UNICOHERENCIA EN CONTINUOS

Jayson Heli Nova González

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2014

UNICOHERENCIA EN CONTINUOS

Jayson Heli Nova González

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Ph.D. Javier Enrique Camargo García

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2014

Agradecimientos

A mi familia, por todo su paciencia y apoyo la cual me dió para ser quien soy. También, por se fuente de mi fortaleza e inspiración y creer en que todo esto era posible.

Al profesor Javier Enrique Camargo García por toda su colaboración e interés en mi proyecto, por todas sus recomendaciones, consejos, por su dedicación y empeño.

Y a todos los que de una u otra forma aportaron algo a este trabajo.

Índice general

Introducción **10**

1. Preliminares **12**

1.1. Definición y ejemplos de continuos 12

1.2. Construcciones de continuos 14

1.2.1. Intersección anidada de continuos 14

1.2.2. Producto de continuos 16

1.2.3. Límites inversos de continuos 19

1.3. Continuos indescomponibles 24

1.4. Funciones Continuas 26

2. Unicoherencia **29**

2.1. Definición y ejemplos 29

2.2. Funciones 32

2.3. Productos y límites inversos 37

3. Logaritmos y productos **40**

3.1. Funciones inesenciales y logaritmos 40

3.1.1. Propiedades generales de funciones continuas en S^1. 42

3.2. Unicoherencia y logaritmo continuo 46

3.3. Continuos localmente conexos 53

Bibliografía **57**

Índice de figuras

1.1. Curva del topólogo T 13
1.2. Círculo de Varsovia 13
1.3. Carpeta de Sierpiński 15
1.4. Arcoiris de Knaster 26

2.1. Unicoherencia de S^1 30
2.2. Círculo de Varsovia 31
2.3. Unicoherente y no heredirario 32
2.4. Ilustración de la primera parte del Ejemplo 2.8 34
2.5. Ilustración de la segunda parte del Ejemplo 2.8 34
2.6. Ilustración del Ejemplo 2.10 36

TITULO: UNICOHERENCIA EN CONTINUOS.*

AUTOR: JAYSON HELI NOVA GONZALEZ.**

PALABRAS CLAVES: CONTINUO, UNICOHERENTE, HEREREDITARIAMENTE UNICOHERENTE, PRODUCTOS, LOCALMENTE CONEXOS.

RESUMEN

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Un continuo X se dice *unicoherente* si siempre que $X = A \cup B$ donde A y B son subcontinuos de X, entonces $A \cap B$ es conexo. Un intervalo cerrado, una n-celda $[0,1]^n$ y las esferas $S^n (n > 1)$ son ejemplos de continuos unicoherentes. Por otro lado, el continuo S^1 no es unicoherente. Además, un continuo se dice hereditariamente unicoherente si cada uno de sus subcontinuos es unicoherente.

Esta monografía está enfocada a estudiar la unicoherencia en continuos, también aspectos particulares como: preservar la unicoherencia por funciones continuas, límites inversos y productos. Y caracterizar los continuos unicoherentes y localmente conexos.

Esta monografía está dividida en tres capítulos distribuidos de la siguiente manera: En el primer capítulo, se dan herramientas para construir continuos; las intersecciones anidadas de continuos, el producto de continuos y el límite inverso de una sucesión inversa de continuos. También, se darán definiciones como continuos indescomponible y algunos tipos de funciones continuas entre continuos.

En el segundo capítulo, se da definición y ejemplos de continuos unicoherentes y hereditariamente unicoherentes, además, veremos que el producto de dos continuos unicoherentes no es necesariamente unicoherente.

En el tercer capítulo, presentamos la definición de función inesencial y función con logaritmo continuo, se estudiaran algunas propiedades de estas clases de funciones. Después, mostramos la relación que hay entre la unicoherencia, las funciones inesenciales y las funciones con logaritmo continuo, en continuos localmente conexos. Para terminar, estudiamos la unicoherencia en continuos localmente conexos.

***** Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Ph.D. Javier Enrique Camargo García

TITLE: UNICOHERENT AT CONTINUA.*

AUTHOR: JAYSON HELI NOVA GONZALEZ.**

KEYWORDS: CONTINUUM, UNICOHERENT, HEREDUTARILY UNICOHERENT, PRODUCTS, LOCALLY CONNECTED.

ABSTRACT

A continuum is a nonempty compact, connected and metric space. A continuum X is called unicoherent if supposed $X = A \cup B$ where A and B are subcontinuum of X, then $A \cap B$ is connected. A compact interval, an n-cell $[0,1]^n$ and spheres $S^n (n > 1)$ are examples of unicoherent continua. On the other hand, the continuum S^1 is not unicoherent. Moreover, a continuum is said hereditarily unicoherent if every of its subcontinua is unicoherent.

This monograph is facused to study the unicoherence on continua, also particular aspects like: to preserve the unicoherence by continuous functions, inverse limits and product, and to characterize the unicoherent continua and locally connected.

This monograph is divided in three chapters distributed as follows: The first chapter, tools are given to construct continuum; nested intersecctions of continua, product of continua and the inverse limit of a inverse sequence of continuums. Moreover, definitions like indescomposable continua and some types of continuous functions among continuums.

The second chapter, definitions and examples of unicoherent and hereditarily unicoherent continuum will be given, also, we will show the product of two unicoherent continua is not necessary unicoherent.

The third chapter, we meet the definition of inessential map and funtions whit continuous logarithm, we will study some properties of these classes of funtions. Moreover, we show the relationship among the unicoherence, the inessential map and funtions with continuous logarithm, on locally connected continuum. To finish, we study the unicoherence on locally connected continuum.

***** Bachelor Thesis

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Ph.D. Javier Enrique Camargo García.

Introducción

En topología, particularmente en la teoría de continuos, es muy importante estudiar propiedades de manera local o global para clasificar o caracterizar espacios. Una de estas propiedades es la unicoherencia. Un continuo X se dice unicoherente si siempre que $X = A \cup B$ donde A y B son subcontinuos de X, entonces $A \cap B$ es conexo. La unicoherecia es una propiedad topológica que comparten espacios como el intervalo cerrado $[a, b]$, la n-celda $[0, 1]^n$, las esferas de dimensión mayor o igual a 2, S^n con $n > 1$, y el cubo de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Intuitivamente, aunque no se satisface plenamente, los continuos unicoherentes son aquellos continuos que no tienen "agujeros" o "huecos"; esto lo podemos ver en ejemplos como la circunferencia unitaria S^1 donde fácilmente se pueden encontrar subcontinuos cuya unión sea S^1 y la intersección sea disconexa, de modo que S^1 es un continuo no unicoherente. Algunos ejemplos de espacios no unicoherentes son el cilindro $S^1 \times [0, 1]$ o el toro $S^1 \times S^1$, en los cuales, al menos de manera intuitiva se pueden identificar tales "agujeros" o "huecos".

La noción de unicoherencia fue introducida en 1926 por K. Kuratowski en [11]. Este trabajo llamó la atención de topólogos como K. Borsuk, S. Eilenberg, T. Ganea y A. H. Stone los cuales realizaron estudios detallados de esta propiedad y la usaron para caracterizar espacios. En 1931, K. Borsuk en [2], presentó el uso de funciones continuas en el círculo S^1 para estudiar unicoherencia en continuos localmente conexos y fue ampliamente desarrollado por S. Eilenberg en [6], [7] y [8]. A. H. Stone en [18] realizó un detallado estudio de propiedades de espacios unicoherentes y localmente conexos. Después en 1930, K. Kuratowski hizo la siguiente pregunta: ¿El producto de dos continuos de Peano (son continuos localmente conexos) unicoherentes también es un continuo de Peano unicoherente? En [2], K. Borsuk respondió esta pregunta como verdadera. Adicionalmente, en esta dirección, S. Eilenberg en [8], probó un mejor resultado: el producto de dos espacios métricos, unicoherentes y localmente conexos es unicoherente. Luego T. Ganea en [9], generalizó esté resultado mostrando que el producto arbitrario de espacios unicoherentes y localmente conexos es unicoherente.

En este trabajo estudiaremos la unicoherencia en continuos. Esta clase de continuos, como ya mencionamos, ha sido estudiada por diferentes autores con diferentes propósitos. Revisaremos algunos de los trabajos desarrollados hasta este momento, donde estudiaremos aspectos particulares como: preservación de la unicoherencia por funciones continuas, límites inversos y productos.

Por otra parte, un continuo se dice hereditariamente unicoherente si cada uno de sus subcontinuos es unicoherente. Algunos ejemplos de continuos hereditariamente unicoherentes son el arco, los abanicos o cualquier dendrita. Gran parte de este trabajo está basado en el artículo [8], "*Tranformations continues en circonférence et la topologie du plan*" de S. Eilenberg, el cual destacamos una demostración de que el producto de dos continuos unicoherentes y localmente conexos es unicoherente.

Este trabajo está dividido en tres capítulos distribuidos de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se dan herramientas para construir continuos: las intersecciones anidadas de continuos, el producto de continuos y el límite inverso de una sucesión inversa de continuos. Estas herramientas son muy importantes para construir continuos, donde en general se busca que preserven algunas propiedades. También se darán definiciones como continuo indescomponible y algunos tipos de funciones continuas entre continuos.

En el Capítulo 2, introducimos la definición de unicoherencia y unicoherencia hereditaria. Veremos ejemplos de continuos que son o no unicoherentes. Además, mostramos funciones continuas que preservan o no la unicoherencia entre continuos. Por otra parte, veremos que el producto de dos continuos unicoherentes no es necesariamente unicoherente. Finalmente, probaremos que el límite inverso de continuos unicoherentes o hereditariamente unicoherentes, es unicoherente o hereditariamente unicoherente, respectivamente.

En el Capítulo 3 mostraremos la definición de función inesencial y función con logaritmo continuo. Luego, se estudiarán algunas propiedades que tienen estas clases de funciones. Después, como uno de los resultados más destacados, mostramos la relación que hay entre la unicoherencia, las funciones inesenciales y las funciones con logaritmo continuo, en continuos localmente conexos. Para terminar, estudiaremos la unicoherencia en continuos localmente conexos, donde resaltamos que el producto de unicoherentes es unicoherente y una caracterización de continuos unicoherentes.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos conceptos básicos de teoría de continuos que usamos en el estudio de continuos unicoherentes. Este capítulo lo desarrollamos de la siguiente manera: en la primera sección definimos continuo y damos algunos ejemplos, en la siguiente sección mostramos herramientas para construir continuos como son: intersecciones anidadas, productos y límites inversos. Además, definimos continuo indescomponible, función abierta, función monótona, función casimonótona, función cuasimonótona y retractos.

1.1. Definición y ejemplos de continuos

A continuación presentamos los espacios donde trabajamos el desarrollo de este escrito. Definimos continuo localmente conexo y mostramos algunos ejemplos sencillos.

Definición 1.1. Un *continuo* es un espacio métrico X, compacto, conexo y diferente del vacío. Además, diremos que X es *localmente conexo* si para cada punto x de X y cualquier vecindad V de x, existe un abierto conexo U tal que $x \in U$ y $U \subset V$.

Ejemplo 1.2. Un *arco* es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$.

Ejemplo 1.3. Una *curva cerrada simple* es un espacio homeomorfo al conjunto $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

Es fácil ver que hasta ahora el arco y la curva cerrada simple son localmente conexos. Los siguientes son ejemplos de continuos que no son localmente conexos.

Ejemplo 1.4. La *curva del topólogo* es la adherencia de W, donde

$$W = \left\{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\right\};$$

es decir, la curva del topólogo que denotaremos por T es $T = W \cup (\{0\} \times [-1, 1])$.

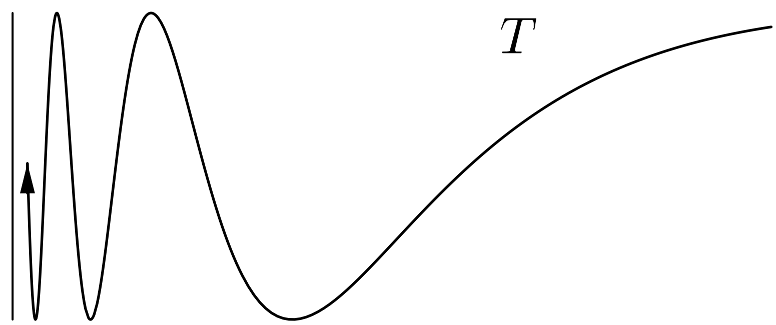

Figura 1.1: Curva del topólogo T

Ejemplo 1.5. El *círculo de Varsovia*. Este nombre es dado para cualquier continuo homeomorfo a $T \cup Z$, donde T es la curva del topólogo definida en el Ejemplo 1.4 y Z es la unión de tres arcos en $\mathbb{R}^2$, uno de $(0, -1)$ a $(0, -2)$, otro de $(0, -2)$ a $(1, -2)$, y otro de $(1, -2)$ a $(1, \operatorname{sen}(1))$.

