LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS: UNA REFLEXIÓN DOCENTE

GLORIA INÉS MERCHÁN GUERRERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2007

LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS: UNA REFLEXIÓN DOCENTE

GLORIA INÉS MERCHÁN GUERRERO

Monografía de grado para obtener el título de Especialista en Educación Matemática

Director
ESP. SANDRA EVELY PARADA RICO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIóN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2007

Dedico este proyecto:

A quienes intentan mejorar la práctica pedagógica dando un sentido de nobleza retribuida en sabiduría hacia sus semejantes.

Y a quienes con paciencia comprendieron la importancia de esta capacitación.

Álvaro, Edinsson Ferney y Álvaro Said, gracias doy al Todopoderoso por su incondicional amor y apoyo.

CON PERENNE GRATITUD

A Dios, por darme la licencia de culminar este anhelo.

A la Universidad Industrial de Santander, por la oportunidad de capacitarme en la pedagogía como profesional de la educación matemática.

A los profesores de la Escuela de Matemática de la Universidad Industrial de Santander,, en especial al Ph Gabriel Yánez Canal por su apoyo y colaboración como evaluador.

A Sandra Evely. por su consagración y lectura constante, por su orientación y apoyo en el proceso de investigación; quiero expresarle mi reconocimiento por su generosa y competente colaboración.

A Deicy Villalba Rey, compañera y amiga, por su apoyo incondicional en el transcurso de la especialización y la construcción de nuestra amistad.

Al Instituto Gabriela Mistral, pos su apoyo y colaboración.

A las niñas del grado séptimo dos 2006 por sus aportes.

A Hna Ángela Vaquero F y compañeros del departamento de matemática del Instituto Gabriela Mistral, quienes con su compañía y alegría animaron la proyección educativa.

A mis padres, familiares y amigos que de alguna forma fueron soporte de investigación.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

TITULO: **LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS: UNA REFLEXIÓN DOCENTE***

AUTOR: **GLORIA INÉS MERCHÁN GUERRERO** 1**

PALABRAS CLAVES: Enseñanza de los números fraccionarios 2. Reflexión docente 3. Alternativas de mejoramiento 4. Aprendizaje Colaborativo 5.Manejo de material concreto

DESCRIPCION O CONTENIDO

Esta investigación tiene como objetivo identificar las principales dificultades que presentan los educandos de séptimo grado en el manejo de los números fraccionarios, que de una u otra manera han sido generadas por las metodologías hasta hoy implementadas y presentar algunas formas de enseñanza como alternativas de superación. La investigación está basada en la reflexión que la maestra hace sobre su propia práctica pedagógica con relación a como ha venido enseñando los números fraccionarios y las dificultades que presentan las estudiantes. La reflexión es asumida no sólo desde la evaluación sino como la aceptación de las dificultades y fortalezas, planteando alternativas de mejoramiento. Alternativas basadas en el trabajo en equipo, el uso de material real o tangible y la implementación de situaciones del contexto donde el educando lleve a su cotidiano los aprendizajes adquiridos.

A través de este trabajo de investigación pretendo responder a la pregunta ¿Cuáles son las dificultades más comunes en el aprendizaje de los números fraccionarios?

El método de investigación usado para el desarrollo de la investigación es el estudio de caso cualitativo, fundamentado en la práctica pedagógica de la maestra y su transformación constante incentivada por su reflexión.

---

* Trabajo de Grado
**Escuela de Matemáticas. Especialización en Educación Matemáticas. UIS. Sandra Evely Parada Rico. Director.

ABSTRACT

TITLE: **The teaching of the fractional numbers: an educational reflection***

AUTHOR: **GLORIA INES MERCHÁN GUERRERO** 2**

KEY WORDS : 1. Teaching of fractional numbers 2. Educational reflection 3. Alternatives of improvement 4. Helping Learning 5.Handling of concrete material

DESCRIPTION OR CONTENT

This investigation has like objective identify the main difficulties that the students of seventh degree have in the handling of the fractional numbers, in of one or another way have been generated by the methodologies implemented until today and to present some forms of teaching like overcoming alternatives. The investigation is based on the reflection that the teacher does on her own pedagogical practice in relation to like has come teaching to the fractional numbers and the difficulties that the students have. The reflection is assumed not only from the evaluation but like the acceptance of the difficulties and strengths, raising alternative of improvement. Alternatives based on the team work, the use of real or tangible material and the implementation of situations of the context where student takes to its daily acquired learnings.

Through this work of investigation I try to answer to the question Which are the most common difficulties in the learning of the fractional numbers?

The method of investigation used for the development of the investigation is the study of qualitative case, based on actually pedagogical of the teacher and its stimulated constant transformation by her own reflection.

---

* Trabajo de Grado
**Escuela de Matemáticas. Especialización en Educación Matemáticas. UIS. Sandra Evely Parada Rico. Director.

LA REFLEXIÓN

El desarrollo profesional docente es un eje fundamental en los procesos de mejoramiento de la educación ya que marca la posibilidad de generar transformaciones sustantivas en las prácticas pedagógicas. El maestro debe estar en un proceso continuo de formación, y no hablo necesariamente de cursar especializaciones o diplomados, sino de la posibilidad de crear en la misma institución educativa donde se labora, un ambiente de reflexión permanente sobre el ser, sobre el hacer y sobre el acontecer diario, sobre el maestro como persona, sobre su acción pedagógica cotidiana y su impacto transformador en la comunidad.

La reflexión y sistematización de nuestra práctica pedagógica, la producción, las propuestas, el diálogo, la investigación..., se constituyen en el principal componente para construir el proceso de nuestra propia formación y transformación. Reflexionar crítica y constructivamente, sobre lo que se hace en los espacios escolares cotidianos, sobre cómo se hace, por qué y cómo hacerlo mejor, es lo que nos permite avanzar en el mejoramiento de la calidad de nuestras prácticas educativas; entendiendo que el carácter permanente de actualización y mejoramiento, supone tener una actitud abierta a la reflexión, al diálogo, al cuestionamiento, a la revisión, la planificación, la evaluación continua de todo lo que se hace en nuestra práctica pedagógica.

La institución educativa no es solo el lugar donde vamos a enseñar, también es el lugar donde vamos a aprender a "enseñar". Nuestras aulas de clase se constituyen en un espacio formativo continuo, ya que éstas son el lugar de la práctica pedagógica, donde la reflexión constante se convierte en fuente de aprendizaje. El reto de la educación actual es lograr que los maestros investiguemos y reflexionemos en la acción y sobre la acción, para transformarla y transformarnos.

Esta nueva manera de formación exige a los maestros sacudirnos de la rutina y de la comodidad de seguir haciendo de la misma forma lo que siempre hemos hecho, para irnos convirtiendo en profesionales reflexivos, que someten a crítica continua lo que hacen, cómo lo hacen, para qué sirve lo que hacen, cómo podrían hacerlo mejor, por qué los educandos se aburren o motivan en sus clases, el sentido de las evaluaciones que propone, los resultados de esas evaluaciones, etc. Es decir, se trata de problematizar nuestro quehacer pedagógico cotidiano.

Es necesario transformarnos en maestros reflexivos e investigativos, enfrentando los problemas que se nos presentan en la cotidianidad, aprendiendo a problematizar, a procurar soluciones, a buscar información y a producir conocimiento alrededor de los problemas enfrentados. Concuerdo con Freire (2002) cuando afirma que "no hay enseñanza sin investigación ni investigación sin enseñanza. Estos quehaceres se encuentran cada uno en el cuerpo del otro. Mientras enseño continúo buscando, busco, porque indagué, porque indago y me indago. Investigo para comprobar, comprobando intervengo, interviniendo educo, me educo. Investigo para conocer lo que aún no conozco y comunicar o anunciar la novedad. Hoy se habla con insistencia del profesor investigador. En mi opinión, lo que hay de investigador en el profesor no es una cualidad o una forma de ser o actuar que se agregue a la de enseñar. La indagación, la búsqueda, la investigación, forman parte de la naturaleza de la práctica docente". Ese es mi reto, indagar al interior de mi quehacer cotidiano, de mi trabajo, de mi experiencia como maestra.

En el ejercicio docente he ido acumulando una serie de experiencias y aprendizajes, entre estos, la identificación de algunos problemas específicos. En particular, he podido observar que cuando enseñamos números fraccionarios –los cuales hacen parte de los programas curriculares de los grados tercero a séptimo- generalmente recurrimos a las actividades sugeridas por el texto guía, las cuales aparecen vinculadas con el uso cotidiano de partir tortas, pizzas, naranjas, etc. y creemos que lo estamos haciendo bien, sin embargo, nos asombramos y hasta nos enojamos al encontrar que los estudiantes en los grados superiores presentan grandes dificultades con su manejo. Frente a esta realidad normalmente le adjudicamos el problema al poco estudio de los educandos, a su desatención, a su poco compromiso con el área y a otros tantos factores más. Pero, ¿que tanta responsabilidad tenemos los maestros ante esta realidad? ¿Será que las actividades que realizamos para abordar su enseñanza de una u otra manera dificultan su aprendizaje? ¿Cuáles son las dificultades más comunes en el aprendizaje de los números fraccionarios?.

Mi trabajo tiene como objetivo fundamental identificar las principales dificultades que presentan los educandos de séptimo grado en el manejo de los números fraccionarios, que han sido generadas por las metodologías hasta hoy implementadas y presentar algunas formas de enseñanza como alternativas de superación. Con este trabajo deseo motivar a los maestros hacia la reflexión constante de nuestra práctica, para promover efectivamente una mayor comprensión del conocimiento matemático, más allá de la adquisición de contenidos, ofreciendo oportunidades para evaluar y plantear alternativas metodológicas de mejoramiento continuo y constante como parte del proceso pedagógico.

Esta propuesta la desarrollé en primera instancia a través de una reflexión personal sobre los 20 años de mi práctica docente en los colegios oficiales de Santander, mi actual práctica docente en el Instituto Gabriela Mistral, la cual está influenciada por los conocimientos adquiridos en la especialización y con los aportes de mis colegas. Además hago una confrontación con algunas actividades de evaluación con mis educandos de séptimo grado donde evidenciamos las dificultades más notorias en el aprendizaje de los números fraccionarios, luego trato de plasmar algunas reflexiones y actividades para que en lo posible las tengamos en cuenta en el momento de trabajar este tema, con el fin de que su aprendizaje se haga más significativo para los educandos.

Y a través de este trabajo invito a los maestros a que registren y compartan con otros maestros las diversas formas de trabajo pedagógico, las manifestaciones y producciones de los educandos, así como la reflexión e interpretación de investigaciones alrededor del ejercicio docente. Estas actividades nos conducen realmente en un proceso de construcción de saber pedagógico.

La investigación se enmarca dentro de un estudio exploratorio de caso, analizado desde una perspectiva cualitativa, en el que presento mis reflexiones con relación a lo que fue y es actualmente mi práctica pedagógica con relación a la enseñanza de los números fraccionarios.

La metodología se desarrolló en las siguientes etapas:

1. Reflexiones del pasado: aciertos y errores. En este capítulo hago una retrospección de mis 20 años de enseñanza de las matemáticas, desde una posición reflexiva y evaluadora sobre como enseñé en todo este tiempo en los diversos espacios pedagógicos los números fraccionarios.

2. Las participantes de la experiencia, describo brevemente algunas de las características de las niñas seleccionadas para el análisis de investigación.

3. En búsqueda de errores y dificultades: Aquí presentaré algunos autores que han trabajado el error como fuente de investigación en educación matemática, además contaré algunas actividades exploratorias aplicadas en la institución

donde laboro actualmente, a través de las cuales obtuve respuestas para un posterior análisis de algunas dificultades con respecto al tema.

4. Alternativas de mejoramiento, después de reconocer las debilidades considero necesario plantear algunas alternativas que permitan su mejoramiento o superación. Entre ellas encontramos: trabajando en equipo, elaborando material concreto, implementando situaciones del contexto y representando en discos. Para el planteamiento de las alternativas me apoye en algunos trabajos realizados anteriormente con relación al tema entre ellos las de Kieren (citado por Andonegui) y De León (1998), entre otros.

5. En el capítulo ¿Se superaron las dificultades? Presento una evaluación de las alternativas de mejoramiento planteadas, con el fin de hacer un seguimiento consciente de la superación de las dificultades encontradas.

6. La prueba final, fue realizada como instrumento de evaluación, en la cual los educandos pusieron en práctica los aprendizajes adquiridos con relación al tema.

7. Finalmente daré a conocer algunas reflexiones finales del proceso de investigación.

1. REFLEXIONES DEL PASADO: ACIERTOS Y ERRORES

Cuando analizo algunas de mis actitudes y mis modelos pedagógicos más frecuentes debo reconocer que tienen una relación muy directa con la forma como yo aprendí y como me enseñaron, por eso iniciaré con un posicionamiento de mis primeros años de escolaridad en la escuela "Anexa a La Normal Departamental Integrada" del municipio de San Andrés del departamento de Santander, municipio del cual soy oriunda.

En el año de 1976 estando en el grado tercero recuerdo que una de las materias favoritas eran las matemáticas y fue al terminar el curso cuando la profesora Josefina nos introdujo en el mundo de los fraccionarios; nos dijo que lleváramos una naranja o un limón, esta fruta la partimos en dos mitades, y nos enseñó que matemáticamente se escribía ½ y que ½ + ½ = 1, pero en el leguaje cotidiano, sin enfatizar en las operaciones. Los fraccionarios aparecieron de forma muy bonita y natural, para expresar algo tan común para nosotros como es el partir naranjas o limones, lo cual hacíamos usualmente al ayudar en las labores de casa.

En cuarto grado, con la profesora Marcela, la alegría vivida con los fraccionarios ya no se dio, pues ella se limitó a enseñar los algoritmos de la suma y la resta de fracciones; yo era capaz de leer ciertas fracciones, pero no lograba comprender, por que se decía: dos sextos, tres quintos, nueve tercios o un milésimo. Los escribía mal cuando nos los dictaban y bueno, la profesora nos pasaba al tablero a leer y escribir fraccionarios y si no éramos capaces de leerlos nos regañaba o nos castigaba.

En el grado quinto, con la profesora Ximena este tema fue un poco más comprensible, porque ella comenzó con la lectura de fracciones, el reconocimiento de un cuarto, de un medio, un tercio y la unidad, luego nos enseñó que existen fracciones homogéneas y fracciones heterogéneas, nos enseñó a sumar y restar fracciones homogéneas, a multiplicar y dividir e intentamos resolver algunas situaciones como: Pablito tenía una manzana y le ha regalado a su hermanita Camila un cuarto, cuánta manzana le ha quedado a Pablito? Y también vimos los decimales, pero como un tema totalmente ajeno al anterior.

En sexto grado la situación fue la misma, la enseñanza de los fraccionarios se dio mediante los algoritmos para sus operaciones, pero los problemas ya se hicieron un poco más complicados. En séptimo nos enseñaron a sacar el porcentaje, a sumar, restar, multiplicar y dividir números decimales, sin hacer referencia a que se hablaba del conjunto de los números racionales. Con esta idea me mantuve durante el resto del ciclo de la educación secundaria y media vocacional.

La orientación pedagógica recibida en la Normal hizo que me inclinara por la enseñanza, por ser maestra. En agosto de 1986, inicié mi práctica pedagógica en la escuela rural Sisota del municipio de Guaca en los grados cuarto y quinto, ¿Cómo enseñaba? pues hice lo que siempre observé de mis profesores, conseguí libros en cada una de las áreas, me preparaba y reproducía lo mismo en el tablero: Con respecto a la enseñanza de los números fraccionarios, recuerdo que hice exactamente lo de mi profesora Josefina, pedía un pan o una fruta y con ella enseñaba el concepto de fracción, parte- todo, luego me apoyaba en los libros que me regalaban algunos compañeros de Bucaramanga, que por su puesto siempre eran de ediciones antiguas, pero que a mí me parecían buenos, porque así había aprendido.

A mediados de 1987 decidí proseguir estudios, primero porque consideraba que sería una importante oportunidad para mejorar mis conocimientos y por ende mi desempeño como maestra y segundo, porque era la única oportunidad de salir del área rural a la urbana, entonces realicé los contactos necesarios para empezar a estudiar a distancia con la Universidad de Pamplona.

Sin embargo, debo decir que las teorías recibidas en cuanto a metodologías de enseñanza no fueron suficientes por lo que terminé trabajando el tema de los fraccionarios de la misma forma como lo aprendí, sólo algoritmos olvidándome de la comprensión y análisis de los procesos.

Ante los errores cometidos por los estudiantes, optaba por repasar una y otra vez dichos algoritmos, sin embargo, los estudiantes seguían mostrando serias dificultades al enfrentarse a situaciones problema que involucraban el uso de los números fraccionarios.

En el año 1998 fui trasladada a la ciudad de Bucaramanga, al colegio Domingo Savio donde trabajé cuatro (4) años con el grado sexto, y pude observar que a pesar de iniciar el estudio de los números fraccionarios en tercer grado los estudiantes presentaban muchas dificultades, en especial en la operatividad de ellos. Traté entonces de trabajar con más cuidado los algoritmos, hicimos muchos ejercicios y luego los aplicamos a situaciones problema que encontraba en uno u otro libro; reconozco que me parecía algo tedioso y a veces incomprensible, pero consideraba que lo estaba haciendo mejor.

Desde que inicié mi práctica pedagógica me he apoyado en los textos escolares que las diferentes editoriales van publicando, algunos con cosas interesantes como son la aplicación de situaciones problema, dado que en su gran mayoría hacen repasos limitados a los procedimientos algorítmicos que de alguna manera son los más utilizados por los maestros. Por lo que he terminado haciendo exactamente lo mismo año a año, ya que es más cómodo mantener los esquemas tradicionales y he seguido el mismo esquema aprendido cuando fui estudiante, sin entender que los educandos tienen otras expectativas. Sin embargo, reconozco que los textos escolares son de gran apoyo en los procesos de aprendizaje al permitir a los estudiantes afianzar y revisar conceptos y procedimientos y consultar un poco más de lo visto en clase.

En el año 2002 estando en el Instituto Tecnológico Salesiano Eloy Valenzuela asumí el reto de cursar la especialización en educación matemática de la Universidad Industrial de Santander, segura de que me daría más y mejores herramientas para aplicar en la acción educadora; han sido las discusiones y reflexiones en torno al papel del maestro en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los aportes de mis compañeros maestros frente a sus experiencias de enseñanza, el reconocimiento de algunas metodologías, especialmente en torno a la enseñanza de los fraccionarios, las que me guiaron en mi proceso de auto evaluación y el de intentar implementar en clase metodologías innovadoras para mí.

En los últimos tres años he trabajado en los grados séptimo y al iniciar la enseñanza de los números racionales ha sido común escuchar en las estudiantes su fobia a los fraccionarios y observar muchas dificultades en torno a ellos; yo no entendía el porqué se presentaban dificultades estando ya en séptimo grado, si desde cuarto de primaria –o antes- ya los habían trabajado, si era "algo que ya debían saber". Para solucionar dichas dificultades siempre programaba un mayor tiempo para su enseñanza, hacía más ejercicios, daba más ejemplos, pasaba al tablero, ponía más tareas, etc. pero aún así las dificultades persistían.

Al observar la misma situación en el presente año -2006-, decidí realizar algunas actividades exploratorias frente al tema de los números fraccionarios: representación gráfica, ubicación en la recta numérica y operaciones empleadas en la solución de problemas, y programar así una serie de actividades tendientes a superar las dificultades observadas.

Después de estos cuestionamientos orienté mi trabajo de investigación a enfrentar las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los números fraccionarios.

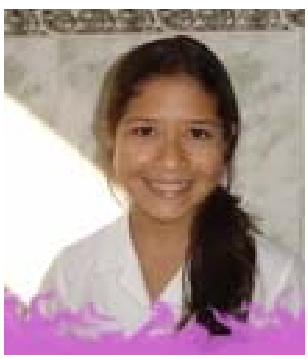
A continuación doy a conocer a las estudiantes seleccionadas para el estudio de caso y las actividades exploratorias realizadas.

2. LAS PARTICIPANTES DE LA EXPERIENCIA

Stefanny Orlay. 14 años de edad, susceptible a los llamados de atención, nerviosa. Cumplidora de su deber. Alegre

Leidy Tatiana. 14 años de edad. Perseverante en sus propósitos. Es creativa y curiosa con sus

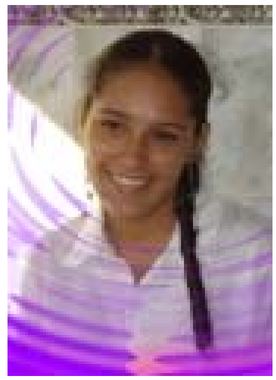
Nubia Lucía. Edad: 13 años, pasiva, a veces un poco distraída, amable.



Daniela María, pilosa, siente agrado al compartir sus conocimientos con las

Mayra Alejandra: niña serena, se preocupa por aprender. Pregunta con regularidad, en los diversos

Stephanie, inquieta, le gusta peguntar. Tiene buenas relaciones con sus compañeras. 13 años de edad.



