d^3x' \frac{{}^0T^{00}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= -G \int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(\frac{1}{4\pi G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + {}^2T^{00}(\mathbf{x}', t) + {}^2T^{ii}(\mathbf{x}', t) \right) \\ \zeta_i(\mathbf{x}, t) &= -4G \int d^3x' \frac{{}^1T^{i0}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\end{aligned}\quad (5.10)$$

ya que estas soluciones se desvanecen en el infinito. La ecuación de geodesica (5.2) en la aproximación 1PN está dada por [15],

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi + \frac{1}{c^2} \left(-\nabla(2\phi^2 + \psi) - \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \zeta) + 3\mathbf{v} \frac{\partial\phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi - v^2\nabla\phi \right). \quad (5.11)$$

cuando el sistema está en equilibrio, desaparecen los términos explícitamente dependientes del tiempo y ζ :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi + \frac{1}{c^2} \left(-\nabla(2\phi^2 + \psi) + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi - v^2\nabla\phi \right), \quad (5.12)$$

Además, es necesario obtener las componentes a orden 1PN del tensor energía-momento, el cual para un sistema de partículas interactuando gravitacionalmente y, tal vez, con colisiones localizadas, es igual a:

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = g^{-1/2}(\mathbf{x}, t) \sum_n m_n \frac{dx_n^\mu(t)}{dt} \frac{dx_n^\nu(t)}{dt} \left(\frac{d\tau_n}{dt} \right)^{-1} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)), \quad (5.13)$$

a orden 1PN se requieren las componentes,

$${}^0T^{00} = \sum_n m_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)), \quad (5.14a)$$

$${}^1T^{i0} = \sum_n m_n v_n^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)), \quad (5.14b)$$

$${}^2T^{00} = \sum_n m_n \left(2\phi + v_n^2 \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)), \quad (5.14c)$$

$${}^2T^{ij} = \sum_n m_n v_n^i v_n^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)), \quad (5.14d)$$

las cuales se obtienen expandiendo el determinante ([15] §9.3, p.224),

$$g^{-1/2} = (1 + \overset{2}{g} + \dots)^{-1/2} = (1 - 4\phi)^{-1/2} = 1 + 2\phi.$$

5.1.1. Método de Weinberg

Tal y como fue señalado por Weinberg, la evolución de un sistema autogravitante desde el punto de vista de la aproximación 1PN ([15] §9.3, p.225), se puede establecer mediante los siguientes pasos:

- A. Resolver el problema newtoniano para las trayectorias y el potencial ϕ , esto es, resolver, $d\mathbf{v}/dt = -\nabla\phi$, y $\nabla^2\phi = 4\pi G \overset{0}{T}_{00}$.
- B. Usar los resultados de (A) y las ecuaciones (5.14a - 5.14d) para obtener $T^{\mu\nu}$ a orden 1PN.
- C. Usar los resultados de (A), (B) y las ecuaciones (5.10) para obtener los potenciales ζ y ψ .
- D. Usar los resultados de (A), (C) y la ecuación (5.12) para calcular las correcciones post-newtonianas de las trayectorias.
- E. Repetir iterativamente los pasos (A)-(D).

5.2. Ecuación post-newtoniana de Boltzmann

La ecuación post-newtoniana de Boltzmann se obtiene a partir de la ecuación de Boltzmann relativista general [14],

$$U^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^i U^\mu U^\nu \frac{\partial f}{\partial U^i} = 0,$$

donde $U^\mu = U^0 v^\mu$ es la cuadrivelocidad, $v^\mu = (1, dx^i/dt)$ es la velocidad clásica y U^0 se obtiene de $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -c^2$. En la aproximación 1PN [14],

$$v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial v^i} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} (4\phi + v^2) - \frac{\partial \phi}{\partial x^j} v^i v^j + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial v^i} = 0. \quad (5.15)$$

En el caso en que la FD no depende de t (es decir, correspondiente a sistemas en equilibrio) esta puede ser expresada como un funcional de [14],

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \phi + (2\phi^2 + \psi)/c^2, \quad (5.16)$$

que puede ser considerada como la generalización 1PN de la energía clásica. Si además el sistema en cuestión es esféricamente simétrico se tiene una segunda integral que puede ser considerada como la generalización del momento angular total [14]:

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x^j v^k e^{-\phi/c^2} \approx \varepsilon_{ijk} x^j v^k (1 - \phi/c^2), \quad (5.17)$$

donde ε_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita, lo cual se verifica fácilmente reemplazando en la ecuación de Boltzmann 1PN (ver apéndice B), para sistemas axialmente simétricos solo se conserva la componente L_z asociada a la variable angular ϕ .

Capítulo 6

DISCOS ESTELARES EN LA APROXIMACIÓN 1PN

A continuación se presenta el método desarrollado que sirve para obtener modelos autoconsistentes para la aproximación post-newtoniana de la gravedad a partir de modelos autoconsistentes newtonianos. Como se verá, la exigencia de utilizar modelos autoconsistentes aparece ya que el método requiere una expresión (estadística) para el tensor energía-momento.

Los resultados de la teoría presentada hasta ahora, se resumen en la siguiente sección, a continuación, en la sección 6.2 se muestran las características generales de una distribución delgada de materia en la aproximación 1PN y en la sección 6.3, la adaptación 1PN del método de Hunter para resolverlas. Finalmente (§6.4) se presenta el método desarrollado, la *post-newtonianización*, que consiste en dos ecuaciones, equivalentes a la ecuación fundamental de los modelos newtonianos, junto con un importante procedimiento para resolverlas surgido a partir de las experiencias. Así mismo, se incluye un estudio de la integral de Jacobi y se presenta una versión alternativa de las ecuaciones fundamentales en función de esta.

6.1. Modelos autoconsistentes en equilibrio

Los modelos en equilibrio se caracterizan porque los valores medios de sus magnitudes permanecen constantes y las ecuaciones no dependen explícitamente del tiempo, por lo tanto, las dos condiciones que debe satisfacer un modelo autoconsistente en la aproximación 1PN son, las ecuaciones de campo (5.9) en equilibrio,

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{4\pi G}{c^2} T^{00}, \\ \nabla^2\psi &= 4\pi G(T^{00} + T^{ii})\end{aligned}\tag{6.1}$$

y la ecuación de Boltzmann (5.15) sin colisiones para un sistema en equilibrio,

$$v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial v^i} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} (4\phi + v^2) - \frac{\partial \phi}{\partial x^j} v^i v^j + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial v^i} = 0. \quad (6.2)$$

Las integrales de movimiento de la ecuación de Boltzmann 1PN axialmente simétrica en equilibrio son (5.16) y (5.17),

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \phi + \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} = \frac{1}{2}v^2 + \Phi, \quad (6.3)$$

$$L_z = Rv_\varphi e^{-\phi/c^2} \approx Rv_\varphi (1 - \phi/c^2). \quad (6.4)$$

que se pueden interpretar como las expresiones a orden 1PN de la energía y el momento angular de una órbita. Se puede definir un potencial relativo Ψ , y una energía relativa ε ,

$$\Psi \equiv -\phi - \frac{(2\phi^2 + \psi)}{c^2} + \Phi_0, \quad (6.5)$$

$$\varepsilon \equiv -E + \Phi_0 = \Psi - \frac{1}{2}v^2. \quad (6.6)$$

donde, la constante Φ_0 es tal que Ψ y ε son siempre positivas.

6.2. Discos delgados

Un disco delgado, es un modelo caracterizado por una distribución de materia restringida a un plano (se puede escoger $z = 0$) y generalmente distribuida en forma simétrica alrededor del eje polar z ($R = 0$). Se pueden definir (en analogía con la densidad clásica) las variables,

$$\begin{aligned} T^{00} (R, z) &\equiv c^2 \Sigma^{00} (R) \delta(z), \\ T^{00} (R, z) &\equiv \Sigma^{00} (R) \delta(z), \\ T^{ii} (R, z) &\equiv \Sigma^{ii} (R) \delta(z). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Con la definición anterior, las ecuaciones de campo toman la siguiente forma:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \Sigma^{00} (R) \delta(z), \quad (6.8a)$$

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G (\Sigma^{00} (R) + \Sigma^{ii} (R)) \delta(z) = 4\pi G \Sigma^2 (R) \delta(z). \quad (6.8b)$$

La gran ventaja que se tiene al trabajar con discos delgados es que la distribución de materia esta confinada a un plano así que se puede resolver la ecuación de Poisson

aplicando el teorema fundamental para divergencias o Teorema de Gauss. Considere por ejemplo, el vector $\mathbf{A} = \nabla\phi$,

$$\int_V (\nabla^2 \phi) dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (6.9)$$

integrando $\nabla\phi$ sobre una superficie cerrada arbitraria de altura despreciable ubicada en $z = 0$ y reemplazando la primera de las ecuaciones de campo (6.8a) en (6.9), se obtiene,

$$4\pi G \Sigma^{00} = 2\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{z=0}, \quad (6.10)$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$, el vector unitario de la superficie. Observe que se puede hacer lo mismo con ψ , es decir,

$$4\pi G \Sigma^2 = 2\nabla\psi \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{z=0}, \quad (6.11)$$

por lo tanto, se pueden utilizar metodos (como el metodo de Hunter, sección 6.3) para resolver la ecuación de Poisson resolviendo la ecuación de Laplace sometida a condiciones de frontera apropiadas (ecuaciones (6.10) y (6.11) en el disco).

Por otra parte, el equivalente estadístico de las ecuaciones (5.14a-5.14d) (en equilibrio) es,

$$\Sigma^{00}(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^2\mathbf{v}, \quad (6.12a)$$

$$\Sigma^{00}(\mathbf{x}) = \int (v^2 + 2\phi) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^2\mathbf{v}, \quad (6.12b)$$

$$\Sigma^{ii}(\mathbf{x}) = \int v^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^2\mathbf{v}, \quad (6.12c)$$

donde, el diferencial, $d^2\mathbf{v} = dv_R dv_\varphi$. Los modelos autoconsistentes planos axialmente simetricos en equilibrio en la aproximación 1PN se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones (6.8a-6.8b) y (6.12a-6.12c), como se muestra en la sección 6.4.

6.3. Método de Hunter

El método de Hunter [8], se utiliza para obtener pares potencial-densidad de sistemas cuya materia permanece en el plano $z = 0$. Como no existe una fuente de gravedad en la region $z \neq 0$, se obtienen las ecuaciones de campo en el vacio, sujetas a ciertas condiciones de frontera (en el infinito y en el disco). En la aproximación 1PN, igual que en el caso clásico, las ecuaciones de campo se reducen a ecuaciones de Laplace, las cuales se solucionan utilizando coordenadas oblatas esferoidales que se relacionan con las coordenadas cilíndricas mediante, (ver apéndice A),

$$\begin{aligned} R &= a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}, \\ z &= a\xi\eta, \end{aligned}$$

donde, $0 \leq \xi < \infty$, $-1 \leq \eta \leq 1$, y el disco se encuentra en $\xi = 0$.

Al considerar un potencial Φ (en la aproximación 1PN, puede ser ϕ o ψ), se exige la condición de simetría sobre el potencial y la componente normal del campo gravitacional¹,

$$\Phi(R, z) = \Phi(R, -z), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}(R, -z) = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}(R, z), \quad (6.13)$$

sujetas a condiciones de contorno de la forma,

$$\Phi_{,\xi}(0, \eta) = F(\eta), \quad (6.14a)$$

$$\Phi_{,\eta}(\xi, 0) = 0, \quad (6.14b)$$

donde $F(\eta)$ es una función par que puede ser expresada como una combinación de polinomios de Legendre. Además, siempre se exige que los potenciales sean nulos en el infinito. La primera condición de frontera, (6.14a), se debe a la ecuación (6.10), la cual, se puede escribir en coordenadas oblatas como:

$$\Sigma^{00} = \frac{-1}{2\pi G} \left[\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = \frac{-1}{2\pi G a \eta} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}, \quad (6.15)$$

mientras que la segunda condición se requiere para que la derivada del potencial sea continua en $\eta = 0$. Teniendo en cuenta que los potenciales deben anularse en el infinito, éstos se escogen como una superposición de polinomios de Legendre pares (simétricos) de la coordenada *radial* $P_{2i}(\eta)$, y polinomios asociados de Legendre, $q_{2i}(\xi) = i^{2i+1} Q_{2i}(i\xi)$, ya que son soluciones de la ecuación de Laplace en $\xi \neq 0$. Expresando los potenciales a orden 1PN en la forma,

$$\phi_m(\xi, \eta) = - \sum_{i=0}^m \beta_{2i} q_{2i}(\xi) P_{2i}(\eta), \quad (6.16a)$$

$$\psi_m(\xi, \eta) = - \sum_{i=0}^m \alpha_{2i} q_{2i}(\xi) P_{2i}(\eta), \quad (6.16b)$$

y utilizando la expresión (6.15) se obtienen las componentes a orden 1PN del tensor energía-momento correspondientes:

$$\Sigma_m^{00} = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{i=0}^m \beta_{2i} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta), \quad (6.17a)$$

$$\Sigma_m^{00} + \Sigma_m^{ii} = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{i=0}^m \alpha_{2i} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta). \quad (6.17b)$$

El índice m depende del modelo newtoniano utilizado.

¹Debido al teorema de Lichtenstein, la densidad tiene un plano de simetría perpendicular al eje z , [2].