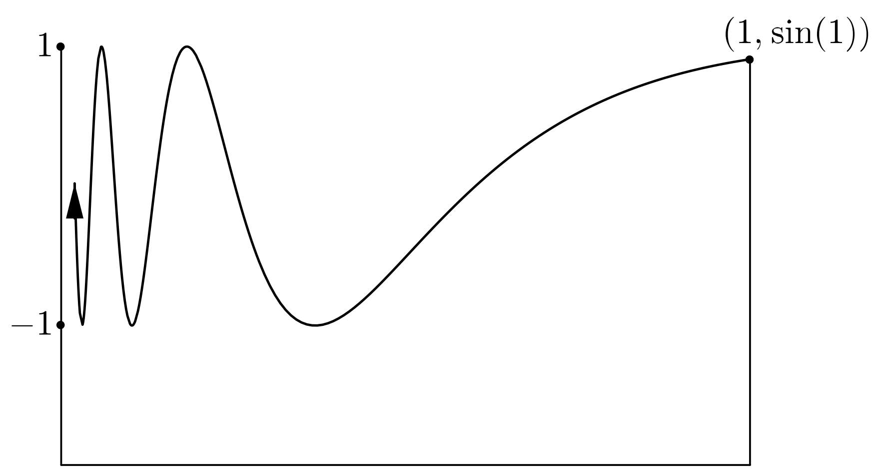

Figura 1.2: Círculo de Varsovia

Finalizamos esta sección con dos resultados relacionados con funciones continuas entre continuos. En las pruebas sólo mostramos las ideas principales con el fin de no extender el trabajo con conceptos básicos de topología general.

Teorema 1.6. *Sean X y Y continuos. Si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces f es cerrada.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ una función continua entre continuos y K un subconjunto cerrado de X. Nótese que K es compacto, por [19, Teorema 17.5]. Como f es continua, $f(K)$ es compacto. Por otro lado Y es Hausdorff. Así, $f(K)$ es cerrado, por [19, Teorema 17.5]. Por lo tanto f es cerrada. $\square$

Corolario 1.7. *Sean X y Y continuos. Si $f : X \to Y$ es una función continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva entre continuos. Por el Teorema 1.6, f es cerrada. Así, por [19, Teorema 7.9], f es un homeomorfismo. $\square$

1.2. Construcciones de continuos

En esta sección se darán maneras de construir continuos usando intersecciones anidadas, productos y límites inversos.

1.2.1. Intersección anidada de continuos

Una de las técnicas más importantes para obtener ejemplos de continuos es el uso de las intersecciones anidadas. A continuación, después de la prueba del siguiente lema, mostramos que la intersección anidada de continuos es un continuo.

Lema 1.8. *Sean $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos tales que $X_{i+1} \subset X_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. Si U es un abierto de X_1 tal que $X \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subset U$, para todo $i \geq N$. En particular, si cada $X_i \neq \emptyset$, entonces $X \neq \emptyset$, y claramente, X es métrico y compacto.*

Demostración. Supongamos que existe $x_i \in X_i - U$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $X_1 - U$ es un espacio métrico compacto, podemos suponer que la sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ converge a algún punto $p \in X_1 - U$. Como $X_{i+1} \subset X_i$, para cada i, tenemos que para cada k, $x_i \in X_k$ para todo $i \geq k$. Por lo tanto como X_k es compacto, $p \in X_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Así, $p \in X$. Como $p \notin U$, contradecimos que $X \subset U$. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_i \subset U$, para todo $i \geq N$. Esto prueba la primera parte del lema. Finalmente, si $X = \emptyset$, basta tomar $U = \emptyset$ y tenemos que $X_i = \emptyset$, para todo $i \geq N$. Con lo que completamos nuestra prueba. $\square$

Teorema 1.9. *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos tales que $X_{i+1} \subset X_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Si $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$, entonces X es un continuo.*

Demostración. Por el Lema 1.8, X es un espacio métrico, compacto y diferente del vacío. Luego solo debemos probar que X es conexo. Supongamos que X no es conexo. Entonces $X = A \cup B$, donde A y B son disjuntos, no vacíos y cerrados. Como X_1 es un espacio normal, por [19, Definición 15.1], existen abiertos disjuntos V y W de X_1, tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$. Entonces, por el Lema 1.8, $X_n \subset U$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $X_n = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W)$. Como $X = A \cup B$, $X \subset X_n$, $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, tenemos que $X_n \cap V \neq \emptyset$ y $X_n \cap W \neq \emptyset$. Así, contradecimos que X_n es conexo. De lo anterior, X es conexo y por tanto, un continuo. $\square$

A continuación construimos un continuo interesante usando el Teorema 1.9.

Ejemplo 1.10. *La carpeta de Sierpiński.* Sean $\mathcal{C}_1 = [0,1] \times [0,1]$ y $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 - \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$; es decir, para construir $\mathcal{C}_2$ tomamos el cuadrado $\mathcal{C}_1$ y lo dividimos en nueve subcuadrados iguales de los cuales extraemos el interior del cuadrado de la mitad. De forma similar, tomamos $\mathcal{C}_2$ que está formado por ocho cuadrados de los cuales a cada uno de estos lo dividimos en nueve subcuadrados iguales y quitamos el interior del cuadrado de la mitad para obtener $\mathcal{C}_3$, ver Figura 1.3. Continuando con este proceso definimos una sucesión de continuos $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. Por el Teorema 1.9, $\mathcal{C}$ es un continuo y es conocido como la *carpeta de Sierpiński* o *curva universal de Sierpiński*.

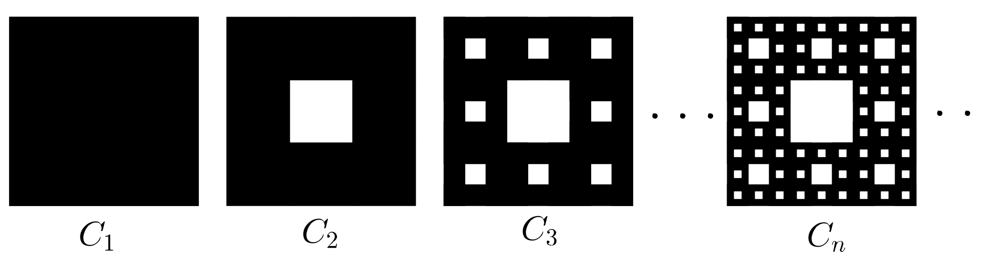

Figura 1.3: Carpeta de Sierpiński

1.2.2. Producto de continuos

Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de continuos y definimos

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha = \left\{(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} : x_\alpha \in X_\alpha \text{ para cada } \alpha \in \mathcal{A}\right\}.$$

Para cada $\beta \in \mathcal{A}$ definimos $\pi_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ por $\pi_\beta\left((x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}\right) = x_\beta$. El espacio $\prod X_\alpha$ lo dotamos de la topología producto, cuya topología es generada por la base

$$\mathcal{B} = \left\{\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right) : U_{\alpha_i} \text{ es abierto de } X_{\alpha_i} \text{ y } \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathcal{A}\right\}.$$

A continuación mostramos que $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es un continuo si y solo si $\mathcal{A}$ es a lo más numerable.

Proposición 1.11. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$, entonces d' define una métrica sobre X y además, la metrica d' induce la misma topología que la métrica d.*

Demostración. Veamos que $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ define una métrica sobre X. Sean $x, y, z \in X$. Tenemos que $d'(x, y) = 0$ si y sólo si $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. También, como $d(x, y) = d(y, x)$, se tiene que $\min\{d(x, y), 1\} = \min\{d(y, x), 1\}$; así, $d'(x, y) = d'(y, x)$. Para verificar que d' satisface la desigualdad triangular, consideremos todos los casos posibles. Primero supongamos que $d'(x, y) = d(x, y)$, $d'(x, z) = d(x, z)$ y $d'(z, y) = d(z, y)$. Así, como d satisface la desigualdad triangular, tenemos que $d'(x, y) \leq d'(x, z) + d'(z, y)$. Note que en cualquier otro caso $1 \leq d'(x, z) + d'(z, y) \leq 2$ y como $d'(x, y) \leq 1$, se tiene que $d'(x, y) \leq d'(x, z) + d'(z, y)$, para todo x, y, $z \in X$.

Ahora veamos que d' induce la misma topología que d. Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Es fácil ver que si tomamos $\delta_1 = \varepsilon$ y $d(x_0, x) < \delta_1$, entonces $d'(x_0, x) \leq d(x_0, x) < \varepsilon$. Por otro lado $\delta_2 = \min\{\varepsilon; 1\}$ satisface que si $d'(x_0, x) < \delta_2$, para $0 < \varepsilon < 1$, tenemos que $\delta_2 = \varepsilon$ y $d'(x_0, x) < \varepsilon$; entonces $d(x_0, x) < \varepsilon$. Para $\varepsilon \geq 1$, tenemos que si $\delta_2 = 1$ y $d'(x_0, x) < 1$, entonces $d(x_0, x) < 1 \leq \varepsilon$. Así, por [5, Teorema 3.2, pág. 184], d y d' generan la misma topología sobre X. □

Por la Proposición 1.11, podemos suponer que todo espacio métrico X tiene métrica d tal que $d(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in X$. En adelante, siempre supondremos las métricas acotadas por 1. A continuación mostramos que el producto a lo más numerable de espacios métricos es metrizable.

Proposición 1.12. *Sea* $\{(X_\alpha, d_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *una familia de espacios métricos. Si* $\mathcal{A}$ *es a lo más numerable, entonces el producto* $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ *es un espacio métrico.*

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es finito, entonces escribimos $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha = \prod_{i=1}^{n} X_i$. No es difícil ver que $d\left((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$ define una métrica sobre $\prod_{i=1}^{n} X_i$ y esta métrica genera la topología producto. Un caso más interesante es tomar $\mathcal{A}$ numerable. Escribiremos $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ y definimos

$$d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}.$$

Note que $0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. Por lo tanto, la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}$ siempre existe. Veamos que d es una métrica y genera la topología producto. Sean $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ y $z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$ en $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} = 0$, si y sólo si $d_i(x_i, y_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$, si y sólo si $x_i = y_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ si y sólo si $x = y$. Como $d_i(x_i, y_i) = d_i(y_i, x_i)$, para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(y_i,x_i)}{2^i}$; es decir, $d(x, y) = d(y, x)$. Así, d es simétrica. De la Proposición 1.11, se tiene que $d_i(x_i, y_i) \leq d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, z_i)}{2^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(z_i, y_i)}{2^i}.$$

De lo anterior d cumple la desigualdad triangular, por lo tanto d es una métrica. Ahora veamos que la métrica $d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}$ induce la topología producto. Denotemos por τ_d a la topología inducida por d y τ_p a la topología producto. Primero veamos que $\tau_d \subset \tau_p$. Para esto, sean $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sea $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^m}$. Debemos probar que $\bigcap_{j=1}^{m} \pi_j^{-1}\left(B_{d_j}(x_j, \varepsilon_j)\right) \subset B_d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, \varepsilon\right)$. Sea $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in \bigcap_{j=1}^{m} \pi_j^{-1}\left(B_{d_j}(x_j, \varepsilon_j)\right)$. Queremos ver que $d((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}) < \varepsilon$. Note que

$$d\left((x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}.$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{d_i\left(x_i,y_i\right)}{2^i}+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{d_i\left(x_i,y_i\right)}{2^i}<\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\frac{\varepsilon}{2^m}+\frac{\varepsilon}{2}=\left(1-\frac{1}{2^m}\right)\frac{\varepsilon}{2^m}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Por lo tanto, $d\left(\left(x_i\right)_{i=1}^{\infty},\left(y_i\right)_{i=1}^{\infty}\right)<\varepsilon$.