María Fernanada, atención dispersa, le cuesta estar atenta por un rato considerable, juguetona y falta con regularidad a sus quehaceres como estudiante.14 años de edad.

Nury Vanesa, 12 años de edad. Es una niña tímida, disfruta del trabajo en equipo. Llora cuando no entiende.

Adriana Lizeth, 13 años. Tranquila, le agrada trabajar con sus amigas. Se le facilta las matemáticas.

Nathaly Andrea, espontánea, Le gusta pasar al tablero a socializar sus propuestas y/o comprender las de otros. 12 años de edad.

El Instituto Gabriela Mistral es de carácter oficial y femenino, ubicado en el barrio la Salle del municipio de Bucaramanga, dirigido por las Misioneras del Divino Maestro -comunidad religiosa fundada en España- desde el año de 1964. El instituto cuenta con los niveles de educación preescolar, básica y media técnica con enfoque comercial. Cada grupo tiene un promedio de 48 estudiantes.

"Considerar el error no como una falta o como una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho d los errores de nuestros alumnos". Roland Charnay.

3. EN BÚSQUEDA DE ERRORES Y DIFICULTADES

En el ámbito escolar los errores aparecen frecuentemente en los trabajos y evaluaciones de los educandos durante su aprendizaje de las matemáticas y son una preocupación permanente de los maestros.

El reconocimiento y análisis de los errores básicos cometidos por los estudiantes pueden dotar al maestro de una fuente de información sobre la manera en que estos aplican diversos procedimientos e interpretan los problemas, sobre el cómo se construye el conocimiento matemático. Una vez analizados los errores, los maestros podemos diseñar estrategias que ayuden a los educandos a superar las dificultades y obstáculos.

El estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido desde hace varios años objeto de interés permanente en la Educación Matemática. En Estados Unidos desde 1917 comienza la difusión y el conocimiento de los estudios sobre determinación de errores a través de Thorndike, sin embargo, se considera a Weiner (1922) en Alemania, el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de errores, quien junto a Seseman, Kiesling y Rose trataron de establecer patrones de errores en todas las materias y para todos los grupos de edades escolares. Entre 1930 y 1960 surgieron diversos estudios que lograron no solo realizar un recuento del número de soluciones incorrectas sino que, a partir del análisis de los errores encontrados los clasificaron, intentando formular las causas y factores que podrían haberlos provocado, destacan los trabajos realizados en Alemania -Schlaak, Glück y Pipping-, la Unión Soviética –Kizmitskaya y

Menchinskaya-, Estados Unidos –Judd, Buswell y Brueckner- y España –Centeno, Rico y Castro3.

Actualmente el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje, por ello los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticarlos y tratarlos seriamente.

Rico(1995), señala que los errores no aparecen por azar sino que "surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente" y que el estudio de dichos errores puede contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje. Los maestros debemos no solo aceptar su aparición sino verlos como elementos útiles e interesantes en la adquisición y mejoramiento del conocimiento.

Mulhern (1989) (citado por Engler), hizo una caracterización de los errores cometidos por los estudiantes:

- Con frecuencia los errores cometidos surgen en la clase de manera espontánea y sorprenden al maestro.

- A menudo son extremadamente persistentes y particulares en cada individuo. Son difíciles de superar ya que la corrección de los errores puede necesitar de una reorganización de los conocimientos en el educando.

- Pueden ser sistemáticos o por azar, predominando los errores sistemáticos (revelando síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada

[3] Esta información fue tomada de **ENGLER. A**. et al. *Los errores en el aprendizaje de las matemáticas.* Facultad de Ciencias Agrarias – Universidad Nacional del Litoral – Argentina. Santa Fe (Argentina).Recuperado 17 de diciembre de 2006. http://www.soarem.org.ar/Publicaciones/Los%20Errores.pdf

subyacente, que el estudiante considera y utiliza como correcto). Los errores por azar muestran falta de cuidado y olvidos ocasionales.

- Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el educando de la información que da el maestro. Los educandos recrean o inventan su propio método con base al método descrito por el maestro.

- Los errores ignoran el significado. Por esto, respuestas que son obviamente incorrectas no se cuestionan. El educando en el momento no toma conciencia de su error.

Los maestros necesitamos de unos modelos que nos permitan en nuestro actuar pedagógico el diagnóstico de dificultades específicas y corregir así aprendizajes erróneos.

En una investigación sobre errores en matemáticas cometidos por educandos de secundaria, Mosvshhhhovitz-Hadae, Zaslavsky e Inbar (1987) citados por Rico, hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los educandos, determinando seis categorías descriptivas:

- Datos mal utilizados. Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el educando. Puede ser porque: se añaden datos extraños, se olvida algún dato necesario para la solución, se contesta algo que no es necesario, se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado, se utilizan los valores numéricos de una variable para otra diferente o se hace una lectura incorrecta del enunciado.

- Interpretación incorrecta del lenguaje. Errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico diferente.

- Inferencias no válidas lógicamente. Errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento, y no se deben al contenido específico.

- Teoremas o definiciones deformados. Errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable.

- Falta de verificación en la solución. Errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.

- Errores técnicos. Errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

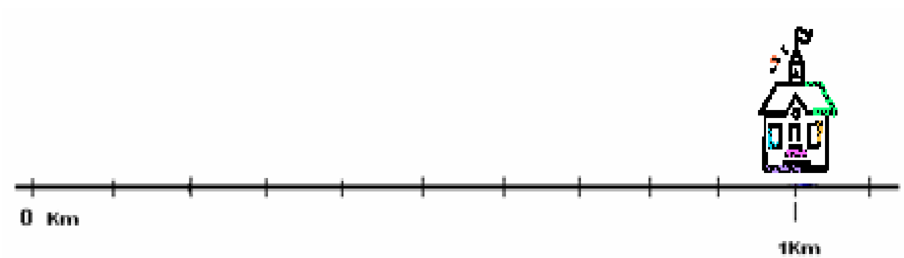
Según Socas (1997) "las dificultades y los errores en Matemáticas no se reducen a los menos capaces para trabajar con las matemáticas. En general, algunos alumnos, casi siempre y algunas veces, casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las Matemáticas". Para este investigador el error debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción.

No se puede tomar a la ligera los errores, puesto que estos son el resultado de procesos muy complejos. Por ello se hace necesario diagnosticar y tratar con mayor seriedad la presencia de los errores de nuestros educandos en el aprendizaje de las matemáticas para poder actuar sobre ellos y superarlos.

Para el diagnóstico de los errores y dificultades que presentan las estudiantes de séptimo grado en el aprendizaje y manejo de los números fraccionarios, se diseñaron una serie de actividades exploratorias (ver anexos), analizándose las respuestas dadas en las que se evidenciaron algunas dificultades a mi juicio muy significativas.

En el primer problema presentado las estudiantes debían ubicar los números fraccionarios en la recta numérica y analizar su orden para dar respuesta a tres interrogantes:

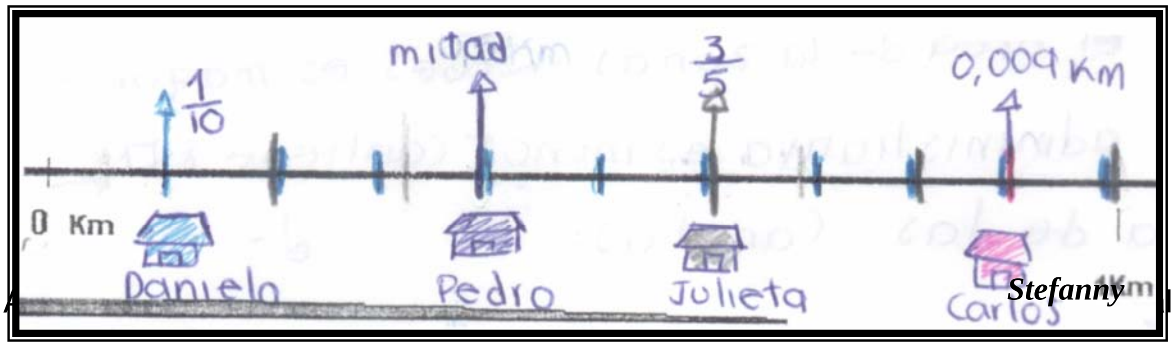
Las viviendas de Julieta, Pedro, Carlos y Daniela están ubicadas entre el kilómetro 0 y el Kilómetro 1 de la vía a Cúcuta. La escuela está ubicada sobre el Kilómetro 1. Julieta vive a 3/5 de Km. de de la escuela, Pedro tiene su vivienda en la mitad del camino, Carlos recorre diariamente 0,009 Km. para llegar a estudiar, Daniela vive a 1/10 de Km. de su escuela.



Ubica las viviendas en la recta numérica

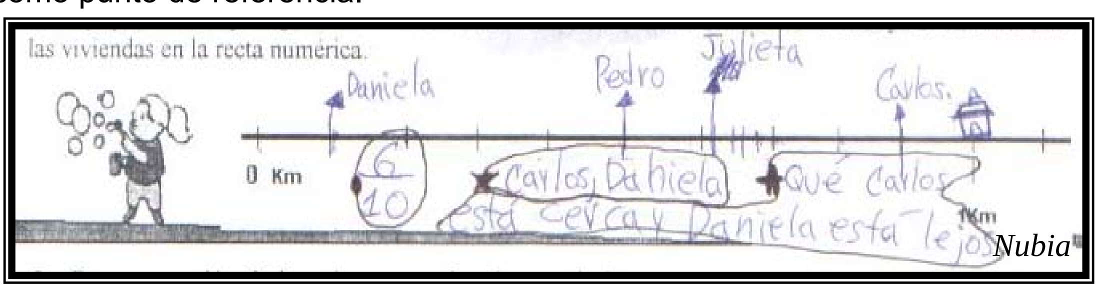
¿A qué distancia de la escuela se encuentra Pedro?
¿Quién está más cerca y quien más lejos de la escuela?
¿Cuál es la diferencia entre la distancia de la casa de Carlos y la de Daniela?

Encontré varias dificultades en las estudiantes al interpretar la situación y, a pesar de que la gráfica mostraba una primera interpretación, para algunas se tornó complicada la ubicación de los puntos. Una de las razones fue la ubicación de la escuela en el kilómetro 1, ya que casi siempre que en clase realizamos ejercicios de movimientos en la recta numérica donde partimos desde el cero, generando en las estudiantes la interpretación de todos los problemas de la misma forma, ignorando el dato referente a la ubicación de la escuela. Errores cometidos por datos mal utilizados.

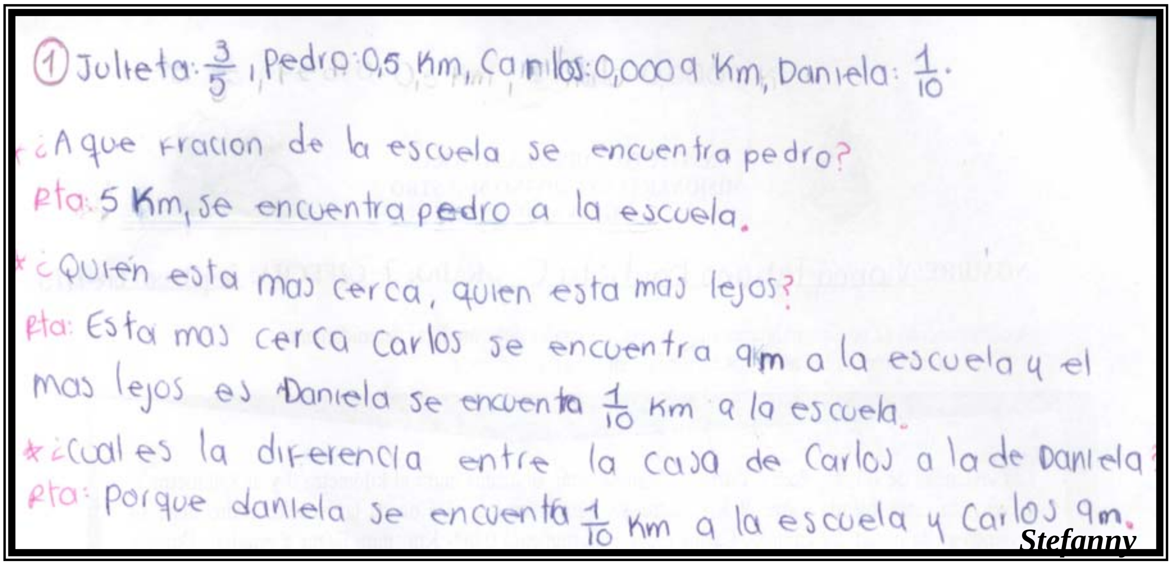


ubicó a Pedro contando cinco líneas que incluían al cero, sin verificar en su solución que la ubicación no corresponde a la mitad del camino. Presenta además dificultad en la conversión en fracción del decimal 0,009, aspecto que tradicionalmente ha sido abordado de forma algorítmica, el cual es olvidado rápidamente, por la ausencia de significado.

De igual manera, Nubia realiza erróneamente la conversión del decimal 0,009 transformándolo en la fracción $\frac{9}{10}$, la cual también es ubicada tomando al cero como punto de referencia.



La correcta ubicación de la escuela y de cada una de las casas era de gran ayuda para responder los interrogantes hechos. Por ello, si esta primera tarea no fue resuelta satisfactoriamente, lo más seguro es encontrar errores en las respuestas dadas a cada una de las preguntas. Y así lo muestra Stefanny en sus respuestas.



① Julieta: $\frac{3}{5}$, Pedro: 0,5 Km, Carlos: 0,0009 Km, Daniela: $\frac{1}{10}$.

¿A que fracion de la escuela se encuentra pedro?

Rta: 5 Km, se encuentra pedro a la escuela.

¿Quien esta mas cerca, quien esta mas lejos?

Rta: Esta mas cerca Carlos se encuentra 9m a la escuela y el mas lejos es Daniela se encuenta $\frac{1}{10}$ Km a la escuela.

¿Cual es la diferencia entre la casa de Carlos a la de Daniela?

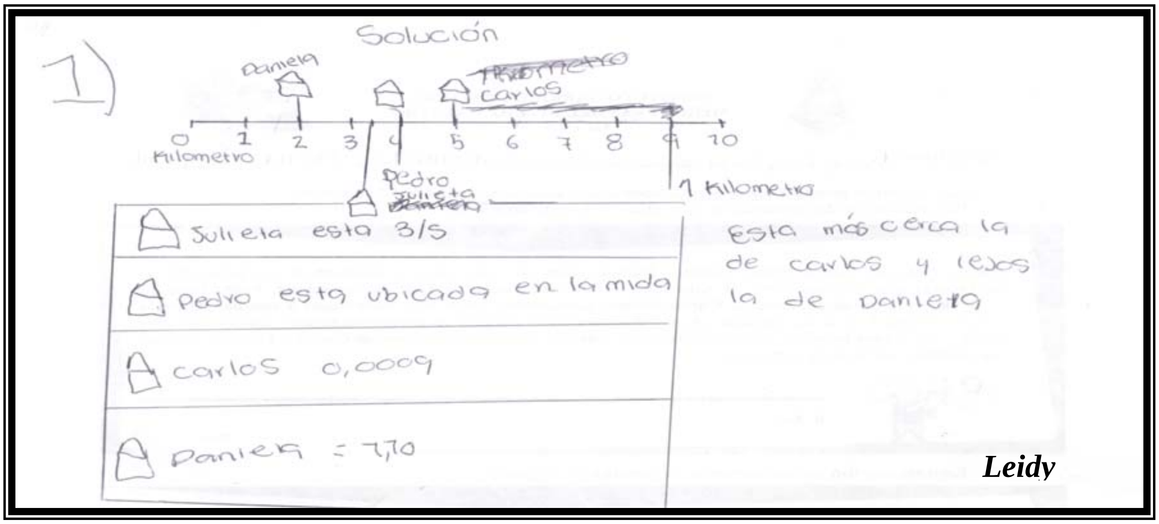
Rta: porque daniela se encuenta $\frac{1}{10}$ Km a la escuela y Carlos 9m.

Stefanny

En las primeras respuestas se observa que la estudiante deja de lado la ubicación posicional de las cifras, en algunos casos omite y en otros agrega cifras decimales.

Las respuestas dadas por Nubia y Stefanny al último interrogante muestran otra dificultad común en los estudiantes: el conflicto entre el lenguaje matemático y el lenguaje cotidiano. Ante la pregunta ¿Cuál es la diferencia entre la distancia de la casa de Carlos y la de Daniela? Nubia responde "que Carlos está cerca y Daniela está lejos"; en el lenguaje cotidiano el término diferencia nos lleva a buscar "las discrepancias, las contradicciones, aquello que no es igual", mientras que en matemáticas siempre va ligado a una sustracción. Se trata entonces de una dificultad inducida por el lenguaje.

Veamos ahora las respuestas dadas por Leidy:



Leidy

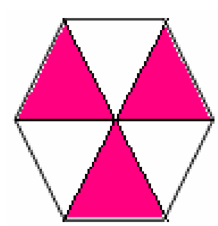
La ubicación de todas las viviendas es incorrecta. Pero lo que más preocupa son los errores cometidos al hacer la conversión de las fracciones en decimales, convirtiendo la fracción 3/5 en 3,5 y 1/10 en 1,10. En los programas de cuarto, quinto, sexto, séptimo y hasta octavo grado de acuerdo a las disposiciones emanadas por el Ministerio de Educación Nacional –al iniciar el estudio de los números reales- estudiamos los algoritmos para expresar fraccionarios como números decimales y viceversa, pero caemos nuevamente en el abordaje de forma algorítmica, enfatizando en la mecánica de los procedimientos sobre la comprensión de los conceptos.

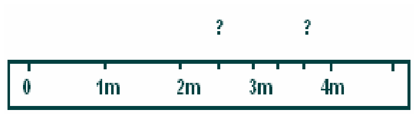
De León (2003) afirma que la enseñanza de los números fraccionarios es una de las tareas más difíciles para los maestros; dificultad que se muestra en el alto porcentaje de educandos que fracasan en aprender el concepto de fracción. El priorizar su enseñanza en el significado del fraccionamiento de la unidad, así como el aspecto algorítmico de las fracciones, dejando de lado una gran variedad de situaciones que están vinculadas al significado de las fracciones (problemas de reparto, comparación, medición y transformación de medidas, por ejemplo) son uno de los principales factores que determina el fracaso del educando.

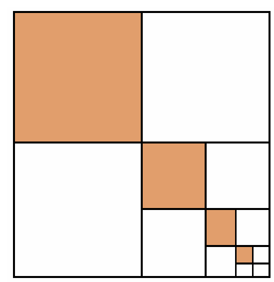
Enfatizamos la enseñanza de los números fraccionarios en la partición de la unidad, pero, ¿los educandos identifican dicho fraccionamiento? Para responder a este interrogante planteé una segunda actividad (ver anexo 1) con la cual pretendía observar como las estudiantes encontraban la fracción representada en diversas gráficas.

> *En los numerales a y c escriba un número que represente el área sombreada en cada gráfica y en el numeral b escriba los números señalados en la recta numérica con interrogantes.*

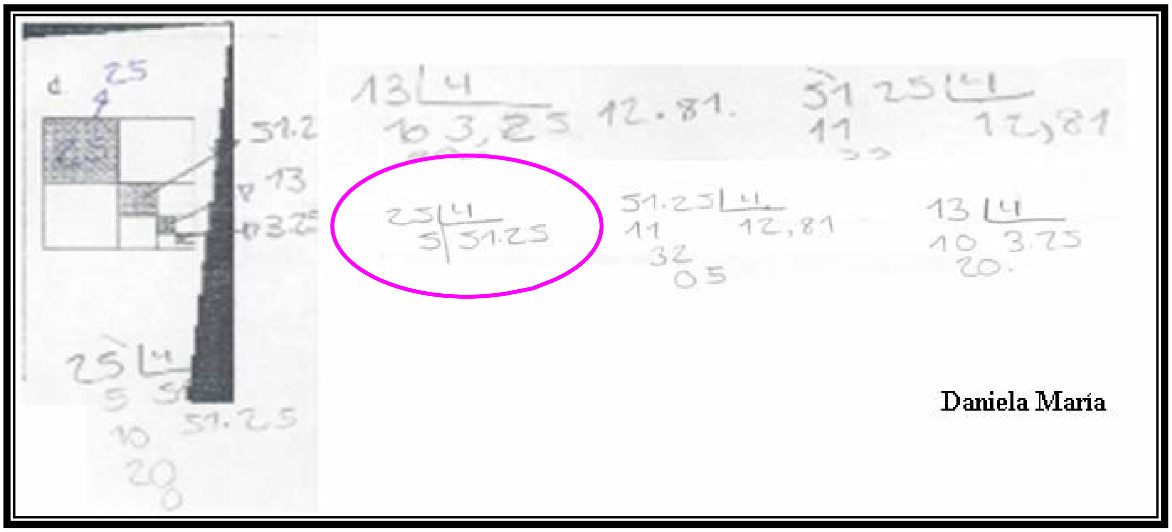
a. b. c.