6.4. Post-newtonianización

En analogía con el metodo de Weinberg (sección 5.1.1) para obtener las trayectorias de un sistema de partículas a orden post-newtoniano a partir de las trayectorias clasicas, se describe un procedimiento para obtener las primeras correcciones relativistas de los modelos autoconsistentes en equilibrio. Con las herramientas disponibles, se llega a las ecuaciones en su forma explicita igualando las ecuaciones (6.12a-6.12c) con (6.17a-6.17b):

$$\frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{i=0}^m \beta_{2i} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^2 \mathbf{v}, \quad (6.18)$$

$$\frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{i=0}^m \alpha_{2i} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) = \int (2v^2 + 2\phi) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^2 \mathbf{v}, \quad (6.19)$$

donde, la primera ecuación debe incluir correcciones a orden c^{-2} mientras que la segunda es implícitamente un orden c^{-2} menor en magnitud y por lo tanto solo requiere terminos clasicos. Las ecuaciones (6.18) y (6.19) se pueden considerar como las *ecuaciones fundamentales* en la aproximación 1PN. La *post-newtonianización* a partir de los modelos clásicos consiste en:

- A). Obtener los modelos autoconsistentes newtonianos para la densidad, la FD y el potencial clasicos, es decir, resolver, la ecuación de Boltzmann sin colisiones clásica y la ecuación de Poisson para el par potencial-densidad clasico σ y ϕ_N .
- B). Obtener las componentes $T^{\mu\nu}$ a orden 1PN utilizando la FD y el potencial clásico.
- C). Resolver la ecuación (6.19) utilizando la FD y el potencial clásico y hallar el potencial post-newtoniano ψ .
- D). Resolver la ecuación (6.18) utilizando el potencial clásico, la función de distribución y el potencial post-newtoniano ψ para hallar las correcciones al potencial newtoniano ϕ .
- E). Obtener los modelos autoconsistentes post-newtonianos.

El primer paso consiste en tomar una solución clásica conocida y separar la densidad en la ecuación (6.18) en la parte clásica σ y la post-newtoniana Σ_{PN} , tal que

$$\Sigma_m^{00} = \sigma + \Sigma_{PN}, \quad \phi = \phi_N + \phi_{PN},$$

y la ecuación (lineal) de Poisson para ϕ se pueda separar en:

$$\nabla^2 \phi_N = 4\pi G \sigma, \quad \nabla^2 \phi_{PN} = 4\pi G \Sigma_{PN},$$

para lograr esto, se toman constantes de la forma,

$$\beta_{2i} = C_{2i} + \frac{\mu_{2i}}{c^2} \quad (6.20)$$

donde, las constantes C_{2i} corresponden a un modelo clasico² y las constantes μ_{2i} son las correcciones a orden 1PN de la masa. El par potencial-densidad clasico se obtiene con el metodo de Hunter, reemplazando

$$\overset{0}{\Sigma}_m^{00} \rightarrow \sigma, \quad y \quad \phi \rightarrow \phi_N$$

en las ecuaciones (6.17a) y (6.16a). Tambien es necesario disponer de la FD clásica para el modelo utilizado.

El siguiente paso consiste en integrar los momentos de la FD en los lados derechos de (6.18) y (6.19), en ambos casos se toma la misma forma de la FD respecto a las integrales de movimiento. Como se dijo, para la ecuación (6.19) se utilizan los valores clásicos obtenidos en el paso anterior. La integral de la ecuación (6.18), por el contrario, queda expresada en terminos de las variables a orden 1PN. Sin embargo por ahora no es necesario diferenciar entre variables clasicas y post-newtonianas ya que el objetivo de este paso es poder expresar los lados derechos de las ecuaciones fundamentales en función del potencial relativo Ψ , (6.5), el cual es separable.

El tercer paso del procedimiento indica que se debe utilizar primero la segunda ecuación fundamental para obtener las constantes α_{2i} . Se obtienen expresiones alternativas de la integral del lado derecho de (6.19) con los valores clásicos. Reemplazando la expresión (6.3) se tiene,

$$\begin{aligned} \overset{2}{\Sigma}_m^{00} + \overset{2}{\Sigma}_m^{ii} &= \int (4E - 2\phi) f(E, L_z) d^2v, \\ &= 4 \int E f d^2v - 2\phi_N \sigma, \end{aligned} \quad (6.21)$$

o con la definición (6.6) se tiene,

$$\begin{aligned} \overset{2}{\Sigma}_m^{00} + \overset{2}{\Sigma}_m^{ii} &= \int (-4\varepsilon + 4\phi_0 - 2\phi) f(\varepsilon, L_z) d^2v, \\ &= -4 \int \varepsilon f d^2v + (4\phi_N(0) - 2\phi_N) \sigma. \end{aligned} \quad (6.22)$$

El último paso, la solución de la ecuación de Boltzmann 1PN, resulta trivial ya que por el Teorema de Jeans, cualquier función de las integrales de movimiento 1PN, E y L_z , es una solución axialmente simétrica de la ecuación de Boltzmann. En particular, si se toma la *misma* dependencia funcional de la FD respecto a E y L_z que se tenía en el caso clasico, se retorna a los modelos autoconsistentes clasicos³.

²Observe que al ser separable el lado izquierdo de (6.18), tambien lo es la integral del lado derecho (a orden 1PN), como se evidencia en los modelos utilizados.

³Como se dijo antes, la integral de la FD se puede separar en una suma de una parte clásica y una corrección para los modelos estudiados a orden 1PN.

6.4.1. Funciones de distribución de la integral de Jacobi

Se pueden utilizar funciones de distribución dependientes de una única integral de movimiento diferente a la energía. Clásicamente, la integral de Jacobi es la energía de una partícula medida desde un marco de referencia rotando. La integral de Jacobi se define como [9],

$$J \equiv \varepsilon + \Omega L_z - \Psi_e(a) \quad (6.23)$$

en la aproximación 1PN, esta se puede escribir como,

$$J = -\frac{1}{2}(v_m^2 + (v_\varphi - R\Omega(1 - \phi/c^2))^2) + \Psi_e - \Psi_e(a)$$

donde, el potencial efectivo se define como

$$\Psi_e = \Psi + \frac{1}{2}\Omega^2 R^2(1 - \phi/c^2)^2 \quad (6.24)$$

lo cual muestra que la distribución de velocidades es isotropica en un marco de referencia rotando con velocidad angular $\Omega(1 - \phi/c^2)$. A partir de la definición de la integral de Jacobi se puede ver que esta puede tomar cualquier valor desde cero hasta J_{max} (tambien conocido como el *potencial relativo-efectivo*) dado por,

$$\begin{aligned} J_{max} &= \Psi_e - \Psi_e(0) \\ &= \Psi - \Psi(0) - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \eta^2 (1 - 2\phi/c^2) \\ &= -\Phi(0, \eta) + \Phi(0, 0) - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \eta^2 (1 - 2\phi/c^2) \\ &= J_{CL} + J_{PN} \end{aligned} \quad (6.25)$$

donde,

$$\begin{aligned} J_{CL} &= \phi_N(0) - \phi_N - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \eta^2 \\ J_{PN} &= \phi_{PN}(0) + (2\phi_N^2(0) + \psi(0))/c^2 \\ &\quad - \phi_{PN} - (2\phi_N^2 + \psi)/c^2 + \Omega^2 a^2 \eta^2 \phi_N/c^2 \end{aligned}$$

Para obtener expresiones alternativas de las *ecuaciones fundamentales* (6.18) y (6.19) en función de la integral de Jacobi, se puede demostrar que el lado derecho de (6.18) se puede reemplazar por,

$$\Sigma_m^{00} = 2\pi \int_0^{J_{max}} f(J) dJ, \quad (6.26)$$

es posible obtener las funciones de distribución dependientes de la integral de Jacobi [10], considerando (6.26) en el límite clásico. Considerando que se tiene una única integral sobre J , se invoca el teorema fundamental del cálculo para despejar la FD,

$$f(J) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d \Sigma_m^{00}}{d J_{max}} \right)_{J_{max}=J} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d\sigma}{d J_{cl}} \right)_{J_{cl}=J}, \quad (6.27)$$

esto indica que para obtener las funciones de distribución, es necesario expresar la densidad clásica de los modelos en función del potencial relativo-efectivo (6.25) correspondiente.

Para la segunda ecuación se requiere la siguiente manipulación a orden clásico,

$$\begin{aligned}
2v^2 + 2\phi &= 4(\Psi - \varepsilon) + 2\phi_N \\
&= 4(\Psi - J + \Omega L_z - \Psi_e(0)) + 2\phi_N \\
&= 4(\Psi_e(\eta) - \Psi_e(0) - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2(1 - \eta^2) - J + \Omega L_z) + 2\phi_N \\
&= 4(\phi_N(0) - \phi_N(\eta) - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 - J + \Omega L_z) + 2\phi_N \\
&= 4\phi_N(0) - 2\phi_N(\eta) - 2\Omega^2 a^2 - 4J + 4\Omega L_z
\end{aligned}$$

la integral del momento angular se puede escribir como,

$$\begin{aligned}
\langle L_z \rangle \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^2\mathbf{v} &= \int L_z f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^2\mathbf{v} \\
&= R(1 - \phi/c^2) \int v_\varphi f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^2\mathbf{v} \\
&= R(1 - \phi/c^2) \langle v_\varphi \rangle \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^2\mathbf{v}
\end{aligned}$$

reemplazando los resultados e integrando la función de distribución, se obtiene la forma del lado derecho de (6.19) utilizada con funciones de distribución dependientes de la integral de Jacobi:

$$\sum_m^{00} + \sum_m^{ii} = (4\phi_N(0) - 2\phi_N(\eta) - 2\Omega^2 a^2 + 4\Omega R \langle v_\varphi \rangle) \sigma - 4 \cdot 2\pi \int_0^{J_{cl}} J f(J) dJ \quad (6.28)$$

teniendo en cuenta que en la ecuación (6.19), todos los términos se toman a orden clásico.

Capítulo 7

MODELOS

En este capítulo, el procedimiento presentado en el capítulo anterior se aplica sobre modelos autoconsistentes clásicos para obtener los modelos a orden 1PN correspondientes. Los modelos utilizados corresponden en general, a funciones de distribución dependientes de la integral de Jacobi. Para funciones de distribución de la integral de Jacobi, las integrales de los lados derechos de las ecuaciones fundamentales (6.18) y (6.19) adquieren la forma de las ecuaciones (6.26) y (6.28). La expresión (C.5) para la velocidad circular de una partícula se deriva de la ecuación de movimiento 1PN:

$$v_\varphi = \sqrt{R \frac{\partial}{\partial R} \left(\phi + \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} \right) \left(1 - \frac{R}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_{z=0}}. \quad (7.1)$$

7.1. Discos generalizados de Kalnajs

Los discos generalizados de Kalnajs son una familia infinita, contabilizada con el índice $m = 1, 2, \dots$, que se caracteriza por la distribución de masa clásica¹:

$$\sigma^{(m)}(R) = \frac{(2m+1)M}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right)^{m-1/2} = \Sigma_c^{(m)} \eta^{2m-1} \quad (7.2)$$

la cual está distribuida sobre una superficie circular (el disco) de radio a finito, en el plano $z = 0$. En coordenadas esferoidales oblatas (ξ, η) , en la superficie $\xi = 0$. Esta densidad superficial, así como el potencial newtoniano ϕ_N , se pueden escribir en términos de las constantes C_{2i} definidas por (6.20) similarmente a la ecuación (6.17a) reemplazando Σ_m^{00} por σ y β_{2i} por C_{2i} . Las constantes C_{2i} están dadas por la fórmula [6],

$$C_{2i}^{(m)} = \frac{MG}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2} (4i+1)(2m+1)!}{2^{2m} (2i+1)(m-i)! \Gamma(m+i+\frac{3}{2}) q_{2i+1}(0)} \right], \quad (7.3)$$

¹Existe otra familia de discos de Kalnajs, pero todos sus miembros tienen la misma densidad de masa clásica, ver [2].

Cuadro 7.1: Constantes de expansión para los primeros modelos de Kalnajs.

m	$2i$	$(a/MG)C_{2i}^{(m)}$
1	0	1
	2	1
2	0	1
	2	10/7
	4	3/7
3	0	1
	2	5/3
	4	9/11
	6	5/33
4	0	1
	2	20/11
	4	162/143
	6	4/11
	8	7/143

para cada disco m , donde $0 \leq i \leq m$. En la tabla (7.1) se muestran los valores de las constantes requeridas a orden 1PN para los primeros cuatro modelos. Desafortunadamente en la actualidad solo se conocen funciones de distribución para los primeros cuatro modelos de la familia[12], los dos primeros modelos se estudian individualmente.