Para ver que $\tau_p\subset\tau_d$, sean $\left(x_i\right)_{i=1}^{\infty}\in\prod_{i=1}^{\infty}X_i$ y $U=\bigcap_{j=1}^{k}\pi_j^{-1}\left(B_{d_j}\left(x_j,\varepsilon_j\right)\right)$. Tomemos $\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2^1},\frac{\varepsilon_2}{2^2},\ldots,\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right\}$. Debemos probar que $B_d\left(\left(x_i\right)_{i=1}^{\infty},\varepsilon\right)\subset U$. Sea $\left(y_i\right)_{i=1}^{\infty}\in B_d\left(\left(x_i\right)_{i=1}^{\infty},\varepsilon\right)$. Es claro que $d\left(\left(x_i\right)_{i=1}^{\infty},\left(y_i\right)_{i=1}^{\infty}\right)<\varepsilon$; es decir, $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}<\varepsilon$. Por lo tanto $\frac{d_j(x_j,y_j)}{2^j}<\varepsilon\leq\frac{\varepsilon_j}{2^j}$, para cada $j\in\{1,2,\ldots,k\}$. Así, si $j\in\{1,2,\ldots,k\}$, entonces $d_j\left(x_j,y_j\right)<\varepsilon_j$. Por lo tanto, $B_d\left(\left(x_i\right)_{i=1}^{\infty},\varepsilon\right)\subset U$. De lo anterior $\tau_d=\tau_p$. $\square$

Proposición 1.13. *Sea $\{(X_\alpha,d_\alpha):\alpha\in\mathcal{A}\}$ una familia de espacios conexos. Si $\mathcal{A}$ es a lo más numerable, entonces el producto $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha$ es un espacio conexo.*

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es finito, entonces escribimos $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha=\prod_{n=1}^{m}X_n$. No es difícil ver que $\prod_{n=1}^{m}X_n$ es conexo. Un caso más interesante es tomar $\mathcal{A}$ numerable. Escribiremos $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}}X_\alpha=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$. Sean x y y en $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$. Primero probaremos que si y y x difieren a lo más en un número finito de coordenadas, entonces y y x están en un conjunto conexo. Haremos la prueba por inducción sobre el número n de coordenadas en las que y y x difieren. Para $n=1$, la afirmación se cumple, ya que si y y x difieren en la α- ésima coordenada, la rebanada $X_\alpha\times\prod\{x_i\in X_i:i\neq\alpha\}$ a lo largo de x y paralela al α- ésimo factor es homeomorfo a X_α, es un conjunto conexo que tiene a x y y. Ahora supongamos que la afirmación es cierta para todo x y z que difieren en $n-1$ coordenadas. Entonces, dado algún y, encontramos un z tal que difiere de y en una coordenada. Por el caso $n=1$, y y z están en subconjunto conexo C y por la hipótesis de inducción z y x están en un conjunto conexo C_1. Como $C\cap C_1$ tiene a z, tenemos que $C\cup C_1$ es conexo. Esto muestra que si dos puntos difieren en un número finito de coordenadas entonces hay un conexo que los contiene.

Para terminar, sea A la unión de todos los subconjuntos conexos de $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ que tienen a x. Tenemos que A es conexo y $D\subset A$, donde

$$D=\left\{y\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n: x \text{ y } y \text{ difieren a lo más en una cantidad finita de coordenadas}\right\}.$$

Veamos que D es denso en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$; es decir, $\overline{D} = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Para esto, sean $B = \bigcap_{n=1}^{k} \pi_n^{-1}(U_n)$ abierto no vacío en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, donde U_i es abierto de X_i y $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in B$, tal que $x_j = y_j$ para todo $j \geq k+1$. Note que x y y difieren a lo más en una cantidad finita de coordenadas. Por lo tanto $y \in B \cap D$. Así, D es denso en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, por [5, 4.13, pág. 72]. Luego, $\overline{A}$ es conexo, por [16, Teorema 23.4] y como $\overline{D} \subset \overline{A}$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es conexo. $\square$

Teorema 1.14. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de continuos. Si $\mathcal{A}$ es a lo más numerable, entonces el producto $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es un continuo.*

Demostración. Dada una colección de continuos $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, tal que $\mathcal{A}$ es a lo más numerable, por la Proposición 1.13 y por [19, Teorema 17.5], tenemos que $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es conexo y compacto. Además, por la Proposición 1.12, $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es un espacio métrico. Así, $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es un continuo. $\square$

Ejemplo 1.15. Una *$n-$celda* es un espacio homeomorfo al producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$, donde cada $X_i = [0,1]$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, una $n-$celda es un continuo, por el Teorema 1.14.

Ejemplo 1.16. El *toro* se define como el producto $S^1 \times S^1$ es un continuo.

Ejemplo 1.17. El *cubo de Hilbert Q* es un espacio homeomorfo al producto cartesiano numerable $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$, donde cada $I_i = [0,1]$.

Note que Q es un continuo universal en el sentido que si X es un continuo, entonces existe una inmersión $i : X \to Q$; es decir, Q contiene una copia homeomorfa de cualquier continuo (ver [12, Teorema 1, pág. 241]).

Observación 1.18. El producto arbitrario de compactos es compacto, por [19, Teorema 17.8] y producto arbitrario de conexos es conexo por [19, Teorema 26.10]. Pero en general, el producto arbitrario de continuos no es un continuo, ya que el producto no numerable de espacios métricos no es metrizable, por [19, Teorema 22.3].

1.2.3. Límites inversos de continuos

En la teoría de continuos, el límite inverso de una sucesión inversa de continuos es una herramienta poderosa totalmente teórica que nos permite construir una gran variedad de continuos. Los continuos de Knaster, continuos que mostraremos en esta sección, son ejemplos de continuos que se construyen usando límites inversos.

Definición 1.19. Sean X_n un continuo y $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ una función continua llamada *función de enlace*, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces decimos que la doble sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión inversa* de continuos.

Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos. Entonces el *límite inverso* de $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ denotado por $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ o X_∞ es un subespacio del espacio producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, definido como

$$X_\infty = \varprojlim \left\{X_n, f_n^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

En el Teorema 1.23 probaremos que el límite inverso de una sucesión inversa de continuos es un continuo.

Definición 1.20. Sean $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos con límite inverso X_∞ y $\pi_m : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to X_m$ la proyección de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ sobre X_m, para algún $m \in \mathbb{N}$. Definimos la función f_m como $f_m = \pi_m|_{X_\infty} : X_\infty \to X_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Observación 1.21. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso X_∞. Aunque las funciones π_m son sobreyectivas, las proyecciones f_m no necesariamente son sobreyectivas. Sin embargo, si todas las funciones f_n^{n+1} son sobreyectivas, entonces las proyecciones f_n son sobreyectivas y viceversa. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{n+1} \circ f_{n+1} = f_n$; es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & X_\infty \arrow[dl, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, "f_n"] & \\ X_{n+1} \arrow[rr, "f_n^{n+1}"'] & & X_n \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Lema 1.22. *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos $Q_i(X_n, f_n^{n+1})$ como*

$$Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right) = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para todo } n \leq i \right\}.$$

Entonces se tiene lo siguiente:

1. $Q_i(X_n, f_n^{n+1}) \supset Q_{i+1}(X_n, f_n^{n+1})$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

2. $Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$ *es homeomorfo a* $\prod_{n=i+1}^{\infty} X_n$*, para todo* $i \in \mathbb{N}$*.*

3. $\varprojlim\left\{X_n, f_n^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$.

Demostración. Probemos (*1*). Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_{i+1}\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$. Así, $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$, para todo $n \leq i+1$. Luego, $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$, para todo $n \leq i$. Por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$.

Para probar (*2*). Fijamos un i y definimos $h : Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right) \to \prod_{n=i+1}^{\infty} X_n$, como $h\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = (x_n)_{n=i+1}^{\infty}$, para todo $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$. Veamos que h es continua. Sean $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon$. Si $d\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} < \delta$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n\left(x_n, y_n\right)}{2^n} = \sum_{n=1}^{i} \frac{d_n\left(x_n, y_n\right)}{2^n} + \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{d_n\left(x_n, y_n\right)}{2^n} < \varepsilon,$$

luego $d\left(h\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right), h\left((y_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right) = \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n} < \varepsilon$. Por lo tanto h es continua. Sea $g : \prod_{n=i+1}^{\infty} X_n \to Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$, definida como $g\left(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots\right) = \left(y_1, \ldots, y_i, x_{i+1}, \ldots\right)$, donde $y_k = f_k^{k+1} \circ \cdots \circ f_i^{i+1}\left(x_{i+1}\right)$ con $k \in \{1, 2, \ldots, i\}$. Es fácil ver que g es continua. Además, $g \circ h = id$ y $h \circ g = id$. Luego, h es un homeomorfismo, por [5, Teorema 12.3, pág. 89].

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim\left\{X_n, f_n^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=i}^{\infty} X_n$, donde $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$, para todo $n \leq i$, con $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$, para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Así, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$. Inversamente, si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$, para todo i. Sea $m \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_m\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$, entonces $x_m = f_m^{m+1}(x_{m+1})$. Como m fue arbitrario, $x_m = f_m^{m+1}(x_{m+1})$, para todo $m \in \mathbb{N}$. De lo anterior $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim\left\{X_n, f_n^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. □

El siguiente es el principal resultado de esta sección y lo usaremos en los capítulos siguientes.

Teorema 1.23. *Sea* $\left\{X_n, f_n^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa. Si* X_n *es un continuo, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* X_∞ *es un continuo.*

Demostración. Sean $\left\{X_n, f_n^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos y el límite inverso $X_\infty = \varprojlim\left\{X_n, f_n^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Por el Lema 1.22, $X_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$, donde $Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$ es un continuo y $Q_i\left(X_n, f_n^{n+1}\right) \supset Q_{i+1}\left(X_n, f_n^{n+1}\right)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, por el Teorema 1.9, X_∞ es un continuo. □

La siguiente proposición nos muestra como es una base del espacio límite inverso.

Proposición 1.24. *Sea* $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa de continuos con límite inverso* X_∞*. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, sea*

$$\mathcal{B}_n = \left\{ f_n^{-1}(U_n) \, | U_n \text{ es un subconjunto abierto de } X_n \right\}.$$

Si $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$*, entonces* $\mathcal{B}$ *es una base para la topología de* X_∞*.*

Demostración. Dado que X_∞ es un subespacio de la topología producto, un abierto básico de X_∞ es de la forma $\bigcap_{j=1}^{k} f_{n_j}^{-1}(U_{n_j})$, donde U_{n_j} es abierto de X_{n_j}, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $n_k = \text{máx}\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Sea $U = \bigcap_{j=1}^{k} (f_{n_j}^{n_k})^{-1}(U_{n_j})$.

Entonces U es un subconjunto abierto de X_{n_k} y

$$\begin{aligned} f_{n_k}^{-1}(U) &= f_{n_k}^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{k}\left(f_{n_j}^{n_k}\right)^{-1}\left(U_{n_j}\right)\right) \\ &= \bigcap_{j=1}^{k}\left(f_{n_j}^{n_k} \circ f_{n_k}\right)^{-1}\left(U_{n_j}\right) \\ &= \bigcap_{j=1}^{k} f_{n_j}^{-1}\left(U_{n_j}\right) \end{aligned}$$

□

El siguiente corolario nos dice como son las funciones proyecciones de X_∞ si las funciones de enlace son funciones abiertas.

Corolario 1.25. *Sea* $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa de continuos con funciones enlace sobreyectiva, cuyo límite inverso es* X_∞*. Entonces las proyecciones son funciones abiertas si y solo si todas las funciones de enlace son abiertas.*

Demostración. Supongamos que todas las funciones de enlace son abiertas. Sean $m \in \mathbb{N}$, U un abierto de X_∞ y $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ en U. Por la Proposición 1.24, existen $N \in \mathbb{N}$ y un abierto U_N de X_N tales que $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in f_N^{-1}(U_N) \subset U$. Para ver que f_m es abierto, consideremos dos casos.

Supongamos que $N \geq m$. Entonces, por la Observación 1.21, tenemos que $x_m = f_m\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right) \in f_m\left(f_N^{-1}(U_N)\right)$. Además, $f_m(f_N^{-1}(U_N)) = f_m^N\left(f_N\left(f_N^{-1}(U_N)\right)\right) = f_m^N(U_N) \subset f_m(U)$.

Por lo tanto, como las funciones de enlace son abiertas, x_m es un punto interior de $f_m(U)$. Así, $f_m(U)$ es abierto.

Ahora suponga que $m > N$. Entonces, por la Observación 1.21, se tiene que $x_m = f_m\left((x_i)_{i=1}^{\infty}\right) \in f_m\left(f_N^{-1}(U_N)\right)$. Además, $f_m(f_N^{-1}(U_N)) = f_m\left(f_m^{-1}\left(\left(f_N^m\right)^{-1}(U_N)\right)\right) = \left(f_N^m\right)^{-1}(U_N) \subset f_m(U)$. Por lo tanto, como las funciones de enlace son continuas, x_m es un punto interior de $f_m(U)$. Así, $f_m(U)$ es abierto.

Recíprocamente, supongamos que todas las proyección son abiertas. Sean $n \in \mathbb{N}$ y U_{n+1} un abierto de X_{n+1}. Como $f_n^{n+1}(U_{n+1}) = f_n\left(f_{n+1}^{-1}(U_{n+1})\right)$ y el hecho que las proyecciones son funciones continuas y abiertas, tenemos que $f_n^{n+1}(U_{n+1})$ es un subconjunto abierto de X_n. Por lo tanto, f_n^{n+1} es abierto, para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Las siguientes dos proposiciones son importantes en este trabajo y las usaremos en los capítulos siguientes.

