

ANÁLISIS COMPARATIVO DE DIFERENTES MODELOS DE PROPAGACIÓN DE
GRIETA POR FATIGA UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE
CONTORNO.

JAIRO ANDRÉS MANTILLA VILLALOBOS
DIEGO ENRIQUE POVEDA DÍAZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA

2020

ANÁLISIS COMPARATIVO DE DIFERENTES MODELOS DE PROPAGACIÓN DE
GRIETA UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO.

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO

JAIRO ANDRÉS MANTILLA VILLALOBOS
DIEGO ENRIQUE POVEDA DÍAZ

DIRECTOR:
MANUEL DEL JESÚS MARTÍNEZ
INGENIERO MECÁNICO, PhD.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA

2020

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	12
1. OBJETIVOS.....	14
1.1 OBJETIVO GENERAL	14
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	14
2. MARCO REFERENCIAL.....	15
2.1 MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO-ELASTICIDAD.....	15
2.1.1 Teorema de Cauchy.	15
2.1.2 Transformación de coordenadas.	16
2.1.3 Ecuaciones de equilibrio.	18
2.1.4 Tensor de deformación.	19
2.1.5 Ecuaciones constitutivas.....	20
2.1.6 Problema general elástico y teorema del trabajo.	20
2.2 MECÁNICA DE FRACTURA LINEAL ELASTICA (<i>LINEAR ELASTIC FRACTURE MECHANICS</i>).....	23
2.2.1 Criterio de falla.....	27
2.2.2 Crecimiento de grieta por fatiga (Fatigue crack growth).....	28
2.2.3 Umbral de fractura (Fracture threshold).....	32
2.2.4 Modelos de crecimiento de grieta por fatiga.	34
2.2.4.1 Modelo de Paris-Erdogan.	35
2.2.4.2 Modelo de Klesnil-Lukas.....	35
2.2.4.3 Modelo de Forman.....	36
2.2.5 Dirección de crecimiento de grieta.....	36
2.2.6 Análisis energético y la integral J.....	38
2.3 METODO DUAL DE ELEMENTOS DE CONTORNO (<i>DUAL BOUNDARY ELEMENTS METHOD</i>).....	43
2.3.1 Formulación.	44
2.3.2 Estrategia de aplicación de las ecuaciones integrales de contorno.	52
2.3.3 Estrategia de discretización.	53

3. METODOLOGÍA	57
3.1 PRE-PROCESO	58
3.2 PROGRAMA <i>CRACKER</i>	60
3.2.1 Lectura de datos.	61
3.2.2 Análisis dual de elementos de contorno (boundary elements analysis B.E.ANAL).....	63
3.2.2.1 Integración.	64
3.2.2.2 Ordenamiento del sistema de ecuaciones.	75
3.2.2.3 Solución.	76
3.2.3 Computo de la integral J y los factores de intensidad de esfuerzo.	77
3.2.4 Análisis incremental.	82
3.2.5 Crecimiento e implementación de los modelos.....	85
3.3 Postproceso.....	88
4.RESULTADOS.....	89
4.1 PROBETA RECTANGULAR CON MUESCA.....	90
4.2 CRECIMIENTO DE GRIETA EN ALEACIÓN DE ALUMINIO 7075-T651	98
4.3 CRECIMIENTO DE GRIETA EN ACERO FERROVIARIO	110
4.4 CRECIMIENTO DE GRIETA EN UN CUERPO PERFORADO.....	116
4.5 OTROS PROBLEMAS.....	121
4.5.1 Validación de los factores de intensidad de esfuerzos con la probeta SINGLE EDGE NOTCHED TEST según la norma BS8571.....	121
4.5.2 Dirección de crecimiento en placas perforadas.	126
4.5.2.1 Desviación del camino de crecimiento a causa de una perforación.....	126
4.5.2.2 Crecimiento de grieta en placa con 4 perforaciones.	131
4.5.2.3 Grieta emanando de una perforación.	140
4.5.3 Cuerpo agrietado en forma de cruz.	143
5. CONCLUSIONES	147
6. RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS	149
BIBLIOGRAFÍA.....	150
ANEXOS.....	155

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Transformación de coordenadas.	16
Figura 2. Transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas para un estado plano de esfuerzos.	17
Figura 3. Equilibrio de fuerzas en una porción de volumen V	18
Figura 4. Enfoques para el diseño mecánico de componentes.	23
Figura 5. Cuerpo agrietado sujeto a un estado de cargas para el modo I	24
Figura 6. Modos de carga para un cuerpo agrietado.	25
Figura 7. Punto en el sistema local de coordenadas ubicado en la punta de la grieta.	26
Figura 8. Cargas cíclicas de fatiga de amplitud constante.	29
Figura 9. Gráfica general de tamaño de grieta vs número de ciclos.	29
Figura 10. Gráfica de crecimiento de grieta.	30
Figura 11. Relación entre el umbral de fractura y la relación de carga visto desde el crack closure.	34
Figura 12. Cuerpo agrietado con condiciones mixtas de frontera, sistema local de coordenadas en la punta de la grieta.	41
Figura 13. Ejemplo de discretización para un elemento agrietado. a) método de elementos finitos. b) método de elementos de contorno.	44
Figura 14. Significado Físico de las soluciones fundamentales, a) puntos de referencia, b) Ejemplo solución fundamental de desplazamientos, c) Ejemplo solución fundamental de tracciones.	46
Figura 15. Ejemplo de aplicación de la identidad de Somigliana para un contorno discretizado con elementos cuadráticos rectos.	47
Figura 16. Punto de interés x' llevado al contorno.	48
Figura 17. Ejemplo de aplicación de la ecuación integral de desplazamientos para un contorno discretizado con elementos cuadráticos rectos.	49
Figura 18. Estrategia de aplicación del método dual de elementos de contorno.	53
Figura 19. a) Elementos continuos, b) Elementos discontinuos.	54
Figura 20. Estrategia de discretización.	55
Figura 21. Dominio obtenido según la dirección de discretización.	56
Figura 22. Análisis general de cuerpos agrietados.	57
Figura 23. Pre-proceso general.	59
Figura 24. Asignación de la longitud de crecimiento.	60
Figura 25. Diagrama general de lectura de datos.	62
Figura 26. Ejemplo malla funcional.	63
Figura 27. a) Sistema global y local de coordenadas. b) Vectores tangente y normal al elemento.	64

Figura 28. Coeficientes en el sistema lineal de ecuaciones.....	69
Figura 29. Casos en la integración del mismo elemento al que pertenece el punto de colocación. a) integración de un nodo diferente al x' , integración del nodo x' sobre sí mismo.....	70
Figura 30. Cambio en el sistema coordenado local para utilizar Gauss-Laguerre.	72
Figura 31. Sistema de ecuaciones a solucionar.....	76
Figura 32. Contorno para el computo de la integral J.	78
Figura 33. Diagrama general del cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo.	81
Figura 34. Dirección de crecimiento de grieta, enfoque correctivo.	84
Figura 35. Sistema de ecuaciones para el crecimiento de grieta.....	85
Figura 36. Geometría y condiciones de frontera 4.1. Dimensiones en mm.	91
Figura 37. Gráfica K vs a para 4.1.	92
Figura 38. Gráfica de crecimiento de grieta 4.1.	94
Figura 39. Número total de ciclos transcurridos 4.1.....	95
Figura 40. Trayectoria de propagación 4.1. a) Simulación, b) Resultados experimentales.....	97
Figura 41. Geometría y condiciones de frontera 4.2. Dimensiones en mm.	98
Figura 42. Aproximación para la carga aplicada.	100
Figura 43. Factores de intensidad de esfuerzo 4.2.	102
Figura 44. Gráfica de crecimiento de grieta 4.2.	103
Figura 45. Número total de ciclos transcurridos 4.2.....	103
Figura 46. Propagación de la grieta en el cuerpo agrietado 4.2.	105
Figura 47. Grafica de crecimiento de grieta en la aleación de aluminio 7075-T651.	106
Figura 48. Gráfica de crecimiento de grieta 7075-T651 simulación.	108
Figura 49. Número de ciclos transcurridos simulación.....	108
Figura 50. Probeta Compact tensión 4.3. Dimensiones en mm.	110
Figura 51. Factores de intensidad de esfuerzo 4.3.	114
Figura 52. Gráfica de crecimiento de grieta 4.3.	115
Figura 53. Número total de ciclos transcurridos 4.3.....	115
Figura 54. Geometría y condiciones de frontera 4.4. Dimensiones en mm.	117
Figura 55. Factores de intensidad de esfuerzo 4.4.	118
Figura 56. Trayectoria de la grieta 4.4. a) Referencia computacional, b) Simulación actual, c) Referencia experimental.....	118
Figura 57. Número total de ciclos transcurridos 4.4. a) simulación actual, b) Resultados experimentales teóricos.	119
Figura 58. Geometría y condiciones de frontera para el ensayo SENT.	122
Figura 59. Errores porcentuales en el cálculo del factor de intensidad de esfuerzo.	125

Figura 60. Geometría y condiciones de frontera 4.5.2.1. Dimensiones en metros.	126
Figura 61. Trayectoria de propagación para $h = 0.3 \text{ m}$	127
Figura 62. Factores de intensidad de esfuerzo 4.5.2.1.	128
Figura 63. Comparación de la trayectoria en función de la distancia h	129
Figura 64. Número de ciclos en función de h	129
Figura 65. Geometría y condiciones de frontera 4.5.2.2. Dimensiones en mm. ..	131
Figura 66. Factores de intensidad de esfuerzo. a) KI, b) KII, c) Referencia.	132
Figura 67. Trayectoria de crecimiento. a) Configuración deformada, b) Trayectoria de crecimiento, c) Referencia ANSYS®, d) Referencia FRANC2D®.	133
Figura 68. Crecimiento de grieta en aleación de aluminio 7075-T6.	135
Figura 69. Gráfica de crecimiento de grieta simulada, aleación de aluminio 7075- T6.	139
<i>Figura 70. Geometría y condiciones de frontera 4.5.2.3.</i>	140
Figura 71. Propagación de la grieta.	141
Figura 72. Factores de intensidad de esfuerzo 4.5.2.3.	142
Figura 73. Geometría y condiciones de frontera 4.5.3.	143
Figura 74. Factores de intensidad de esfuerzo para $t_2 = 2t_1$	144
Figura 75. Variación de la trayectoria según las tracciones aplicadas.	145
Figura 76. Número total de ciclos transcurridos $t_2 = 2t_1$	145

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Comparación del método de elementos de contorno con el método de elementos finitos.	43
Cuadro 2. Coordenadas y pesos para la integración por cuadratura de Gauss. ...	68
Cuadro 3. Coordenadas y pesos para la integración por cuadratura de Gauss-Laguerre.	73
Cuadro 4. Nomenclatura en la subrutina crecimiento.	86
Cuadro 5. Datos para la simulación 4.1.	90
Cuadro 6. Factores de intensidad de esfuerzo, cálculo del error porcentual 4.1. ...	92
Cuadro 7. Constantes utilizadas para los modelos de crecimiento 4.1.	93
Cuadro 8. Propiedades mecánicas de la aleación de aluminio 7075-T651.	101
Cuadro 9. Cuadro comparativo para los factores de intensidad de esfuerzo 4.2.	101
Cuadro 10. Constantes de los modelos 4.2.	102
Cuadro 11. Error porcentual en la estimación del número de ciclos.	104
Cuadro 12. Constantes de crecimiento para la aleación de aluminio 7075-T651.	107
Cuadro 13. Composición química del Acero AVE.	112
Cuadro 14. Propiedades mecánicas de acero AVE.	112
Cuadro 15. Errores porcentuales en el factor de intensidad de esfuerzos 4.3.	113
Cuadro 16. Propiedades mecánicas aleación de aluminio 2024-T3.	117
Cuadro 17. Error porcentual en el número total de ciclos 4.4.	120
Cuadro 18. Coeficientes de la expresión 112.	123
Cuadro 19. Coeficientes de la expresión 113.	123
Cuadro 20. Comparativa de los resultados para los factores de intensidad de esfuerzo.	124
Cuadro 21. Cuadro comparativo de las simulaciones.	134
Cuadro 22. Constantes de crecimiento aleación de aluminio 7075-T6.	136
Cuadro 23. Factores de intensidad de esfuerzo efectivos.	137
Cuadro 24. Comparativa para el crecimiento de la grieta.	137

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A. Cambios generales en el programa.....	156
ANEXO B. Diagrama de análisis incremental.....	157
ANEXO C. Manual de usuario para el programa.....	158
ANEXO D. Manual de usuario del software original (anexo virtual, ver CD).	

RESUMEN

Título: Análisis comparativo de diferentes modelos de propagación de grieta por fatiga utilizando el método de elementos de contorno.*

Autor: Jairo Andrés Mantilla Villalobos, Diego Enrique Poveda Diaz. **

Palabras clave: Mecánica de fractura, Método de elementos de contorno, Crecimiento de grieta por fatiga.

DESCRIPCIÓN: En el presente trabajo se analizan diferentes modelos matemáticos que predicen la propagación de grieta por fatiga, utilizando los lineamientos de la mecánica de la fractura lineal elástica. Para el análisis de los cuerpos agrietados, se utiliza el método dual de elementos de contorno, mediante el cual se calculan los factores de intensidad de esfuerzo para computar las razones de crecimiento y el número de ciclos transcurrido, para un determinado tamaño de grieta. Se estudiaron 3 modelos específicos: El modelo de Paris, el modelo de Klesnil-Lucas y el modelo de Forman. Los resultados obtenidos se validan con literatura experimental y con el método de elementos finitos, en donde se evidencia que cada uno de los modelos analizados, representa de manera satisfactoria una parte diferente de la gráfica de crecimiento de grieta. El modelo de Klesnil-Lucas se acomoda de mejor manera a la zona cercana al umbral de fractura; el modelo de Paris representa la zona lineal o de crecimiento controlado de la grieta; mientras que el modelo de Forman reproduce la zona de fractura descontrolada o zona final en donde el factor de intensidad de esfuerzos se acerca a la tenacidad a la fractura típica del material. Finalmente se presenta una discusión sobre la aplicabilidad de cada modelo, el carácter conservativo de cada uno y se da una recomendación a utilizar el modelo de Klesnil-Lukas para simular el crecimiento completo de la grieta.

* Trabajo de grado.

** Facultad de ingenierías fisicomecánicas. Director: PhD. Manuel del Jesús Martínez.

ABSTRACT

Title: Comparative analysis of different models of crack propagation using the boundary elements method.*

Author: Jairo Andrés Mantilla Villalobos, Diego Enrique Poveda Diaz. **

Key words: Fracture mechanics, Boundary elements Method, Fatigue crack growth.

Description: In the present work, different mathematical models that predict the fatigue crack propagation are analyzed using the guidelines of the linear elastic fracture mechanics. For the analysis of the cracked bodies, the dual boundary elements method is used, by means of which the stress intensity factors are calculated to evaluate the growth rates and the number of elapsed cycles for a given crack size. Three specific models are analyzed: The Paris model, the Klesnil-Lucas model and the Forman model. The results are validated with experimental literature and with the finite element method. The results show that each one of the analyzed models approaches a different part of the crack growth graph. The Klesnil-Lucas model fits better in the area near the fracture threshold; the Paris model represents the linear or controlled growth zone of the crack; while the Forman model reproduces the uncontrolled fracture zone or final zone where the stress intensity factor approaches the typical fracture toughness of the material. Finally, a discussion is presented on the applicability of each model, the conservative nature of each one, and a recommendation is given to use the Klesnil-Lukas model to simulate the complete growth of the crack.

* Degree work.

** Faculty of physicommechanical engineering. School of mechanical engineering. Director: PhD. Manuel del Jesús Martínez.

INTRODUCCIÓN

Durante muchos años gran parte de los elementos mecánicos se han diseñado con un enfoque tradicional, en donde se tienen en cuenta tres factores principales: La carga aplicada, la geometría del elemento, y su resistencia mecánica. El uso de factores de seguridad elevados en este tipo de diseño refleja la baja confiabilidad que se le atribuye con respecto al modelo de cálculo utilizado, la certeza en su vida útil, los ensayos realizados, entre otros aspectos. Aunque para muchas aplicaciones es suficiente el diseño tradicional, para algunas otras no lo es. En aplicaciones de altas prestaciones, equipo médico, la industria aeronáutica, entre otras, se requiere de un esquema de diseño que adjudique una mayor confiabilidad en el elemento. La mecánica de fractura surge como una disciplina de la ingeniería mecánica, que estudia la resistencia de un componente agregando al análisis una nueva variable, esta variable es la presencia de una grieta o defecto en el elemento. Con base en los lineamientos dados por la mecánica de fractura se realiza un diseño de mayor confiabilidad, es decir, se reduce la incertidumbre presente en el diseño tradicional.

Es importante resaltar que gran parte de los componentes mecánicos en una máquina fallan por fatiga; al igual que para un análisis estático, la mecánica de fractura contempla este tipo de cargas. En este caso, se estudia el crecimiento de grieta por fatiga en donde se considera la presencia inicial de una grieta y se sigue de manera detallada su crecimiento, en función del número de ciclos transcurridos en el tiempo. Dentro de los objetivos de esta disciplina, está: El estimar la vida útil del componente, la carga máxima que puede ser aplicada para un determinado tamaño de grieta, y las dimensiones necesarias del elemento para soportar los requerimientos.

Múltiples modelos matemáticos han sido propuestos para predecir el crecimiento de grieta por fatiga, sin embargo, no es claro para que situaciones es adecuado cada uno de estos, razón por la cual, en el presente trabajo se realiza un análisis

comparativo de 3 modelos de crecimiento de grieta: El modelo de Paris-Erdogan, Klesnil-Lucas, y el modelo Forman. Para poder realizar el análisis comparativo de estos modelos es necesario obtener algunos parámetros fundamentales de la mecánica de fractura, en especial, los factores de intensidad de esfuerzos, cuyos valores solo pueden ser calculados de manera analítica para geometrías básicas bajo algunas suposiciones. Para un problema general con geometría definida y condiciones mixtas de frontera, se hace necesario el uso de un método numérico para calcular esfuerzos, deformaciones, desplazamientos, y, finalmente, los factores de intensidad de esfuerzo.

El método dual de elementos de contorno es aplicado junto con la integral J para el cálculo de los factores de intensidad de esfuerzos para cuerpos agrietados bajo un estado plano (de esfuerzo o deformación), y, además, que sean isotrópicos y homogéneos, sujetos principalmente al modo de fractura I para grietas libres de tracción. En el estudio propuesto se llevan a cabo dos análisis comparativos específicos: En el primero, se contrastan los resultados para cada uno de los modelos con datos experimentales obtenidos de la literatura, en el segundo análisis, se comparan los resultados obtenidos mediante el método de elementos de contorno con otras simulaciones que, en su mayoría, utilizan el método de elementos finitos.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Analizar diferentes modelos de propagación de grietas por fatiga bajo el modo de fractura I en un material homogéneo isotrópico utilizando el método de elementos de contorno, contribuyendo a la misión y visión de la escuela de ingeniería mecánica en la investigación, desarrollo y transferencia de tecnologías.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Comparar numéricamente diferentes modelos matemáticos que describen la propagación de una grieta por fatiga en un material sometido a carga cíclica para el modo de fractura I .
- ✓ Contrastar las velocidades de crecimiento de grieta obtenidas para los diferentes modelos matemáticos con los resultados del modelo de Paris-Erdogan.
- ✓ Validar los resultados obtenidos con otra técnica numérica que utilice la ley de Paris-Erdogan y que ya haya sido validada con resultados experimentales.

2. MARCO REFERENCIAL

2.1 MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO-ELASTICIDAD

La intención de la mecánica del medio continuo es el determinar la distribución de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en un sólido en términos de las cargas aplicadas, la geometría del elemento y las propiedades mecánicas del material, parámetros representados de la siguiente forma:

El tensor de esfuerzo para un elemento:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

El tensor de deformaciones:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Y el campo de desplazamientos:

$$\vec{u} = [u, v, w] \quad (3)$$

2.1.1 Teorema de Cauchy. Sea Ω la región ocupada por un sólido, r el vector de posición de un punto genérico en Ω y $t(r, n)$ el vector esfuerzo o tracción en r sobre un plano de normal n .

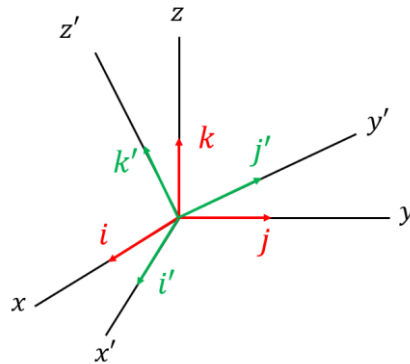
Entonces:

$$t(r, n) = \sigma \cdot \vec{n} \quad (4)$$

Donde: σ es la matriz de esfuerzos en un punto específico

2.1.2 Transformación de coordenadas. Es importante resaltar que, al igual que las componentes de un vector, las componentes de la matriz de esfuerzos en un punto determinado del sólido dependen de la orientación del sistema de coordenadas. Supóngase entonces una matriz de esfuerzos σ en el sistema de coordenadas xyz con vectores unitarios ijk , sea $x'y'z'$ otro sistema de coordenadas con el mismo origen con vectores unitarios $i'j'k'$, pero con orientación distinta (Figura 1).

Figura 1. Transformación de coordenadas.



Fuente: Elaboración propia.

En el sistema de coordenado xyz puede expresarse:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i}' &= a_{xx} \mathbf{i} + a_{xy} \mathbf{j} + a_{xz} \mathbf{k} \\
 \mathbf{j}' &= a_{yx} \mathbf{i} + a_{yy} \mathbf{j} + a_{yz} \mathbf{k} \\
 \mathbf{z}' &= a_{zx} \mathbf{i} + a_{zy} \mathbf{j} + a_{zz} \mathbf{k}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Donde: $a_{xx} = \cos(x', x)$ es el coseno director del ángulo entre el eje x' y el eje x , $a_{xy} = \cos(x', y)$ es el coseno director del ángulo entre el eje x' y el eje y , etc.

Estos cosenos directores pueden ser agrupados de forma matricial siguiendo:

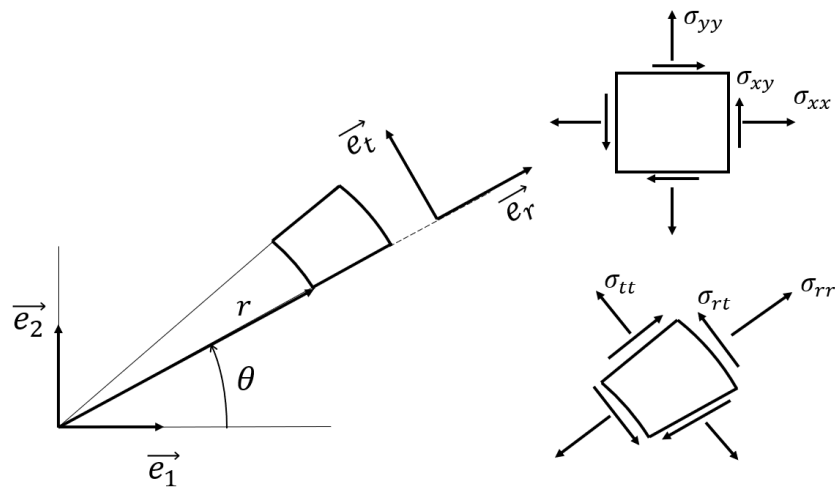
$$A = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Esta matriz recibe el nombre de matriz de transformación. Haciendo uso de la propiedad $(a \cdot b)^T = a^T \cdot b^T$, donde a y b son dos tensores cualesquiera, del teorema de Cauchy (4) puede demostrarse¹ que la relación entre la matriz de esfuerzos σ' (en el sistema $x'y'z'$) y la matriz de esfuerzos σ es:

$$\sigma' = A[\sigma]A^T \quad (7)$$

Resulta pertinente desarrollar la transformación entre un sistema coordenado rectangular S_0 definido por vectores unitarios \vec{e}_1, \vec{e}_2 y un sistema coordenado cilíndrico S_1 definido por vectores unitarios \vec{e}_r, \vec{e}_t (Figura 2), debido a que esta transformación será utilizada para establecer la dirección de crecimiento de grieta...véase 2.2.5....

Figura 2. Transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas para un estado plano de esfuerzos.



Fuente: Elaboración propia.

¹ GONCALVEZ, Raúl. Introducción al análisis de esfuerzos. Caracas: Universidad Simón Bolívar, 2002. pp. 22-26.

De manera análoga a las ecuaciones (5), se establece:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos(\theta) \vec{e}_1 + \sin(\theta) \vec{e}_2 \\ \vec{e}_t &= -\sin(\theta) \vec{e}_1 + \cos(\theta) \vec{e}_2\end{aligned}\quad (8)$$

Se organiza la matriz de transformación:

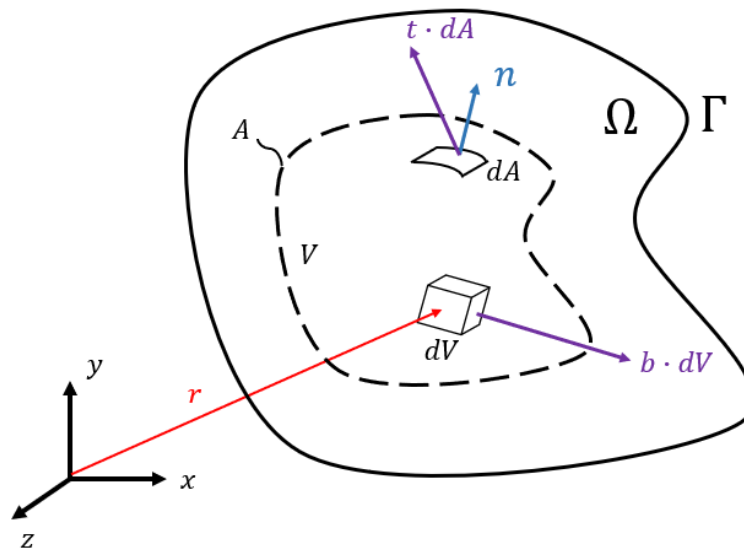
$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\quad (9)$$

De esta manera aplicando (7):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rt} \\ \sigma_{tr} & \sigma_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\quad (10)$$

2.1.3 Ecuaciones de equilibrio. Las conocidas ecuaciones de equilibrio pueden ser fácilmente deducidas a partir de un equilibrio de fuerzas en el cuerpo rígido. Sea Ω la región ocupada por un sólido cuya frontera es Γ y sea V una porción de volumen cualquiera del sólido cuya frontera es la superficie cerrada A (Figura 3). Mediante equilibrio de fuerzas se plantea que:

Figura 3. Equilibrio de fuerzas en una porción de volumen V .



Fuente: Elaboración propia.

$$\int_A \vec{t} \cdot dA + \int_V b \cdot dV = 0 \quad (11)$$

Donde:

$b =$ densidad de fuerza de volumen.

Si se examina la ecuación (11) en el eje x:

$$\int_A t_x dA + \int_V b_x dV = 0 \quad (12)$$

Se extiende la expresión aplicando (4):

$$\int_A (\sigma_{xx}\mathbf{i} + \sigma_{xy}\mathbf{j} + \sigma_{xz}\mathbf{k}) \cdot \vec{n} dA + \int_V b_x dV = 0 \quad (13)$$

Aplicando el teorema de la divergencia² de Gauss se logra llevar la integral de área a integral de volumen, obteniendo:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (14)$$

De manera general las ecuaciones de equilibrio se expresan de forma indicial:

$$\sigma_{ij,i} + b_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (15)$$

Donde i,j representan las direcciones 1,2.

2.1.4 Tensor de deformación. Puede ser demostrado³ que el estado de deformaciones en un punto de un cuerpo puede ser representado por un tensor simétrico de segundo orden ε_{ij} , dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (16)$$

Si se consideran pequeños desplazamientos en el cuerpo, es decir, las deformaciones normales y tangenciales en todos los puntos son mucho menores

² HILDEBRAND, F.B. Advanced calculus for applications. New Jersey: Prentice Hall, 1976. pp. 297-301.

³ GONCALVES, Raúl. op.cit. pp. 151-154.

que la unidad, el producto de las derivadas de los desplazamientos puede ser despreciando, obteniendo:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \quad (17)$$

2.1.5 Ecuaciones constitutivas. Cuando se habla de ecuaciones constitutivas se hace referencia a las relaciones esfuerzo-deformación, es decir, expresiones que relacionan los esfuerzos a los cuales está sujeto el elemento con las deformaciones pertinentes en cada punto. Son conocidas como ecuaciones de *Lame-Hooke*, de manera general se postula:

$$\sigma_{ijkl} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (18)$$

La expresión (18) se reduce a la *ley de Hooke para* materiales con comportamiento lineal elástico, homogéneos e isotrópicos:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (19)$$

Donde:

$$\mu = \text{Módulo de corte. dado: } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$E = \text{Módulo de Young}$

$\nu = \text{Relación de Poisson}$

$$\delta_{ij} = \text{Delta de Kronecker, dado } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

2.1.6 Problema general elástico y teorema del trabajo. En un problema general en donde un cuerpo cualquiera este sujeto a un estado de cargas externas y desplazamientos conocidos tal que su comportamiento sea elástico, con un dominio Ω y un contorno Γ se pueden plantear las siguientes expresiones:

Para un campo compatible:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{en } \Omega \quad (20)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en } \Gamma_u \quad (21)$$

Si el campo es equilibrado:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (22)$$

$$t_j = \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_j \quad \text{en } \Gamma_t \quad (23)$$

Nótese que el contorno Γ se divide en 2, un contorno donde se conocen los desplazamientos Γ_u y un contorno donde se conocen las tracciones Γ_t .

Es ahora importante tener en cuenta que, un campo elástico, es exacto si es compatible y equilibrado al mismo tiempo, es decir, que satisface las ecuaciones de compatibilidad (19), las relaciones deformación-desplazamiento (17), y las ecuaciones de equilibrio (15). De esta forma, el teorema de Kirchoff establece que, solo existirá una solución para el problema general elástico, esta solución es un campo elástico exacto. Siguiendo esta definición, considerando dos cuerpos con el mismo dominio y contorno, el primero está sujeto a un campo de esfuerzos σ_{ij}^* equilibrado por un conjunto de tracciones \bar{t}_i^* y fuerzas de volumen b_i^* en Γ_t y Ω , respectivamente; mientras el segundo está expuesto a un campo de deformaciones ε_{ij} compatible con los desplazamientos \bar{u}_j en Γ_u , se puede llegar⁴ a la siguiente expresión más conocida como el teorema del trabajo virtual:

$$\int_{\Omega} b_j^* u_j \, d\Omega + \int_{\Gamma} t_j^* u_j \, d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} \, d\Omega \quad (24)$$

Nótese que la parte izquierda de la ecuación hace referencia al trabajo realizado por las fuerzas externas en el dominio y contorno, respectivamente, mientras que la expresión a la derecha del igual en la ecuación representa el trabajo realizado por

⁴ PORTELA, A. Dual Boundary Element Analysis of Crack Growth. *Computational mechanics publications*.1993, vol 14, p.37. ISSN 1-56252-116-0.

las fuerzas internas. De esta forma se puede concebir a la energía potencial total T almacenada en un cuerpo elástico como:

$$T = U + P \quad (25)$$

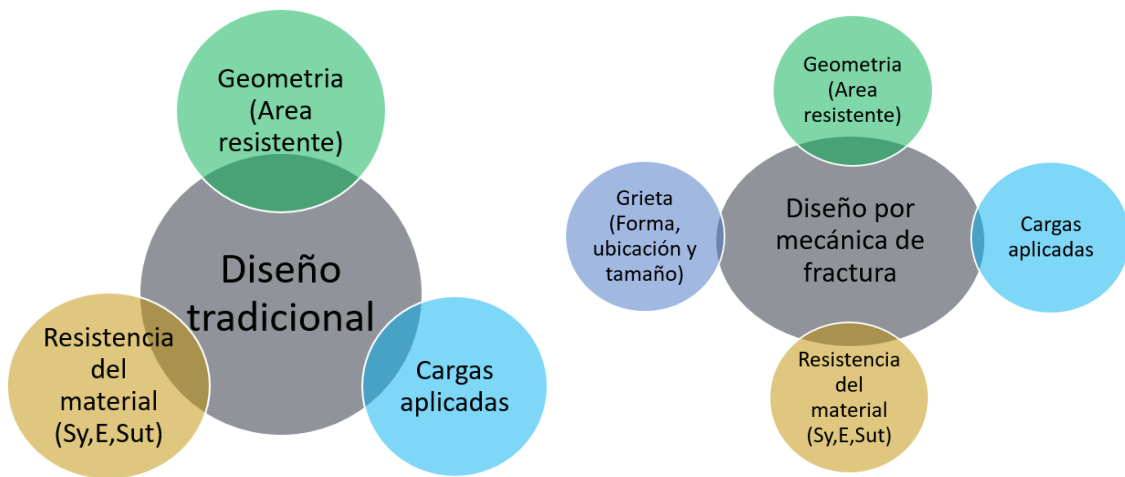
Donde U es la energía potencial interna y P es la energía potencial debido a fuerzas externas, al realizar la similitud de estos términos con la expresión del teorema del trabajo se obtiene:

$$T = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma} t_j u_j d\Gamma - \int_{\Omega} b_j u_j d\Omega \quad (26)$$

2.2 MECÁNICA DE FRACTURA LINEAL ELÁSTICA (*LINEAR ELASTIC FRACTURE MECHANICS*)

La mecánica de fractura como disciplina encargada de estudiar el comportamiento mecánico de elementos agrietados, ha recibido especial atención desde sus inicios para el análisis y diseño de aeronaves, barcos, equipo espacial, etc. En las últimas décadas, esta disciplina ha sido incorporada al diseño mecánico de gran cantidad de componentes ingenieriles, es por esta razón que se puede concebir a la mecánica de fractura como una herramienta alternativa para el diseño de componentes mecánicos, la cual añade al análisis una nueva variable, la presencia de una grieta con tamaño definido (a). Es esta la característica que permite diferenciarla claramente del diseño tradicional, el cual solo tiene en cuenta 3 aspectos para el análisis: geometría del componente, cargas aplicadas y resistencia del material (Figura 4).

Figura 4. Enfoques para el diseño mecánico de componentes.



Fuente: Elaboración propia.

Como ya se mencionó, la mecánica de fractura permite el análisis del cuerpo agrietado, siendo esto una gran ventaja para el diseño, ya que, disminuye el margen

de incertidumbre y representa un análisis que sigue fielmente el comportamiento real del componente al momento de la falla mecánica bajo la presencia de una grieta.

Considerando un cuerpo agrietado, bajo un estado de cargas dado, tal como se muestra en la figura 5, se pueden identificar varios parámetros fundamentales de la mecánica de fractura:

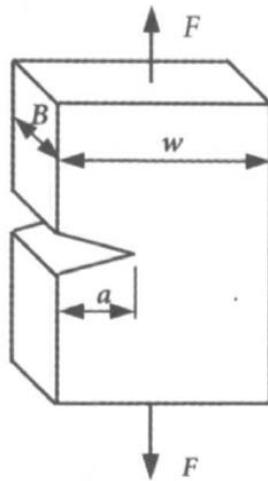
$a = \text{tamaño de grieta}$

$F = \text{fuerza externa aplicada}$

$B = \text{espesor de la pieza}$

$w = \text{ancho de la pieza}$

Figura 5. Cuerpo agrietado sujeto a un estado de cargas para el modo I.

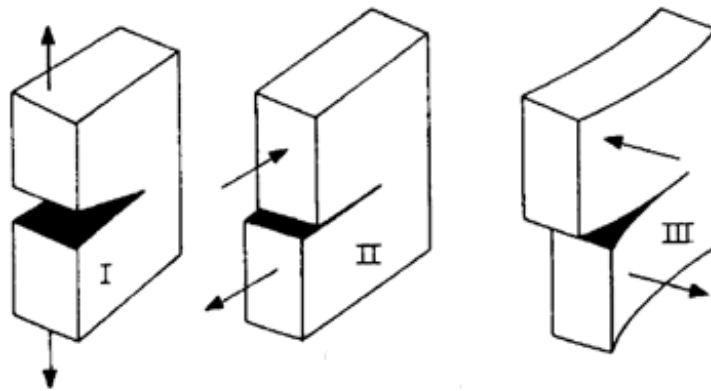


Fuente: HERNANDEZ, Héctor y ESPEJO, Edgar. Mecánica de fractura y análisis de falla. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2002.p.14.

Estos 4 parámetros que representan la geometría del cuerpo, las cargas aplicadas, el tamaño de la grieta y su inclinación, junto con otros que se mencionarán más adelante, constituyen las variables importantes para el análisis de mecánica de fractura.

Se han establecido 3 modos de carga en la mecánica de fractura con los cuales se puede representar cualquier configuración: El primero de estos es el modo de abertura, en inglés, *opening mode*, el segundo se refiere al corte deslizante, y el tercero a una abertura por torsión pura (Figura 6). Estos modos de carga o fractura se nombran consecutivamente como *I, II* y *III*. Al trabajar problemas bidimensionales con cargas en el plano, el modo de fractura *III* no está presente.

Figura 6. Modos de carga para un cuerpo agrietado.



Fuente: BROEK, David. Elementary engineering fracture mechanics. Boston: MARTINUS NIJHOFF PUBLISHERS, 1982. p. 8.

En general los 3 modos de carga están presentes para cualquier configuración. Sin embargo, la mayoría de las veces solo se tiene uno de estos de manera dominante y los otros dos pueden despreciarse. El análisis ahora decae en saber: ¿Cómo la grieta afecta al cuerpo?, ¿qué implicaciones tiene? y ¿cómo se evalúan? Para responder a estas incógnitas debe analizarse el postulado principal de la mecánica de la fractura lineal elástica el cual afirma que: Para conocer el estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de todo cuerpo agrietado, solo se necesitan determinar los factores de intensidad de esfuerzo, siempre y cuando la zona plástica alrededor de la punta de la grieta sea pequeña, es decir, predomine un estado elástico en todo el cuerpo. Con base en este postulado solo se necesitan determinar los factores de intensidad de esfuerzo para cada modo de carga, K_I , K_{II} y K_{III} , respectivamente.

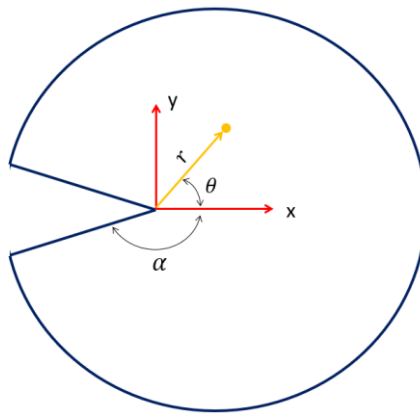
De manera general, para un cuerpo agrietado en donde las caras de la grieta se superponen ($\alpha = 180^\circ$), ver figura 7, y además predomina un estado plano sujeto a cualquier configuración de cargas y geometría, se obtienen las siguientes expresiones analíticas para representar el estado de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta en coordenadas polares, más conocidas como soluciones para el campo elástico de esfuerzos de Westergaard⁵.

$$\sigma_{xx} = \frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} * \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) * \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} * \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) * \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) * \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (27)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} * \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) * \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} * \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) * \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) * \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (28)$$

$$\tau_{xy} = \frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} * \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) * \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) * \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} * \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) * \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) * \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (29)$$

Figura 7. Punto en el sistema local de coordenadas ubicado en la punta de la grieta.



Fuente: Elaboración propia.

Es pertinente destacar las características de estas expresiones (27,28 y 29), en donde, el campo de esfuerzos se encuentra totalmente definido si se conocen los valores de K_I y K_{II} . Además, debe notarse la dependencia inversa con la distancia r , acotada desde la punta de la grieta. Esta característica es el punto de partida

⁵ GDOUTOS, E.E. Fracture mechanics an introduction. ed 2. Springer, 2005.pp. 15-28.

para establecer que alrededor de la punta siempre existirá una zona plástica; si es pequeña, se cumplen las expresiones anteriormente mostradas. Expresiones para desplazamientos y deformaciones pueden ser obtenidas⁶ a partir de (27), (28) y (29).

Como se ha mencionado, se deben calcular los factores de intensidad de esfuerzos, los cuales dependen de la carga aplicada y la geometría del componente:

$$K = f(P, Y) \quad (30)$$

Donde:

$P = \text{carga aplicada}$

$Y = \text{Factor geométrico.}$

En la mayoría de los casos, con algunas excepciones muy específicas donde se conoce la relación analítica entre los factores de intensidad de esfuerzo y las variables mencionadas, es necesario la implementación de un método numérico para la determinación de estas variables. En el presente trabajo se realiza el computo de la integral J ...véase 2.2.6... haciendo uso del método dual de elementos de contorno para lidiar con la solución de K_I y K_{II} .

2.2.1 Criterio de falla. Para cuerpos agrietados bajo carga estática, la mecánica de fractura lineal elástica propone un criterio de falla muy sencillo⁷; se expresa que: un elemento agrietado fallará, es decir, se producirá el crecimiento inminente y descontrolado de la grieta cuando el factor de intensidad de esfuerzos aplicado $K_{aplicado}$ alcanza un valor crítico el cual es una propiedad del material. Este factor de intensidad de esfuerzos se conoce con el nombre de tenacidad a la fractura (*fracture toughness*) y se denota K_{IC} , parámetro que corresponde al valor de ruptura bajo el modo de carga I . Por lo tanto, para poder comparar un estado de carga

⁶ BROEK, David. Elementary engineering fracture mechanics. Boston: MARTINUS NIJHOFF PUBLISHERS, 1982. pp. 67-89.

⁷ JARAMILLO, Héctor, *et al.* Introducción a la mecánica de la fractura y análisis de fallas. Bogotá: LOGOFORMAS, 2008. pp. 55-60.

mixto con el valor crítico K_{Ic} , debe calcularse un factor de intensidad de esfuerzos equivalente al modo de carga I , denotado como K_{Ieq} , de esta manera se postula el siguiente criterio de falla:

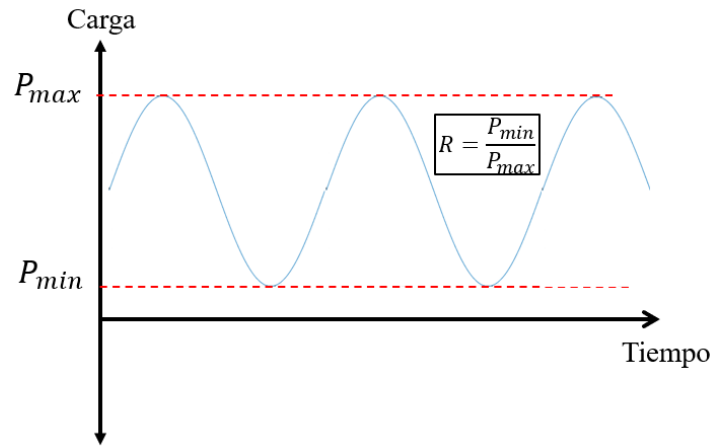
$$K_{Ieq} = K_{Ic} \quad (31)$$

Para el cálculo de la tenacidad a la fractura de un material isotrópico homogéneo se debe utilizar la norma ASTM E-399⁸.

2.2.2 Crecimiento de grieta por fatiga (Fatigue crack growth). En el caso en el que el elemento estudiado este sujeto a cargas dinámicas de fatiga con amplitud constante (Figura 8) en lugar de una carga estática ...véase 2.2.1... no se genera un crecimiento repentino de la grieta hasta la ruptura del componente, por el contrario, se da un crecimiento controlado de esta a medida del tiempo. Una vez transcurrido un determinado tiempo, reflejado en un número de ciclos, se da la ruptura final y descontrolada del componente. Entonces, el estudio de la mecánica de la fractura en el crecimiento de grieta por cargas de fatiga se enfoca en: La determinación de la vida útil del elemento (número de ciclos), el esfuerzo máximo admisible para determinada geometría y condiciones de carga, el máximo tamaño de grieta crítico antes de la ruptura, entre otros aspectos de interés.

⁸ ASTM E399-19, Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness K_{Ic} of Metallic Materials, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2019, www.astm.org.

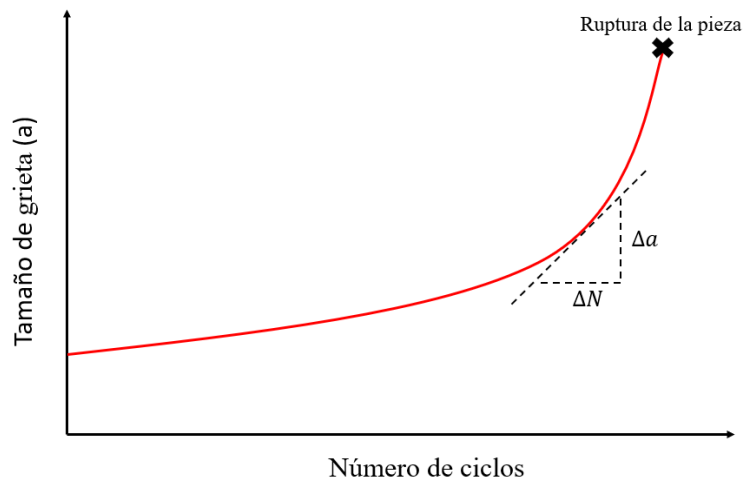
Figura 8. Cargas cíclicas de fatiga de amplitud constante.



Fuente: Elaboración propia.

En la práctica se sigue el tamaño de grieta en función del número de ciclos transcurridos, lo cual se puede representar en una gráfica tipo como la siguiente:

Figura 9. Gráfica general de tamaño de grieta vs número de ciclos.

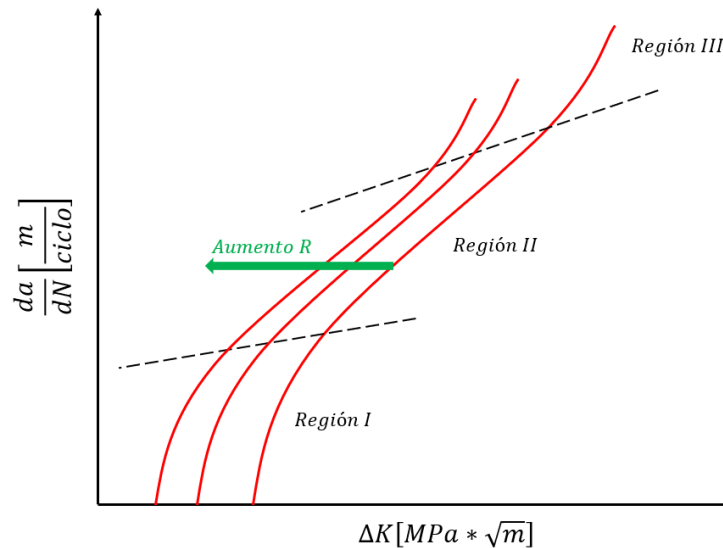


Fuente: Elaboración propia.

De la gráfica se obtiene la razón de crecimiento de grieta, la cual representa la cantidad que crece la grieta por cada ciclo transcurrido y se denota como da/dN . Si se grafica este parámetro en función de la variación del factor de intensidad de esfuerzos aplicado $\Delta K = K_{max}(1 - R)$, producto de las cargas de fatiga, en escala

logaritmo-logaritmo, se obtiene la gráfica de crecimiento de grieta específica para cada material (Figura 10).

Figura 10. Gráfica de crecimiento de grieta.



Fuente: Elaboración propia.

En donde las líneas punteadas representan la zona de cambio entre las diferentes regiones, también se aprecia la variación de la curva de crecimiento de grieta en función de la relación de cargas de fatiga R (figura 8).

Este comportamiento (figura 10) es único para cada material y es el pilar fundamental para el crecimiento de grieta por cargas de fatiga, ya que es independiente de las cargas aplicadas, el tamaño de la grieta y la geometría del componente, es decir, dos elementos agrietados del mismo material que estén sujetos al mismo factor de intensidad de esfuerzos tendrán la misma razón de crecimiento de grieta da/dN . Dentro de la gráfica de crecimiento de grieta se distinguen 3 regiones:

- Región I: Se refiere a la primera zona de la gráfica en donde las razones de crecimiento de grieta son bastante pequeñas, generalmente entre 10^{-10} m/ciclo y 10^{-9} m/ciclo, es decir, para un crecimiento dado deben pasar una gran cantidad de ciclos. En esta zona se distingue un valor característico denominado umbral de fractura ΔK_{th} , en inglés, *fracture threshold*, por debajo del cual se dice que no hay crecimiento de grieta. Este tema se abordará con mayor amplitud más adelante... véase 2.2.3...
- Región II: Después de un crecimiento lento característico de la Región I, se encuentra una fase de crecimiento controlado en la cual, la razón de crecimiento de grieta incrementa de manera proporcional al factor de intensidad de esfuerzos aplicado (en escala logarítmica). Esta zona ha sido ampliamente estudiada por su sencillez en el modelamiento de la curva y la obtención de datos experimentales.
- Región III: Se caracteriza por un crecimiento rápido y descontrolado de la grieta, esta región se alcanza cuando el valor del factor de intensidad de esfuerzos máximo aplicado se acerca a la tenacidad a la fractura del material. En esta etapa son necesarios pocos ciclos en la vida útil del material para alcanzar un crecimiento considerable.

Es importante destacar que, aunque la gráfica de crecimiento de grieta es independiente de la carga y la geometría, esta se ve afectada por algunos parámetros importantes como lo son: la temperatura, humedad, tamaño de grano del material, resistencia del material, frecuencia de carga, y la relación de cargas de fatiga $R = P_{min}/P_{max}$. Para obtener la gráfica de crecimiento de grieta bajo condiciones específicas se debe seguir la norma ASTM E647⁹.

⁹ ASTM E647-15, Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2015, www.astm.org.

2.2.3 Umbral de fractura (Fracture threshold). El umbral de fractura ΔK_{th} , es definido como el valor del factor de intensidad de esfuerzos por debajo del cual no existe crecimiento de grieta, sin embargo, en la práctica es muy difícil tener certeza sobre en qué momento empieza el crecimiento, por lo que el umbral de fractura se calcula como el valor del factor de intensidad de esfuerzos correspondiente a una razón de crecimiento de $10^{-10} m/ciclo$. En muchas ocasiones, se toma este valor para el diseño de componentes, de tal forma que, el factor de intensidad de esfuerzos aplicado nunca sobrepase el umbral de fractura y no se produzca crecimiento de la grieta. No obstante, es incorrecto pensar que en el funcionamiento del equipo no ocurra ninguna sobrecarga que incurra en sobrepasar el umbral de fractura y de lugar al crecimiento de la grieta.