7.1.1. Primer disco

A). El primer disco de Kalnajs es el mas conocido y el mas sencillo de los miembros de la familia, corresponde a tomar $m = 1$. La densidad está dada por (7.2),

$$\sigma^{(1)}(R) = \Sigma_c^{(1)} \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}}, \quad \Sigma_c^{(1)} = \frac{3M}{2\pi a^2} \quad (7.4)$$

mientras que el potencial se puede obtener con las constantes $C_{2n}^{(1)}$,

$$\phi_N = -\frac{3\pi MG}{8a} - \frac{3\pi MG}{8a} \eta^2 = -\frac{1}{2} \Omega_0^2 a^2 (1 + \eta^2). \quad (7.5)$$

La parte clásica del potencial relativo-efectivo (6.25) esta dada por,

$$J_{cl} = \frac{3\pi MG}{8a} a^2 \eta^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 a^2 \eta^2 = \frac{1}{2} (\Omega_0^2 - \Omega^2) a^2 \eta^2 \quad (7.6)$$

con lo cual se puede reemplazar η por J_{cl} en la densidad y utilizar la ecuación (6.27) para obtener la FD de la integral de Jacobi,

$$f(J) = \frac{\Sigma_c^{(1)}}{4\pi a \sqrt{(\Omega_0 - \Omega)/2}} J^{-1/2}. \quad (7.7)$$

B). Las integrales requeridas son,

$$2\pi \int_0^{J_{max}} f(J) dJ = \frac{2\Sigma_c}{\sqrt{2a^2(\Omega_0^2 - \Omega^2)}} J_{max}^{1/2} \quad (7.8)$$

$$2\pi \int_0^{J_{max}} J f(J) dJ = \frac{2\Sigma_c}{3\sqrt{2a^2(\Omega_0^2 - \Omega^2)}} J_{max}^{3/2} \quad (7.9)$$

se debe verificar la expresión para la densidad clásica a partir de la ecuación (7.8),

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(R) &= \frac{\Sigma_c}{\sqrt{2a^2(\Omega_0^2 - \Omega^2)}} (4J_{cl})^{1/2} \\ &= \Sigma_c \eta \end{aligned}$$

También es necesario obtener una expresión para el valor medio de la velocidad angular v_φ . Para el primer disco [10],

$$2\pi \int_0^{J_{cl}} v_\varphi f(J) dJ = 2\pi \Omega R \int_0^{J_{cl}} f(J) dJ \quad (7.10)$$

C). El lado derecho de la segunda ecuación fundamental (6.19) se obtiene reemplazando las relaciones (7.4), (7.5), (7.6), (7.10) y (7.9),

$$\begin{aligned} \overset{2}{\Sigma} &= (4\phi_N(0) - 2\phi_N(\eta) + 4\Omega R \langle v_\varphi \rangle - 2\Omega^2 a^2) \sigma - 4 \cdot 2\pi \int_0^{J_{cl}} J f(J) dJ \\ &= \frac{2\Sigma_c}{\sqrt{2a^2(\Omega_0^2 - \Omega^2)}} J_{cl}^{1/2} \left[\frac{-4}{3} J_{cl} + 4\phi_N(0) - 2\phi_N(\eta) + 4\Omega^2 R^2 - 2\Omega^2 a^2 \right] \\ &= \frac{3M\eta}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{3}\Omega_0^2 - \frac{10}{3}\Omega^2 \right) \eta^2 + (-\Omega_0^2 + 2\Omega^2) \right] \end{aligned}$$

con la anterior expresión, se puede reescribir la segunda ecuación fundamental (6.19) obteniendo:

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_{2i} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) = \frac{MG}{a} \left[(\Omega_0^2 - 10\Omega^2) a^2 \eta^4 + (-\Omega_0^2 + 2\Omega^2) a^2 \eta^2 \right] \quad (7.11)$$

el índice superior es $m = 2$ debido a que así lo requiere el lado derecho de la expresión. Desarrollando explícitamente la suma en (7.11) y utilizando el apéndice A se obtiene,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 \alpha_{2i} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) &= \alpha_0 q_1(0) + \alpha_2 \cdot 3q_3(0) \cdot \frac{-1}{2} + \alpha_4 \cdot 5q_5(0) \cdot \frac{3}{8} \\ &+ \alpha_2 \cdot 3q_3(0) \cdot \frac{3}{2} \eta^2 + \alpha_4 \cdot 5q_5(0) \cdot \frac{-30}{8} \eta^2 + \alpha_4 \cdot 5q_5(0) \cdot \frac{35}{8} \eta^4 \\ &= \alpha_0 - \alpha_2 + \alpha_4 + 3\alpha_2 \eta^2 - 10\alpha_4 \eta^2 + \frac{35}{3} \alpha_4 \eta^4 \end{aligned}$$

El sistema final de ecuaciones para las constantes α_{2i} se obtiene igualando cada una de las potencias de η por separado:

$$\begin{aligned}\alpha_0 - \alpha_2 + \alpha_4 &= 0, \\ 3\alpha_2 - 10\alpha_4 &= \frac{MG}{a}(-\Omega_0^2 + 2\Omega^2)a^2, \\ (35/3)\alpha_4 &= \frac{MG}{a}(\Omega_0^2 - 10\Omega^2)a^2,\end{aligned}\tag{7.12}$$

la solución es muy simple, no solo porque es un sistema lineal sino además porque se tiene una matriz triangular superior. Explicitamente, las constantes para ψ son:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{4MG}{15a}(-2\Omega_0^2 - 5\Omega^2)a^2, \\ \alpha_2 &= \frac{MG}{21a}(13\Omega_0^2 - 46\Omega^2)a^2, \\ \alpha_4 &= \frac{3MG}{35a}(\Omega_0^2 - 10\Omega^2)a^2.\end{aligned}\tag{7.13}$$

D). Con las constantes obtenidas se puede utilizar la primera ecuación fundamental (6.18), reemplazando (7.8),

$$\sum_{i=0}^{2k} \beta_{2i} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) = \frac{4\pi a G \eta \Sigma_c}{\sqrt{2a^2(\Omega_0^2 - \Omega^2)}} J_{max}^{1/2}\tag{7.14}$$

reemplazando el potencial relativo en (7.14) y teniendo en cuenta que la corrección J_{PN} es de un orden de magnitud c^{-2} veces menor a J_{cl} se puede escribir la siguiente expansión,

$$J_{max}^{1/2} = J_{cl}^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{J_{PN}}{J_{cl}} \right)$$

La parte newtoniana se cancela, permaneciendo los terminos a orden 1PN:

$$\sum_{i=0}^{2k} \frac{\mu_{2i}}{c^2} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) = \frac{2\pi G \Sigma_c}{a(\Omega_0^2 - \Omega^2)} J_{PN}\tag{7.15}$$

utilizando (6.25), se puede escribir J_{PN} como,

$$\begin{aligned}c^2 J_{PN} &= \sum_{i=0}^2 \mu_{2i} q_{2i}(\xi) P_{2i}(\eta) - \sum_{i=0}^2 \mu_{2i} q_{2i}(\xi) P_{2i}(0) \\ &= \sum_{i=0}^2 \alpha_{2i} q_{2i}(\xi) P_{2i}(\eta) - \sum_{i=0}^2 \alpha_{2i} q_{2i}(\xi) P_{2i}(0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega_0^4 a^4 \eta^4 - \frac{1}{2} \Omega_0^4 a^4 (1 + 2\eta^2 + \eta^4) - \frac{1}{2} \Omega_0^2 \Omega_0^2 \eta^2 (1 + \eta^2)\end{aligned}$$

las anteriores sumatorias se pueden desarrollar para obtener,

$$\sum_{i=0}^2 (\mu_{2i} + \alpha_{2i}) q_{2i}(\xi) (P_{2i}(\eta) - P_{2i}(0)) = (\mu_0 + \alpha_0) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0 + (\mu_2 + \alpha_2) \cdot \frac{3\pi}{8} \eta^2 + (\mu_4 + \alpha_4) \cdot \frac{3\pi}{128} \cdot (-30\eta^2 + 35\eta^4)$$

finalmente, se reemplaza en la primera ecuación fundamental,

$$\begin{aligned} \mu_0 - \mu_2 + \mu_4 + 3\mu_2\eta^2 - 10\mu_4\eta^2 + \frac{35}{3}\mu_4\eta^4 = \\ K \left[(\mu_2 + \alpha_2)\frac{3\pi}{8}\eta^2 + (\mu_4 + \alpha_4)\frac{3\pi}{128}(-30\eta^2 + 35\eta^4) - \frac{1}{2}\Omega_0^2(2\Omega_0^2 + \Omega^2)a^4\eta^2 - \frac{1}{2}\Omega_0^2\Omega^2a^4\eta^4 \right] \\ K = \frac{4\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \end{aligned}$$

Nuevamente, el sistema de ecuaciones se obtiene igualando cada una de las potencias de η por separado, solo que ahora las incógnitas están a ambos lados:

$$\begin{aligned} \mu_0 - \mu_2 + \mu_4 &= 0, \\ 3\mu_2 - 10\mu_4 &= K \left[(\mu_2 + \alpha_2)\frac{3}{8} - (\mu_4 + \alpha_4)\frac{45}{64} - \frac{1}{2}\Omega_0^2(2\Omega_0^2 + \Omega^2)a^4 \right], \\ (35/3)\mu_4 &= K \left[(\mu_4 + \alpha_4) \cdot \frac{105}{128} - \frac{1}{2}\Omega_0^2\Omega^2a^4 \right], \end{aligned} \quad (7.16)$$

se obtiene un sistema lineal nuevamente con una matriz triangular superior. Las constantes para la corrección ϕ_{PN} son:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{3K(105\alpha_4 - 64\Omega_0^2\Omega^2a^4)}{35(9K - 128)} + \frac{-21K\alpha_2 + 52\Omega_0^2\Omega^2a^4K + 56\Omega_0^4a^4K}{21(K - 8)}, \\ \mu_2 &= \frac{-21K\alpha_2 + 52\Omega_0^2\Omega^2a^4K + 56\Omega_0^4a^4K}{21(K - 8)}, \\ \mu_4 &= \frac{3K(105\alpha_4 - 64\Omega_0^2\Omega^2a^4)}{35(9K - 128)}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Las constantes (7.13) y (7.17) son las correcciones post-newtonianas del primer disco de Kalnajs. Para conocer su significado, se grafican los observables habituales, la densidad de masa y la velocidad circular.

7.1.2. Segundo disco

Para el segundo disco de Kalnajs existen dos expresiones para la función de distribución, $f_2^{(A)}$ y $f_2^{(B)}$, desafortunadamente solo se obtienen modelos post-newtonianos para el caso mas simple (utilizando $f_2^{(A)}$), para el otro caso se presentan resultados parciales. A continuación se utilizan las expresiones generales para $f_2^{(B)}$ (cuando no se indica, la FD es $f_2^{(B)}$) y eventualmente se reemplaza por las expresiones para $f_2^{(A)}$ para obtener los modelos post-newtonianos.

A). Para $m = 2$, La densidad clásica esta dada por (7.2),

$$\sigma^{(2)}(R) = \Sigma_c^{(2)}\eta^3, \quad \Sigma_c^{(2)} = \frac{5M}{2\pi a^2} \quad (7.18)$$

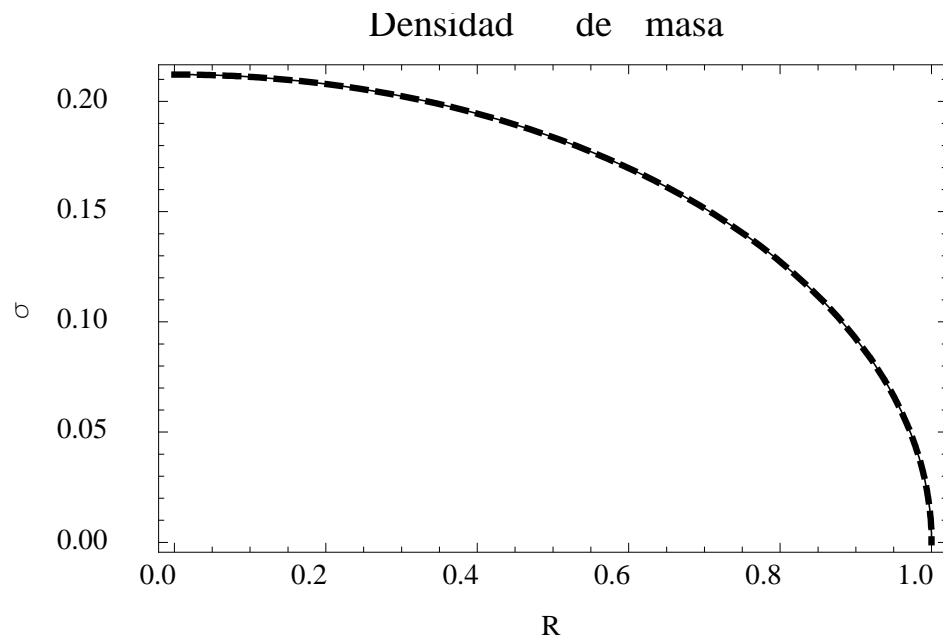


Figura 7.1: Densidad de masa para el primer disco de Kalnajs (clásica gruesa a trazos y 1PN continua).

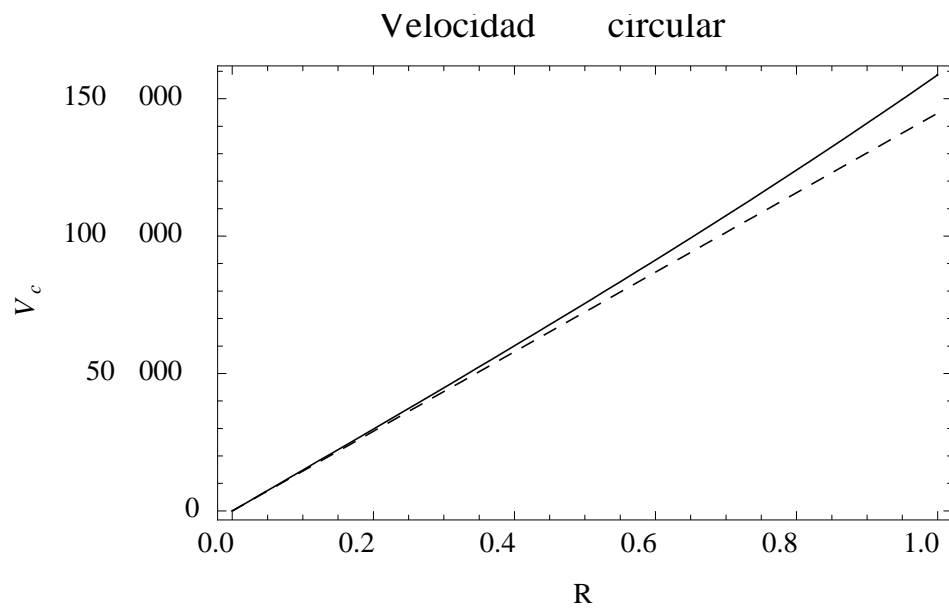


Figura 7.2: Velocidad circular para el primer disco de Kalnajs (clásica a trazos y 1PN continua).