Proposición 1.26. *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos, cuyo límite inverso es X_∞. Si A es un subconjunto cerrado de X_∞, entonces la doble sucesión $\left\{f_n(A), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa con funciones de enlace sobreyectivas y*

$$\varprojlim \left\{f_n(A), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A)}\right\}_{n=1}^{\infty} = A = \left[\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)\right] \cap X_\infty. \tag{1.1}$$

Demostración. Por la Observación 1.21, $f_n^{n+1} \circ f_{n+1} = f_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue entonces que $\left\{f_n(A), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa con funciones de enlace sobreyectivas. Ahora probaremos (1.1). Primero observe que

$$\varprojlim \left\{f_n(A), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A)}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left[\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)\right] \cap X_\infty.$$

También nótese que

$$A \subset \left[\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)\right] \cap X_\infty.$$

Por lo tanto, necesitamos probar que

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)\right] \cap X_\infty \subset A.$$

Sean $\epsilon > 0$ y $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in [\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)] \cap X_\infty$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f_n(A)$, existe $a^{(n)} = (a_m^{(n)})_{m=1}^{\infty} \in A$ tal que $f_n(a^{(n)}) = y_n$.

Ahora, note que

$$\begin{aligned} d(a^{(N)}, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(a_n^{(N)}, y_n) \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(a_n^{(N)}, y_n) < \epsilon. \end{aligned}$$

Dado que ϵ es arbitrario, $y \in Cl(A)$. Como A es cerrado, $y \in A$ y concluimos nuestra prueba. $\square$

Proposición 1.27. *Sea* $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa de continuos cuyo límite inverso es* X_∞*. Si* A *y* B *son dos subconjunto cerrados de* X_∞*,* $C = A \cap B$ *y* $C_n = f_n(A) \cap f_n(B)$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$C = \varprojlim \left\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Demostración. Sea $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim \left\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Sabemos que $x_n \in C_n = f_n(A) \cap f_n(B)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $x \in \varprojlim \left\{f_n(A), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $x \in \varprojlim \left\{f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(B)}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Por la Proposición 1.26, tenemos que $x \in A$ y $x \in B$. Así, $x \in C$.

Recíprocamente, sea $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in C$. Como $C = A \cap B$, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f_n(A)$ y $y_n \in f_n(B)$. Así, $y_n \in C_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $y \in \varprojlim \left\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$

1.3. Continuos indescomponibles

Los continuos indescomponibles constituyen una clase muy importante de continuos con propiedades interesantes. En esta sección definiremos lo que es un continuo indescomponible y mostraremos un par de ejemplos.

Definición 1.28. Un continuo X se dice *descomponible* si $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X. Un continuo el cual no es descomponible se dice *indescomponible.*

la siguiente definición nos dará una manera de construir continuos indescomponibles usando límites inverso.

Definición 1.29. Una sucesión inversa $\left\{X_i, f_i^{i+1}\right\}_{i=1}^{\infty}$ donde cada X_i es un continuo, se llama una *sucesión inversa indescomponible* si para cada $i \in \mathbb{N}$ y cualesquiera A_{i+1} y B_{i+1} subcontinuos de X_{i+1} tales que $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$, tenemos que $f_i^{i+1}(A_{i+1}) = X_i$ o $f_i^{i+1}(B_{i+1}) = X_i$.

El teorema que sigue nos muestra un caso particular cuando un límite inverso es indescomponibles.

Teorema 1.30. *Sea $\left\{X_i, f_i^{i+1}\right\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos. Si $\left\{X_i, f_i^{i+1}\right\}_{i=1}^{\infty}$ es indescomponible, entonces X_∞ es un continuo indescomponible.*

Demostración. Por el Teorema 1.23, tenemos que X_∞ es un continuo. Ahora, supongamos que X_∞ es descomponible. Entonces existen dos subcontinuos propios A y B de X_∞ tales que $X_\infty = A \cup B$. Por la Proposición 1.26, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, entonces $f_m(A) \neq X_m$ y $f_m(B) \neq X_m$. Nótese que las funciones de enlace son sobreyectivas, por lo tanto, las funciones proyección son sobreyectivas, por la Observación 1.21. Entonces,

$$X_{n+2} = f_{n+2}(X_\infty) = f_{n+2}(A) \cup f_{n+2}(B).$$

Esto implica que

$$X_{n+1} = f_{n+1}^{n+2}(X_{n+2}) = \left(f_{n+1}^{n+2} \circ f_{n+2}\right)(A) \cup \left(f_{n+1}^{n+2} \circ f_{n+2}\right)(B).$$

Así, tenemos que $\left(f_{n+1}^{n+2} \circ f_{n+2}\right)(A) = X_{n+1}$ ó $\left(f_{n+1}^{n+2} \circ f_{n+2}\right)(B) = X_{n+1}$. De donde, $f_{n+1}(A) = X_{n+1}$ ó $f_{n+1}(B) = X_{n+1}$, lo cual contradice la elección de n. Por lo tanto X_∞ es indescomponible. $\square$

Los siguientes ejemplos son construidos apartir del Teorema 1.30.

Ejemplo 1.31. Para cada entero positivo p, sea $f^p : S^1 \to S^1$ dada por $f^p(z) = z^p$, para cada $z \in S^1$ (S^1 es el circulo unitario en el plano y z^p denota la pth potencia de z usando multiplicación compleja). Para un p dado, sea

$$\sum\nolimits_p = \varprojlim \left\{X_i, f_i^{i+1}\right\}_{i=1}^{\infty}, \text{ donde } X_i = S^1 \text{ y } f_i^{i+1} = f^p, \text{ para cada } i \in \mathbb{N}.$$

No es difícil ver que $\{X_i f_i^{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ satisface las hipótesis del Teorema 1.30. Así, $\sum_p$ es un continuo indescomponible. A este continuo se le llama *el solenoide p-ádico.*

Ejemplo 1.32. Sean $X_i = [0, 1]$ y $f_i^{i+1} : X_{i+1} \to X_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$, definida por

$$f_i^{i+1} = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1/2; \\ -2t+2, & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, por el Teorema 1.30, $\varprojlim \left\{X_i, f_i^{i+1}\right\}_{i=1}^{\infty}$ es un continuo indescomponible. Este continuo es llamado *el continuo de Buckethandle* o *arcoiris de Knaster*. Una representación de este continuo se muestra en la Figura 1.4. Los detalles de la construcción pueden ser consultados en [3].

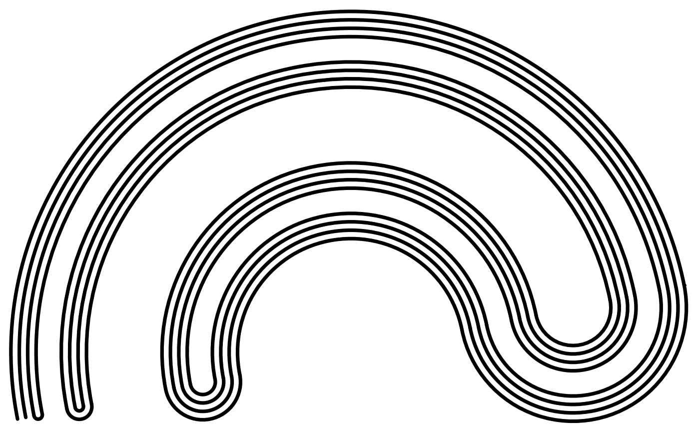

Figura 1.4: Arcoiris de Knaster

1.4. Funciones Continuas

Cuando estudiamos una propiedad topológica, es natural preguntarse si ésta es preservada por cocientes, funciones continuas o algunas clase de función. Para finaliza este capítulo se definirán clases de funciones entre continuos, las cuales usaremos en el siguiente capítulo.

Definición 1.33. Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, entonces:

1. f es *monótona* si para cualquier subcontinuo Q en Y, $f^{-1}(Q)$ es conexo.

2. f es *casimonótona* si para cualquier subcontinuo Q de Y, donde $Int_Y(Q) \neq \emptyset$, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es conexo.

3. f es *cuasimonótona* si para cualquier subcontinuo Q de Y, donde $Int_Y(Q) \neq \emptyset$, se tiene que $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y si D es una componente de $f^{-1}(Q)$, entonces $f(D) = Q$.

Otra forma equivalente de definir una función monótona es la que presentamos en el siguiente resultado.

Teorema 1.34. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces f es monótona si y solo si $f^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Como f es monótona y $\{y\}$ es un subcontinuo de Y, $f^{-1}(y)$ es conexo.

Sea Q un subcontinuo de Y. Probemos que $f^{-1}(Q)$ es conexo. Supongamos que $f^{-1}(Q)$ no es conexo. Esto es, existen A y B conjuntos cerrados disjuntos y no vacíos de X tales que $f^{-1}(Q) = A \cup B$. Como f es sobreyectiva, $Q = f(f^{-1}(Q)) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Veamos que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$. Si $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$, existe $y \in f(A) \cap f(B)$ tal que $f^{-1}(y) \subset A \cap B$, $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$ y $f^{-1}(y) \cap B \neq \emptyset$. Lo anterior contradice que $f^{-1}(y)$ es conexo. Así, $f^{-1}(Q)$ es conexo y f es monótona. □

Las funciones abiertas son conocidas de cursos básicas de topología general, sin embargo, a continuación damos la definición.

Definición 1.35. Una función $f : X \to Y$ se dice *abierta* si para cada conjunto abierto U de X, $f(U)$ es un conjunto abierto en Y .

El siguiente teorema relaciona las funciones casimonótonas con las cuasimonótonas.

Teorema 1.36. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Si f es una función casimonótona, entonces f es cuasimonótona.*

Demostración. Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Como f es una función casimonótona, $f^{-1}(Q)$ tiene una única componente D. Luego, $f^{-1}(Q) = D$ tiene un número finito de componentes. De esta forma, $f(D) = f(f^{-1}(Q)) = Q$. Por lo tanto, f es cuasimonótona. □

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del Teorema 1.36 no se tiene.

Ejemplo 1.37. Sea $f : S^1 \to [-1, 1]$ la función definida por $f((x, y)) = x$. Es fácil ver que $f^{-1}(Q)$ tiene a lo más dos componentes y si D es una componente de $f^{-1}(Q)$, $f(D) = Q$. Así, f es cuasimonótona. Además, como $f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ tiene dos componentes, f no es casimonótona.

El siguiente teorema se sigue de manera inmediata de las definiciones de función monótona y casimonótona.

Teorema 1.38. *Si $f : X \to Y$ es una función monótona, entonces f es casimonótona.*

Por ultimo se definirá retracción, que es la última clase de funciones entre continuos que estudiaremos en el siguiente capítulo.

Definición 1.39. Sea X un espacio topológico. Un conjunto A se dice *retracto* de X, cuando $A \subset X$ y existe una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$, para todo $a \in A$. La función r la llamamos *retracción*.

Capítulo 2

Unicoherencia

Este capítulo está dedicado al estudio de la unicoherencia en continuos, que es el objetivo central de este trabajo. Un continuo no es unicoherente si se puede escribir como la unión de dos subcontinuos cuya intersección no es conexa. Esto intuitivamente lo podemos asociar a una idea de "hueco"; es decir, la circunferencia que separa el plano tiene un dominio interior o "hueco" no es unicoherente; sin embargo continuos como un arco, un n-odo, un abanico o una curva senoidal, son unicoherentes y no tienen tales "huecos".

Este capítulo lo desarrollamos de la siguiente manera: primero daremos la definición de continuo unicoherente y hereditariamente unicoherente. Seguidamente estudiaremos la unicoherencia en funciones continuas y finalmente estudiaremos productos y probaremos que la unicoherencia y unicoherencia hereditaria se preservan por límites inversos.

2.1. Definición y ejemplos

En esta sección daremos la definición y ejemplos de unicoherencia en continuos y formas equivalentes de mostrar unicoherencia en continuos. Además, se definirá la unicoherencia hereditaria, se presentarán ejemplos y se mirarán relaciones entre la unicoherencia y la unicoherencia hereditaria.

Definición 2.1. Un continuo X es *unicoherente* si para cualquiera A y B subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$, la intersección $A \cap B$ es conexo (o un continuo). Un continuo se dice *hereditariamente unicoherente* si cada uno de sus subcontinuos es unicoherente.

La siguiente proposición muestra una caracterización de los continuos hereditariamente unicoherentes.