Observemos los procedimientos realizados por Daniela para dar respuesta al tercer numeral:



Daniela, le otorgó una cifra -100- a toda la región haciendo luego divisiones sucesivas; halló siempre la cuarta parte de la región anterior, sin embargo la segunda división realizada (25÷4) es errónea y desde allí todos los posteriores resultados. Nuevamente aparecen errores por no comprobar los cálculos realizados y no verificar la solución dada. Daniela no se cuestionó sobre la correspondencia de los valores numéricos adjudicados al área sombreada y el tamaño de la misma.

Los procedimientos realizados nos muestran que:

- Acentuamos la enseñanza en los procesos numéricos por encima de los geométricos,

- Damos poca importancia a la verificación de las respuestas dadas, a que el educando se pregunte si "¿la respuesta tiene sentido?, ¿es razonable?" y a comprobar sus cálculos.

Los números fraccionarios son una estructura de gran complejidad y riqueza, aplicables a una variedad de situaciones matemáticas que emergen de la vida cotidiana, de fenómenos de la vida natural y social, o de la propia matemática. De acuerdo con los trabajos de Kieren (1988) citado por De León las fracciones pueden ser interpretadas como relación parte-todo, como cociente, como razón, como medida y como operador.

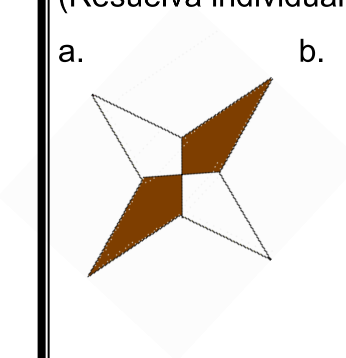
La interpretación de las fracciones como relación parte-todo se produce cuando un todo (continuo o discreto) se divide en partes iguales. La fracción indica la relación existente entre el todo -que recibe el nombre de unidad- y el número de partes que se consideran de dicha unidad.

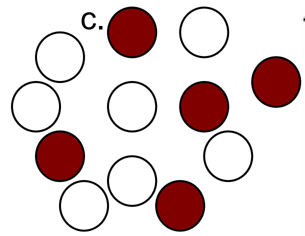
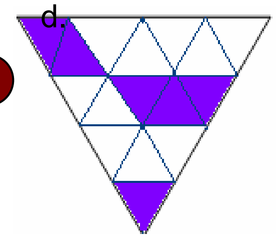
Por el énfasis dado a la partición de un elemento, la interpretación de la relación parte-todo en forma discreta (usando varios elementos) no es tan clara para el estudiante. Por ello, planteé una tercera actividad con la que pretendía nuevamente observar la interpretación de la fracción como parte de un todo representada gráficamente, pero introduciendo ahora elementos discretos.

Plantee una segunda guía (Ver Anexo 2) en la cual propuse un ejercicio que aparece en los estándares curriculares de matemáticas MEN (2003).

Escriba la fracción que corresponde al área sombreada en cada figura:

(Resuelva individualmente)

a.

b.

c.

d.


a.__________ b.___________ c.____________

d.____________

¿Cuál es la fracción que corresponde al área no sombreada?

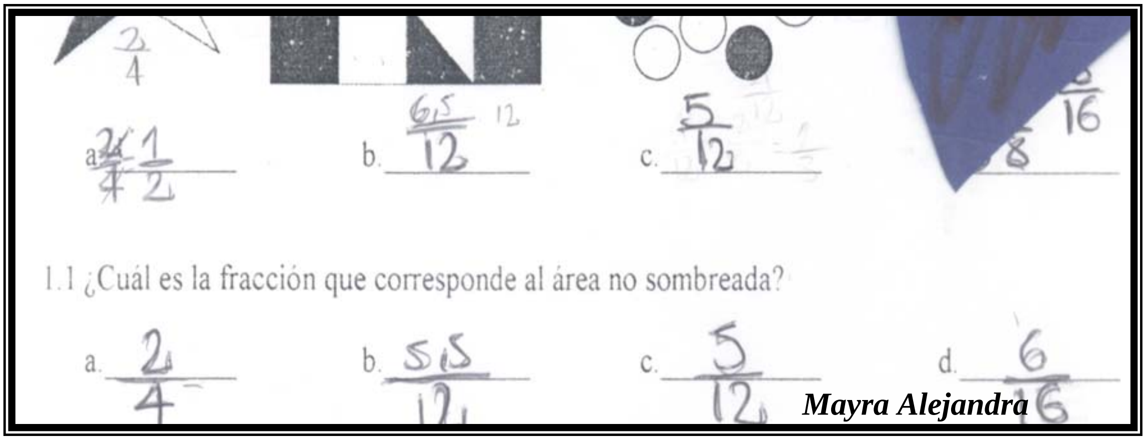
a.__________ b.___________ c.____________

d.____________

Parecía sencillo en un comienzo, pero una vez se encontraron con el literal 1.c, preguntaron: ¿Profe…, estas bolitas…por qué no están dentro de algo, o cada una, es una aparte?, y antes de tener la oportunidad de responderle a la estudiante, una compañera dijo: … es un grupo de maras4, unas son de color y otras son transparentes…

[4] Maras: esferas pequeñas de cristal.

Observemos las respuestas de Mayra:

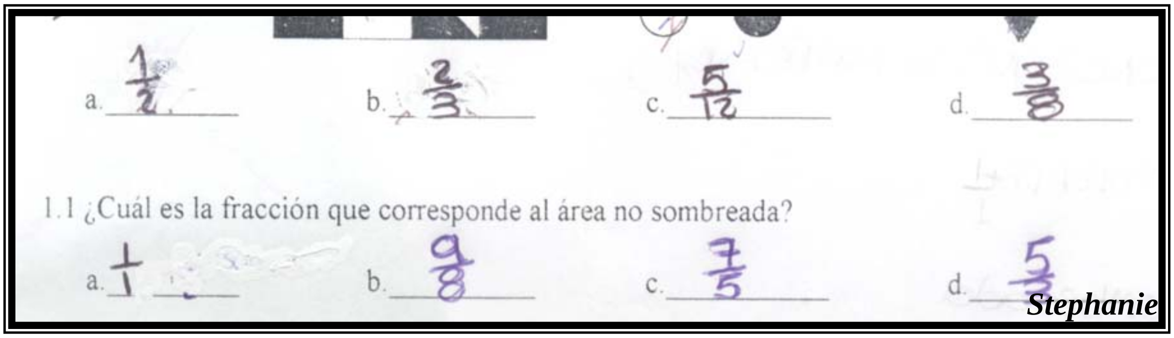


Causa interés la respuesta dada en los numerales b en los cuales utiliza números decimales en el numerador del fraccionario; lo que quiso expresar está correcto, pero no se detuvo a observar "lo raro" de su representación. Comúnmente, la representación generalizada que hacemos de una fracción es a/b, con a y b números enteros y b diferente de 0. Parece que para Mayra no está muy clara esta definición.

Analizando las respuestas dadas a los numerales c podemos ver varias dificultades, entre ellas la no identificación de la unidad patrón (12 elementos), es decir $\frac{5}{12} de 12$ En este caso, al ser una relación entre partes, no se dispone de una unidad de referencia, lo que introduce un factor de complejidad. Dificultad observada en la mayoría de las respuestas de las estudiantes del grado séptimo.

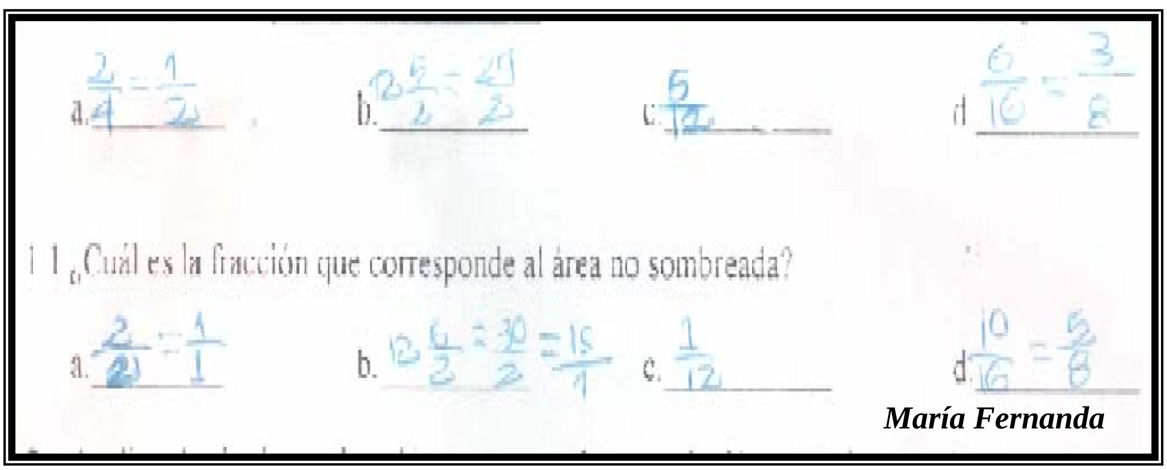
A pesar de que la representación parte-todo como modelo discreto es similar a la representación continua (región unitaria), no resulta tan clara para los educandos, ya que la unidad no es perceptible fácilmente. Por esto la enseñanza de las fracciones en el ámbito escolar, se basa generalmente en el estudio de la fracción como relación parte-todo implicando magnitudes continuas (longitud, superficie, etc.), dada la facilidad de comprensión de esta interpretación.

Las respuestas de Stephanie:



Presenta varias dificultades al escribir la relación parte-todo. En los numerales b no logra identificar los cortes realizados. También presenta dificultad en la identificación de magnitudes discretas. Las respuestas dadas al numeral 1.1 son las que mayores errores ocasionaron. ¿No comprendió la tarea solicitada?

Lo mismo sucede con las respuestas dadas por Maria Fernanda.

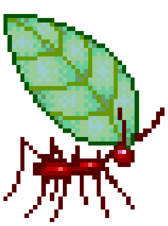


¿Qué pasó con los numerales b? Tomó todo el rectángulo como la unidad entera el cual dividió en 12 cuadritos (de allí el entero), uniendo las partes sombreadas como partes completas (cinco) que ubicó en el numerador y el medio sobrante lo ubica en el denominador. Ha creado su propio algoritmo.

Brousseau, Davis y Werner (1986) (citados por Engler) consideran los errores cometidos por los educandos en las tareas matemáticas como parte normal en el proceso de aprendizaje y afirman "[…] los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores" y complementan su observación diciendo que "se hace evidente que los estudiantes son con frecuencia más inteligentes para inventar sus propios métodos originales de lo que se espera de ellos. Incluso cuando un método ha sido presentado por el profesor, un estudiante puede desarrollar su propio método original, llegando hasta ignorar el método del profesor". Esta serie de hechos se vienen observando desde hace tiempo, pero en mi caso solo hasta ahora he analizado su complejidad.

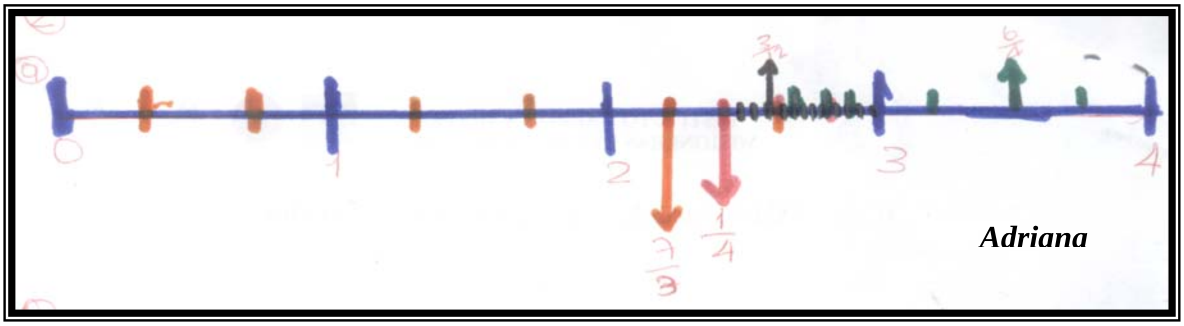
Complementé esta segunda guía con el planteamiento de un problema, con el cual me propuse analizar los procedimientos que llevan a cabo las estudiantes para resolver situaciones que involucren adiciones y sustracciones de fraccionarios. (Anexo 2)

Analiza la siguiente situación y encuentra una solución,



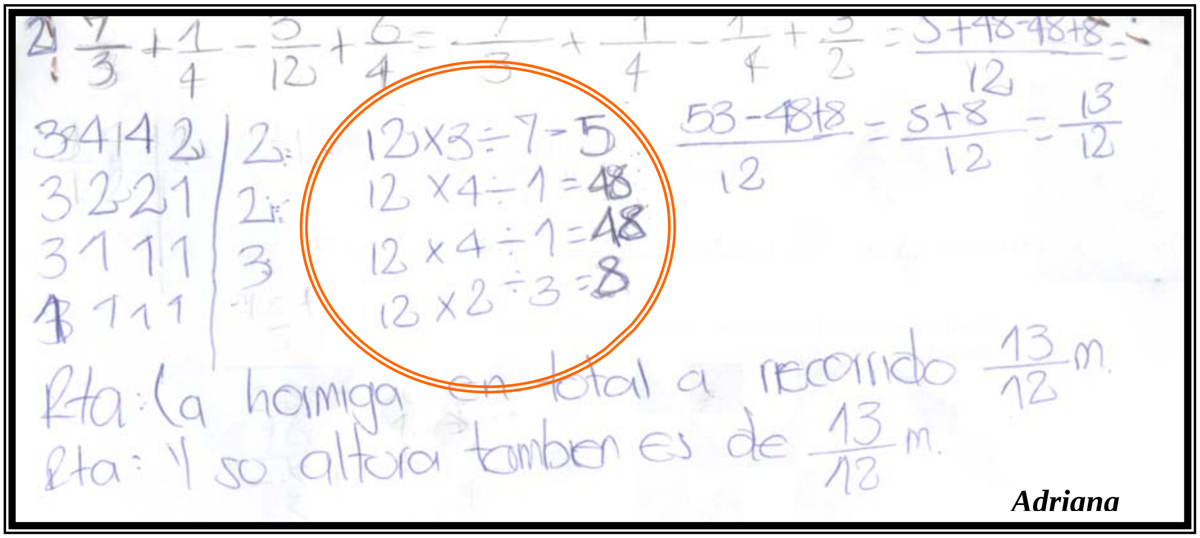
Una hormiga carga una hoja a sus espaldas e inicia cuesta arriba el traslado de la hoja. Su recorrido ha comenzado: Asciende $\frac{7}{3}$ de m, descansa y nuevamente asciende $\frac{1}{4}$ de m. Luego, la hoja le ha desequilibrado su estabilidad obligándola a descender $\frac{3}{12}$ de m. Nuevamente intenta continuar su recorrido logrando ascender $\frac{6}{4}$ de m, ¿cuántos metros ha recorrido en total?, ¿a qué altura del piso se encuentra?

La primera interpretación que le dio Adriana al planteamiento, fue con ayuda de la recta numérica, creada por ella; pues no consideré darles la recta numérica, para observar la interpretación propia de cada estudiante:



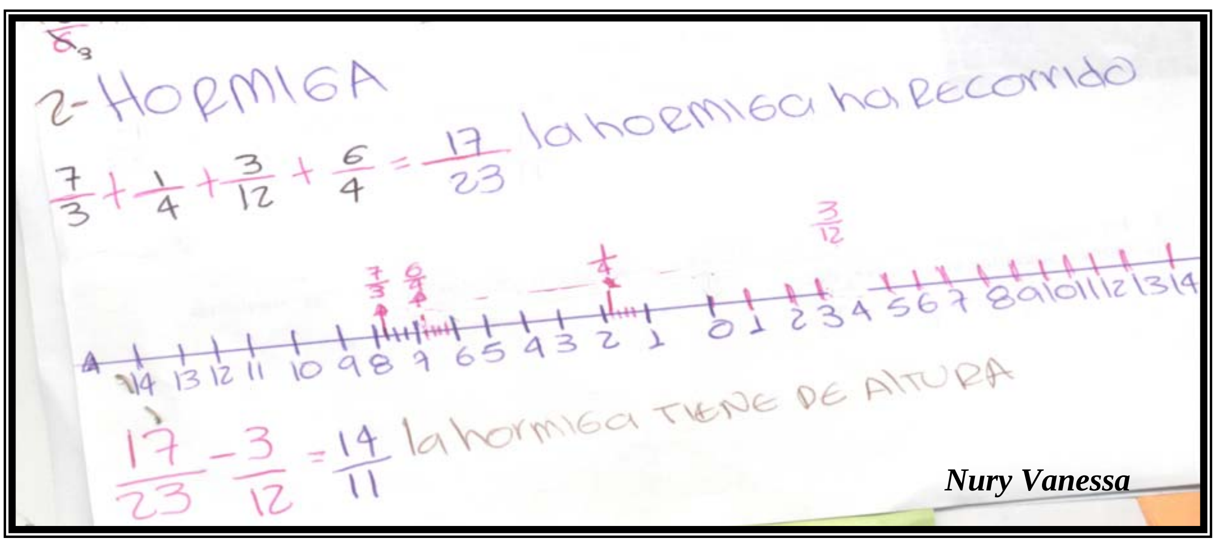
Además de no interpretar el descenso como un movimiento de retroceso, Adriana modificó el patrón de medida en cada movimiento. Ha ubicado muy bien el fraccionario $\frac{7}{3}$ pero a partir de allí sus ubicaciones son erradas. Sitúa cada número fraccionando el segmento de recta que va desde la anterior ubicación a la próxima unidad. Esto me lleva a analizar la forma en que realizamos movimientos en la recta: normalmente al ubicar fraccionarios lo hacemos tomando como referencia al cero –para Adriana este es representado por el punto final del anterior movimiento- y cuando hacemos movimientos secuenciales trabajamos con números enteros, no con fraccionarios.

Con los movimientos realizados en la recta no logró dar respuesta a los interrogantes planteados, por ello realizó luego el algoritmo "que recordaba" para la adición de fracciones heterogéneas –restando cuando la hormiga descendía. Aparecen así errores ocasionados por algoritmos mal utilizados. Halla correctamente el mínimo común múltiplo y determina así el denominador común (12) sin embargo, en lugar de dividir por cada denominador, multiplica y luego divide entre los numeradores (tomando los valores enteros) haciendo las respectivas sumas y restas con estos valores.



Adriana

Nury muestra en su solución una de las dificultades más comunes al realizar adiciones y sustracciones de fraccionarios: sumar y/o restar numeradores y denominadores entre sí.



Nury Vanessa

La causa de este error tan común es sin duda la forma en que desarrollamos los algoritmos para las diversas operaciones, acentuando siempre la operatividad con los naturales.

Por ejemplo, al multiplicar $\frac{1}{5}x\frac{4}{3}=\frac{4}{15}$ hacemos una por cuatro, cuatro y cinco por tres quince, es decir multiplicamos números naturales; resaltamos esta operación diciendo "numeradores con numeradores y denominadores con denominadores".

Es decir, en la operatoria no tomamos al número fraccionario como un número en sí mismo, sino que lo descomponemos en números naturales, agravando un poco más las cosas al hacer énfasis en los procedimientos mecánicos de resolución.

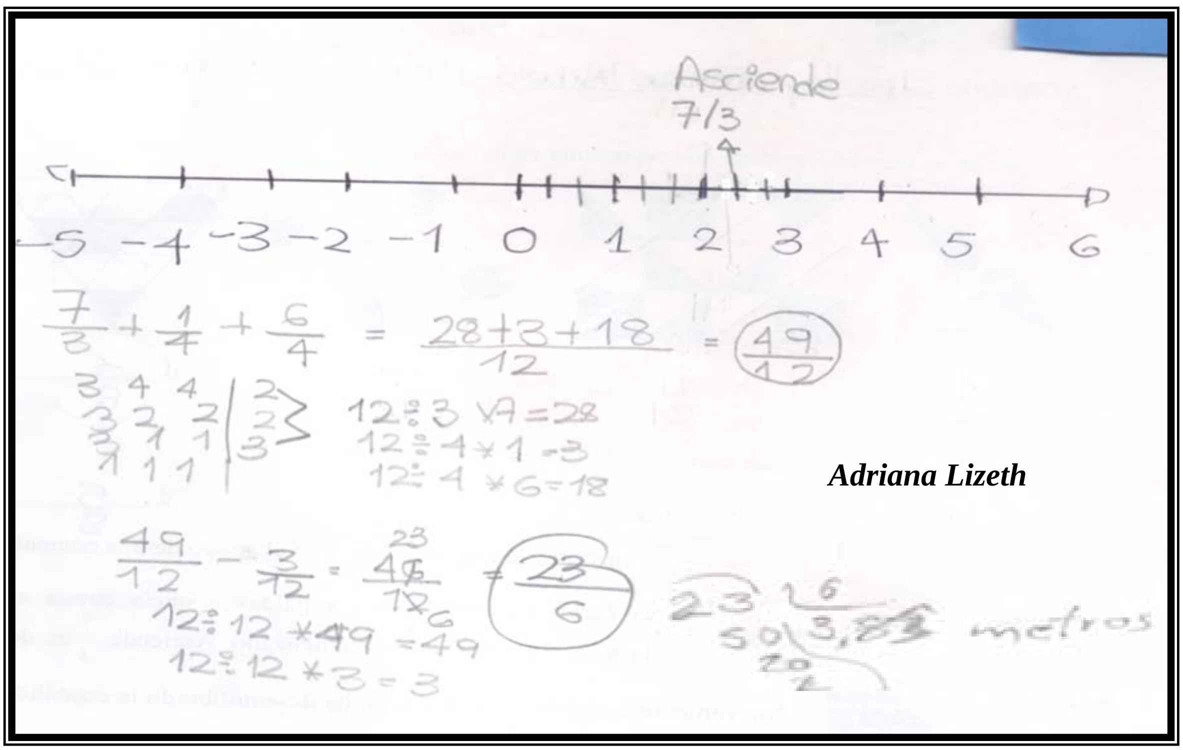
Cuando $\frac{4}{3}$ es factor de una multiplicación, se convierte automáticamente en dos números distintos, multiplicamos por cuatro dividimos por tres.