y el potencial es,

$$\phi_N = -\frac{15\pi MG}{128a}(3 + 2\eta^2 + 3\eta^4) \quad (7.19)$$

la parte clásica del potencial relativo-efectivo está dada por,

$$J_{cl} = -\frac{15\pi MG}{128a}(2\eta^2 + 3\eta^4) - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \eta^2 \quad (7.20)$$

completando cuadrados, la anterior expresión se puede escribir como,

$$J_{cl} = (k_1\eta^2 + k_2)^2 + k_3 \quad (7.21)$$

donde

$$k_1 = \sqrt{\frac{45\pi MG}{128a}}, \quad k_2 = k_1^{-1} \frac{15\pi MG - 32a^3\Omega^2}{128a}, \quad k_3 = -k_2^2. \quad (7.22)$$

Así que nuevamente se puede despejar η para expresar la densidad en función de J_{cl} ,

$$\eta = \left[\frac{(J_{cl} - k_3)^{1/2} - k_2}{k_1} \right]^{1/2} \quad (7.23)$$

B). Usando (6.27), la FD de la integral de Jacobi es,

$$f_2^{(B)}(J) = \frac{3\Sigma_c^{(2)}}{8\pi k_1^{3/2}} \left[\frac{(J - k_3)^{1/2} - k_2}{J - k_3} \right]^{1/2} \quad (7.24)$$

se puede obtener una expresión más sencilla considerando el caso particular cuando,

$$\Omega^2 = \frac{15\pi MG}{32a^3}, \quad (7.25)$$

en tal caso, las constantes k_2 y k_3 se anulan, la parte clásica del potencial relativo-efectivo es $J_{cl} = k_1^2 \eta^4$ y la función de distribución está dada por:

$$f_2^{(A)}(J) = \frac{3\Sigma_c^{(2)}}{8\pi k_1^{3/2}} J^{-1/4} \quad (7.26)$$

La integral para J es,

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{J_{max}} f_2 \, dJ &= \frac{3\Sigma_c}{4k_1^{3/2}} \int_{-k_3}^{J_{max}-k_3} \left[\frac{\tilde{J}^{1/2} - k_2}{\tilde{J}} \right]^{1/2} d\tilde{J} \\ &= \frac{3\Sigma_c}{2k_1^{3/2}} \int_{(-k_3)^{1/2}}^{(J_{max}-k_3)^{1/2}} (u - k_2)^{1/2} du \\ &= \frac{\Sigma_c}{k_1^{3/2}} \left[(u - k_2)^{3/2} \right]_{(-k_3)^{1/2}}^{(J_{max}-k_3)^{1/2}} \\ &= \frac{\Sigma_c}{k_1^{3/2}} \left((J_{max} - k_3)^{1/2} - k_2 \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (7.27)$$

donde, J_{max} se puede reemplazar por J_{cl} escrita en la forma (7.23) para obtener la densidad clásica

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{J_{max}} J f_2 dJ &= \frac{3\Sigma_c}{4k_1^{3/2}} \int J(J - k_3)^{-1/2} ((J - k_3)^{1/2} - k_2)^{1/2} dJ \\ &= \frac{3\Sigma_c}{4k_1^{3/2}} \int (\tilde{J} + k_3) \tilde{J}^{-1/2} (\tilde{J}^{1/2} - k_2)^{1/2} d\tilde{J} \end{aligned} \quad (7.28)$$

separando la integral, se puede identificar el segundo termino como proporcional a la primera integral en (7.27) asi que se obtiene el mismo resultado. para la primera integral se utiliza,

$$\int (\tilde{J}(\tilde{J}^{1/2} - k_2))^{1/2} d\tilde{J} = \sqrt{\tilde{J}^{3/2} - \tilde{J}k_2} \left(\frac{4\tilde{J}}{7} - \frac{4\sqrt{\tilde{J}}k_2}{35} - \frac{16k_2^2}{105} - \frac{32k_2^3}{105\sqrt{\tilde{J}}} \right) \quad (7.29)$$

así que agrupando los resultados se obtiene,

$$\begin{aligned} &2\pi \int_0^{J_{max}} J f_2 dJ \\ &= \frac{3\Sigma_c}{4k_1^{3/2}} \left[\sqrt{\tilde{J}^{3/2} - \tilde{J}k_2} \left(\frac{4\tilde{J}}{7} - \frac{4\sqrt{\tilde{J}}k_2}{35} - \frac{16k_2^2}{105} - \frac{32k_2^3}{105\sqrt{\tilde{J}}} \right) \right]_{-k_3}^{J_{max}-k_3} \\ &+ \frac{3\Sigma_c}{4k_1^{3/2}} \left((J_{max} - k_3)^{1/2} - k_2 \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Tambien es necesario calcular la integral de la velocidad circular sobre el espacio de velocidades, esta se necesita (a orden clásico) en la segunda ecuación fundamental,

$$\int f d^2\mathbf{v} = 2 \int_0^{v_R \max} \int_{v_\varphi \min}^{v_\varphi \max} v_\varphi f_2 dv_\varphi dv_R \quad (7.31)$$

primero se resuelve,

$$\begin{aligned} \int v_\varphi f_2 dv_\varphi &= \frac{3\Sigma_c^{(2)}}{8\pi k_1^{3/2}} \int v_\varphi \left[\frac{(J - k_3)^{1/2} - k_2}{J - k_3} \right]^{1/2} dv_\varphi, \quad u = \frac{1}{2}(v_\varphi - \Omega R(1 - \phi/c^2))^2 \\ &= \frac{3\Sigma_c^{(2)}}{8\pi k_1^{3/2}} \int \left[\frac{(J - k_3)^{1/2} - k_2}{J - k_3} \right]^{1/2} du + \Omega R(1 - \phi/c^2) \int f_2 dv_\varphi \end{aligned} \quad (7.32)$$

la segunda integral de arriba se reconoce como la integral de la función de distribución, es decir la densidad de masa. Para la primera integral se tiene,

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{(J - k_3)^{1/2} - k_2}{J - k_3} \right]^{1/2} du &= \int \left[\frac{(\tilde{J})^{1/2} - k_2}{\tilde{J}} \right]^{1/2} d\tilde{J}, \quad \tilde{J} = J(u) - k_3 \\ &= \frac{4}{3} \left[\left((J_{max} - k_3)^{1/2} - k_2 \right)^{3/2} \right]_{J_{min}}^{J_{max}} \end{aligned} \quad (7.33)$$

donde, se ha utilizado el resultado de (7.27). Para los valores J_{max} y J_{min} , existen respectivos $v_{\varphi max}$ y $v_{\varphi min}$, los cuales se obtienen teniendo en cuenta que en los límites de integración se satisface:

$$f_2 = \frac{3\Sigma_c^{(2)}}{8\pi k_1^{3/2}} \left[\frac{(J - k_3)^{1/2} - k_2}{J - k_3} \right]^{1/2} = 0$$

y se obtiene:

$$v_{\varphi max, min} = \Omega R(1 - \phi/c^2) \pm \sqrt{2(\Psi_e - \Psi_e(0) - k_3 + k_2^2) - v_m^2} \quad (7.34)$$

reemplazando en la definición de J , se puede ver que $J(v_{\varphi max}) = J(v_{\varphi min})$, así que la integral en (7.33) es idénticamente nula. Por lo tanto, la integral (7.31) de v_{φ} es igual a la segunda parte en (7.32),

$$\begin{aligned} \int v_{\varphi} f d^2\mathbf{v} &= \Omega R(1 - \phi/c^2) \int f_2 dv_{\varphi} \\ &= \Omega R\sigma = \frac{5M}{2\pi a^2} \Omega R \eta^3 \end{aligned} \quad (7.35)$$

C). La ecuación fundamental para las constantes α_{2i} se obtiene para la FD $f_2^{(A)}$, las expresiones del paso anterior que se utilizan, se obtienen a partir de (7.27) (7.30) y (7.35) respectivamente:

$$2\pi \int_0^{J_{max}} f_2^{(A)} dJ = \frac{\Sigma_c^{(2)}}{k_1^{3/2}} J_{max}^{3/4} \quad (7.36)$$

$$2\pi \int_0^{J_{max}} J f_2^{(A)} dJ = \frac{3\Sigma_c^{(2)}}{7k_1^{3/2}} J_{max}^{7/4} = \frac{3}{7} \sigma J_{max} \quad (7.37)$$

$$\int v_{\varphi} f_2^{(A)} d^2\mathbf{v} = \Omega R\sigma = \frac{5M}{2\pi a^2} \Omega R \eta^3 \quad (7.38)$$

las cuales se reemplazan en (6.28):

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Sigma} &= \Sigma_c^{(2)} \eta^3 \left[\Omega_0^2 a^2 (-12 + 6 - 4\eta^2 - 6\eta^4) + \Omega^2 a^2 (-2 + 4(1 - \eta^2)) \right] \\ &\quad - \frac{12}{7} \Sigma_c^{(2)} \eta^3 \left[-\Omega_0^2 a^2 (2\eta^2 + 3\eta^4) - \frac{1}{2} \Omega^2 a^2 \eta^2 \right] \\ &= \Sigma_c^{(2)} \eta^3 \left[\Omega_0^2 a^2 (-6 - 4\eta^2 - 6\eta^4) + 2\Omega^2 a^2 (1 - 2\eta^2) \right] \\ &\quad - \frac{12}{7} \Sigma_c^{(2)} \eta^3 \left[-\Omega_0^2 a^2 (2\eta^2 + 3\eta^4) - \frac{1}{2} \Omega^2 a^2 \eta^2 \right] \end{aligned} \quad (7.39)$$

donde, la constante Ω_0 se define como,

$$\Omega_0^2 a^2 \equiv \frac{15\pi MG}{128a}$$

Cuadro 7.2: Constantes α_{2i} para el segundo disco de Kalnajs

i	α_{2i}
0	$-(GM/1568a^2)(3215GM\pi + 384a^3\Omega^2)$
1	$-(5GM/25872a^2)(17385GM\pi + 4576a^3\Omega^2)$
2	$-(3GM/34496a^2)(18765GM\pi + 11264a^3\Omega^2)$
3	$-(25GM/51744a^2)(741GM\pi + 704a^3\Omega^2)$
4	$-(25G^2M^2\pi/704a^2)$

de la anterior expresion se puede ver que la suma del lado izquierdo de la segunda ecuación fundamental llega hasta $m = 4$ ya que la máxima potencia de η en el lado derecho es 8:

$$\sum_{i=0}^4 \alpha_{2i}(2i+1)q_{2i+1}(0)P_{2i}(\eta) = 2\pi aG\eta \frac{\Sigma^2}{\Sigma}.$$

Tomando el producto punto entre las funciones, se pueden utilizar las propiedades de ortonormalización de las funciones de Legendre, de tal forma que se pueden despejar las constantes α del potencial ψ :

$$\alpha_{2i} = \frac{4i+1}{4i+2} \frac{2\pi aG\Sigma_c^{(2)}}{q_{2i+1}(0)} I_1(i) \quad (7.40)$$

donde,

$$I_1(i) = \int_{-1}^1 P_{2i}(\eta) \tilde{\Sigma} d\eta, \quad \tilde{\Sigma} = \frac{\eta \Sigma^2}{\Sigma_c^{(2)}}$$

explícitamente, las constantes requeridas se muestran en la tabla 7.2.

D). Para la integral de la primera ecuación fundamental a orden 1PN, es necesario expresar el potencial relativo total (6.25) utilizando (7.23) y completar el cuadrado,

$$\begin{aligned} J_{max} &= (k_1\eta^2 + k_2)^2 + k_3 + J_{PN} \\ &= \left(k_1\eta^2 + k_2 + \frac{J_{PN}}{2(k_1\eta^2 + k_2)} \right)^2 + k_3 \end{aligned} \quad (7.41)$$

se verifica que la integral de la primera ecuación a orden 1PN es:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{J_{max}} &= \frac{5M}{2\pi k_1^{3/2} a^2} \left[k_1\eta^2 + \frac{J_{PN}}{2(k_1\eta^2 + k_2)} \right]^{3/2} \\ &= \frac{5M}{2\pi k_1^{3/2} a^2} \left[k_1^{3/2} \eta^3 + \frac{3}{2} k_1^{1/2} \eta \frac{J_{PN}}{2(k_1\eta^2 + k_2)} \right] \end{aligned}$$

lo anterior permite cancelar las partes clásicas a ambos lados de la ecuación fundamental y expresar las constantes μ_{2i} para la corrección de la ecuación clásica de Poisson en

función de la corrección J_{PN} al potencial relativo efectivo:

$$\sum_i \frac{\mu_{2i}}{c^2} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) = \frac{15MG\eta^2}{4k_1 a(k_1\eta^2 + k_2)} J_{PN} \quad (7.42)$$

donde, el índice i de la suma toma los valores que sean necesarios para concordar con los de η en el lado derecho, la ecuación (7.42) se puede utilizar mas comodamente como,

$$4k_1 a(k_1\eta^2 + k_2) \sum_i \frac{\mu_{2i}}{c^2} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) = 15MG\eta^2 J_{PN}.$$

En particular, para $f_2^{(A)}$, la anterior expresión se reduce a:

$$\sum_i \frac{\mu_{2i}}{c^2} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) = \frac{15MG}{4k_1^2 a} J_{PN} = \frac{32}{3\pi} J_{PN} \quad (7.43)$$

donde,

$$c^2 J_{PN} = \sum_i (\mu_{2i} + \alpha_{2i}) q_{2i+1}(0) (P_{2i}(\eta) - P_{2i}(0)) + X$$

y donde,

$$X = 2 \left((3\Omega_0^2 a^2)^2 - (\Omega_0^2 a^2 (3 + 2\eta^2 + 3\eta^4))^2 \right) + \Omega^2 a^2 \eta^2 (-\Omega_0^2 a^2 (3 + 2\eta^2 + 3\eta^4))$$

Los términos dependientes de las constantes μ_{2i} se agrupan al lado izquierdo de (7.43):

$$\begin{aligned} & \sum_i \mu_{2i} \left[(2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) - \frac{32}{3\pi} (q_{2i}(0) (P_{2i}(\eta) - P_{2i}(0))) \right] \\ &= \frac{32}{3\pi} \left[\sum_i \alpha_{2i} q_{2i}(0) (P_{2i}(\eta) - P_{2i}(0)) + X \right] \end{aligned} \quad (7.44)$$

finalmente se obtiene:

$$\mu_{2i} = \frac{2\alpha_{2i} q_{2i}(0) (1 - \delta_i^0) + (4i+1) \int_{-1}^1 P_{2i}(\eta) X d\eta}{\frac{3\pi}{32} (4i+2) q_{2i+1}(0) - 2q_{2i}(0) (1 - \delta_i^0)}. \quad (7.45)$$

Se obtienen curvas de rotación cada vez mas planas aumentando el valor de la frecuencia hasta $\Omega = 7 \times 10^{-13} Hz$. Todas las curvas llegan a un mismo valor únicamente para $R = a$.