Proposición 2.2. *Sea X un continuo. Entonces, X es hereditariamente unicoherente si y solo si $A \cap B$ es conexo para cualquier par de subcontinuos A y B de X.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos de X. Nótese que si $A \cap B = \emptyset$, $A \cap B$ es conexo. Así, supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$. Sea $C = A \cup B$ un subcontinuo de X. Como X es hereditariamente unicoherente, C es unicoherente y por lo tanto $A \cap B$ es conexo.

Recíprocamente, sean C un subcontinuo de X y A y B subcontinuos de C tales que $C = A \cup B$. Como $C \subset X$, A y B son subcontinuos de X. Por hipótesis, $A \cap B$ es conexo. Por lo tanto, C es unicoherente y X es hereditariamente unicoherente. □

Observación 2.3. Notése que si X es hereditariamente unicoherente, entonces X es unicoherente.

A continuación mostramos algunos ejemplos de continuos unicoherentes y hereditariamente unicoherentes.

1. El arco (ver Ejemplo 1.2). Nótese que, sin pérdida de generalidad, podemos decir que los subcontinuos propios A y B de $[0,1]$ tales que $[0,1] = A \cup B$, son de la forma $A = [0,t]$ y $B = [s,1]$, donde $0 < s \leq t < 1$. Entonces $A \cap B = [s,t]$ el cual es conexo y por lo tanto el arco es unicoherente. Además es hereditariamente unicoherente ya que cualquier subcontinuo no degenerado del arco es homeomorfo al arco.

2. La curva cerrada simple, S^1 (ver Ejemplo 1.3). S^1 no es unicoherente ya que si tomamos $A = \{e^{i\theta} : -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}\}$ y $B = \{e^{i\theta} : \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{9\pi}{4}\}$, como se puede ver en la Figura 2.1, la intersección $A \cap B = \{e^{i\theta} : -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\} \cup \{e^{i\theta} : \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}\}$ no es conexa.

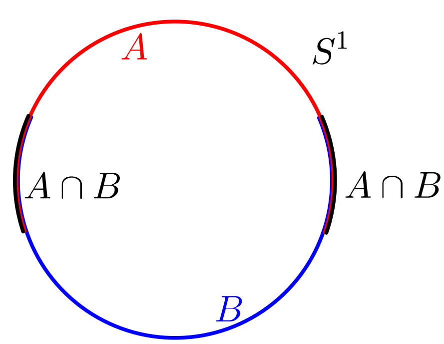

Figura 2.1: Unicoherencia de S^1

Además, S^1 no es hereditariamente unicoherente, por la Observación 2.3.

3. Curva del topólogo (ver Ejemplo 1.4). Los subcontinuos propios A y B tales que $T = A \cup B$, son de la forma $A = \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq s < 1\}}$ y $B = \{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < t \leq x \leq 1\}$, donde $t \leq s$. Entonces tenemos que $A \cap B = \{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < t \leq x \leq s < 1\}$ el cual es conexo ya que es homeomorfo al arco, y por tanto, es unicoherente. Además, es hereditariamente unicoherente, ya que no es difícil ver que los subcontinuos no degenerados de la curva del topólogo son subcontinuos homeomorfos a todo el espacio o arcos, los cuales son unicoherentes.

4. Círculo de Varsovia (ver Ejemplo 1.5). El Círculo de Varsovia no es unicoherente. Sean $A = \overline{\{(x, \text{sen}(1/x)) : 0 < x \leq 1\}}$ y $B = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde $S_1 = \{(0, x) : -2 \leq x \leq -\frac{1}{2}\}$, $S_2 = \{(x, -2) : 0 \leq x \leq 1\}$ y $S_3 = \{(1, x) : -2 \leq x \leq \text{sen}(1)\}$. Tenemos que $A \cap B = \{(0, x) : -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{(1, \text{sen}(1)\}$ lo cual no es conexo. Además, no es hereditariamente unicoherente, por la Observación 2.3.

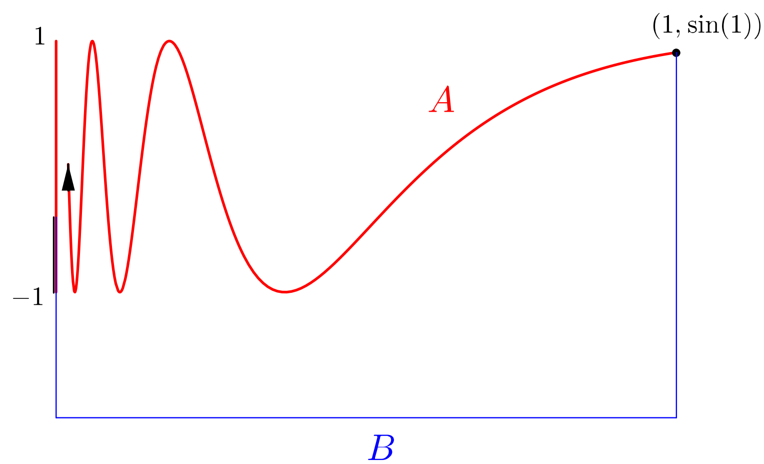

Figura 2.2: Círculo de Varsovia

El ejemplo que viene a continuación lo usaremos con frecuencia en este trabajo.

Ejemplo 2.4. Definamos el continuo X dado por $X = S^1 \cup \{\left(1 + e^{-\theta}\right) e^{i\theta} : \theta \geq 0\} \subset \mathbb{C}$. El continuo X lo representamos en la Figura 2.3. X es un continuo unicoherente, ya que los subcontinuos propios A y B tales que $X = A \cup B$, son de la forma $A = \{\left(1 + e^{-\theta}\right) e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq t\}$ y $B = S^1 \cup \{\left(1 + e^{-\theta}\right) e^{i\theta} : \theta \geq s > 0\}$, donde $0 < s \leq t$. Entonces $A \cap B = \{\left(1 + e^{-\theta}\right) e^{i\theta} : s \leq \theta \leq t\}$ el cual es conexo y por lo tanto X es unicoherente, pero no hereditariamente unicoherente, ya que contiene una curva cerrada simple S^1.

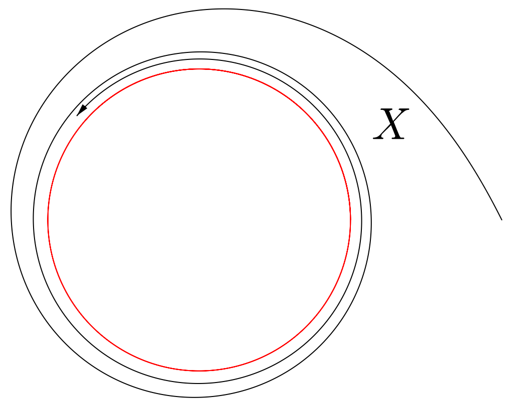

Figura 2.3: Unicoherente y no heredirario

Note que si un continuo X es indescomponible (ver Definición 1.28), entonces X es unicoherente; pues, si $X = A \cup B$ donde A y B son subcontinuos, entonces $X = A$ o $X = B$. Así, $A \cap B$ es conexo.

Obsérvese que los continuos mostrados en los Ejemplos 1.31 y 1.32, por ser indescomponibles, son unicoherentes. Además, en el Ejemplo 1.31, si $p = 2$ el espacio $\sum_2$ se conoce como Solenoide diádico.

2.2. Funciones

En esta sección estudiamos funciones continuas entre continuos que preservan o no unicoherencia y unicoherencia hereditaria. Las definiciones de las funciones que estudiamos en esta sección las dimos en la Definición 1.33.

Lema 2.5. *Sean S un espacio topológico conexo. Si $A_1, \ldots, A_n$ son subconjuntos cerrados y conexos de S tales que $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, entonces existe l, $1 \leq l \leq n$ tal que $\bigcup_{i \neq l} A_i$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $B_1 = \bigcup_{i=2}^{n} A_i$ no es conexo, ya que si lo fuera entonces terminamos la prueba. Como B_1 no es conexo, entonces existen D_1 y E_1 conjuntos cerrados disjuntos no vacíos tales que $B_1 = D_1 \cup E_1$.

Veamos que $D_1 \cup A_1$ es conexo. Supongamos lo contrario; es decir, $D_1 \cup A_1 = S \cup R$, donde R y S son conjuntos cerrados disjuntos no vacíos, como A_1 es conexo, $A_1 \subset R$ o $A_1 \subset S$. Supongamos que $A_1 \subset R$. Así, $R \subset D_1$ y $X = (R \cup E_1) \cup S$; pero esto contradice la conexidad de X. Así, $D_1 \cup A_1$ es conexo.

Sea $A_{k_1} \subset E_1$ y consideremos $B_2 = (\bigcup_{i=1}^{k_1-1} A_i) \cup (\bigcup_{i=k_1+1}^{n} A_i)$. Si B_2 es conexo terminamos la prueba. Ahora supongamos que B_2 no es conexo, entonces existen D_2 y E_2 conjuntos cerrados disjuntos no vacíos tales que $B_2 = D_2 \cup E_2$. Como $D_1 \cup A_1$ es conexo, supongamos que $D_1 \cup A_1 \subset D_2$. De forma análoga que mostramos que $D_1 \cup A_1$ es conexo, tenemos que $D_2 \cup A_{k_1}$ es conexo. Así, $D_1 \cup A_1 \subset D_2 \cup A_{k_1}$. Siguiendo este mismo procedimiento, concluimos que $D_1 \cup A_1 \subset D_2 \cup A_{k_1} \subset D_3 \cup A_{k_2}$. Luego, repitiendo el procedimiento anterior y suponiendo que los B_i no son conexos, concluimos en un número finito de pasos que $E_i = A_{k_l}$. Así, $B = (\bigcup_{i=1}^{k_l-1} A_i) \cup (\bigcup_{i=k_l+1}^{n} A_i)$ se conexo, para un $k_l \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

En los siguientes teoremas estudiamos cuándo se preserva unicoherencia por funciones continuas.

Teorema 2.6. *Sea $f : X \to Y$ una función cuasimonótona definida entre continuos. Si X es un continuo unicoherente, entonces Y es unicoherente.*

Demostración. Sean A y B dos subcontinuos de Y tales que $Y = A \cup B$. Como $Int_Y(A)$ y $Int_Y(B)$ son diferentes de vacío y f es cuasimonótona, tenemos que $f^{-1}(A) = N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_n$ y $f^{-1}(B) = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_m$, donde $N_1, \dots, N_n, M_1, \dots, M_m$ son componentes, y además, $f(N_i) = A$ y $f(M_j) = B$, para cada $i \in \{1, \dots n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$.

Sin pérdida de generalidad, tomemos a $D = (\bigcup_{i=2}^{n} N_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} M_j)$ siendo $E = N_1$ el subcontinuo adecuado que deja a D como un conjunto conexo, por el Lema 2.5. Notemos que tanto D como E son subcontinuos de X tales que $D \cup E = X$. Así, como X es unicoherente, $D \cap E$ es conexo.

Veamos finalmente que $f(D \cap E) = A \cap B$. Sea $y \in f(D \cap E)$. Luego existe $x \in D \cap E$ tal que $f(x) = y$. Como $E = N_1$ y $f(N_1) = A$, tenemos que $y \in A$. Notemos que $N_i \cap N_l = \emptyset$ si $i \neq l$ y $x \in N_1 \cap ((\bigcup_{i=2}^{n} N_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{m} M_j))$. Luego existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in M_k$. Como $f(M_k) = B$, $y \in B$. Así $y \in A \cap B$.

Ahora supongamos que $y \in A \cap B$. Como $f(N_1) = A$, existe $x \in N_1 = E$ tal que $f(x) = y$. Además, $x \in f^{-1}(B) = \bigcup_{j=1}^{m} M_j$, pues $y \in B$. Luego existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in M_k$. Por lo tanto $x \in D \cap E$ y $y \in f(D \cap E)$. Así, $A \cap B$ es conexo y Y es unicoherente. $\square$

Como toda función monótona o casimonótona es cuasimonótona (ver Teoremas 1.36 y 1.38), el siguiente resultado se sigue del Teorema 2.6.

Corolario 2.7. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Si X es un continuo unicoherente y f es monótona ó casimonótona, entonces Y es unicoherente.*

Aunque las funciones casimonótonas y cuasimonótonas preservan unicoherencia, con el siguiente ejemplo mostramos que no preservan la unicoherencia hereditaria.

Ejemplo 2.8. Sea $f : T \to Y$ una función cociente, donde T es las curva del topólogo (ver Ejemplo 1.4) y Y resulta de identificar los dos puntos extremos de la barra límite del continuo T; es decir, $Y = T/\{(0,-1),(0,1)\}$, como mostramos en la Figura 2.4.