Este parámetro fue introducido por KLESNIL¹⁰ en el año 1972. A partir de ese momento se han generado gran cantidad de trabajos que estudian la influencia de múltiples variables en el umbral de fractura; dentro de estas dependencias es importante destacar el efecto de la relación de cargas de fatiga R . VOSIKOVSKY¹¹ y BULLOCH¹² han hecho una importante recopilación sobre la variación del umbral de fractura en función de la relación de carga para gran variedad de materiales, en donde se plantea que esta relación obedece la ecuación (32), planteando una relación lineal entre el umbral de fractura y la relación de carga cuando esta última, es menor a un valor típico del material R^* , para aceros alrededor de 0.7. Cuando la relación de cargas es mayor a este valor, el umbral de fractura se mantiene constante con un valor ΔK_{th}^* :

¹⁰ KLESNIL, M. y LUKÁŠ, P. Influence of strength and stress history on growth and stabilization of fatigue cracks. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 1972, vol. 4, nro. 1, pp. 77-92. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(72\)90078-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(72)90078-1).

¹¹ VOSIKOVSKY, O. The effect of stress ratio on fatigue crack growth rates in steels. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 1979, vol. 11, nro. 3, pp. 595-602. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(79\)90083-3](https://doi.org/10.1016/0013-7944(79)90083-3).

¹² BULLOCH, J.H. The influence of mean stress or R-Ratio on the fatigue crack threshold characteristics of steels-A review. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* [en línea]. 1991, vol. 47, nro. 3, pp. 263-292. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0308-0161. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0308-0161\(91\)90032-W](https://doi.org/10.1016/0308-0161(91)90032-W).

$$\Delta K_{th} = \begin{cases} \Delta K_{th0} * (1 - R), & R \leq R^* \\ \Delta K_{th}^* & , \quad R > R^* \end{cases} \quad (32)$$

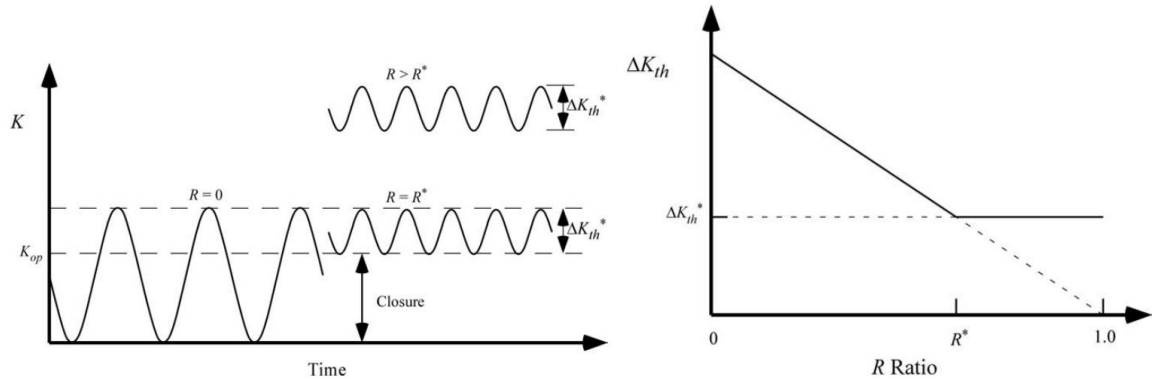
Donde:

$\Delta K_{th0} =$ Umbral de fractura para $R = 0$.

Esta relación entre el umbral de fractura y la relación de carga se aborda desde un concepto de la mecánica de fractura llamado “Cierre de las caras de la grieta”, en inglés *crack closure*, introducido por Elber¹³, en donde se plantea que existe un valor de factor de intensidad de esfuerzos K_{op} mayor a 0 por debajo, del cual, las caras de la grieta permanecen unidas aún con cargas de tracción. Este fenómeno disminuye el factor de intensidad de esfuerzo efectivo ($\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op}$) al cual está sujeto el componente. Con base en este concepto, se llega a deducir, que el umbral de fractura está compuesto por 2 partes: una componente implícita ΔK_{th}^* la cual es una propiedad del material, y una componente explícita que se atribuye al *crack closure* y depende de la relación de carga (Figura 11). De esta forma, el umbral de fractura para $R=0$ se puede calcular como $\Delta K_{th0} = \Delta K_{th}^* + K_{op}$.

¹³ ELBER, W. Fatigue Crack Closure under Cyclic Tension. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 1970, vol. 2, nro. 1, pp. 37–45. [Recuperado 12 Junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(70\)90028-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(70)90028-7).

Figura 11. Relación entre el umbral de fractura y la relación de carga visto desde el *crack closure*.



Fuente: ANDERSON, T.L. Fracture Mechanics. Boca ratón: Taylor y Francis Group, 2005. Pp. 451-464.

2.2.4 Modelos de crecimiento de grieta por fatiga. Gran cantidad de modelos han sido propuestos para describir el comportamiento de crecimiento de grieta por fatiga bajo cargas cíclicas de amplitud constante¹⁴, algunos se basan en un criterio energético como la integral J o la tasa de liberación de energía G, otros se basan en el desplazamiento de las caras de la grieta, en inglés, *crack tip open Displacement (CTOD)*, y algunos en especial se basan en el factor de intensidad de esfuerzos K . Debido a la estrecha relación que existe entre los factores de intensidad de esfuerzos y los diferentes parámetros mecánicos en la mecánica de fractura lineal elástica, estos últimos son sin lugar a duda, los más utilizados para modelar el crecimiento de grieta.

En este grupo de modelos se destacan tres específicamente, que, aunque son mencionados en muchos textos referenciales, se encuentra una carencia en su comparativa, en conocer su aplicabilidad y el grado de incertidumbre que adjudica

¹⁴ TANAKA, K. Mechanics and Micromechanics of Fatigue Crack Propagation. *ASTM international* [en línea]. 1989, pp. 151-183. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1520/STP18824S>.

cada uno de estos. A continuación, se presentan los tres modelos que serán comparados y analizados en el presente trabajo.

2.2.4.1 Modelo de Paris-Erdogan. Paris y Erdogan¹⁵ proponen el siguiente modelo para la propagación de la grieta en la región II:

$$\frac{da}{dN} = C * (\Delta K)^m \quad (33)$$

Donde C y m son constantes experimentales que dependen del material y condiciones ambientales. Se puede considerar un exponente $m = 4$ como primera aproximación en la mayoría de los aceros.

Por la forma de la ecuación (33) se conoce que representa una línea recta en la escala logaritmo-logaritmo y aunque, solo se acomoda a la zona II en la curva de crecimiento, es el modelo más utilizado para representar el crecimiento de grieta debido a su sencillez.

2.2.4.2 Modelo de Klesnil-Lukas. Al introducir el concepto de umbral de fractura, Klesnil y Lukas⁹ también proponen un modelo de crecimiento que tiene en cuenta este parámetro:

$$\frac{da}{dN} = C * (\Delta K^m - \Delta K_{th}^m) \quad (34)$$

En este modelo el umbral de fractura sirve como criterio para el crecimiento, ya que, si los factores de intensidad de esfuerzos a los cuales el cuerpo está sujeto no sobrepasan el umbral de fractura, la expresión (34) arroja una razón de crecimiento negativa, lo cual significa que físicamente no se tiene ningún crecimiento. Las constante C y m tienen el mismo valor numérico que en el modelo de Paris-Erdogan.

¹⁵ PARIS, P.C. y ERDOGAN, F. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. *Journal of Basic Engineering* [en línea]. 1963, vol. 85, pp. 528–533. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1115/1.3656900>.

2.2.4.3 Modelo de Forman. Forman¹⁶, et al, proponen un modelo que contempla la zona de crecimiento descontrolado hasta la fractura del componente. Se plantea que a medida que el factor de intensidad de esfuerzos máximo se acerca a la tenacidad a la fractura del material, la razón de crecimiento sigue un comportamiento creciente asintótico. Este modelo también introduce una dependencia con la razón de carga y formula:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C * (\Delta K)^m}{(1 - R) * K_{IC} - \Delta K} = \frac{C * (\Delta K)^{m-1}}{\frac{K_{IC}}{K_{max}} - 1} \quad (35)$$

Puede intuirse como a medida que K_{max} se acerca a la tenacidad a la fractura K_{IC} , la rata de crecimiento tiende a infinito.

Al estimar la razón de crecimiento de grieta da/dN , haciendo uso de cualquiera de las leyes anteriormente planteadas, se puede calcular el número de ciclos transcurrido para un crecimiento específico.

$$\Delta N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{f(\Delta K, C, m, K_{IC}, R)} \quad (36)$$

Donde ΔN hace referencia al numero de ciclos transcurrido, a_i y a_f representan el tamaño de grieta inicial y final, respectivamente. Esta integral se computa mediante la regla del trapecio simple...véase 3.2.5....

2.2.5 Dirección de crecimiento de grieta. Otro aspecto de especial interés es la dirección de crecimiento de grieta para un modo mixto de carga. Para calcular el ángulo de crecimiento θ_t se han propuesto múltiples criterios¹⁷, entre los cuales se

¹⁶ FORMAN, R. G.; KEARNEY, V. E. and ENGLE, R. M. Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structures. *ASME journal of basic Engineering* [en línea]. 1967, vol. 89, pp. 459–463. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1115/1.3609637>.

¹⁷ QIAN, J. y FATEMI, A. Mixed mode fatigue crack growth: A literature survey. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 1996, vol. 55, nro. 6, pp. 969-990. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00071-9](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00071-9).

destacan: el criterio de máxima densidad de energía de deformación¹⁸ y el criterio de máximo esfuerzo tangencial, en inglés, *máximo tangencial stress criterion (MTSC)*, en donde, se postula que la grieta crecerá en una dirección perpendicular al máximo esfuerzo tangencial. Para desarrollar este postulado, es necesario expresar los esfuerzos alrededor de la punta de la grieta dados por (27), (28) y (29) en coordenadas cilíndricas. Para esto se utiliza la expresión (10) ...véase 2.1.2..., obteniendo:

$$\begin{aligned}\sigma_{tt} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right] \\ \sigma_{rr} &= 2K_I \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - 2K_{II} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \frac{3}{2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{rt} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta) [K_I \sin(\theta) + K_{II}(3 \cos(\theta) - 1)]\end{aligned}\quad (37)$$

Para que el esfuerzo tangencial sea máximo, es decir, sea un esfuerzo principal, se debe cumplir:

$$\frac{\partial \sigma_{tt}}{\partial \theta} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 \sigma_{tt}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (38)$$

Al realizar la derivada de la función del esfuerzo tangencial e igualar a 0, se obtiene la expresión para el criterio de crecimiento:

$$K_I \sin(\theta_t) + K_{II}(3 \cos(\theta_t) - 1) = 0 \quad (39)$$

Nótese que esta expresión también puede obtenerse anulando la componente $\sigma_{rt} = 0$.

Al realizar algunas operaciones algebraicas mediante identidades trigonométricas a la ecuación (39), se obtiene finalmente:

¹⁸ ORDAZ, E. y MARTÍNEZ, M. Modelo computacional de crecimiento de grietas y propagación de grietas utilizando el criterio de la densidad de energía de deformación. *Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, CONIM'2006, Mérida, (2006)*.

$$\tan\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = \frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \quad (40)$$

De esta expresión se obtienen 2 posibles ángulos para el crecimiento, no obstante, solo uno de estos es el ángulo que contempla el esfuerzo principal máximo en un modo equivalente I . Para esta condición, el factor de intensidad de esfuerzos aplicado alcanzará la tenacidad a la fractura del material en θ_t cuando se llegue al momento de la falla:

$$\frac{K_{Ieq}}{\sqrt{2\pi r}} = \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta_t}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta_t}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta_t) \right] = \sigma_1(\theta = 0, K = K_{IC}) \quad (41)$$

$$K_{Ieq} = K_I \cos^3\left(\frac{\theta_t}{2}\right) - 3K_{II} \cos^2\left(\frac{\theta_t}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right) = K_{IC} \quad (42)$$

Entonces, el procedimiento que se sigue para calcular el ángulo de crecimiento es el siguiente:

- I. Se calculan los dos ángulos donde el esfuerzo tangencial es un esfuerzo principal haciendo uso de (40).
- II. Para cada uno de estos ángulos se calcula el factor de intensidad de esfuerzos equivalente mediante (42), el ángulo que represente mayor valor en esta expresión establece la dirección de crecimiento de grieta.

2.2.6 Análisis energético y la integral J. Como su nombre lo dice, se basa en un balance de energía en el cuerpo agrietado. El postulado de GRIFFITH¹⁹ presenta: “El crecimiento de grieta puede ocurrir siempre y cuando la energía necesaria para que la grieta crezca una longitud infinitesimal da pueda ser liberada por el sistema”. De esta manera, para el momento en que se cumpla el postulado expuesto anteriormente, se tendrá:

¹⁹ GRIFFITH, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society* [en línea]. 1921, vol. 221, pp.163-198. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 2053-9258 Disponible en: <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>.

$$\frac{d}{da}(T + S) = 0 \quad (43)$$

Donde S representa la energía necesaria para el crecimiento. De allí surge un nuevo concepto llamado razón de liberación de energía, en inglés *Energy release rate*, representado con la letra G :

$$G = \frac{dS}{da} = -\frac{dT}{da} \quad (44)$$

Este parámetro es la base para el análisis energético en cuerpos agrietados, como se ha mencionado en incisos anteriores, incluso se han formulado criterios de falla basados en G y leyes de crecimiento. Ahora es de interés examinar la relación entre la rata de liberación de energía y los factores de intensidad de esfuerzos, la cual servirá para plantear la importancia y formulación de la integral J.

$$G = \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) \quad (45)$$

En donde $E' = E$ para esfuerzo plano y $E' = E/(1 - \nu^2)$ para deformación plano.

La ecuación (45) es válida para materiales con comportamiento lineal elástico, si no se considera un comportamiento lineal, al expandir y evaluar la ecuación (44) se llega a la famosa integral J. Rice²⁰ fue el primero en reconocer la importancia de la integral J en la mecánica de fractura. Esta integral ha sido utilizada para evaluar los factores de intensidad de esfuerzo en problemas bidimensionales y tridimensionales de mecánica de fractura elástica y termo elástica²¹.

²⁰ RICE, J.R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics* [en línea]. 1968, vol. 35, pp. 379–386. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1115/1.3601206>.

²¹ BALDERRAMA, Rafael. Implementación de la integral J de dominio para el análisis de grietas en problemas termo elásticos tridimensionales utilizando el método de elementos de contorno. Trabajo de grado para optar al título de Magister Scientiarum en Ingeniería Mecánica. Caracas: Universidad central de Venezuela, 2004. pp. 42-46.

Sea Ω el dominio de un cuerpo agrietado (Figura 12), sea Γ el contorno del cuerpo dividido en Γ_t y Γ_u . Considérese que el cuerpo está restringido en su desplazamiento en Γ_u , tiene condiciones de tracción en Γ_t y fuerzas de volumen en Ω . Las condiciones de tracción son independientes del tamaño de la grieta y sus caras están libres de tracción. La energía potencial total T esta dada por (26) ...véase 2.1.6..., por lo que la expresión (44):

$$\frac{dT}{da} = \int_{\Omega} \frac{dW}{da} d\Omega - \int_{\Gamma} t_j \frac{du_j}{da} d\Gamma - \int_{\Omega} b_j \frac{du_j}{da} d\Omega \quad (46)$$

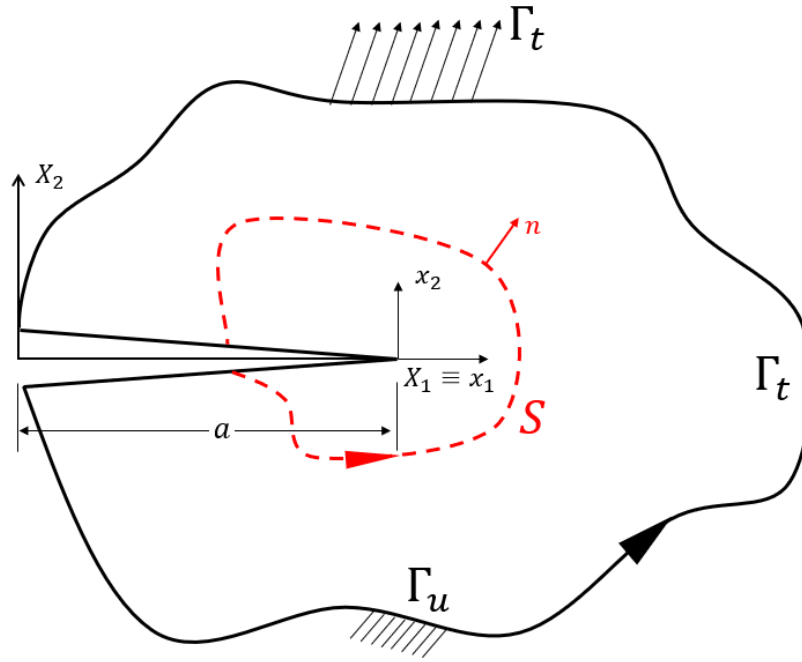
El sistema coordenado $X_i = x_i - a\delta_{i1}$ es utilizado para realizar las respectivas derivadas:

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (47)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dT}{da} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} t_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial a} - \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} b_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial a} - \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) d\Omega \quad (48)$$

Figura 12. Cuerpo agrietado con condiciones mixtas de frontera, sistema local de coordenadas en la punta de la grieta.



Fuente: Elaboración propia.

Como las condiciones de tracción son independientes del tamaño de la grieta, entonces, las derivadas parciales de los desplazamientos son nulas. Utilizando el teorema del trabajo puede obtenerse:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial a} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} d\Omega = \int_{\Gamma} t_j \frac{\partial u_j}{\partial a} d\Gamma + \int_{\Omega} b_j \frac{\partial u_j}{\partial a} d\Omega = 0 \quad (49)$$

La expresión (48) se reduce a:

$$-\frac{dT}{da} = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x_1} d\Omega - \int_{\Gamma} t_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} d\Gamma - \int_{\Omega} b_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} d\Omega \quad (50)$$

Por último, se aplica el teorema de la divergencia para obtener:

$$-\frac{dT}{da} = \int_{\Gamma} \left(W n_1 - t_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} u_j \frac{\partial b_j}{\partial x_1} d\Omega - \int_{\Gamma} b_j u_j n_1 d\Gamma \quad (51)$$

El termino W representa la densidad de energía de deformación y n_1 la normal al contorno en la dirección 1. RICE²² demuestra la independencia de la integral J con respecto al contorno, es decir, teóricamente la integral J puede ser evaluada en cualquier contorno alrededor de la punta de la grieta en donde, su inicio sea la cara inferior y su final sea la cara superior en sentido antihorario. De esta forma se introduce la integral J para un contorno cualquiera S (Figura 12), de la siguiente forma:

$$J = \int_S (W n_1 - t_j u_{j,1}) dS \quad (52)$$

Finalmente se obtiene la expresión general:

$$G = -\frac{dT}{da} = J + \int_{\Omega_S} u_j \frac{\partial b_j}{\partial x_1} d\Omega_S - \int_S b_j u_j n_1 dS \quad (53)$$

Cuando se desprecian las fuerzas volumétricas b_j , la integral J se relaciona directamente con la razón de liberación de energía y con los factores de intensidad de esfuerzo de la forma:

$$G = J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (54)$$

Siguiendo esta relación es posible extraer los factores de intensidad de esfuerzos al realizar el computo de la integral J. Algunos detalles adicionales sobre el cálculo de este parámetro y el desglose de los factores de intensidad de esfuerzos serán tratados en la metodología del proyecto ...véase 3....

²² RICE, J.R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. *Fracture and advance treatise*. vol. 2. Nueva York: H. Liebowitz (editor), 1968. pp. 208 – 214.

2.3 METODO DUAL DE ELEMENTOS DE CONTORNO (*DUAL BOUNDARY ELEMENTS METHOD*)

Para poder determinar la distribución de esfuerzos, deformaciones, desplazamientos y así poder finalmente calcular los factores de intensidad de esfuerzo para un cuerpo agrietado con una geometría compleja, es necesario implementar un método numérico que lidie con la carencia de soluciones analíticas para la mayoría de los escenarios. En el presente trabajo se desarrolla el análisis de cuerpos agrietados mediante el método dual de elementos de contorno. En el siguiente cuadro se presentan algunas características fundamentales de este método en comparación con el método de elementos finitos, el cual, es sin lugar a duda, el más utilizado en problemas de mecánica elastoestática y crecimiento de grieta.

Cuadro 1. Comparación del método de elementos de contorno con el método de elementos finitos.

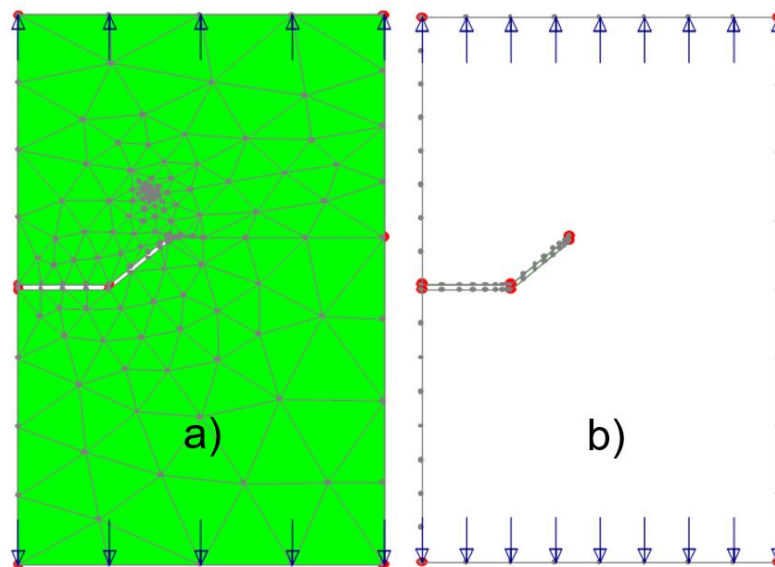
Característica	Método dual de elementos de contorno (MDEC)	Método de elementos finitos (MEF)
Discretización	Se discretiza solamente el contorno del componente analizado.	Se discretiza todo el dominio del componente analizado.
Tiempo de computo	Menor	Mayor
Dimensionalidad del problema	Se disminuye la dimensionalidad del problema en 1 grado.	Se utilizan elementos de igual dimensión al problema.
Resultados	Los resultados en el contorno se obtienen de manera directa, los resultados en cualquier punto de interés en el dominio se obtienen mediante un postproceso.	Se calculan los resultados en cada uno de los nodos de discretización.

Fuente: Elaboración propia.

La principal característica que hace tan atractivo el método de elementos de contorno en el análisis de cuerpos agrietados y crecimiento de grieta, es la

discretización del modelo (Figura 13). Para un crecimiento de grieta, solamente es necesario agregar elementos nuevos en la dirección de crecimiento, mientras que, con el método de elementos finitos, es necesario remallar la totalidad del dominio o por lo menos gran parte de este. Esta característica disminuye el tiempo de cómputo y facilita los algoritmos de mallado en el pre-proceso.

Figura 13. Ejemplo de discretización para un elemento agrietado. a) método de elementos finitos. b) método de elementos de contorno.



Fuente: Elaboración propia.

2.3.1 Formulación. En este apartado se trata con la formulación del método dual de elementos de contorno para elasticidad en 2 dimensiones (2D) para materiales isotrópicos homogéneos con comportamiento lineal. El primer concepto fundamental que debe abordarse son las soluciones fundamentales de Kelvin, las cuales se obtienen al solucionar la ecuación de Navier²³ para una carga puntual unitaria actuando en x' , para un cuerpo con dominio infinito Ω_∞ y contorno infinito Γ_∞ . En este trabajo son de interés la solución para los desplazamientos $U_{ij}(x', x)$ y

²³ BREBBIA, C.A y DOMINGUEZ, J. Boundary elements an introductory course, second edition. Boston: WIT press, 1998. pp. 153-165.

la solución para las tracciones $T_{ij}(x', x)$ que experimenta un punto x ubicado en una superficie con normal n . Estas soluciones tienen la forma:

$$U_{ij}(x', x) = \frac{1 + \nu}{4\pi(1 - \nu)E} [(3 - 4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (55)$$

$$T_{ij}(x', x) = -\frac{1}{4\pi(1 - \nu)r} \left[[(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}]r_{,k}n_{,k} - (1 - 2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (56)$$

Donde:

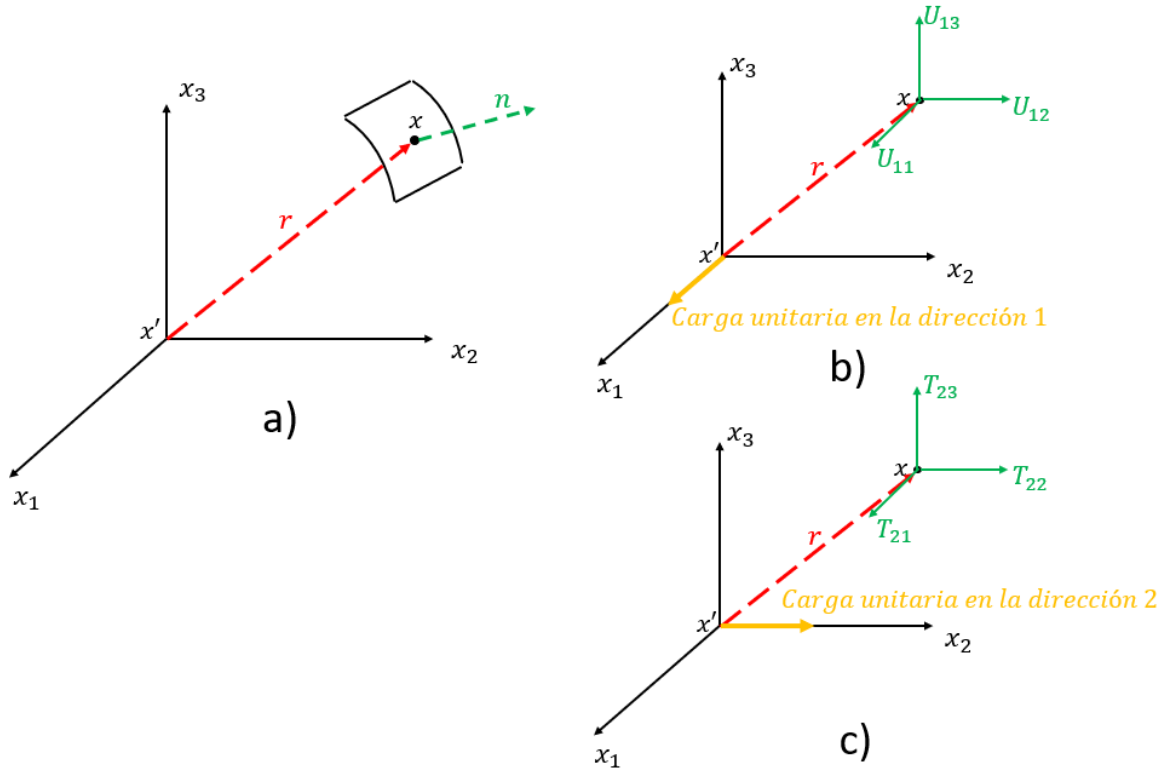
$r \equiv$ representa la distancia entre el punto de aplicación de la carga x' hasta el punto de interés x , es decir, $r(x', x) = \sqrt{r_i r_i}$, $r_i = x_i(x) - x_i(x')$.

$n \equiv$ es el vector unitario normal al contorno Γ , definido como $\vec{n} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2$.

$r_{,k}n_{,k} = \vec{r} \cdot \vec{n} = \cos(\theta)$, en donde θ representa el ángulo entre los dos vectores.

En las soluciones fundamentales es importante destacar que U_{ij} solo depende de r cuando $i = j$. También es importante reconocer el significado físico de las soluciones fundamentales, ya que estas representan el efecto de la carga puntual aplicada en x' en la dirección i , en el punto de interés x en la dirección j , de la forma representada en la siguiente figura:

Figura 14. Significado Físico de las soluciones fundamentales, a) puntos de referencia, b) Ejemplo solución fundamental de desplazamientos, c) Ejemplo solución fundamental de tracciones.



Fuente: Elaboración propia.

La formulación de las ecuaciones integrales de contorno parte de la identidad de Somigliana, dada por:

$$u_i(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ij}(x', x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (57)$$

Si no se consideran las fuerzas de volumen b_j :

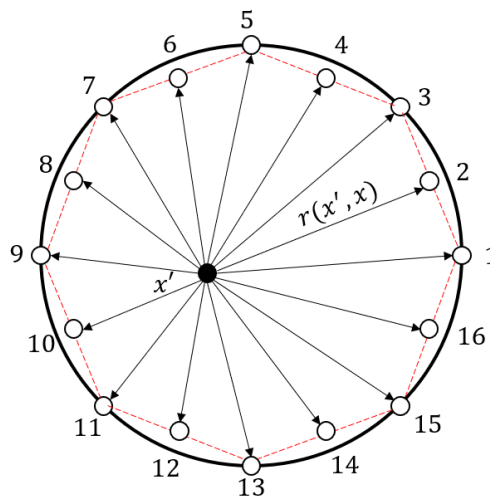
$$u_i(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (58)$$

Esta expresión permite calcular los desplazamientos en un punto interno $x' \in \Omega$, si se conocen todos los valores de las tracciones y los desplazamientos en cada punto del contorno. En la figura 15 puede observarse un ejemplo de aplicación de la

identidad de Somigliana para encontrar los desplazamientos en el punto x' en un cuerpo cuyo contorno se ha discretizado con elementos cuadráticos continuos. Debe notarse que la distancia r , dada por las soluciones fundamentales (55) y (56) entre el punto de interés x' y un punto en el contorno x , es siempre mayor y diferente de 0 ($r \neq 0$), por lo tanto, las integrales que se realizan no contienen ninguna singularidad. Aunque la identidad de Somigliana es de gran utilidad una vez se conocen todas las variables en el contorno, esta expresión no da solución al problema general mixto de contorno (figura 12), en donde el contorno del elemento se divide en 2, de manera $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$:

- ✓ Γ_u : Parte del contorno donde se conocen los desplazamientos, pero se desconocen las tracciones.
- ✓ Γ_t : Parte del contorno donde se conocen las tracciones, pero se desconocen los desplazamientos.

Figura 15. Ejemplo de aplicación de la identidad de Somigliana para un contorno discretizado con elementos cuadráticos rectos.



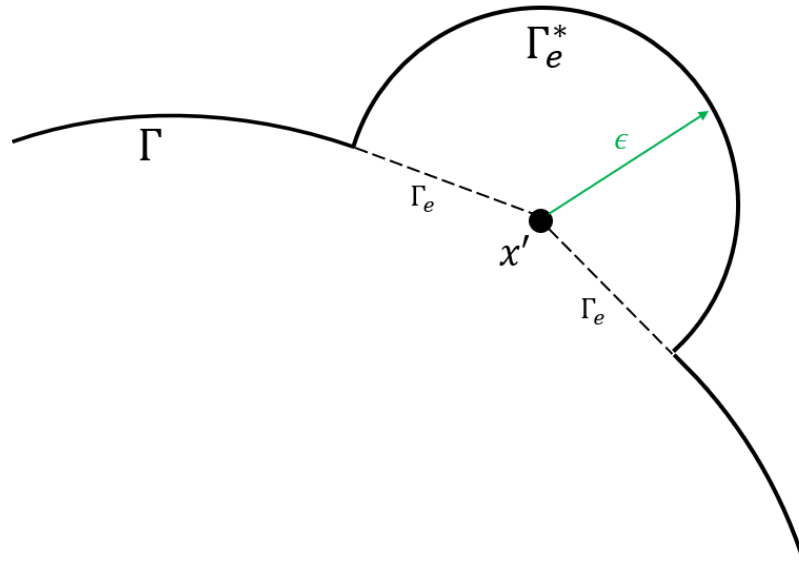
Fuente: Elaboración propia.

Por esta razón, es necesario obtener una expresión que permita calcular los parámetros desconocidos en el contorno del cuerpo antes de poder aplicar la

identidad de Somigliana, expresión que será llamada ecuación integral de contorno y se obtiene llevando el punto de interés x' al contorno del cuerpo, prestando especial atención a la indeterminación de las integrales producto de que la distancia r tiende a 0 al momento de integrar sobre el mismo punto ($r \rightarrow 0$). Este proceso se realiza llevando el punto de interés al contorno²⁴, aumentando el dominio del cuerpo por una región circular Γ_e^* con radio ϵ centrada en la posición x' (Figura 16), de forma que $\Gamma = (\Gamma - \Gamma_e) + \Gamma_e^*$ y se resuelve $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ (58):

$$u_i(x') + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_e + \Gamma_e^*} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_e + \Gamma_e^*} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (59)$$

Figura 16. Punto de interés x' llevado al contorno.



Fuente: Elaboración propia.

²⁴ CRUSE, T.A. Boundary-Integral Equation Formulation and Solution. En: *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. vol. 1. [en línea]. Dordrecht: Springer, 1988. pp.17-44. ISBN 978-94-009-1385-1. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-94-009-1385-1_3.

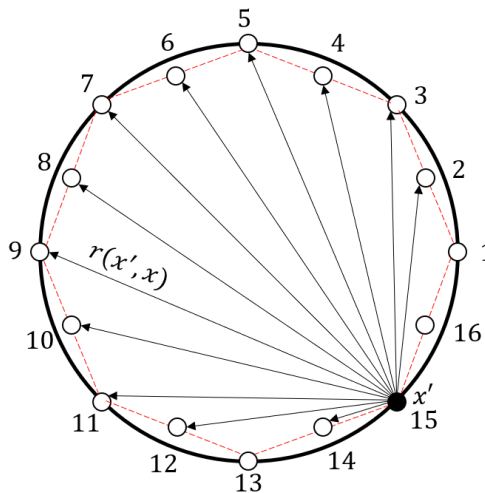
Resolviendo se llega a obtener **la ecuación integral de contorno para desplazamientos**:

$$C_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x)d\Gamma(x) \quad (60)$$

Donde $C_{ij}(x')$ esta dado por $C_{ij}(x') = \delta_{ij} + A_{ij}(x')$, $A_{ij}(x')$ es una factor que depende de la geometría en el punto y de las constantes elásticas, para un contorno suave $C_{ij}(x') = \delta_{ij}/2$.

Obsérvese que si la expresión (60) se aplica para cada punto en el contorno del elemento (Figura 17), se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que, al ser resuelto, se logran conocer todas las tracciones y desplazamiento en el contorno. Una vez se conozcan los resultados en todo el contorno, la identidad de Somigliana (58) se aplica para calcular los desplazamientos en cualquier punto interno de interés.

Figura 17. Ejemplo de aplicación de la ecuación integral de desplazamientos para un contorno discretizado con elementos cuadráticos rectos.



Fuente: Elaboración propia.

La ecuación integral de contorno para desplazamientos constituye el método clásico de elementos de contorno para elasticidad, sin embargo, para el análisis de cuerpos agrietados en donde las caras de la grieta son coincidentes, $\alpha = 180^\circ$ (figura 7). El hecho de aplicar una sola ecuación no es suficiente, ya que el sistema de ecuaciones se indetermina, esto ocurre debido a la existencia de puntos que tienen la misma posición, pero están ubicados en diferentes superficies, unos en la cara superior de la grieta y otros en la cara inferior. En otras palabras, el sistema es linealmente dependiente y no tiene solución única. Como solución a este problema surge el método dual de elementos de contorno, en donde, se cuenta con dos ecuaciones integrales de contorno independientes entre sí, una de estas ecuaciones es aplicada a los nodos de una cara de la grieta y la otra es aplicada a los nodos en la cara opuesta, formando un sistema lineal de ecuaciones que es independiente con solución única.

Una de las ecuaciones que se aplica en el método dual de elementos de contorno es la ecuación integral de desplazamientos (60), la otra ecuación a aplicar es la ecuación integral de tracciones, obtenida de la siguiente forma:

La identidad de Somigliana es diferenciable debido a que las soluciones fundamentales U_{ij} y T_{ij} son solo función de la distancia r y sus derivadas, utilizando la siguiente propiedad $r_{,i}|_{x'} = -r_{,i}|_x$, se lleva a cabo la derivada de la identidad de Somigliana con respecto a x , obteniendo:

$$u_{i,k}(x') - \int_{\Gamma} T_{ij,k}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = - \int_{\Gamma} U_{ij,k}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (61)$$

Si se introducen las ecuaciones constitutivas (19) en (61), se llega a la siguiente expresión para el cálculo de los esfuerzos en el punto $x' \in \Omega$.

$$\sigma_{ij}(x') + \int_{\Gamma} S_{kij}(x', x) u_k(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} D_{kij}(x', x) t_k(x) d\Gamma(x) \quad (62)$$

En donde $S_{kij}(x',x)$ y $D_{kij}(x',x)$ contienen las derivadas de las soluciones fundamentales $T_{ij}(x',x)$ y $U_{ij}(x',x)$, respectivamente. Al llevar el punto x' al contorno²⁵, del mismo modo que (59), se obtiene la **ecuación integral de tracciones para un contorno suave**:

$$\frac{1}{2}t_j(x') + n_i(x') \int_{\Gamma} S_{kij}(x',x)u_k(x)d\Gamma(x) = n_i(x') \int_{\Gamma} D_{kij}(x',x)t_k(x)d\Gamma(x) \quad (63)$$

Donde $n_i(x')$ hace referencia a la componente i de la normal en el punto de interés x' , las soluciones fundamentales de Kelvin para la ecuación de tracciones²⁴ están dadas por:

$$D_{kij}(x',x) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ki} - r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (64)$$

$$S_{kij}(x',x) = \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)r^2} [2r_{,l}n_l [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij}] \quad (65)$$

Entonces, al aplicar las 2 ecuaciones integrales de contorno (60,63) se llega a un sistema lineal de ecuaciones para resolver las tracciones y desplazamientos en el contorno del cuerpo agrietado. No obstante, es vital tener presente que, al integrar sobre el contorno, también se integra el elemento donde se encuentra el punto de referencia (x'), es decir, se integra el nodo sobre él mismo. Si se analizan con atención todas las soluciones fundamentales $U_{ij}, T_{ij}, D_{kij}, S_{kij}$ puede observarse que, todas estas dependen de la distancia r ; al integrar el mismo elemento en el

²⁵ CISILINO, Adrián; BALDERRAMA, R. y MARTINEZ, M. Boundary element Method analysis of three dimensional thermoelastic fracture problems using the energy domain integral. *Journal of Applied Mechanics*. 2006, vol. 73, pp. 959-970.

que se encuentra el punto de colocación x' , se genera una singularidad, cuyo grado depende de la solución fundamental de la siguiente forma:

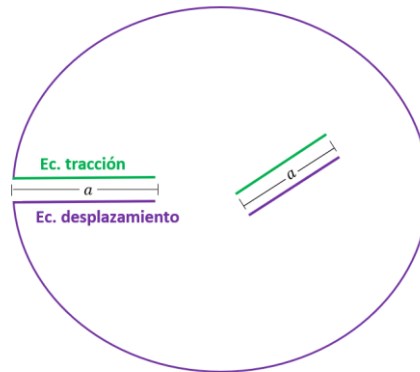
- I. La solución fundamental $U_{ij}(x', x)$ posee una singularidad débil producto del término $\ln(1/r)$.
- II. Las soluciones fundamentales $T_{ij}(x', x)$ y $D_{kij}(x', x)$ poseen una singularidad fuerte producto del término $1/r$.
- III. La solución fundamental $S_{kij}(x', x)$ posee una hiper singularidad producto del término $1/r^2$.

Para resolver las singularidades se abordan diferentes conceptos y simplificaciones que serán expuestas en la metodología del proyecto...véase 3....

2.3.2 Estrategia de aplicación de las ecuaciones integrales de contorno. Como se mencionó en el inciso anterior, para el análisis de cuerpos agrietados se utiliza el método dual de elementos de contorno al aplicar la ecuación integral de desplazamientos en una de las caras de la grieta y la ecuación integral de tracciones en la otra cara de la grieta. Para el resto del contorno del cuerpo se aplica la ecuación integral de desplazamientos, de la misma manera que lo trabaja MARTINEZ²⁶:

²⁶ MARTINEZ, M. Aportes al estudio de la mecánica de fractura utilizando el método de elementos de contorno. Caracas: Universidad Central de Venezuela, 2010. pp. 61-66.

Figura 18. Estrategia de aplicación del método dual de elementos de contorno.



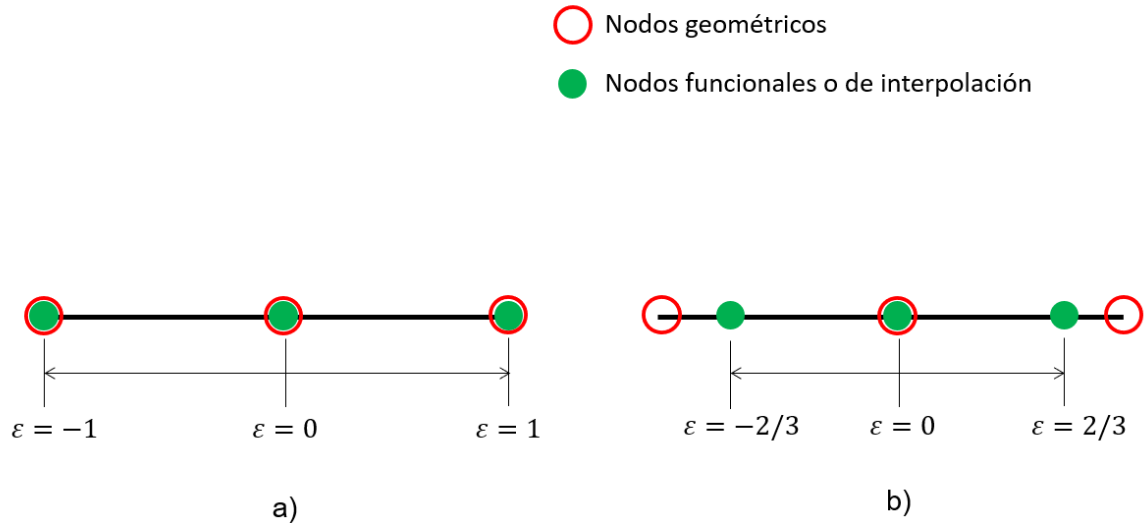
Fuente: Elaboración Propia

2.3.3 Estrategia de discretización. En este trabajo, se lidia con problemas en 2 dimensiones, en virtud del método de elementos de contorno, se deben utilizar elementos con 1 grado de dimensionalidad menos que el problema, es decir, se deben utilizar elementos unidimensionales para discretizar el contorno. Existen básicamente 3 elementos fundamentales que se utilizan para discretizar: elementos constantes, elementos lineales y elementos cuadráticos; estos últimos son los que mejor modelan el contorno, ya que, además de tener 3 nodos por elemento, el elemento cuadrático puede ser recto o curvo. Es por esta razón que en el presente trabajo se utilizan elementos cuadráticos en todo el contorno del cuerpo.

Para un elemento en específico, se cuenta con 2 funciones fundamentales: Las funciones de forma, las cuales discretizan la geometría, y las funciones de interpolación que se encargan de establecer los valores nodales de las distintas variables que se trabajan. Cuando en un elemento se utilizan las mismas funciones de forma que de interpolación, el elemento se denomina isoparamétrico. Otra característica que debe tenerse en cuenta es, si el elemento es continuo o discontinuo (figura 19). En el primero de estos, los nodos geométricos son los mismos funcionales, mientras que, en los elementos discontinuos, los nodos funcionales de los extremos no están en las esquinas del elemento, sino que están

al interior de este, de esta manera se garantiza la suavidad en el contorno en estos nodos, necesaria para poder aplicar las ecuaciones integrales de contorno²⁷.

Figura 19. a) Elementos continuos, b) Elementos discontinuos.



Fuente: Elaboración propia.

Con esto en mente, se plantea la siguiente estrategia de discretización para cuerpos agrietados:

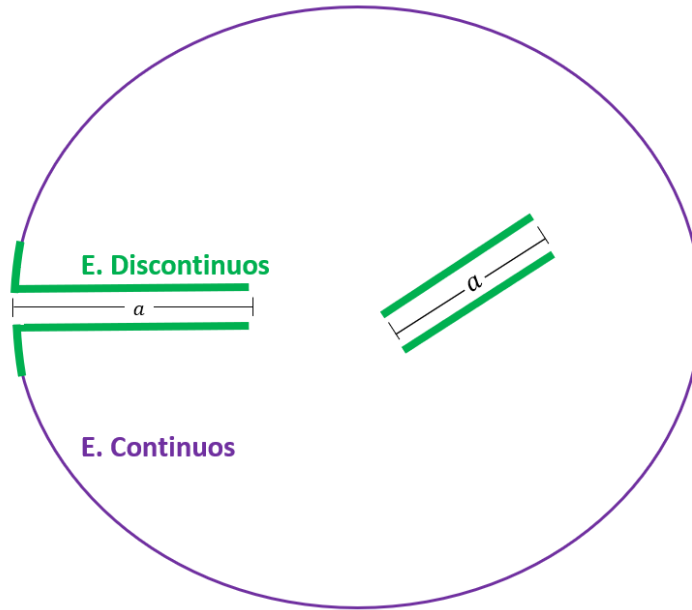
El cuerpo agrietado se discretiza con elementos cuadráticos en su totalidad, las caras de la grieta y los elementos inmediatamente juntos a estas se discretizan con elementos cuadráticos discontinuos, el resto del contorno se discretiza con elementos continuos (Figura 20). Es completamente necesario discretizar las caras de la grieta con elementos discontinuos debido a varias razones:

- I. Las ecuaciones integrales de contorno serán aplicadas para contornos suaves, si no se implementan elementos cuadráticos discontinuos en los cambios de sección aledaños a la grieta, así como en las caras de esta, no se pueden aplicar estas ecuaciones.

²⁷ Ibid., pp.66-67.

- II. Para poder trabajar las integrales singulares e hiper singulares bajo el concepto de integrales de Cauchy y Hadamard²⁸.

Figura 20. Estrategia de discretización.

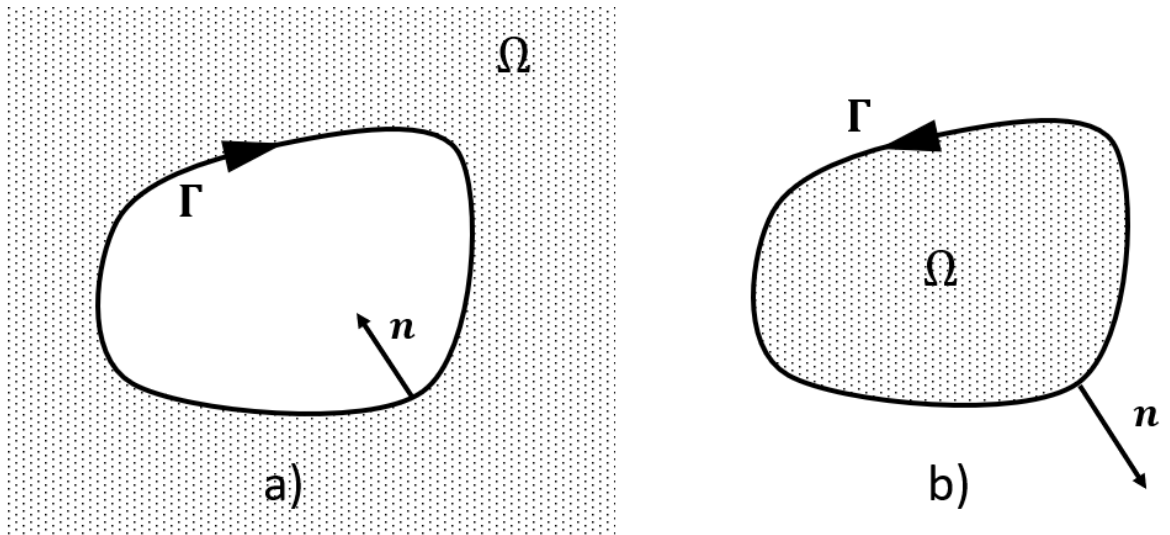


Fuente: Elaboración propia.

Con respecto a la dirección de discretización, se tienen 2 casos específicos (Figura 21), si se discretiza en el sentido de las manecillas del reloj se está tomando el dominio como la región por fuera del contorno, mientras que si se discretiza en el sentido contrario a las manecillas del reloj, se está tomando el dominio como la región encerrada por el contorno. Esta característica es importante tenerla en cuenta al momento de modelar cuerpos que contengan huecos u orificios de cualquier forma, en este caso, el contorno exterior de la pieza estaría discretizado en el sentido contrario de las manecillas, mientras que los huecos y orificios se discretizan en el sentido de las manecillas del reloj.

²⁸ PORTELA, A. op.cit. pp.53-55.

Figura 21. Dominio obtenido según la dirección de discretización.

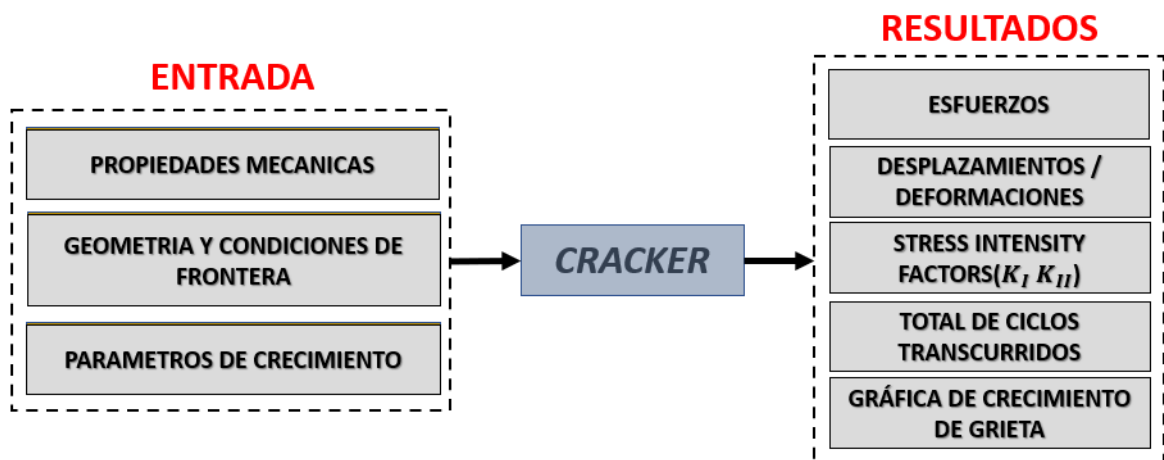


Fuente: Elaboración propia.

3. METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta la metodología y el desarrollo del proyecto. Como se mencionó en el capítulo anterior, se necesita de un método numérico para poder dar solución a problemas generales de cuerpos agrietados sujetos a condiciones mixtas de frontera. En este proyecto se utiliza el método dual de elementos de contorno junto con los fundamentos de la mecánica de la fractura lineal elástica para obtener los resultados, con los cuales se estudian los objetivos. Se realiza una modificación (ANEXO I) al programa en código abierto *CRACKER* realizado por PORTELA²⁹, en donde se da solución al problema de crecimiento de grieta de forma incremental, es decir, se establece la longitud de crecimiento y en función de esta variable se calculan las demás. A continuación, se presenta de forma esquemática el proceso de análisis de cuerpos agrietados que se realiza en el proyecto:

Figura 22. Análisis general de cuerpos agrietados.



Fuente: Elaboración propia.

Para realizar el análisis de cuerpos agrietados se deben conocer las propiedades mecánicas del material, la geometría del cuerpo, las condiciones de frontera a las que está expuesto, y los parámetros de crecimiento con los que se modelará la

²⁹ PORTELA, A. op.cit. 176 p.

propagación de la grieta por fatiga; estas condiciones constituyen las variables de entrada al programa. Además de las variables mencionadas anteriormente, debe suministrarse al programa los datos pertinentes a la malla con la cual se ha discretizado el cuerpo, todos estos datos se unifican en un solo archivo que es generado mediante el pre-proceso de la simulación.

El bloque principal de la simulación se lleva a en *CRACKER*, allí se realiza el análisis mediante el método dual de elementos de contorno, se computa la integral J, los factores de intensidad de esfuerzo, se utilizan las leyes de crecimiento de grieta para predecir la vida útil del componente, entre otras funciones. Finalmente, los resultados obtenidos en el bloque central de la simulación son visualizados gráficamente en el Postproceso. A continuación, se abordan de manera detallada las 3 etapas de la simulación, sin hacer énfasis en la operación del programa, para este fin, se ha dispuesto un manual de operación el cual se encuentra en los anexos del proyecto.

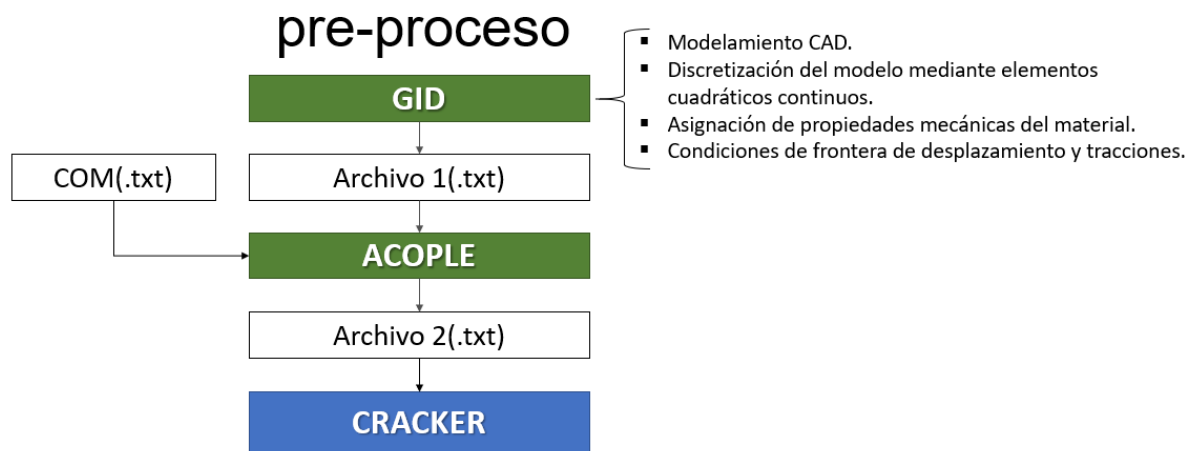
3.1 PRE-PROCESO

Al examinar detalladamente el pre-proceso que utiliza el programa original, se observa un proceso bastante tedioso, ya que, se ingresan manualmente mediante un archivo de texto todos los parámetros correspondientes a: propiedades mecánicas del material, malla de discretización, condiciones de frontera, entre otros; razón por la cual, se decide cambiar el pre-proceso del programa haciendo uso del software GID³⁰ en la versión 13.0.4 de Windows x64 bits. Mediante este software se realiza el modelamiento CAD del cuerpo agrietado, se genera la malla de discretización, se introducen las condiciones de frontera de desplazamientos y tracciones y finalmente, se genera un archivo tipo texto que contiene toda esta información, misma extensión que se utiliza para ser leído por el programa *CRACKER*.

³⁰ GID, the personal pre and post processor. [sitio Web]. [Recuperado en 12 junio 2020]. Disponible en: <https://www.gidhome.com/>.

Con el objetivo de no modificar en gran manera la lectura de datos en el programa principal, se realiza un programa auxiliar denominado *ACOPLE.exe* que se encarga de acomodar los datos presentes en el archivo de texto anteriormente generado por el *GID*, en un nuevo archivo que contiene todos los datos en el orden necesario para que puedan ser leídos correctamente por el programa, es decir, el pre-proceso general se reduce al procedimiento expuesto en la figura 23.

Figura 23. Pre-proceso general.



Fuente: Elaboración propia.

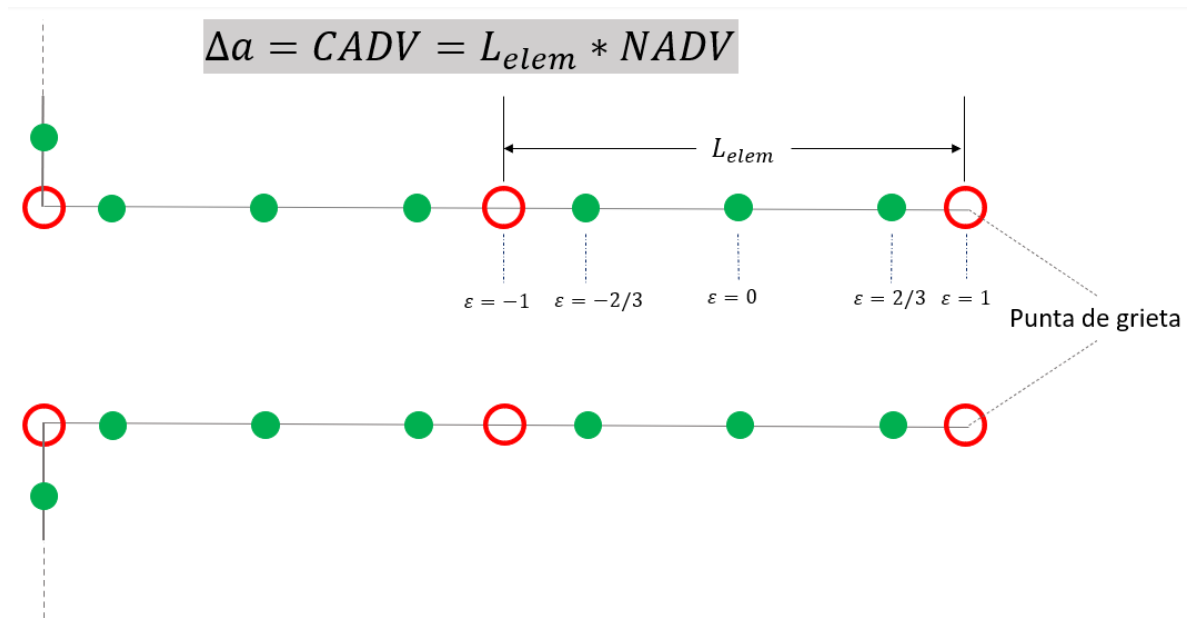
El software *GID* está enfocado hacia un análisis elástico de mecánica clásica, sin embargo, no tiene la posibilidad de ingresar parámetros de crecimiento de grieta, los cuales son impuestos por un archivo complementario (figura 23) que también es leído por *ACOPLE.exe*. Dentro de este archivo complementario se introducen unos parámetros que definen el análisis a realizar y el crecimiento general de la grieta, los más relevantes son:

- I. NCRI: Se refiere al número de veces que la grieta crecerá una longitud Δa .
- II. NADV: En función del tamaño del elemento en la punta de la grieta, se impone que la longitud de cada incremento es: $\Delta a = NADV * L_{elem}$ (figura 24).
- III. SRAT: La relación de cargas de fatiga $R = P_{min}/P_{max}$.

- IV. C y m: Constantes de las leyes de crecimiento que serán analizadas. Si se trata de la ley de Klesnil o Forman, es necesario ingresar un parámetro adicional, el umbral de fractura o la tenacidad a la fractura, respectivamente.

En el manual de operación se puede encontrar una descripción detallada sobre el archivo complementario.

Figura 24. Asignación de la longitud de crecimiento.



Fuente: Elaboración propia.

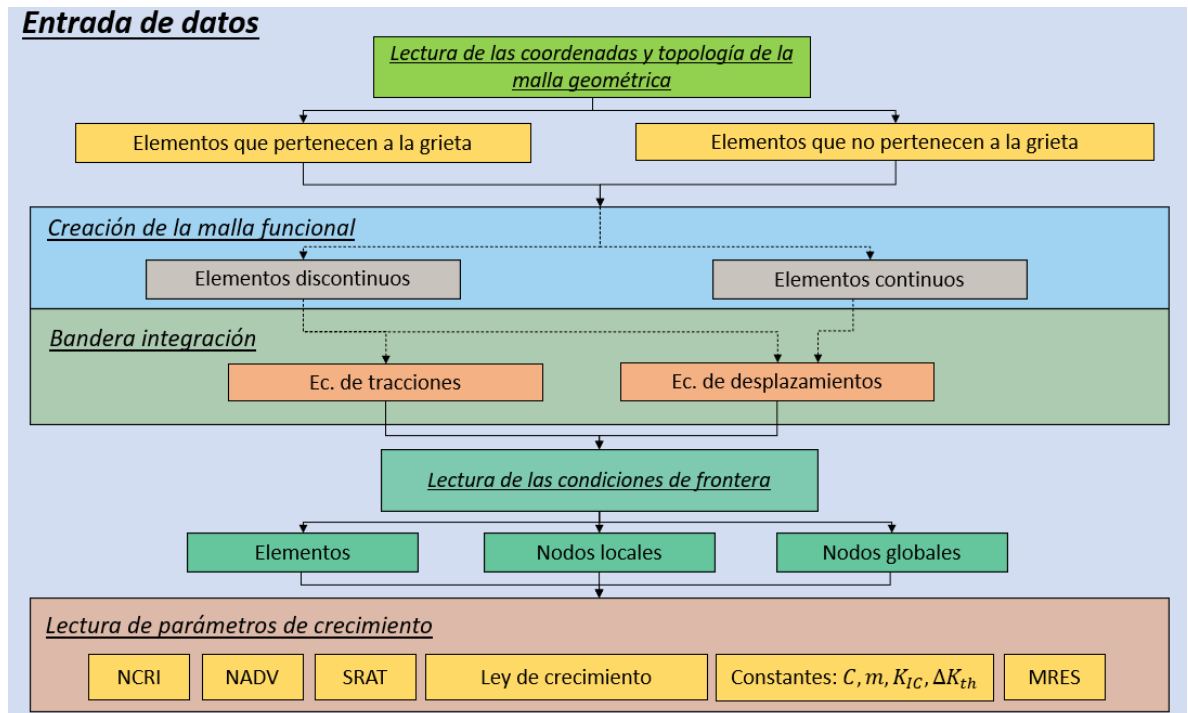
3.2 PROGRAMA CRACKER

En su totalidad, el programa *cracker* puede realizar análisis de mecánica clásica elástica, análisis de mecánica de fractura bajo cargas estáticas, y análisis de crecimiento de grieta con cargas de fatiga de amplitud constante. Antes de abordar el programa en toda su extensión, resulta pertinente presentar sus características principales, así como sus limitaciones incluyendo las modificaciones realizadas en el presente proyecto:

- ✓ Se analizan cuerpos agrietados en 2 dimensiones bajo estado plano de deformación ($\varepsilon_z = 0$) o estado plano de esfuerzos ($\sigma_z = 0$).
- ✓ Se utiliza el método dual de elementos de contorno para solucionar las tracciones y desplazamientos en la frontera, mediante un postproceso se obtienen los resultados en los puntos internos de interés.
- ✓ Bajo carga estática el programa sirve para analizar cuerpos con una o múltiples grietas.
- ✓ Para el crecimiento de grieta bajo cargas de fatiga, solo se puede analizar el crecimiento de una grieta.
- ✓ Se analizan grietas con caras coincidentes ($\alpha = 180^\circ$) libres de tracción.
- ✓ Para el cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo se computa la integral J ...véase 2.2.6...
- ✓ Para calcular la dirección de crecimiento de grieta se utiliza el criterio de máximo esfuerzo tangencial...véase 2.2.5...
- ✓ El crecimiento de grietas se puede predecir con el modelo de Paris, Klesnil-Lukas o Forman.

3.2.1 Lectura de datos. El primer proceso que se realiza en el programa es la lectura de los datos contenidos en el archivo generado por *ACOPLE*. Esta parte del programa se realiza dentro de la subrutina *DINPUT*, se ejecutan las acciones presentadas en la figura 25 en donde se empieza leyendo las coordenadas nodales y la topología de la malla. Con esta información se discrepan los elementos que pertenecen a la grieta de los que no, misma característica que sirve para crear la malla funcional.

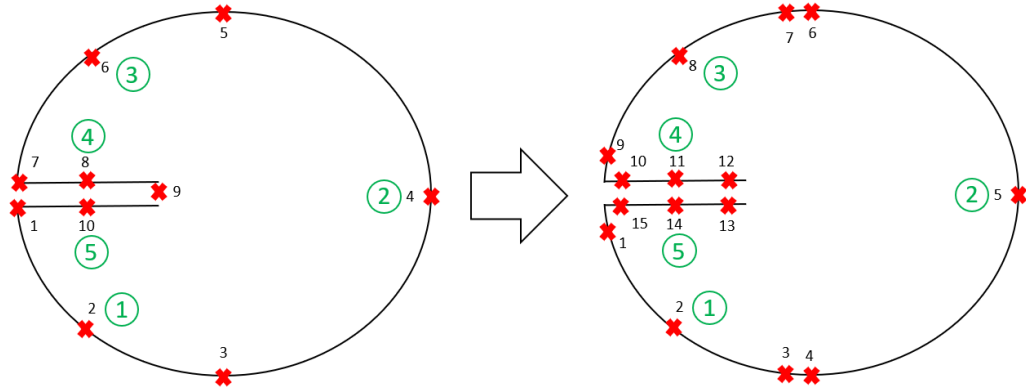
Figura 25. Diagrama general de lectura de datos.



Fuente: Elaboración propia.

Por malla funcional se entiende a la discretización presentada en la sección 2.3.3, en donde se utilizan elementos discontinuos para aquellos pertenecientes a la grieta e inmediatamente aledaños y elementos continuos para el resto del contorno (véase figura 26). También se asigna a cada elemento la ecuación integral que será utilizada, tal y como se presentó en 2.3.2. Una vez se ha creado la malla funcional, se leen las condiciones de frontera, estas pueden ser leídas de 3 formas: Por elementos, por nodos locales, y por nodos globales. Debe tenerse en cuenta que, los desplazamientos son absolutos, mientras que la tracción en un nodo depende de la normal al elemento que lo contiene, es decir, las tracciones en un nodo que esté en una esquina, son diferentes antes y después del mismo. Finalmente se leen los parámetros de crecimiento.

Figura 26. Ejemplo malla funcional.



Fuente: Elaboración propia.

3.2.2 Análisis dual de elementos de contorno (boundary elements analysis B.E.ANAL). Como se ha mencionado, se utiliza el método dual de elementos de contorno para solucionar las incógnitas en la frontera del cuerpo, y, una vez se conozcan todas las variables en la frontera, se computan resultados para puntos internos en donde se evaluará la integral J , parámetro con el cual se calculan los factores de intensidad de esfuerzo; todos los procesos que se mencionan se realizan dentro de la subrutina *BEANAL*.

Para solucionar las incógnitas en la frontera del cuerpo se deben aplicar las dos ecuaciones integrales de contorno (60) y (63), siguiendo la discretización mencionada ...véase 2.3.3... y la estrategia de aplicación de las ecuaciones en las caras de la grieta. Se parte de un cuerpo que ya ha sido discretizado con elementos unidimensionales continuos o discontinuos. Según el contorno, se conocen desplazamientos o tracciones en toda la frontera del cuerpo, en donde deben calcularse los parámetros faltantes, es decir, en donde se conocen tracciones deben calcularse los desplazamientos, y viceversa. De manera general se deben realizar 3 pasos para la solución del problema general mixto de contorno: Integración, ordenamiento del sistema de ecuaciones y solución.

3.2.2.1 Integración. Deben solucionarse las integrales presentes en las ecuaciones (60) y (63) de contorno, en este inciso se mencionan conceptos fundamentales para la integración y se presentan las estrategias para computarla. Debido a que el contorno del cuerpo fue discretizado con elementos cuadráticos, se cuenta con las siguientes funciones de forma e interpolación. Nótese que las funciones se hacen 1 cuando se evalúan en el nodo respectivo y 0 en los otros dos nodos del mismo elemento.

Para los elementos continuos:

$$N_1 = \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon - 1) , N_2 = 1 - \varepsilon^2 , N_3 = \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon + 1) \quad (66)$$

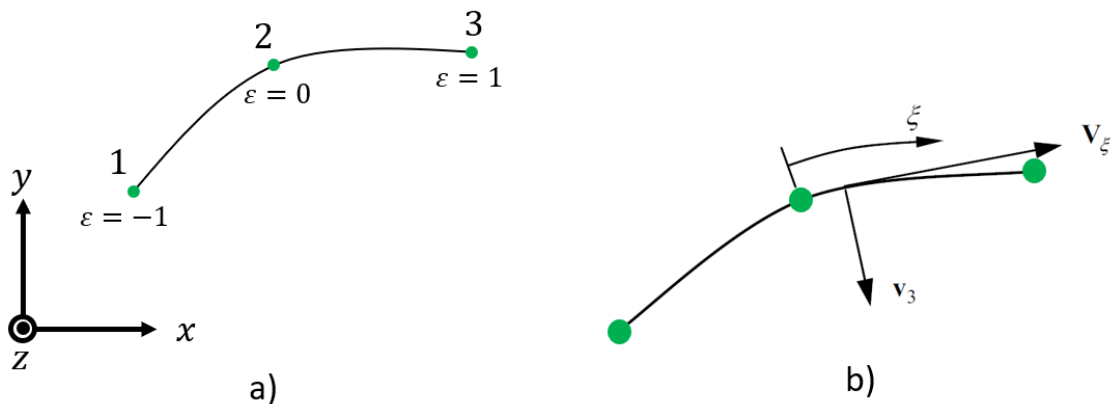
Para los elementos discontinuos con nodos funcionales en $\varepsilon = \mp 2/3$:

$$N_1 = \varepsilon\left(\frac{9}{8}\varepsilon - \frac{3}{4}\right) , N_2 = \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon\right)\left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon\right) , N_3 = \varepsilon\left(\frac{9}{8}\varepsilon + \frac{3}{4}\right) \quad (67)$$

En donde:

$\varepsilon =$ Variable en el sistema coordenado local $[-1,1]$, véase figura 27.

Figura 27. a) Sistema global y local de coordenadas. b) Vectores tangente y normal al elemento.



Fuente: BEER, Gernot.; SMITH, Ian. & DUENSER, Christian. The boundary elements Method with programming. Germany: Springer, 2008.p.54.

Con estas funciones se discretizan tanto la geometría (funciones de forma) como las variables de interés (funciones de interpolación) para un elemento e de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x(\varepsilon) \\ y(\varepsilon) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N N_n(\varepsilon) * \begin{bmatrix} x_n^e \\ y_n^e \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\begin{bmatrix} u_j^e(\varepsilon) \\ t_j^e(\varepsilon) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N N_n(\varepsilon) * \begin{bmatrix} u_j^e \\ t_j^e \end{bmatrix} \quad (69)$$

Otros parámetros de interés son los vectores normal y tangente al elemento, de donde se obtendrá el Jacobiano. El vector tangente \vec{V}_ε se calcula:

$$\vec{V}_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial N_n}{\partial \varepsilon} \begin{bmatrix} x_n^e \\ y_n^e \\ z_n^e \end{bmatrix} \quad (70)$$

El vector normal al elemento \vec{V}_3 se calcula como el producto vectorial entre el vector tangente y el eje Z unitario, de manera que:

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_\varepsilon \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{3x} \\ V_{3y} \\ V_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \varepsilon} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \varepsilon} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \varepsilon} y_3 \\ -\left(\frac{\partial N_1}{\partial \varepsilon} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \varepsilon} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \varepsilon} x_3 \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Analíticamente el Jacobiano se calcula como la magnitud del vector normal al elemento.

$$Jacobiano = J = |\vec{V}_3| = \sqrt{V_{3x}^2 + V_{3y}^2} \quad (72)$$

Su importancia recae en su significado físico. Representa la longitud real en el sistema global de coordenadas para $\Delta\varepsilon = 1$, es decir, es una transformación del

sistema global de coordenadas al sistema local de coordenadas en el elemento, de esta forma se llega a:

$$d\Gamma = J d\varepsilon \quad (73)$$

Mientras que las componentes del vector normal al elemento, necesarias para computar las soluciones fundamentales de Kelvin, se calculan como:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\vec{V}_3}{|\vec{V}_3|} \quad (74)$$

Para solucionar las integrales, se hace necesario discernir de 2 escenarios. El primer caso es cuando se integra un elemento diferente al que contiene el punto de colocación x' , en este caso, la distancia r es positiva, siempre mayor a 0, por lo tanto, no hay singularidades que considerar. Las integrales pueden ser computadas de manera sencilla siguiendo el procedimiento que se explica a continuación, para la integral del lado izquierdo de la igualdad en la ecuación integral de desplazamientos (60), se contempla:

$$\int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) \quad (75)$$

Cuando se discretiza el contorno en un numero E de elementos, la ecuación (75) se evalúa como la sumatoria de las integrales para cada elemento:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Gamma^e} T_{ij}(x', x^e) u_j^e(x^e) d\Gamma^e(x) \quad (76)$$

Nótese que el superíndice e en algunas variables hace referencia a que estas dependen del elemento evaluado. Ahora bien, resulta conveniente expresar la variable de interés $u_j^e(x^e)$ y el diferencial de contorno $d\Gamma^e$ en términos del sistema local de coordenadas, para esto, se introducen (69) y (73) en (76):

$$\sum_{e=1}^E \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_f} T_{ij}(x', \varepsilon) \sum_{n=1}^3 N_n^e(\varepsilon) u_{j_n}^e J^e(\varepsilon) d\varepsilon \quad (77)$$

Reordenando la expresión anterior, se obtiene:

$$\sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^3 [\Delta T_{ij_n}^e * u_{j_n}^e] \quad (78)$$

Donde:

$$\Delta T_{ij_n}^e = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_f} T_{ij}(x', \varepsilon) N_n^e(\varepsilon) J^e(\varepsilon) d\varepsilon$$

Se utiliza la integración por cuadratura de Gauss³¹ para resolver la integral anterior:

$$I = \int_{-1}^1 f(\varepsilon) * d\varepsilon = \sum_{m=1}^M f(\varepsilon_m) * W_m \quad (79)$$

En donde ε_m son los diferentes puntos de la cuadratura donde se evalúa la función y W_m los pesos por los cuales se multiplican. Obsérvese que la integral a solucionar en la expresión (78) está acotada entre ε_i y ε_f , debido al cambio del sistema coordinado global al sistema coordinado local $\varepsilon_i = -1$ y $\varepsilon_f = 1$. La regla de cuadratura de Gauss puede ser utilizada de manera directa de la forma propuesta por (79) para todas las integrales, siempre y cuando, no se integre el punto de colocación sobre el mismo, es decir, sin computar las soluciones fundamentales $T_{ij}(x', x')$, $U_{ij}(x', x')$, $S_{kij}(x', x')$ y $D_{kij}(x', x')$. De esta manera, la integral a resolver en la ecuación (78):

³¹ BEER, Gernot.; SMITH, Ian. & DUENSER, Christian. The boundary elements Method with programming. Germany: Springer, 2008.p.60.

$$\Delta T_{ijn}^e = \sum_{m=1}^M T_{ij}(x', \varepsilon_m) N_n^e(\varepsilon_m) J^e(\varepsilon_m) W_m \quad (80)$$

En este trabajo se utilizan 8 puntos de Gauss para la integración. Cuyas coordenadas y pesos están dadas por el siguiente cuadro:

Cuadro 2. Coordenadas y pesos para la integración por cuadratura de Gauss.

ε_m	W_m
∓ 0.183434642495650	0.362683783378362
∓ 0.525532409916329	0.313706645877887
∓ 0.796666477413627	0.222381034453374
∓ 0.960289856497536	0.101228536290376

Fuente: BREBBIA, C.A y DOMINGUEZ, J. Boundary elements an introductory course, second edition. Boston: WIT press, 1998. p. 288.

Entonces, el enfoque que se ha utilizado puede ser expresado para el cálculo de la integral a la derecha de la igualdad en la ecuación integral de desplazamientos, arrojando la siguiente expresión:

$$\int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) = \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^3 [\Delta U_{ijn}^e * t_{jn}^e] \quad (81)$$

Donde:

$$\Delta U_{ijn}^e = \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_f} U_{ij}(x', \varepsilon) N_n^e(\varepsilon) J^e(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{m=1}^M U_{ij}(x', \varepsilon_m) N_n^e(\varepsilon_m) J^e(\varepsilon_m) W_m$$

También se pueden calcular mediante la cuadratura de Gauss todas las integrales de la identidad de Somigliana (58), las integrales de las expresiones (61) y (62), con las cuales se calculan los desplazamientos, sus derivadas y los esfuerzos en puntos internos; parámetros necesarios para evaluar la integral J. Las integrales presentes en la ecuación integral de tracciones también pueden ser evaluadas mediante la

cuadratura de Gauss, con la misma restricción, en otras palabras, sin evaluar singularidades.

Se debe discutir la formación del sistema lineal de ecuaciones que, al solucionarlo, se obtienen todos los parámetros en el contorno. Obsérvese que la ecuación integral de desplazamientos es evaluada para todos los puntos en el contorno, es decir, x' va desde $I = 1$ hasta el número total de nodos $NNOD$. Producto de las soluciones fundamentales, las funciones de forma y la estrategia de integración, se evalúan los coeficientes $\Delta T_{ij_n}^e$ y $\Delta U_{ij_n}^e$ para un determinado elemento e , una función de forma n y unas soluciones fundamentales T_{ij} y U_{ij} , respectivamente; estos coeficientes corresponden a valores reales que multiplican los desplazamientos y tracciones nodales del elemento que se ha integrado, formando un sistema lineal de ecuaciones que es agrupado de manera matricial. En la figura 28 se presenta un ejemplo de los coeficientes obtenidos al realizar la integración del elemento 1 con respecto al nodo 1; para cada elemento se calculan 6 columnas, 2 para cada nodo y su respectivo grado de libertad, mientras que para cada punto de colocación se computan 2 filas.

Figura 28. Coeficientes en el sistema lineal de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{xx_1}^1 & \Delta T_{xy_1}^1 & \Delta T_{xx_2}^1 & \Delta T_{xy_1}^1 & \Delta T_{xx_3}^1 & \Delta T_{xy_3}^1 & \dots \\ \Delta T_{yx_1}^1 & \Delta T_{yy_1}^1 & \Delta T_{yx_2}^1 & \Delta T_{yy_2}^1 & \Delta T_{yx_3}^1 & \Delta T_{yy_3}^1 & \dots \\ & & \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x_1}^1 \\ u_{y_1}^1 \\ u_{x_2}^1 \\ u_{y_2}^1 \\ u_{x_3}^1 \\ u_{y_3}^1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta U_{xx_1}^1 & \Delta U_{xy_1}^1 & \Delta U_{xx_2}^1 & \Delta U_{xy_1}^1 & \Delta U_{xx_3}^1 & \Delta U_{xy_3}^1 & \dots \\ \Delta U_{yx_1}^1 & \Delta U_{yy_1}^1 & \Delta U_{yx_2}^1 & \Delta U_{yy_2}^1 & \Delta U_{yx_3}^1 & \Delta U_{yy_3}^1 & \dots \\ & & \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{x_1}^1 \\ t_{y_1}^1 \\ t_{x_2}^1 \\ t_{y_2}^1 \\ t_{x_3}^1 \\ t_{y_3}^1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

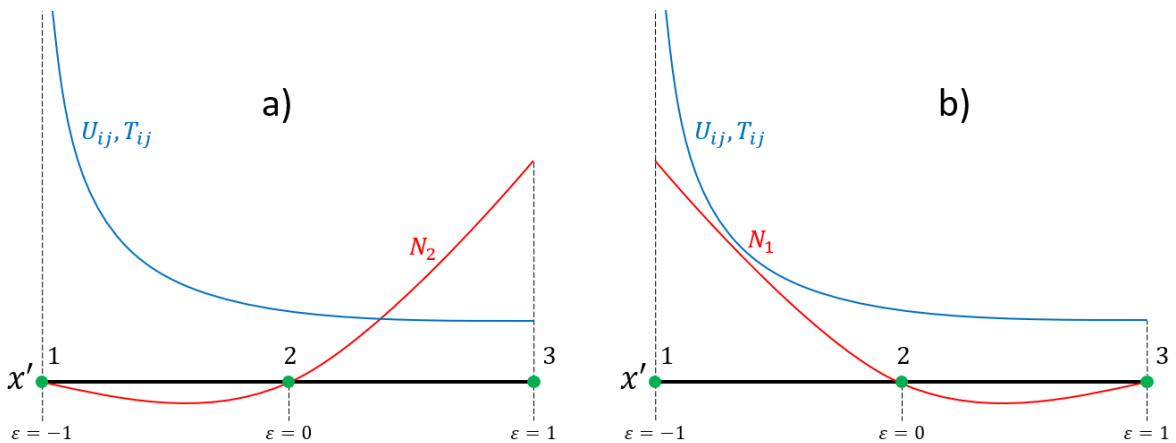
Fuente: Elaboración propia.

Cuando se forma el sistema de ecuaciones lineales de manera matricial, tal y como se expone en la figura 28, debe sumarse a los coeficientes de la matriz $\Delta T_{ij_n}^e$, cuando $(i = j)$, el valor de $C_{ij}(x')$, es decir, 0.5 para un contorno suave; este

procedimiento no debe hacerse si se utiliza el enfoque de cuerpo rígido para efectuar de manera indirecta la integral singular.

Hasta ahora, se ha tratado la evaluación de las integrales cuando no está presente una singularidad. Como se mencionó en el capítulo de formulación del método dual de elemento de contorno ...véase 2.3.1... se lidian singularidades débiles, fuertes e hiper singularidades, las cuales se presentan una vez se integra el elemento al que pertenece el punto de colocación x' . Primero se resolverá la integral que contiene la singularidad débil, presente cuando se computa la solución fundamental de desplazamientos $U_{ij}(x', x')$; en este caso, considere la integración del elemento que contiene al punto de colocación, en el cual existen 2 casos, tal y como se presenta en la siguiente figura:

Figura 29. Casos en la integración del mismo elemento al que pertenece el punto de colocación. a) integración de un nodo diferente al x' , integración del nodo x' sobre sí mismo.



Fuente: Elaboración propia.

El primer caso corresponde a la integración del producto de una función de interpolación diferente a la correspondiente al punto de colocación con la solución fundamental de desplazamientos, en este caso, nótese que la solución fundamental se hace cada vez mayor a medida que se acerca al punto de colocación debido al parámetro $\ln(1/r)$. Sin embargo, la función de interpolación disminuye su magnitud

a medida que se acerca al mismo punto, por esta característica, se puede utilizar la cuadratura de Gauss para la integración. El segundo caso hace referencia a la integración del producto de la solución fundamental y la función de interpolación correspondiente al punto de colocación, en este caso, se genera una singularidad débil debido a que el integrando tiende a infinito, a medida que se acerca al punto x' ; para lidiar con esta singularidad se utiliza la regla de Gauss-Laguerre³² para la integración, expuesta como:

$$I = \int_0^1 f(\bar{\varepsilon}) * Ln\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) * d\varepsilon = \sum_{m=1}^M f(\bar{\varepsilon}_m) * \bar{W}_m \quad (82)$$

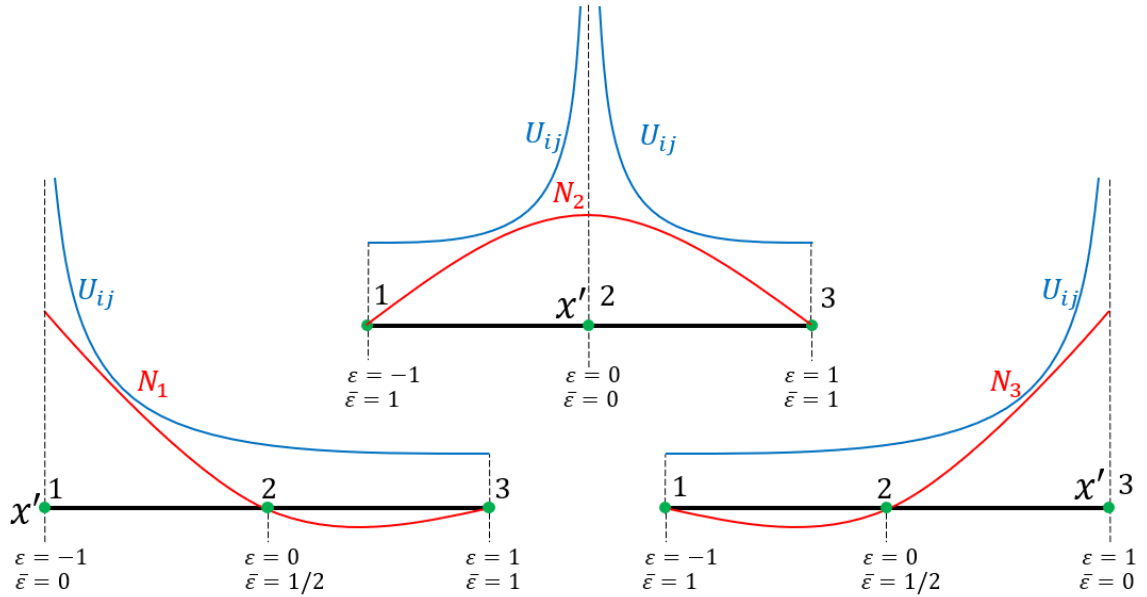
Observe la similitud de la expresión (82) con la regla de la cuadratura de Gauss, no obstante, en la integración por Gauss-Laguerre se toma el termino $\ln(1/\bar{\varepsilon})$ para tener en cuenta la singularidad, los límites de integración se establecen de 0 a 1, siendo el punto donde se genera la singularidad $\bar{\varepsilon} = 0$. Para satisfacer esta condición se debe generar un cambio en las funciones de forma hasta ahora expuestas:

1. Cuando el punto x' corresponde al nodo 1 del elemento, $\varepsilon = 2\bar{\varepsilon} - 1$.
2. Cuando el punto x' corresponde al nodo 3 del elemento, $\varepsilon = 1 - 2\bar{\varepsilon}$.
3. Cuando el punto x' corresponde al nodo central del elemento, este debe dividirse en 2 subregiones, una antes y una después del nodo central, de manera que antes del nodo $\varepsilon = -\bar{\varepsilon}$ y después $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$.

Para apreciar mejor los cambios en el sistema coordenado local, observe la siguiente figura:

³² BEER, Gernot.; SMITH, Ian. & DUENSER, Christian. Op.cit. p.60.

Figura 30. Cambio en el sistema coordenado local para utilizar Gauss-Laguerre.



Fuente: Elaboración propia.

Si se expande la solución fundamental de desplazamiento $U_{ij}(x', x)$ aplicando la propiedad distributiva, se puede observar que el segundo término, el cual depende de las derivadas del vector r ($r_i r_j$), carece de singularidad, por lo tanto, este puede ser integrado por la cuadratura de Gauss de manera directa. El primer término, que sí depende de $\ln\left(\frac{1}{r}\right)$, se trata a continuación:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1 + v(3 - 4v)}{4\pi(1 - v)E} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} N_n^e(\varepsilon) J^e(\varepsilon) d\varepsilon \quad (83)$$

Nótese que la integral de la expresión (83) solo se computa cuando $i = j$. Ahora se hace necesario expresar a la distancia r como una función de ε , al trabajar con elementos rectos se encuentra que, $r = l^e \bar{\varepsilon}$ para los nodos de los extremos y $r = \frac{l^e \bar{\varepsilon}}{2}$ para el nodo central. Por lo tanto, se obtiene que:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1 + v(3 - 4v)}{4\pi(1 - v)E} \ln\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) \delta_{ij} N_n^e(\varepsilon) J^e(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{-1}^1 \frac{1 + v(3 - 4v)}{4\pi(1 - v)E} \ln\left(\frac{1}{l^e \bar{\varepsilon}}\right) \delta_{ij} N_n^e(\varepsilon) J^e(\varepsilon) d\varepsilon \quad (84)$$

Acátese que la integral de la derecha se calcula por cuadratura de Gauss y la integral de la derecha se computa por Gauss-Laguerre. Finalmente se utiliza el cambio en las funciones de interpolación:

$$\int_{-1}^1 \frac{1+v(3-4v)}{4\pi(1-v)E} \ln\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) N_n^e(\varepsilon) J^e(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^1 \frac{1+v(3-4v)}{4\pi(1-v)E} \ln\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) N_n^e(\bar{\varepsilon}) J^e(\bar{\varepsilon}) \left| \frac{d\varepsilon}{d\bar{\varepsilon}} \right|_n d\bar{\varepsilon} \quad (85)$$

Obteniendo:

$$= \frac{1+v(3-4v)}{4\pi(1-v)E} \left| \frac{d\varepsilon}{d\bar{\varepsilon}} \right|_n \sum_{m=1}^M N_n^e(\bar{\varepsilon}_m) J^e(\bar{\varepsilon}_m) \bar{W}_m \quad (86)$$

Es importante que el lector se fije cuidadosamente que el cambio de coordenadas que se ha mencionado es para elementos continuos con nodos en los extremos geométricos; para elementos discontinuos, se implementan unos cambios diferentes, teniendo en cuenta que, en los nodos de los extremos, debe optarse un enfoque similar al trabajado en el nodo central, es decir, debe integrarse antes y después del nodo, debido a que estos no se encuentran en los extremos geométricos. En este trabajo se utilizan 10 puntos de Gauss-Laguerre presentados en el siguiente cuadro:

Cuadro 3. Coordenadas y pesos para la integración por cuadratura de Gauss-Laguerre.

$\bar{\varepsilon}_m$	\bar{W}_m
$0.90425944 \times 10^{-2}$	0.12095474
$0.53971054 \times 10^{-1}$	0.18636310
0.13531134	0.19566066
0.24705169	0.17357723
0.38021171	0.13569597
0.52379159	$0.93647084 \times 10^{-1}$
0.66577472	$0.55787938 \times 10^{-1}$
0.79419019	$0.27159893 \times 10^{-1}$

0.89816102	$0.95151992 \times 10^{-2}$
0.96884798	$0.16381586 \times 10^{-2}$

Fuente: BREBBIA, C.A y DOMINGUEZ, J. Boundary elements an introductory course, second edition. Boston: WIT press, 1998. p. 291.

Ya se ha abordado la integración teniendo en cuenta la singularidad débil del término $\ln(1/r)$. Ahora se habla de un enfoque importante, conocido como la condición de cuerpo rígido, la cual se utiliza para evaluar de manera indirecta los coeficientes correspondientes a la integración del punto de colocación x' con respecto a si mismo en la primera integral de la ecuación (60). Si se considera un campo de desplazamientos constantes de manera que $u_j(x) = cte$, las tracciones en el cuerpo deben ser $t_j(x) = 0$. Por lo tanto, la ecuación integral de desplazamientos se reduce a:

$$C_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma(x) = 0 \quad (87)$$

La integral puede dividirse en 2, la integral del punto de colocación sobre sí mismo y la integral del resto del contorno:

$$C_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x')u_j(x')d\Gamma(x') = - \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma(x) \quad (88)$$

Por medio de este enfoque se pueden calcular los 4 coeficientes de la matriz $\Delta T_{ij_{n=x'}}^e$ que representan la integración del punto de colocación sobre sí mismo, efectuando la integral en el resto del contorno mediante cuadratura de Gauss, de esta manera, se evalúa de forma indirecta la singularidad, sin tener que tratarla numéricamente.

$$\Delta T_{ij_{n=x'}}^e u_j(x') = - \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma(x)$$

Este enfoque no es suficiente para calcular los coeficientes en un punto de colocación que esté ubicado en la superficie de la grieta, ya que siempre existirá un punto coincidente en la cara opuesta que no permite ejecutarlo. Con respecto al tratamiento de las integrales singulares e hiper singulares en un punto de colocación

que esté en las caras de la grieta, se ejecuta el procedimiento efectuado por PORTELA³³, válido para grietas libres de tracción, discretizadas con elementos discontinuos rectos, es decir, solo se deben calcular las siguientes integrales en el contorno de la grieta Γ_c :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_j(x') + \int_{\Gamma_c} T_{ij}(x',x)u_j(x)d\Gamma(x) &= 0 \\ n_i(x') \int_{\Gamma_c} S_{kij}(x',x)u_k(x)d\Gamma(x) &= 0 \end{aligned} \quad (89)$$

3.2.2.2 Ordenamiento del sistema de ecuaciones. Como se mencionó en el inciso anterior, se calculan 24 coeficientes al realizar la integración de un elemento con respecto a un punto de colocación específico (figura 28), al tomar como puntos de colocación todos los nodos del cuerpo, y al agrupar estos coeficientes en 2 matrices generales, tal y como se hizo en la figura 28, el número de filas en las matrices $\Delta T_{ij_n}^e$ y $\Delta U_{ij_n}^e$ será 2 veces el número de nodos funcionales, mismo número que corresponde a la cantidad de ecuaciones lineales que se obtienen al aplicar el método de elementos de contorno. Obsérvese que los coeficientes referentes al nodo 3 de determinado elemento, pueden sumarse con los coeficientes del nodo 1 del siguiente elemento en la matriz $\Delta T_{ij_n}^e$, debido a que están multiplicando la misma variable de desplazamiento; esta operación no puede realizarse en la matriz $\Delta U_{ij_n}^e$ debido a que las tracciones en un nodo dependen de la normal al elemento que lo contiene. Se puede deducir del número de ecuaciones, que solo puede haber 2 incógnitas por nodo, es decir, se deben conocer las tracciones a ambos lados del nodo o se debe conocer el desplazamiento y una de las tracciones (nodos en las esquinas).

³³ PORTELA, A. op.cit. pp.56-61.

El sistema matricial se reordena de la forma presentada en la figura 31, la matriz cuadrada de tamaño $NEQN$ llamada A , contiene los coeficientes que multiplican las variables desconocidas que están almacenadas en el vector X ; el vector F guarda la sumatoria del producto de los coeficientes con las respectivas variables conocidas para cada fila del sistema de ecuaciones. Al solucionar este sistema de ecuaciones, se obtienen los parámetros que antes eran desconocidos, dando lugar a la aplicación de las ecuaciones (58), (61) y (62) para obtener los resultados en los puntos internos de interés y así poder computar la integral J y los factores de intensidad de esfuerzo.

Figura 31. Sistema de ecuaciones a solucionar.

$$\begin{array}{c}
 \text{NEQN=2*NNOD} \\
 \left. \begin{array}{c} \text{NEQN} \\ \left[\begin{array}{cc} [A] & [X] \end{array} \right] \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{c} 1 \\ \left[\begin{array}{c} F \end{array} \right] \end{array} \right\} \text{NEQN}
 \end{array}$$

Fuente: Elaboración propia.

3.2.2.3 Solución. Para dar solución al sistema de ecuaciones se implementa el método conocido como *LU decomposition*, en donde se expresa la matriz A como el producto de 2 matrices, una matriz triangular superior U y una matriz triangular inferior L . Debido a que este procedimiento se realiza por el método de CROUT³⁴, la matriz U tiene 1's en su diagonal. Siguiendo esta descomposición, la solución del sistema de ecuaciones está compuesta por 2 pasos:

$$[A] = [L] \cdot [U] \quad (90)$$

³⁴ MARCOS, A. LU DECOMPOSITION, Numerical methods applied to engineering. [Diapositivas]. [Recuperado en 27 abril 2020]. Disponible en: https://matlabgeeks.weebly.com/uploads/8/0/4/8/8048228/002-lu_decomposition-presentation-v3.pdf.

El proceso inicia con la sustitución sobre los coeficientes de la matriz L , debido a que esta matriz es triangular inferior, se reemplazan los valores de manera descendente y se obtiene el vector Y .

$$[L] \cdot [Y] = [F] \quad (91)$$

Posteriormente, se reemplazan los valores de forma ascendente en la matriz U para obtener el vector X de incógnitas en el contorno. Estos valores obtenidos son ordenados en las variables nodales que eran desconocidas.

$$[U] \cdot [X] = [Y] \quad (92)$$

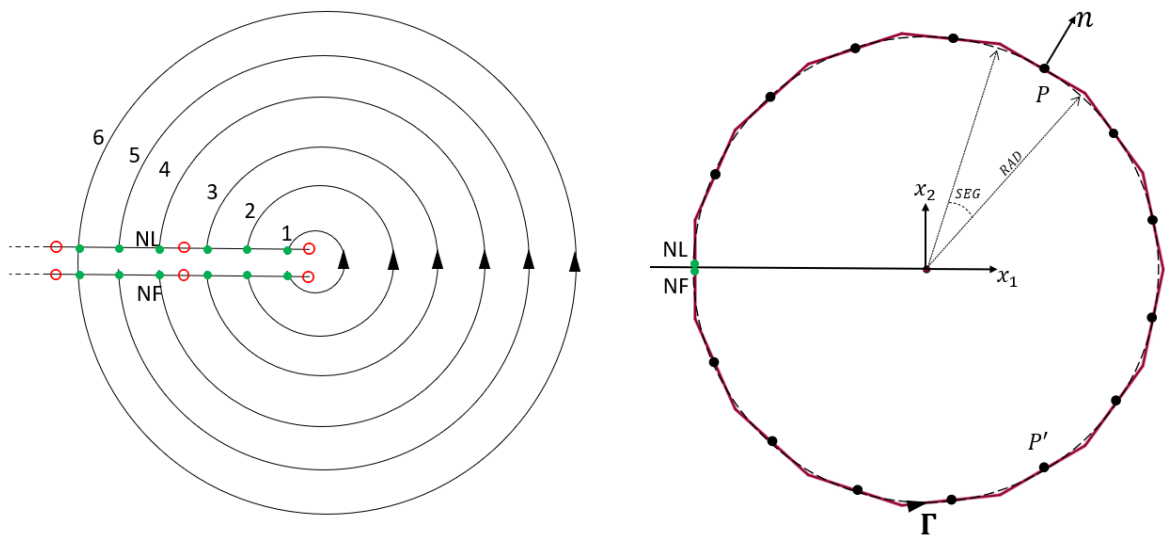
Un factor importante a tener en cuenta en el momento de solucionar el sistema de ecuaciones es que los valores de los desplazamientos están en el orden de los milímetros o incluso menores y las tracciones son del orden de los Mega pascales; esta característica ocasiona que el sistema de ecuaciones sea inestable. Para que esta situación no afecte el proceso de solución, es necesario adecuar los valores y fijarlos dentro de una misma escala numérica, esto se logra utilizando medidas relativas para ambas variables. Para las tracciones, se divide el valor en el módulo de elasticidad y los desplazamientos se dividen en la longitud máxima de la geometría que se modela; luego de solucionar el sistema de ecuaciones, estos valores regresan a su escala inicial al aplicar la operación contraria.

3.2.3 Computo de la integral J y los factores de intensidad de esfuerzo.

Aprovechando que la integral J es independiente del camino de integración, esta es evaluada para un contorno circular alrededor de la punta de la grieta, se puede evaluar para 6 contornos diferentes, en donde el radio de cada contorno está definido como la distancia desde la punta de la grieta hasta los nodos funcionales de los dos elementos más cercanos en cada cara (Figura 32). Esta característica se debe al hecho de que para cada incremento se adicionan 2 nuevos elementos en cada cara de la grieta, los cuales están orientados en la dirección de crecimiento

calculada, por lo tanto, puede definirse el sistema local de coordenadas orientado en la dirección de estos elementos. Para un contorno específico, se crean una serie de puntos internos en donde se computan los esfuerzos, desplazamientos y deformaciones, estos puntos pertenecen al contorno circular por donde se evaluará la integral J mediante integración por trapezoido. Nótese que el camino de integración tiene sentido antihorario, desde un punto inicial NF hasta un punto final NL pertenecientes a las caras de la grieta.

Figura 32. Contorno para el computo de la integral J .



Fuente: Elaboración propia.