Para sumar $\frac{1}{5}+\frac{4}{3}$ insistimos en el algoritmo "hallamos el mínimo común múltiplo entre cinco y tres que es quince, dividimos luego entre cinco y el resultado por uno …", es decir operatoria con número naturales.

Su gráfica también presenta errores muy representativos: Me impresiona que ubicara a izquierda y derecha del cero los movimientos: los descensos a la derecha y los ascensos a la izquierda., sin hacer mención a los números negativos. Ubica $\frac{7}{3}$ entre el 7 y el 8 dividiendo este último segmento en 4 partes, notando así el denominador tres, lo mismo hizo con $\frac{1}{4}$ el cual ubicó entre el 1 y el 2, divide el segmento en 5 partes y toma de ellas la cuarta –acercándose a 2- y así ubicó el resto de fraccionarios. Presenta dificultad con las fracciones impropias, las cuales son transformadas en números mixtos: convierte $\frac{7}{3}$ en $7\frac{1}{3}$ el cual ubica de la manera anteriormente descrita.

La ubicación en la recta numérica puede provocar varias dificultades en los educandos ya que no hay igualdad entre el número de particiones hechas y el número de segmentos resultantes; Nury al querer ubicar una cuarta parte, hace cuatro divisiones (rayitas) en el segmento de recta sin darse cuenta que en realidad el segmento quedó fraccionado en cinco partes.

La representación en la recta numérica es más difícil que la solución aritmética de un problema. Veamos la solución dada por Adriana Lizeth a esta misma tarea:



Adriana Lizeth

Utiliza inicialmente la recta numérica en la cual ubica correctamente el primer ascenso $\frac{7}{3}$, pero luego al no ser capaz de ubicar los demás fraccionarios, resuelve entonces trabajar con los procedimientos aritméticos; tomó las cantidades relativas a los ascensos y sumó –aplicando correctamente el algoritmo-, restando luego la cantidad descendida por la hormiga.

Al analizar los cálculos realizados se observa que el descenso de la hormiga es tomado como una "caída", que no implica esfuerzo alguno de la hormiga, por ello es una distancia ignorada al dar respuesta al primer interrogante.

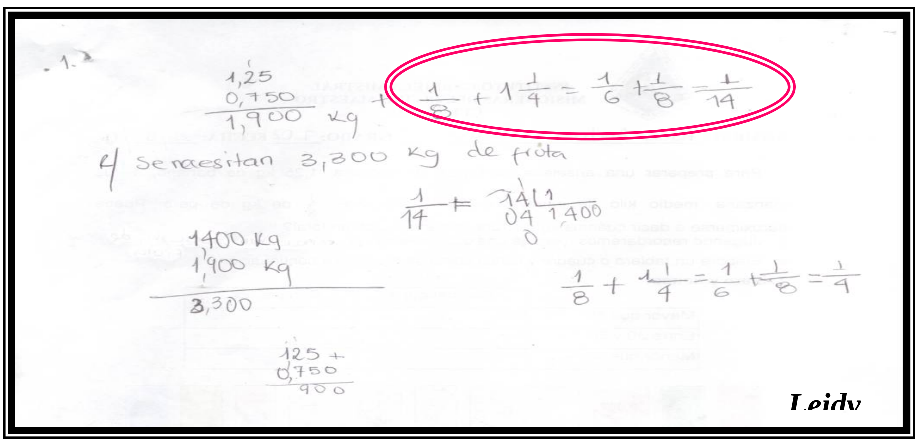
En el primer problema propuesto (anexo1) pude identificar algunos errores de las estudiantes al convertir fraccionarios en decimales. Para tener más situaciones de análisis propuse el siguiente problema (Ver Anexo 3)

Para preparar una ensalada de frutas se necesita: 1,25 Kg. de banano, $1\frac{1}{4}$ *de manzana, medio kilo de papaya, 0,750 Kg. de uvas,* $\frac{1}{8}$ *de Kg. de pera. ¿Cuántos Kg. de fruta se necesitaron?*

Inmediatamente leyeron el enunciado una estudiante a manera de broma o chiste preguntó: ¿Y quién quiere fruta a estas horas?, otra respondió "lo importante no es, quien quiere fruta, sino cuánta fruta se necesita para la ensalada", y una tercera comentó "el asunto es que necesitamos pasar de decimales a fraccionarios o al contrario y de eso no me acuerdo."

Las anteriores actividades fueron desarrolladas individualmente, pero viendo la necesidad de aclarar algunos procedimientos, terminaron trabajando en parejas. Pregunté el porqué de las parejas y una de las estudiantes dijo "es que entre las dos nos podemos ayudar, yo no me acuerdo muy bien como se hace, es difícil pasar de decimales a fraccionarios, uno se confunde y siempre le queda mal". Ante el grado de dificultad del problema una de ellas propuso "mejor pasemos todo a fraccionarios, es más fácil…", mientras que otra repuso "no, mejor a decimales"…

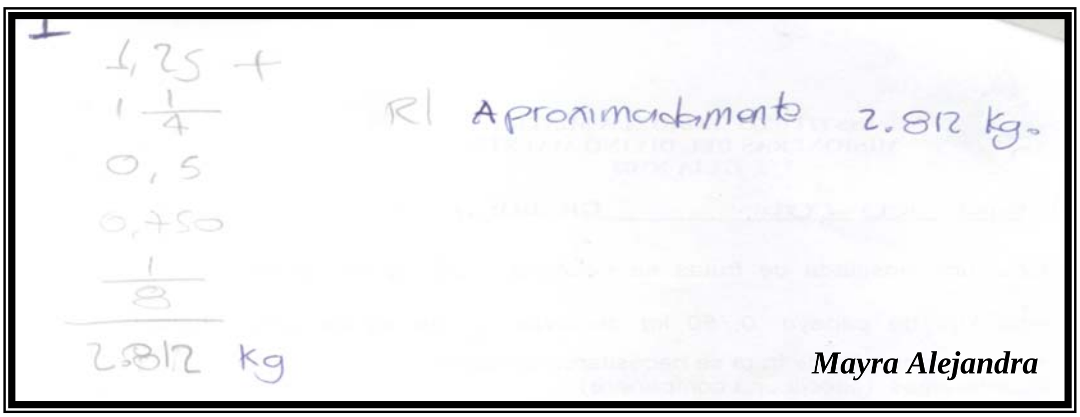
Leidy decidió separar los decimales de los fraccionarios y operar con cada uno de ellos.



Podemos observar nuevamente algunas dificultades al operar con fraccionarios: El mixto $1\frac{1}{4}$ lo convirtió en $\frac{1}{6}$ ¿sumó todos los números para obtener el 6?; al sumar $\frac{1}{6}$ con $\frac{1}{8}$ suma los denominadores y deja el mismo numerador –error al aplicar el algoritmo- obteniendo como resultado $\frac{1}{14}$. Para Leidy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$, confundida por la igualdad en los numeradores.

Los expresiones decimales son sumadas correctamente, sin embargo, al tener necesidad de sumar 1,900kg con $\frac{1}{14}$ decide convertir este último en decimal, para ello divide 14 entre 1, resultado que es traducido a 1,400 que al sumar con el 1,900 ya obtenido le da 3,300kg de fruta.

Nathaly y su compañera Mayra Alejandra no hicieron procedimiento alguno, ellas respondieron así:



Mayra Alejandra

Al acercarme a su lugar de trabajo y preguntarles si tenían alguna dificultad para resolver el problema, Nathaly respondió "por lógica se sabe que hay dos kilos y un poquito", ¿cómo que por lógica, a qué se refiere? pregunté, "pues 1,25 Kg. lleva un kilo y $1\frac{1}{4}$ es otro kilo y un poquito, así que con el resto casi se llega a tres kilos, por eso dijimos que es 2,812 Kg." ¿Por qué esa cifra? "es un número que se acerca a 3 y entre más cifras pongamos, más cerca de la respuesta, más aproximado". Ella quiso mostrarme que no necesitaba convertir el número a una sola forma, sino que podía sumarlos perfectamente como se los habían dado, que lo importante era entender la cantidad de la que se estaba hablando.

Aunque la respuesta no es la correcta, ya que no se analizó que 0,750kg también se acercaba a 1kg considero de gran importancia el enfoque dado por estas estudiantes. El uso de la aproximación y la estimación pocas veces la potenciamos en el aula de clase, por ello los grandes conflictos entre las matemáticas escolares y las matemáticas de la vida real.

Los errores encontrados en las respuestas a las actividades exploratorias

Entre los errores detectados tenemos:

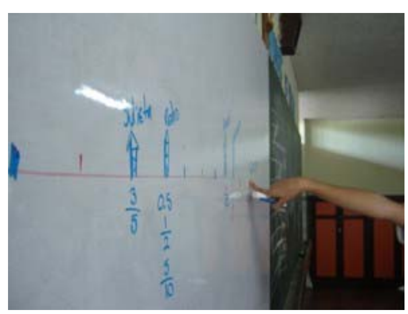
- Datos mal utilizados en la resolución de problemas.
- La no comprobación de los cálculos realizados y la no verificación de las soluciones dadas.
- La conversión de fracciones en decimales y viceversa.
- El conflicto entre el lenguaje matemático y el lenguaje cotidiano.
- La ubicación de las fracciones en la recta numérica, modificando el patrón de medida.
- La no identificación de la unidad patrón al tratar con magnitudes discretas.
- La confusión en la aplicación de algoritmos, en especial los relacionados con la adición y sustracción de fracciones.

- La transformación de números mixtos en fracciones impropias.

Luego de dar respuesta a cada una de las actividades, decidí socializar sus respuestas y procesos lo que considero muy importante, puesto que me permite no sólo observar más dificultades sino llevar a las estudiantes a la discusión y al conflicto cognitivo, aclarando sus dudas. El análisis de los errores y sus causas nos hacen reflexionar de que una enseñanza que se limita a presentar los conocimientos como algo terminado –ocultando todo el proceso que lleva a su elaboración- impide que los educandos puedan hacer suyas las nuevas ideas, los nuevos conceptos.

En años anteriores simplemente planteaba el ejercicio y lo corregía en el tablero a mi manera, sin propiciar un espacio para que las estudiantes participaran, discutieran el procedimiento y notaran sus dificultades. Al analizar los errores y formalizar las respuestas se recapitula sobre el trabajo realizado y se induce a preguntarse sobre el ¿cómo? y el ¿por qué? de las respuestas.

La socialización se hace ahora de manera voluntaria por parte de las estudiantes, pasando al tablero a compartir la forma como desarrollaron los ejercicios propuestos. Al solicitar la explicación del porqué se resolvió un problema de cierta manera, se posibilita la competencia argumentativa que en la mayoría de los casos es lo que más dificultad representa para los educandos y me permite observar los errores cometidos, que lejos de ser arbitrarios o irreflexivos, son con mucha frecuencia persistentes.



En la gráfica se muestra a Adriana explicando la solución del primer problema, confrontando las respuestas de sus compañeras al enfatizar la medición desde la ubicación de la escuela, la cual está en el kilómetro 1. El punto de referencia fue clave para la solución.

Nathaly al socializar la solución del problema de la hormiga observé: La facilidad para simplificar fracciones y el uso del algoritmo general para la suma y la resta de fracciones -sin hallar expresamente las fracciones equivalentes. Al leer detenidamente el problema muchas se lamentaron y expresaron: "a mí me quedó mal, porque no sumé la distancia cuando la hormiga se devolvió", pues efectivamente la mayoría de los estudiantes cayeron en el mismo error.

Observé que a pesar de haber socializado la solución de los problemas propuestos, repasando los algoritmos para las operaciones básicas, varias estudiantes continuaban con dificultades al respecto. Es decir, la respuesta a las dificultades no está en el repaso de los algoritmos, en los cuales muchas veces insistimos memorizar –mediante la mecanización- sin dar –o hallar- explicación del porqué son así.

En la corrección y superación de las concepciones inadecuadas y los errores cometidos, la metodología tradicional -donde el educando está ausente de un proceso significativo, sin lograr comprender, evaluar, cuestionar o sustentar sus respuestas- es menos eficaz que las metodologías de enfoque constructivista donde el estudiante se enfrenta a la solución de problemas que generan conflictos cognitivos, y a partir de ellos construye el conocimiento. Se requiere de una metodología que lleve al educando a sentir que ha construido el conocimiento, para que se apropie de él. Este fue el propósito de las actividades de mejoramiento.

Estas actividades fueron realizadas de manera individual, observándose la concentración de las estudiantes. Sin embargo, noté que al trabajar

individualmente, la solución de las situaciones planteadas, se hace un poco más lenta y complicada. Evidencié en el desarrollo de la última actividad el agrado y complacencia por el trabajo en grupo –parejas o tríos especialmente- el cual motiva una comunicación permanente entre los compañeros, con el maestro y con los contenidos. Por esto dentro de la propuesta de trabajo está el potenciar el trabajo en equipo.

Si lo veo, puedo tal vez recordarlo; si lo veo y lo escucho seguramente podrá prestarme alguna utilidad; pero si lo veo, lo oigo y lo hago jamás podré olvidarlo porque forma parte de mi mismo.

4. ALTERNATIVAS DE MEJORAMIENTO

El proceso de investigación lo he basado en una autorreflexión sobre mi práctica pedagógica. A mi forma de ver una reflexión no es sólo el hecho de evaluar el qué y el cómo estoy desarrollando mi quehacer pedagógico, si lo estoy haciendo bien o estoy fallando. Considero que la reflexión debe ir más allá, planteando alternativas de mejoramiento para superar las dificultades encontradas y fortaleciendo los aspectos positivos.

Es por esto que después de identificar las dificultades de las estudiantes con relación al tema, que planteé algunas alternativas basadas en el trabajo en equipo, como una estrategia que permite el intercambio de ideas y mayor dinamismo al interior de la clase.

Las alternativas fueron desarrolladas de la siguiente manera:

4.1 TRABAJANDO EN EQUIPO

Debido al número de educandos con los que cuenta la institución es una realidad ineludible que el seguimiento y acompañamiento individual es de difícil ejecución, por tanto antes que decir cómo enseñar el tema de fraccionarios, considero importante generar alternativas de trabajo. Es por esto, que planteo el aprendizaje colaborativo ya que a través de las discusiones que se generan al interior de un tema se abren caminos para solucionarlo exponiendo las razones o comprendiendo las propuestas de otros compañeros lo cual los induce a cambiar sus interpretaciones o a mantenerlas, haciendo que el conocimiento se vuelva público y se vaya reevaluando hasta hacerse más comprensible, así como lo afirma Panitz, citado por Del Valle (2000): "La premisa básica del aprendizaje colaborativo es la construcción del consenso a través de la cooperación de los miembros del grupo"como una estrategia de aprendizaje que favorece el desarrollo de actividades en pequeños grupos, maximizando el aprendizaje de todos los educandos mediante el apoyo mutuo frente a sus dificultades y fortalezas.

Es para mí y para la mayoría de maestros del sector oficial una gran dificultad evaluar de manera individual a grupos tan numerosos, donde es un hazaña identificar al interior de una clase quienes han comprendido o no un tema. Por tanto el trabajo colaborativo se convierte en una herramienta de gran apoyo, pues los educandos con mayores habilidades podrán identificar de manera más cercana a sus pares académicos con dificultades de comprensión, aportando en el momento indicado y de forma sencilla. Esta actividad además motiva al liderazgo a quien aporta y tranquilidad a quien recibe, sin el temor de sentirse evaluado o en muchas ocasiones "marcado" por sus compañeros y su maestro. El aprendizaje colaborativo es una alternativa en la que se comparte el conocimiento, se hace posible la igualdad de derechos y oportunidades, pues se permite construir el valor de trabajar juntos, se privilegia el respeto, la tolerancia, el pensamiento crítico y creativo. Gente (2002).

Otros autores expresan que mientras los estudiantes tengan que interactuar en un contexto escolar individualista y competitivo, no podemos esperar de ellos actitudes y comportamientos sociales que manifiesten respeto y aceptación a la diferencia. Comparto esta posición, ya que al trabajar en equipo los educandos se tornan más solidarios, más responsables, más respetuosos y tolerantes a las diferencias individuales y ritmos de aprendizaje de sus pares, posibilitando así una mejor calidad de su aprendizaje.

Los estudiantes al trabajar en pequeños grupos pueden entre otras actividades:

- Trabajar en equipo, teniendo claro cuales son las responsabilidades de cada uno.
- Hacerle preguntas a sus compañeros.

- Ayudar a clarificar conceptos, ejercitar destrezas y resolver problemas, etc.

- Comparar las respuestas de sus ejercicios o tareas.
- Realizar los informes a entregar.

4.2 ELABORANDO MATERIAL CONCRETO

Orienté a las estudiantes a construir sus propias herramientas pedagógicas y salir de la monotonía de las clases explicativas. Considero que el uso de material concreto facilita la comprensión de este tema en especial. Como lo presenta en la Revista iberoamericana de educación matemática Nº 6. (2006) Morales quien afirma: "[…] el material manipulativo hace más efectivo y eficiente el aprendizaje, pues se desarrollan las diversas habilidades relacionadas con el pensamiento matemático porque el estudiante plantea hipótesis, hace conjeturas, generaliza, y si es posible demuestra, desde sus presaberes" El emplear materiales concretos manipulables puede ser de gran ayuda para el desarrollo del pensamiento de los educandos y para facilitar la adquisición de destrezas y habilidades.

Muestro a continuación algunas imágenes de las estudiantes elaborando los materiales que luego utilizaremos.

Manipulación de material concreto, para la comprensión de los números fraccionarios.

Representación de los fraccionarios mediante el uso de papel.

Elaboración de fichas de trabajo, para el desarrollo de la actividad de competencia.

Manipulación de material en la construcción de la tirilla métrica.

Ubicación de puntos en la recta numérica, haciendo uso de material tangible.

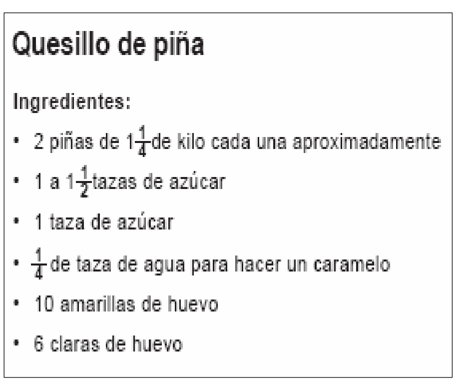
Construcción de los círculos fraccionarios

> *"La capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" Rico, 2004*

4.3 IMPLEMENTANDO SITUACIONES DEL CONTEXTO

Varios interrogantes surgieron de las actividades exploratorias y que guiaron la implementación de esta propuesta: ¿Cómo propiciar en las estudiantes una mejor comprensión del concepto de fracción?, ¿cómo lograr que las estudiantes le encuentren significado a las operaciones y puedan realizarlas sin tener que acudir -como única opción- al uso de algoritmos o reglas mecánicas?, y ¿cómo relacionar las diferentes representaciones de los números fraccionarios comprensivamente?
Propuse, como un primer acercamiento, rescatar el uso de los fraccionarios en el lenguaje cotidiano, para ello llevé a clase material real con el cual presenté varias situaciones del contexto:

Me serví medio vaso de leche.
Ojalá que no llueva, ya que para ir de aquí a la finca necesitamos medio día.
Mi casa queda a la mitad de la cuadra.