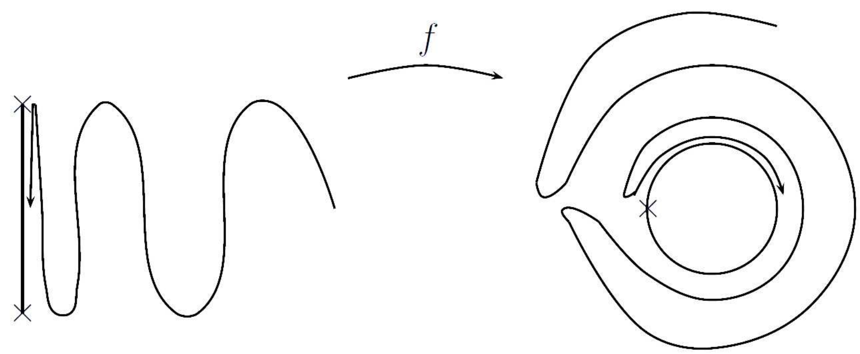

Figura 2.4: Ilustración de la primera parte del Ejemplo 2.8

La función f es una función casimonótona. Esto es fácil de ver, pues los subcontinuos de Y con interior diferente de vacío se pueden dividir en dos: los subcontinuos no degenerados sobre el rayo, que son arcos, y los subcontinuos homeomorfos a todo el espacio que contienen a la circunferencia e intersecta al rayo. En estos dos casos se puede ver fácilmente que su imagen inversa es conexa. De lo que se sigue, por el Teorema 1.36, que f es cuasimonótona.

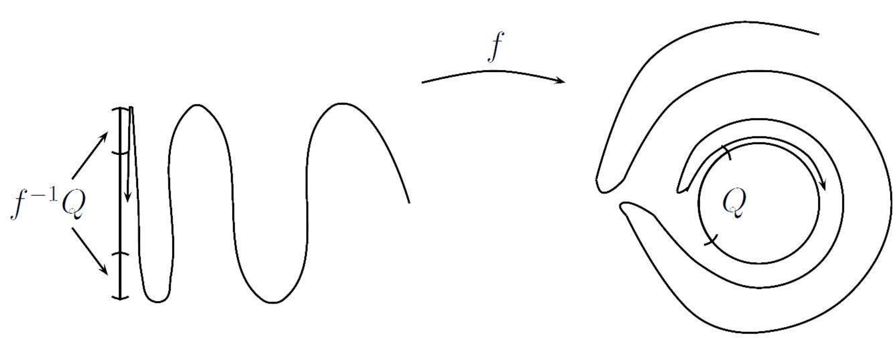

Figura 2.5: Ilustración de la segunda parte del Ejemplo 2.8

Ahora si $Q = \{e^{i\theta} : \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}\}$ es el subcontinuo en Y que contiene el punto donde se unieron los dos puntos extremos de la barra límite, $f^{-1}(Q)$ no es conexo y por tanto f no es monótona.

Notemos que como Y contiene una curva cerrada simple, Y no es hereditariamente unicoherente. Así, existe una función casimonótona que no preserva unicoherencia hereditaria.

Como consecuencia directa del ejemplo anterior podemos pensar que las funciones monótonas tampoco preservan la unicoherencia hereditaria. En contraposición tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.9. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Si X es un continuo hereditariamente unicoherente y f es monótona, entonces Y es hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Sean K y L subcontinuos de Y. Veamos que $K \cap L$ es conexo. Es claro que si $K \cap L = \emptyset$, $K \cap L$ es conexo. Así, supongamos que $K \cap L \neq \emptyset$. Como f es monótona, $f^{-1}(K)$ y $f^{-1}(L)$ son subcontinuos de X. Además, como X es hereditariamente unicoherente, por la Proposición 2.2, $f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L)$ es conexo. Finalmente, $f(f^{-1}(K) \cap f^{-1}(L)) = K \cap L$. Así, $K \cap L$ es conexo y por la Proposición 2.2, Y es hereditariamente unicoherente. □

El siguiente ejemplo muestra que las funciones abiertas y los retractos no preservan la unicoherencia. Sin embargo, veremos en el siguiente capítulo que los retractos preservan la unicoherecia siempre y cuando el espacio de partida sea localmente conexo.

Ejemplo 2.10. Sean $C = \{2e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$, $S_1 = \{(1 + \frac{1}{(\theta+2)})e^{i\theta} : \theta \geq 0\}$ y $S_2 = \{(2 - \frac{1}{(2-\theta)})e^{i\theta} : \theta \leq 0\}$. Definamos el continuo $Y = S^1 \cup S_1 \cup S_2 \cup C$, como mostramos en la Figura 2.6.

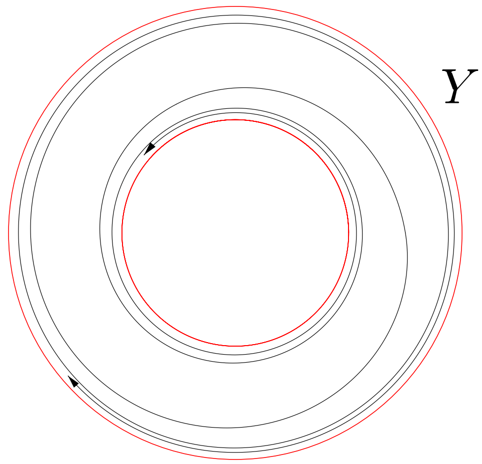

Figura 2.6: Ilustración del Ejemplo 2.10

Analicemos la unicoherencia de Y. Los subcontinuos propios A y B tales que $Y = A \cup B$, son de la forma $A = C \cup \{(1 + \frac{1}{(\theta+2)})e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq t\} \cup \{(2 - \frac{1}{(2-\theta)})e^{i\theta} : \theta \leq 0\}$ y $B = S^1 \cup \{(1 + \frac{1}{(\theta+2)})e^{i\theta} : \theta \geq 0\} \cup \{(2 - \frac{1}{(2-\theta)})e^{i\theta} : -s \leq \theta \leq 0\}$, donde s y t son reales positivos. Entonces tenemos que $A \cap B = \{(1 + \frac{1}{(\theta+2)})e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq t\} \cup \{(2 - \frac{1}{(2-\theta)})e^{i\theta} : -s \leq \theta \leq 0\}$ es conexo y por lo tanto Y es unicoherente. Además no es hereditariamente unicoherente ya que contiene a S^1 como subcontinuo.

Ahora si tomamos $f : Y \to S^1$ la proyección radial, definida por $f(y) = \frac{y}{|y|}$, para todo $y \in Y$. Tenemos una función abierta y una retracción de Y en S^1. Luego las funciones abiertas y las retracciones no preservan unicoherencia.

El siguiente ejemplo es una función del solenoide diádico $\sum_2$ a S^1, la cual será una función abierta; es decir, a continuación mostramos otro ejemplo de una función abierta que tampoco preserva unicoherencia.

Ejemplo 2.11. Sea $\sum_2$ el solenoide diádico, definido en el Ejemplo 1.31, con $p = 2$. Sea $f : \sum_2 \to S^1$ la proyección definida por $f((z_n)_{n=1}^{\infty}) = z_1$. Como f_n^{n+1} son funciones abiertas, entonces, por el Corolario 1.25, f es una función abierta. Además, como $\sum_2$ es unicoherente y S^1 no es unicoherente, tenemos que f no preserva unicoherencia.

Nótese que en el ejemplo anterior podemos cambiar 2 por cualquier p y la conclusión sigue siendo válida.

2.3. Productos y límites inversos

En esta sección estudiaremos la unicoherencia y unicoherencia hereditaria en productos y límites inversos de continuos. Particularmente, mostraremos que el producto de continuos unicoherentes no es unicoherente y demostraremos que el límite inverso de continuos unicoherentes o hereditariamente unicoherentes es unicoherente o hereditariamente unicoherente, respectivamente.

Teorema 2.12. *Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia se continuos. Si $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es unicoherente, entonces X_n es unicoherente para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\pi_n : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to X_n$ la función proyección, definida por $\pi_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $\pi_n^{-1}(x_n)$ es homeomorfo a $\prod_{i \neq n} X_i$, para cada $x_n \in X_n$. Así, $\pi_n^{-1}(X_n)$ es conexo y por el Teorema 1.34, π_n es monótona. Ahora nuestro teorema se sigue del Corolario 2.7. $\square$

La siguiente proposición nos muestra que no siempre se tiene que el producto de continuos unicoherentes es unicoherente.

Proposición 2.13. *Existe un continuo unicoherente X tal que $Y = X \times X$ no es unicoherente.*

Demostración. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, denotemos por $[\theta]$ el mayor entero menor o igual a θ. Definimos $X = S^1 \cup \left\{ \left(1 + e^{-\theta}\right) e^{i\theta} : \theta \geq 0 \right\}$ (ver Figura 2.4). Como vimos en el Ejemplo 2.4, X es un continuo unicoherente. Probemos que $Y = X \times X$ no es unicoherente. Sean:

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ (r_1 e^{i\theta_1},\ r_2 e^{i\theta_2}) \in Y : [(\theta_1 - \theta_2)/\pi] \text{ es par} \right\}, \\
B &= \left\{ (r_1 e^{i\theta_1},\ r_2 e^{i\theta_2}) \in Y : [(\theta_1 - \theta_2)/\pi] \text{ es impar} \right\}, \\
H &= \left\{ (r_1 e^{i\theta_1},\ r_2 e^{i\theta_2}) \in Y : (\theta_1 - \theta_2)/\pi \text{ es entero par} \right\}, \\
K &= \left\{ (r_1 e^{i\theta_1},\ r_2 e^{i\theta_2}) \in Y : (\theta_1 - \theta_2)/\pi \text{ es entero impar} \right\}.
\end{aligned}$$

Probemos que A es conexo. Observe que $H \cap (S^1 \times S^1) = \left\{ (e^{i\theta},\ e^{i(\theta + 2\pi k)}) : \theta \in \mathbb{R} \text{ y } k \in \mathbb{Z} \right\}$ es un conjunto conexo.

Ahora dado un punto $p = (e^{i\theta_1},\ e^{i\theta_2})$ en $A \cap (S^1 \times S^1)$, existe un entero s tal que $\theta_2 + 2\pi s \leq \theta_1 < \theta_2 + (2s+1)\pi$, es decir,

$$2s \leq \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} < 2s + 1.$$

Entonces el conjunto $\left\{\left(e^{i(t\theta_1+(1-t)(\theta_2+2\pi s))},\ e^{i\theta_2}\right) : 0 \leq t \leq 1\right\}$ esta contenido en $A\cap(S^1 \times S^1)$ y es conexo. Además, contiene el punto p e intercepta a $H \cap (S \times S)$, pues,

$$\begin{aligned} 2st &\leq t\frac{(\theta_1-\theta_2)}{\pi} < (2s+1)t, \\ 2st+2s(1-t) &\leq t\frac{(\theta_1-\theta_2)}{\pi} + 2s(1-t) < (2s+1)t + 2s(1-t), \\ 2s &\leq \frac{t(\theta_1-\theta_2)+2\pi s(1-t)}{\pi} < 2s+t, \qquad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

$$t(\theta_1-\theta_2)+2\pi s(1-t) = (t\theta_1+(1-t)(\theta_2+2\pi s)) - \theta_2.$$

Esto prueba que $A \cap (S \times S)$ es conexo.

Tomemos ahora un punto $q \in A$. Supongamos, por ejemplo que q es de la forma $q = ((1+e^{-\theta_1})e^{i\theta_1},\ (1+e^{-\theta_2})e^{i\theta_2})$. Entonces el conjunto

$$\left\{\left((1+e^{-\theta_1-t})e^{i(\theta_1+t)},\ (1+e^{-\theta_2-t})e^{i(\theta_2+t)}\right)\ :\ t \geq 0\right\},$$

es conexo, intercepta a A, contiene el punto q y su clausura contiene puntos de $A \cap (S \times S)$. Esto prueba que A es conexo. En forma similar probamos que B es conexo. Además, $Cl_Y(A) = A \cup K$, $Cl_Y(B) = B \cup H$, $Y = Cl_Y(A) \cup Cl_Y(B)$; K y H son conjuntos cerrados disjuntos de Y y $Cl_Y(A) \cap Cl_Y(B) = H \cup K$. Por lo tanto Y no es unicoherente.

□

En el siguiente capítulo, mostraremos que el producto de dos continuos localmente conexos y unicoherentes, es unicoherente. Ahora para finalizar este capítulo, mostramos que el límite inverso de continuos unicoherentes es unicoherente.