7.2. Discos de Pedraza, Ramos y González

A). La familia propuesta por Pedraza, Ramos y González [13], es una superposición de los discos generalizados de Kalnajs,

$$\tilde{\sigma}_k = \sum_{m=1}^k B_m^{(k)} \sigma_{(m)}(R) \quad (7.46)$$

Cuadro 7.3: Constantes μ_{2i} para el segundo disco de Kalnajs

i	μ_{2i}
0	$-(GM/1792a^2)(5835GM\pi + 4096a^3\Omega^2)$
1	$-(5GM/154a^2)(135GM\pi + 88a^3\Omega^2)$
2	$-(3GM/16016a^2)(6915GM\pi + 3484a^3\Omega^2)$
3	$-(25GM/1232a^2)(9GM\pi + 4a^3\Omega^2)$
4	$-(525G^2M^2\pi/36608a^2)$

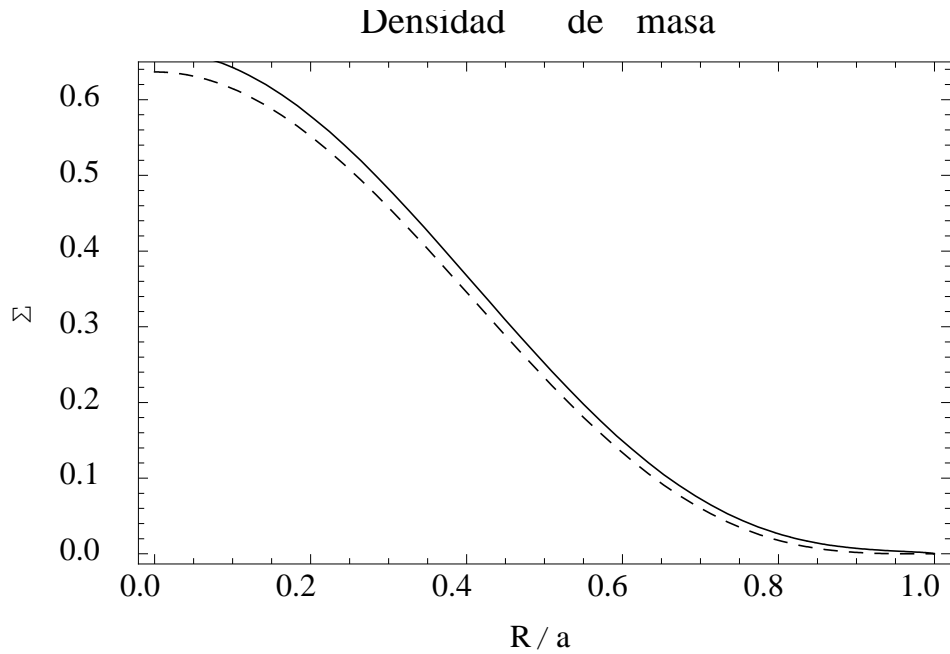


Figura 7.3: Densidad para el segundo disco de Kalnajs (clásica a trazos y 1PN continua) con $M = 1 \times 10^{42} kg$, $a = 3 \times 10^{20} m$, $\Omega = 2 \times 10^{-13} Hz$.

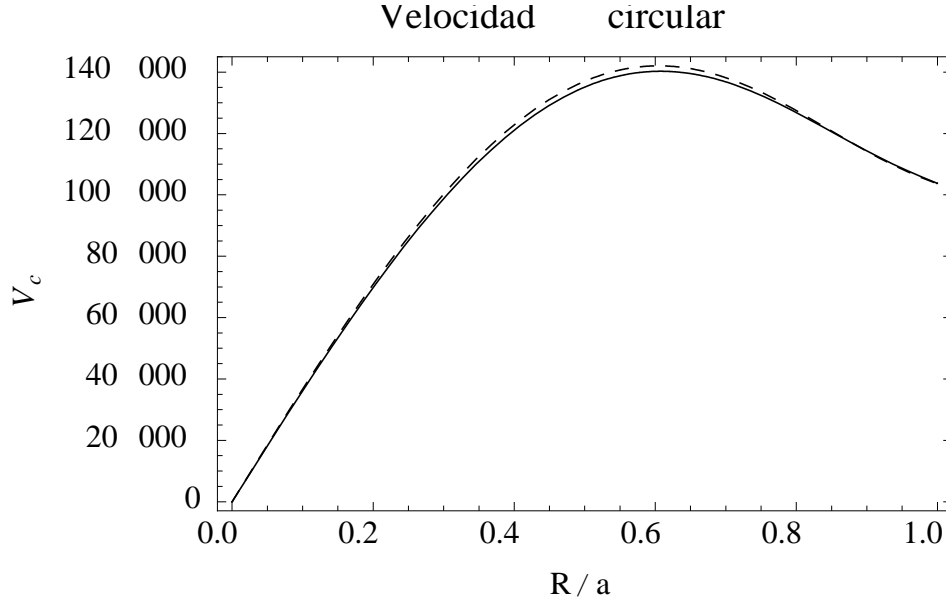


Figura 7.4: Velocidad circular para el segundo disco de Kalnajs (clásica a trazos y 1PN continua) con $M = 1 \times 10^{42} kg$, $a = 3 \times 10^{20} m$, $\Omega = 2 \times 10^{-13} Hz$.

Cuadro 7.4: Constantes de expansión $B_m^{(k)}$ para los modelos de Pedraza, Ramos y González

k	$B_1 \text{ min}$	B_2	B_3	B_4	B_5
2	0	1			
3	0.101273	$-7/12$	1		
4	0.128914	$-21/128$	$-9/16$	1	
5	0.143207	$-231/2560$	$-99/640$	$-11/20$	1

contabilizada con el índice $k = 2, 3, \dots$ (en el caso $k = 1$, nuevamente se obtiene el primer disco de Kalnajs, sección 7.1.1). Las constantes de expansión para los primeros cuatro discos se muestran en la tabla (7.4). Los valores de las constantes $B_m^{(k)}$ de la tabla (7.4) están definidos mediante relaciones de recurrencia y el número $B_1 \text{ min}$ se obtiene exigiendo que tanto la densidad de masa como la FD sean siempre positivas.

Los discos de Pedraza, Ramos y González (PRG) no solo muestra curvas de rotación mas planas, sino que, permite expresar la densidad en función del potencial de tal forma que se pueden obtener las correspondientes funciones de distribución y por lo tanto, modelos autoconsistentes. Explicitamente, el potencial efectivo-relativo (a orden clasico) se puede escribir como,

$$\tilde{\Psi}_k = \Psi_e - \Psi_e(0) = \sum_{m=1}^k B_m \Psi^{(m)} = A_{k0} \eta^{2k} + \frac{1}{2} (B_1 - B_1^*) \Omega_0^2 a^2 \eta^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 a^2 \eta^2, \quad (7.47)$$

Si se ajusta el parámetro libre Ω , de tal forma que se satisfice,

$$\Omega = \pm \sqrt{(B_1 - B_1^*)} \Omega_0, \quad (7.48)$$

la ecuación (7.47) toma la forma,

$$\tilde{\Psi}_k = \sum_{m=1}^k B_m \Psi^{(m)} = A_{k0} \eta^{2k}. \quad (7.49)$$

donde las constantes A_{k0} se obtienen de la relación (A.5) mediante [13],

$$A_{sr} = \sum_{r=0}^s \frac{(-1)^r (4s - 2r)! C_{2s} q_{2s}(0)}{2^{2s} r! (2s - 2r)! (2s - r)!}. \quad (7.50)$$

con $s = k$ y $r = 0$. Lo anterior implica que se puede reemplazar η por el potencial efectivo-relativo. En los modelos, se tiene un único parametro libre B_1 que puede tomar valores mayores a B_1^* .

La función de distribución para cada modelo nuevamente se obtienen derivando la densidad segun el método de Kalnajs, (6.27), obteniendo [13],

$$f_k(J) = \frac{1}{4\pi k} \sum_{m=1}^k B_m \Sigma_c^{(m)} (2m - 1) A_{k0}^{-(2m-1)/2k} J^{(2m-1)/2k-1} \quad (7.51)$$

B). Se verifica que la primera integral es:

$$\begin{aligned} \int_0^{J_{max}} f_k(J) dJ &= \frac{1}{4\pi k} \sum_{m=1}^k B_m \Sigma_c^{(m)} (2m - 1) A_{k0}^{-(2m-1)/2k} \frac{2k}{2m - 1} J_{max}^{(2m-1)/2k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^k B_m \Sigma_c^{(m)} A_{k0}^{-(2m-1)/2k} J_{max}^{(2m-1)/2k} \end{aligned} \quad (7.52)$$

Para la segunda ecuación se requiere integrar Jf ,

$$\begin{aligned} \int_0^{J_{max}} J f_k(J) dJ &= \frac{1}{4\pi k} \sum_{m=1}^k B_m \Sigma_c^{(m)} (2m - 1) A_{k0}^{-(2m-1)/2k} \frac{2k}{2k + 2m - 1} J_{max}^{(2k+2m-1)/2k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^k \frac{2m - 1}{2k + 2m - 1} B_m \Sigma_c^{(m)} A_{k0}^{-(2m-1)/2k} J_{max}^{(2m-1)/2k} \\ &= \frac{M}{4\pi^2} A_{k0}^{(k)} \sum_{m=1}^k \frac{4m^2 - 1}{2k + 2m - 1} B_m^{(k)} \eta^{2m+2k-1} \end{aligned} \quad (7.53)$$

para la integral de la velocidad azimuthal, primero se necesita resolver la integral,

$$\begin{aligned} \int v_\varphi J^{(2n-2m-1)/2m} d^2\mathbf{v} &= \int_{v_\varphi 1}^{v_\varphi 2} v_\varphi \int_{v_R 1}^{v_R 2} J^{(2n-2m-1)/2m} dv_R dv_\varphi \\ &= \int_{v_\varphi 1}^{v_\varphi 2} v_\varphi \int_{v_R 1}^{v_R 2} \left[-\frac{1}{2} (v_R^2 + (v_\varphi - R\Omega)^2) + \Psi_e - \Psi_e(a) \right]^{(2n-2m-1)/2m} dv_R dv_\varphi \\ &= \frac{1}{2^{(2n-2m-1)/2m}} \int_{v_\varphi 1}^{v_\varphi 2} v_\varphi \int_{v_R 1}^{v_R 2} [\alpha^2 - v_R^2]^{(2n-2m-1)/2m} dv_R dv_\varphi \\ &= \frac{4\pi m \Omega R}{2n - 1} [\Psi_e - \Psi_e(0)]^{(2n-1)/2m} \end{aligned} \quad (7.54)$$

donde, v_{R1} y v_{R2} son las raíces de $\alpha^2 - v_R^2 = 0 \Rightarrow v_{R1} = -|\alpha|$, $v_{R2} = |\alpha|$ de lo cual se obtiene,

$$\int v_\varphi f d^2\mathbf{v} = \frac{M\Omega R}{2\pi a^2} \sum_{n=1}^m (2n+1) B_n^{(m)} \left[\frac{\Psi_e - \Psi_e(0)}{A_{m0}} \right]^{(2n-1)/2m}. \quad (7.55)$$

La expresión (7.55) se puede simplificar si se tiene en cuenta (7.49), $\Psi_e - \Psi_e(0) = A_{m0}\eta^{2m}$, obteniendo:

$$\int v_\varphi f d^2\mathbf{v} = \frac{M\Omega R}{2\pi a^2} \sum_{n=1}^m (2n+1) B_n^{(m)} \eta^{2n-1} \quad (7.56)$$

tal que,

$$\begin{aligned} 4\Omega R \int v_\varphi f d^2\mathbf{v} &= \frac{2M\Omega^2 R^2}{\pi a^2} \sum_{n=1}^m (2n+1) B_n^{(m)} \eta^{2n-1} \\ &= \frac{2M\Omega^2}{\pi} \sum_{m=1}^k (2m+1) B_m^{(k)} \eta^{2m-1} - \frac{2M\Omega^2}{\pi} \sum_{m=1}^k (2m+1) B_m^{(k)} \eta^{2m+1} \end{aligned} \quad (7.57)$$

C). Reemplazando (7.46), (7.52), (7.53) y (7.57) en la segunda ecuación fundamental (6.19) en la forma (6.28), se obtiene:

$$\begin{aligned} &\sum_k^{00} + \sum_k^{ii} = \\ &\left(4\phi_N(0) - 2\phi_N(\eta) - 2\Omega^2 a^2 + \frac{4M\Omega^2 R^2}{2\pi a^2} \sum_{m=1}^k (2m+1) B_m^{(k)} \eta^{2m-1} \right) \sum_{m=1}^k B_m^{(k)} \Sigma_c^{(m)} \eta^{2m-1} \\ &- 4 \sum_{m=1}^k \frac{2m-1}{2k+2m-1} B_m \Sigma_c^{(m)} A_{k0}^{-(2m-1)/2k} J_{max}^{(2m-1)/2k} \\ &\frac{2MG}{a} \sum_{m=1}^k (2m+1) B_m^{(k)} \eta^{2k} \left(\frac{2k-2m+1}{2k+2m+1} A_{k0}^{(k)} \eta^{2k} - \frac{3}{2} \Omega^2 a^2 \eta^2 + \Omega^2 a^2 + \phi_N(0) \right) \end{aligned} \quad (7.58)$$