Quesillo de piña

Ingredientes:

- 2 piñas de $1\frac{1}{4}$ de kilo cada una aproximadamente
- 1 a $1\frac{1}{2}$ tazas de azúcar
- 1 taza de azúcar
- $\frac{1}{4}$ de taza de agua para hacer un caramelo
- 10 amarillas de huevo
- 6 claras de huevo

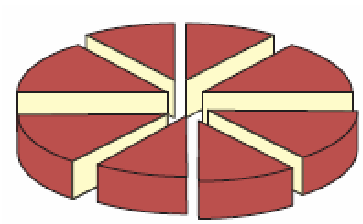
Para fritar una libra de papa se necesitan ¼ de litro de aceite.
Para hacer un salpicón para dos personas, necesitamos media-1/2 - piña y un cuarto- ¼- de patilla.
Al revisar las recetas del libro Comer bien y vivir bien (2004), encontramos tanto en las instrucciones como en los ingredientes variadas expresiones de medidas como las

siguientes: " $\frac{1}{2}$ kilo de maíz" "1 pollo de 1kilo y $\frac{1}{2}$ ", " $\frac{1}{2}$ pimentón rojo", "calentar el horno $\frac{1}{4}$ de hora previamente "...

Y variados ejemplos que ellas mismas dieron, como: ½ pollo, asistimos la totalidad de las estudiantes a clases el día de hoy, peso 57,2kg, mido 1,63m, me tomé toda la gaseosa.

También salimos a observar algunos lugares en el colegio que nos recuerdan particiones…
Las mesas de la cafetería o las losetas de la batería de baños.

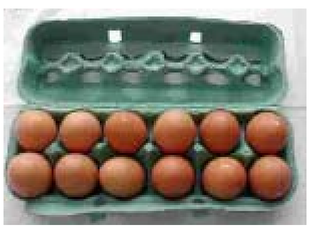
Repasamos luego la representación geométrica y numérica de los fraccionarios.
Recordé que existen varias maneras para representar una fracción, la primera, como parte de una unidad:



Si hablamos de medio vaso de leche, comparamos la cantidad de leche vertida con el vaso lleno (la unidad).

Hablamos de partir una torta, un queso,… y aproveché así mismo las barras de chocolate, las cuales ya vienen quebradas en pequeños trocitos iguales, compartiendo así $\frac{1}{3}$ de la chocolatina, o $\frac{7}{8}$ de ella, y unieron algunas chocolatinas cuando trabajamos con los fracciones

Estas actividades gustaron mucho, las estudiantes hablaron de que siempre hacían dibujos y operaciones en el cuaderno, pero nunca "palparon" los fraccionarios.



Así mismo, utilizamos recursos cotidianos como colombinas, huevos, piedras, colores, etc. al trabajar como unidad el número de elementos de un conjunto. Por ejemplo, cuando tomamos como unidad un cartón de huevos; el todo se encuentra representado por los doce huevos de los cuales tomamos la mitad, entonces $1/2$ de los doce huevos será seis, así: $\frac{1}{2} * 12 = \frac{12}{6} = 6$.

Cuatro huevos representarán $\frac{1}{3}$ del total del cartón, es decir, $\frac{1}{3} * 12 = \frac{12}{3} = 4$. Y así con más ejemplos donde se aplicó el operador fraccionario.

Y aquí radica uno de los aspectos más conflictivos al abordar la enseñanza de los fraccionarios, y es la cantidad de significados que encierra su utilización, por ejemplo se les enseñó a las estudiantes el significado de fracción como parte de un todo, se les dijo que $\frac{3}{4}$ de una torta es partir la torta en cuatro y tomar tres partes, en el caso del cartón de huevos $\frac{3}{4}$ es representado por nueve huevos, y al hacer la interpretación como operador, $\frac{3}{4}$ de doce huevos, implica multiplicar a 12 por tres y eso dividirlo en cuatro partes. Por ello insistí mucho en la importancia del contexto en cada uno de los problemas a resolver.

Ante la imposibilidad de trabajar siempre con los elementos ya mencionados, reforzamos este trabajo utilizando papel y tijeras, para formar algunos polígonos y trabajar con ellos.

A cada estudiante se le entregó en papel iris: 2 (dos) círculos –simulando las tortas- 2 (dos) cuadrados y 2 (dos) rectángulos –como las chocolatinas-, de colores diferentes, en los que debía modelar algunas fracciones. (Ver Anexo 3)

> 1. En figuras geométricas planas (rectángulo, cuadrado o círculo), modele las siguientes fracciones, socialice el trabajo realizado:
>
> a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{10}{4}$ c. $\frac{1}{3}$ d. $1\frac{2}{5}$

Ante la actividad a realizar hubo lluvia de preguntas: ¿Para qué fraccionario utilizo los cuadrados y para cuales los círculos?, ¿cómo los hago?…coloreando?...o cómo?, ¿se puede recortar el papel?, ¿yo tengo papel del mismo…puedo cambiarlo por otras figuras?, ¿puedo emplear una sola figura para representar todos los fraccionarios? Tratando de responder una a una las preguntas les dije que lo importante es aprovechar el material disponible y que ellas mismas se idearan cómo podrían resolver esa situación, pero que de todos modos no ignoraran el material entregado. Así como lo expresaron lo hicieron. Algunas estudiantes recortaron papel a su gusto, empleando figuras del tamaño y del color que querían.

El trabajo en grupo generó un ambiente muy cordial, las estudiantes reían y compartían entre ellas el papel, las tijeras, los procedimientos del cómo lo harían y porqué lo harían de esa u otra forma,…

Adriana modeló las fracciones a, c, d en rectángulos, y el literal b en rombos, me acerqué y le pregunté porque había elegido dichas figuras, sin pensarlo mucho me respondió: "en los rectángulos es mucho más fácil dividir los pedacitos y tomar los que se quieren, con los círculos toca medir y medir y cómo no tengo transportador , me va a quedar mal", si… pero veo que ha trabajado con rombos, o paralelogramos, le volví a interrumpir, …"es que los rombos también son fáciles de dividir"

Adriana

Nury trataba de encontrar una respuesta a los ejercicios y no hallaba la manera. Al acercarme sintió pena por su trabajo y lo tapó con otro cuaderno, se sonreía nerviosamente y trataba de esconder su trabajo en medio del de su compañera.

Nury

Aún presentaba dificultades para reconocer fracciones impropias como $\frac{10}{4}$ y $\frac{7}{5}$, así que al socializar la actividad hice gran énfasis en ellas.

Complementando esta actividad propuse algunos problemas, los cuales debían ser resueltos en parejas. Para esto desarrollé la dinámica de enumerar los problemas del 1 al 5, elaborando papelitos que contenían uno de estos números, los cuales repartí de manera aleatoria para que varias parejas resolvieran el mismo problema, con el fin de enriquecer la socialización con las diversas formas.

En una investigación realizada por Hart (1981) (citado por De León) se informa que los estudiantes presentan dificultades para comprender que una división entre enteros o un reparto puede ser expresada de manera exacta por una fracción. Los estudiantes se oponen a representar un reparto de 4 entre 7, con la expresión $\frac{4}{7}$. Para analizar el significado de la fracción como cociente propuse algunos problemas, los cuales debían ser resueltos en parejas. Según Kieren (1988) (citado por Andonegui) el contexto de reparto es un ejemplo de las situaciones donde aparece el significado de la fracción como el cociente entre dos números naturales.

- Hay seis galletas en forma de rectángulo y se van a repartir, en partes iguales, entre cuatro niñas. ¿Cuánto le toca a cada una?

- Tenemos dos galletas redondas y se van a repartir en partes iguales entre cuatro niñas. ¿Cuánta galleta le toca a cada una?

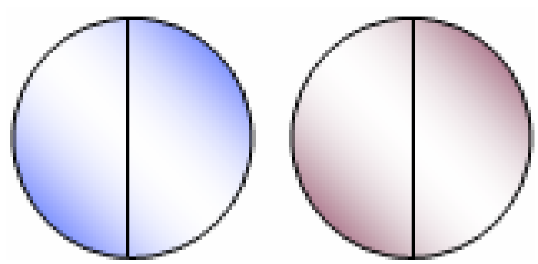
- Tenemos tres barras de chocolate y se van a repartir, en partes iguales, entre ocho niños. ¿Cuánto le toca a cada uno?

- Para el cumpleaños de Camila, su mamá compró dos pasteles redondos iguales. Si a la fiesta asistieron 20 personas, ¿que tanto pastel le toca a cada uno?

- De su viaje a Bogotá, Dora compró una caja con ocho donas. ¿Cómo debe repartirlas de forma equitativa entre sus seis primitos?

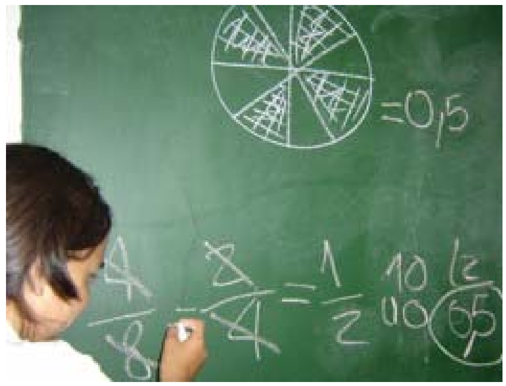
Para finalizar la actividad, pedí que una pareja represente a su grupo para presentar las diversas soluciones a cada uno de los problemas, explicando cómo lo resolvieron. Comparamos los diferentes procedimientos –algunas utilizaron el papel y las tijeras para modelar, otras dibujaron y unas más dividieron para expresar la respuesta numéricamente.

La actividad fue muy enriquecedora, ya que fue posible comparar por ejemplo que al repartir las dos galletas redondas, podía expresarse como:



$\frac{1}{2}$ de galleta para cada niña, $2 \div 4 = 0{,}5$ de galleta o como alguien más dijo: el 50% de la galleta.

Es decir que: $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ Hablando entonces de fracciones equivalentes y de que un fraccionario también lo podemos expresar con números decimales o con porcentaje, y fueron las estudiantes quienes lo expresaron, sintiendo que realmente estaban construyendo el conocimiento.



Guié a las estudiantes a ver ahora que $\frac{2}{4}$ no solo significaba que la unidad la dividamos en cuatro partes y de ellas tomáramos dos, que por ejemplo, en el primer problema $\frac{2}{4}$ significa que tenemos dos unidades –galletas- que hay que repartirlas entre cuatro niños, resultando cuatro pedazos iguales de galletas cuya medida es $\frac{2}{4}$ de galleta. Teniendo sentido el ver la fracción como una división, como un cociente.

Al continuar con la actividad, propuse entonces que cada pareja planteara un problema similar a los que se resolvieron y lo intercambiaran con algunas de las otras parejas para que ellas los resolvieran, fomentándose una especie de "competencia" tanto por ser las que mejor crearan los problemas como por resolverlos lo más rápidamente posible. Todas querían pasar al tablero y socializar sus respuestas. Observé así mayor dominio de los conceptos y procedimientos vistos.

4.4 REPRESENTANDO EN DISCOS

Utilizando fomi[5] cortamos varios CÍRCULOS – los cuales quisimos llamar discos fraccionarios- de 12cm de diámetro, los cuales las estudiantes dividieron, con ayuda del transportador, en 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 y 12 partes iguales, dejando también uno sin cortar el cual representa la unidad, el todo. Pero antes de dividir, cada una personalizó su próximo "rompecabezas", como así lo llamaron, dibujando diversas figuras en el fomi. Para facilitar el manejo recomiendo hacer cada partición de un color distinto, ya que ello permite identificar los pedazos de una misma medida con facilidad.



[5] Material económico, de fácil manejo, colores vistosos, durable y de fácil consecución

El objetivo de esta actividad es que las estudiantes -a través del material concreto- desarrollen el concepto de fracción equivalente, de adición, sustracción, multiplicación y división de fracción.

Empezamos a comparar los discos, superponiendo las fichas. Hice observar que por ejemplo, $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$ y que $\frac{6}{12}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{5}{10}$, recordando fraccionarios equivalentes y justificando los procesos de simplificación y amplificación.

También hice observar a las estudiantes que si se reúnen "dos de los medios" completamos el disco completo, que si reunimos "tres de los tercios" también armamos un disco al igual que "ocho octavos". Guiando a la estudiantes a expresiones como $\frac{2}{2}=1$, $\frac{3}{3}=1$ o $\frac{8}{8}=1$ y así sucesivamente.

Al comparar fraccionarios y al hallar fraccionarios equivalentes observé una gran ventaja de la representación circular, completar con un porque son mejores los círculos…ya que muchas veces las estudiantes para representar cuartos utilizan cuatro cuadritos del cuaderno como la unidad, y para representar sextos utilizan seis cuadritos,

haciendo imposible una buena comparación de cuartos con sextos, incluso cometen el error de afirmar que $\frac{1}{6}$ es mayor que $\frac{1}{4}$, debido a que la unidad dibujada es mayor.

Trabajamos en la suma y resta de fraccionarios homogéneos –con igual denominador. Para esto trabajamos en grupos de cuatro (para aumentar así el número de partes disponibles). Las estudiantes observaron que si tomaban 2 pedazos del disco dividido en tres –dos de los tercios- y los sumaban con otros cinco de los tercios, obtendrían siete pedazos de discos de los tercios, es decir que $2(\frac{1}{3}) + 5(\frac{1}{3}) = 7(\frac{1}{3})$, igual: $\frac{2}{3}$ + $\frac{5}{3}$ = $\frac{7}{3}$. Así con los quintos, los octavos, los novenos y otros tantos. Comprendiendo con facilidad que al tener pedazos de discos iguales, su suma o resta se reduce a agregar o quitar los pedazos, siendo estos de la misma clase. Por eso al sumar fraccionarios homogéneos, el denominador seguirá siendo el mismo, y el numerador será la suma de los numeradores de cada fraccionario, ocurriendo lo mismo con la sustracción. Lo mejor de estas conclusiones es que surgen de ellas mismas.

Aquí dieron su aparición los llamados números mixtos, ya que tener $\frac{7}{3}$ es tener dos discos completamente armados y $\frac{1}{3}$ más, lo cual pude escribirse como 2 + $\frac{1}{3}$ ó $2\frac{1}{3}$.

Planteando luego ejercicios como: si tengo $\frac{11}{6}$ ¿cuántos discos enteros hay y cuántos pedazos sobran?, o de qué otra manera escribimos $\frac{15}{8}$. Las estudiantes armaron los discos y daban sus respuestas. Luego las preguntas cambiaron, les dije si tengo 3 discos completos y 3 pedazos de los cuartos ¿qué fracción tengo?, a algunas estudiantes les causó dificultad esta forma de preguntar, pero rápidamente trataban de armar, encontrando la fracción pedida. Hicimos así varios ejercicios y luego revisamos los métodos para pasar de mixtos a fracciones o de fracciones a mixtos sin necesidad de armar los rompecabezas o dibujar.

Analizando el porqué del algoritmo: $2+\frac{1}{3}$2 + podría reescribirse como $\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$, encontrando que al aplicar el algoritmo de "dejar el mismo denominador y como nuevo numerador, multiplicar el entero por el denominador y sumarle el numerador" se resumía toda la actividad: dejar el mismo denominador (3), multiplicar el entero (2) por el denominador (3) obtenemos 6 (resaltando la expresión $\frac{6}{3}$) y al sumarle el numerador (1) (ver $\frac{1}{3}$) encontrando la expresión $\frac{7}{3}$; así con muchas otras fracciones. Aunque volvimos al algoritmo, ahora tenía lógica; pero hubo varias estudiantes que prefirieron el dibujar las fracciones a hacer el algoritmo, ya que "dibujando entendían muy bien, en cambio algunas veces se les olvidaba el método", afirmación que corrobora el no seguir enfatizando en los algoritmos.

Para realizar la suma o resta de fracciones heterogéneas procedí de forma similar, sólo que ahora el procedimiento no era tan fácil como con las fracciones homogéneas, insistiendo en el uso de los discos, no el algoritmo; yo indicaba las fracciones a sumar y ellas debían buscar los pedazos de disco correspondientes a cada una de las fracciones dadas, luego unirlos -haciendo coincidir los radios- encontrando entre todos los discos, mediante comparación de áreas, el disco o los pedazos de disco, que coincidieran con la suma planteada. Por ejemplo al pedir sumar $\frac{1}{4}$ con $\frac{1}{3}$, debían buscar e ntre todos los discos (inicialmente buscaron entre los tercios y los cuartos) y después de un tiempo llegaron a que la suma pedida era $\frac{7}{12}$. Al pedir la suma de $\frac{1}{3}$ con $\frac{1}{2}$ algunas encontraron que era $\frac{5}{6}$

mientras que otras hallaron que era $\frac{10}{12}$ haciendo notar que estas que eran fracciones equivalentes.

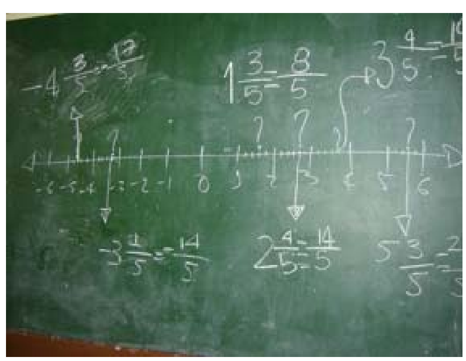
Debí ser cuidadosa al proponer los ejercicios, para que el común denominador fuese siempre uno de los números del 1 al 12 (menos el 7 y el 11), garantizando que siempre la suma o la resta pudiera ser hallada.

Para formalizar enfaticé en la equivalencia de fracciones; hallando que $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}$ y que $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$, entonces para encontrar el resultado de $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ trabajamos con $\frac{3}{12}+\frac{4}{12}$ que son fracciones homogéneas, hallando así $\frac{7}{12}$.

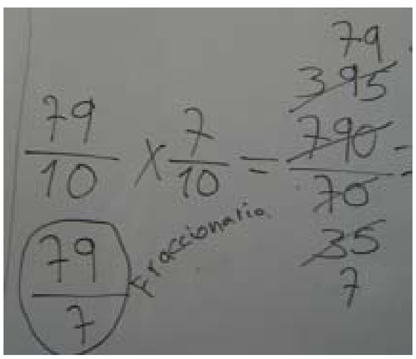
Realizando el mismo procedimiento con varias fracciones, orientando a las estudiantes a buscar primero fracciones equivalentes a las fracciones dadas y sumar –o restar- aquellas homogéneas, entonces las estudiantes observaron que esta era una forma reducida del procedimiento que estuvimos realizando. Considero que de esta forma entendieron el porqué de dicho procedimiento.

Los procedimientos para la adición y sustracción de fracciones por fin tuvieron sentido y las matemáticas pasaron de ser "un conjunto de algoritmos y leyes dictadas o inventadas por los maestros" a tener forma y significado.

Al realizar luego algunos ejercicios como

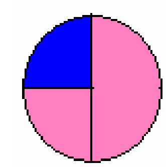


$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2}{6}-\frac{3}{6}$ aparecieron los números racionales, ya que el resultado de esta operación es $-\frac{1}{6}$, expresión que no corresponde a los números fraccionarios. Aquí se dieron nuevos cuestionamientos por parte de las estudiantes ¿y también hay fracciones negativas?, ¿cómo hacemos con los discos?, ¿cómo representamos $-\frac{1}{6}$? Expliqué a través de la ubicación en la recta numérica, recordando el proceso realizado con los enteros negativos. Hice énfasis en que éstas nuevas cantidades hacen parte (junto a los fraccionarios) de un nuevo conjunto numérico denominado los racionales.



La actividad con los círculos fraccionarios facilitó también la multiplicación y división, en los que había también algunas dificultades, al no recordar muy bien cuando se multiplica "en cruz" ¿al dividir o al multiplicar fraccionarios?

La multiplicación y la división de números fraccionarios crearon un gran problema en mí, ya que su algoritmo es "tan fácil" que estuve tentada a simplemente repasarlos; hablé con diversos colegas sobre su manera de enseñarlas, pero casi todos abordaban su enseñanza a través de los algoritmos, sin dar mayores explicaciones a los educandos. Sin embargo, encontré algunas ideas que me ayudaron al aplicarlas en clase destacando a Kieren (1988) quien manifiesta que "por lo que respecta a la división, ésta tiene sentido en los problemas donde se pregunta por «cuánto cabe algo en algo». Por ejemplo ¿cuánto cabe ¼ de metro de cable en ½ metro de cable?, la respuesta se puede obtener con una división de fracciones: $\frac{1}{2}/\frac{1}{4}=\frac{4}{2}$ = 2 ("Un cuarto cabe dos veces en un medio")".