Teorema 2.14. *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa tal que $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ es sobreyectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si X_n es unicoherente para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X_∞ es unicoherente.*

Demostración. Sean A y B dos subcontinuos de X_∞ tales que $X_\infty = A \cup B$. Como las funciones de enlace son sobreyectivas, tenemos que las funciones proyección son sobreyectivas, por la Observación 1.21. Por lo tanto, $X_n = f_n(A) \cup f_n(B)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X_n es unicoherente, $f_n(A) \cap f_n(B)$ es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, por las Proposiciones 1.26 y 1.27, $\left\{f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A)\cap f_{n+1}(B)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa de continuos. Además, su límite inverso es un continuo, por la Proposición 1.23.

Como $A \cap B = \varprojlim \left\{ f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A) \cap f_{n+1}(B)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ (ver Proposición 1.27), $A \cap B$ es conexo. De lo anterior X_∞ es unicoherente. □

Ahora con un argumento similar mostramos que el límite inverso de continuos hereditariamente unicoherentes es hereditariamente unicoherente.

Teorema 2.15. *Sea* $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión inversa tal que* $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ *es una función continua, para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Si* X_n *es hereditariamente unicoherente para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* X_∞ *es hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos de X_∞. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \cap B$ es conexo. Ahora, supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(A)$ y $f_n(B)$ son dos subcontinuos de X_n tales que $f_n(A) \cap f_n(B) \neq \emptyset$. Dado que cada X_n es hereditariamente unicoherente, $f_n(A) \cap f_n(B)$ es conexo.

Por lo tanto, $\left\{ f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A) \cap f_{n+1}(B)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa de continuos cuyo límite inverso es un continuo, por las Proposiciones 1.23, 1.26 y 1.27. Como $A \cap B = \varprojlim \left\{ f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A) \cap f_{n+1}(B)} \right\}_{n=1}^{\infty}$, $A \cap B$ es conexo. Por lo tanto, X_∞ es hereditariamente unicoherente. □

Capítulo 3

Logaritmos y productos

Hay muchos espacios para los cuales es muy difícil determinar si son o no unicoherentes utilizando sólo la definición. Así, desde los primeros tiempos del estudio de la unicoherencia, fue necesario desarrollar caracterizaciones alternativas. Por esta razón el uso de funciones continuas en el círculo S^1 se convirtió en una alternativa para estudiar unicoherencia en continuos localmente conexos. Esta alternativa fue presentada en 1931 por K. Borsuk en [2] y ampliamente desarrollado por S. Eilenberg en [6], [7] y [8].

Este capítulo está dedicado al estudio de funciones continuas a la circunferencia, definimos cuando una función tiene logaritmo continuo, se caracterizan los continuos unicoherentes y localmente conexos con las funciones que tienen logaritmo continuo. Estudiamos propiedades de estas funciones y por último, probamos que el producto de continuos unicoherentes y localmente conexos es unicoherente.

3.1. Funciones inesenciales y logaritmos

Esta sección está dedicada al estudio de funciones esenciales e inesenciales y funciones a la circunferencia con logaritmo continuo. Estos conceptos nos permitirán mostrar caracterizaciones de la unicoherencia y probar algunos resultados adicionales.

Definición 3.1. Sean X y Y espacios topólogicos. Una *homotopía* es una función continua $h : X \times [0,1] \to Y$. Dadas $f, g : X \to Y$ funciones continuas, diremos que f es *homotópica* a g si existe una homotopía $h : X \times [0,1] \to Y$ tal que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Intuitivamente, dos funciones f y g son homotópicas si f se deforma a g de manera continua. Es fácil demostrar que en la familia de funciones continuas $C(X,Y)$, la relación "ser homotópica a" es una relación de equivalencia. Esta relación determina propiedades topológicas de los espacios; en particular, nos servirá para determinar unicoherencia en continuos.

Ejemplo 3.2. Sean X y Y espacios topólogicos, y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Si Y es convexo y $H : X \times [0,1] \to Y$ es definida por $H(x,t) = (t-1)f(x) + tg(x)$, entonces H es una homotopía y f es homotópica a g.

En espacios arcoconexos, las funciones constantes determinan una única clase en la relación descrita con la homotopía. Las funciones relacionadas en esta clase, son las funciones que usaremos para describir unicoherencia y se les llaman funciones inesenciales, como presentamos en la siguiente definición.

Definición 3.3. Sean X y Y espacios topólogicos. Una función $f : X \to Y$ se dice *esencial* si f no es homotópica a una función constante de X a Y. Una función $f : X \to Y$ se dice *inesencial* si f no es esencial.

Proposición 3.4. *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si f es inesencial, entonces $f|_Z : Z \to Y$ es inesencial, para todo $Z \subset X$.*

Demostración. Como f es inesencial, existe $h : X \times [0,1] \to Y$ es una homotopía tal que, para todo $x \in X$, $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = q$, para algún punto fijo $q \in Y$. Entonces consideremos $g = h|_{Z\times[0,1]}$. Es claro que g es continua, $g(x,0) = f|_Z(x)$ y $g(x,1)$ es constante. Así, $f|_Z : Z \to Y$ es inesencial. □

En cursos básicos se define la función logaritmo, como una función en $[0,+\infty)$ tal que compuesta con la función exponencial, obtenemos la identidad. Este concepto lo podemos extender a cualquier función $f : X \to S^1$, cuando X es un continuo, como mostramos a continuación.

Definición 3.5. Sea $f : X \to S^1$ una función continua. Diremos que f tiene *logaritmo continuo* si existe una función continua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$, para todo $x \in X$.

Además, diremos que el espacio X tiene la propiedad de logaritmo continuo, cuando f tiene logaritmo continuo para cualquier función continua $f : X \to S^1$.

Note que si $f : X \to S^1$ es una función constante, entonces f tiene logaritmo continuo, ya que es fácil encontrar una función constante $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$. Así, podemos decir que un espacio con un único punto, tiene la propiedad de logaritmo continuo.

3.1.1. Propiedades generales de funciones continuas en S^1.

En esta sección desarrollamos primero algunas proposiciones que enuncian algunas propiedades elementales de los números complejos en S^1. Para cada z_1 y z_2 en S^1 tales que $|z_1 - z_2| < 2$, denotamos por $[z_1, z_2]$ el ángulo agudo (con su signo) que debe realizar el vector $\overrightarrow{0z_1}$ hasta que coincida con el vector $\overrightarrow{0z_2}$. Nótese que como $|z_1 - z_2| < 2$, $z_1 \neq -z_2$. Así, $[z_1, z_2]$ siempre existe y es un valor en $(-\pi, \pi)$.

Proposición 3.6. *Sean z_1 y z_2 puntos en S^1, si $|z_1 - z_2| < 2$, entonces $e^{i[z_1,z_2]} = \frac{z_2}{z_1}$.*

Demostración. Sean z_1 y z_2 en S^1. Tenemos que $z_1 = e^{i\theta_1}$ y $z_2 = e^{i\theta_2}$, donde $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$. Note que $[z_1, z_2] = \theta_2 - \theta_1 + 2\pi k$, donde $k \in \{-1, 0, 1\}$ tal que $|[z_1, z_2]| < \pi$. Entonces

$$e^{i[z_1,z_2]} = e^{i(\theta_2-\theta_1+2\pi k)} = e^{i\theta_2} \cdot e^{i(2\pi k)} \cdot e^{-i\theta_1} = \frac{e^{i\theta_2} \cdot e^{i(2\pi k)}}{e^{i\theta_1}} = \frac{e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

□

Proposición 3.7. *Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en S^1. Si* diám$\{z_1, z_2, \ldots z_n\} < 1$, *entonces* $\sum_{i=1}^{n-1}[z_i, z_{i+1}] = [z_1, z_n]$.

Demostración. Como diám$\{z_1, z_2, \ldots z_n\} < 1$, hay un semicírculo que contiene al conjunto $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ y diám$\{z_i, z_j\} < 1$ para cada $i \neq j$. Por la Proposición 3.6, tenemos:

$$e^{i([z_1,z_2]+[z_2,z_3])} = e^{i[z_1,z_2]} \cdot e^{i[z_2,z_3]} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_3}{z_1} = e^{i[z_1,z_3]}.$$

Nuevamente, como diám$\{z_i, z_j\} < 1$ para cada $i \neq j$, tenemos que $|[z_1, z_2] + [z_2, z_3]| < \pi$ y $|[z_1, z_3]| < \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto $[z_1, z_2] + [z_2, z_3] = [z_1, z_3]$.

Supongamos que $\sum_{i=1}^{n-2}[z_i, z_{i+1}] = [z_1, z_{n-1}]$. Mostraremos que $\sum_{i=1}^{n-1}[z_i, z_{i+1}] = [z_1, z_n]$. Como diám$\{z_i, z_j\} < 1$ para cada $i \neq j$, tenemos de manera inductiva:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-2}[z_i, z_{i+1}] &= [z_1, z_{n-1}] \\
\sum_{i=1}^{n-2}[z_i, z_{i+1}] + [z_{n-1}, z_n] &= [z_1, z_{n-1}] + [z_{n-1}, z_n] \\
\sum_{i=1}^{n-2}[z_i, z_{i+1}] &= [z_1, z_n].
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.8. *Sea X un espacio conexo. Si $\varphi_1, \varphi_2 : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $e^{i\varphi_1(x)} = e^{i\varphi_2(x)}$, para todo $x \in X$, entonces existe un entero k tal que $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 2k\pi$, para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $h : X \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))/2\pi$, para todo $x \in X$. Probemos que h toma solo valores enteros. Supongamos que existe $x_0 \in X$, tal que $h(x_0) = r$, donde $r \notin \mathbb{Z}$. Tenemos que $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) + 2r\pi$ y

$$e^{i\varphi_1(x_0)} = e^{i(\varphi_2(x_0)+2r\pi)} = e^{i\varphi_2(x_0)} \cdot e^{i(2r\pi)}.$$

Por lo anterior, $e^{i(2r\pi)} = 1$. Así, r debe ser un entero, contradicción. De lo anterior h solo toma valores enteros. Como X es conexo y h es continua, tenemos que existe un entero k tal que $h(x) = (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))/2\pi = k$ para todo $x \in X$. Entonces $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 2k\pi$ para todo $x \in X$. $\square$

Proposición 3.9. *Sean X un espacio conexo y $f : X \to S^1$ una función continua tal que* diám$\{f(X)\} < 1$. *Si existe $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$, para cada $x \in X$, entonces* diám$\{\varphi(X)\} \leq \pi \cdot$ diám$\{f(X)\}$.

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Definamos $\psi : X \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = \varphi(x_0) + [f(x_0), f(x)], \text{ para cada } x \in X.$$

Tenemos que $e^{i\psi(x)} = e^{i\varphi(x_0)}e^{i[f(x_0),f(x)]} = f(x_0) \cdot \frac{f(x)}{f(x_0)} = f(x) = e^{i\varphi(x)}$, por Proposición 3.6. Además, $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$. Así, por la conexidad de X y la Proposición 3.8, $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in X$. Como $|[f(x_0), f(x)] - [f(x_0), f(y)]| \leq |\,[f(x_0), f(x)] - [f(x_0), f(x_0)]\,| + |\,[f(x_0), f(x_0)] - [f(x_0), f(y)]\,| = |[f(x_0), f(x)]| + |[f(x_0), f(y)]|$, tenemos que:

$$\text{diám}\,[\varphi(X)] \leq 2 \sup_{x \in X} |[f(x_0), f(x)]| \leq 2 \sup_{x \in X} \frac{\pi}{2} |f(x_0) - f(x)| \leq \pi \cdot \text{diám}\,[f(X)]\,.$$

$\square$

La siguiente proposición la usaremos entre otras cosas, en la siguiente sección para mostrar que S^{n+1} es unicoherente para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.10. *Sean X_1 y X_2 espacios cerrados (o abiertos) tales que $X_1 \cap X_2$ es conexo y $f : X_1 \cup X_2 \to S^1$ una función continua, donde $f|_{X_1}$ y $f|_{X_2}$ tienen logaritmo continuo. Entonces f tienen logaritmo continuo en $X_1 \cup X_2$.*

Demostración. Sean $\varphi_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ y $\varphi_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) = e^{i\varphi_1(x)}$, para todo $x \in X_1$, y $f(x) = e^{i\varphi_2(x)}$, para todo $x \in X_2$. Como $X_1 \cap X_2$ es conexo, por la Proposición 3.8, existe un entero k tal que $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 2k\pi$ para todo $x \in X_1 \cap X_2$. Sea

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{para } x \in X_1; \\ \varphi_2(x) + 2k\pi, & \text{para } x \in X_2. \end{cases}$$

Entonces $f(x) = e^{i\varphi(x)}$ para todo $x \in X_1 \cup X_2$ y $\varphi : X_1 \cup X_2 \to \mathbb{R}$ es continua, por [16, Teorema 18.3]. Por consecuencia f tiene logaritmo continuo en $X_1 \cup X_2$. $\square$

Lema 3.11. *Sean $z_0 \in \mathbb{R}$ y $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ un sucesión en $\mathbb{R}$. Si $|z_0 - z_n| \leq \pi$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} e^{iz_n} = e^{iz_0}$, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.*

Demostración. Sea $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = w$, para algún $w \in [z_0 - \pi, z_0 + \pi]$. Como $\lim_{n\to\infty} e^{iz_n} = e^{iz_0}$, $\lim_{n\to\infty} e^{iz_{n_k}} = e^{iz_0}$. Además, como $g(z) = e^{iz}$ es continua, $\lim_{n\to\infty} e^{iz_n} = e^{iw}$. Así, $w - z_0 = 2\pi m$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, $|w - z_0| < \pi$. De lo anterior, $w = z_0$. Como $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ fue una subsucesión convergente arbitraria de $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. $\square$

El siguiente teorema es uno de las más importantes en esta sección; lo utilizaremos más adelante para mostrar la unicoherencia en el producto de espacios localmente conexos unicoherentes.