Por otra parte el lado izquierdo de la segunda ecuación fundamental se puede escribir como:

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_{2i} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2i}(\eta) = F(\eta) \quad (7.59)$$

donde, $F(\eta) = 2\pi a G \eta \sum_k^2$. Utilizando las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre se pueden despejar las constantes α :

$$\alpha_{2i} = \frac{4i+1}{(4i+2)q_{2i+1}(0)} \int_{-1}^1 F(\eta) P_{2i}(\eta) \eta \quad (7.60)$$

para la expresión anterior se utiliza la identidad [1],

$$\int_{-1}^1 P_{2n}(\eta) \eta^{2m} \eta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2m+1)}{2^{2m} \Gamma(m-n+1) \Gamma(m+n+3/2)} \quad (7.61)$$

expandiendo el lado derecho de (7.60) y utilizando (7.58) con (7.61), se obtienen las constantes de expansion α para el potencial ψ :

$$\alpha_{2i} = \frac{2\sqrt{\pi}MG(4i+1)}{a(4i+2)q_{2i+1}(0)} \sum_{m=1}^k \frac{(2m+1)B_m^{(k)}}{2^{2m}} \left[\frac{2k-2m+1}{2k+2m-1} \frac{A_{k0}^{(k)}\Gamma(2m+2k+1)}{2^{2k}\Gamma(m+k-i+1)\Gamma(m+k+i+3/2)} - \frac{3\Omega^2 a^2 \Gamma(2m+3)}{8\Gamma(m-i+2)\Gamma(m+i+5/2)} + \frac{(\Omega^2 a^2 + \phi_k(0))\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m-i+1)\Gamma(m+i+3/2)} \right] \quad (7.62)$$

D. Para la primera ecuación fundamental, es necesario expandir el potencial relativo-efectivo como,

$$\left(\frac{\tilde{\Psi}_k}{A_{k0}^{(k)}} \right)^{\frac{2m-1}{2k}} = \eta^{2m-1} \cdot \left[1 + \frac{\eta^{-2k}}{A_{k0}^{(k)}} \left(\phi_{PN,k}|_{\eta=0} - \phi_{PN,k} + \frac{2\phi_{N,k} + \psi_k}{c^2} |_{\eta=0} - \frac{2\phi_{N,k} + \psi_k}{c^2} - \frac{\Omega^2 a^2}{c^2} + \frac{\Omega^2 a^2 \eta^2}{c^2} \phi_{N,k} \right) \right]$$

considerando que el segundo término es mucho menor que el primero, la anterior expresión se puede expandir binomialmente, con lo cual, las partes clásicas (newtonianas) de la masa en la primera ecuación fundamental (6.18) se cancelan, así que finalmente queda,

$$\sum_{i=0}^{2k} \frac{\mu_{2i}}{c^2} (2i+1)q_{2i+1}(0)P_{2i}(\eta)\eta^{2k} = \frac{MG}{2akA_{k0}^{(k)}} \sum_{m=1}^k k(4m^2-1)B_m^{(k)}\eta^{2m} \left(\phi_{PN,k}|_{\eta=0} - \phi_{PN,k} + \frac{2\phi_{N,k} + \psi_k}{c^2} |_{\eta=0} - \frac{2\phi_{N,k} + \psi_k}{c^2} - \frac{\Omega^2 a^2}{c^2} + \frac{\Omega^2 a^2 \eta^2}{c^2} \phi_{N,k} \right)$$

Definiendo las siguientes expresiones para las integrales de los polinomios de Legendre:

$$X_i^r \equiv \int_{-1}^1 P_{2i}(\eta)\eta^{2r}d\eta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2r+1)}{2^{2r}\Gamma(r-i+1)\Gamma(r+i+3/2)} \quad (7.63)$$

$$\begin{aligned} Y_{ij}^r &\equiv \int_{-1}^1 P_{2i}(\eta)P_{2j}(\eta)\eta^{2r}d\eta \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2r+4j}} \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^l 2^{2l} (4j-2l)!}{l!(2j-2l)!(2j-l)!\Gamma(r+j-l-i+1)\Gamma(r+j-l+i+3/2)} \Gamma(2r+2j-2l+1) \end{aligned} \quad (7.64)$$

$$\begin{aligned} Z_{ijs}^r &\equiv \int_{-1}^1 P_{2i}(\eta)P_{2j}(\eta)P_{2s}(\eta)\eta^{2r}d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2r+4j+4s}} \sum_{l=0}^j \sum_{t=0}^s \\ &\frac{(-1)^{l+t} 2^{2(l+t)} (4j-2l)!(4s-2t)!\Gamma(2r+2j-2l+2s-2t+1)}{l!t!(2j-2l)!(2j-l)!(2s-2t)!(2s-t)!\Gamma(r+j-l+s-t-i+1)\Gamma(r+j-l+s-t+i+3/2)} \end{aligned} \quad (7.65)$$

finalmente se obtiene el sistema lineal de ecuaciones para las constantes μ de la corrección ϕ_{PN} :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2k} \mu_{2i} (2i+1) q_{2i+1}(0) Y_{ij}^r &= \frac{MG}{2akA_{k0}^{(k)}} \sum_{m=1} k(4m^2 - 1) B_m^{(k)} \\
&[(2\phi_{N,k}|_{\eta=0} + \psi_k|_{\eta=0} - \sum_{i=0}^{2k} \mu_{2i} (2i+1) q_{2i+1}(0) P_{2j}(0)) X_i^r \\
&+ \sum_{i=0}^{2k} (\mu_{2i} + \alpha_{2i}) q_{2i}(0) Y_{ij}^m \\
&- 2 \sum_{l=0}^k \sum_{i=0}^l \sum_{n=1}^k \sum_{s=0}^n B_l^{(k)} B_n^{(k)} C_{2i}^{(l)} C_{2s}^{(n)} q_{2i}(0) q_{2s}(0) Z_{ijs}^r \\
&+ \Omega^2 a^2 \sum_{n=1}^k \sum_{i=0}^n B_n^{(k)} C_{2i}^{(n)} q_{2i}(0) (Y_{ij}^m - Y_{ij}^{m+1})] \tag{7.66}
\end{aligned}$$

donde el índice $i = 0, 1, 2, \dots, 2k$. Los modelos clásicos tienen la característica de presentar curvas mas planas a medida que aumenta k . A continuación se presentan los perfiles de densidad de masa y velocidad circular para los modelos $k = 2$, $k = 3$ y $k = 4$. Para todas las figuras se utilizó una masa de $M = 1 \times 10^{42}$ Kg, radio $a = 3 \times 10^{20}$ Km (los valores para la Vía Láctea) y la constante $B_1 = 0,2$. Notese que las gráficas clásicas y las 1PN quedan prácticamente superpuestas.

Para el modelo PRG2 se toma una masa cien veces menor que en los otros casos, esto se debe a que con los valores de la Vía Láctea, los resultados arrojados por la aproximación 1PN en el borde del disco no son físicamente correctos, lo cual hace suponer que se deben tener en cuenta las siguientes correcciones relativistas para estos valores.

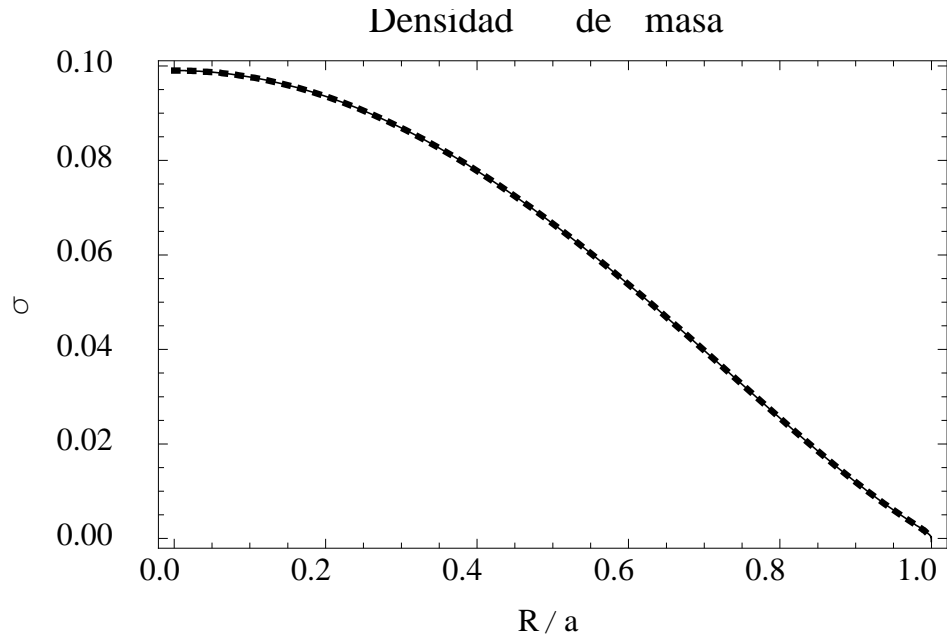


Figura 7.5: Densidad de masa para $k = 2$ (clásica gruesa a trazos y 1PN continua).

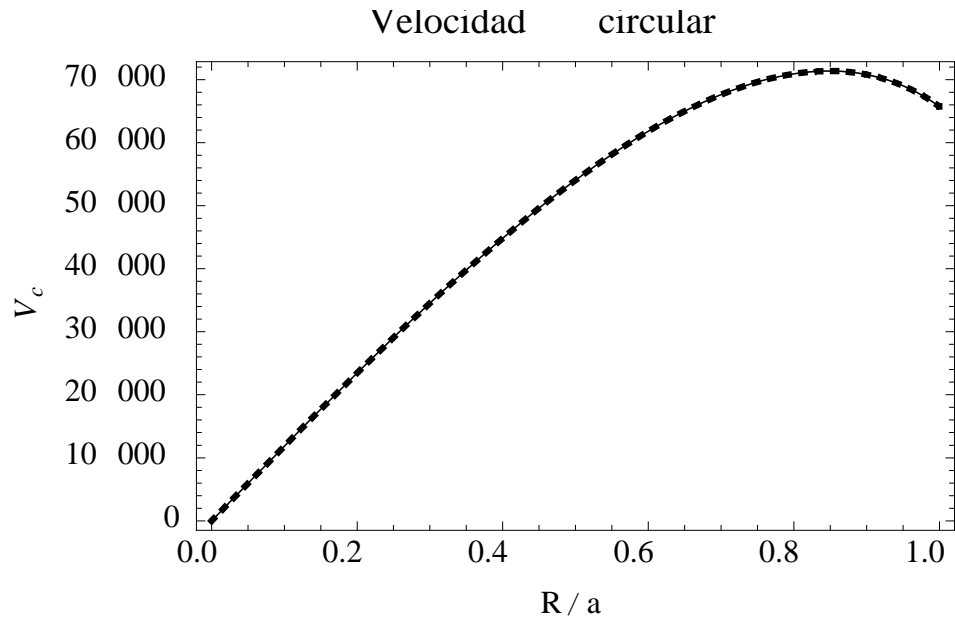


Figura 7.6: Velocidad circular para $k = 2$ (clásica gruesa a trazos y 1PN continua).

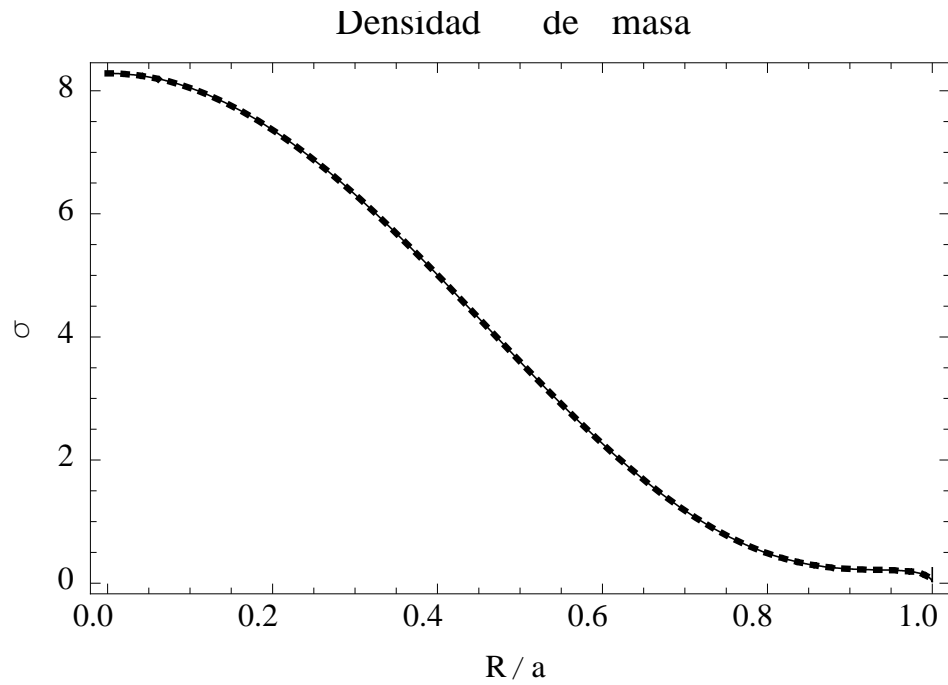


Figura 7.7: Densidad de masa para $k = 3$ (clásica gruesa a trazos y 1PN continua).