Para la multiplicación usé algunas frases cotidianas usadas al multiplicar con naturales, para extenderlas luego al mundo de los fraccionarios. Recordamos que si deseamos hallar "el doble de un número cualquiera" sumamos dos veces ese número o multiplicamos por dos: el doble de 8 es 8 + 8 = 16 ó 2x8 = 16; el doble de 15 será 15 + 15 ó 2x15, en ambos casos 30 y así sucesivamente; extendiendo este análisis podemos afirmar que el doble de $\frac{1}{5}$ será $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ expresándose como $2*\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$, de igual forma el triple de $\frac{5}{8}$ será $\frac{5}{8}$ + $\frac{5}{8}$ + $\frac{5}{8}$ = $\frac{15}{8}$, entonces 3x$\frac{5}{8}$ = $\frac{15}{8}$. Propuse a las estudiantes varios ejemplos, transformándolos primero en una adición de sumandos iguales para expresar luego dicho resultado como el producto de un natural por un fraccionario. Hice un análisis similar para "la mitad de" usando nuevamente los círculos fraccionarios: Así la mitad de la mitad expresada como $\frac{1}{2}*\frac{1}{2}$ podíamos hallarla con los discos: que corresponde a $\frac{1}{4}$ es decir, $\frac{1}{2}*\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{4}$. Comparando siempre con los pedazos de círculos hallamos: la mitad de $\frac{1}{5}$ encontrando $\frac{1}{2}*\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$, la mitad de $\frac{3}{2}$ representada en $\frac{1}{2}*\frac{3}{2}=\frac{2}{6}$ justificando así el porqué de la frase "numeradores por numeradores y denominadores por denominadores", validando los procedimientos aprendidos.

¿Y por qué para dividir se multiplica? Fue otra de las preguntas que surgió. Nuevamente, resalta el uso de los algoritmos sin explicación alguna. Para dar respuesta a dicha pregunta me vi. en la necesidad de utilizar la frase "cuánto cabe" o "cuántas veces cabe", frase muy usada al enseñar la división entre naturales; expliqué entonces que al hacer la división 40÷8, decimos ¿cuánto cabe 8 en 40?, o ¿cuántas veces está 8 en 40?, así mismo al dividir entonces al hacer $\frac{1}{3}\div\frac{1}{12}$, nos podemos preguntar "¿cuántas veces cabe $\frac{1}{12}$ en $\frac{1}{3}$?" encontrando la respuesta al comparar con el círculo fraccionario dichos valores. Observamos que se requieren 4 pedazos de $\frac{1}{12}$ para cubrir $\frac{1}{3}$ del disco, "$\frac{1}{12}$ cabe cuatro veces en $\frac{1}{3}$", es decir $\frac{1}{3} \div \frac{1}{12} = 4$. De la misma forma se observa que $\frac{3}{5} \div \frac{1}{10} = 6$, que $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4$ ó que $\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{8}$, así con otros ejercicios dónde se pudo utilizar los discos; para facilitar las conclusiones, pedí hallar el resultado de $\frac{1}{10} \div \frac{1}{5}$ creando algunas discusiones al respecto, entre todos llegamos a la conclusión de que el resultado era $\frac{1}{2}$ -la mitad.

Pedí a las estudiantes comparar estos resultados con los del algoritmo que ellas sabían, justificando de alguna forma su uso, al comprobar la veracidad de sus resultados con los obtenidos usando los discos. Comprobar que se obtenían los mismos resultados hizo más fácil el resto de la explicación. Las estudiantes no desean la mecanización, sino el sentir que ellas han comprendido los algoritmos.
Al pedir realizar divisiones como $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ observaron que hallar cuántas veces cabe el pedazo de $\frac{1}{4}$ en el pedazo de $\frac{2}{3}$ no era muy fácil; daba un poco más que 2, pero ¿qué tanto más que 2?

Algunas vinieron al rescate de la situación: "multipliquemos en cruz" o "usemos la ley de la oreja" ¿ley? Así validamos su uso: "es una ley, por eso no se puede explicar, sólo aplicar". Usar los procedimientos –dije- no tiene nada de malo, el problema es no saber por qué los usamos; eso es lo que vamos a ver enseguida.
¿Por qué para dividir se multiplica? Razoné con ellas de la siguiente forma: "Cuando realizamos la división realmente estamos haciendo una multiplicación, por ejemplo al hallar el cociente de 40 ÷ 8 buscamos un número que multiplicado

por 8 dé 40, es decir que al hacer $40 \div 8 = 40 \times \frac{1}{8}$ estamos haciendo 8x‡ = 40 siendo nuestra tarea hallar el valor de ‡ el cual en nuestro caso es 5, por ello 40 ÷ 8 = 5, y así sucede con cualquier división, incluyendo a los números fraccionarios"

Entonces $\frac{1}{2} \div$ 4 podemos escribirlo como 4x‡= $\frac{1}{2}$, el cual como vimos en un ejercicio anterior es $\frac{1}{8}$, ¿cómo hallar fácilmente $\frac{1}{8}$? Recordé el concepto de inverso multiplicativo, observando con un poco de asombro que la mayoría de las estudiantes no conocían el término. Para reforzar su cálculo, reté a las estudiantes a una pequeña competencia, pidiéndoles encontrar el número especial que al multiplicar por un fraccionario cualquiera el resultado sea 1, expresado como $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{15}{15}$, , ó cualquiera otra expresión equivalente. En el cuaderno de apuntes formalizamos que cualquier fraccionario $\frac{a}{b}$ multiplicado por otro de la forma $\frac{b}{a}$ siempre generará como resultado 1 representada en el fraccionario $\frac{ab}{ba}$.

De esta manera pedí multiplicar los primeros fraccionarios, de los ejercicios de división propuestos al inicio de esta actividad, por los inversos multiplicativos de los segundos fraccionarios (divisores), haciendo observar la igualdad de los resultados que los obtenidos con los métodos anteriores (comparación de los círculos y multiplicación en cruz). Les di libertad a las estudiantes para utilizar cualquiera de los algoritmos, los cuales ya tenían "algo de explicación". Este es uno de los ítems en los cuales en un futuro debo mejorar su explicación.

Los algoritmos utilizados para la adición, sustracción, multiplicación y división de fraccionarios adquirieron por fin significado. Los procedimientos tienen una explicación lógica, no es porque así lo ha dicho el maestro y por ende hay que creerle. Sentir que "construyeron" el conocimiento facilita su aprehensión.

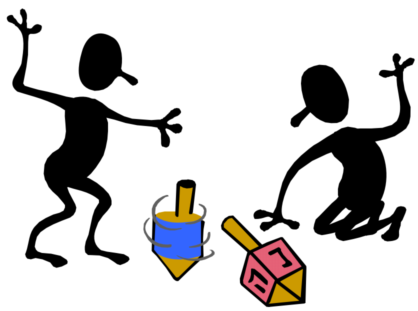
La utilización de los discos o círculos fraccionarios fue de gran agrado para los estudiantes, por la posibilidad de construir conocimiento, de dotar de lógica y sentido a conceptos y algoritmos conocidos pero poco significativos. Es muy común que los docentes les mostremos a los estudiantes los diferentes procedimientos o algoritmos usados en cada operación, pero muchas veces no mostramos porqué su validez, haciendo que nuestros estudiantes utilicen unos métodos que no le son significativos y que por lo tanto al aprenderlos de memoria, sin ninguna comprensión, son fácilmente olvidados.

.

"La esencia de la alternativa está basada en el empleo de los elementos del curriculum y su influencia en los diferentes componentes didácticos y su adecuación en la acción pedagógica de forma tal que respondan al contexto las exigencias planteadas" Rico (1998).

5. ¿SE SUPERARON LAS DIFICULTADES?

Para revisar el avance de las estudiantes, planteé el siguiente ejercicio: (Ver Anexo 4)



Jugando recordaremos. (Escoja una compañera)

Elabora un tablero y fichas como se muestra a continuación (tenga en cuenta que cada operador está de un color diferente):

Tablero y fichas:

Resultados	Competidor 1	Competidor 2
Menor que 1		
Entre 1 y 3		
Mayor que 3		

$-$	$*$	0,007	$\frac{2}{53}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4000}$	0,79	$\frac{5}{8}$	$+$	$\div$

¡Ahora a Jugar con su compañera!

- Las jugadoras barajan las tarjetas, aparte las tarjetas con operadores de las tarjetas con números.

- Una de ellas toma al azar una tarjeta con los operadores y dos de las tarjetas con números.

- Realiza la operación que le ha salido con las fichas seleccionadas y escribe el resultado en el tablero, según la casilla que corresponda. Su compañera comprueba el resultado.

- Gana quién cometa menos errores.

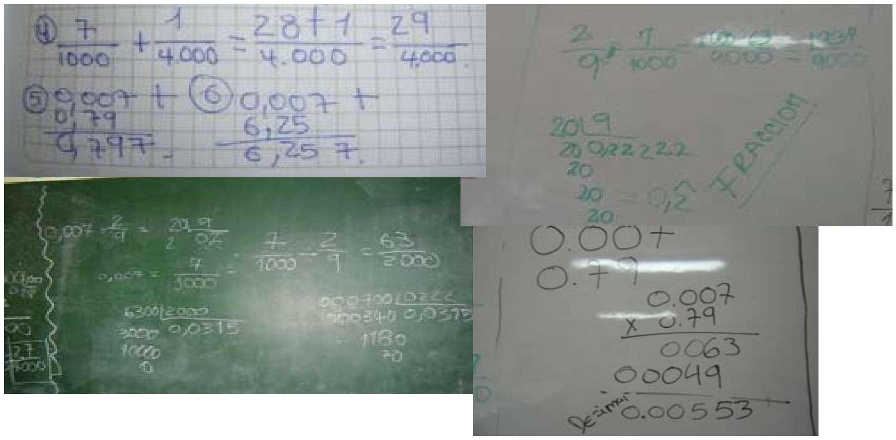
Esta actividad fue planteada como competencia para que se aplicaran los algoritmos vistos; con gusto se elaboraron las fichas y el tablero propuestos, y se inició la actividad, en parejas, permitiéndoles comunicarse de otra forma.

Se les observaba reírse con regularidad, mejorando la actitud de los estudiantes frente al aprendizaje, facilitando y enriqueciendo el saber matemático ya que compartían y verificaban procesos unos estudiantes con otros.

Todos querían hacer la mejor de sus fichas e iniciar el trabajo en equipo; para las estudiantes fue muy importante la elaboración, manipulación y familiarización de los materiales que les hicieron posible el manejo de contenidos, motivadas por las transferencias dadas entre el material concreto y los conceptos matemáticos, al igual que el contar con el apoyo de sus compañeras de clase.

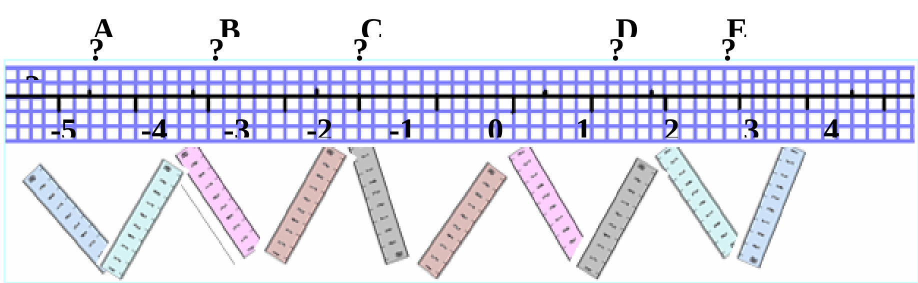
Las parejas se tomaron el tiempo necesario para resolver cada una de las operaciones. Aquí primó el autoaprendizaje6. Con el tiempo dado para la actividad, no exigí cantidad sino calidad, estimulando el esfuerzo realizado por las estudiantes en la medida en que iban identificando por sí mismas los procedimientos necesarios.

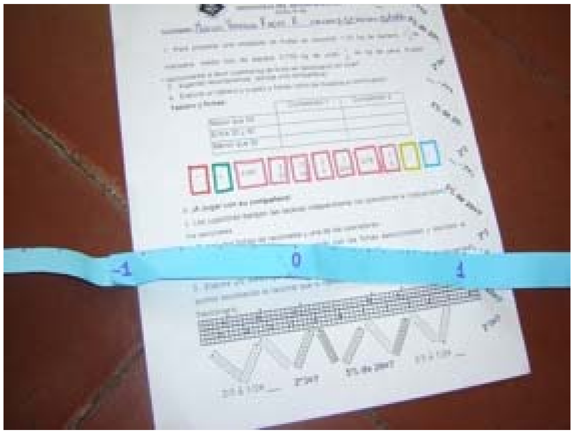
[6] Autoaprendizaje: Proceso que desarrolla la persona con el interés de aprender, con la conciencia de que deberá lograrlo poniendo su máximo empeño en ello y de que lo hará por sus propios medios, en tiempos que él decida. (Aurelio Sandoval) http://www.psicopedagogia.com/definicion/autoaprendizaje. Noviembre 12/06



A mi parecer esta actividad tuvo buenos resultados por las explicaciones de la clase, las conclusiones obtenidas con el material concreto y por la conformación de los pequeños grupos de trabajo, que generaron dinamismo, motivación, competencia, discusión alrededor de diversos procedimientos y/o puntos de vista en la solución de los ejercicios, en fin aprendizaje colaborativo. El apoyo entre las estudiantes fortalece notablemente su aprendizaje, las discusiones entre ellas les dan la oportunidad de revisar y enriquecer sus conocimientos, ayudar a sus compañeras a corregir sus errores y a mejorar sus competencias argumentativas y propositivas.

Para complementar esta actividad, las estudiantes fabricaron en papel la recta numérica con 10cm como la unidad, para ubicar en ella algunos puntos dados:
En la tirilla que construyó, indique el número que se debe ubicar en cada uno de los puntos señalados. (Ver Anexo 4)





Para el desarrollo de esta actividad la mayoría de las estudiantes salieron del aula de clase, ocupando otros espacios escolares, como: la terraza estudiantil, las escaleras, los pasillos, el patio de formación y las canchas, donde se sintieron con más libertad. Se observó en las estudiantes el agrado por las actividades de este tipo, por la oportunidad de compartir experiencias y conocimientos que le generan satisfacciones individuales y grupales.

Haciendo el recorrido por los diferentes grupos de estudiantes, se les oía decir "es más rico trabajar fuera del salón", "el tiempo se va volando". A mi manera de ver, la experiencia ha sido agradable, se sentía el gusto por lo que se hacía, se les oía discutir y opinar, relacionando lo visto en el salón de clases con la actividad requerida; creándose una confianza entre las mismas estudiantes y entre ellas y yo como maestra.

Al iniciar la propuesta, el trabajar con los números fraccionarios y los números mixtos era de muy poco agrado, prefiriendo las expresiones decimales, sin embargo, al sentirse más seguras de su conocimiento, la mayoría optó por utilizar fraccionarios y mixtos al dar respuesta a los puntos solicitados.

Al socializar la actividad, se ubicaron con facilidad los números racionales en la recta numérica; utilizaron en primer instancia los números mixtos para luego expresarlos como fraccionarios y como decimales. Vale la pena observar que aunque para esto hayan usado el algoritmo ya conocido, por lo tanto era fácilmente recordarlo.

Usar elementos cotidianos para las estudiantes, como lo es el bosque de la institución y darle realce a su trabajo al publicar los mejores en la cartelera del área, como información al resto del estudiantado, mostrando los recursos con que cuentan facilitó de gran manera el aprendizaje.

A veces los maestros nos regimos tanto al texto guía, que formulamos situaciones poco atractivas y significativas para los estudiantes, por ello la importancia de conocer y utilizar el contexto, de utilizar la realidad de nuestros educandos.

6. "LA PRUEBA FINAL"

Considero importante proponer en clase situaciones en las que los educandos tengan un papel activo, es decir, plantearles actividades donde tengan que hacer algo, y de ser posible, que tengan una implicación personal en la propuesta, ya sea porque corresponda a alguna situación de la vida diaria o a sus gustos. Posibilitar este tipo de situaciones no siempre es fácil, pero cuando se realizan el interés y el sentido del aprendizaje aumentan de forma notable.

Pensando en eso, decidí hacer del salón de clases un aula de culinaria y convertir a mis estudiantes en chef, con habilidades en el manejo de alimentos y en el seguimiento de una receta de cocina. Busqué en libros de cocina y en páginas de Internet recetas sencillas y que necesitaran poco tiempo de preparación; me incliné entonces por preparar algunos postres de frutas, de gran aceptación entre ellas. Hice lista de ingredientes, pedí traer a cada una uno que otro ingrediente –una manzana, tres limones y dos naranjas, que se unieran tres y compraran una lata de crema de leche, etc.- contándoles la idea de la preparación de las recetas para una fecha específica (culminación del periodo académico).

Hablé con mi compañero pasante de dirección de grupo – en el colegio cada director de grupo está acompañado y/o asesorado por otro compañero- para que me apoyara y ayudara; escogimos la fecha, pidiendo a un colega el ceder la última hora de clase (para hacer la celebración). La elaboración se hizo en la hora de clase de matemáticas. La comunidad religiosa nos dejó guardar en la nevera los postres y utilizar el horno.

Además de los ingredientes, debían traer cuchillos de cocina, cucharas, ensaladeras, platos, copas o vasos. Dividí el grupo en siete subgrupos y a cada uno repartí una receta. Para incentivar el compañerismo solicité que el postre realizado por cada grupo fuera ofrecido a otro grupo. La mayoría de las recetas estaba planeada para 7 u 8 porciones y un tiempo de preparación de ½ -media hora-.

Un día previo a la actividad recogí los ingredientes y compré algunos de los que faltaban –más bien poco. Llegó el gran día, el ruido y la algarabía eran bastantes. Todas estaban dispuestas –hasta llevaron delantales. La actividad se realizó en la primera hora de clase, para permitir la refrigeración de los alimentos que se iban a compartir en la última hora de clases (hacia el mediodía)

Por comodidad trabajamos en la terraza estudiantil -espacio locativo al aire libre donde no interfiere el desarrollo pedagógico de los demás cursos- el cual cuenta con varias mesas-8 a 10-, queda cerca de los lavamanos –que fueron habilitados como lavaplatos- y a donde llevamos tres pequeñas balanzas. En uno de las mesas ubiqué todos los ingredientes, separándolos unos de otros. Pedí a los subgrupos ubicarse en las restantes siete mesas con sus utensilios y vasijas. Repartí las recetas (repitiendo dos de ellas), solicité leerlas detenidamente, armar una pequeña estrategia de trabajo y buscar los utensilios que necesitaran, pidiéndole a cada estudiante responsabilizarse de un ingrediente.

6.1 VEAMOS ALGUNOS DE LOS PLATOS PREPARADOS EN LA CLASE:

6.1.1 Macedonia De Frutas

- **Ingredientes**

$\frac{1}{2}$ patilla bien madura y de forma alargada

$\frac{1}{2}$ libra de uvas verdes

$\frac{1}{2}$ libra de uvas negras

$1\frac{1}{2}$ duraznos maduros

1 libra de fresas

$\frac{1}{5}$ de libra de azúcar

4 rodajas de piña natural o en almíbar

$\frac{1}{5}$ de vaso de agua

El zumo de 1 naranja

1 Lata de leche condensada de 125 ml

- **Preparación.** Cortamos la sandía por la mitad a lo largo y sacamos la pulpa entera, procurando dejar pegada a la cáscara una capa. Quitamos las semillas y cortamos la pulpa en cubos medianos.

Lavamos los racimos de uvas y los separamos para tres personas, escurrimos bien y desgranamos. Lavamos los duraznos y les quitamos la cáscara y el carozo, cortamos también en cubos. Lavamos bien las fresas y les quitamos el cabo.

Colocamos toda la fruta en un plato grande, espolvoreamos con el azúcar y agregar el zumo de naranja. Mezclamos bien, tapamos el recipiente y lo ponemos en la nevera durante tres horas.

En el momento de servir volcamos la fruta junto con el jugo en la media sandía que anteriormente vaciamos y así presentamos en la mesa. Decorar con abundante leche condensada.

6.1.2 Peras Bañadas Con Crema

- **Ingredientes**

- peras medianas
- 1/2libra de azúcar
- 1/5de libra de margarina
- 1 lata grande de crema de leche

- **Preparación.** Lavar, pelar las peras y cortarlas en gajos. Acomodarlas en una fuente de horno previamente untado de margarina, espolvorearlas con azúcar y poner por encima la margarina en trocitos. Cocinarlas en horno caliente, durante $\frac{1}{4}$ de hora

Retirar y bañar las peras con la crema de leche y llevar a horno nuevamente durante $\frac{1}{6}$ de hora, luego apagar y dejar las peras adentro unos minutos para que absorba bien la crema.

Este postre se sirve tanto tibio como frío.

Al leer las recetas hubo necesidad de recordar unidades de medida (libras, litros) y hacer las conversiones necesarias para cumplir con la cantidad de ingrediente que pedía cada receta. Hacían cálculos y se ayudaban entre ellas, las escuchaba decir "una libra tiene 500g ¿cierto?, entonces si nos piden $\frac{1}{2}$ libra, serán 250g".

Llamé entonces una a una a las estudiantes según los ingredientes que necesitaran y con mi supervisión tomaron, cortaron o pesaron para llevar a su mesa. Noté con gran complacencia los correctos cálculos hechos y el que vieran la importancia de las fracciones y de los instrumentos de medida, como la balanza. En el caso de los litros utilizamos un envase de gaseosa con esta capacidad.