Como se mencionó en el marco referencial ...véase 2.2.6... existe una relación analítica entre la integral J y los factores de intensidad de esfuerzo dada por la expresión (54), no obstante, mediante esta ecuación no pueden calcularse por separado los factores de intensidad de esfuerzo K_I y K_{II} . Por lo tanto, se adopta un enfoque basado en la descomposición del campo elástico en sus componentes simétrica y antisimétrica, para lograr desacoplar los factores de intensidad de esfuerzo. Considere 2 puntos $P(x_1, x_2)$ y $P'(x_1, -x_2)$ ubicados de manera simétrica con respecto al sistema coordenado en la punta de la grieta, los esfuerzos y

desplazamientos en estos puntos pueden ser expresados como una combinación de las componentes simétrica y antisimétrica. De manera que:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^I + u_1^{II} \\ u_2^I + u_2^{II} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^I - u_1^{II} \\ -u_2^I + u_2^{II} \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^I + \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^I + \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^I + \sigma_{12}^{II} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11}' \\ \sigma_{22}' \\ \sigma_{12}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^I - \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^I - \sigma_{22}^{II} \\ -\sigma_{12}^I + \sigma_{12}^{II} \end{bmatrix} \quad (94)$$

Despejando:

$$\begin{bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{bmatrix} \quad (95)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^I \\ \sigma_{22}^I \\ \sigma_{12}^I \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} + \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} - \sigma_{12}' \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} + \sigma_{12}' \end{bmatrix} \quad (96)$$

Se obtienen las componentes de los esfuerzos y desplazamientos para cada modo de carga. Utilizando este concepto se llega a que la integral J puede ser expresada como la suma de 2 términos, uno para cada modo de carga, de manera que:

$$J = J^I + J^{II} \quad \text{en donde:} \quad J^I = \frac{K_I^2}{E'} \quad , \quad J^{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (97)$$

Computacionalmente se ejecutan las integrales:

$$J^m = \int_S W^m n_1 - t_j^m u_{j,1}^m dS \quad (98)$$

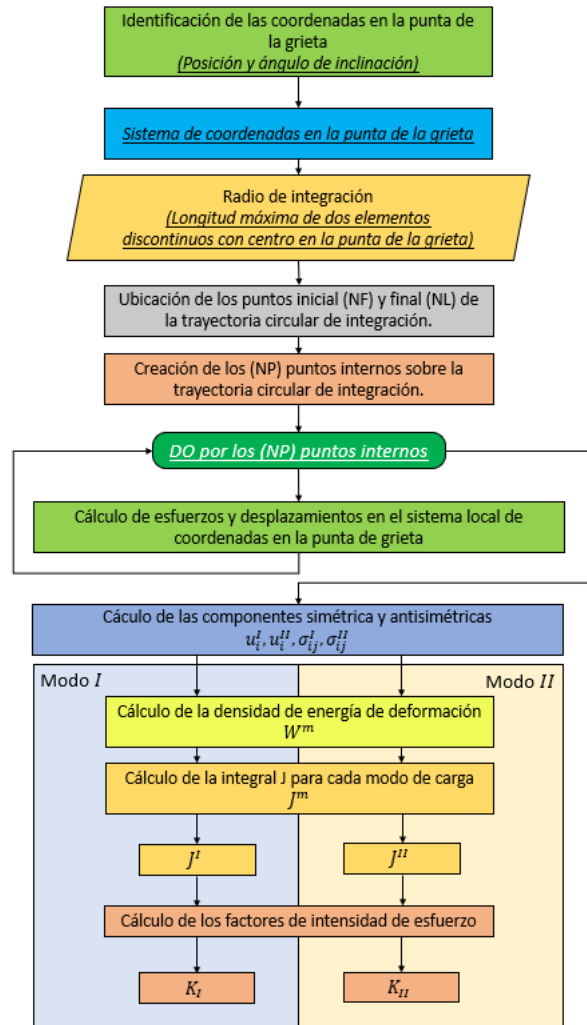
En donde m se refiere a cada modo de carga I, II.

Nótese que, para poder utilizar el concepto anteriormente mostrado, el número de puntos internos debe ser par, de esta manera, todos los puntos internos tienen una pareja ubicada de manera simétrica con respecto a la punta de la grieta. El

procedimiento para calcular la integral J y los factores de intensidad de esfuerzo es el presentado en la figura 33, muy similar al presentado por BLANCO³⁵, en donde primero se crea el sistema coordenado en la punta de la grieta, la orientación de este y se establece el radio del contorno que se evaluará. Después se crean los puntos internos que pertenecen a ese contorno de integración, calculando los esfuerzos y desplazamientos en el sistema coordenado de la punta. Con base en estos esfuerzos y desplazamientos se calculan las componentes simétricas y antisimétricas de los mismos, utilizadas para computar la integral J en cada uno de los modos de carga. Finalmente, se calculan los factores de intensidad de esfuerzo de forma analítica (70).

³⁵ BLANCO, Eudi. Modelo computacional del efecto combinado de la temperatura y la frecuencia de carga sobre el crecimiento de grieta en la fatiga del policloruro de vinilo clorado (CPVC) utilizando el método de los elementos de contorno. Trabajo de grado para optar al título de magister scientiarum en ingeniería mecánica. Caracas: Universidad central de Venezuela, 2007. pp. 61-90.

Figura 33. Diagrama general del cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo.



Fuente: Elaboración propia.

La integral (71) se calcula de la siguiente manera mediante la regla del trapecio:

$$J^m = \sum_{k=1}^N RSEG(k) * W^m(k) RUN1(k) - (RT1^m(k) DU^m(1, k) + RT2^m(k) DI^m(2, k)) \quad (99)$$

$$W^m(k) = \frac{1}{2} [SI^m(1, k) * DU^m(1, k) + SI^m(2, k) * DU^m(2, k) + 2(SI^m(3, k) * DU^m(3, k))] \quad (100)$$

Donde:

$m = \text{modo de carga } I, II$

$N = \text{Numero de nodos donde se evalua la integral } J \text{ incluyendo } NF \text{ y } NL.$

$W^m(k) = \text{Densidad de energia de deformacion para un modo de carga } m \text{ y un nodo } k.$

$RUN1(k) = \text{Componente de la normal al contorno en la direccion } 1 = n_1.$

$SI(i, k) = \text{Matriz de esfuerzos en el nodo } k, \text{ sea } \begin{cases} SI(1, k) = \sigma_{11} \\ SI(2, k) = \sigma_{22} \\ SI(3, K) = \sigma_{12} \end{cases}$

$DU(i, k) = \text{Matriz de deformaciones en el nodo } k, \text{ sea } \begin{cases} DU(1, k) = \varepsilon_{11} = u_{1,1} \\ DU(2, k) = \varepsilon_{22} \\ DU(3, K) = \varepsilon_{12} \end{cases}$

$RT1(k), RT2(k) = \text{Tracciones en el nodo } k \text{ en las direcciones } 1 \text{ y } 2, \text{ respectivamente.}$

$DI(2, k) = \text{Derivada del desplazamiento en la direcci3n } 2 \text{ con respecto a } x_1 = u_{2,1}.$

$RSEG(k) = \text{Longitud del arco dada por } RSEG = SEG * RAD \text{ (Figura 32).}$

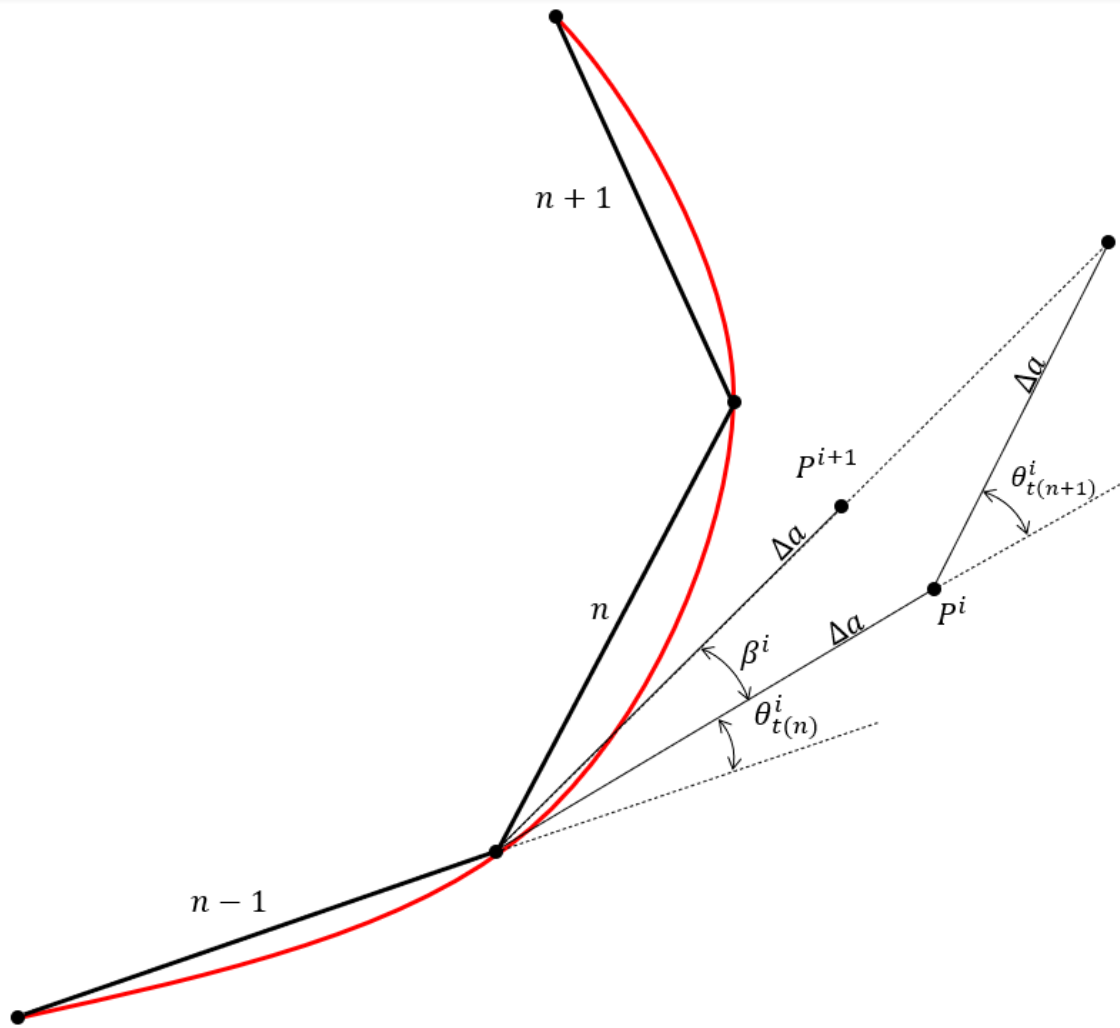
3.2.4 Análisis incremental. Las subrutinas y procedimientos mostrados en los incisos 3.2.2 y 3.2.3 son ejecutados una sola vez para análisis de mecánica de fractura bajo cargas estáticas. Para un análisis incremental de crecimiento de grieta, se realiza el procedimiento iterativo presentado en el anexo 2. Nótese que, para un análisis estático solo se realiza una vez el análisis dual de elementos de contorno, mientras que, para un análisis de crecimiento se ejecutan una serie de subrutinas para un contador desde 1 hasta el número de incrementos establecidos por el usuario del software. Debido al análisis incremental que se plantea, se discretiza toda la grieta y su crecimiento con elementos rectos, además, se impone la longitud Δa que la grieta crecerá en cada iteración. El criterio de máximo esfuerzo tangencial utilizado para calcular el ángulo de crecimiento no tiene en cuenta esta estrategia de discretización, por lo tanto, se ejecuta un proceso en el cual se corrige el ángulo

de crecimiento de manera iterativa. Considere el incremento n de la grieta, el procedimiento introduce un ángulo de corrección β a la dirección calculada mediante el criterio de máximo esfuerzo tangencial $\theta_t(n)$. Este ángulo de corrección se calcula como $\beta = \theta_{t(n+1)}/2$, en donde $\theta_{t(n+1)}/2$ se refiere a la dirección de crecimiento para el siguiente incremento $(n + 1)$, también evaluada con el criterio de máximo esfuerzo tangencial. Este proceso se ejecuta hasta que el ángulo de corrección β^{i+1} de la siguiente iteración sea menor al ángulo de corrección β^i de la anterior. Para una iteración específica se ejecuta:

1. Para la primera iteración se calcula la dirección $\theta_{t(n)}^i$ mediante el criterio de máximo esfuerzo tangencial.
2. Hacia la dirección calculada, la grieta se extiende una longitud Δa hasta P^i , en donde los factores de intensidad de esfuerzo son evaluados nuevamente.
3. Con los nuevos factores de intensidad de esfuerzo y el criterio de máximo esfuerzo tangencial, se evalúa el siguiente ángulo de crecimiento $\theta_{t(n+1)}^i$.
4. Se calcula el ángulo de corrección $\beta^i = \theta_{t(n+1)}^i/2$.
5. La dirección de crecimiento es corregida para la segunda iteración de manera que $\theta_{t(n)}^{i+1} = \theta_{t(n)}^i + \beta^i$.
6. Los pasos anteriores se repiten hasta que el ángulo de corrección de la siguiente iteración sea menor al ángulo de corrección de la presente, es decir, $|\beta^{i+1}| < |\beta^i|$.

Es importante resaltar que, a medida que el incremento Δa se hace más pequeño, el ángulo de corrección debe disminuir, aproximándose a la trayectoria suave mostrada en la figura 34. Cuando se tiene un solo modo de carga, el ángulo de crecimiento se mantiene constante durante toda la propagación, en otras palabras, no sería necesario el procedimiento de corrección.

Figura 34. Dirección de crecimiento de grieta, enfoque correctivo.



Fuente: Portela, Adiabadi y Rooke³⁶.

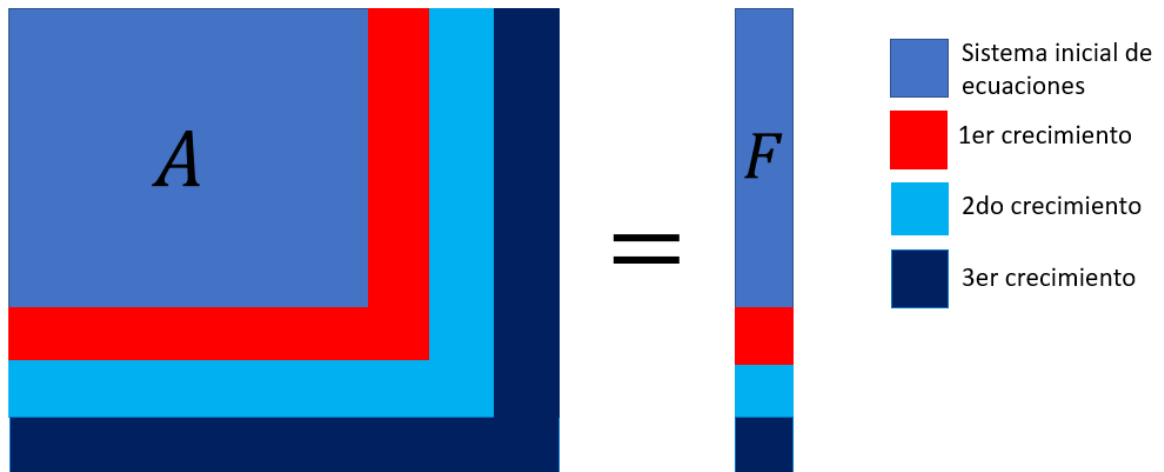
Una vez se calcula el ángulo de crecimiento de grieta, se procede a generar la geometría definitiva para el incremento actual y así poder calcular los factores de intensidad de esfuerzo correctos antes de pasar al siguiente incremento. Durante el proceso de cálculo del ángulo de crecimiento y durante el crecimiento de la grieta, se evalúan constantemente los factores de intensidad de esfuerzo, lo que implica

³⁶ PORTELA, A.; ALIABADI, M.H. y ROOKE, D.P. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. *Computers & Structures* [en línea]. 1993, vol. 46, nro. 2, pp. 237-247. [Recuperado 27 junio 2020]. ISSN 0045-7949. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90189-K](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90189-K).

que cada vez que se necesita calcularlos, se debe realizar el análisis dual de elementos de contorno, y, aunque parece un proceso muy extenso, debido a las características del método, se simplifica de la siguiente manera:

La primera vez que se realiza el análisis dual de elementos de contorno, se forma el sistema de ecuaciones $AX = F$...véase 3.2.2 ..., el cual tiene un tamaño inicial dado por el número de nodos de discretización. Un incremento de la grieta representa un número de nodos nuevos en el cuerpo, que se traduce, en nuevas filas y columnas en el sistema de ecuaciones. El hecho de solo tener que calcular los coeficientes correspondientes a estas nuevas filas y columnas, sin tener que remallar la geometría del cuerpo, hace tan atractivo el método de elementos de contorno. Posteriormente se debe solucionar el sistema de ecuaciones y evaluar la integral J .

Figura 35. Sistema de ecuaciones para el crecimiento de grieta.



Fuente: Elaboración propia.

3.2.5 Crecimiento e implementación de los modelos. Para fines de este proyecto se hace necesario incluir en el programa los modelos de crecimiento de grieta que serán posteriormente evaluados y comparados. Para incluirlos, se hace uso de la regla de trapecio simple para realizar la integral de la ecuación (36) de la siguiente forma:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2} \quad (101)$$

Realizando la analogía de la expresión anterior, con la expresión (36), se obtiene:

$$I = \Delta N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{f(\Delta K, C, m, K_{IC}, \Delta K_{th})} \quad (102)$$

$$I = (a_f - a_i) * \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{f(\Delta K, C, \dots)|_{a_f}} + \frac{1}{f(\Delta K, C, \dots)|_{a_i}} \right)$$

Tomando la siguiente nomenclatura:

Cuadro 4. Nomenclatura en la subrutina crecimiento.

Término	Significado
<i>DTN</i>	Ciclos transcurridos por incremento
<i>CADV</i>	Avance de la grieta por incremento
<i>PPC</i>	Constante C
<i>PPN</i>	Constante m
<i>SRAT</i>	Relación de cargas de fatiga
<i>DTKA(I)</i>	Variación del factor de intensidad de esfuerzo efectivo del incremento anterior
<i>DTKB(I)</i>	Variación del factor de intensidad de esfuerzo efectivo del incremento actual
<i>K_{IC}</i>	Tenacidad a la fractura
<i>ΔK_{th}</i>	Umbral de fractura

Fuente: Elaboración propia.

Para el modelo de Klesnil Lucas:

$$DTN = CADV * 0,5 * \frac{1}{PPC} * \left[\frac{1}{DTKA(I)^{PPN} - \Delta K_{th}^{PPN}} + \frac{1}{DTKB(I)^{PPN} - \Delta K_{th}^{PPN}} \right] \quad (103)$$

Modelo de Paris:

$$DTN = CADV * 0,5 * \frac{1}{PPC} * \left[\frac{1}{DTKA(I)^{PPN}} + \frac{1}{DTKB(I)^{PPN}} \right] \quad (104)$$

Modelo de Forman:

$$DTN = CADV * 0,5 * \frac{1}{PPC} * \left[\frac{(1 - SRAT)K_{IC} - DTKA(I)}{DTKA(I)^{PPN}} + \frac{(1 - SRAT)K_{IC} - DTKB(I)}{DTKB(I)^{PPN}} \right] \quad (105)$$

Nótese que el valor de $DTKB(I)$ del incremento actual es el valor $DTKA(I)$ del siguiente. Debido al análisis incremental que se realiza, las funciones (103), (104) y (105) se evalúan cíclicamente para el número total de incrementos $NCRI$, se guarda y se suma cada aporte de la integración, es decir, se calcula el número total de ciclos transcurridos. Una vez se conoce el número de ciclos transcurrido para cada incremento se puede construir la gráfica de crecimiento de grieta $\Delta a/\Delta N$ vs ΔK en escala logarítmica.

Si se consideran los modos de carga correspondientes a un estado plano, estos se calculan de siguiente manera:

$$\Delta K_I = K_I(1 - R) \quad \wedge \quad \Delta K_{II} = K_{II}(1 - R) \quad (106)$$

Para poder evaluar las leyes de crecimiento de grieta se necesita una variación del factor de intensidad de esfuerzos efectivo ΔK_{eff} , es decir, que relacione los dos modos de carga. Se han planteado muchas expresiones para calcular este parámetro³⁷, en este proyecto se utiliza el modelo presentado por TANAKA³⁸, dado por:

$$\Delta K_{eff} = [\Delta K_I^2 + 2\Delta K_{II}^2]^{1/2} \quad (107)$$

³⁷ SAJITH, S.; MURTHY, K. y ROBI, P. Mixed mode fatigue crack growth studies of crack emanating from circular hole. *AIP Conference Proceedings* 2200, 020041 [en línea]. 2019, pp. 1-9. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1063/1.5141211>.

³⁸ TANAKA. K. Fatigue Crack Propagation from a Crack Inclined to the Cyclic Tensile Axis. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 1974, vol. 6, nro. 3, pp.493-507. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(74\)90007-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(74)90007-1).

En los resultados de las distintas simulaciones puede ser comprobado que, $\Delta K_{eff} = \Delta K_{Ieq}$, véase ecuación (42), cuando el criterio del máximo esfuerzo principal es utilizado.

3.3 Postproceso. Los resultados obtenidos en el bloque central de la simulación se visualizan de manera gráfica en el postproceso del programa, para esto, se crearon 2 programas auxiliares. El primer programa se denominó *DESPLAZAMIENTOS.exe* por medio del cual se grafican las posiciones deformadas en cada uno de los bloques de resultados según se requiera; el segundo programa llamado *CPTH.exe* se encarga de generar las siguientes graficas:

- I. Tamaño de la grieta vs Número de ciclos.
- II. Gráfica de crecimiento de grieta da/dN vs ΔK .
- III. Factores de intensidad de esfuerzo K_I, K_{II}, K_{eq} vs tamaño de grieta.
- IV. Gráfica de propagación de la grieta a través del cuerpo.

En el capítulo de resultados ...véase 4..., se presentan estas gráficas para problemas específicos de análisis. La operación de estos programas auxiliares está dada en el manual de usuario del software... véase ANEXO C...

4.RESULTADOS

Para dar cumplimiento a los objetivos del proyecto, específicamente, para realizar el análisis comparativo de los diferentes modelos de propagación de grieta por fatiga, se obtienen los resultados presentados en este capítulo. Se simulan ensayos normalizados y algunos problemas específicos de especial interés, todos estos son tomados de la literatura, algunos de ellos hacen referencia a simulaciones y otros a ensayos experimentales.

Posterior a realizar una amplia búsqueda bibliográfica, cuyo objetivo fue el encontrar problemas que estén completamente definidos en términos de cargas, geometría, propiedades mecánicas y parámetros de fractura; se ha encontrado que pocos autores obtienen la gráfica completa de crecimiento de grieta (figura 10), algunos de estos se preocupan por encontrar el comportamiento en la zona cercana al umbral de fractura, la gran mayoría se centra en caracterizar la región *II* de la gráfica y muy pocos obtienen datos para la región *III* de crecimiento rápido. Como primer caso de trabajo se presenta la simulación de un problema que contempla 2 de las regiones de crecimiento, en donde se implementan los 3 modelos planteados y se generan algunas discusiones al respecto.

4.1 PROBETA RECTANGULAR CON MUESCA

Se simula el ensayo experimental realizado por SINGH³⁹ en el material *nanotwinned copper*, en donde se realiza la caracterización de la gráfica de crecimiento de grieta del material. Para llevar a cabo la simulación se necesitan los siguientes datos, obtenidos del artículo de referencia:

Cuadro 5. Datos para la simulación 4.1.

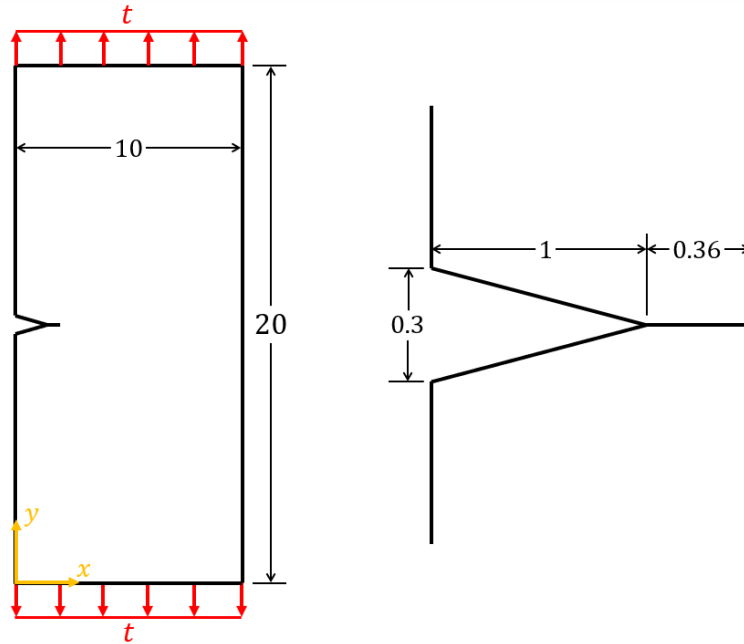
Parámetro	Valor
Tipo de problema	Esfuerzo plano
Relación de cargas de fatiga (R)	0.1
Tracción máxima aplicada (t)	135.9 MPa
Módulo de elasticidad (E)	207000 MPa
Módulo de Poisson	0.34
Umbral de fractura (ΔK_{th})	6.5 MPa \sqrt{m}
Tenacidad a la fractura (K_{Ic})	22.3 MPa \sqrt{m}

Fuente: Elaboración propia.

El modelado de la geometría presentada en la figura 36 (dimensiones en mm) se realiza mediante el software GID, en donde también se asignan las propiedades mecánicas del material y las condiciones de frontera.

³⁹ SINGH, A., et al. Fracture toughness and fatigue crack growth characteristics of nanotwinned copper. *Acta Materialia* [en línea]. 2011, vol. 59, nro. 6, pp. 2437-2446. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 1359-6454. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2010.12.043>.

Figura 36. Geometría y condiciones de frontera 4.1. Dimensiones en mm.



Fuente: Elaboración propia.

Para calcular el factor de intensidad de esfuerzos **teórico** en la probeta, se hace uso de una correlación obtenida mediante el software ABAQUS® en la referencia³⁹, dada por:

$$K_I = t\sqrt{a}f\left(\frac{a}{w}\right) \quad (108)$$

$$f\left(\frac{a}{w}\right) = 1.94 + 0.81\left(\frac{a}{w}\right) - 2.40\left(\frac{a}{w}\right)^2 + 4.42\left(\frac{a}{w}\right)^3$$

Con base en la expresión (108) se calcula el crecimiento de grieta desde un tamaño de grieta inicial $a_0 = 1.36 \text{ mm}$, hasta un tamaño de grieta final $a_f = 5.057 \text{ mm}$, es decir, la longitud de crecimiento es de $\Delta a = 3.697 \text{ mm}$. Al momento de realizar el mallado del contorno, se decide implementar elementos de longitud $L_{elem} = 0.045 \text{ mm}$ en la punta de la grieta, por lo tanto, la longitud de crecimiento total se consigue al realizar 41 incrementos (NCRI = 41) del doble de la longitud del elemento en la punta de la grieta (NADV = 2).

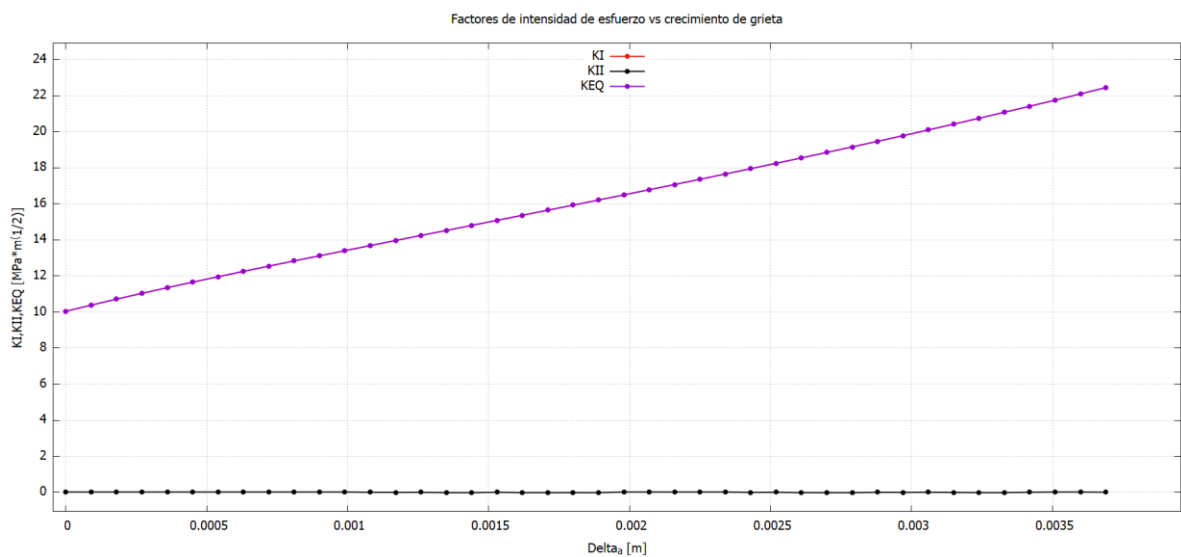
Para la simulación se implementa una malla de 216 elementos con 432 nodos. Esta malla aumenta en el número de nodos cuando se crea la malla funcional y se añaden 4 elementos nuevos para cada incremento. Los primeros resultados de interés son los factores de intensidad de esfuerzo para la geometría utilizada y las condiciones de carga, solo se tiene presente el modo de carga *I* de manera significativa. Al comparar los resultados obtenidos con los teóricos (expresión 108), véase cuadro 6, se observa el ajuste de la simulación con bajos errores porcentuales en todo el rango de longitud de grieta.

Cuadro 6. Factores de intensidad de esfuerzo, cálculo del error porcentual 4.1.

Factor de intensidad de esfuerzos $K_I [MPa\sqrt{m}]$			
Tamaño de grieta[mm]	Teórico	simulación	Error (%)
1.36	10.1081	10.0445	0.6292
2.17	12.9647	12.8365	0.9891
3.07	15.7402	15.6526	0.5565
3.97	18.4945	18.5538	0.3206
4.87	21.5831	21.7601	0.8201
5.05	22.2725	22.4558	0.8230

Fuente: Elaboración propia.

Figura 37. Gráfica K vs a para 4.1.



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 37 se plasma como el factor de intensidad de esfuerzos para el modo de carga II es prácticamente 0, razón por la cual el factor de intensidad de esfuerzos equivalente K_{eq} se traslapa con el factor de intensidad de esfuerzos K_I . El crecimiento de grieta se simula de manera incremental haciendo uso de los 3 modelos planteados, cuyas constantes se presentan a continuación:

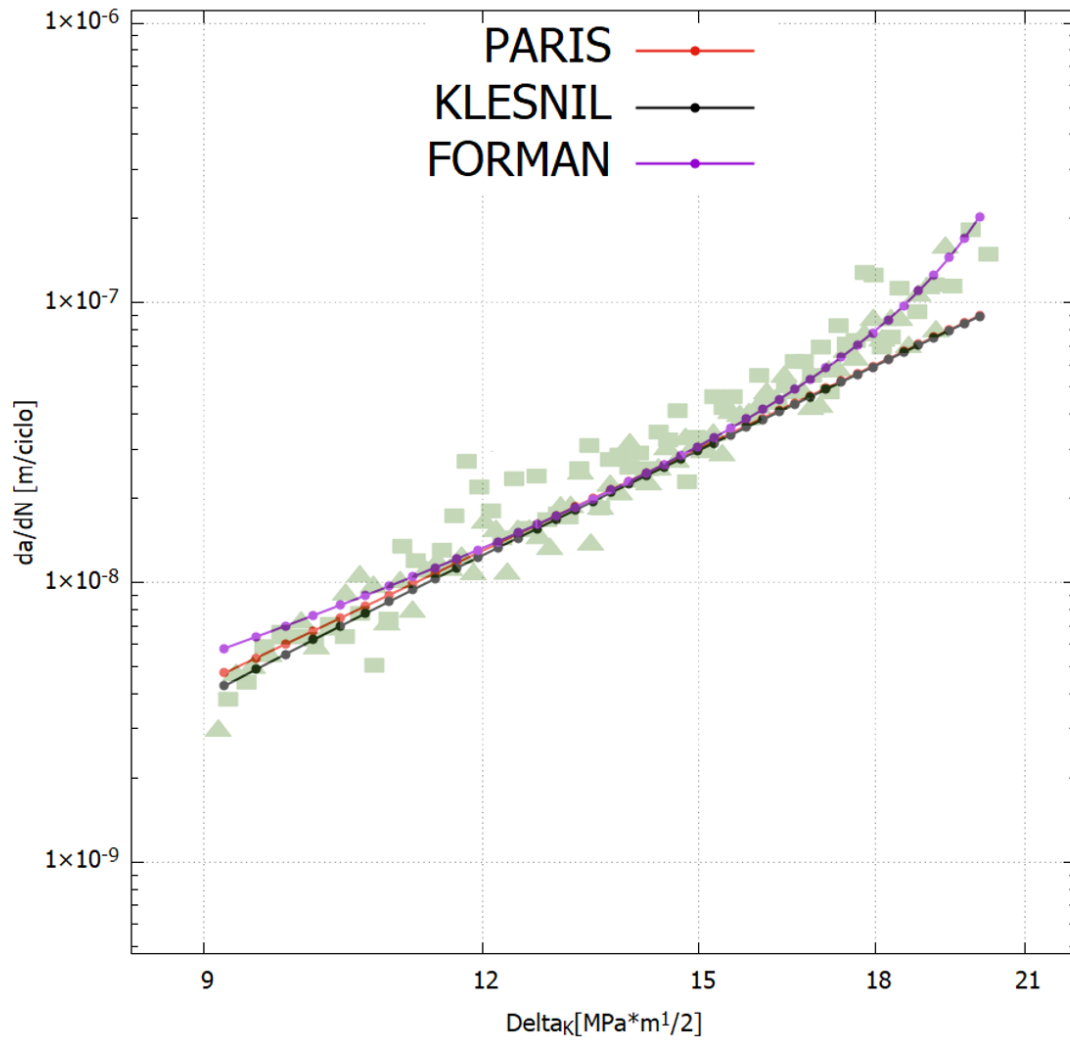
Cuadro 7. Constantes utilizadas para los modelos de crecimiento 4.1.

Modelo	Constantes del modelo
Klesnil-Lucas	$C = 1.10490 \times 10^{-12}$
	$m = 3.7719$
	$\Delta K_{th} \approx 5$
Paris-Erdogan	$C = 1.10490 \times 10^{-12}$
	$m = 3.7719$
Forman	$C = 6.0490 \times 10^{-10}$
	$m = 2.1719$
	$K_{Ic} = 22.3$

Fuente: Elaboración propia.

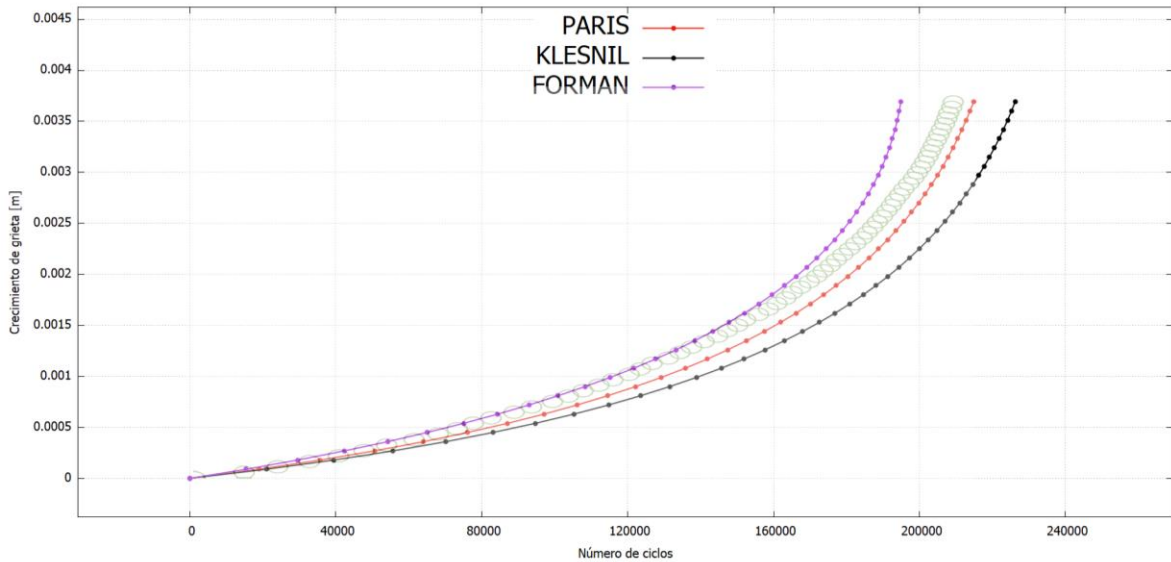
Se grafican los resultados obtenidos para: la gráfica de crecimiento de grieta y el número de ciclos transcurridos:

Figura 38. Gráfica de crecimiento de grieta 4.1.



Fuente: Elaboración propia

Figura 39. Número total de ciclos transcurridos 4.1.



Fuente: Elaboración propia.

En las figuras 38 y 39, los parámetros graficados en verde hacen referencia a los datos experimentales³⁹. Al observar las gráficas obtenidas se pueden hacer varios análisis pertinentes:

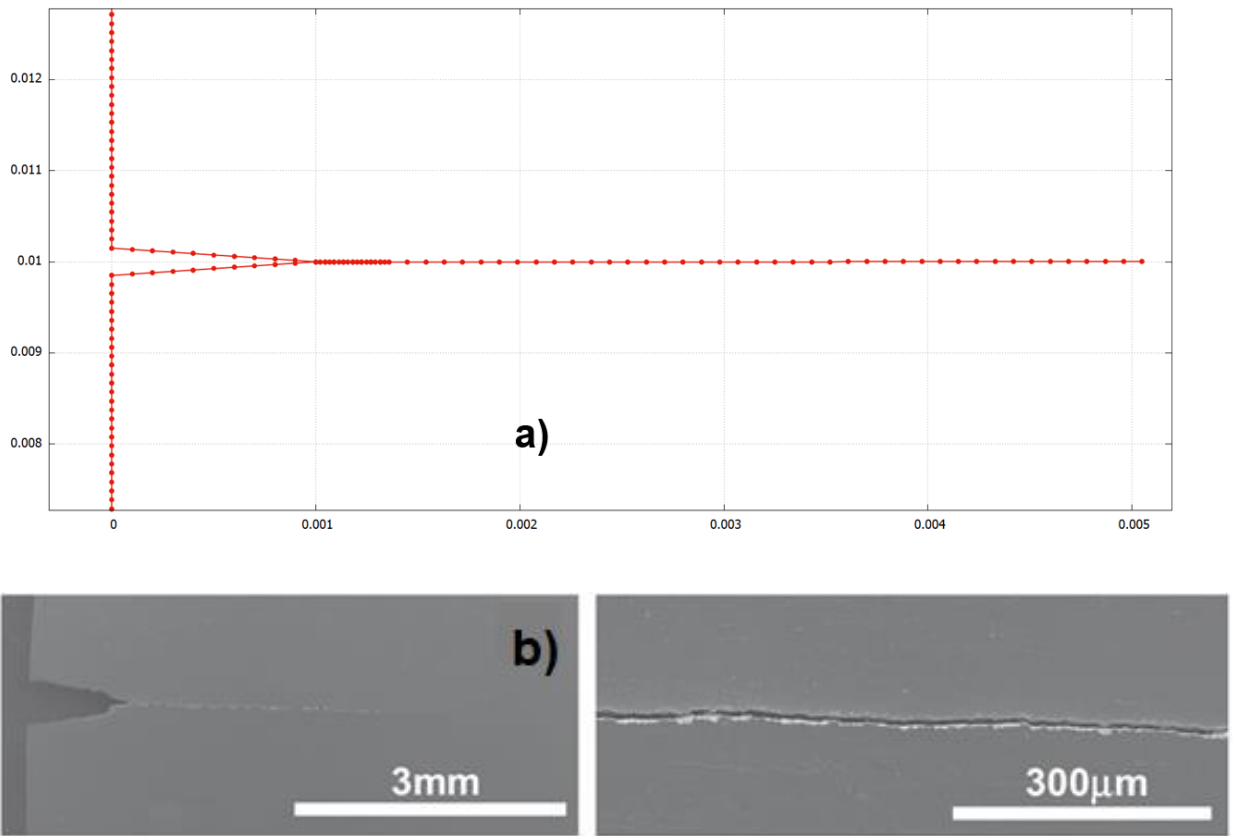
- I. La probeta ensayada es sometida a un estado de cargas, tal que solo se obtiene la gráfica de crecimiento de grieta para parte de la zona *II* y la zona *III*. No se obtienen datos suficientes para la zona *I* cercana al umbral de fractura, para este caso, la zona *I* carece de datos experimentales, por lo tanto, la estimación del umbral de fractura se realiza de manera gráfica, con alto grado de incertidumbre.
- II. Al observar la gráfica de crecimiento de grieta (figura 38), puede observarse la forma que siguen los modelos. El modelo de Paris Erdogan representa una línea recta en la gráfica, por lo tanto, no admite ninguna desviación en el comportamiento del material por fuera de la zona *II*. Klesnil- Lucas presenta una curva que se asemeja a la recta de Paris para razones altas de crecimiento, en donde el umbral de fractura no tiene efecto para factores de intensidad de esfuerzo pertenecientes a la zona *I*. El modelo de Klesnil-Lucas se curva para representar esta zona, comportamiento que se verá con mayor detenimiento en

el siguiente ejemplo. Finalmente, el modelo de Forman, al incluir la tenacidad a la fractura como parámetro adicional, representa de manera satisfactoria el crecimiento rápido de la grieta, en otras palabras, se acomoda a la parte alta de la zona *II* y a la zona *III* de la gráfica.

- III. Cada modelo tiene la dificultad de no poder representar de manera satisfactoria una o varias de las zonas de crecimiento, el modelo de Paris solo puede representar una línea recta correspondiente a la zona de crecimiento estable, Klesnil contempla la zona *I* y *II*, sin poder representar los valores en el crecimiento rápido de la grieta; mientras que Forman se acomoda a la zona de crecimiento rápido y parte del crecimiento estable.
- IV. El comportamiento de cada modelo en la gráfica de crecimiento de grieta se ve reflejado en la estimación del número de ciclos transcurridos (Figura 39). El modelo de Paris-Erdogan al ser el que mejor se ajusta a los puntos experimentales de la gráfica, puede realizar una estimación muy acertada del número de ciclos. Para este caso en particular, los 3 modelos no representan una diferencia notable en el número de ciclos estimados, esto se debe a que solo se está analizando las zonas *II* y *III* de la gráfica de crecimiento. Es importante resaltar que la zona de crecimiento rápido no tiene un efecto significativo en el número de ciclos transcurridos; cuando un cuerpo agrietado entra en esta zona, es cuestión de pocos ciclos de carga para generar la ruptura del material, es por esta razón que, a pesar de que el modelo de Forman se acomoda a la zona *III*, se reconoce que no tiene una aplicabilidad en términos ingenieriles, al ser el análisis de ciclo de vida, el principal objetivo de la mecánica de la fractura.

También se obtiene la gráfica de la trayectoria de crecimiento en comparación con los resultados experimentales³⁹, véase figura 40, en ambos casos se puede observar que solo está presente el modo de carga *I*, con una propagación planar netamente perpendicular con respecto a la carga aplicada.

Figura 40. Trayectoria de propagación 4.1. a) Simulación, b) Resultados experimentales.



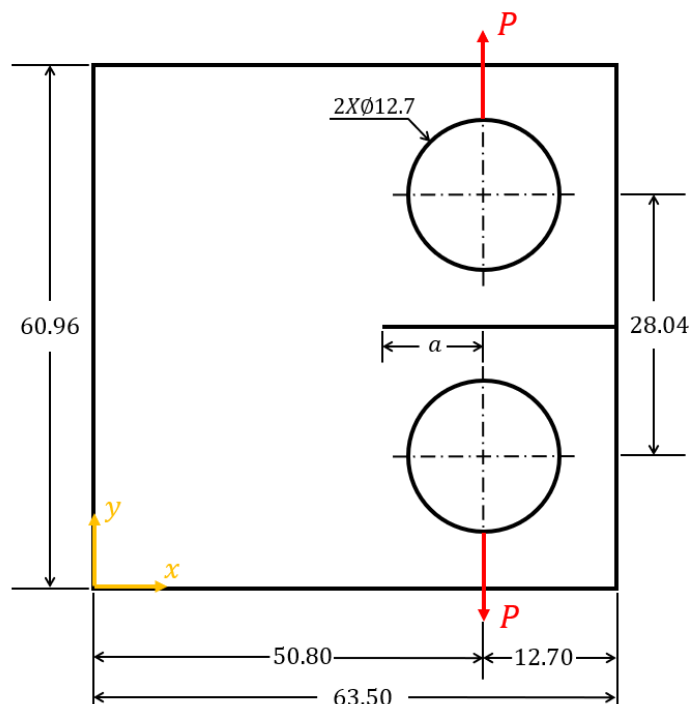
Fuente: a) Elaboración propia, b) SINGH³⁹.

Para poder analizar a cabalidad el modelo de Klesnil se presentan los siguientes ejemplos de simulación.

4.2 CRECIMIENTO DE GRIETA EN ALEACIÓN DE ALUMINIO 7075-T651

Se lleva a cabo la simulación del ensayo realizado por ZHAO⁴⁰,ZHANG y JIANG en donde se determina el comportamiento de crecimiento de grieta por cargas de fatiga de amplitud constante en la aleación de aluminio 7075-T651. En el artículo de referencia se realiza el procedimiento experimental siguiendo la norma ASTM E647⁸, mediante la fractura controlada de la probeta estándar *compact-tension*. La geometría de la probeta, así como las condiciones de frontera que se simulan son expuestas en la siguiente figura:

Figura 41. Geometría y condiciones de frontera 4.2. Dimensiones en mm.



Fuente: Elaboración propia.

Del ensayo experimental se conoce que una carga máxima de 1.6 kN ($P_{max} = 1.6 \text{ kN}$) es impuesta, junto con una relación de cargas de fatiga de amplitud constante $R = 0.1$. El ensayo se da desde un tamaño de grieta inicial $a_i = 7.3 \text{ mm}$

⁴⁰ ZHAO, Tianwen; ZHANG, Jixi y JIANG, Yanyao. A study of fatigue crack growth of 7075-T651 aluminum alloy. *International Journal of Fatigue* [en línea]. 2008, vol. 30, nro. 7, pp. 1169-1180. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0142-1123. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.09.006>.

hasta un tamaño de grieta final $a_f = 34.3 \text{ mm}$, este último no es el tamaño de grieta crítico de fractura del componente. Para estas condiciones, el incremento total de la grieta es de $\Delta a = 27 \text{ mm}$; la malla que se utiliza en la simulación posee un tamaño de elemento en la punta de la grieta de $L_{elem} = 0.25 \text{ mm}$. La longitud total de crecimiento se discretiza en 54 incrementos (NCRI = 54) del doble de la longitud del elemento en la punta de la grieta (NADV = 2).

Para calcular el factor de intensidad de esfuerzos teórico en la probeta se utiliza la siguiente correlación sugerida por la norma⁸:

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} \frac{2 + \alpha}{(1 - \alpha)^{3/2}} [0.886 + 4.64\alpha - 13.32\alpha^2 + 14.72\alpha^3 - 5.6\alpha^4] \quad (109)$$

En donde:

$$W = 50.8 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{a}{W}$$

$$B = \text{Grosor de la probeta}, B = 4.78 \text{ mm}$$

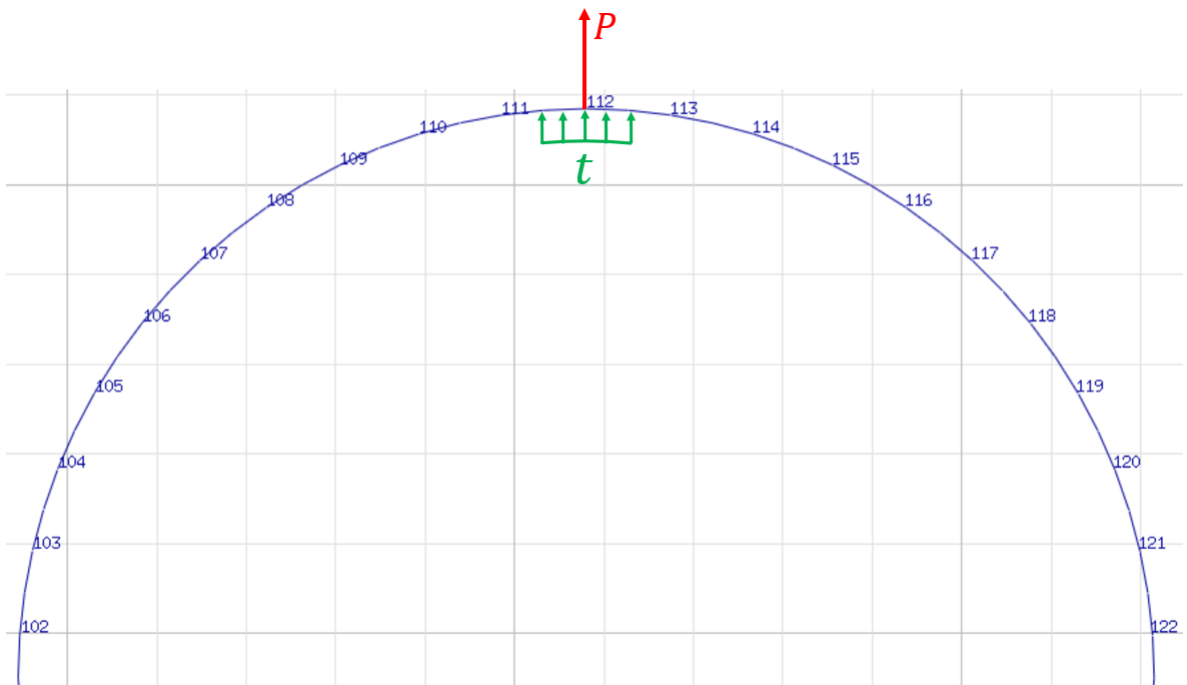
La expresión (109) puede ser utilizada para calcular el factor de intensidad de esfuerzos siempre que se cumpla que $a/W \geq 0.2$. Para este ensayo, en el inicio del crecimiento $a/W = 7.3/50.8 = 0.1437$, razón por la cual los valores de la expresión (109) discrepan en un alto porcentaje con respecto a los resultados de la simulación para el inicio del crecimiento.