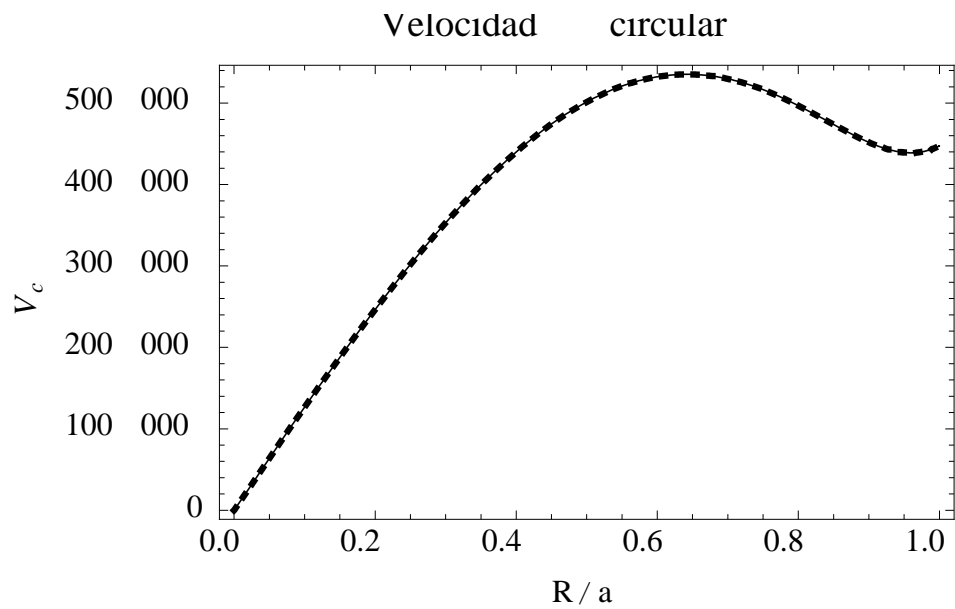


Figura 7.8: Velocidad circular para $k = 3$ (clásica gruesa a trazos y 1PN continua).

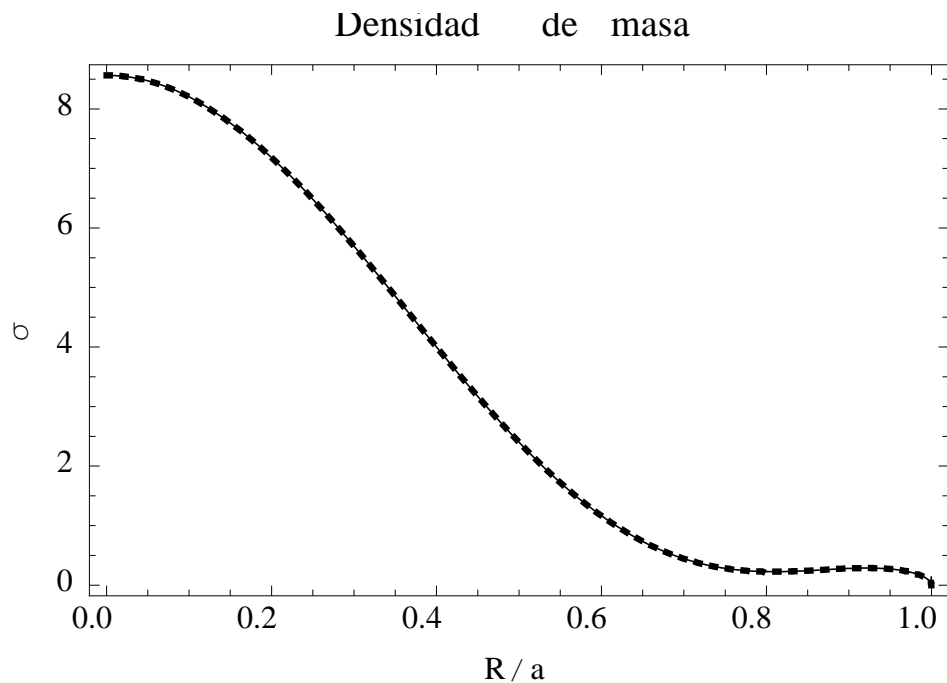


Figura 7.9: Densidad de masa para $k = 4$ (clásica gruesa a trazos y 1PN continua).

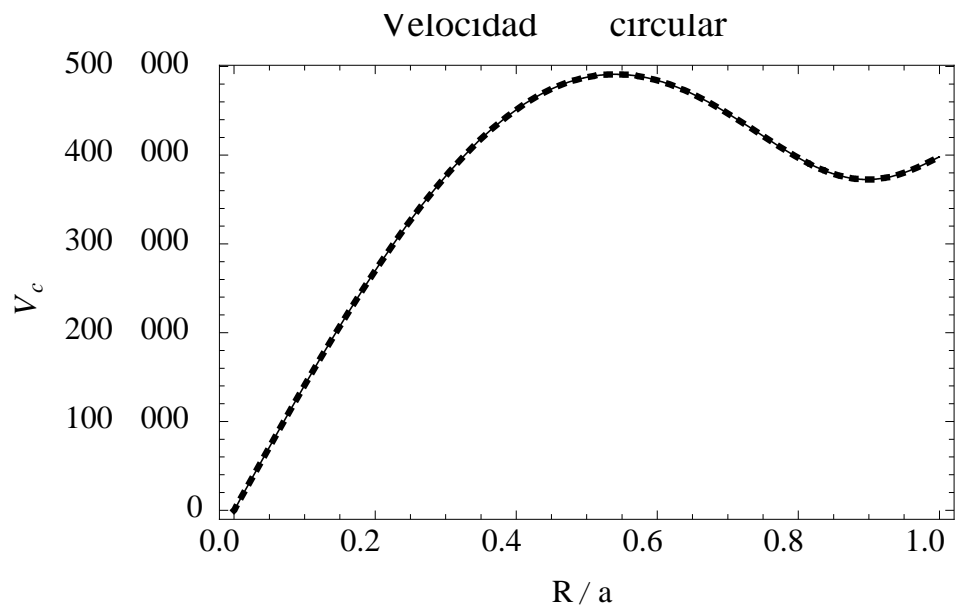


Figura 7.10: Velocidad circular para $k = 4$ (clásica gruesa a trazos y 1PN continua).

Capítulo 8

CONCLUSIONES

El desarrollo del presente trabajo incluyó una serie de experiencias, que definieron la forma en que se deben obtener los modelos autoconsistentes en la aproximación 1PN y las cuales se presentaron en el procedimiento de la sección de post-newtonianización. Otras observaciones de menor importancia, pero sin embargo muy útiles a la hora de obtener un modelo post-newtoniano se mencionan a continuación.

Procedimiento: Como se dijo antes, los dos factores más importantes a considerar son, resolver las ecuaciones fundamentales a la inversa (primero la segunda ecuación y luego la primera) y tomar el número de términos adecuado en las sumatorias en dichas ecuaciones. En tal caso, las demás características saltan a la vista.

En lo concerniente a la segunda ecuación fundamental, las constantes solo están al lado izquierdo (a diferencia de la primera ecuación) y pueden despejarse fácilmente utilizando las propiedades de ortogonalización de los polinomios de Legendre. Se puede verificar fácilmente que la suma debe ir, al menos, hasta el índice máximo de las constantes clásicas C_{2i} (más dos) lo cual demuestra que las curvas 1PN tienen mayor resolución.

Respecto a la primera ecuación fundamental, notese que la integral necesaria ya está obtenida desde el modelo clásico siempre que se tenga una expresión de la densidad en función del potencial relativo-efectivo J_{max} (6.25). Como se señaló anteriormente, la integral para los modelos estudiados puede separarse en la suma de dos partes, donde la primera corresponde a la integral clásica, así, es posible cancelar la densidad clásica a ambos lados de la ecuación fundamental (6.18), lo cual simplifica enormemente la obtención de ϕ_{PN} , la corrección al potencial clásico.

Si se pueden interpretar los resultados fenomenológicamente, ignorando el hecho de que son modelos teóricos, este trabajo resalta la importancia de las correcciones relativistas (a primer orden en velocidad) en la dinámica de discos estelares, ya que partiendo de unos modelos clásicos definidos, se pueden diferenciar los efectos causados exclusivamente por las correcciones. Es decir que el trabajo se aleja del paradigma establecido de utilizar la ley de gravedad de Newton para describir la dinámica de discos estelares

y en cambio busca cuantificar el orden de las primeras correcciones relativistas tanto cuantitativa como cualitativamente.

Si bien, se encontraron resultados generales, es posible que las características comunes encontradas en todos los modelos se puedan estudiar mas sistemáticamente.

No se enfatiza la importancia de las correcciones sobre la cantidad de materia oscura, primero, por la amplia adaptabilidad de los modelos y segundo, porque tampoco se tiene un acuerdo respecto a la distribución galáctica de materia oscura. Por ejemplo, los halos de materia oscura observados en las galaxias enanas ultra compactas (UCD) contradicen las predicciones del modelo estandar de materia oscura fria (CDM), mientras que CDM predice halos con una densidad inhomogenea, los halos de las galaxias enanas tienen nucleos con densidades constantes [3]. La mas simple de las observaciones sería por ejemplo, que solamente el orden de magnitud (*sin* tener en cuenta efectos no-lineales) del factor M/a es suficiente para marcar una diferencia en las curvas de rotación en tales sistemas (ver a continuación).

Para poder estimar *conservativamente* los ordenes de magnitud sobre los cuales se debe considerar la primera aproximación post-newtoniana, se puede ver que las correcciones en la masa, es decir en la componente cero, cero, del tensor energía-momento incluyen, aparte de factores no-lineales, un factor del orden de magnitud, MG/ac^2 menor que sus contrapartes clásicas. Extrapolando los resultados se podría esperar que la segunda aproximación post-newtoniana (2PN) sea relevante a partir de $M^2G^2/a^2 \approx c^4$. se ha de tener en cuenta que en la expresión anterior, si se tuviera la igualdad, todas las correcciones en velocidad serían de relevancia y se tendría un regimen relativista general. En otras palabras, se puede definir un parametro γ tal que,

$$\gamma = \left(\frac{MG}{ac^2} \right)^n \quad (8.1)$$

donde, n es un entero que indica el orden de la aproximación (1 para 1PN). Fijando arbitrariamente el parametro γ , por ejemplo en 0,1, se obtienen los ordenes de magnitud a partir de los cuales, la corrección *en la masa* es mayor al 10 por ciento en tal aproximación. Sin embargo, dicho factor solo brinda un estimativo, y como se pudo ver, los efectos mas importantes aparecen gracias a la falta de semejanza (escalabilidad) de los modelos.

Modelos: Se encuentra que al reemplazar los valores de la Vía Láctea en los modelos obtenidos, existen correcciones a las curvas de rotación que no se pueden despreciar para ciertos modelos (los discos de Kalnajs) mientras que en otros (PRG), la corrección es mínima. Esto puede deberse a que las correcciones ya fueron hechas al refinar el modelo, es decir, que modelos poco realistas requieren mayores correcciones relativistas. También cabe la observación de que si se desean estudiar las correcciones relativistas, entonces se deben escoger los modelos mas burdos, ya que los modelos mas refinados, de cierta forma se encargan de la situación, restandole motivación a la introducción de

Cuadro 8.1: Factor global γ de algunos sistemas estelares.

Sistema	M	$d = 2a$	MG/ac^2
Vía Láctea	$2 - 4 \times 10^{11} M_{\odot}$	20 Kpc	$1,91 \times 10^{-6}$
Galaxia Enana	$10^7 - 10^8 M_{\odot}$	500 lyr	$3,11 \times 10^{-8}$
UCD	$10^7 - 10^8 M_{\odot}$	60 - 120 lyr	$5,19 \times 10^{-7}$

las correcciones 1PN.

Una característica común de los modelos PRG es que la aproximación 1PN deja de ser válida aumentando la masa un par de órdenes de magnitud respecto a la de la Vía Láctea. Incluso, para el primer caso (PRG2), se necesita tomar $M = 8 \times 10^{40} Kg$, un valor cien veces menor para no tener inconvenientes con el comportamiento de la densidad de masa en el borde.

Se obtienen curvas de rotación prácticamente planas en, y cerca del borde, extrapolando los modelos hasta la masa (sin contraparte observada) de $M = 8 \times 10^{44} Kg$, donde se obtiene un factor $MG/ac^2 = 0,0019763$. Pero este rango está fuera de la aplicación de la aproximación 1PN y la densidad de masa en todos los modelos diverge en $R = a$ por el factor η^{-1} de la expansión tomada.

Las correcciones se hacen mucho más apreciables cuando modificamos los parámetros, específicamente la razón entre la masa y el radio, M/a , de tal forma que al aumentarlo se consiguen llevar las curvas de rotación a comportamientos dominados por las correcciones 1PN¹. Este *ajuste fino* se puede justificar si se consideran galaxias enanas (dwarfs) y las más recientemente descubiertas enanas ultra-compactas (UCD), como se muestra en la tabla (8.1).

En la figura (8.1) [7] se presenta la curva de rotación de la Vía Láctea. La curva de rotación depende de la variable θ_0 , la cual es la velocidad circular evaluada en el radio de órbita del Sol ($\theta_0 = \theta(R_0)$). Es decir que dependiendo del valor de θ_0 asumido, se toma una de las gráficas (lo cual es una gran indeterminación). Se puede ver que casi cualquiera de los modelos puede ser ajustado ya que solo nos interesa la parte de la gráfica donde $R/R_0 \leq 1$, ya que las curvas teóricas son lo suficientemente planas.