Y empezó un pequeño caos. Todas querían participar. Había unas chicas muy diestras en la cocina, se nota que ayudan en las labores de casa. Estuve muy pendiente del uso de los cuchillos. Surgieron las líderes en cada subgrupo, quienes organizaban y exigían trabajo de sus compañeras. Aunque la mayoría había realizado ensalada de frutas, las recetas daban especificaciones de actividades que nunca habían hecho.

Llevaron al horno quienes así debían hacerlo y al refrigerador las restantes. Afortunadamente las Hermanas comprendían la actividad y permitieron el uso de dichos elementos.

La terraza quedó bastante desordenada, pedí a cada grupo limpiar las mesas, los utensilios utilizados y tratar de dejar todo en las mismas condiciones en que lo habían encontrado.

Abandonamos el lugar y continuamos nuestra jornada académica cotidiana, no sin antes escucharles lo bien que la habían pasado, lo fácil de las recetas y lo delicioso que iban a comer. Me pidieron el favor de regalarles todas las recetas para reproducirlas en casa.

Al llegar la última hora de clase se dirigieron a la casa de la comunidad y trajeron sus preparaciones. Nos reunimos en el salón con el profesor pasante y yo que soy su directora y profesora del área de matemáticas. Cada subgrupo presentó su plato y contó rápidamente los ingredientes que llevaba. Repartieron entre los integrantes del subgrupo y compartieron con sus compañeras, así mismos con los maestros que estábamos presentes.

"las dificultades y los errores en Matemáticas no se reducen a los menos capaces para trabajar con las matemáticas. En general, algunos alumnos, casi siempre y algunas veces, casi todos, tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las Matemáticas". Socas (1997)

7. LA EVALUACIÓN

Los fraccionarios son una de las tareas más difíciles de enseñar, como afirma De León (2003), debido a la gran dificultad que se presenta en la comprensión de los mismos.

Al desarrollar en clase el plan de mejoramiento, pude observar que no es fácil, ni inmediato, el que las estudiantes cambien los preconceptos o procesos mal orientados, pero también, que es muy importante que se den las condiciones y nuevos planteamientos para que ellas se sientan motivadas a iniciarse en un proceso de transformación a través del desarrollo de acciones que favorezcan el aprendizaje, fundamentalmente en la recuperación de conceptos, interpretación y aplicación de los mismos a situaciones reales.

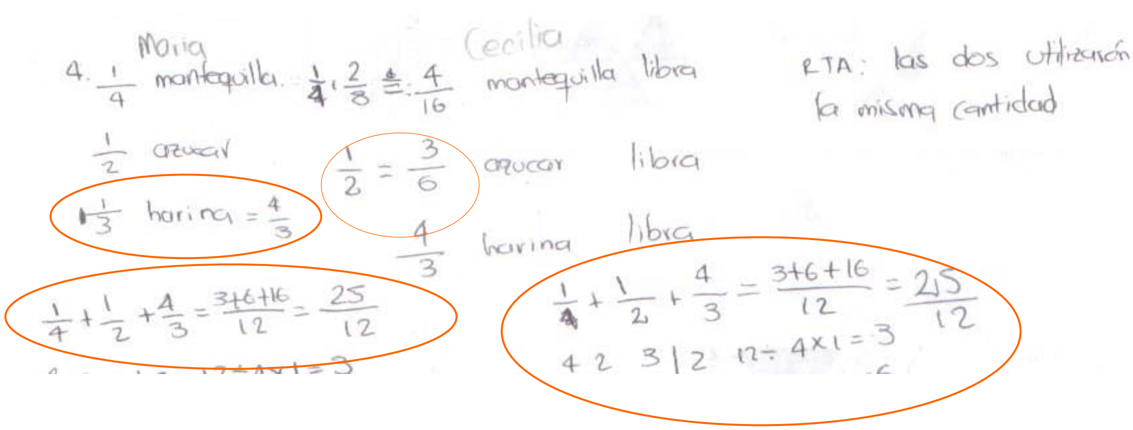
Luego de realizar las alternativas de mejoramiento he analizado el desempeño de Nury Vanessa y de Stefanny, con el fin de valorar los resultados obtenidos y de ratificar en qué dificultades aún se continúa fallando.

A continuación presento el caso de Nury Vanessa y de Stefanny en el desarrollo de los procesos tanto del diagnóstico como de la evaluación (ver anexo 5):

7.1 EL CASO DE NURY VANESSA

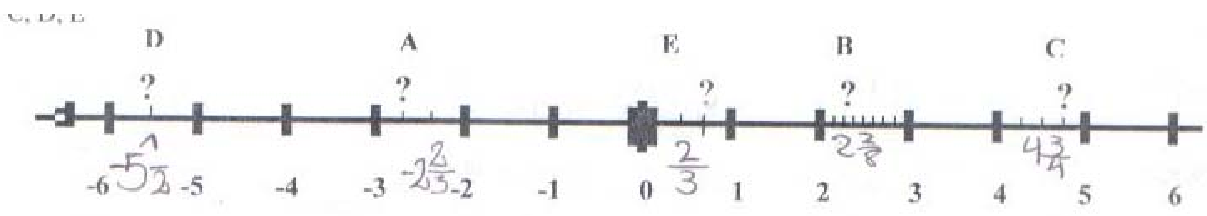
En la actividad diagnóstica Nury presentó la dificultad al realizar adiciones y sustracciones de fraccionarios lo hizo sumando y/o restando numeradores y denominadores entre sí.

En la evaluación realizada como prueba final, en el planteamiento Nº 4 de la guía de evaluación (ver Anexo 5) la estudiante aplica el algoritmo hallando el mínimo común múltiplo, realiza la transformación de número mixto a fraccionario, y emplea fracciones equivalentes, encontrando que en la preparación, Inés gasta igual que Cecilia.



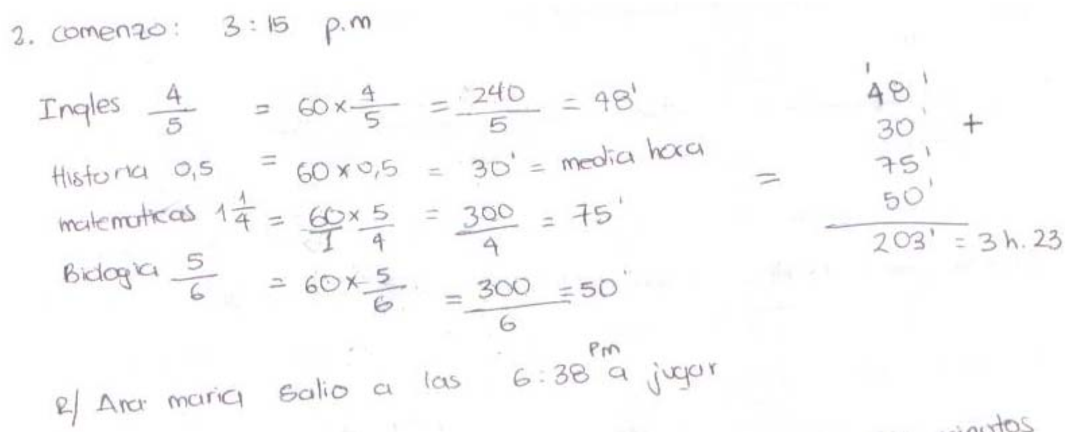
Otra dificultad fue la ubicación en la recta numérica, realizó particiones sin tener en cuenta si las fracciones eran positivas o negativas, por ejemplo: Ubicó $\frac{7}{3}$ -en los negativos- entre el 7 y el 8 dividiendo este último segmento en 4 partes, notando así el denominador tres, así mismo en la graficación de la recta numérica también presentó errores particulares: ubicó en la izquierda y derecha del cero los movimientos de la hormiga: los descensos a la derecha y los ascensos a la izquierda; sin hacer referencia a los números negativos.

En el tercer planteamiento del anexo 5 se pedía la ubicación de los números racionales en la recta numérica, observándose que identificó las particiones al encontrar correctamente las cantidades solicitadas.



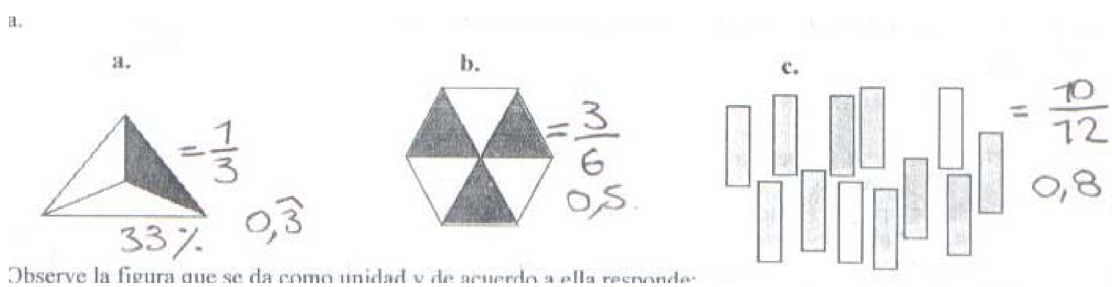
Otra de las dificultades marcadas en el desempeño académico de Nury fue con las fracciones impropias, las cuales son transformadas en números mixtos, así: convierte $\frac{7}{3}$ en $7\frac{1}{3}$.

En el planteamiento Nº 2, manejó los algoritmos teniendo en cuenta cada una de las cantidades dadas para realizar la transformación acorde con los datos recibidos, así que al pasar $\frac{4}{5}$ de hora a minutos lo hizo empleando el operador fraccionario, y cuando tuvo que averiguar el tiempo de historia lo hizo mediante la multiplicación de decimales, luego al buscar el tiempo de matemáticas pasó el número mixto a fraccionario y luego multiplicó fracciones, observándose que la estudiante ha logrado dar aplicación a la mayoría de los algoritmos relacionados con el tema, pero de una manera más comprensiva y segura.

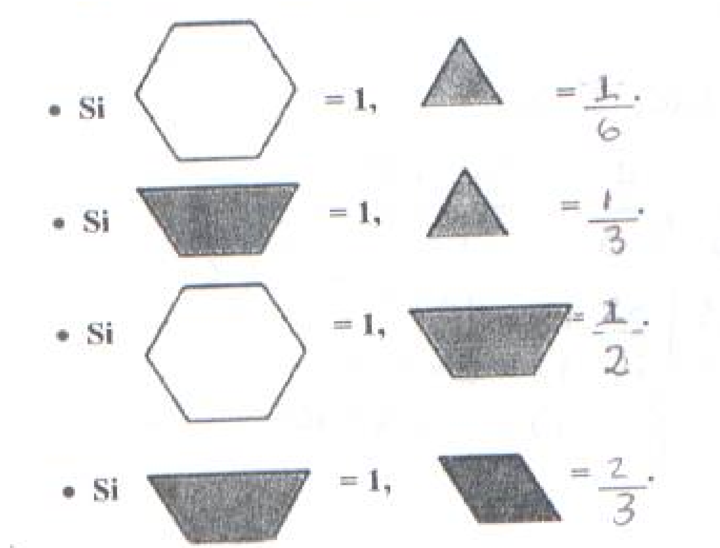


Para Nury otra de las dificultades manifestadas en el diagnóstico fue la falta de reconocimiento de la fracción parte – todo.

Observamos aquí que al escribir de dos formas diferentes las figuras logra interpretarlo, pero aún continúa con la dificultad en el reconocimiento de las cantidades discretas pues aún olvida escribir la unidad patrón: $\frac{10}{12}$ de 12.



Nury Vanesa al observe la figura que se da como unidad logra interpretar con seguridad la fracción o parte de la figura.

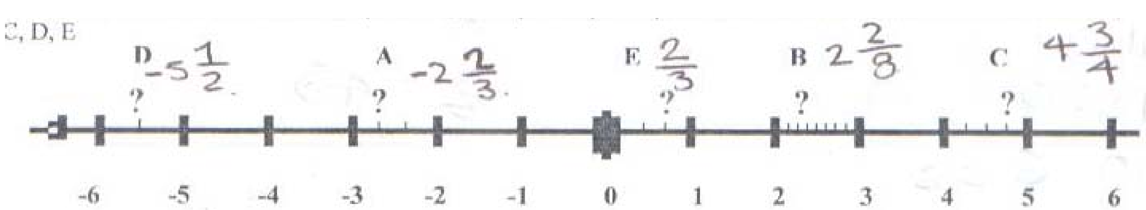


En términos generales pude observar que la mayoría de los problemas de aprendizaje en el manejo de los números fraccionarios se vinieron superando poco a poco, dado en parte por el desarrollo de actividades pedagógicas diferentes –para ellas- donde los conceptos tenían un significado y una comprensión coherente entre lo que se quiere enseñar y para lo que se quiere enseñar y también por la actitud positiva y de agrado para aprender, manifestada en su curiosidad por pasar al tablero – no lo hacía por temor al error o a la calificación- por expresar sus propias interpretaciones frente a una situación.

7.2 EL PROCESO DE STEFANNY

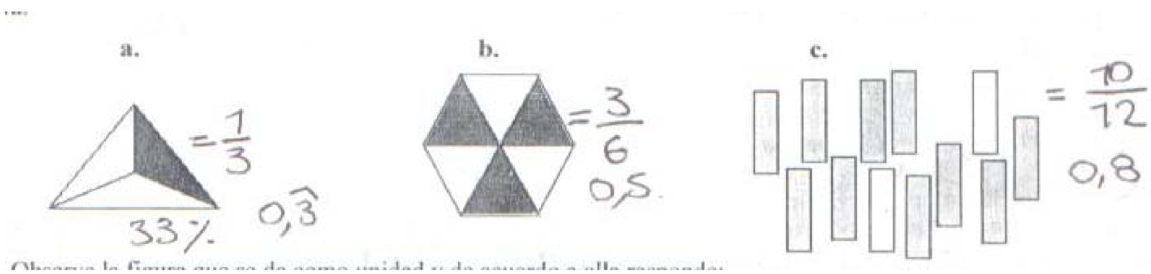
En la prueba diagnóstica Stefanny tuvo dificultades en la ubicación de las viviendas sobre la recta numérica al no verificar el planteamiento dado en el problema.

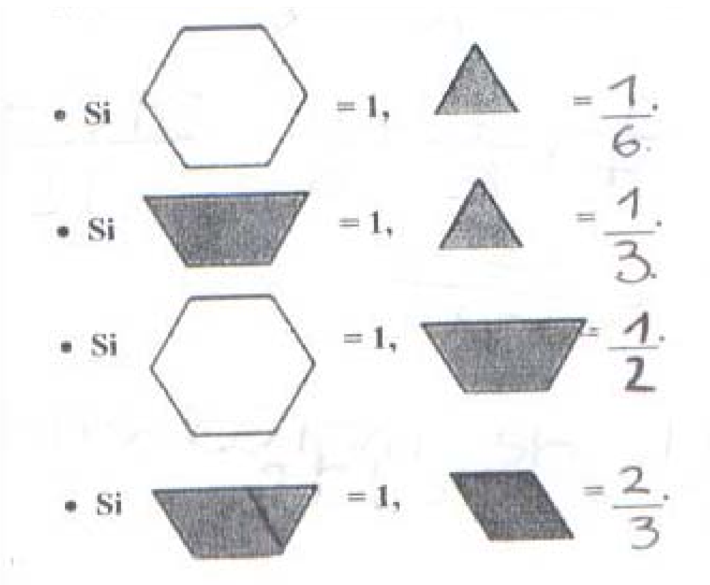
En el tercer planteamiento de la evaluación final se pedía la ubicación de los números racionales en la recta numérica, con los cuales no tuvo ningún problema al encontrar los racionales que correspondían a cada uno de los interrogantes planteados.



Otra dificultad hallada en el diagnóstico ha sido la conversión en fracción del decimal 0,009, y la identificación de magnitudes discretas.

Se observa en las figuras del planteamiento Nº 5 que la estudiante escribió de dos formas diferentes el área sombreada de los literales a y b, y en el numeral c aún continúa con la incomprensión sobre las cantidades discretas, pues encontró $\frac{10}{12}$, pero no de 12, como así corresponde en este caso.





Así mismo en el momento de la ubicación posicional de las cifras, en algunos casos omitía y en otros agregaba cifras decimales.

Se observa en el planteamiento Nº 1, que la niña transforma los kg en gramos con facilidad, teniendo cuidado en la cantidad de ceros que corresponden a la medida.

1) $5\ Kg = 5000\ gr.$

$-\frac{1}{5} = 4000\ gr. + \text{azucar} = 8000\ gr. - \frac{1}{4} =$

$6000\ gr = \underline{6}\ Kg$

Nótese de igual manera la dificultad que presentaba entre la interpretación del lenguaje matemático y el lenguaje cotidiano, aquí en el planteamiento Nº 2, logra convertir las cantidades dadas en minutos con facilidad, logrando comprender lo que se quería dando solución acertada a la misma.

2) $\frac{4}{5}$ de hora de ingles = 48 minutos.

0,5 hora de historia = 30 minutos.

$1\frac{1}{4}$ ~~hora~~ de matematicas = 75 minutos

$\frac{5}{6}$ de hora de biologia = 50 minutos

203 minutos =

3 = 13.

empezo = 3:15.

salio = 6:38.

Inés

4) $\frac{1}{4}$ de libra de mantequilla $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} =$

$\frac{1}{2}$ libra de azucar $\quad \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{3+6+}{12}$

$1\frac{1}{3}$ libra de azucar. $\quad = \frac{25}{12}$

Cecilia.

$\frac{4}{16}$ de libra de mantequilla. $= \frac{4}{16} + \frac{3}{6} + \frac{4}{3} =$

$\frac{3}{6}$ libra de azucar $\quad \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+6+1}{12}$

$\frac{4}{}$ libra de harina. $\quad = \frac{25}{12}$

Es interesante observar que la interpretación de fracción que se presenta debe tener una visión de la matemática que no se reduzca a la parte estrictamente formal sino que integre la aplicación y comprensión a situaciones del mundo real, para que las estudiantes se inicien en los procesos de pensamiento que se deben promover y desarrollar en la formulación y resolución de problemas de diferente naturaleza, que bien puede ser resueltos mediante el diseño de un medio didáctico, o aplicando procedimientos.que le permiten comprobar los cálculos realizados a medida que van verificando la solución en cada caso.

El razonamiento de las estudiantes en la solución de las situaciones nos muestra cómo podemos aplicar situaciones diversas sin tener que recurrir siempre a los algoritmos, nos señala cómo se puede interpretar y aplicar los conceptos recibidos en clase; así mismo ha sido importante tener como punto de partida del trabajo del diagnóstico con los errores mismos de las estudiantes puesto que ha permitido la confrontación entre lo que se hizo y lo que se debió hacer, conllevando al análisis de las causas para superar las dificultades en un proceso de construcción de nuevos conocimientos.

A medida que iban respondiendo los planteamientos estuve atenta a las actitudes de las niñas, observando lo inquietas que estaban por procurar hacer lo mejor en la solución de las situaciones. Se sintieron un poco nerviosas porque les parecía que el tiempo se les acababa.

Reconozco que emplear otras formas de enseñanza facilita el aprendizaje haciéndolo más sencillo, comprensible y agradable, rompiendo con los esquemas tradicionales o algorítmicos que fácilmente pueden ser olvidados o confundidos en la aplicación a situaciones problema.

8. REFLEXIONES FINALES

Ha sido el esfuerzo y la autorreflexión sobre la enseñaza de los números fraccionarios la que me ha llevado al reconocimiento y utilización de estrategias en el desarrollo de este proyecto sobre la identificación de las dificultades más comunes en el aprendizaje de los números fraccionarios de las niñas del grado séptimo del Instituto Gabriela Mistral de Bucaramanga, aunque todavía no se ha logrado que la totalidad de las estudiantes superen las dificultades reconocidas.

A lo largo de la investigación se trabajaron los números fraccionarios en sus diferentes representaciones matemáticas como ¼ ó 0,25, los fraccionarios como equivalencia, los fraccionarios en diferentes situaciones como: la relación parte – todo (dividir un entero en cierto número de partes y tomar alguna (s)), como cociente de una división, como operador fraccionario – Jhon perdió ½ de sus canicas, como cantidad – dentro de un cuarto de hora es la salida- como razón, como medida y la ubicación en la recta numérica de cada una de estas representaciones. Kieren (1988) citado por De León.