Otro aspecto que debe validarse para implementar de manera correcta el ensayo es que el valor del grosor de la probeta debe estar entre $W/20 \leq B \leq W/2$, condición que se cumple a total cabalidad.

Obsérvese que en el método de elementos finitos se puede implementar de manera directa la carga P como condición de frontera, no obstante, en el método de elementos de contorno se debe conocer la tracción aplicada. Para poder calcular la tracción t se opta por un enfoque aproximado, en donde se plantea que la carga P está actuando en el arco correspondiente a la longitud del elemento que se

encuentra en la línea de acción de la fuerza y que está en la circunferencia respectiva (Figura 42). Para este caso, la mitad de la circunferencia se ha discretizado con 21 elementos, se calcula la tracción t como el equivalente a la carga puntual P , distribuida en el área correspondiente a la longitud del arco del elemento 112 multiplicada por el grosor de la probeta.

Figura 42. Aproximación para la carga aplicada.



Fuente: Elaboración propia.

Se obtiene:

$$t = \frac{1.6 \times 10^{-3} \text{ MN}}{\frac{180}{21} * \frac{2\pi}{360} * \frac{12.7 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} * 4.78 \times 10^{-3} \text{ m}} = 352.361 \text{ MPa} \quad (110)$$

Finalmente se exponen las propiedades mecánicas de la aleación de aluminio 7075-T651, obtenidas de la base de datos de materiales MATWEB⁴¹:

⁴¹ MATWEB, material property data. [sitio Web]. [Recuperado en 12 junio 2020]. Disponible en: <http://www.matweb.com/>.

*La expresión (109) no contempla los casos donde $a/W < 0.2$.

Cuadro 8. Propiedades mecánicas de la aleación de aluminio 7075-T651.

Propiedad	Valor
Módulo de Young	71100 MPa
Módulo de Poisson	$\nu = 0.33$

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados para los factores de intensidad de esfuerzos son:

Cuadro 9. Cuadro comparativo para los factores de intensidad de esfuerzo 4.2.

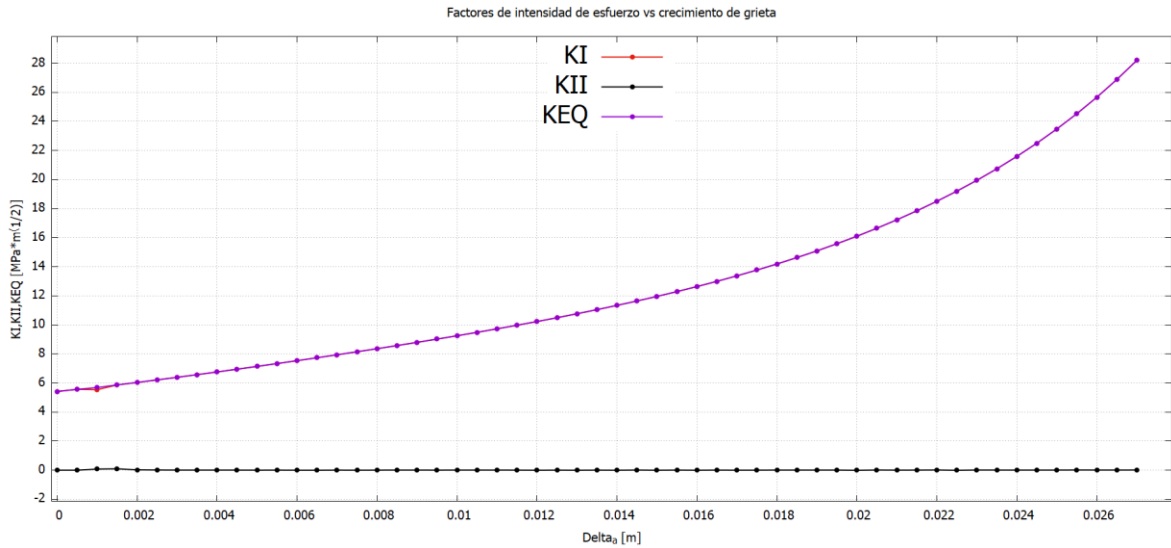
Tamaño de grieta [mm]	Relación de longitud a/W	K_I teórico $MPa\sqrt{m}$	K_I simulación $MPa\sqrt{m}$	Error %
7.3	0.1437	5.2995*	5.4171	2.2191
12.3	0.2421	7.1579	7.1405	0.2431
17.3	0.3406	9.2653	9.2496	0.1694
22.3	0.4390	12.0100	11.9591	0.4238
27.3	0.5374	16.1710	16.1012	0.4316
32.3	0.6358	23.5080	23.4795	0.1212
34.3	0.6752	28.1940	28.1993	0.0188

Fuente: Elaboración propia.

Nótese el ajuste satisfactorio de la simulación en el cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo obteniéndose errores por debajo del 1 %. Con respecto al inicio de la propagación, cuando la relación a/W es menor a 0.2, ya se mencionó que la expresión dada por la norma, empleada como teórica, no puede calcular de manera exacta el factor de intensidad de esfuerzos, es por esto por lo que el valor de $K_I = 5.4171 MPa\sqrt{m}$ es tomado como correcto.

Gráficamente se obtiene:

Figura 43. Factores de intensidad de esfuerzo 4.2.



Fuente: Elaboración propia.

Nuevamente para este caso el factor de intensidad de esfuerzos correspondiente al modo de carga *II* es prácticamente nulo, por consiguiente, el factor de intensidad de esfuerzos del modo de carga *I* es numéricamente igual al equivalente.

Se simula el crecimiento con el modelo de Paris y el modelo de Klesnil-Lucas tomando un valor estimado del umbral de fractura con base en los datos experimentales de la referencia⁴⁰. Las constantes de crecimiento se presentan en el siguiente cuadro:

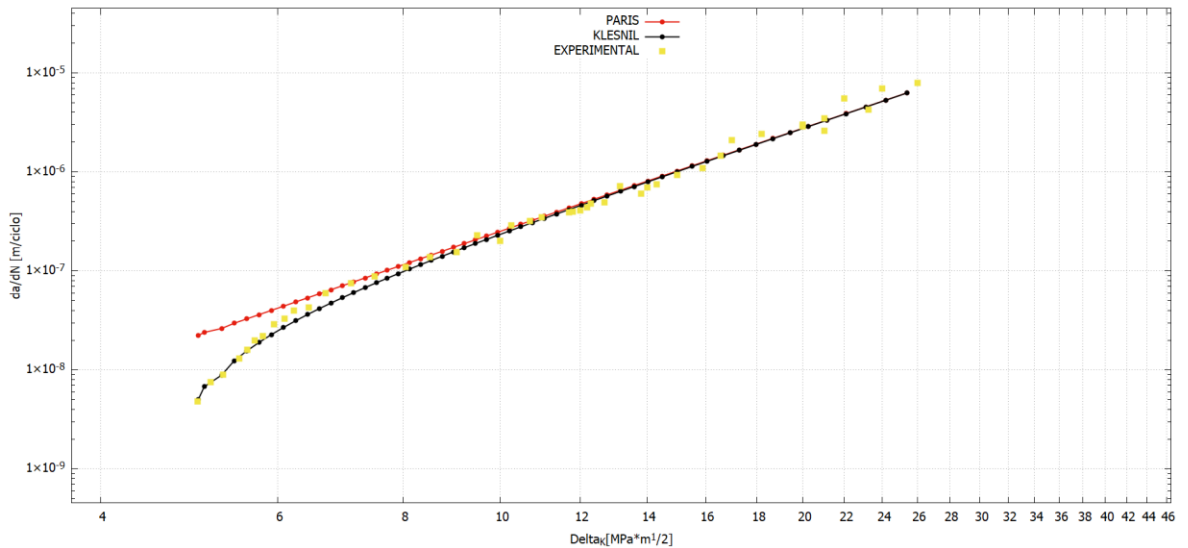
Cuadro 10. Constantes de los modelos 4.2.

Modelo	Constantes del modelo
Klesnil-Lucas	$C = 8.3399 \times 10^{-11}$
	$m = 3.5000$
	$\Delta K_{th} = 4.58 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
Paris-Erdogan	$C = 8.3399 \times 10^{-11}$
	$m = 3.5000$

Fuente: Elaboración propia.

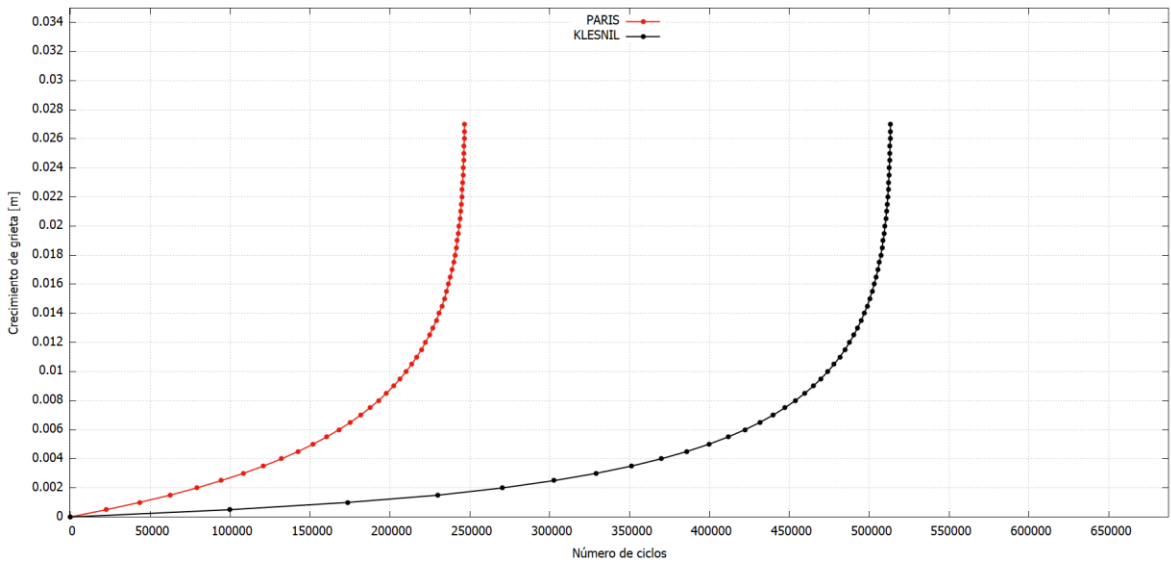
Obteniendo los siguientes resultados para la gráfica de crecimiento de grieta y el número de ciclos transcurridos:

Figura 44. Gráfica de crecimiento de grieta 4.2.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 45. Número total de ciclos transcurridos 4.2.



Fuente: Elaboración propia.

En las figuras 44 y 45 se puede observar el ajuste satisfactorio del modelo de Klesnil a los datos experimentales obtenidos en el artículo de referencia⁴⁰ (figura 44). Al conocer en mayor amplitud el espectro de puntos en la gráfica de crecimiento, puede estimarse mucho mejor un valor para el umbral de fractura, siendo el modelo

de Klesnil el que mejor se acomoda a los datos experimentales. Por otro lado, el modelo de Paris al no admitir datos que no representen una línea recta (en la escala logarítmica), no puede modelar el crecimiento lento característico al inicio del crecimiento, razón por la cual el número total de ciclos estimado es mucho menor al calculado mediante el modelo de Klesnil. Aunque el artículo de referencia no suministra la gráfica de tamaño de grieta vs número de ciclos, se conoce que al final del ensayo, es decir, cuando se alcanza el tamaño de grieta final $a_f = 34.3 \text{ mm}$, han transcurrido un total de $N_t = 498900$ ciclos, el cual es comparado con el total estimado por los modelos:

Cuadro 11. Error porcentual en la estimación del número de ciclos.

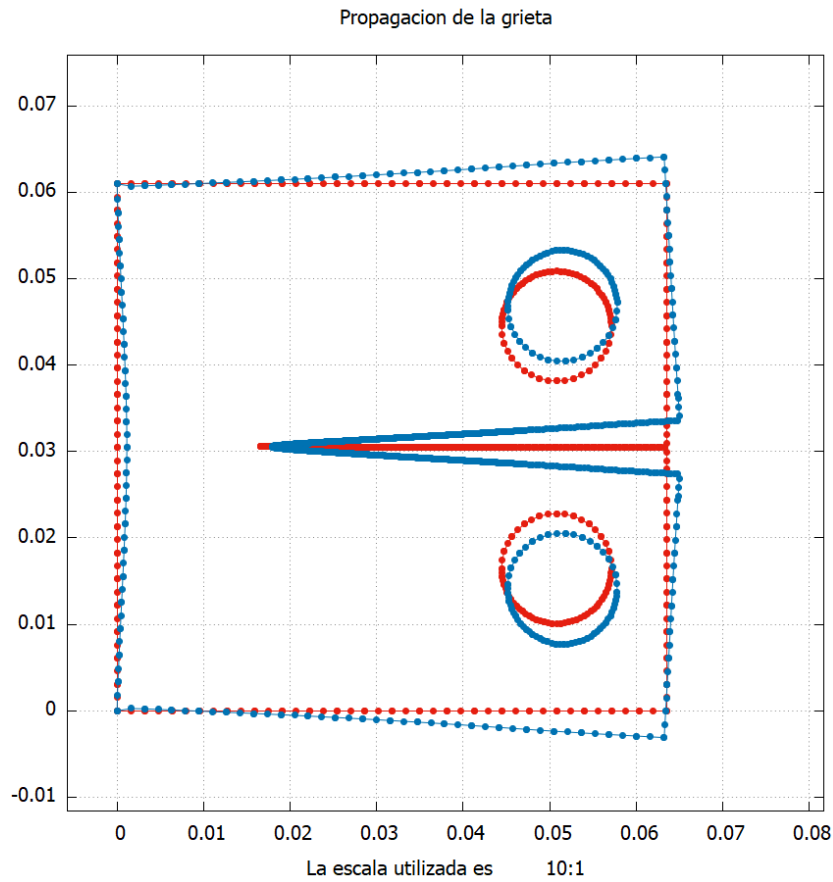
Modelo	Tamaño de grieta [mm]	Número de ciclos	Error [%]
Experimental (teórico)	34.3	498900	-----
Paris	34.3	246682	50.5548
Klesnil-Lucas	34.3	513262	2.8787

Fuente: Elaboración propia.

Con base en los errores porcentuales calculados en el cuadro 11, puede establecerse la buena capacidad del modelo de Klesnil para estimar el número de ciclos transcurridos. También es importante resaltar que el modelo de Paris estimó aproximadamente la mitad del número de ciclos que en realidad transcurrieron, característica que no es incorrecta, sin embargo, si se utiliza este modelo para modelar conjuntamente las zonas 1 y 2 del crecimiento, se incurre en un enfoque demasiado conservativo.

Con respecto a la dirección de propagación de la grieta, es de esperarse que sea completamente perpendicular a la carga aplicada debido a que el factor de intensidad de esfuerzos correspondiente al modo de carga I es el único presente de manera significativa en el cuerpo agrietado. Para sustentar este postulado se obtiene el siguiente bosquejo de la propagación de la grieta:

Figura 46. Propagación de la grieta en el cuerpo agrietado 4.2.



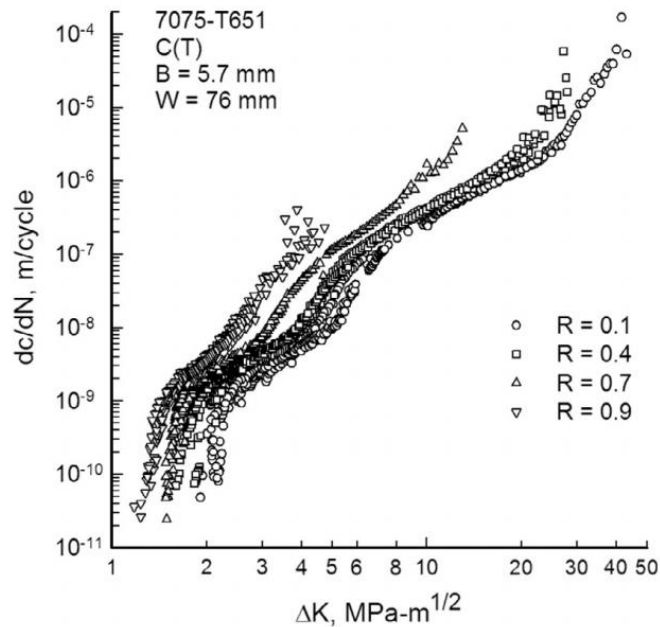
Fuente: Elaboración propia.

Otros aspectos importantes en los ensayos realizados en el artículo de referencia indican que la gráfica de crecimiento es independiente de la geometría y de la carga aplicada, pero depende estrechamente de la relación de cargas de fatiga R , tal y como lo menciona la teoría de la mecánica de la fractura.

Obsérvese que el modelo de Klesnil está definido para un umbral de fractura correspondiente a la variación del factor de intensidad de esfuerzos ΔK para una razón de crecimiento de $10^{-10} m/ciclo$ y que los valores de crecimiento presentados en la figura 44 empiezan desde un valor aproximadamente igual a $3.5 \times 10^{-9} m/ciclo$, valor que se encuentra demasiado lejos de $10^{-10} m/ciclo$. Siguiendo esta idea, se realizó una búsqueda exhaustiva de información para encontrar el comportamiento

de la aleación de aluminio 7075-T651 en la región cercana al umbral de fractura y en la región *III* de crecimiento rápido, es decir, el comportamiento general en las 3 regiones de crecimiento. NEWMAN⁴², ANAGNOSTOU y RUSK presentan el comportamiento general de esta aleación, dada por la siguiente gráfica:

Figura 47. Grafica de crecimiento de grieta en la aleación de aluminio 7075-T651.



Fuente: Newman, Anagnostou y Rusk⁴².

Los datos de interés en la figura 47 son los correspondientes a la relación de cargas de fatiga $R = 0.1$, con lo cual se puede concluir que el comportamiento presentado por Zhao⁴⁰ solo abarca la región *II* de crecimiento y no da un indicio claro sobre el umbral de fractura real del material. Obsérvese en la figura 47 que la región *II* de crecimiento para la aleación de aluminio 7075-T651 no se rige del todo por un línea recta, se presenta un cambio drástico en la gráfica entre 3 y 5 $MPa\sqrt{m}$, comportamiento que, en la primera parte de esta simulación llevó a la mala

⁴² NEWMAN, J.C.; ANAGNOSTOU, E.L. y RUSK, D. Fatigue and crack growth analyses on 7075-T651 aluminum alloy coupons under constant and variable amplitude loading. *International Journal of Fatigue* [en línea]. 2014, vol. 62, pp. 133-143. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0142-1123. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2013.04.020>.

estimación del umbral de fractura con un valor referencial de $\Delta K_{th} = 4.58 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, cuando el verdadero umbral de fractura del material se encuentra muy por debajo de esta cifra con un valor de $\Delta K_{th} = 2.2 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. La experiencia que se tuvo en este caso sirve para advertir al lector de no intentar estimar el comportamiento general del material si no se cuenta con los datos suficientes. Ahora es de especial interés simular la gráfica de crecimiento conociendo su totalidad, en donde las constantes de crecimiento se pueden establecer como:

Cuadro 12. Constantes de crecimiento para la aleación de aluminio 7075-T651.

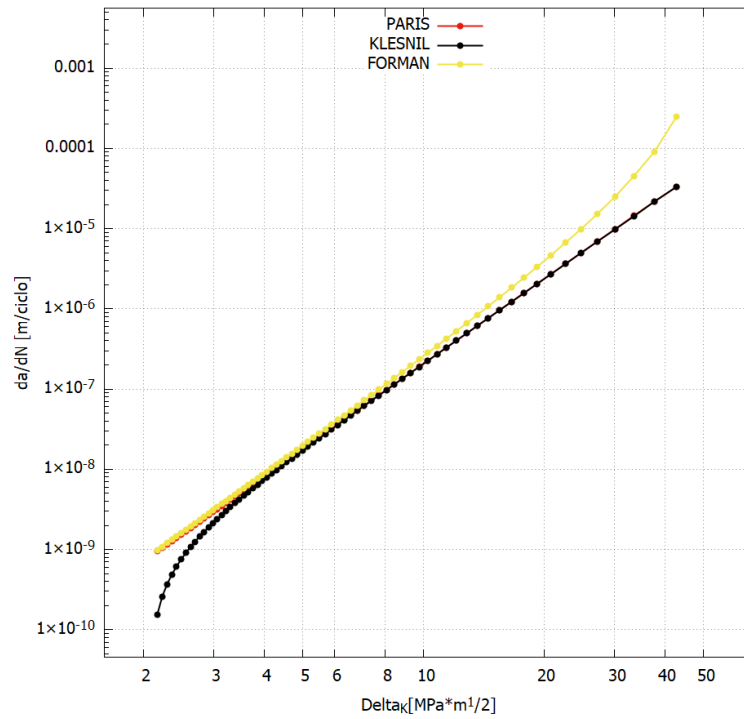
Modelo	Constantes del modelo
Klesnil-Lucas	$C = 6.2558 \times 10^{-11}$
	$m = 3.5229$
	$\Delta K_{th} = 2.05 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
Paris-Erdogan	$C = 6.2558 \times 10^{-11}$
	$m = 3.5229$
Forman	$C = 3.0000 \times 10^{-9}$
	$m = 3.5229$
	$K_{IC} = 54 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

Fuente: Elaboración propia.

Para la gráfica de crecimiento y número de ciclos transcurridos se obtienen los resultados presentados en las figuras 48 y 49. En comparación con los resultados teóricos de la figura 47 se puede establecer:

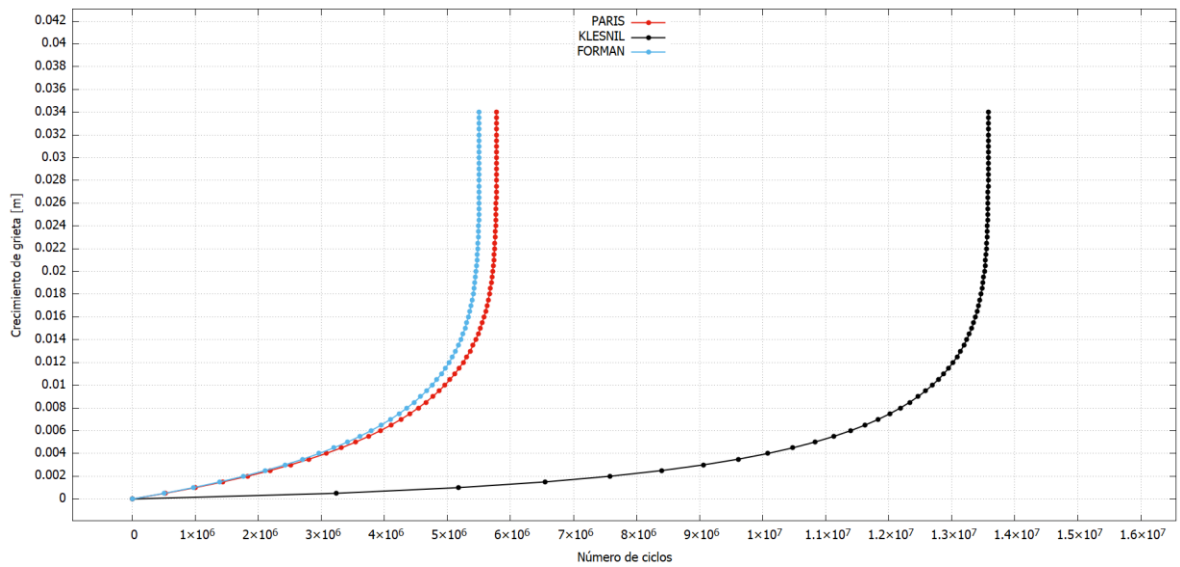
- I. Para el modelo de Paris y el modelo de Klesnil se utilizaron las mismas constantes de crecimiento C y m , en donde estas fueron encontradas con el objetivo de aproximar el cambio brusco que se mencionó, existente entre 3 y $5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, es decir, se encontró la ecuación de la recta que mejor se acomoda a todos los puntos de la región II.

Figura 48. Gráfica de crecimiento de grieta 7075-T651 simulación.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 49. Número de ciclos transcurridos simulación.



Fuente: Elaboración propia.

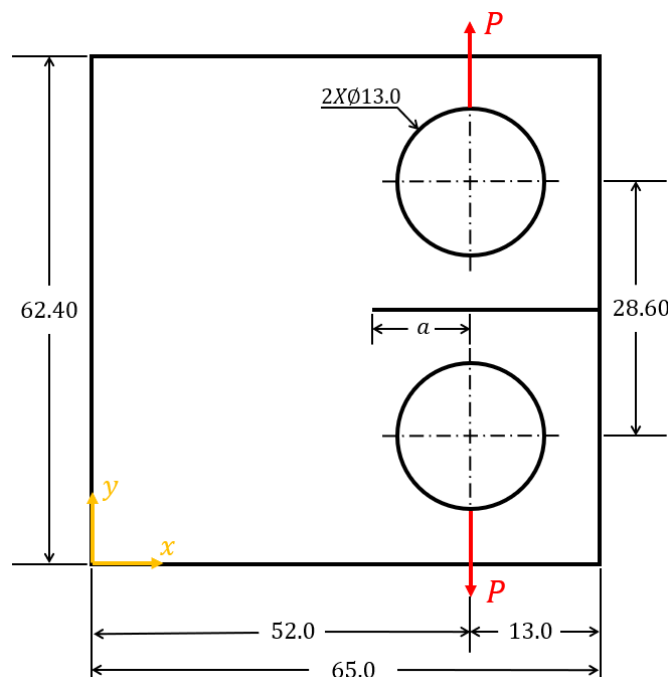
- II. Los tres modelos presentan resultados similares en la región *II* de crecimiento, tanto el modelo de Klesnil-Lucas como el modelo de Forman se asemejan a la recta de Paris para valores intermedios de ΔK .
- III. Al tener los datos suficientes y establecer con menor incertidumbre el umbral de fractura, el modelo de Klesnil se acomoda a las regiones *I* y *II* de la gráfica de crecimiento; teniendo en cuenta que el crecimiento lento característico de la región *I* es el que más demanda número de ciclos transcurridos, el modelo de Klesnil se considera el más acertado para modelar la totalidad del crecimiento.
- IV. El modelo de Forman presenta la misma razón de crecimiento que el modelo de Paris para razones bajas de ΔK ; cuando el valor del factor de intensidad de esfuerzos máximo K_{max} se acerca a la tenacidad a la fractura del material, la curva de crecimiento se acomoda a la región *III*, en otras palabras, el modelo de Forman se acomoda a las regiones *II* y *III*.
- V. Debido a que la región *III* se caracteriza por un crecimiento rápido en pocos ciclos de carga, el modelo de Forman se postula como el más conservativo de los 3 estudiados.
- VI. Obsérvese en la figura 49 el pequeño error en el que se incurre al no considerar el comportamiento de la región *III* de crecimiento, mientras que, al no considerar la región *I* de crecimiento se obtienen menos de la mitad del número de ciclos estimados con el modelo de Klesnil-Lucas.

Para finalizar este caso de estudio, es importante mencionar que no se debe dar por descartada la primera parte de la simulación, aunque el valor de $4.58 MPa\sqrt{m}$ no representa el verdadero umbral de fractura del material, el modelo de Klesnil puede ser utilizado con este umbral de fractura “aparente” para simular el crecimiento, siempre que $\Delta K > 5.4 MPa\sqrt{m}$.

4.3 CRECIMIENTO DE GRIETA EN ACERO FERROVIARIO

En este caso, se simula el crecimiento de grieta en un acero ferroviario utilizado para la fabricación de las ruedas en los trenes de alta velocidad española (AVE). Los resultados que se obtienen son validados con los datos experimentales presentados por PEIXOTO y CASTRO⁴³, y por PEIXOTO y FERREIRA⁴⁴. El procedimiento que se utiliza para determinar la gráfica de crecimiento de grieta se realiza con base a la norma ASTM E-647⁸, utilizando la probeta compact tensión como la mejor alternativa para el ahorro del material en los ensayos. Las dimensiones de la probeta, así como las condiciones de frontera están dadas por la norma y son las presentadas en la siguiente figura:

Figura 50. Probeta Compact tensión 4.3. Dimensiones en mm.



Fuente: Elaboración propia.

⁴³ PEIXOTO, D.F.C. y DE CASTRO, P.M.S.T. Near threshold fatigue crack propagation in railway steels: Comparison of two testing techniques. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* [en línea]. 2015, vol. 80, pp. 73-78. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0167-8442. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.06.008>.

⁴⁴ PEIXOTO, Daniel y FERREIRA, Luis Andrade. Fatigue crack propagation behavior in railway steels. *International Journal of Structural Integrity* [en línea]. 2013, vol. 4, nro. 4, pp.487-500. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1108/IJSI-10-2012-0029>.

El tamaño inicial de la grieta es de 10.4 mm ($a_i = 10.4 \text{ mm}$) y el grosor de la probeta es de $B = 13 \text{ mm}$. Al igual que se realizó en el ejemplo anterior, se verifica que $W/20 \leq B \leq W/2$ y $a/W > 0.2$, por lo tanto, la expresión (109) se puede utilizar para calcular los factores de intensidad de esfuerzo para cualquier longitud de grieta durante el crecimiento.

Con respecto al acero que se modela, su composición y propiedades mecánicas son presentadas en los cuadros 13 y 14, respectivamente. Es importante resaltar que, en las referencias citadas, se utilizan diferentes procedimientos para obtener la gráfica de crecimiento en la región *II* y en la región *I* cercana al umbral de fractura, razón por la cual, no se obtiene una cuenta total del número de ciclos transcurrido para el total del crecimiento. Además, la carga P no es constante para el cálculo del umbral de fractura. Los procedimientos que fueron usados por la referencia³⁷ fueron:

- I. Carga cíclica constante aumentando el factor de intensidad de esfuerzos (*K increasing Test*): Este procedimiento está dado por la norma y es bastante sencillo. Se somete la probeta a una carga cíclica de amplitud constante, de esta manera, a medida que crece la grieta, el factor de intensidad de esfuerzos aumenta debido a la distancia entre la carga aplicada y la punta de la grieta. Este procedimiento se realiza para la zona *II*.
- II. Carga cíclica de relación R constante, disminuyendo el factor de intensidad de esfuerzos (*K decreasing test*): Inicialmente se somete el cuerpo a una carga determinada, con una relación R , cada determinada longitud de crecimiento, se disminuye la carga manteniendo la relación entre P_{min} y P_{max} , es decir, R se mantiene constante durante todo el procedimiento. Para cada escalón de carga, se determina la razón de crecimiento, el ensayo termina cuando se obtiene la razón de crecimiento deseada. Este procedimiento, dado por la norma, se utiliza para la región *I* y es importante mencionar que demanda mucho tiempo y equipos especializados para su realización.

III. Factor de intensidad de esfuerzos constante y aumento de R : Este es un procedimiento especial para determinar el umbral de fractura. Básicamente el cuerpo agrietado se somete a una carga máxima, tal que, el factor de intensidad de esfuerzos máximo K_{max} se mantenga constante durante el crecimiento de la grieta; por otro lado, el factor de intensidad de esfuerzos mínimo K_{min} se aumenta, a su vez aumentando la relación R . Este procedimiento no se encuentra normalizado, sin embargo, ha tenido gran acogida para determinar el umbral de fractura implícito del material, sin los efectos de la relación de cargas (véase 2.2.3).

Los resultados de estos procedimientos se presentan junto con las propiedades mecánicas en el cuadro 14.

Cuadro 13. Composición química del Acero AVE.

C	Mn	Si	P	S	Ni	Mo	Al	Cr	Cu
0.49	0.74	0.25	0.01	<0.005	0.18	0.06	0.03	0.26	0.12

Fuente: PEIXOTO-CASTRO⁴³.

Cuadro 14. Propiedades mecánicas de acero AVE.

Propiedad		Valor
Módulo de Young		197000 MPa
Módulo de Poisson		$\nu = 0.30$
Umbral de fractura ΔK_{th}	$R = 0.1$	$8.90 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
	$R = 0.4$	$6.19 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
	$R = 0.7$	$3.42 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
Umbral de fractura intrínseco ΔK_{th}^*	$R_{th} = 0.67$	$4.05 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

Fuente: Elaboración propia.

Con los datos presentados en el cuadro 14 concernientes al umbral de fractura para diferentes relaciones de carga R , puede estimarse un comportamiento similar al presentado en la figura 11, sin embargo, para poder establecer con mayor certeza

la relación entre estas dos variables, se necesitaría realizar una mayor cantidad de ensayos experimentales que contemplen la totalidad de las relaciones de carga en un rango de 0 a 0.90, en términos prácticos. Ahora bien, la simulación se realizó para la relación de carga $R = 0.1$, por ser el ensayo experimental con mejores resultados en toda la gráfica de crecimiento. Para obtener el mismo rango de factores de intensidad de esfuerzos que presentan los datos experimentales, el crecimiento de grieta se realiza desde un tamaño inicial $a_i = 10.4 \text{ mm}$ hasta un tamaño final $a_f = 38.4 \text{ mm}$, es decir, para un crecimiento total de: $\Delta a = 28 \text{ mm}$, el cual es discretizado en 56 incrementos (NCRI=113) del doble longitud del elemento en la punta de la grieta, producto de la malla utilizada; la longitud de este elemento es de $L_{elem} = 0.25 \text{ mm}$. Bajo estas condiciones de crecimiento, la carga aplicada es de $P_{max} = 7.1289 \text{ KN}$; se utiliza el mismo enfoque de aproximación que se adoptó en el ejemplo anterior para calcular la tracción aplicada (Figura 42), obteniéndose:

$$t = \frac{7.1289 \times 10^{-3} \text{ MN}}{\frac{180}{21} * \frac{2\pi}{360} * \frac{13 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} * 13 \times 10^{-3} \text{ m}} = 563.943 \text{ MPa} \quad (111)$$

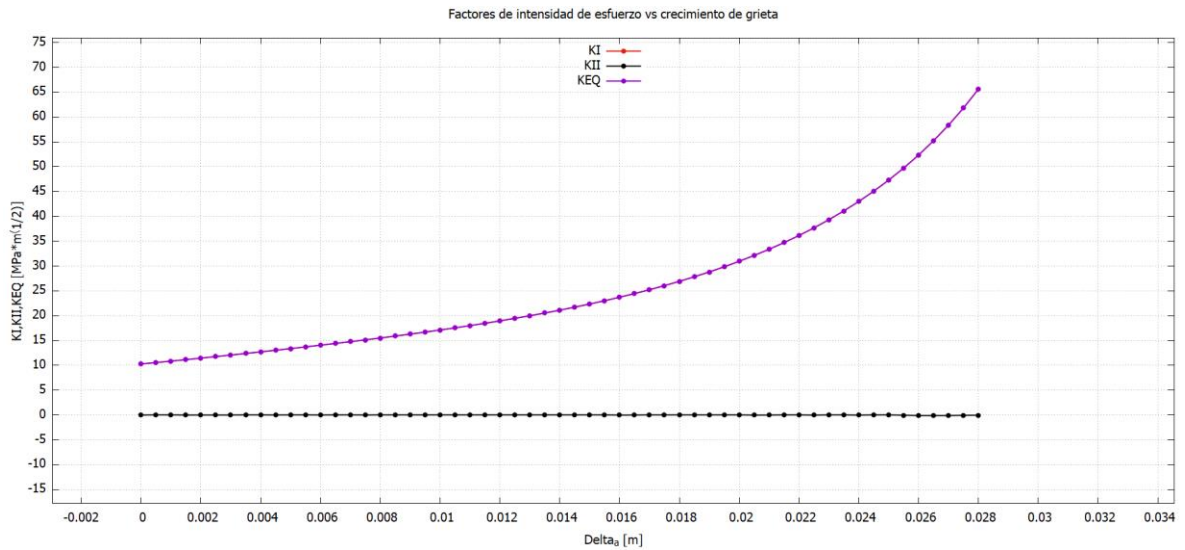
Para validar la simulación con respecto a las condiciones de frontera, la geometría y las aproximaciones mencionadas, se comparan los factores de intensidad de esfuerzos obtenidos por la simulación con los valores teóricos de la expresión (109), tal y como lo muestra el siguiente cuadro:

Cuadro 15. Errores porcentuales en el factor de intensidad de esfuerzos 4.3.

Tamaño de grieta [mm]	Relación de longitud a/W	K_I teórico $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	K_I simulación $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	Error %
10.4	0.2000	10.2778	10.2818	0.0389
15.4	0.2962	13.3829	13.3745	0.0628
20.4	0.3923	17.1526	17.1195	0.1929
25.4	0.4885	22.4267	22.3502	0.3411
30.4	0.5846	30.9521	30.9499	0.0071
35.4	0.6808	46.9310	47.2946	0.7747
38.4	0.7385	64.5564	65.1843	0.9726

Fuente: Elaboración propia.

Figura 51. Factores de intensidad de esfuerzo 4.3.

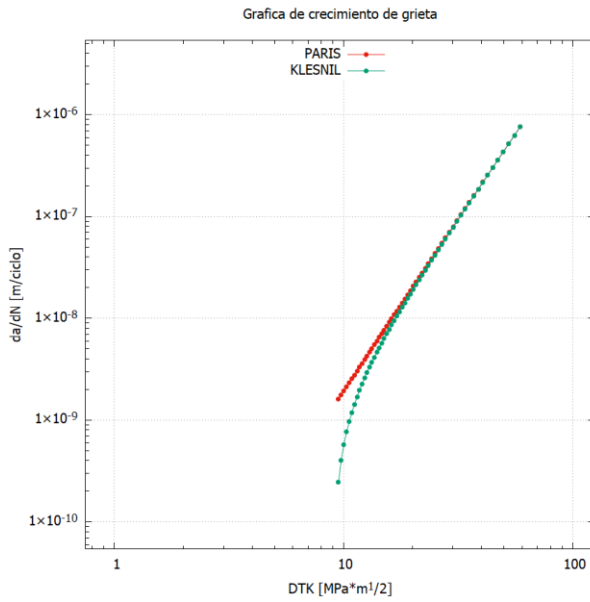


Fuente: Elaboración propia.

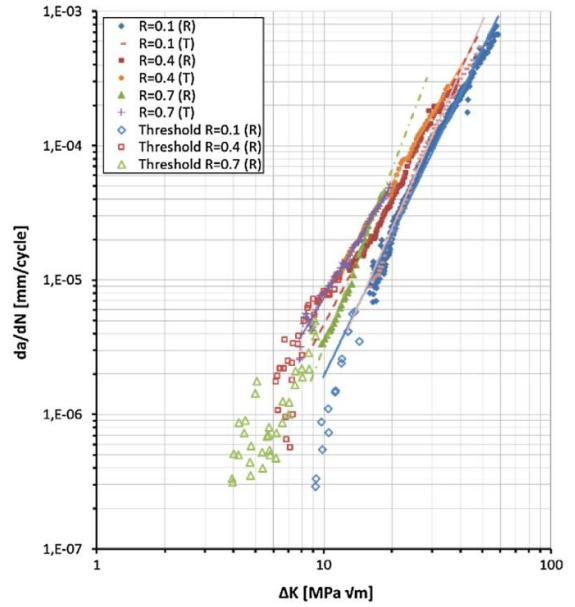
Para todo el rango de cálculo se obtuvieron errores porcentuales menores al 1 por ciento, por lo cual se valida la simulación en este parámetro. El crecimiento de la grieta, el cálculo de la razón de crecimiento y el número de ciclos transcurridos, se efectúan mediante el modelo de Paris y el modelo de Klesnil, los cuales se implementan con las mismas constante: $C = 7.7874 \times 10^{-13}$ y $m = 3.4096$, a diferencia de que en el modelo de Klesnil se incluye el umbral de fractura $\Delta K_{th} = 8.9 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. Los resultados obtenidos para la razón de crecimiento se comparan en la figura 52 con los puntos experimentales presentados en la referencia⁴³, en donde se observa como nuevamente el modelo de Klesnil se acomoda satisfactoriamente a las regiones *I* y *II* de la gráfica. Por otro lado, el modelo de Paris, tal y como se obtuvo en el ejemplo anterior, solo puede simular la región *II* de crecimiento, siendo excesivamente conservativo en el cálculo del número de ciclos transcurridos (véase figura 53).

Figura 52. Gráfica de crecimiento de grieta 4.3.

a) Simulación.

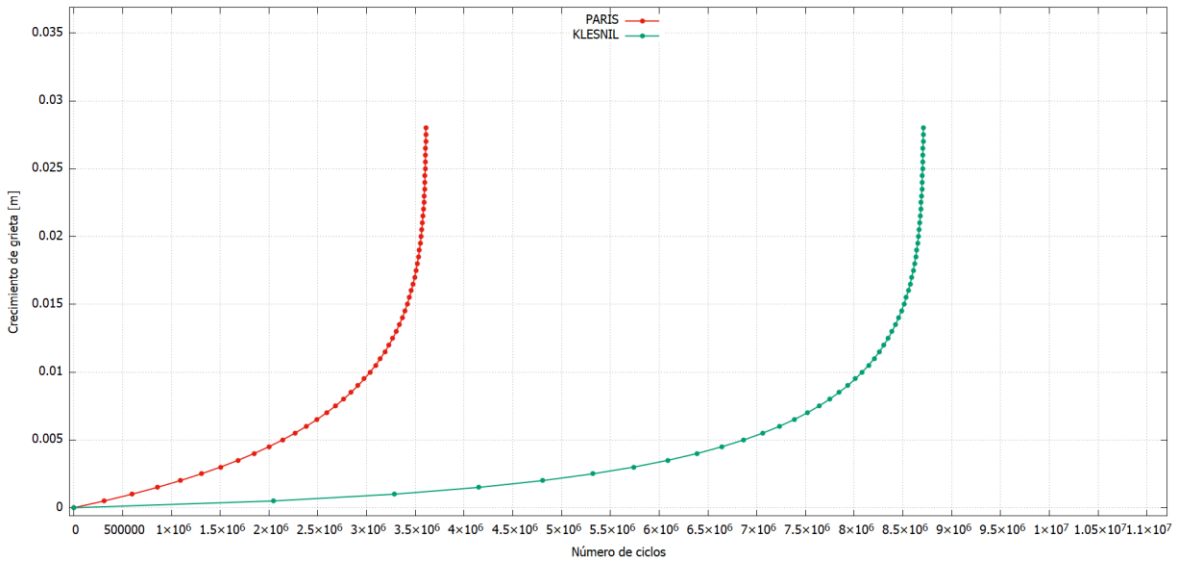


b) Referencia experimental.



Fuente: a) Elaboración propia. b) Peixoto y Castro⁴².

Figura 53. Número total de ciclos transcurridos 4.3.



Fuente: Elaboración propia.

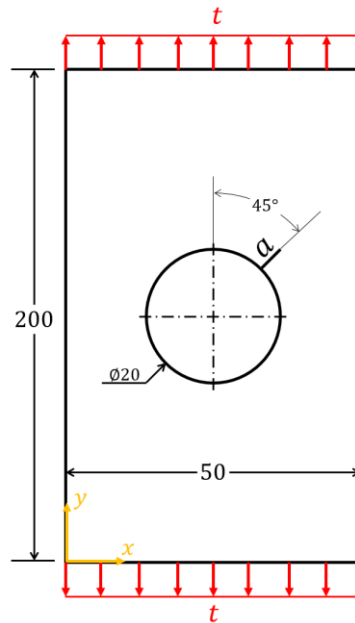
4.4 CRECIMIENTO DE GRIETA EN UN CUERPO PERFORADO.

A continuación, se presenta un ejemplo de crecimiento de grieta, en el cual, debido a las condiciones de carga, geometría del cuerpo, tamaño de grieta e inclinación, están presentes los dos factores de intensidad de esfuerzos en el inicio de la propagación. Resulta importante en este caso validar el criterio de máximo esfuerzo tangencial con el cual se calcula la dirección y la trayectoria de la grieta. El problema que se simula es introducido por BOLJANOVIĆ y MAKSIMOVIĆ⁴⁵, en donde, además de realizar el ensayo de fractura (experimental), se simula el crecimiento con el software comercial de elementos finitos *NASTRAN*®. SAJITH, MURTHY y ROBI⁴⁶ obtienen resultados satisfactorios para el mismo problema con el software *FRANC2D*® desarrollado por la universidad de Cornell; los resultados obtenidos en las dos referencias, junto con los datos experimentales, son utilizados para validar la simulación que se realiza. La postulación del problema consiste básicamente en el crecimiento de grieta en una lámina de aleación de aluminio 2024-T3, cuyas dimensiones se presentan en la figura 54. La grieta emana de un hueco previamente taladrado, con una orientación de 45° y una longitud inicial $a_i = 2 \text{ mm}$; el cuerpo se encuentra sujeto a cargas cíclicas de amplitud constante con una relación de cargas $R = 0.1$ y un valor máximo de $P_{max} = 5200 \text{ N}$, la cual, considerando el grosor de la lámina de $B = 5 \text{ mm}$, se traduce en una tracción aplicada igual a $t = 20.8 \text{ MPa}$.

⁴⁵ BOLJANOVIĆ, Slobodanka y MAKSIMOVIĆ, Stevan. Analysis of the crack growth propagation process under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 2011, vol. 78, nro. 8, pp. 1565-1576. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.02.003>.

⁴⁶ SAJITH, S.; MURTHY, K. y ROBI, P. Mixed mode fatigue crack growth studies of crack emanating from circular hole. *AIP Conference Proceedings* 2200, 020041 [en línea]. 2019, pp. 1-9. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1063/1.5141211>.

Figura 54. Geometría y condiciones de frontera 4.4. Dimensiones en mm.



Fuente: Elaboración propia.

El crecimiento se simula hasta un tamaño de grieta de $a_f = 18.2 \text{ mm}$, es decir, un crecimiento de $\Delta a = 16.2 \text{ mm}$. Se implementan 400 nodos y 200 elementos en la malla inicial; para este análisis se utilizan 162 incrementos (NCRI = 162) de longitud $CADV = 0.1 \text{ mm}$. Con el fin de comparar los resultados de la simulación con los presentados en los artículos de referencia, se toman las mismas propiedades mecánicas (cuadro 16), las mismas condiciones de frontera y se utiliza la ley de Paris con constantes $C = 2.22 \times 10^{-10}$ y $m = 3.545$ para modelar el crecimiento.

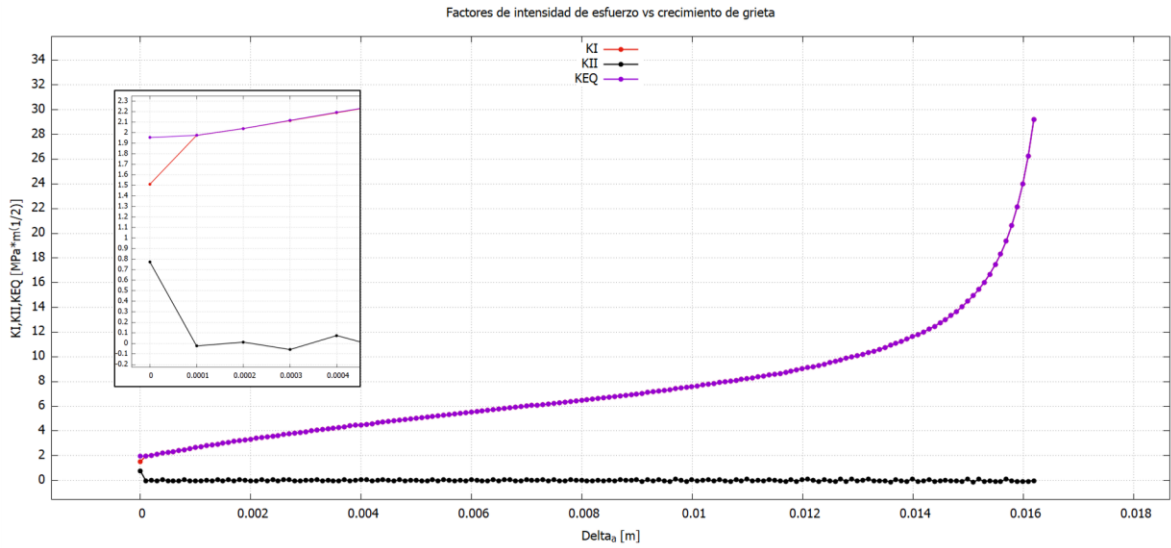
Cuadro 16. Propiedades mecánicas aleación de aluminio 2024-T3

Propiedad	Valor
Módulo de Young	$E = 71200 \text{ MPa}$
Módulo de Poisson	$\nu = 0.33$

Fuente: Elaboración propia.

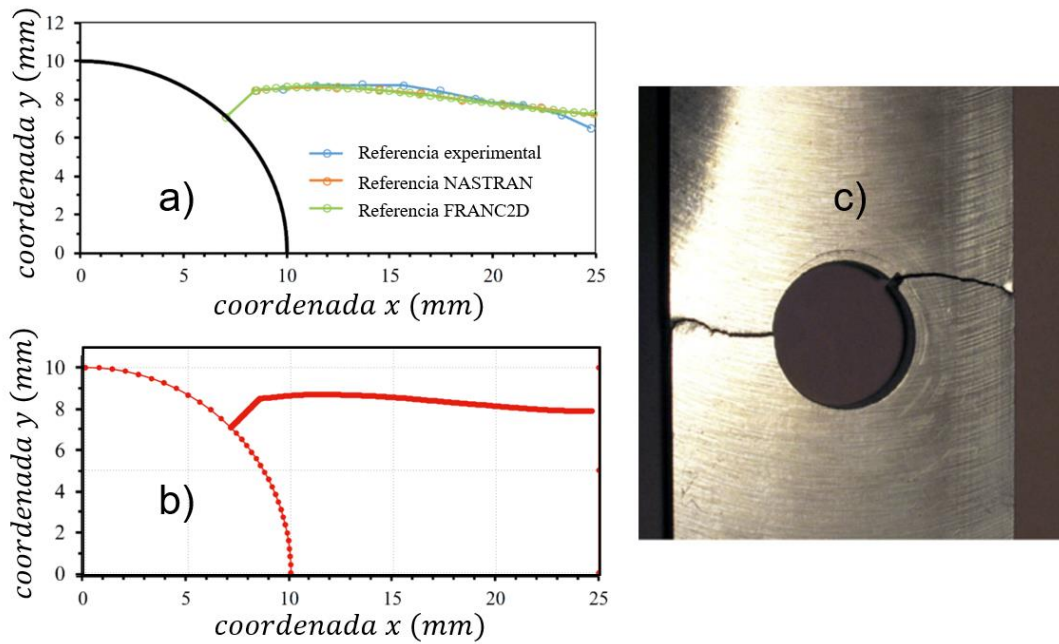
A continuación, se presentan los resultados obtenidos para los factores de intensidad de esfuerzo, la trayectoria de la grieta y la estimación del número de ciclos transcurridos.