Es la primera vez que se obtienen modelos axialmente simétricos en equilibrio, es decir, dependientes de las dos integrales de movimiento E y L_z en la aproximación 1PN. Los modelos que se conocen hasta la fecha [14] corresponden a politropas de la energía -para sistemas esféricamente simétricos- similares a las politropas de Eddington. A diferencia de dichos modelos, estos tienen la ventaja de no necesitar métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales, lo cual garantiza su exactitud. Las ecuaciones

¹Tenga en cuenta que a partir de cierto rango ($(GM/ac^2)^2 \approx 0,1$) se deben tener en cuenta las sucesivas aproximaciones hasta el régimen relativista

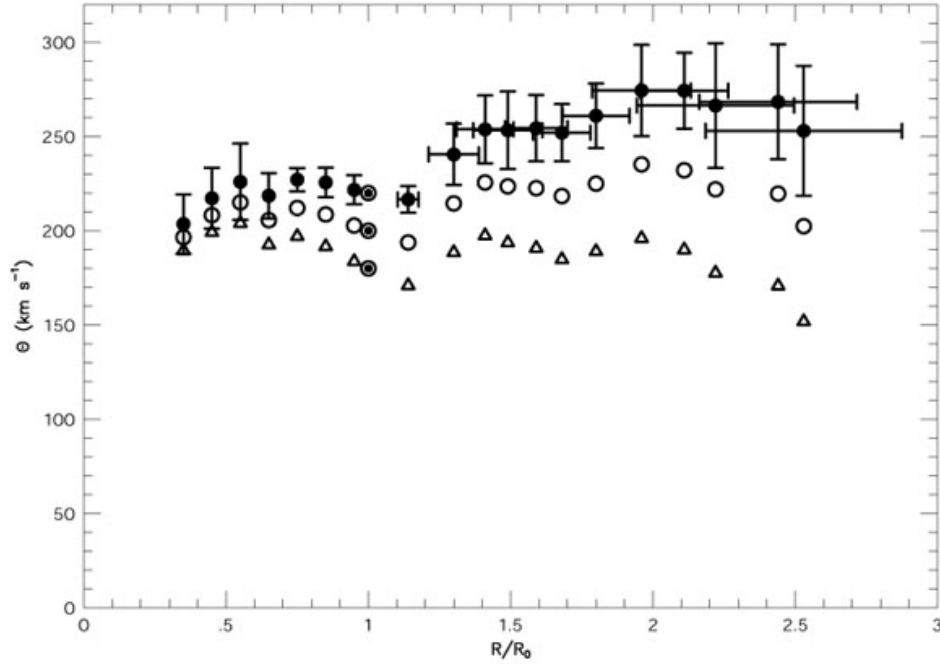


Figura 8.1: Curvas de rotación de la Vía Láctea para $\theta_0 = 220 \text{ km s}^{-1}$ (círculos llenos), $\theta_0 = 200 \text{ km s}^{-1}$ (círculos vacíos), y $\theta_0 = 180 \text{ km s}^{-1}$ (triángulos).

para resolver son dos sistemas lineales (con matriz triangular superior, y que se pueden resolver manualmente) para las constantes de expansión.

Se encuentra que en general, se requiere un número mayor de constantes de expansión en la aproximación 1PN que el número de constantes utilizadas para expresar el potencial clásico inicial. Por ejemplo, para el primer disco de Kalnajs, se requieren dos constantes clásicas (C_0 y C_2) y tres pares de constantes post-newtonianas α_0 , α_2 , α_4 , μ_0 , μ_2 y μ_4 . De la ecuación (6.26) se puede ver que para los modelos utilizados, el número de constantes α y μ obtenido es igual. El hecho de tener muchas constantes es conveniente ya que se aumenta la resolución o detalle de las funciones obtenidas al incluir más términos en la expansión.

Jugando con los parámetros, se encuentra que el límite de aplicabilidad de los modelos queda definido automáticamente: por una parte, los resultados regresan a los valores clásicos si los modelos tienen poca masa o un gran radio. En el límite contrario, cuando la masa es muy grande o el radio muy pequeño, la densidad de masa diverge en el borde ($R = a$), esto se debe a que es necesario incluir las siguientes correcciones relativistas (2PN).

A pesar de que no se puede decir mucho acerca de la presencia de materia oscura, se obtienen dos conclusiones: la primera es que los modelos describen distribuciones de materia restringidas al disco, por lo tanto, en caso de contener materia oscura, esta

también se debe encontrar en el disco. La segunda, y tal vez, mas importante, es que la aproximacion 1PN restringe la cantidad máxima de materia presente para tener un comportamiento aproximadamente clásico. En el límite relativista, la curva, a orden 1PN, puede ser o mas plana o con pendientes muy variables, dependiendo del modelo tomado. En otras palabras, si se incluye mas masa (CDM), también se deben incluir correcciones relativistas.

Con los resultados originales presentados, se ha elaborado un artículo el cual está siendo sometido a la revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Además, el trabajo ha sido seleccionado por la Universidad Industrial de Santander como *proyecto promisorio*.

Parte I
Apendices

Anexo A

Ecuación de Laplace en coordenadas oblatas

Se puede obtener un sistema de coordenadas ortogonales en tres dimensiones haciendo girar un sistema de coordenadas oblatas bi-dimensional respecto a su eje de simetría. Utilizando funciones trigonométricas hiperbólicas, se pueden definir las variables (u, v, φ) , [1],

$$\begin{aligned}x &= a \cosh u \sin v \cos \varphi \\y &= a \cosh u \sin v \sin \varphi \\z &= a \sinh u \cos v.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Resulta mas comodo reemplazar (u, v, φ) por (η, ξ, φ) definidas como,

$$\begin{aligned}\eta &= \cos v, & -1 \leq \eta \leq 1 \\ \xi &= \sinh u, & 0 \leq \xi < \infty\end{aligned}\tag{A.2}$$

con lo cual, las ecuaciones (A.1) se pueden escribir como,

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\y &= \rho \sin \varphi \\z &= a\xi\eta\end{aligned}\tag{A.3}$$

donde

$$\rho = a[(1 - \eta^2)(1 + \xi^2)]^{1/2}$$

las cuales son llamadas coordenadas esferoidales oblatas. Los correspondientes factores de escala o coeficientes de Lamé son:

$$\begin{aligned}h_\eta &= a \left(\frac{\eta^2 + \xi^2}{1 - \eta^2} \right)^{1/2} \\h_\xi &= a \left(\frac{\eta^2 + \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^{1/2} \\h_\varphi &= \rho = a \cosh u \cos v\end{aligned}\tag{A.4}$$

la ecuación de Laplace se escribe en coordenadas esferoidales oblatas como:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \xi^2) \frac{\partial V}{\partial \xi} \right] + \frac{\eta^2 + \xi^2}{(1 - \eta^2)(1 + \xi^2)} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Por otra parte, los polinomios de Legendre se pueden escribir como,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{2^n k! (n - k)! (n - 2k)!} x^{n-2k} \quad (\text{A.5})$$

Los primeros polinomios de Legendre son:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Anexo B

Verificación de las integrales de movimiento

Mediante sustitución directa se verifica que la energía y el momento angular dados por (6.3) y (6.4) son integrales de movimiento de la ecuación de Boltzmann 1PN sin colisiones (6.2). Para la energía,

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \phi + \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} = \frac{1}{2}v^2 + \Phi \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial E}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2} \left(4\phi \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right), \quad \frac{\partial E}{\partial v^i} = v_i \quad (\text{B.2})$$

reemplazando en la ecuación de Boltzmann,

$$\begin{aligned} & v_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2} \left(4\phi v_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + v_i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right) - v_i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} (4\phi + v^2) - \frac{\partial \phi}{\partial x^j} v^i v^j + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right) v_i \\ &= -\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} v_i v^2 - \frac{\partial \phi}{\partial x^j} v^j v^2 \right) = 0 \triangleleft \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Para las componentes del momento angular,

$$l_i = \varepsilon_{ijk} x^j v^k e^{-\phi/c^2} \approx \varepsilon_{ijk} x^j v^k (1 - \phi/c^2) \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial l_i}{\partial x^m} = \delta_j^m \varepsilon_{ijk} v^k e^{-\phi/c^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_{ijk} x^j v^k e^{-\phi/c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial l_i}{\partial v^m} = \delta_k^m \varepsilon_{ijk} x^j e^{-\phi/c^2} \quad (\text{B.5})$$

reemplazando en la ecuación de Boltzmann, el primer termino desaparece al ser el producto cruz de un vector consigo mismo,

$$\begin{aligned} & \cancel{v^j \varepsilon_{ijk} v^k e^{-\phi/c^2}} - \frac{1}{c^2} v^k v^m \frac{\partial \phi}{\partial x^m} \varepsilon_{ijk} x^j e^{-\phi/c^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \varepsilon_{ijk} x^j e^{-\phi/c^2} \\ & - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^k} (4\phi + v^2) - \frac{\partial \phi}{\partial x^j} v^k v^j + \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) \varepsilon_{ijk} x^j e^{-\phi/c^2} \\ &= \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x^k} \left(1 + \frac{1}{c^2} (4\phi + v^2) \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) \varepsilon_{ijk} x^j e^{-\phi/c^2} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

si se escribe la expresión anterior utilizando notación vectorial, se obtiene,

$$\left((1 + c^{-2}(4\phi + v^2))\nabla\phi + c^{-2}\nabla\psi \right) \times \mathbf{x}e^{-\phi/c^2} = 0 \triangleleft \quad (\text{B.7})$$

en sistemas con simetría esférica, los potenciales dependen únicamente del radio, por lo tanto, el vector gradiente apunta en dirección radial y la anterior ecuación se cumple para las tres componentes del vector momento angular. En sistemas con simetría axial se tiene,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial\psi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.8})$$

donde $x^2 = \varphi$, y la ecuación (B.7) se cumple para $i = 3$, es decir, se conserva la componente z del vector momento angular.

Anexo C

Velocidad circular

La velocidad circular en sistemas axialmente simétricos se define como la velocidad que tendría una partícula de prueba que se mueve describiendo una órbita circular, en tal caso la única componente de la velocidad es v_φ . La gráfica de velocidad circular también es llamada *curva de rotación* y debido a que puede ser medida, representa el observable mas importante para analizar el potencial (o potenciales) presente. Para una trayectoria arbitraria se puede establecer que,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d|v|}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + |v|\frac{d\hat{\mathbf{u}}_T}{dt} \\ &= \frac{d|v|}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + \frac{|v|^2}{R}\hat{\mathbf{u}}_N,\end{aligned}\tag{C.1}$$

donde, R es el radio de curvatura y $\hat{\mathbf{u}}_i$ son los vectores unitarios. Considerando únicamente órbitas circulares, el primer término se anula y se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{|v_\varphi|^2}{R}\hat{\mathbf{u}}_N.\tag{C.2}$$

La aceleración de la partícula se obtiene de la ecuación de movimiento 1PN (geodésica) en equilibrio (5.12), que también se puede escribir como:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi + \frac{1}{c^2}\left(-\nabla(2\phi^2 + \psi) + 4\mathbf{v}\left(v_R\frac{\partial\phi}{\partial R} + v_z\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{v_\varphi}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) - v^2\nabla\phi\right),\tag{C.3}$$

se puede ver que para trayectorias circulares, el penúltimo término se anula ya que v_R , v_z y $\partial\phi/\partial\varphi$ son cero (o lo que es igual, la fuerza y la velocidad son perpendiculares). Igualando (C.2) con (C.3) se obtiene,

$$\begin{aligned}\frac{v_\varphi^2}{R} &= -\nabla_R\phi + \frac{1}{c^2}\left(-\nabla_R(2\phi^2 + \psi) - v_\varphi^2\nabla_R\phi\right), \\ \frac{v_\varphi^2}{R}\left(1 + \frac{R}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial R}\right) &= -\frac{\partial\phi}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial R}\frac{2\phi^2 + \psi}{c^2},\end{aligned}\tag{C.4}$$

de lo anterior se obtiene,

$$v_\varphi = \sqrt{R \frac{\partial}{\partial R} \left(\phi + \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} \right) \left(1 - \frac{R}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)} \triangleleft \quad (\text{C.5})$$

Estrictamente, solo se utilizan los términos hasta orden 1PN, así que se pueden obtener expresiones alternativas desarrollando el producto:

$$v_\varphi^2 = R \left(\frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial R} \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} - \frac{R}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) \quad (\text{C.6})$$

$$= R \frac{\partial}{\partial R} \left(\phi + \frac{2\phi^2 + \psi}{c^2} \right) - \frac{R^2}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial R} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) - \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} \right) \quad (\text{C.7})$$

$$= R \frac{\partial \phi}{\partial R} \left(1 + \frac{4\phi}{c^2} - \frac{R}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{R}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial R}. \quad (\text{C.8})$$

Bibliografía

- [1] Arfken G., 1973, *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd Ed., Academic Press, San Diego.
- [2] Binney J., Tremaine S., 1987, *Galactic Dynamics*, Princeton Univ., Princeton.
- [3] van den Bosch F., Swaters R., 2001, arXiv:astro-ph/0006048v2
- [4] Cheung Yeuk-Kwan E., Xu Feng, 2008, arXiv:0810.2382v1 [astro-ph].
- [5] A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann, *Ann. Math.*, **39**, 65, 1938.
- [6] González G., Reina J., 2006, *MNRAS*, **371**, 1873.
- [7] Honma M., Sofue Y., 1996, *PASJ* **48L**, 103.
- [8] Hunter C., 1963, *MNRAS*, **126**, 299.
- [9] Kalnajs A. J., 1972, *ApJ*, **175**, 63.
- [10] Kalnajs A. J., 1976, *ApJ*, **205**, 751.
- [11] Dimitri and Barbara Weibel Mihalas Mihalas, 1984, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Hardcover.
- [12] Pedraza J. F., Ramos J., González G., 2008, arXiv:0806.4275 [astro-ph].
- [13] Pedraza J. F., Ramos J., González G., 2008, arXiv:0806.4277 [astro-ph].
- [14] Reznia V., Sobouti Y., 2000, *Astron. Astrophys.* **354**, 1110-1114.
Ed., Cambridge.
- [15] Weinberg S., 1972, *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons.
- [16] en.wikipedia.org/wiki/Alternatives_to_general_relativity.
- [17] www.astro.cornell.edu/academics/courses/astro201/rotcurve.htm.