1. Las dificultades más notorias en la enseñanza de los números fraccionarios, fueron:

- Datos mal utilizados, debido a que los estudiantes añaden u omiten datos que cambian el significado del enunciado y por ende el procedimiento de los mismos, evidenciado por ejemplo con Leidy al resolver la situación de la ensalada de frutas; Interpretación incorrecta del lenguaje, debido a la traducción incorrecta del lenguaje simbólico al lenguaje matemático o viceversa, evidenciado en la ubicación de las viviendas en la recta numérica por la mayoría de las estudiantes;

- Inferencias no válidas lógicamente, debido a la falta de interpretación y razonamiento de los contenidos específicos que da el contenido de la situación problema, evidenciado en la interpretación de la fracción como parte de un todo representada gráficamente introduciendo elementos discretos;

- Teoremas o definiciones deformadas que se crean al aplicar un algoritmo o una regla o definición identificable, evidenciado en la solución del la situación de la hormiga al ascender por la pared;

- Falta de verificación en la solución, este se presentan cuando se realiza todo el proceso pero no se tiene en cuenta que se debe dar respuesta a la pregunta, evidenciado en las situaciones en las que se pedía hallar el área sombreada y se daba como solución la no sombreada; y los

- Errores técnicos son aquellos donde al maniobrar con símbolos matemáticos en la aplicación de algoritmos se equivoca o confunde, evidenciado en la mayoría de las situaciones que requerían de operatividad de los fraccionarios, -para la descripción de las dificultades tomé los nombre técnicos mencionados por Mosvshhhhovitz-Hadae, Zaslavsky e Inbar (1987) citados por Rico-.

- La resolución de problemas, fue una pieza fundamental para alcanzar los logros más importantes del proceso de las estudiantes. Es el caso de Nury Vanesa quien presentaba dificultad en el manejo de "teoremas o definiciones". Nury constantemente deformaba los algoritmos de la suma, resta y sus propiedades en el desarrollo de ejercicios de aplicación. Sin embargo, al finalizar las actividades manifestó una superación significativa al respecto, esto lo observé en su desempeño en las últimas actividades y cuando en la evaluación final al presentar una situación problema en la que requería aplicar los algoritmos y ubicar las fracciones en la recta numérica pudo resolverlos correctamente y argumentar sus respuestas.

2. Las niñas participantes presentaban inicialmente dificultades como "datos mal utilizados, interpretación incorrecta del lenguaje, falta de verificación en la solución", que al final fueron superadas por la mayoría de las estudiantes. Por ejemplo, en la interpretación de la recta numérica se facilitó luego de la construcción de la tirilla y la utilización de los discos. Parece ser que las niñas realizaban el modelo mental para luego relacionar y verificar sus respuestas. Con respecto a la interpretación del lenguaje se observó en la solución de los problemas de la elaboración de la mermelada de guayaba y la preparación de las 45 galletas de María Inés, su preocupación por responder lo que se preguntaba haciendo uso de los algoritmos pertinentes.

3. A pesar de realizar varias actividades para la mejor comprensión y aprendizaje de los números fraccionarios en algunas niñas persistía la dificultad de "teoremas o definiciones deformadas y falta de verificación en la solución". Por ejemplo, Nathaly continuó confundiendo los procesos de la suma, resta, multiplicación y división; en las últimas actividades se le observó dibujando y preguntando a su compañera cuál es el algoritmo a emplear y buscando mi aprobación de los algoritmos y procesos de razonamiento que realizaba.

4. Considero que no debo enfatizar la enseñanza de los fraccionarios –y en general, la enseñanza de las matemáticas- en la memorización de unos conceptos poco claros y en la mecanización de unos algoritmos sin lógica alguna, sino en el tratar de hacer que las actividades de clase posibiliten la adquisición y el desarrollo de formas de pensamiento más apropiadas a las capacidades intelectuales de los educandos; formas de pensamiento que les ha de servir para interpretar y evaluar la realidad.

5. En relación a la enseñanza de los números fraccionarios, fue de gran ayuda el contar con materiales manipulables, ya que permitió que los educandos pudiesen construir los conceptos, comprender y generalizar algoritmos. Por ejemplo, al trabajar con los círculos fraccionarios la relación parte-todo comprendieron con facilidad que al tener pedazos de discos iguales, la suma o resta se reduce a agregar o quitar los pedazos, y cuando volvimos a los algoritmos buscando generalizaciones ya las estudiantes habían ganado más comprensión y ahora si las formulas tenían lógica.

Hubo varias estudiantes que prefirieron dibujar las fracciones antes de aplicar el algoritmo, ya que "dibujando entendían mejor", para ellas los fraccionarios empezaban a tener un significado por cuanto ellas mismas 'construyeron' el conocimiento que facilita su aprehensión. La utilización de los discos o círculos fraccionarios fue positiva al facilitar que la estudiante observara con material concreto lo que se le estaba preguntando y podía verificarlo. Es muy común que los maestros les mostremos a los estudiantes los diferentes procedimientos o algoritmos usados en cada operación, pero muchas veces no mostramos porqué su validez, haciendo que nuestros estudiantes utilicen unos métodos que no le son significativos y que por lo tanto al aprenderlos de memoria, sin ninguna comprensión, fácilmente son olvidados.

6. Sin embargo, es importante decir que no todas las niñas y en la misma medida lograron superar las dificultades, este ha sido un proceso en el cual la paciencia y persistencia tienen un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas.

7. La reflexión de mi trabajo alrededor de la enseñanza de los números fraccionarios tuvo tal impacto en el grupo y en mí como maestra, que opté por dar continuidad a la implementación de alternativas didácticas que rompieran los esquemas tradicionales. De esta manera realicé

otras actividades al explicar nuevas temáticas, por ejemplo una salida al bosque del colegio para la recolección y análisis de datos estadísticos.

8. En el proceso de aprendizaje además del contenido en sí mismo y el contexto, intervienen dos grandes actores, el maestro y el educando, y si alguno de los dos tiene dificultades el proceso queda bloqueado, por esto, es muy importante reconocer que como maestros podemos tener algunas dificultades en la compresión y asimilación de conceptos y procedimientos –los diversos conceptos, representaciones y algoritmos que abarcan los números fraccionarios, por ejemplo- y que por ello, al trasmitirlas a nuestros educandos, estos no logran comprender lo que les tratamos de explicar.

9. El trabajar en pequeños grupos fortaleció no sólo la relación armónica del grupo sino que facilitó realmente el aprendizaje y mostró las habilidades de liderazgo de varias estudiantes.

La experiencia ha posibilitado la enseñanza de los números fraccionarios facilitando el aprendizaje mediante la aplicación de estrategias sencillas pero significativas.

BIBLIOGRAFÍA

ANDONEGUI. M. Obstáculos epistemológicos, teóricos y prácticos, para la construcción de una didáctica integral de la matemática en la educación preescolar y básica. La naturaleza de los saberes matemáticos considerados en los niveles de la educación inicial y básica. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Barquisimeto. Recuperado el 17 de diciembre de 2006. http://www.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/equisangulo/num2vol1/articulo7.htm.

ARBOLEDA C (2004). Comer bien y vivir bien. Primera edición. Nestle de Colombia Bogotá. D.C.

DE LEÓN (1998). Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. Revista Mexicana de Investigación Educativa, vol 1, núm 2.

__________. (2003). Las concepciones de los maestros en torno de las matemáticas. Edición Universidad Pedagógica Nacional Morelos. México.

DEL PUERTO S. & MINNAARD. C. Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. Revista Iberoamericana De Educación Universidad de Buenos Aires, Argentina. Recuperado 18 de diciembre de 2006. http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf.

DEL VALLE G & LÓPEZ M. Aprendizaje cooperativo y colaborativo su implementación en carreras universitarias. Congreso Latinoamericano De Educación Superior En El Siglo XXI. Recuperado el 17 de diciembre de 2006. http://conedsup.unsl.edu.ar/Download_trabajos/Trabajos/Eje_6_Procesos_Formac_Grado_PostG_Distancia/Lopez%20y%20Otros.PDF.

ENGLER. A. et al. Los errores en el aprendizaje de las matemáticas. Facultad de Ciencias Agrarias – Universidad Nacional del Litoral – Argentina. Santa Fe (Argentina).Recuperado 17 de diciembre de 2006. http://www.soarem.org.ar/Publicaciones/Los%20Errores.pdf.

FRANCHI. L et al. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Educere, Investigación Arbitrada. Recuperado 17 de diciembre de 2006. http://www.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/educere/vol8num24/articulo10.pdf.

FREIRE. P (2002). Pedagogía de la Autonomía. Siglo XXI editores. Buenos Aires.

gente (2003). Aula virtual, una alternativa en la educación superior. UIS, Bucaramanga.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998). Lineamientos curriculares del área de Matemáticas. Santa fe de Bogotá, Colombia.

__________. (2003). Estándares curriculares del área de Matemáticas. Santa fe de Bogotá, Colombia.

MORALES.M (2006) Las fracciones según los pescantes. Revista iberoamericana de educación matemática Nº 6.
http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=124

RICO. L (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. Relime Vol. 1, Núm. 1, http://www.clame.org.mx/bdigital/relime/pdf/1998-1-1/2.pdf.

__________. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Didáctica de la matemática.

SOCAS. R. et al. Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas Reflexiones. Recuperado enero 04 de 2007. http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/socas-machin.pdf

__________. (1997) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Universidad de la Laguna. Recuperado 17 de diciembre de 2006. http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/SocasM97-2532.PDF.

ANEXOS

ANEXO A.INSTITUTO GABRIELA MISTRAL

MISIONERAS DEL DIVINO MAESTRO

GUÍA Nº 01

NOMBRE:___________________________GRADO:______FECHA: ___________

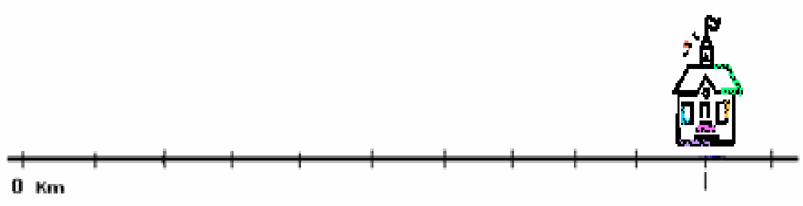
A continuación se presenta algunas situaciones, las cuales debe analizar detenidamente.

Representación de los números racionales en la recta numérica.

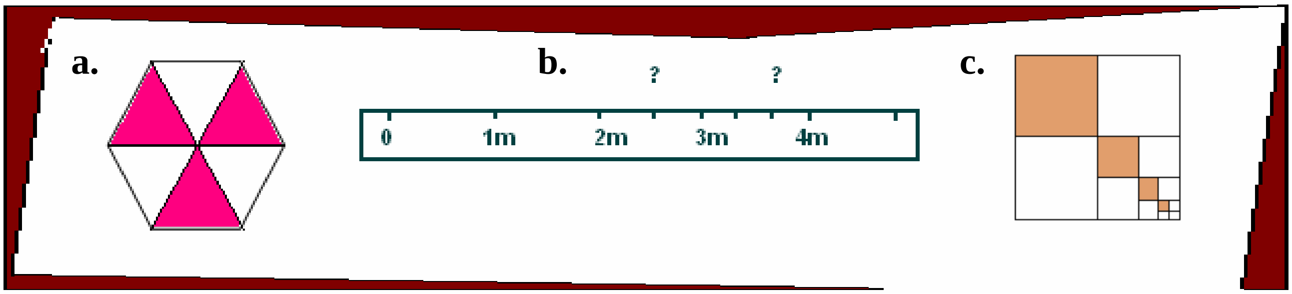
Las viviendas de Julieta, Pedro, Carlos y Daniela están ubicadas entre el kilómetro 0 y el Kilómetro 1 de la vía a Cúcuta. La escuela está ubicada sobre el Kilómetro 1. Julieta vive a 3/5 de Km. de de la escuela, Pedro tiene su vivienda en la mitad del camino, Carlos recorre diariamente 0,009 Km. para llegar a estudiar, Daniela vive a 1/10 de Km. de su escuela.

- ☺ *Ubica las viviendas en la recta numérica*

1. *¿A qué distancia de la escuela se encuentra Pedro?*
2. *¿Quién está más cerca y quien más lejos de la escuela?*
3. *¿Cuál es la diferencia entre la distancia de la casa de Carlos y la de Daniela?*



2. En los numerales a y c escriba un número que represente el área sombreada en cada gráfica y en el numeral b escriba los números señalados en la recta numérica con interrogantes.



ANEXO B. INSTITUTO GABRIELA MISTRAL

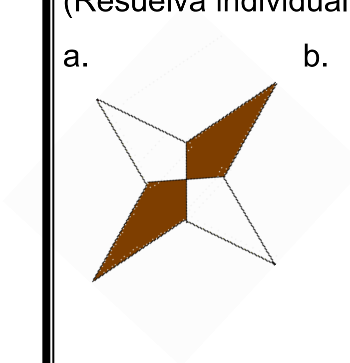
MISIONERAS DEL DIVINO MAESTRO

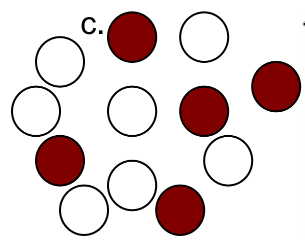
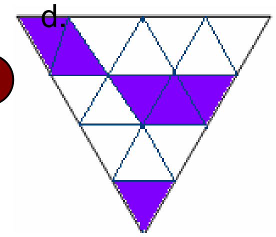
GUÍA Nº 02

NOMBRE:______________________________GRADO:______FECHA:
____

Planteé una segunda guía en la cual propuse un ejercicio que aparece en los estándares curriculares de matemáticas MEN (2003).

1. Escriba la fracción que corresponde al área sombreada en cada figura: (Resuelva individualmente)

a.

b.

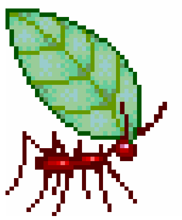
c.

d.


a.__________ b.___________ c.____________
d.____________

¿Cuál es la fracción que corresponde al área no sombreada?

a.__________ b.___________ c.____________
d.____________

Analiza la siguiente situación y encuentra una solución,



Una hormiga carga una hoja a sus espaldas e inicia cuesta arriba el traslado de la hoja. Su recorrido ha comenzado: Asciende $\frac{7}{3}$ de m, descansa y nuevamente asciende $\frac{1}{4}$ de m. Luego, la hoja le ha desequilibrado su estabilidad obligándola a descender $\frac{3}{12}$ de m. Nuevamente intenta continuar su recorrido logrando ascender $\frac{6}{4}$ de m, ¿cuántos metros ha recorrido en total?, ¿a qué altura del piso se encuentra?

ANEXO C. INSTITUTO GABRIELA MISTRAL

MISIONERAS DEL DIVINO MAESTRO

GUÍA Nº 03

NOMBRE:______________________________GRADO:______FECHA:

____

Para preparar una ensalada de frutas se necesita: 1,25 kg de banano, $1\frac{1}{4}$ de manzana, medio kilo de papaya, 0,750 kg de uvas, $\frac{1}{8}$ de kg de pera. Puede aproximarse a decir cuántos kg de fruta se necesitaron en total?

2. En figuras geométricas planas (rectángulo, cuadrado o círculo), modele las siguientes fracciones, socialice el trabajo realizado:

a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{10}{4}$ c. $\frac{1}{3}$ d. $1\frac{2}{5}$

ANEXO D. INSTITUTO GABRIELA MISTRAL

MISIONERAS DEL DIVINO MAESTRO

GUÍA Nº 04

NOMBRE:______________________________GRADO:______FECHA: __________

1. Jugando recordaremos. (Escoja una compañera)

Elabore un tablero y fichas como se muestra a continuación (tenga en cuenta que cada operador está de un color diferente):

Tablero y fichas:	Competidor 1	Competidor 2
Menor que 1		
Entre 1 y 3		
Mayor que 3		

$-$	$*$	0,007	$\frac{2}{53}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4000}$	0,79	$\frac{5}{8}$	$+$	$\div$

¡Ahora a Jugar con su compañera!

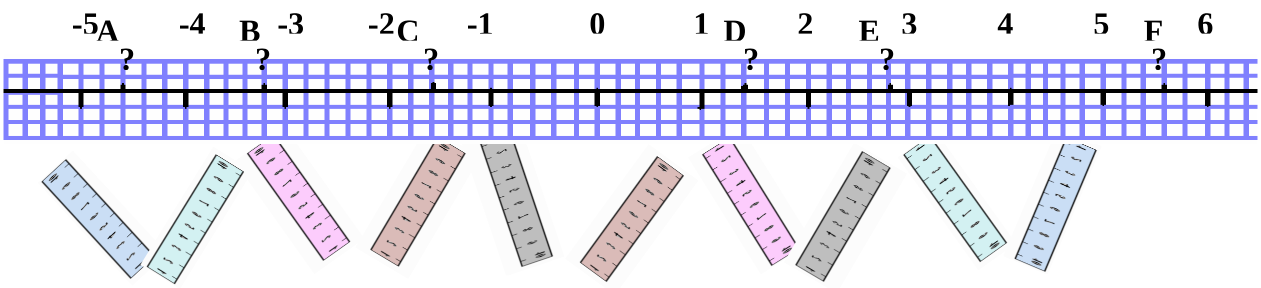
Las jugadoras barajan las tarjetas, aparte las tarjetas con operadores de las tarjetas con números.

Una de ellas toma al azar una tarjeta con los operadores y dos de las tarjetas con números.

Realiza la operación que le ha salido con las fichas seleccionadas y escribe el resultado en el tablero, según la casilla que corresponda. Su compañera comprueba el resultado.

Gana quién cometa menos errores.

2. Elabore y/o construya una tirilla como en el ejemplo, en ella indique el número que debe ubicar en cada uno de los puntos:



ANEXO E. INSTITUTO GABRIELA MISTRAL

MISIONERAS DEL DIVINO MAESTRO

2006

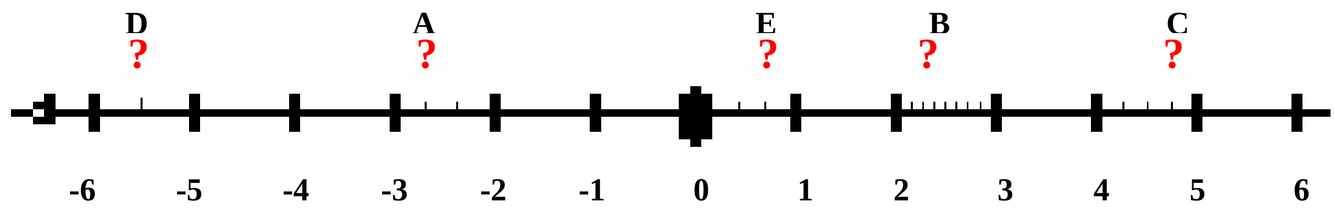
NOMBRE:______________________________GRADO:_________FECHA: _________

Resuelva cada una de las siguientes situaciones. Recuerde que debe dejar consignados todos los procedimientos.

Compramos 5Kg de guayaba para hacer un dulce o mermelada. Al lavarlas y retirarles la pulpa malsana pierde $\frac{1}{5}$ de su peso. Ponemos a cocinar la cantidad de guayaba que quedó con la misma cantidad de azúcar. Durante la cocción la mezcla pierde $\frac{1}{4}$ de su peso. ¿Cuántos kilogramos de dulce de guayaba obtenemos?

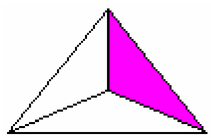
Antes de salir a jugar con sus amigas, Ana María estudió $\frac{4}{5}$ de hora inglés, 0,5 hora historia, $1\frac{1}{4}$ hora matemáticas y $\frac{5}{6}$ de hora de biología. Si empezó a estudiar a las 3:15 p.m. ¿a qué hora salió a jugar?

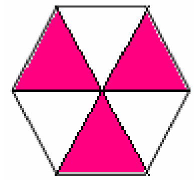
En la recta un numérica identifique el racional que ocupa las posiciones donde se encuentran las letras A, B, C, D, E

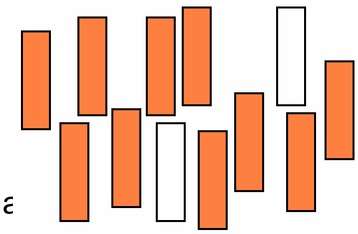


Para preparar 45 galletas Inés María gasta $\frac{1}{4}$ de libra de mantequilla, $\frac{1}{2}$ libra de azúcar y $1\frac{1}{3}$ libra de harina. Su comadre Cecilia prepara la misma cantidad de galletas y del mismo tamaño, pero ella utiliza $\frac{4}{16}$ de libra de mantequilla, $\frac{3}{6}$ de libra de azúcar y $\frac{4}{3}$ de libra de harina. ¿Quién usa más ingredientes en la preparación de las galletas? Explique su respuesta.

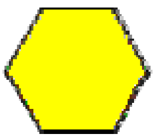
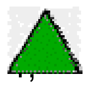
Observe cada una de las siguientes figuras: Escriba de dos maneras diferentes la región pintada en cada figura.

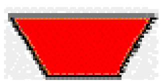
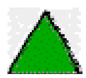
a. 

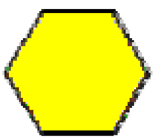
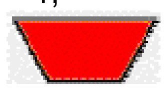
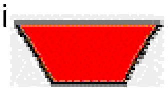
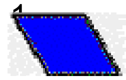
b. 

c. 

6. Observe la figura que se da como unidad y de a

- Si  = 1,  = ___.

- Si  = 1,  = ___.
- Si  = 1,  = ___.
- Si = 1, = ___.