Figura 55. Factores de intensidad de esfuerzo 4.4.



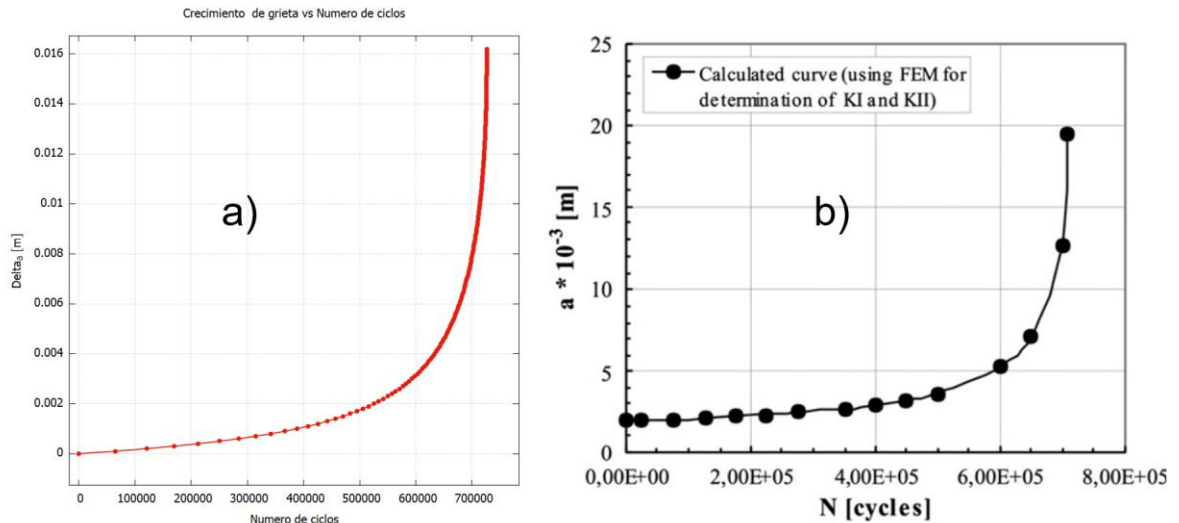
Fuente: Elaboración propia.

Figura 56. Trayectoria de la grieta 4.4. a) Referencia computacional, b) Simulación actual, c) Referencia experimental.



Fuente: a) Sajith, Murthy y Robi⁴⁶, b) Elaboración propia, c) Boljanovic y Maksimovic⁴⁵.

Figura 57. Número total de ciclos transcurridos 4.4. a) simulación actual, b) Resultados experimentales teóricos.



Fuente: a) elaboración propia, b) Boljanovic y Maksimovic⁴⁵.

Con base en los resultados obtenidos (Figuras 55-57), puede notarse la buena capacidad del criterio de máximo esfuerzo tangencial para predecir la dirección de crecimiento. Es importante resaltar que al principio del crecimiento se cuenta con la presencia de los dos factores de intensidad de esfuerzo de manera significativa, lo que conlleva a una dirección de crecimiento de -41° con respecto al sistema coordinado en la punta de la grieta. Después del primer incremento, el factor de intensidad de esfuerzo correspondiente al modo *II* se anula casi completamente, lo que se refleja en ángulos de crecimiento muy pequeños, es decir, en un crecimiento casi recto de la grieta de manera horizontal. En la figura 56 se puede apreciar el ajuste satisfactorio de la simulación tanto a las trayectorias estimadas por otros métodos numéricos, como a la trayectoria experimental presentada en la referencia⁴⁵. Por último, el número de ciclos estimado en la simulación se encuentra bastante cercano al total de ciclos experimentales presentados en la figura 57, el error porcentual obtenido en este parámetro se expone en el siguiente cuadro:

Cuadro 17. Error porcentual en el número total de ciclos 4.4.

Resultado	Numero de ciclos N	Error [%]
Experimental	≈ 705000	-----
Simulación	726223	3,0104

Fuente: Elaboración propia.

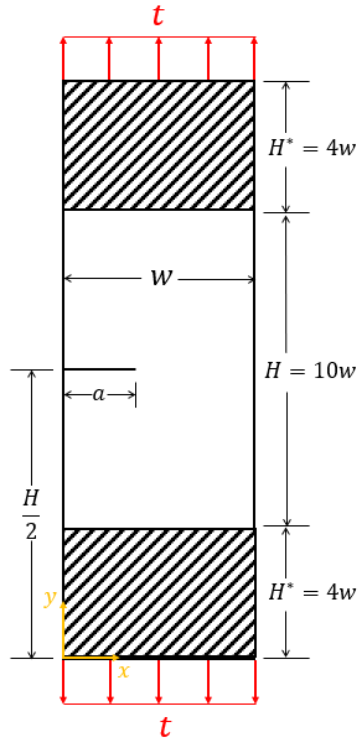
4.5 OTROS PROBLEMAS

En este apartado se presentan algunos problemas que, si bien no se enfocan en los diferentes modelos de crecimiento, fueron simulados durante la realización del proyecto para validar los cambios que se realizaron al software en el pre y post proceso, también han sido útiles para validar los resultados con respecto a la evaluación de los factores de intensidad de esfuerzo y dirección de crecimiento.

4.5.1 Validación de los factores de intensidad de esfuerzos con la probeta SINGLE EDGE NOTCHED TEST según la norma BS8571. Para validar los resultados de los factores de intensidad de esfuerzo se lleva a cabo la simulación del ensayo SENT por su nombre en inglés, *Single Edge Notched Test*, adoptado por la norma BS 8571, para determinar la tenacidad a la fractura y las razones de crecimiento de grieta en metales. Este ensayo se constituye como una alternativa menos conservadora para determinar la tenacidad a la fractura con respecto a los procedimientos que plantea la sociedad americana para pruebas y materiales (ASTM) con las probetas *compact tension* y *SENB (Single Edge Notched Bend)*.

El ensayo consiste básicamente en la fractura de una probeta con las dimensiones mostradas en la figura 54. El espécimen se somete a una carga axial P en sus extremos por lo cual solo se tiene presente el modo de fractura I . Por recomendación de la norma, se trabaja con $H/w = 10$ y $H^*/w = 4$, en donde H es la longitud libre y H^* es la longitud de sujeción en cada extremo. El espesor B se recomienda ser igual al ancho w (sección cuadrada).

Figura 58. Geometría y condiciones de frontera para el ensayo SENT.



Fuente: Elaboración propia.

Para validar los resultados de la simulación, estos se comparan con 3 referencias:

- I. Expresión general de ZHU⁴⁷ obtenida de correlaciones experimentales para tracción y flexión pura:

$$K = \frac{P}{B\sqrt{w}} F\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$F\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{\left(\frac{a}{w}\right)^{0.5}}{\left(1 + 2\left(\frac{a}{w}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{a}{w}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\sum_{i=1}^7 t_i \left(\frac{a}{w}\right)^{i-1}\right) \quad (112)$$

En donde los parámetros t_i están dados en el siguiente cuadro:

⁴⁷ ZHU, Xian-Kui. Full range stress intensity factor solutions for clamped SENT specimens. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* [en línea]. 2017, vol. 149, pp. 1-13. [Recuperado 13 junio 2020]. ISSN 0308-0161. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.ijvpv.2016.11.004>.

Cuadro 18. Coeficientes de la expresión 112.

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>t_i</i>	1.9873	0.7422	11.188	-45.82	100.49	-120.03	51.448

Fuente: Zhu⁴⁷.

La expresión 112 es válida para el rango $0.05 \leq a/w \leq 0.97$ con errores porcentuales menores al 0.5 %.

- II. Expresión general de SHEN⁴⁸, et al, obtenida de un ajuste por simulación. Esta expresión es adoptada por la norma para probetas delgadas ($1/2 \leq B \leq 1$).

$$K = \frac{P}{BW} \sqrt{\pi a} G\left(\frac{a}{w}\right)$$

$$G\left(\frac{a}{w}\right) = \sum_{i=1}^{12} t_i \left(\frac{a}{w}\right)^{i-1} \quad (113)$$

En donde los parámetros t_i están dados en el siguiente cuadro:

Cuadro 19. Coeficientes de la expresión 113.

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6
<i>t_i</i>	1.197	-2.133	23.886	-69.051	100.462	-41.397
<i>i</i>	7	8	9	10	11	12
<i>t_i</i>	-36.137	51.215	-6.607	-52.322	18.574	19.465

Fuente: Shen⁴⁸.

La expresión (113) es válida para el rango $0.05 \leq a/w \leq 0.95$.

- III. Simulación por el método de elementos finitos mediante ABAQUS® presentada por WANG⁴⁹, et al.

⁴⁸ SHEN, G.; GIANETTO, J.A. y Tyson, W.R. Measurement of J-R Curves Using Single-Specimen Technique on Clamped SE(T) Specimens. *International Society of Offshore and Polar Engineers* [en línea]. 2009, pp. 1-8. [Recuperado 13 junio 2020]. ISOPE-I-09-150. Disponible en: <https://www.onepetro.org/conference-paper/ISOPE-I-09-150>.

⁴⁹ WANG, X, et al. Numerical verification of stress intensity factor solution for clamped single edge notched tension (SENT) specimens. *Fatigue and fracture of engineering materials and structures* [en línea]. 2018, vol. 41, nro. 2, pp. 494-499. [Recuperado 13 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1111/ffe.12700>.

Para comparar los resultados se han variado las longitudes de grieta desde una relación $a/w = 0.1$ hasta $a/w = 0.95$, con incrementos iguales de 0.05; para cada longitud se calcula el factor de intensidad de esfuerzo y la función de forma:

$$F\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{KB\sqrt{w}}{P} \quad (114)$$

De esta manera, se logran comparar los resultados, en donde, para la expresión 113, $F(a/w)$ se rige por:

$$F\left(\frac{a}{w}\right) = \sqrt{\frac{\pi a}{w}} G\left(\frac{a}{w}\right) \quad (115)$$

Los resultados para un acero estructural con propiedades $E = 207000 \text{ MPa}$ y $\nu = 0.3$ se presentan a continuación.

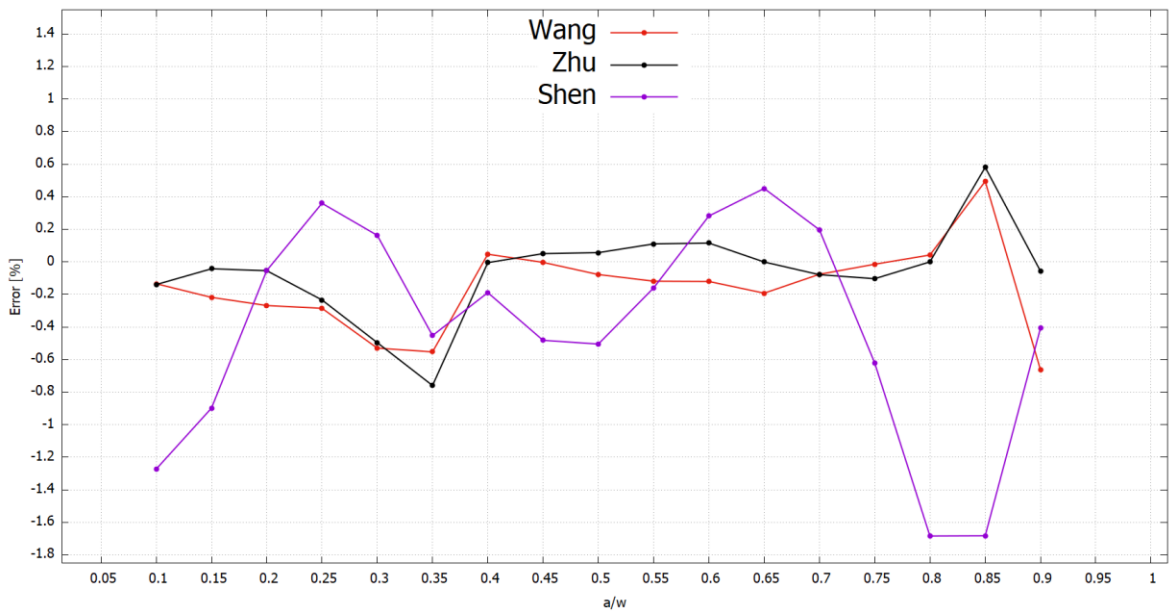
Cuadro 20. Comparativa de los resultados para los factores de intensidad de esfuerzo.

$\frac{a}{w}$	$F\left(\frac{a}{w}\right)$				Error [%]		
	DBEM	Wang ⁴⁹	Zhu ⁴⁷	Shen ⁴⁸	Wang ⁴⁹	Zhu ⁴⁷	Shen ⁴⁸
0.1	0.66033	0.65944	0.65941	0.65192	-0.13478	-0.13978	-1.27330
0.15	0.8512	0.84934	0.85084	0.84355	-0.21852	-0.04276	-0.89873
0.2	1.04627	1.04346	1.04570	1.04571	-0.26857	-0.05448	-0.05400
0.25	1.25723	1.25364	1.25429	1.26175	-0.28555	-0.23425	0.35944
0.3	1.4918	1.48389	1.48439	1.49423	-0.53023	-0.49651	0.16256
0.35	1.75667	1.74695	1.74332	1.74871	-0.55332	-0.75985	-0.45302
0.4	2.03828	2.03923	2.03818	2.03442	0.04661	-0.00500	-0.18933
0.45	2.37444	2.37436	2.37564	2.36299	-0.00337	0.05041	-0.48218
0.5	2.75991	2.75775	2.76146	2.74597	-0.07826	0.05627	-0.50527
0.55	3.19639	3.19259	3.19991	3.19126	-0.11888	0.11003	-0.16059
0.6	3.68878	3.68433	3.69304	3.69916	-0.12064	0.11538	0.28150
0.65	4.24007	4.2319	4.24002	4.25917	-0.19269	-0.00108	0.45054
0.7	4.84038	4.83667	4.83655	4.84991	-0.07665	-0.07904	0.19691
0.75	5.48038	5.47957	5.47469	5.44638	-0.01478	-0.10382	-0.62043
0.8	6.14463	6.14720	6.14461	6.04114	0.04183	-0.00036	-1.68425
0.85	6.80417	6.83780	6.84366	6.68967	0.49426	0.58044	-1.68278
0.9	7.62577	7.57517	7.62140	7.59472	-0.66354	-0.05728	-0.40716

Fuente: Elaboración propia.

De manera gráfica:

Figura 59. Errores porcentuales en el cálculo del factor de intensidad de esfuerzo.



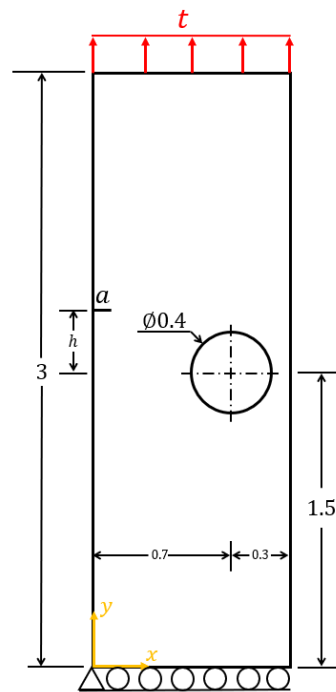
Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos en la figura 59 validan la simulación realizada y exponen la capacidad del método dual de elementos de contorno junto con la integral J para calcular de manera correcta los factores de intensidad de esfuerzo. Se obtienen errores por debajo del 1.7% en todo el rango de estudio con respecto a las tres referencias. Cabe resaltar que, en la aplicación del ensayo por recomendación de la norma, el rango típico a utilizar del parámetro a/w es de 0.2 a 0.7, en este rango el error porcentual fue inferior al 0.5 % con respecto a las 3 referencias.

4.5.2 Dirección de crecimiento en placas perforadas. Durante la realización del presente proyecto se modelaron los siguientes casos que sirven para estudiar la influencia de una o varias perforaciones en la dirección de crecimiento y en la estimación de los factores de intensidad de esfuerzo. Se estudiaron los siguientes casos:

4.5.2.1 Desviación del camino de crecimiento a causa de una perforación. Para estudiar el efecto que causa una perforación en la desviación del camino de propagación, se simula el problema planteado en la figura 60 (dimensiones en metros). La longitud de grieta inicial se trabaja como $a_i = 0.1\text{ m}$ y se varía la distancia h con la cual, se podrá analizar el efecto que produce la perforación en función de que tan cerca se encuentra la grieta del agujero. Se simulan 9 casos, desde $h_i = 0.0\text{ m}$ hasta $h_f = 0.8\text{ m}$; el material a modelar tiene un módulo de Young $E = 30000\text{ MPa}$ y un módulo de Poisson $\nu = 0.2$, la tracción aplicada en la arista superior es de $t = 5 \times 10^{-3}\text{ MPa}$.

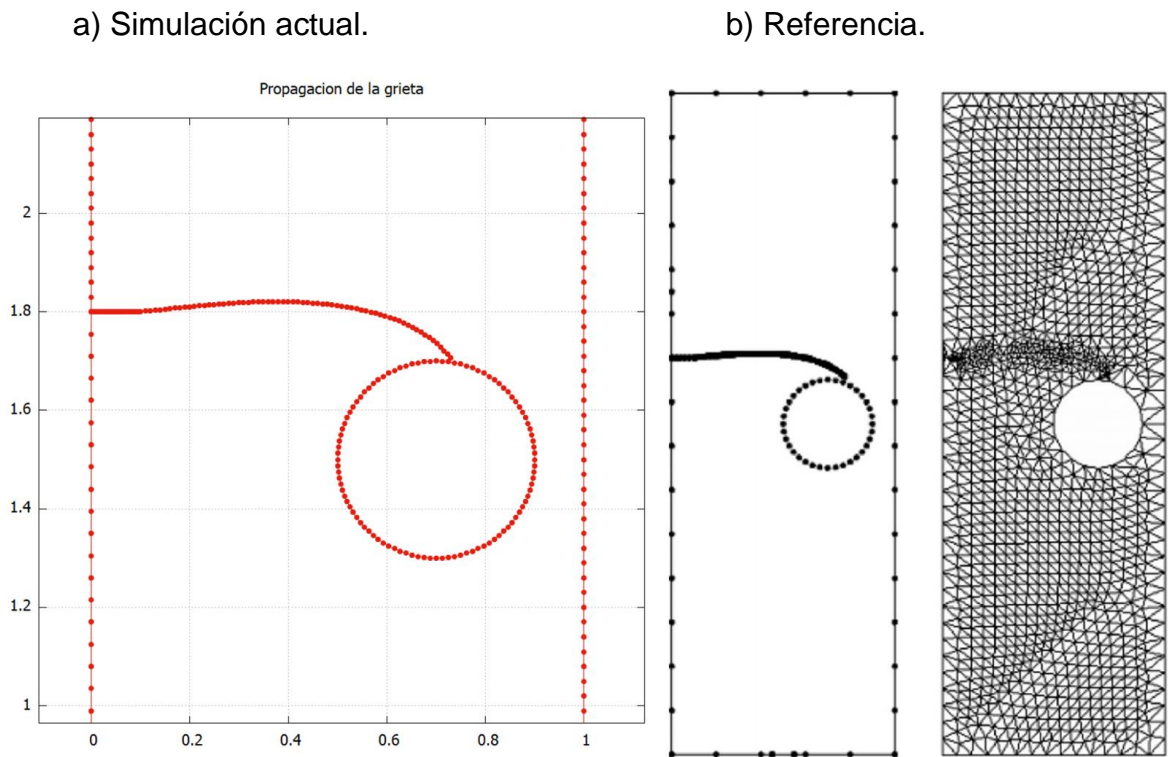
Figura 60. Geometría y condiciones de frontera 4.5.2.1. Dimensiones en metros.



Fuente: Elaboración propia.

Este problema ha sido utilizado para validar diferentes métodos numéricos, los resultados para $h = 0.3 m$ son contrastados con la simulación publicada por LEONEL y VENTURINI⁵⁰ (véase figura 61 y 62). También se muestran los resultados al variar la distancia h de la misma manera que VENTURA, BUDYN y BELYTSCHKO⁵¹, para una geometría ligeramente diferente.

Figura 61. Trayectoria de propagación para $h = 0.3 m$.

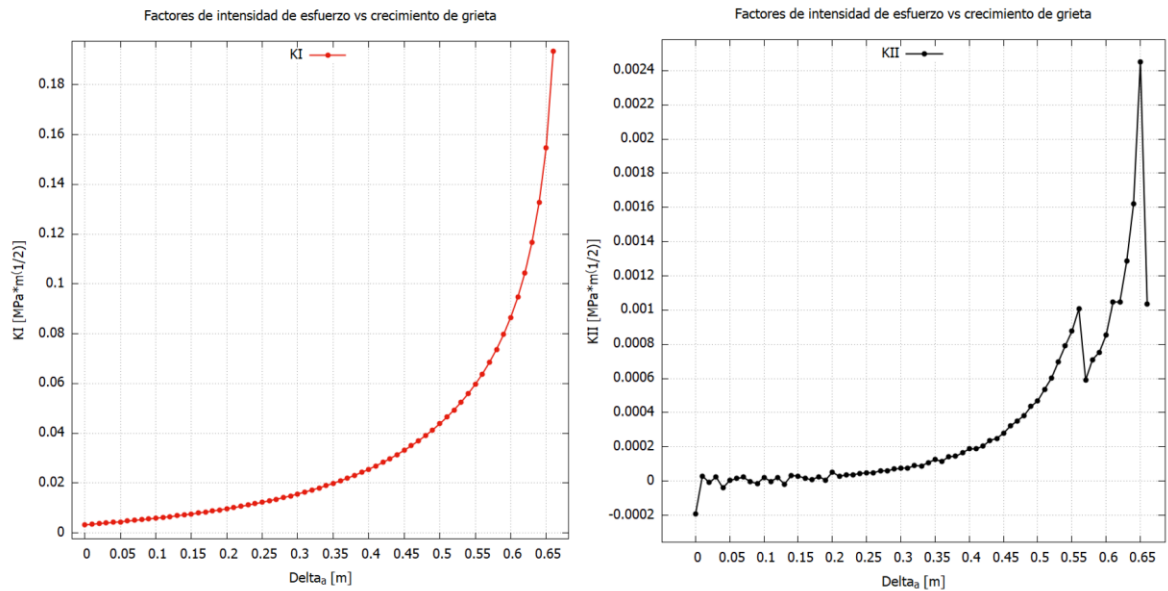


Fuente: a) Elaboración propia. b) Leonel y Venturini⁵⁰.

⁵⁰ LEONEL, Edson Denner y VENTURINI, Wilson Sergio. Multiple random crack propagation using a boundary element formulation. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 2011, vol. 78, nro. 6, pp. 1077-1090. [Recuperado 13 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.11.012>.

⁵¹ VENTURA, Giulio; BUDYN, Elisa y BELYTSCHKO, T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* [en línea]. 2003, vol. 58, pp. 1571 - 1592. [Recuperado 13 junio 2020]. DOI: 10.1002/nme.829. Disponible en: <https://doi.org/10.1002/nme.829>.

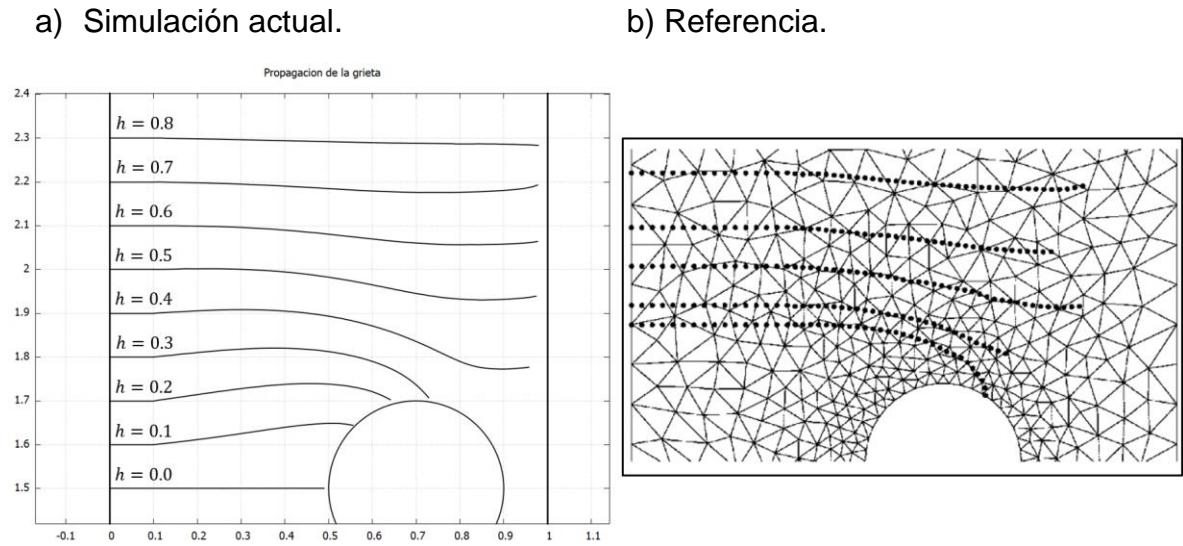
Figura 62. Factores de intensidad de esfuerzo 4.5.2.1.



Fuente: Elaboración propia.

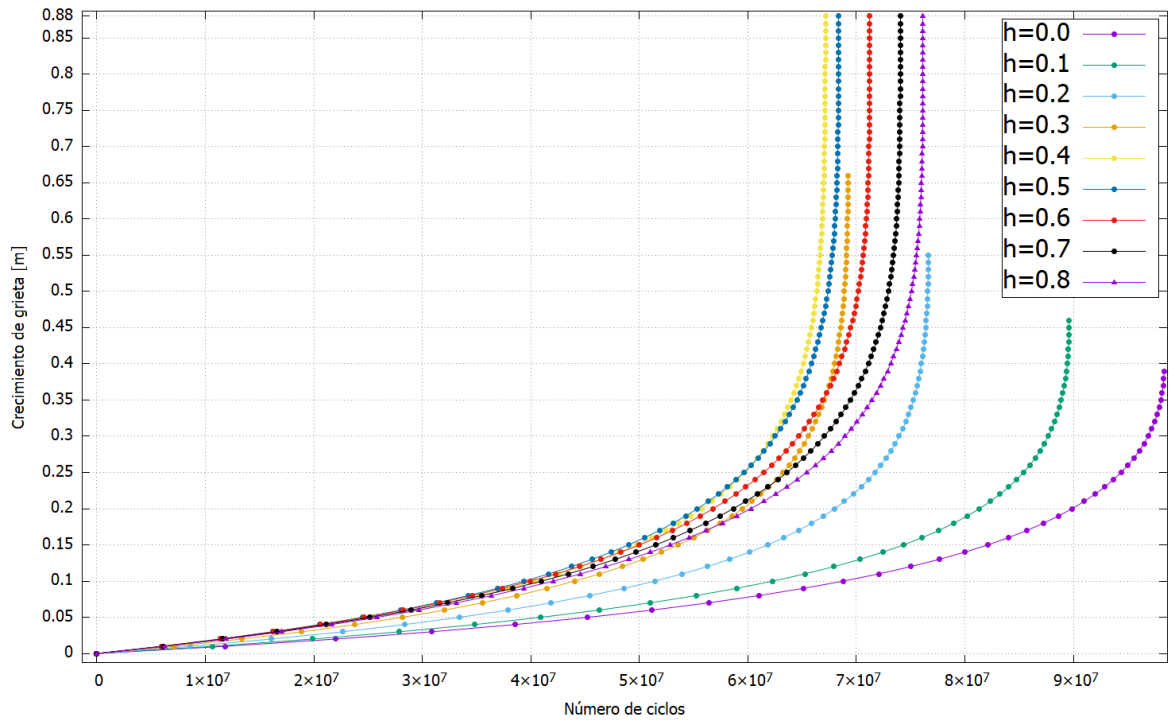
Para el caso específico en el que $h = 0.3 \text{ m}$, se predice la trayectoria mostrada en la figura 61, los resultados concuerdan de manera satisfactoria con la referencia⁴³. Puede observarse el efecto que tiene el agujero en la trayectoria de propagación, produciendo una desviación bastante fuerte hacia el orificio, a tal punto que se propaga hasta colapsar contra el mismo; este comportamiento se ve acompañado de un factor de intensidad de esfuerzo K_{II} creciente con la longitud de la grieta, lo que justifica la desviación significativa con respecto a la dirección anterior desde la longitud $x = 0.4 \text{ m}$, en el sistema global de coordenadas (figura 60).

Figura 63. Comparación de la trayectoria en función de la distancia h .



Fuente: Elaboración propia. b) Ventura, Budyn y Belytschko⁵¹.

Figura 64. Número de ciclos en función de h .



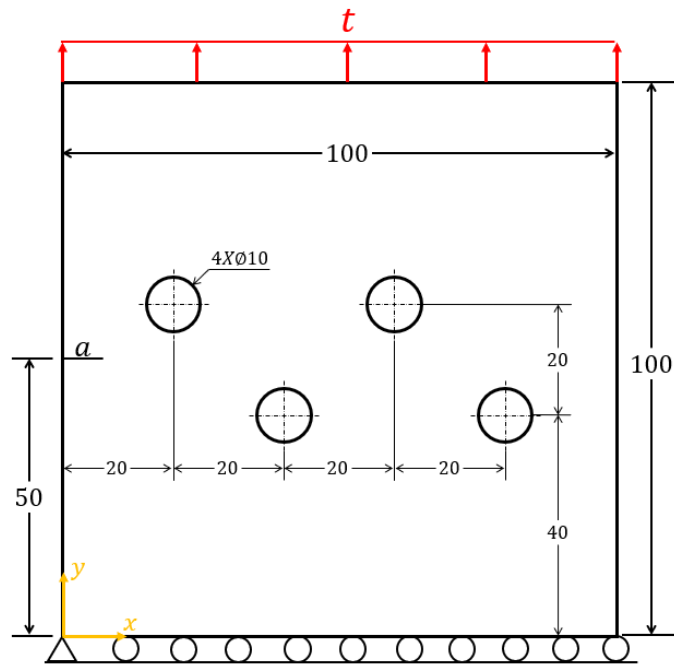
Fuente: Elaboración propia.

Otro análisis puede ser realizado para los resultados obtenidos al variar la distancia h , presentados en las figuras 63 y 64:

1. La trayectoria de propagación está estrechamente relacionada con la distancia entre la grieta y el orificio, para $h = 0.0 \text{ m}$ no se observa efecto del agujero en la trayectoria debido a la simetría del problema, sin embargo, para los otros casos de estudio, el agujero tiene una influencia bastante marcada en la trayectoria de la grieta, cuando $h = 0.1, 0.2$ y 0.3 m la grieta colapsa hacia el agujero, siendo estos los casos donde más se ve afectada. Para $h = 0.4$ y 0.5 m la grieta se desvía hacia el agujero, no obstante, una vez el crecimiento pasa la zona del orificio (en el eje x), se recupera la dirección horizontal típica del modo de fractura I . Finalmente, para $h = 0.6 \text{ m}$ en adelante, la influencia del orificio es mínima y es cada vez menos notoria con el incremento de la distancia, es por esto que se obtienen trayectorias horizontales, tal y como se esperaría en todos los casos si no existiera la perforación.
2. El número de ciclos para cada caso fue estimado mediante la ley de Paris, con el ánimo de hacer un análisis general que solo dependa de los factores de intensidad de esfuerzo producto de la posición inicial de cada grieta y su propagación. Los resultados son expuestos en la figura 64, en donde se puede observar que la vida útil más corta del componente se tendría si la grieta está localizada en una distancia cercana a $h = 0.4 \text{ m}$. Inicialmente se pensó en que la posición $h = 0.0 \text{ m}$ representaría el crecimiento más rápido de la grieta, sin embargo, se advierte que éste es un pensamiento erróneo ya que dicha idea fue basada en que la propagación más corta, demandaría el menor número de ciclos; los resultados obtenidos se ven respaldados bajo de idea general de que la rata de crecimiento no depende de la longitud propiamente de la grieta, sino del factor de intensidad de esfuerzos al que está expuesta.
3. Un análisis de localización, como el expuesto, debe ser realizado para cada problema de diseño en específico, con el fin de encontrar la posición inicial de la grieta que demanda menos número de ciclos antes de la falla.

4.5.2.2 Crecimiento de grieta en placa con 4 perforaciones. Se lleva a cabo la simulación de crecimiento de grieta en una lámina perforada de aluminio 7075-T6 con propiedades mecánicas $E = 72000 \text{ MPa}$ y $\nu = 0.33$, y con la geometría mostrada en la figura 65, espesor de 1 mm . La lamina tiene inicialmente una grieta en su arista izquierda con longitud $a_i = 6 \text{ mm}$, el crecimiento se modela en 82 incrementos de longitud $CADV = 0.6 \text{ mm c/u}$, para un crecimiento total de $\Delta a = 49.2 \text{ mm}$. El cuerpo agrietado se discretiza inicialmente con 600 nodos y 300 elementos.

Figura 65. Geometría y condiciones de frontera 4.5.2.2. Dimensiones en mm.



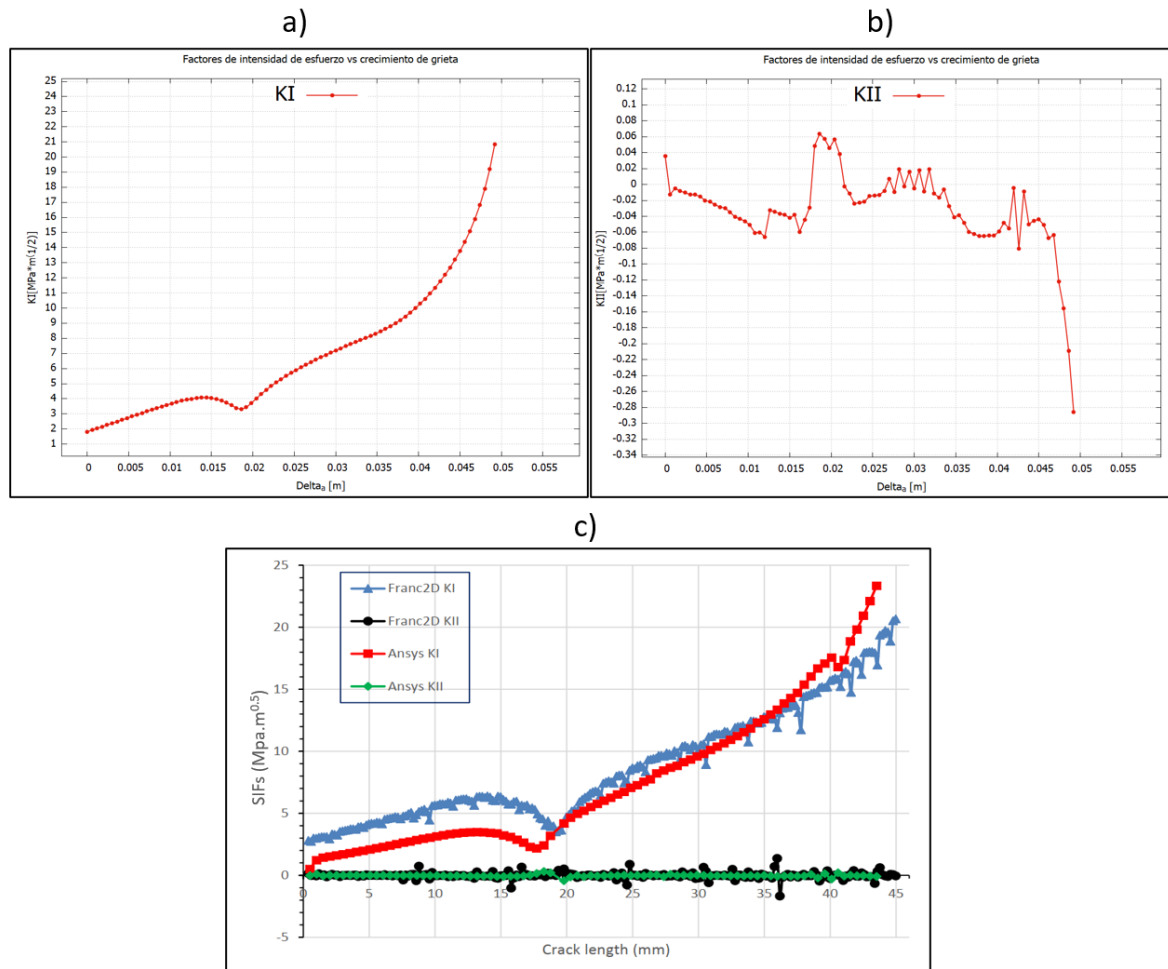
Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, se simula la trayectoria de crecimiento de la grieta, se adopta la misma tracción que LIU⁵², et al, con valor de $t = 10 \text{ MPa}$ para poder comparar los

⁵² LIU, Y.J.; LI, Y.X. y XIE, W. Modeling of multiple crack propagation in 2-D elastic solids by the fast multipole boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 2017, vol.172, pp. 1-16. [Recuperado 13 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.01.010>.

resultados. ALSHOAIBI⁵³ y YASIN simulan el mismo problema con el software comercial ANSYS® de elementos finitos en 3 dimensiones y con el software de elementos finitos desarrollado por la universidad de Cornell, FRANC2D®. Los resultados con la respectiva comparativa se presentan en las siguientes figuras:

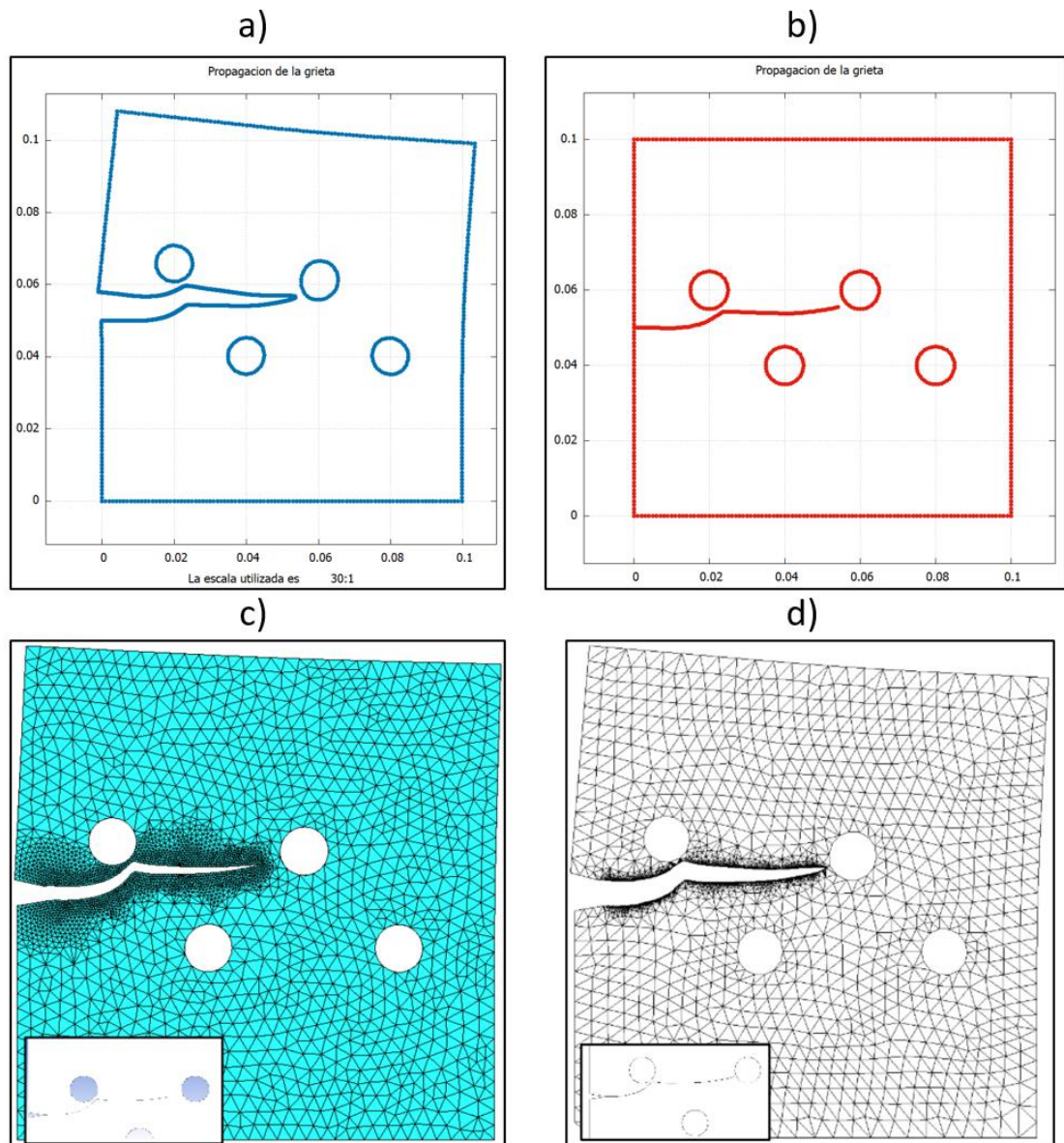
Figura 66. Factores de intensidad de esfuerzo. a) KI, b) KII, c) Referencia.



Fuente: a) Elaboración propia., b) Elaboración propia., c) Alshoaibi y Yasin⁵³.

⁵³ ALSHOAIBI, A. y YASIN, O. Finite Element Simulation of Crack Growth Path and Stress Intensity Factors Evaluation in linear Elastic Materials. *Journal of Computational & Applied Research in Mechanical Engineering* [en línea]. 2019, pp. 1-13. [Recuperado 13 junio 2020]. DOI: 10.22061/jcar.me.2019.5081.1622. Disponible en: http://jcar.me.sru.ac.ir/article_1161_0.html.

Figura 67. Trayectoria de crecimiento. a) Configuración deformada, b) Trayectoria de crecimiento, c) Referencia ANSYS®, d) Referencia FRANC2D®.



Fuente: a) y b) Elaboración propia. c) y d) Alshoabi y Yasin⁵³.

La simulación puede ser validada con base en los resultados expuestos en las figuras 66 y 67. Los factores de intensidad de esfuerzo calculados en los tres softwares muestran un comportamiento similar con valores cercanos en todo el rango de crecimiento, Alshoabi y Yasin⁴³ atribuyen los errores entre las simulaciones al refinamiento de la malla. Con respecto a la dirección de crecimiento,

se obtiene el mismo camino de propagación que las referencias computacionales. Puede observarse la influencia del agujero en la trayectoria de la grieta, se presenta una desviación con respecto a la horizontal que tiene como efecto que la grieta tienda a propagarse hacia el orificio; en este rango de longitudes, el factor de intensidad de esfuerzo K_I disminuye su valor numérico mientras que K_{II} aumenta en magnitud, comportamiento que se ve acompañado de la inclinación de la grieta en sentido antihorario. Una vez el crecimiento es tal que se abandona la zona de afectación del primer orificio, la grieta retoma su propagación en la dirección equivalente al modo de fractura I , pauta que se mantiene hasta la eminente falla del componente al acercarse al segundo orificio.

Cuadro 21. Cuadro comparativo de las simulaciones.

Software	Tipo de simulación	Malla inicial		Tiempo de simulación
		Número de nodos	Número de elementos	
ANSYS ⁵³	Elementos finitos en 3 dimensiones	14737	7177	≈150 minutos
FRANC2D ⁵³	Elementos finitos en 2 dimensiones	3933	1911	≈1 min
CRACKER	DBEM- 82 incrementos	600	300	≈1 minuto y 25 segundos
	DBEM- 41 incrementos	600	300	≈ 33 segundos

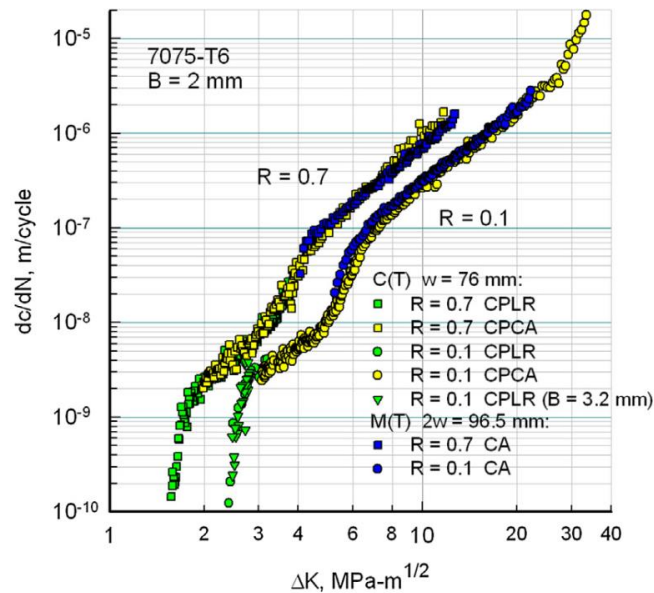
Fuente: Elaboración propia.

En el cuadro 21 se presenta una comparativa de las tres simulaciones, la actual y las dos de referencia, con respecto a la malla utilizada y el tiempo de simulación. Como primer apunte puede apreciarse la notable diferencia en el tiempo computacional que demanda la simulación en 3 dimensiones con respecto a las simulaciones en estado plano, comportamiento que es apenas lógico de esperarse al tener presente que el remallado en objetos tridimensionales es una operación compleja de realizar. La segunda característica por resaltar es el número de nodos y elementos que se utilizaron. El método dual de elementos de contorno, al

discretizar solo la frontera del cuerpo, utiliza una cantidad menor de estos para obtener los mismos resultados. Como tercer aporte, se evidencian las virtudes del método de elementos de contorno, se obtienen tiempos de simulación bajos, los cuales dependen de la cantidad de incrementos que se utilizan para discretizar el crecimiento. Con 41 incrementos en lugar de 81, se obtienen los mismos resultados en un tiempo 2 veces menor, comportamiento que sugiere realizar un análisis de sensibilidad para encontrar el número mínimo de incrementos y de elementos de discretización con los cuales se puede llegar a la solución estable.

Con respecto al crecimiento de grieta bajo cargas de fatiga de amplitud constante en la aleación de aluminio 7075-T6, NEWMAN y WALKER⁵⁴ presentan el comportamiento general de este material para 2 relaciones de carga, $R = 0.1$ y $R = 0.7$:

Figura 68. Crecimiento de grieta en aleación de aluminio 7075-T6.



Fuente: Newman y Walker⁵⁴.

⁵⁴ NEWMAN, J.C. y WALKER, K.F. Fatigue-crack growth in two aluminum alloys and crack-closure analyses under constant-amplitude and spectrum loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* [en línea]. 2019, vol. 100, pp. 307-318. [Recuperado 13 junio 2020]. ISSN 0167-8442. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.01.029>.

Para $R = 0.1$ la gráfica de crecimiento difiere muy poco con respecto a los resultados citados en el caso 4.2 para la aleación 7075-T651. Es más, se presenta la misma variación en la pendiente de la región II entre 3 y 5 $MPa\sqrt{m}$. De la figura 63 se extraen las constantes de crecimiento y el umbral de fractura para modelar el crecimiento de la grieta, variables mostradas en el siguiente cuadro:

Cuadro 22. Constantes de crecimiento aleación de aluminio 7075-T6.

Relación de cargas	Parámetro / Valor
$R = 0.1$	$C = 6.5783 \times 10^{-11}$
	$m = 3.4771$
	$\Delta K_{th} \cong 2.2 MPa\sqrt{m}$
$R = 0.7$	$C = 1.5149 \times 10^{-10}$
	$m = 3.7227$
	$\Delta K_{th} \cong 1.4 MPa\sqrt{m}$

Fuente: Elaboración propia.

Con la tracción aplicada de 10 MPa se obtiene los resultados de la figura 66 para los factores de intensidad de esfuerzo; téngase en mente que en función de K_I y K_{II} se calcula la variación del factor de intensidad de esfuerzo equivalente, mediante el modelo de Tanaka (expresión 93), parámetro que es introducido en los diferentes modelos de crecimiento para calcular el número de ciclos transcurridos y la razón de crecimiento.

El umbral de fractura por definición (véase 2.23) representa un valor mínimo de la variación del factor de intensidad de esfuerzo para que pueda haber crecimiento, de esta manera, el criterio general para crecimiento se postula como:

$$\text{Inicio/Pausa de la propagación} \begin{cases} \Delta K_{eff} < \Delta K_{th}, & \text{NO hay crecimiento} \\ \Delta K_{eff} \geq \Delta K_{th}, & \text{SI hay crecimiento} \end{cases} \quad (116)$$

Es entonces pertinente verificar este criterio para el inicio de la propagación, debido a que, una vez comienza, el factor de intensidad de esfuerzo aumenta con la

longitud de la grieta. Es prudente advertir que en algunas aplicaciones específicas puede disminuir el factor de intensidad de esfuerzo durante la propagación, lo que llevaría a revisar más de una vez este criterio y, en dado caso, que se cumpla la primera condición, físicamente representaría la pausa de la propagación. Para este caso en específico se obtienen los siguientes valores al inicio de la propagación:

Cuadro 23. Factores de intensidad de esfuerzo efectivos.

Relación de cargas de fatiga	Factores de intensidad de esfuerzo [$MPa\sqrt{m}$]	Variación del factor de intensidad de esfuerzo [$MPa\sqrt{m}$]	Valor efectivo para los modelos de crecimiento [$MPa\sqrt{m}$]
$R = 0.1$	$K_I = 1.8200$	$\Delta K_I = 1.6380$	$\Delta K_{eff} = 1.6386$
	$K_{II} = 3.5460 \times 10^{-2}$	$\Delta K_{II} = 0.0319$	
$R = 0.7$	$K_I = 1.8200$	$\Delta K_I = 0.5460$	$\Delta K_{eff} = 0.5462$
	$K_{II} = 3.5460 \times 10^{-2}$	$\Delta K_{II} = 0.0106$	

Fuente: Elaboración propia.

Al comparar los valores obtenidos con el umbral de fractura para cada relación de cargas se obtiene:

Cuadro 24. Comparativa para el crecimiento de la grieta.

Relación de cargas de fatiga	Valor efectivo para los modelos de crecimiento [$MPa\sqrt{m}$]	Umbral de fractura [$MPa\sqrt{m}$]	Resultado
$R = 0.1$	$\Delta K_{eff} = 1.6386$	$\Delta K_{th} = 2.2$	No hay propagación
$R = 0.7$	$\Delta K_{eff} = 0.5462$	$\Delta K_{th} = 1.4$	No hay propagación

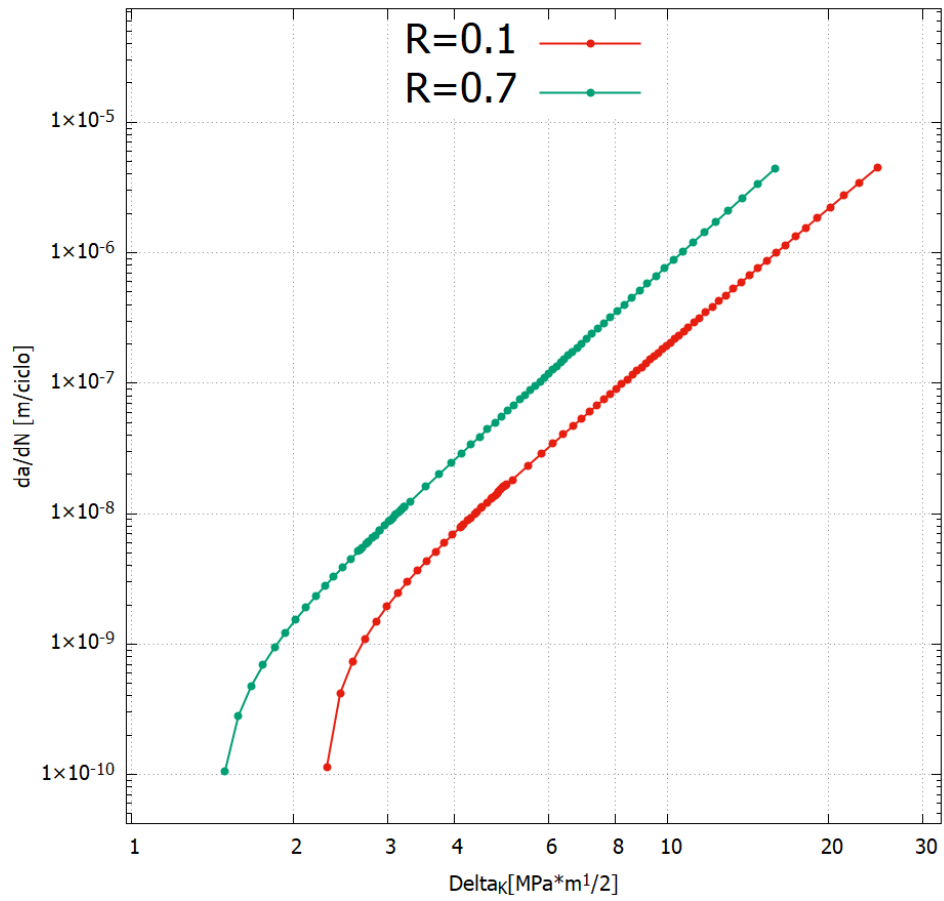
Fuente: Elaboración propia.

Con lo cual se puede concluir que, para las condiciones dadas: Tamaño de grieta, orientación y carga aplicada, no hay propagación. La trayectoria que sigue la grieta expuesta en la figura 67, es correcta, ya que no depende de la magnitud del factor de intensidad de esfuerzo sino de la relación K_I/K_{II} . Para que pueda haber crecimiento de grieta en esta placa de aluminio debe aumentar el valor de ΔK_{eff} , lo cual se puede lograr de dos maneras básicas:

1. Con la carga constante se debe aumentar el tamaño de grieta inicial.
2. Con el mismo tamaño de grieta inicial se debe aumentar la carga.

En un enfoque ingenieril se pretende encontrar la carga máxima para que no ocurra el crecimiento; mediante prueba y error haciendo uso del software se ha encontrado que una tracción de $t = 13.45 \text{ MPa}$, la cual representa un valor de $\Delta K_{eff} = 2.2040 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, incurriría en el inicio de la propagación para $R=0.1$. Para la relación de cargas $R=0.7$ se necesitaría una tracción de $t = 25.7 \text{ MPa}$, la cual representa un valor de $\Delta K_{eff} = 1.4038 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ al inicio de la propagación. Una vez se confirma que la grieta puede empezar su crecimiento, se simula la propagación con el modelo de Klesnil para tener en cuenta la zona *I* y *II* (véase figura 69).

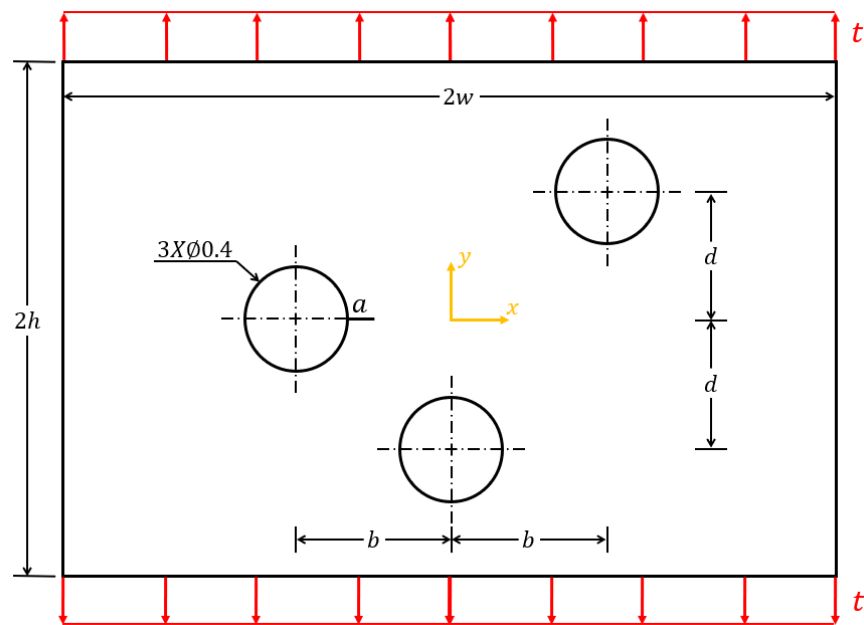
Figura 69. Gráfica de crecimiento de grieta simulada, aleación de aluminio 7075-T6.



Fuente: Elaboración propia.

4.5.2.3 Grieta emanando de una perforacion. Se estudia el crecimiento de grieta en una placa que tiene 3 perforaciones, en donde en una de estas, emana horizontalmente una grieta de tamaño $a = 0.1m$. La placa está expuesta en sus extremos superior e inferior a una carga cíclica de amplitud constante representada por una tracción máxima de $t_{max} = 10 MPa$ y una relación de cargas de fatiga de $R = 2/3$. En la figura 70 se muestra un bosquejo de la geometría, las dimensiones generales de la placa son: $w = 1.5 m$, $h = 1 m$, $b = 0.6 m$ y $d = 0.5 m$. Se modela el crecimiento de grieta en acero estructural con propiedades mecánicas $E = 200000 MPa$ y $\nu = 0.25$, junto con las constantes de crecimiento: $C = 4.624 \times 10^{-12}$ y $m = 3.3$.

Figura 70. Geometría y condiciones de frontera 4.5.2.3.

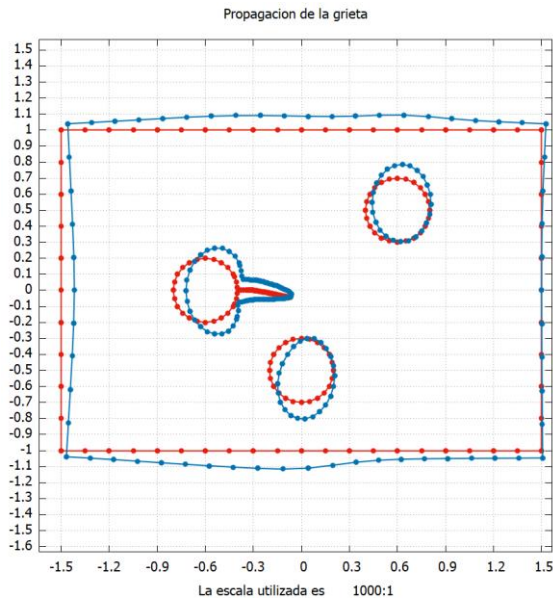


Fuente: elaboración propia.

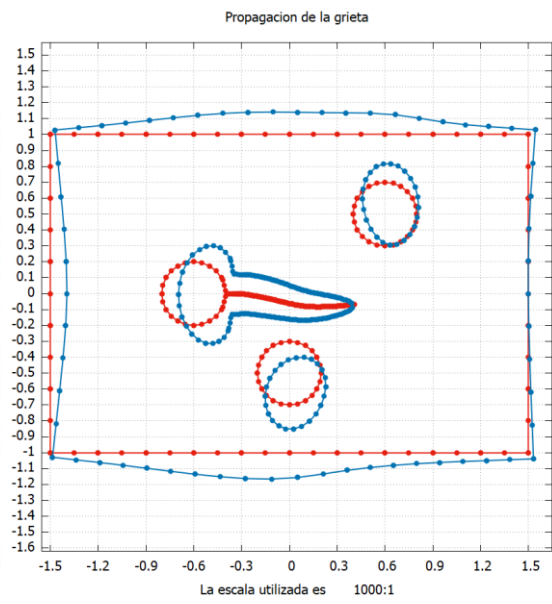
En la malla inicial se utilizan 144 nodos y 72 elementos, estableciendo un tamaño de elemento en la punta de la grieta de $L_{elem} = 0.02 m = 20 mm$; para el crecimiento se emplean 20 incrementos de 3 veces la longitud del elemento en la punta de la grieta, es decir, para un crecimiento total de $\Delta a = 1.2 m$. Los resultados obtenidos son:

Figura 71. Propagación de la grieta.

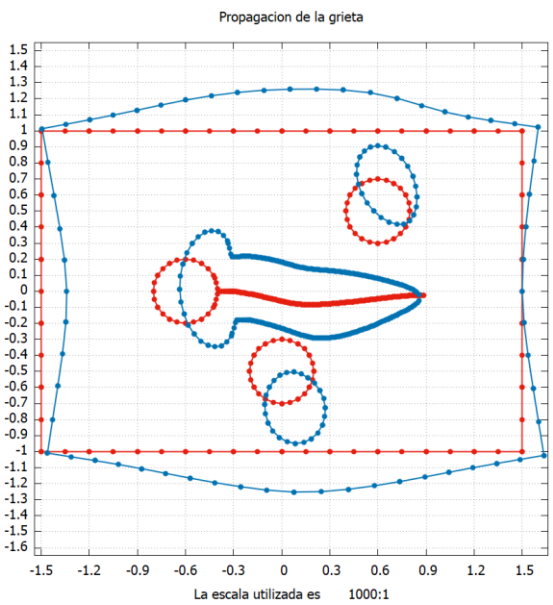
a) 4 incrementos.



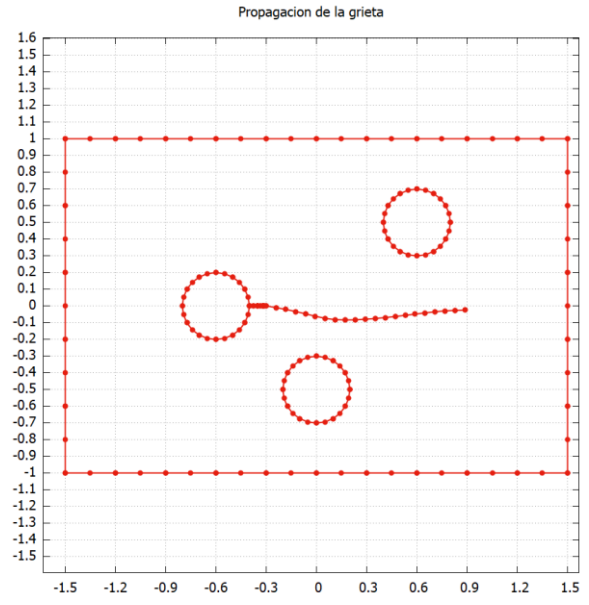
b) 12 incrementos



c) 20 incrementos.

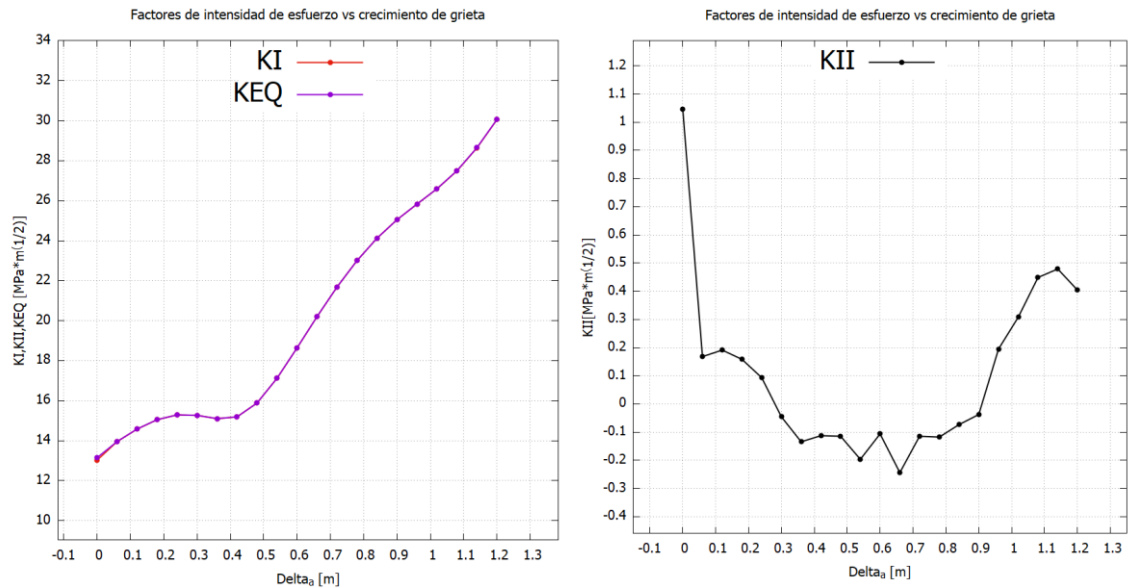


d) Trayectoria.



Fuente: Elaboracion propia.

Figura 72. Factores de intensidad de esfuerzo 4.5.2.3.

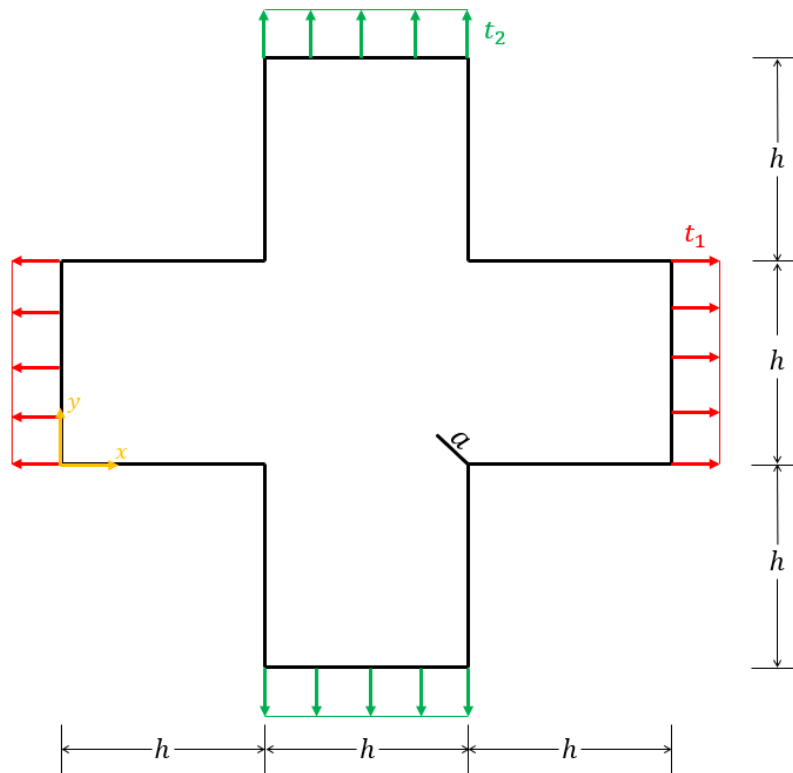


Fuente: Elaboración propia.

La figura 71 muestra una característica nueva que fue añadida al software, la cual permite graficar la trayectoria de crecimiento de la grieta junto con la configuración deformada del cuerpo para un determinado bloque de resultados, de esta forma se puede apreciar de mejor manera la propagación de forma incremental, se exponen los incrementos 4,12,20 y finalmente la trayectoria final. Puede apreciarse de manera satisfactoria, el efecto que tienen las perforaciones en la trayectoria de la grieta. En el inicio del crecimiento, la grieta se ve afectada por la perforación inferior, la trayectoria se curva ligeramente hacia esta, posteriormente, una vez la grieta ha abandonado la zona de afectación de la primera perforación, se ve ligeramente curvada por la segunda, sin embargo, se debe reconocer que la segunda perforación afecta de manera menos significativa la trayectoria al estar a una mayor distancia. Una vez más, se intuye, que los cambios bruscos en la trayectoria se dan cuando se tienen presentes los dos modos de carga en el cuerpo.

4.5.3 Cuerpo agrietado en forma de cruz. Este ejemplo presenta el crecimiento de grieta en un cuerpo cuya geometría se presenta en la figura 73. La placa tiene brazos cuadrados de longitud $h = 0.2\text{ m}$ que están sujetos a tracciones normales de magnitud $t_1 = 10\text{ MPa}$ y $t_2 = 20\text{ MPa}$, aplicadas en los extremos de los brazos horizontales y verticales, respectivamente. La grieta se sitúa en una de las esquinas interiores en dirección de la esquina opuesta, cuya dimensión inicial es de $a_i = h/5 = 40\text{ mm}$. El cuerpo de acero estructural con propiedades mecánicas $E = 200000\text{ MPa}$ y $\nu = 0.25$ se somete a cargas cíclicas de amplitud constante con relación de $R = 2/3$, el crecimiento de la grieta se modela con la ley de Paris utilizando las constantes: $C = 4.624 \times 10^{-12}$ y $m = 3.3$.

Figura 73. Geometría y condiciones de frontera 4.5.3



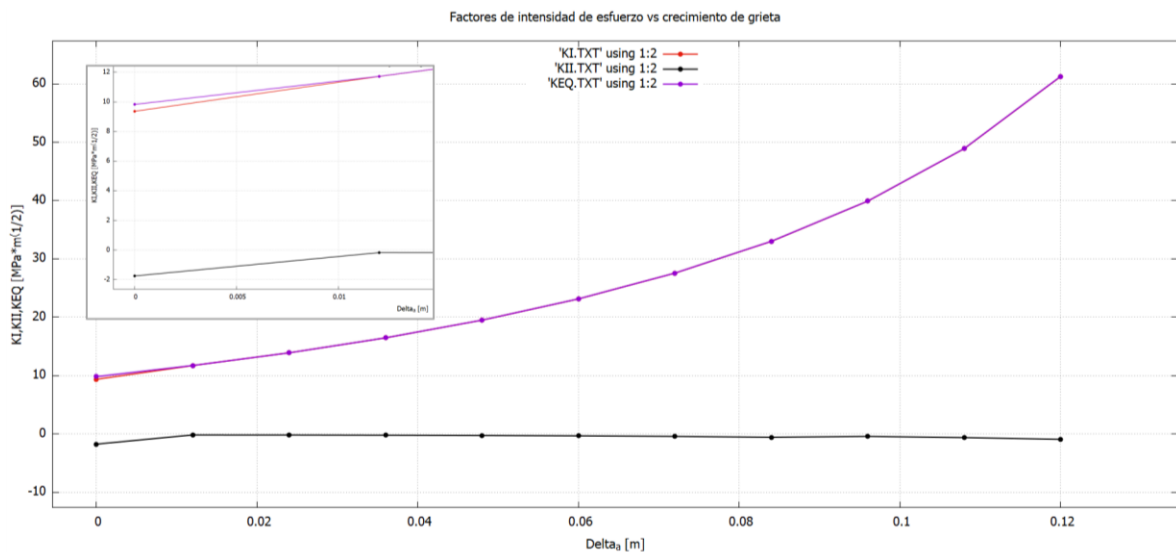
Fuente: Elaboración propia.

La importancia de desarrollar este ejemplo de simulación radica en el poder comparar los resultados que arroja el programa después de modificar su pre y post proceso, con los resultados de la simulación realizada en el programa original sin cambios. Los resultados originales del problema son presentados en el manual de usuario, incluido como anexo virtual, como era de esperarse, se obtienen resultados idénticos.

La discretización del cuerpo se realiza inicialmente con 112 nodos y 56 elementos, el crecimiento de la grieta se modela hasta un tamaño final $a_f = 160 \text{ mm}$, con 10 incrementos de 3 veces la longitud del elemento en la punta de la grieta, lo que representa un avance de grieta de $CADV = 12 \text{ mm}$.

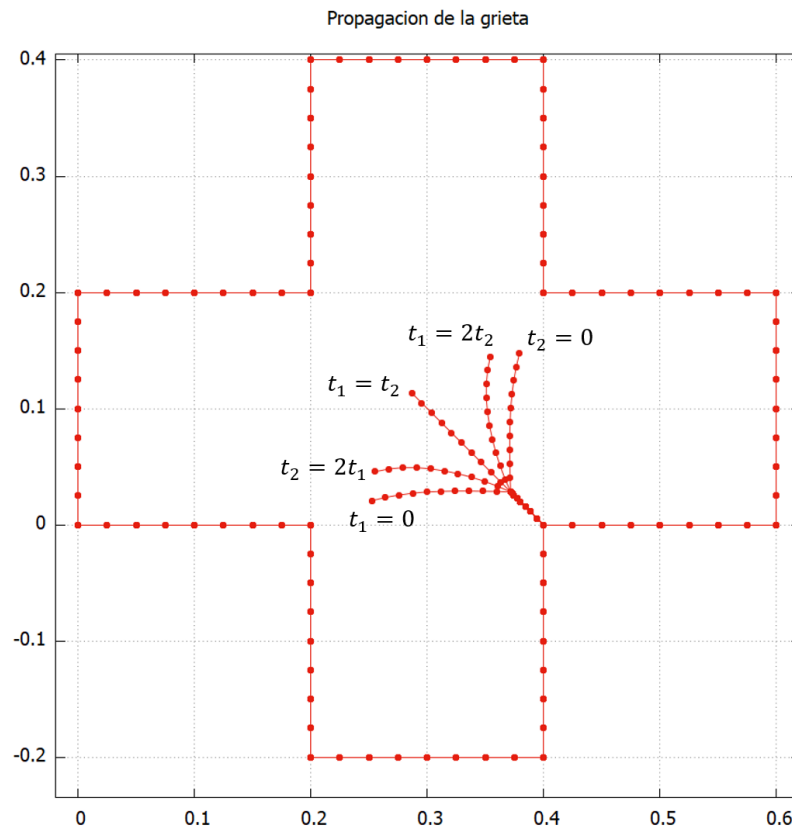
A continuación, se presentan los resultados para los factores de intensidad de esfuerzo, la trayectoria de la grieta y el número total de ciclos transcurridos.

Figura 74. Factores de intensidad de esfuerzo para $t_2 = 2t_1$.



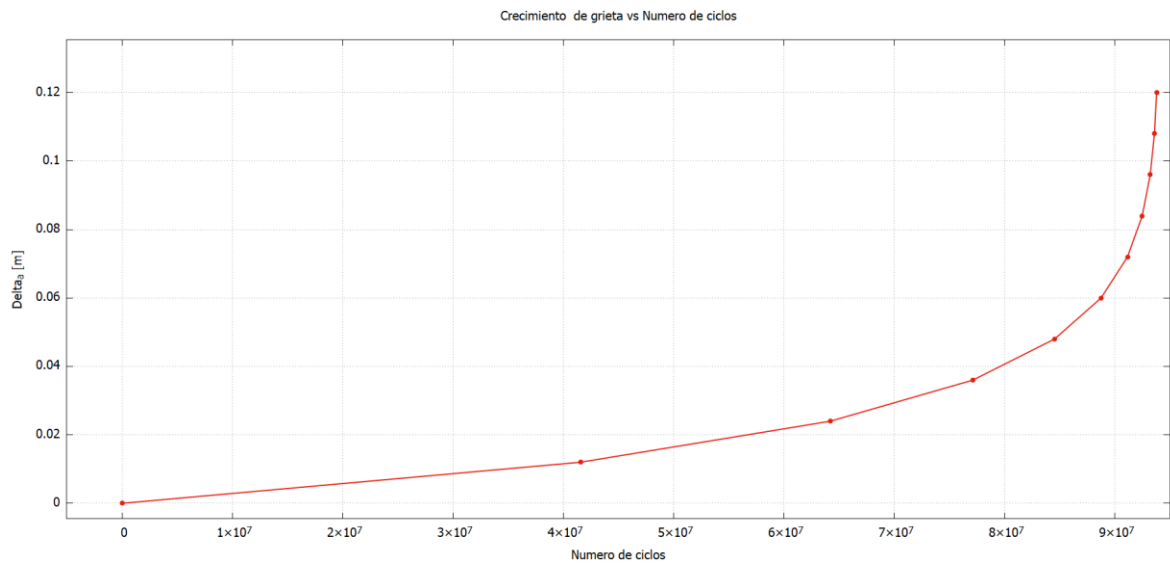
Fuente: Elaboración propia.

Figura 75. Variación de la trayectoria según las tracciones aplicadas.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 76. Número total de ciclos transcurridos $t_2 = 2t_1$.



Fuente: Elaboración propia.

Con los resultados obtenidos en las figuras 74 y 75 puede apreciarse la influencia de las cargas aplicadas en el camino de propagación de la grieta, para todos los casos analizados, en excepción de cuando $t_1 = t_2$ el cuerpo se encuentra en un modo mixto de carga en su instante inicial, es decir, tanto K_I como K_{II} tienen valores numéricamente significativos, característica que lleva a que la grieta se desvíe de su orientación original y busque rápidamente establecer su propagación en el modo de fractura I . Esta misma situación puede verse reflejada en los factores de intensidad de esfuerzo, para el caso mostrado ($t_2 = 2t_1$) en la figura 74, antes del primer incremento se cuenta con los dos factores de intensidad de esfuerzo, sin embargo, en una pequeña longitud de crecimiento el factor de intensidad de esfuerzos K_{II} toma valores despreciables mientras que, el factor de intensidad de esfuerzos K_I aumenta su valor progresivamente con el tamaño de grieta. Los resultados anteriormente mostrados se ven respaldados por la idea general de que la grieta crece en el sentido indicado por el modo de carga I o en direcciones muy cercanas a este, sin importar la orientación inicial de la grieta, mismo comportamiento obtenido en el ejemplo 4.4.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó una comparación numérica de tres de los modelos de crecimiento de grietas más destacados en la literatura, los modelos de Klesnil-Lukas, Paris y Forman. Se evidencia que todos estos arrojan resultados muy similares en cuanto a las razones de crecimiento y número de ciclos, cuando se modela la región *II* de la gráfica de crecimiento de grieta, es decir, los tres modelos logran representar matemáticamente la región de crecimiento estable.

Al presentar el crecimiento total de la grieta, se puede concluir que el modelo de Paris no admite variaciones por fuera de una línea recta en la gráfica de crecimiento, comportamiento que lo limita a solo poder representar la zona *II*; mientras que, los modelos de Klesnil-Lukas y Forman también pueden computar las razones de crecimiento para las regiones *I* y *III*, respectivamente. Teniendo en cuenta que el crecimiento lento de la grieta típico de la región *I* es el que demanda mayor número de ciclos en toda la propagación, alrededor del 50 por ciento del total, se reconoce al modelo de Klesnil-Lukas como el más adecuado para realizar la estimación de las razones de crecimiento y el número total de ciclos transcurridos, sin embargo, se debe tener especial precaución con el umbral de fractura que se utiliza en el modelo, una pequeña variación en este parámetro se ve reflejada en un gran número de ciclos computados; por esta razón, si no se conoce el umbral de fractura del material es recomendable modelar el crecimiento de la grieta de manera tradicional y conservadora con Paris.

El modelo de Klesnil-Lukas también puede ser empleado para calcular las condiciones necesarias tal que no ocurra el inicio de la propagación o esta se pause, teniendo presente que, los posibles escenarios donde ocurra una sobrecarga que supere el umbral de fractura darían lugar a un inicio del crecimiento no contemplado en el diseño.

Con base en las simulaciones realizadas se infiere que la región *III* de crecimiento demanda muy pocos ciclos de carga, menor al 2 por ciento del total, razón por la cual, se puede despreciar en la estimación de la vida útil del componente; el modelo de Paris arroja resultados muy similares al modelo de Forman, aun cuando este último es el único que sigue esta región. Con respecto a la trayectoria de crecimiento, se utiliza el criterio de máximo esfuerzo tangencial, este logra calcular de manera satisfactoria los ángulos de crecimiento de grieta, incluso cuando K_I y K_{II} tienen valores numéricamente representativos. Los resultados obtenidos con el método dual de elementos de contorno y la integral J fueron validados al compararlos con resultados experimentales y con otros métodos numéricos presentes en la literatura, obteniendo valores para los factores de intensidad de esfuerzo, las razones de crecimiento, cantidad de ciclos transcurridos y trayectoria de la grieta.

Finalmente, los cambios generales en el pre y post del código original permiten lograr una interacción más amable con el usuario, disminuyendo el margen de error que se tenía al modificar manualmente todos los archivos durante la simulación. Estas ventajas se ven potenciadas por la interfaz gráfica que tiene como objetivo guiar al usuario y evitar una mala operación del software.

6. RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

- ✓ Como trabajo futuro se propone extender el programa entregado para el análisis de cuerpos con múltiples grietas, también se puede adicionar al software la posibilidad de analizar grietas expuestas a tracción, siendo este el caso de grietas internas en tuberías.
- ✓ El software entregado se considera una herramienta académica valiosa ya que los estudiantes pueden examinar su contenido y conocer el proceso detallado en el análisis de cuerpos agrietados mediante el método de elementos de contorno, además puede ser utilizado para investigaciones futuras.
- ✓ Como trabajo de investigación se propone analizar los factores de seguridad que deben aplicarse para los diferentes modelos de crecimiento en geometrías y configuraciones comunes.

BIBLIOGRAFÍA

ALSHOAIBI, A. y YASIN, O. Finite Element Simulation of Crack Growth Path and Stress Intensity Factors Evaluation in linear Elastic Materials. Journal of Computational & Applied Research in Mechanical Engineering [en línea]. 2019, pp. 1-13. [Recuperado 13 junio 2020]. DOI: 10.22061/jcarme.2019.5081.1622. Disponible en: http://jcarme.sru.ac.ir/article_1161_0.html.

ASTM E399-19, Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness K_{Ic} of Metallic Materials, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2019, www.astm.org.

ASTM E647-15, Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2015, www.astm.org.

BALDERRAMA, Rafael. Implementación de la integral J de dominio para el análisis de grietas en problemas termo elásticos tridimensionales utilizando el método de elementos de contorno. Trabajo de grado para optar al título de Magister Scientiarum en Ingeniería Mecánica. Caracas: Universidad central de Venezuela, 2004. pp. 42-46.

BEER, Gernot.; SMITH, Ian. & DUENSER, Christian. The boundary elements Method with programming. Germany: Springer, 2008. 496 p.

BLANCO, Eudi. Modelo computacional del efecto combinado de la temperatura y la frecuencia de carga sobre el crecimiento de grieta en la fatiga del policloruro de vinilo clorado (CPVC) utilizando el método de los elementos de contorno. Trabajo de grado para optar al título de magister scientiarum en ingeniería mecánica. Caracas: Universidad central de Venezuela, 2007. pp. 61-90.

BOLJANOVIĆ, Slobodanka y MAKSIMOVIĆ, Stevan. Analysis of the crack growth propagation process under mixed mode loading. Engineering Fracture Mechanics [en línea]. 2011, vol. 78, nro. 8, pp. 1565-1576. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.02.003>.

BREBBIA, C.A y DOMINGUEZ, J. Boundary elements an introductory course, second edition. Boston: WIT press, 1998. pp. 153-165.

BROEK, David. Elementary engineering fracture mechanics. Boston: MARTINUS NIJHOFF PUBLISHERS, 1982. pp. 67-89.

BULLOCH, J.H. The influence of mean stress or R-Ratio on the fatigue crack threshold characteristics of steels-A review. International Journal of Pressure Vessels and Piping [en línea]. 1991, vol. 47, nro. 3, pp. 263-292. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0308-0161. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0308-0161\(91\)90032-W](https://doi.org/10.1016/0308-0161(91)90032-W).

CISILINO, Adrián; BALDERRAMA, R. y MARTINEZ, M. Boundary element Method analysis of three dimensional thermoelastic fracture problems using the energy domain integral. *Journal of Applied Mechanics*. 2006, vol. 73, pp. 959-970.

CRUSE, T.A. Boundary-Integral Equation Formulation and Solution. En: *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. vol. 1. [en línea]. Dordrecht: Springer, 1988. pp.17-44. ISBN 978-94-009-1385-1. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-94-009-1385-1_3.

ELBER, W. Fatigue Crack Closure under Cyclic Tension. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 1970, vol. 2, nro. 1, pp. 37–45. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(70\)90028-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(70)90028-7).

FORMAN, R. G.; KEARNEY, V. E. and ENGLE, R. M. Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structures. *ASME journal of basic Engineering* [en línea]. 1967, vol. 89, pp. 459–463. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1115/1.3609637>.

GDOUTOS, E.E. *Fracture mechanics an introduction*. ed 2. Springer, 2005. pp. 15-28.

GID, the personal pre and post processor. [sitio Web]. [Recuperado en 12 junio 2020]. Disponible en: <https://www.gidhome.com/>.

GONCALVEZ, Raúl. *Introducción al análisis de esfuerzos*. Caracas: Universidad Simón Bolívar, 2002. 475 p.

GRIFFITH, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society* [en línea]. 1921, vol. 221, pp.163-198. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 2053-9258 Disponible en: <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>.

HILDEBRAND, F.B. *Advanced calculus for applications*. New Jersey: Prentice Hall, 1976. pp. 297-301.

JARAMILLO, Héctor, *et al.* *Introducción a la mecánica de la fractura y análisis de fallas*. Bogotá: LOGOFORMAS, 2008. pp. 55-60.

KLESNIL, M. y LUKÁŠ, P. Influence of strength and stress history on growth and stabilization of fatigue cracks. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 1972, vol. 4, nro. 1, pp. 77-92. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(72\)90078-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(72)90078-1).

LEONEL, Edson Denner y VENTURINI, Wilson Sergio. Multiple random crack propagation using a boundary element formulation. *Engineering Fracture Mechanics*

[en línea]. 2011, vol. 78, nro. 6, pp. 1077-1090. [Recuperado 13 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.11.012>.

LIU, Y.J.; LI, Y.X. y XIE, W. Modeling of multiple crack propagation in 2-D elastic solids by the fast multipole boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 2017, vol.172, pp. 1-16. [Recuperado 13 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.01.010>.

MARTINEZ, M. Aportes al estudio de la mecánica de fractura utilizando el método de elementos de contorno. Caracas: Universidad Central de Venezuela, 2010. pp. 61-66.

MATWEB, material property data. [sitio Web]. [Recuperado en 12 junio 2020]. Disponible en: <http://www.matweb.com/>.

NEWMAN, J.C. y WALKER, K.F. Fatigue-crack growth in two aluminum alloys and crack-closure analyses under constant-amplitude and spectrum loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* [en línea]. 2019, vol. 100, pp. 307-318. [Recuperado 13 junio 2020]. ISSN 0167-8442. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.01.029>.

NEWMAN, J.C.; ANAGNOSTOU, E.L. y RUSK, D. Fatigue and crack growth analyses on 7075-T651 aluminum alloy coupons under constant and variable amplitude loading. *International Journal of Fatigue* [en línea]. 2014, vol. 62, pp. 133-143. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0142-1123. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2013.04.020>.

ORDAZ, E. y MARTÍNEZ, M. Modelo computacional de crecimiento de grietas y propagación de grietas utilizando el criterio de la densidad de energía de deformación. *Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, CONIM'2006*, Mérida, (2006).

PARIS, P.C. y ERDOGAN, F. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. *Journal of Basic Engineering* [en línea]. 1963, vol. 85, pp. 528–533. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1115/1.3656900>

PEIXOTO, D.F.C. y DE CASTRO, P.M.S.T. Near threshold fatigue crack propagation in railways steels: Comparison of two testing techniques. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* [en línea]. 2015, vol. 80, pp. 73-78. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0167-8442. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2015.06.008>.

PEIXOTO, Daniel y FERREIRA, Luis Andrade. Fatigue crack propagation behavior in railway steels. *International Journal of Structural Integrity* [en línea]. 2013, vol. 4, nro. 4, pp.487-500. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1108/IJSI-10-2012-0029>.

PORTELA, A. Dual Boundary Element Analysis of Crack Growth. Computational mechanics publications.1993, vol 14, 176 p. ISSN 1-56252-116-0.

PORTELA, A.; ALIABADI, M.H. y ROOKE, D.P. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. *Computers & Structures* [en línea]. 1993, vol. 46, nro. 2, pp. 237-247. [Recuperado 27 junio 2020]. ISSN 0045-7949. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(93\)90189-K](https://doi.org/10.1016/0045-7949(93)90189-K).

QIAN, J. y FATEMI, A. Mixed mode fatigue crack growth: A literature survey. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 1996, vol. 55, nro. 6, pp. 969-990. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00071-9](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00071-9).

RICE, J.R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics* [en línea]. 1968, vol. 35, pp. 379–386. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1115/1.3601206>.

RICE, J.R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. *Fracture and advance treatise*. vol. 2. Nueva York: H. Liebowitz (editor), 1968. pp. 208 – 214.

SAJITH, S.; MURTHY, K. y ROBI, P. Mixed mode fatigue crack growth studies of crack emanating from circular hole. *AIP Conference Proceedings* 2200, 020041 [en línea]. 2019, pp. 1-9. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1063/1.5141211>.

SHEN, G.; GIANETTO, J.A. y Tyson, W.R. Measurement of J-R Curves Using Single-Specimen Technique on Clamped SE(T) Specimens. *International Society of Offshore and Polar Engineers* [en línea]. 2009, pp. 1-8. [Recuperado 13 junio 2020]. ISOPE-I-09-150. Disponible en: <https://www.onepetro.org/conference-paper/ISOPE-I-09-150>.

TANAKA, K. Mechanics and Micromechanics of Fatigue Crack Propagation. *ASTM international* [en línea]. 1989, pp. 151-183. [Recuperado 12 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1520/STP18824S>.

VENTURA, Giulio; BUDYN, Elisa y BELYTSCHKO, T. Vector level sets for description of propagating cracks in finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* [en línea]. 2003, vol. 58, pp. 1571 - 1592. [Recuperado 13 junio 2020]. DOI: 10.1002/nme.829. Disponible en: <https://doi.org/10.1002/nme.829>.

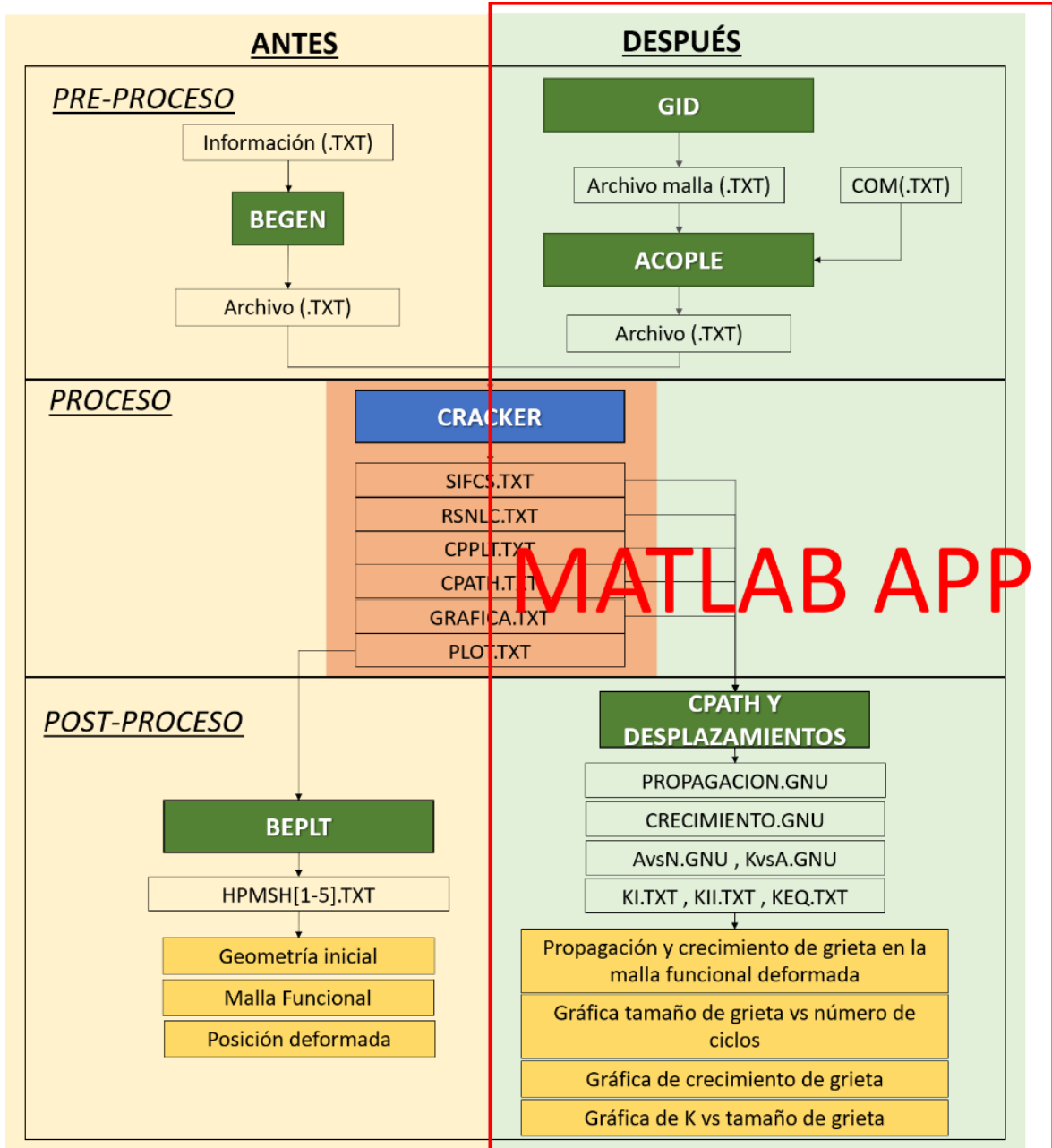
VOSIKOVSKY, O. The effect of stress ratio on fatigue crack growth rates in steels. *Engineering Fracture Mechanics* [en línea]. 1979, vol. 11, nro. 3, pp. 595-602. [Recuperado 12 junio 2020]. ISSN 0013-7944. Disponible en: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(79\)90083-3](https://doi.org/10.1016/0013-7944(79)90083-3).

WANG, X, et al. Numerical verification of stress intensity factor solution for clamped single edge notched tension (SENT) specimens. *Fatigue and fracture of engineering materials and structures* [en línea]. 2018, vol. 41, nro. 2, pp. 494-499. [Recuperado 13 junio 2020]. Disponible en: <https://doi.org/10.1111/ffe.12700>.

ZHU, Xian-Kui. Full range stress intensity factor solutions for clamped SENT specimens. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* [en línea]. 2017, vol. 149, pp. 1-13. [Recuperado 13 junio 2020]. ISSN 0308-0161. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2016.11.004>.

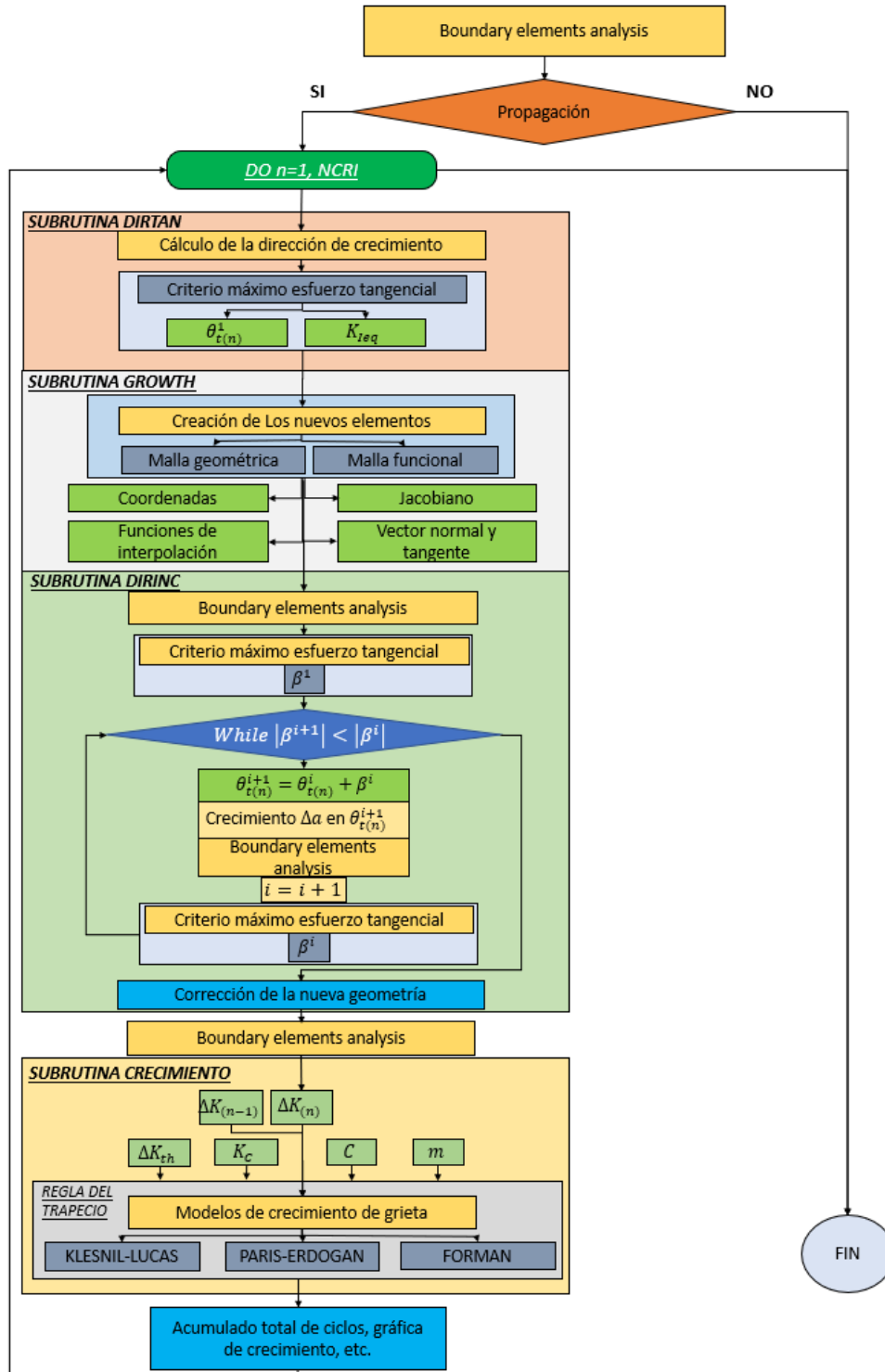
ANEXOS

ANEXO A. Cambios generales en el programa.



ANEXO B. Diagrama de análisis incremental.

Análisis incremental



ANEXO C. Manual de usuario para el programa.

MANUAL DE USUARIO PARA EL PROGRAMA DBEM CRACKER

El proceso de simulación se puede realizar de 2 maneras: Ejecutando los programas de manera manual y por medio de la interfaz gráfica en MATLAB.

En cualquiera de los dos casos, sea manual o por medio de la interfaz, se deben seguir 5 pasos generales.

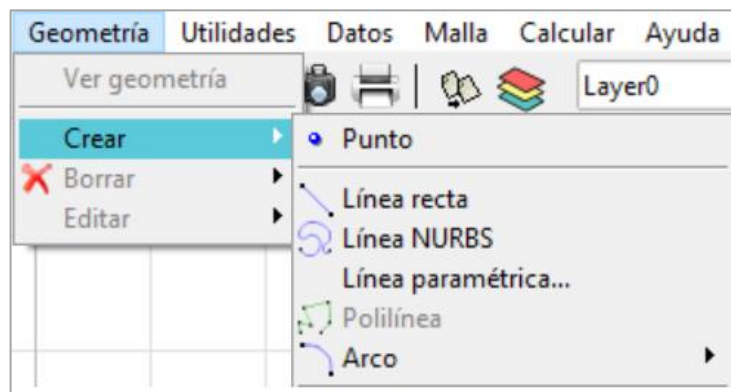
1. Modelado de la geometría y condiciones de frontera en GID-MATFEM.
2. Creación del archivo complementario para el problema específico.
3. Generación del archivo de entrada al programa principal mediante ACOUPLE.exe.
4. Solución del problema haciendo uso de CRACKER.exe.
5. Graficas de postproceso mediante CPATH.exe y DESPLAZAMIENTOS.exe.

A continuación, se presenta un instructivo del proceso de simulación:

➤ **Modelado de la geometría.**

Una vez se tenga clara la geometría y las condiciones de frontera que serán utilizadas en el modelo, se realiza el modelado de la geometría haciendo uso del programa GID. Dentro de la interfaz GID se puede crear la geometría del espécimen ingresando los puntos coordenados para cada cambio de geometría. Las dos herramientas principales que se utilizan para la creación de la geometría son:

Ilustración 1. Herramientas de geometría.



Línea: Permite crear una línea recta ingresando las coordenadas de su punto inicial y su punto final.

Arco: Permite la creación de un arco, ya sea por líneas tangente o por 3 puntos ingresados.

Para la creación de la geometría correspondiente a la(s) grieta(s) es necesario identificar lo siguiente:

- La grieta está compuesta por 2 caras, las caras de la grieta deben ser coincidentes en sus coordenadas, pero diferentes en sentido.
- Para grietas presentes en circunferencias es recomendable modelar media circunferencia, seguido por la grieta y de último la otra mitad del círculo.
- Cuando la grieta solo tiene una punta, es necesario especificar en el programa que el punto inicial de la primera línea es diferente al punto final de la segunda. El programa preguntará por medio de la siguiente ventana (ver ilustración 2 y 3), en donde se debe especificar “no juntar”.

Ilustración 2. Grieta con una sola punta.

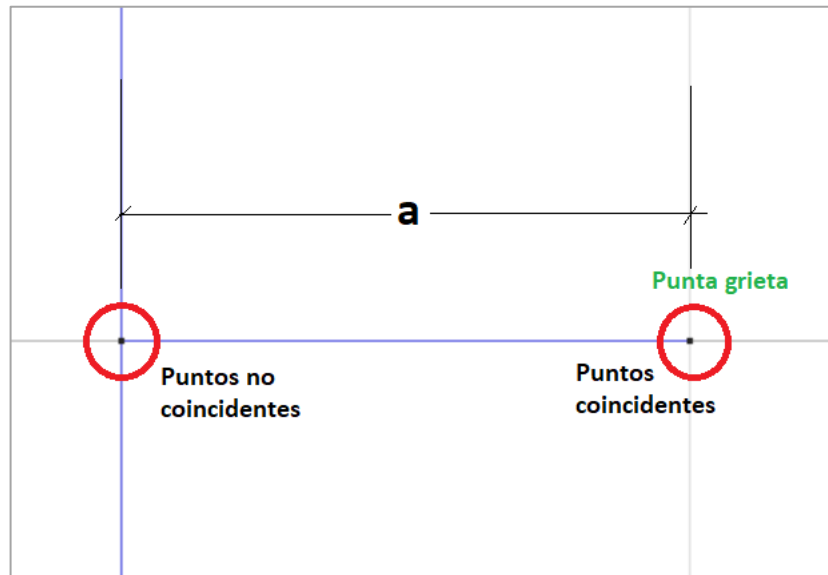
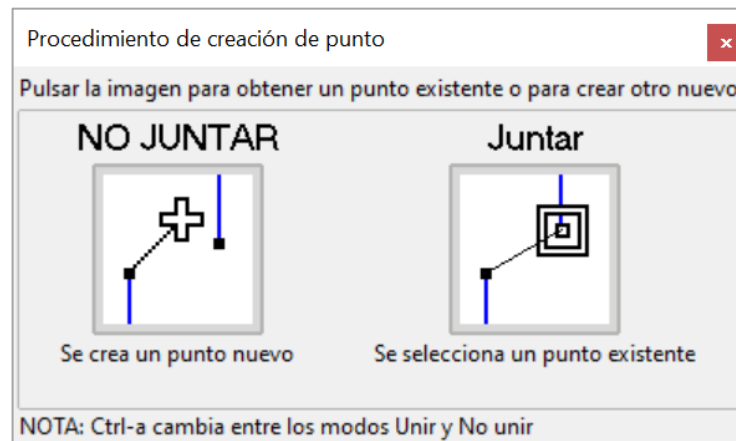


Ilustración 3. Creación de punto con coordenadas idénticas.

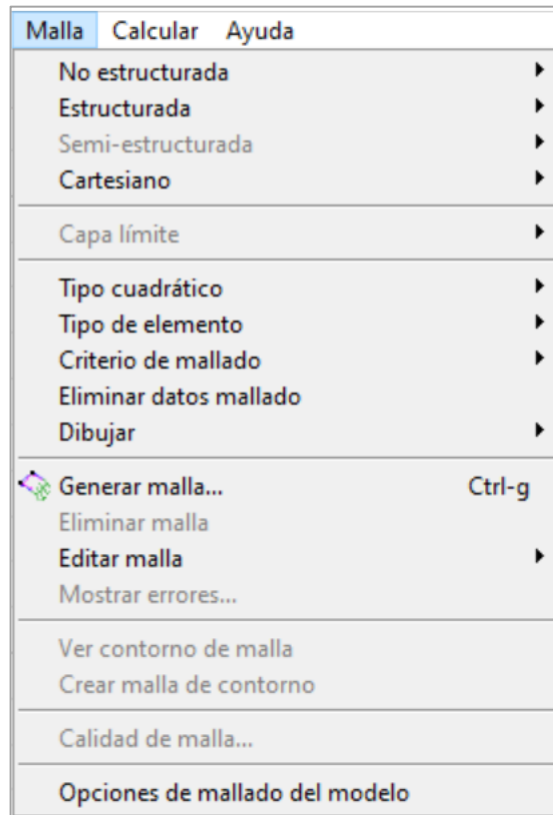


Para terminar de modelar la geometría se debe cerrar el contorno, en donde aparecerá una ventana similar a la de la ilustración 2, en donde se debe especificar “*juntar*”. Si la geometría tiene más de un contorno, todos estos deben ser cerrados.

➤ **Mallado del modelo.**

La malla del modelo debe estar compuesta en su totalidad por elementos cuadráticos continuos, es decir, 3 nodos por elemento, dos en sus extremos y uno en el medio. El programa GID cuenta con una variedad de herramientas ubicada en el menú “*malla*” que permiten refinar la malla y establecer algunos parámetros de interés (ver ilustración 4).

Ilustración 4. Herramientas de mallado.



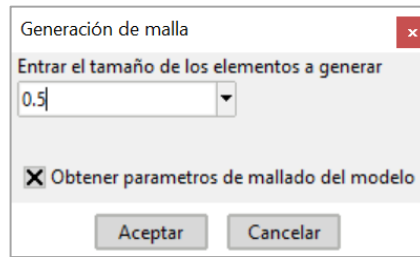
Algunas de las más relevantes son:

Estructurada: Permite asignar el número de divisiones o el tamaño del elemento que será utilizado en una parte del contorno.

Tipo cuadrático: Herramienta esencial para establecer que todos los elementos son cuadráticos continuos.

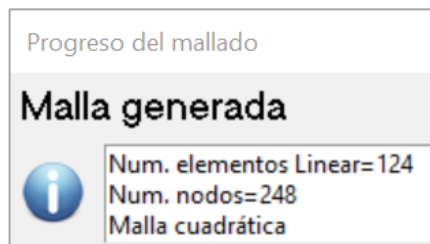
Generar malla (Ctrl +g): Se da la orden de generar la malla, el programa pregunta que tamaño general se utilizara para las líneas a las cuales no se les asigno un tamaño de elemento o número de divisiones (ver ilustración 5). Es necesario mantener seleccionado la casilla “obtener parámetros de mallado del modelo”.

Ilustración 5. Cuadro para generar la malla.



Una vez generada la malla el programa arroja los parámetros de mallado del modelo, en la siguiente pestaña (ver ilustración 6). Estos parámetros de mallado deben ser anotados para ser utilizados en el archivo complementario. También pueden observarse en todo momento en la barra inferior.

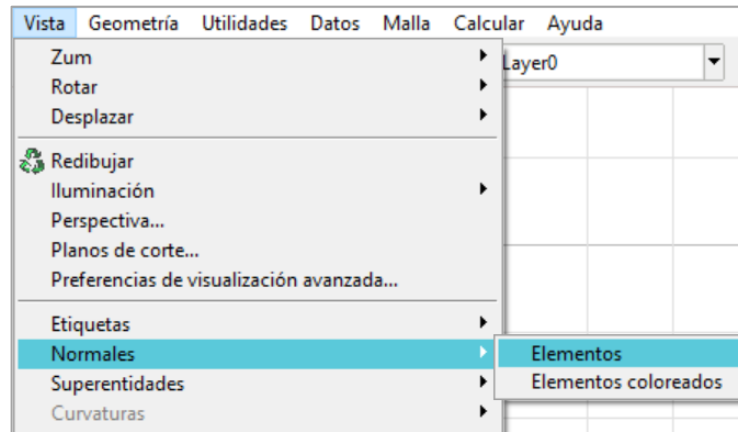
Ilustración 6. Parámetros de mallado.



Antes de establecer las condiciones de frontera es indispensable verificar la dirección de los elementos en la malla del modelo. Un contorno que contemple el dominio en su interior debe ser mallado en sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que, un contorno que contemple su dominio alrededor del mismo (hueco) debe ser mallado en el sentido de las manecillas del reloj.

Para verificar lo anteriormente dicho, se utiliza una herramienta de GID, ubicada en el menú "vista" (ver ilustración 7), con esta herramienta se puede observar la dirección de mallado.

Ilustración 7. Vista de normales.



En la ilustración 8 se muestra un ejemplo de cómo el programa muestra las normales y la dirección de mallada del modelo, en este caso, la dirección de mallado es incorrecta para el círculo del medio, ya que representa un hueco en la pieza. Se hace necesario corregir esta dirección, para ello se utiliza una herramienta en el menú “utilidades” llamada “invertir normales”. El resultado correcto después de invertir las normales en el círculo es el presentado en la ilustración 9.

Ilustración 8. Vista normales al elemento.

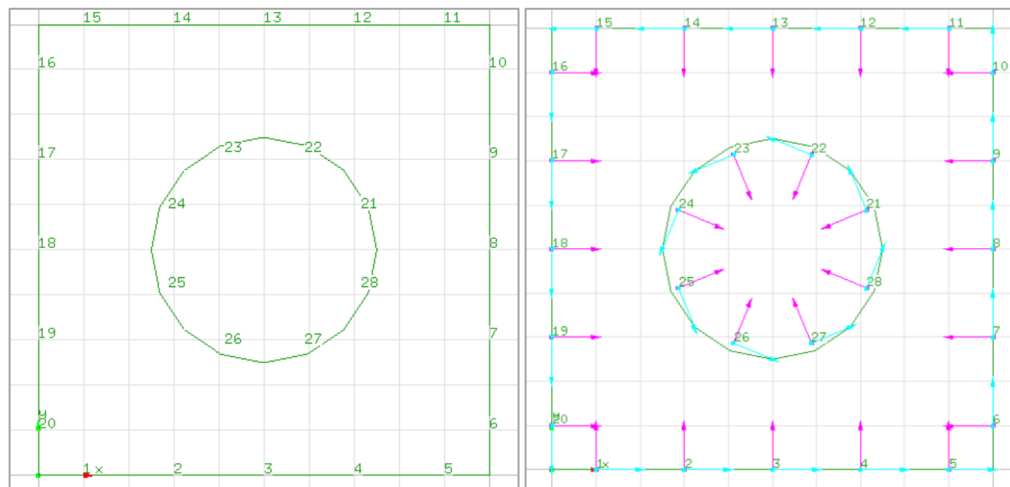
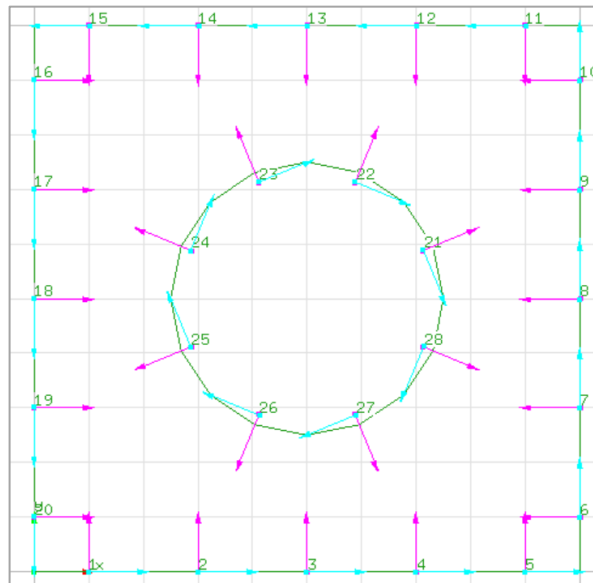


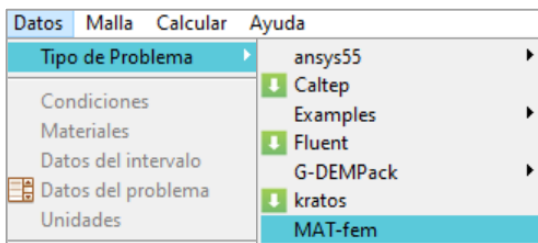
Ilustración 9. Dirección correcta del mallado en el modelo.



➤ **Configuración de las condiciones de frontera y propiedades del material**

Para establecer las condiciones de frontera del modelo se utiliza una extensión del programa GID llamada MAT-FEM. La cual se activa de la siguiente manera. En el menú “datos”- “tipo de problema”- “MAT-FEM”.

Ilustración 10. Activar la extensión MAT-FEM.



Una vez se activa la herramienta se despliega el siguiente menú vertical:

Ilustración 11. Herramientas del MAT-FEM.



Es importante ingresar todas las dimensiones y parámetros en las siguientes unidades:

Cotas geométricas: milímetros.

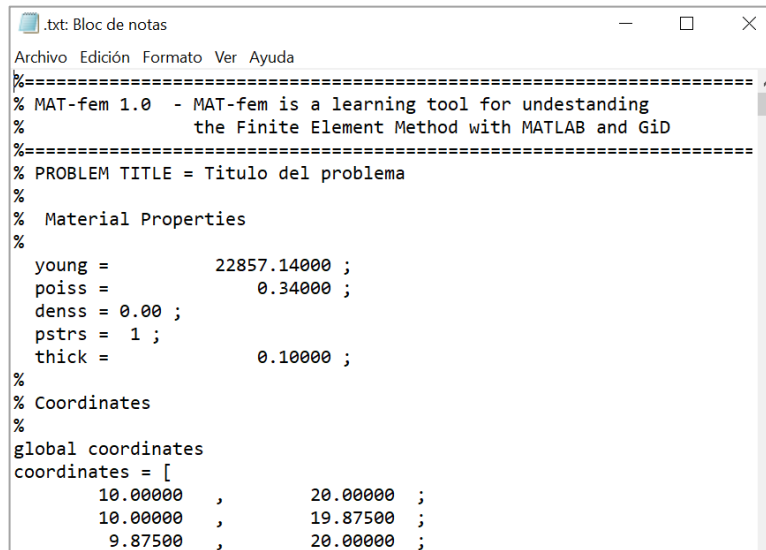
Tracciones y módulo de Young: Mega Pascals

Con las herramientas presentadas se logran establecer todas las condiciones de frontera y parámetros del modelo: material, módulo de Young, coeficiente de Poisson, tipo de problema (esfuerzo o deformación plano), título del problema, condiciones de tracción y condiciones de desplazamiento.

Una vez se tiene listo el modelo se genera el archivo de salida tipo texto que contiene la información completa del modelo.

El archivo de salida tiene la siguiente forma:

Ilustración 12. Ejemplo archivo de salida GID.



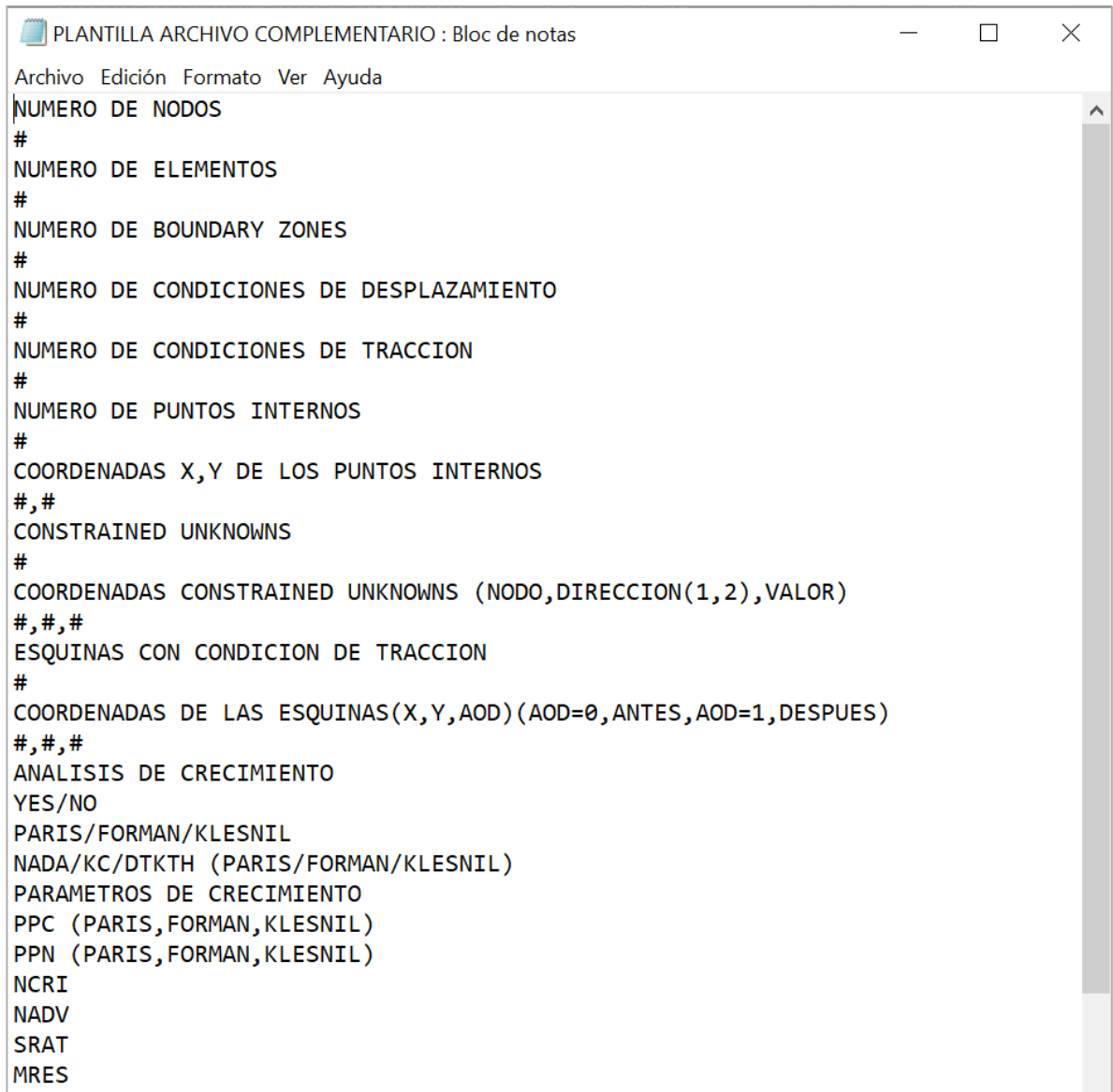
```
.txt: Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
%=====
% MAT-fem 1.0 - MAT-fem is a learning tool for understanding
%               the Finite Element Method with MATLAB and GiD
%=====
% PROBLEM TITLE = Titulo del problema
%
% Material Properties
%
young =          22857.14000 ;
poiss =           0.34000 ;
denss = 0.00 ;
pstrs = 1 ;
thick =           0.10000 ;
%
% Coordinates
%
global coordinates
coordinates = [
           10.00000 ,           20.00000 ;
           10.00000 ,           19.87500 ;
           9.87500  ,           20.00000 ;
```

➤ **Creación de archivo complementario para el problema específico.**

El programa ACOUPLE.exe necesita dos archivos, el archivo creado anteriormente y un archivo complementario con alguna información adicional.

El archivo complementario se crea llenando la siguiente plantilla para cada problema en específico.

Ilustración 13. Imagen plantilla archivo complementario.



```
PLANTILLA ARCHIVO COMPLEMENTARIO : Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
NUMERO DE NODOS
#
NUMERO DE ELEMENTOS
#
NUMERO DE BOUNDARY ZONES
#
NUMERO DE CONDICIONES DE DESPLAZAMIENTO
#
NUMERO DE CONDICIONES DE TRACCION
#
NUMERO DE PUNTOS INTERNOS
#
COORDENADAS X,Y DE LOS PUNTOS INTERNOS
#,#
CONSTRAINED UNKNOWNS
#
COORDENADAS CONSTRAINED UNKNOWNS (NODO,DIRECCION(1,2),VALOR)
#,#,#
ESQUINAS CON CONDICION DE TRACCION
#
COORDENADAS DE LAS ESQUINAS(X,Y,AOD)(AOD=0,ANTES,AOD=1,DESPUES)
#,#,#
ANALISIS DE CRECIMIENTO
YES/NO
PARIS/FORMAN/KLESNIL
NADA/KC/DTKTH (PARIS/FORMAN/KLESNIL)
PARAMETROS DE CRECIMIENTO
PPC (PARIS,FORMAN,KLESNIL)
PPN (PARIS,FORMAN,KLESNIL)
NCRI
NADV
SRAT
MRES
```

A continuación, se explican algunos parámetros que deben ser ingresados con especial cuidado al archivo.

- a) Número de contornos (Boundary zones): se refiere al número de contornos cerrados que constituyen al modelo, por ejemplo: si se tiene una pieza con 2 orificios, se tienen 3 boundary zones.

- b) Número de condiciones de desplazamiento: se refiere a la cantidad de grados de libertad que tienen asignado un desplazamiento en el sistema, por ejemplo: si 4 nodos tienen desplazamiento fijo en ambas direcciones entonces se tienen 8 condiciones de desplazamiento.
- c) Número de condiciones de tracción: se refiere a la cantidad de grados de libertad que tienen asignado una tracción en el modelo, por ejemplo: si 4 nodos tienen tracción en ambas direcciones entonces se tienen 8 condiciones de tracción. NOTA: los nodos que no tengan asignadas ninguna condición de desplazamiento ni tracción son asignados de manera automática con tracción nula por el programa, sin embargo, estos nodos no entran en la cuenta del número de condiciones de tracción.
- d) Número de puntos internos: Se refiere al número de puntos internos en los cuales se quiere conocer el valor de esfuerzos, desplazamientos y tracciones. El ingreso de puntos internos es OPCIONAL, Sin embargo, debe dejarse en la plantilla el título de "COORDENADAS X, Y DE LOS PUNTOS INTERNOS".
- e) Constrained Unknowns: Se refiere a aquella condición en la que el nodo ya tiene fijo un desplazamiento, sin embargo, se conoce el valor de la tracción en el mismo. Las constrained Unknowns se ingresan como NODO(GID), DIRECCION (1 O 2), VALOR. Al igual que con los puntos internos, este parámetro es opcional y en caso de que no se utilice, debe dejarse el título "COORDENADAS CONSTRAINED UNKNOWNNS".
- f) Esquinas con condición de tracción: Se refiere a aquellas esquinas del contorno en las cuales fue establecida una condición de tracción. Producto del cambio en la normal al elemento antes y después de la esquina es necesario especificar en cual lado se encuentra la condición de tracción. NOTA: Se debe tener cuidado con la dirección del mallado, ya sea horario o antihorario.
- g) Análisis de crecimiento: Se debe escribir "YES" para realizar un análisis de crecimiento de grieta por cargas de fatiga, se debe escribir "NO" para solo realizar un análisis estático. Si se escribe "NO" se finaliza el archivo complementario. Si se ha escrito "YES", deben especificarse algunos

parámetros adicionales. A continuación, debe escribirse el nombre del modelo de crecimiento de grieta que quiere utilizarse, sea “PARIS”, “KLESNIL” o “FORMAN”. En función del modelo a utilizar se deben ingresar algunos parámetros importantes.

- I. Modelo de PARIS: No debe especificarse nada más abajo del título de análisis de crecimiento, abajo del título de parámetros de crecimiento deben especificarse: Constante C, constante m, el número de incrementos (NCRI), el número de veces que crece la grieta la longitud del elemento en la punta de la grieta (NADV), la relación de cargas de fatiga (SRAT) y el número de incrementos entre cada salida (MRES).
- II. Modelo de KLESNIL: Debe especificarse el umbral de fractura, en inglés, fracture threshold (DTKTH). Abajo del título de parámetros de crecimiento deben especificarse: Constante C, constante m, el número de incrementos (NCRI), el número de veces que crece la grieta la longitud del elemento en la punta de la grieta (NADV), la relación de cargas de fatiga (SRAT) y el número de incrementos entre cada salida (MRES).
- III. Modelo de FORMAN: Debe especificarse la tenacidad a la fractura, en inglés, fracture toughness (DTKTH). Abajo del título de parámetros de crecimiento deben especificarse: Constante C, constante m, el número de incrementos (NCRI), el número de veces que crece la grieta la longitud del elemento en la punta de la grieta (NADV), la relación de cargas de fatiga (SRAT) y el número de incrementos entre cada salida (MRES).

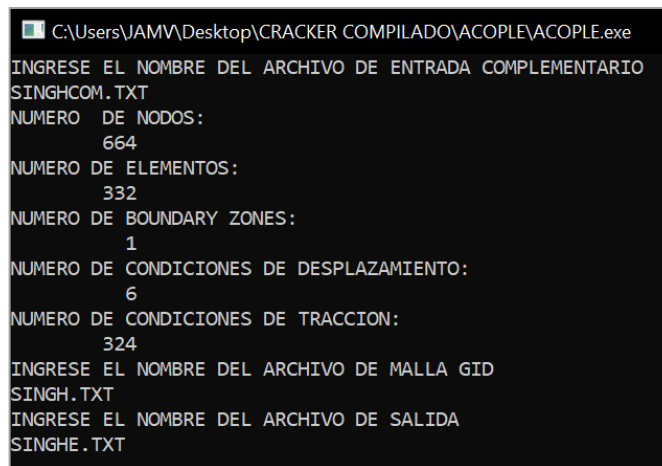
El archivo terminado debe guardarse en formato texto en la carpeta donde se guardó el archivo de salida del GID.

➤ **Generación del archivo de entrada al programa principal mediante ACOPLÉ.exe.**

Los dos archivos generados en los pasos anteriores deben encontrarse en la carpeta donde está el programa “ACOPLE”. Una vez se tenga esto, se abre el ejecutable “ACOPLE.exe”. El programa preguntará por el nombre de los dos

archivos en formato texto y por el nombre del archivo de salida, mismo nombre que tendrá el archivo de entrada al programa principal. A continuación, se presenta una ilustración de un ejemplo en donde el archivo GID recibe el nombre de “SINGH.txt”, el archivo complementario se titula “SINGHCOM.txt” y el archivo de salida se denomina “SINGHE.txt”.

Ilustración 14. Ejecutable ACOUPLE.exe



```
C:\Users\JAMV\Desktop\CRACKER COMPILADO\ACOPLE\ACOPLE.exe
INGRESE EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE ENTRADA COMPLEMENTARIO
SINGHCOM.TXT
NUMERO DE NODOS:
    664
NUMERO DE ELEMENTOS:
    332
NUMERO DE BOUNDARY ZONES:
    1
NUMERO DE CONDICIONES DE DESPLAZAMIENTO:
    6
NUMERO DE CONDICIONES DE TRACCION:
    324
INGRESE EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE MALLA GID
SINGH.TXT
INGRESE EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA
SINGHE.TXT
```

➤ **Solución del problema haciendo uso de CRACKER.exe.**

El archivo generado por el programa “ACOPLE.exe” debe estar en la misma carpeta del programa principal “CRACKER.exe”. Se ejecuta el programa en donde se pregunta por el nombre del archivo de entrada y el archivo de salida (En la aplicación de Matlab no se pregunta por el archivo de salida). Posteriormente el programa calcula el residuo de la solución del sistema de ecuaciones producto del método dual de elementos de contorno, primer indicio de la veracidad de los resultados

obtenidos. Si se trata de un análisis por mecánica de fractura, se preguntará que contorno se desea utilizar, por defecto el programa ejecuta el quinto contorno.

Una vez se termina la simulación se debe pasar a mirar los resultados. Los archivos de salida generados en el programa "CRACKER" dependerán de qué tipo de análisis se ha realizado en la simulación.

1. Análisis de elasticidad por método de elementos de contorno: Se generan dos archivos de salida, uno de ellos con el nombre que se le dio en el ejecutable, este archivo contiene la información general de la simulación: propiedades, nodos, topología de la malla, condiciones de frontera y resultados. Los resultados consisten en esfuerzos, deformaciones y desplazamientos para los nodos funcionales en el contorno y para los puntos internos de interés. El otro archivo de salida es un documento de texto titulado "PLOT.dat" del cual se hablará después en este instructivo.
2. Análisis estático de mecánica de fractura: Se generan los mismos archivos del análisis de elasticidad, sin embargo, el archivo principal de salida también contiene otra información adicional, como lo es: los elementos discontinuos, los nodos en la punta de la grieta y el valor del factor de intensidad de esfuerzos para las cargas y condiciones establecidas, para una o varias grietas.
3. Análisis de crecimiento de grieta por fatiga: En el archivo de salida principal se generan varios bloques de resultados, uno por cada salida establecida por el parámetro (MRES). Cada bloque de resultados contiene: Los valores geométricos, condiciones de contorno, resultados de elasticidad y factores de

intensidad de esfuerzo. Además de este archivo, se generan 5 archivos adicionales descritos a continuación:

CPATH: Imprime para cada incremento, la dirección de crecimiento (desde el sistema coordinado localizado en la punta de la grieta) vs la longitud de la grieta.

CPPLT: Contiene una copia de la geometría inicial antes de cualquier crecimiento, más las coordenadas de la punta de la grieta para cada incremento. En base a este archivo se puede graficar la propagación de la grieta a lo largo del cuerpo.

GRAFICA: En este archivo se encuentran los datos necesarios para obtener la gráfica de crecimiento de grieta por fatiga $\frac{da}{dN}$ vs ΔK .

RSNLC: Este documento almacena para cada incremento de la grieta, la resistencia residual y el número de ciclos transcurridos.

SIFCS: Contiene para cada incremento de la grieta el valor del factor de intensidad de esfuerzos correspondiente al modo de carga 1 y 2, así como el factor de intensidad de esfuerzos equivalente al modo de carga 1, estos valores son relativos al factor de intensidad de esfuerzos inicial equivalente.

➤ **Graficas de postproceso.**

Para obtener las gráficas de postproceso se hace uso de los programas "CPATH.exe" y "DESPLAZAMIENTOS.exe". A continuación, se explica que archivos se obtienen de cada uno de estos programas.

CPATH.exe: Los archivos de entrada a este programa son: CPATH.dat, CPPLT.dat, GRAFICA.txt, RSNLC.dat y SIFCS.dat. En base a estos archivos de entrada, el

programa arroja los siguientes archivos de salida. Todos los archivos de salida corresponden a graficas en el software GNUPLOT.

- a) AvsN.GNU: Con este archivo se obtiene la siguiente grafica de crecimiento de grieta contra el número de ciclos transcurridos (ilustración 15).
- b) CRECIMIENTO.GNU: Con este archivo se genera el grafico de crecimiento de grieta característico $\frac{da}{dN}$ vs ΔK (ilustración 16).
- c) KvsA.GNU: Con este archivo se obtiene la gráfica de los factores de intensidad de esfuerzo I y II contra el tamaño de la grieta (ilustración 17).
- d) PROPAGACION.GNU: Archivo que permite graficar la propagación de la grieta en el cuerpo (ilustración 18).

Ilustración 15.AvsN.GNU

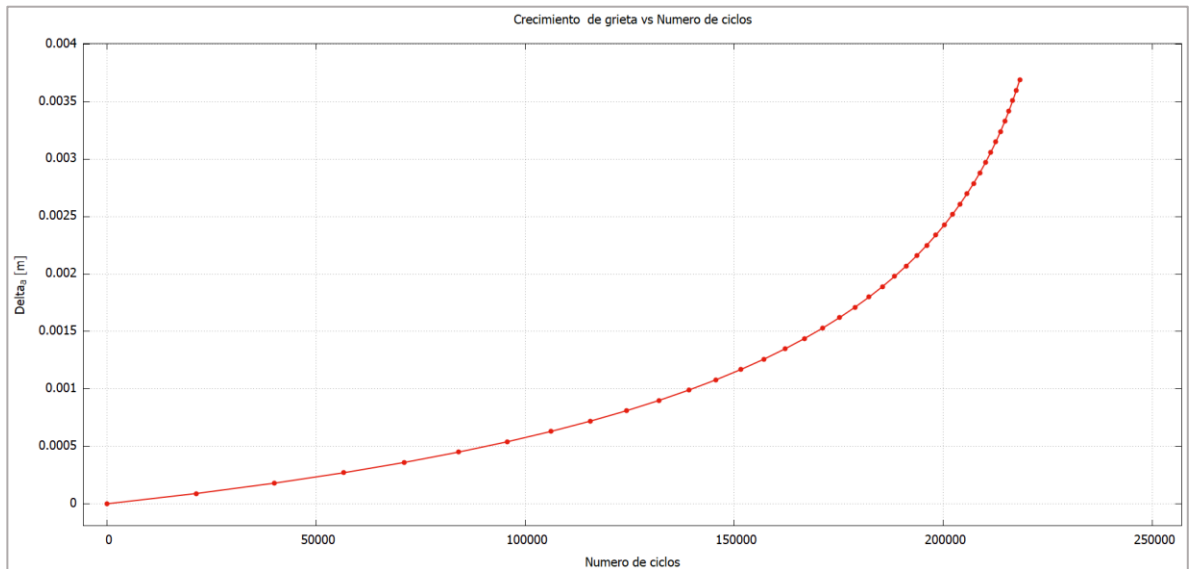


Ilustración 16.CRECIMIENTO.GNU

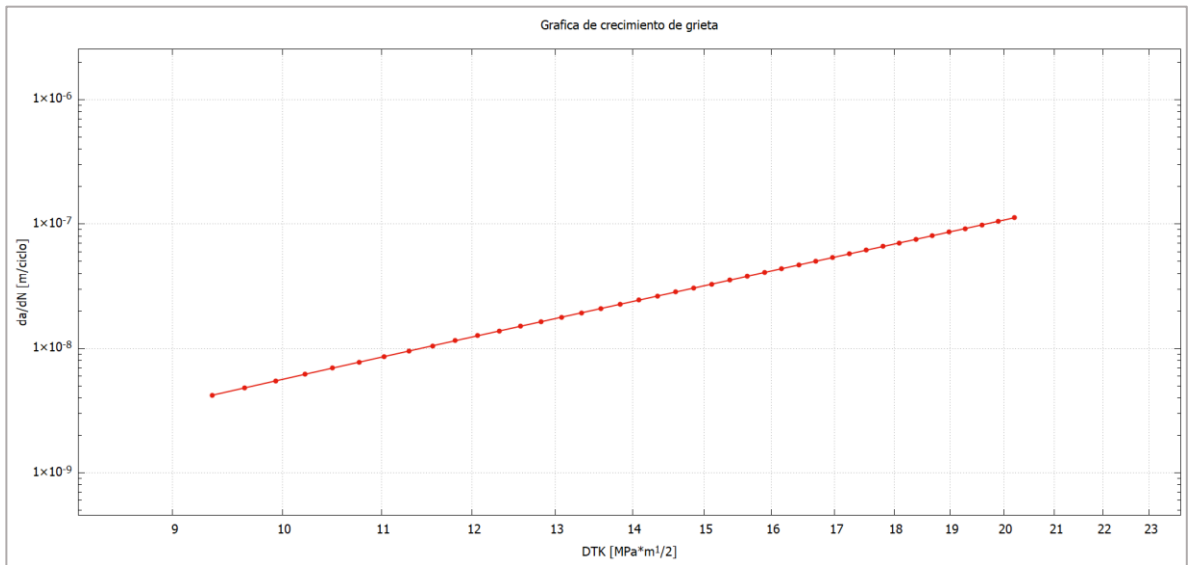


Ilustración 17.KvsA.GNU

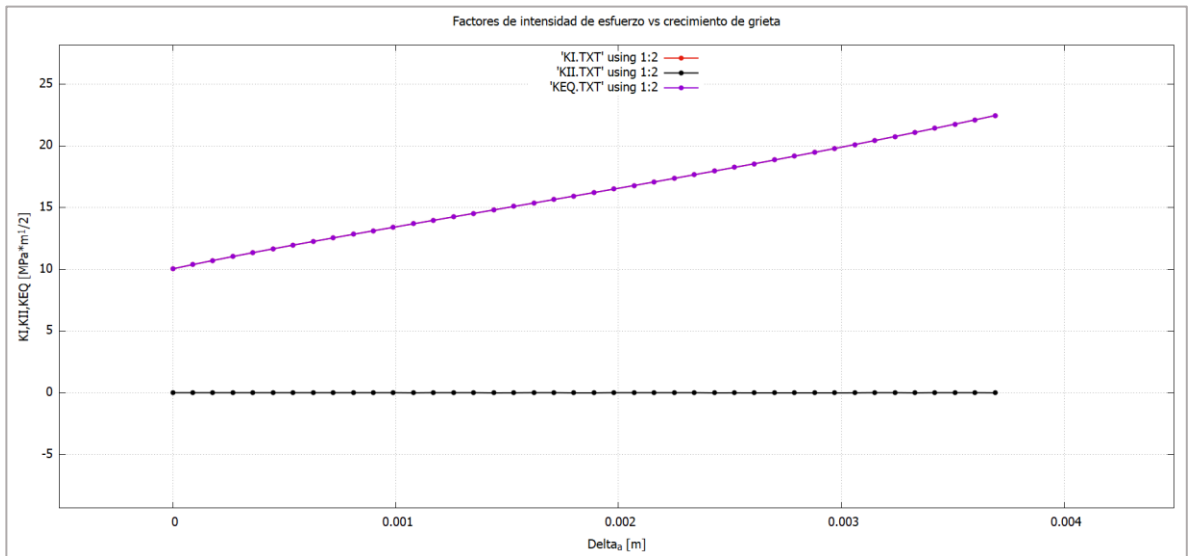
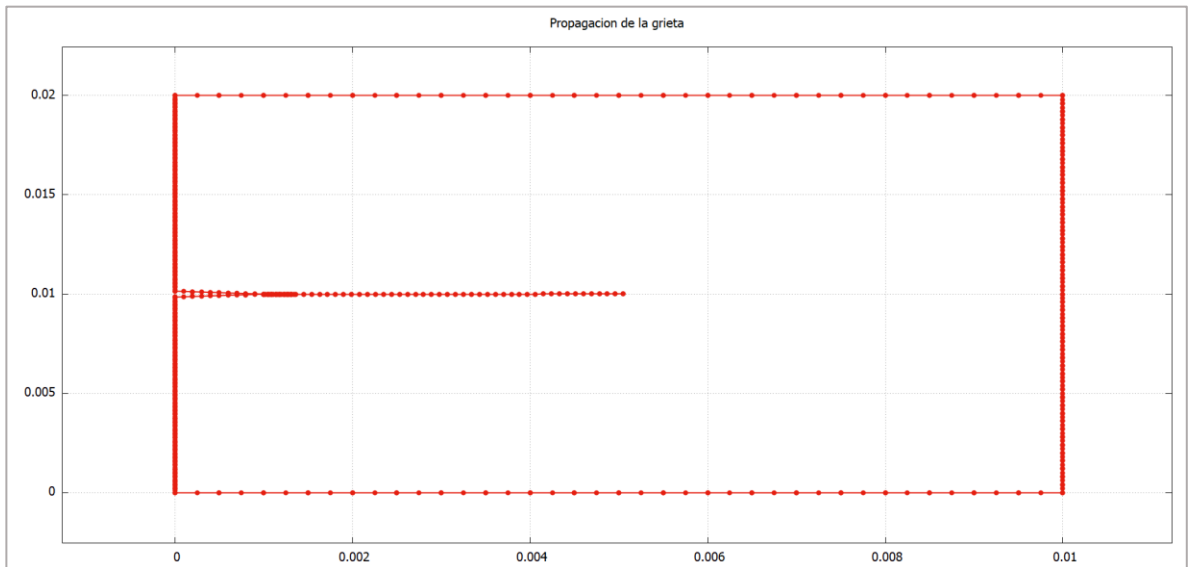


Ilustración 18.PROPAGACION.GNU



DESPLAZAMIENTOS.exe: Este programa permite obtener la gráfica del cuerpo deformado para cada uno de los bloques de resultados que arroja el programa. El archivo de entrada a este programa es PLOT.dat. Cuando se ejecuta el programa se deben ingresar los parámetros de crecimiento que se piden (ilustración 19).

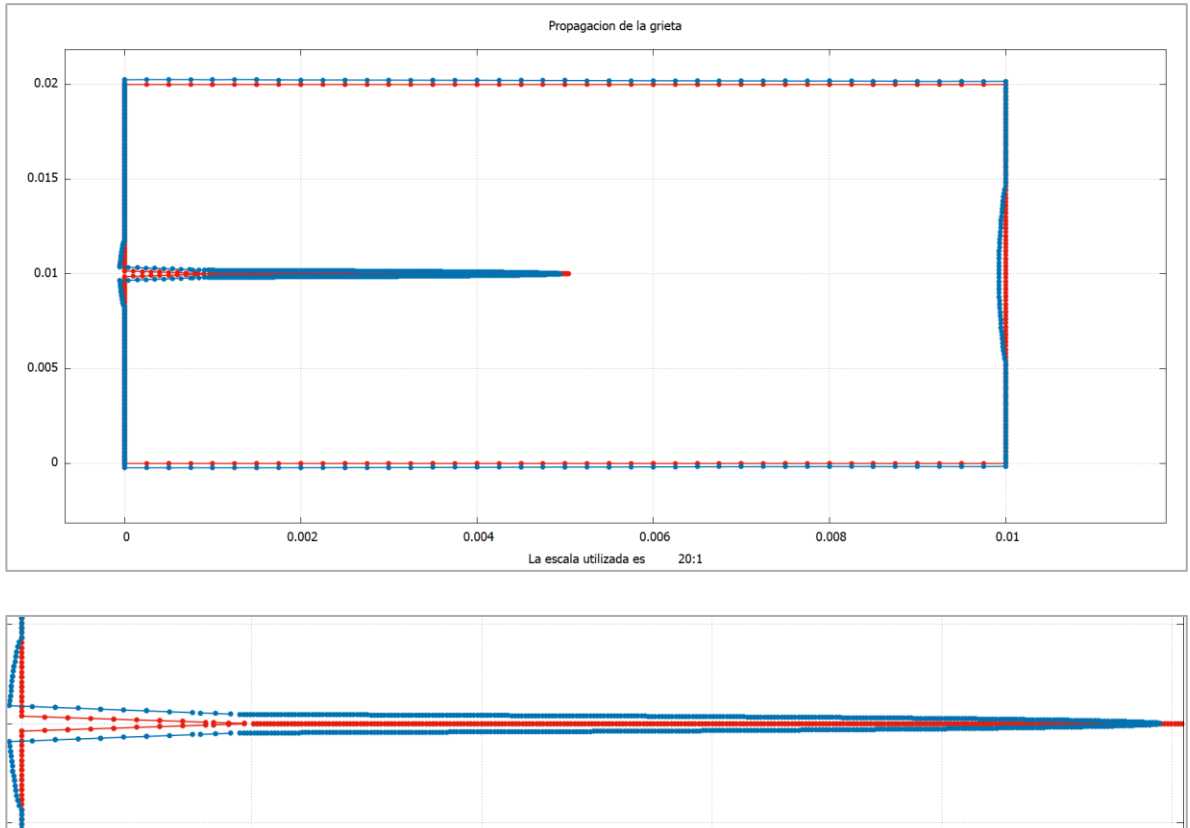
Ilustración 19. Ejemplo ejecutable DESPLAZAMIENTOS.exe

```
C:\Users\JAMV\Desktop\CRACKER COMPILADO\DESPLAZAMIENTOS\DESPLAZAMI...
¿ES UN ANALISIS ESTATICO?(YES/NO)
NO
PORFAVOR INGRESE EL PARAMETRO NCRI
41
PORFAVOR INGRESE EL PARAMETRO MRES
4
¿QUE SALIDA DESEA GRAFICAR? ENTRE: , 1 y 11 (0:GEOMETRIA INICIAL)
11
INGRESE LA ESCALA PARA AUMENTAR LOS DESPLAZAMIENTOS:
10
```

El usuario puede elegir que bloque de resultados es el que desea gráficas, si se grafica la salida 0, esta se refiere a la geometría inicial deformada.

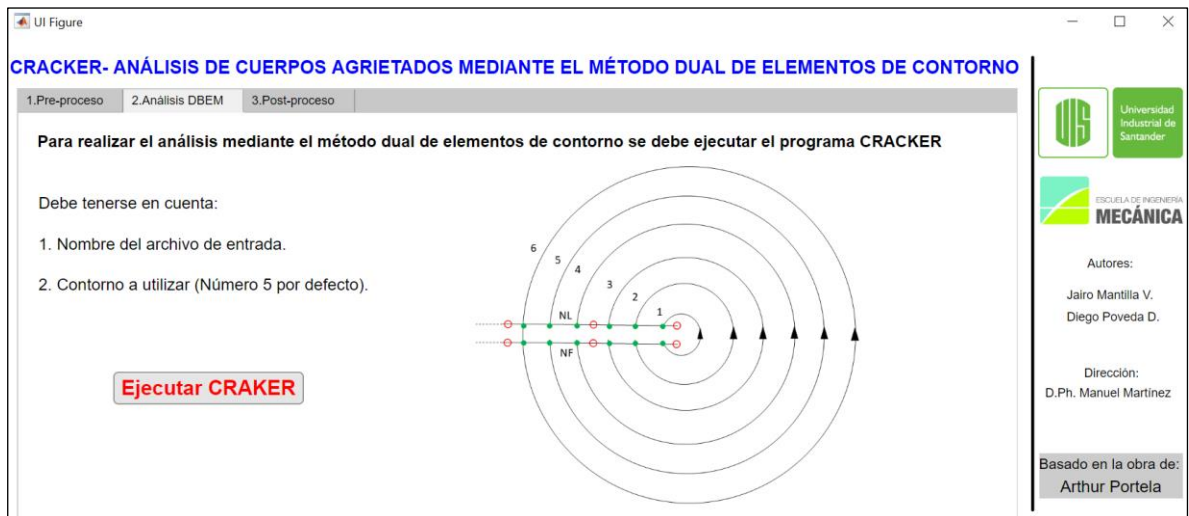
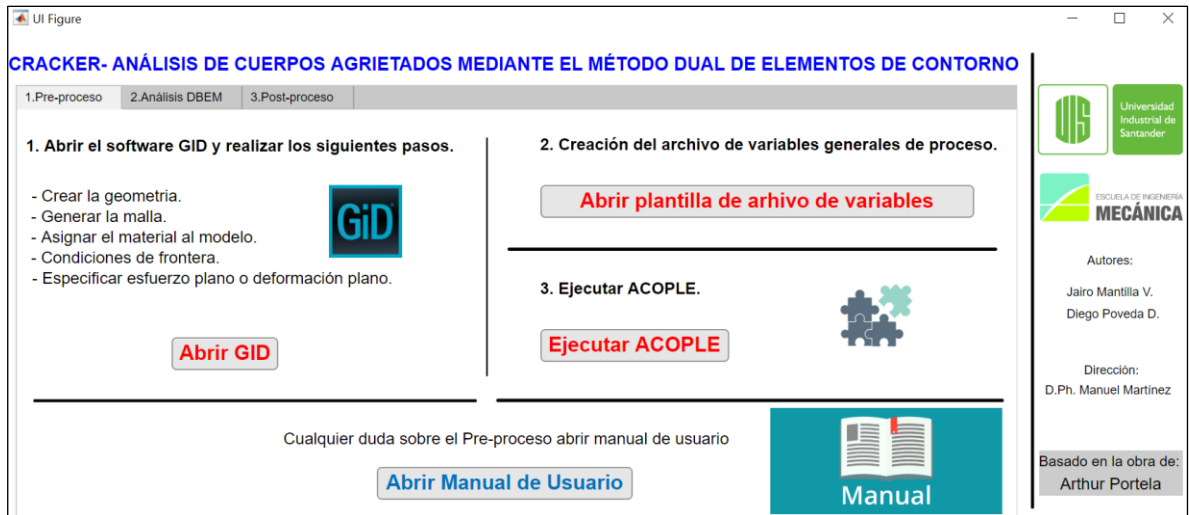
Se obtienen resultados como los expuestos en la siguiente ilustración.

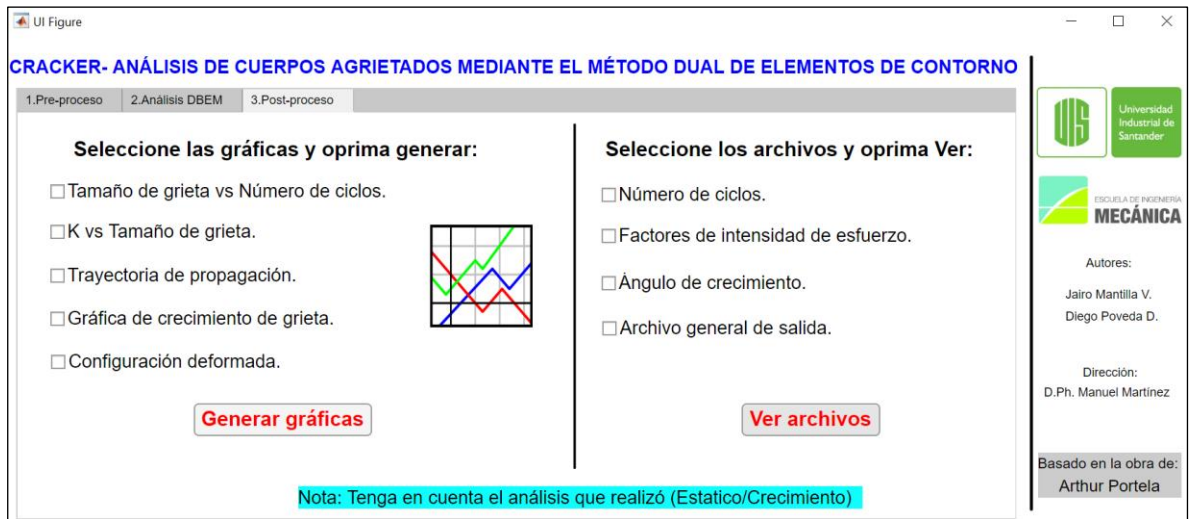
Ilustración 20. Gráficas del cuerpo deformado.



A continuación, se presentan las imágenes de la interfaz gráfica desarrollada en MATLAB para la operación del software.

Ilustración 21. Interfaz de usuario en MATLAB.





Al pulsar los diferentes botones en la interfaz, el software se encarga de ejecutar la instrucción; en caso de necesitar datos suministrados por el usuario, aparecerá la siguiente ventana que dirige al usuario a la ventana de comandos:

Ilustración 22. Ventana de instrucciones al pulsar algunos botones.