Teorema 3.12. *Sea $f : X \times Y \to S^1$ una función continua entre continuos, tales que:*

1. *Y es localmente conexo,*
2. *f tiene logaritmo continuo en $\{x\} \times Y$, para todo $x \in X$,*
3. *f tiene logaritmo continuo en $X \times \{w\}$, para algún $w \in Y$.*

Entonces f tiene logaritmo continuo en $X \times Y$.

Demostración. Sabemos de (*3*) que existe una función $\varphi_0 : X \times \{w\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, w) = e^{i\varphi_0(x)}$, para todo $x \in X$. De (*2*), existe para todo $x \in X$ una función ψ_x :

$\{x\} \times Y \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = e^{i\psi_x(y)}$, para todo $(x,y) \in X \times Y$. Como $e^{i\psi_x(w)} = e^{i\varphi_0(x)}$ entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\psi_x(w) = \varphi_0(x)$ para todo $x \in X$. Así, definimos $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}$ por $\varphi(x,y) = \psi_x(y)$ para todo $(x,y) \in X \times Y$. Es claro que $f(x,y) = e^{i\varphi(x,y)}$. Luego debemos demostrar que φ es una función continua. Sean $(x_0,y_0) \in X \times Y$ y $((x_n,y_n))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $X \times Y$, tales que $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_x) = (x_0,y_0)$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n,y_n) = \varphi(x_0,y_0)$.

1. Supongamos primero que $y_0 = w$. Como f es continua, $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = f(x_0,w)$. Por el Lema 3.11, es suficiente probar que $|\varphi(x_n,y_n) - \varphi(x_0,w)| \leq \pi$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Supongamos que existe una subsucesión $((x_{n_k},y_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ tal que $|\varphi(x_{n_k},y_{n_k}) - \varphi(x_0,w)| > \pi$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como f es continua y Y es localmente conexo, existe un abierto conexo U de Y que satisface:

   a) $w \in U$;
   b) $\text{diám}\{f(\{x_{n_k}\} \times U)\} < \frac{1}{4}$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
   c) $\text{diám}\{f(\{x_0\} \times U)\} < \frac{1}{4}$.

   Nótese que los conjuntos $f(\{x_{n_k}\} \times U)$ y $f(\{x_0\} \times U)$ son conexos de S^1. Por otra parte, como $\varphi|_{\{x_{n_k}\}\times U}$ y $\varphi|_{\{x_0\}\times U}$ son continuas, $\varphi(\{x_{n_k}\} \times U)$ y $\varphi(\{x_0\} \times U)$ son conexos en $\mathbb{R}$. Así, por la Proposición 3.9, tenemos que $\text{diám}\{\varphi(\{x_{n_k}\} \times U)\} < \frac{\pi}{4}$ y $\text{diám}\{\varphi(\{x_0\} \times U)\} < \frac{\pi}{4}$.

   Como $w \in U$ y $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = w$, sin pérdida de generalidad, podemos decir que $y_{n_k} \in U$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Más aun, si z es cualquier punto de U, entonces:

   $|(\varphi(x_{n_k},z) - \varphi(x_{n_k},y_{n_k})) + (\varphi(x_0,w) - \varphi(x_0,z))| \leq |\varphi(x_{n_k},z) - \varphi(x_{n_k},y_{n_k})| + |\varphi(x_0,w) - \varphi(x_0,z)| < \frac{\pi}{2}$. Además, $|\varphi(x_{n_k},y_{n_k}) - \varphi(x_0,w)| > \pi$. Así, $\pi - \frac{\pi}{2} < |\varphi(x_{n_k},y_{n_k}) - \varphi(x_0,w)| - |\varphi(x_{n_k},z) - \varphi(x_{n_k},y_{n_k}) + \varphi(x_0,w) - \varphi(x_0,z)| \leq |\varphi(x_{n_k},z) - \varphi(x_0,z)|$, para cualquier $z \in U$. En particular $|\varphi(x_{n_k},z) - \varphi(x_0,z)| > \frac{\pi}{2}$. Pero, lo anterior contradice la continuidad de $\varphi|_{X\times\{w\}} = \varphi_0$, pues $\lim_{k\to\infty} \varphi(x_{n_k},w) = \varphi(x_0,w)$.

2. Supongamos ahora que $y_0 \neq w$. Veamos que $\varphi|_{X\times\{y_0\}}$ es continua. Como f es continua y $X \times Y$ es compacto, por [5, Teorema 4.6, pág 234], f es uniformemente continua. Así, existe $\delta > 0$ tal que si $|(x,y) - (x_0,w)| < \delta$, entonces $|f(x,y) - f(x_0,w)| < \frac{1}{4}$. Sea $((x_n,y_0))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $X \times \{y_0\}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_0) = (x_0,y_0)$. Veamos que $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_0) = (x_0,y_0)$.

Como Y es localmente conexo, existen abiertos conexos $U_1, U_2, \ldots, U_k$ de Y tales que:

a) $w \in U_1$ y $y_0 \in U_k$;

b) $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, \ldots k-1\}$;

c) $\text{diám}\{U_i\} < \frac{\delta}{2}$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Sea $z_2 \in U_2$. Probemos que $\varphi|_{X\times\{z_2\}}$ es continua en (x_0, z_0). Sea $((x_n, z_2))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n, z_2) = (x_0, z_2)$. Veamos que $|\varphi(x_n, z_2) - \varphi(x_0, z_2)| \leq \pi$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $U_1 \cup U_2$ es conexo y $\text{diám}\{U_1 \cup U_2\} < \delta$, entonces $\text{diám}\{f(\{x_n\} \times U_1 \cup U_2)\} < \frac{1}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\text{diám}\{f(\{x_0\} \times U_1 \cup U_2)\} < \frac{1}{4}$. Nuevamente, por la Proposición 3.9, $\text{diám}\{\varphi(\{x_n\} \times U_1 \cup U_2)\} < \frac{\pi}{4}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\text{diám}\{\varphi(\{x_0\} \times U_1 \cup U_2)\} < \frac{\pi}{4}$. Luego,

$$\begin{aligned}|\varphi(x_n, z_2) - \varphi(x_0, z_2)| &\leq |\varphi(x_n, z_2) - \varphi(x_n, w)| + |\varphi(x_n, w) - \varphi(x_0, w)| \\ &\quad + |\varphi(x_0, w) - \varphi(x_0, z_2)| \\ &\leq \frac{\pi}{4} + |\varphi(x_n, w) - \varphi(x_0, w)| + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Como $\varphi|_{X\times\{w\}}$ es continua y $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x_0$, podemos suponer que $|\varphi(x_n, w) - \varphi(x_0, w)| < \frac{\pi}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $|\varphi(x_n, z_2) - \varphi(x_0, z_2)| \leq \pi$ y $\varphi|_{X\times\{z_2\}}$ es continua, por el Lema 3.11.

Para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, sea $z_k \in U_k$. De manera inductiva, podemos concluir que $\varphi|_{X\times\{z_{k-1}\}}$ es continua. Luego, con el mismo procedimiento, concluimos que $\varphi|_{X\times\{y_0\}}$ es continua.

Finalmente, por el procedimiento realizado en el caso 1, concluimos que φ es continua en todo punto (x_0, y_0) de $X \times Y$ y f tiene logaritmo continuo en $X \times Y$.

□

3.2. Unicoherencia y logaritmo continuo

En esta sección nos dedicamos al estudio de la unicoherencia en continuos usando las funciones esenciales e inesenciales en la circunferencia y relacionando con los logaritmos continuos. Además llegaremos a probar que la unicoherencia, los logaritmos continuos y las funciones inesenciales están relacionadas. El siguiente lema lo utilizamos para mostrar el Teorema 3.14, el cual relaciona las funciones inesenciales con las funciones con logaritmo continuo.

Lema 3.13. *Sean X un espacio y $f, g : X \to S^1$ funciones continuas. Si f tienen logaritmo continuo y $|f(x) - g(x)| < 2$, para todo x en X, entonces g tiene logaritmo continuo.*

Demostración. Sea $\varphi_1 : X \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = e^{i\varphi_1(x)}$, para todo $x \in X$. Como $|f(x) - g(x)| < 2$ para todo $x \in X$, podemos definir $[f(x), g(x)]$. Entonces al hacer $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) + [f(x), g(x)]$, obtenemos una función continua de X a $\mathbb{R}$. Debemos ver que φ_2 es logaritmo continuo de g. Como

$$e^{i\varphi_2(x)} = e^{i\varphi_1(x)} \cdot e^{i[f(x),g(x)]} = f(x) \cdot \frac{g(x)}{f(x)} = g(x),$$

tenemos que $g(x) = e^{i\varphi_2(x)}$, para todo $x \in X$. $\square$

El siguiente teorema relaciona las funciones con logaritmo continuo y las funciones inesenciales.

Teorema 3.14. *Sea $f : X \to S^1$ una función continua. Entonces f tienen logaritmo continuo si y solo si f es inesencial.*

Demostración. Supongamos que existe $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$, para todo $x \in X$. Sea $h : X \times [0,1] \to S^1$ definida por $h(x,t) = e^{it\varphi(x)}$, para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$. Es claro que h es continua; es decir h es una homotopía. Además, $h(x,0) = 1$ y $h(x,1) = e^{i\varphi(x)} = f(x)$, para cada $x \in X$. Así, f es homotópica a una función constante y por tanto, inesencial.

Sea $k : X \times [0,1] \to S^1$ una homotopía tal que, para todo $x \in X$, $k(x,0) = f(x)$ y $k(x,1) = q$, para algún punto fijo $q \in S^1$. Para cada $t \in [0,1]$, sea $k_t : X \to S^1$ definida por $k_t(x) = k(x,t)$, para todo $x \in X$.

Dado que k es uniformemente continua, existe un numero finito de puntos $t(i) \in [0,1]$, $0 = t(1) < t(2) < \cdots < t(n) = 1$ tales que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$,

$$\left|k_{t(i)}(x) - k_{t(i+1)}(x)\right| < 2, \text{ para todo } x \in X. \tag{3.1}$$

Como $k_{t(n)} = k_1$ lo cual es una función contante, es evidente que $k_{t(n)}$ tiene logaritmo continuo. Entonces por (3.1) y el Lema 3.13, $k_{t(n-1)}$ tiene logaritmo continuo. Repitiendo este argumento, tenemos que $k_{t(n-2)}$ tiene logaritmo continuo (siempre, por supuesto que $n \geq 3$). Continuando con un número finito de pasos, tenemos que $k_{t(1)} = f$ tiene logaritmo continuo. $\square$

A continuación mostramos nuestro primer ejemplo de función esencial.

Ejemplo 3.15. Sea $id : S^1 \to S^1$ la función identidad. Veamos que id es esencial. Supongamos que id es inesencial. Entonces existe $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ continua, tal que $id = e^{i\varphi(z)}$, para todo $z \in S^1$, por el Teorema 3.14. Nótese que $\varphi(S^1)$ es conexo y compacto. Veamos que diám$\{\varphi(S^1)\} = 2\pi$. Si diám$\{\varphi(S^1)\} < 2\pi$, entonces $e^{i\varphi(z)}$ no es sobreyectiva y si diám$\{\varphi(S^1)\} > 2\pi$, entonces existe un $z \in S^1$ tal que $e^{i\varphi(z)} = e^{i(\varphi(z)+2\pi)}$ lo cual contradice que $id = e^{i\varphi(z)}$. Así, diám$\{\varphi(S^1)\} = 2\pi$ y $\varphi(S^1) = [a, a+2\pi]$. Como φ es sobre, existe z_1 y z_2 en S^1 tales que $\varphi(z_1) = a$, $\varphi(z_2) = a + 2\pi$. Como $z_1 \neq z_2$, entonces $id(z_1) \neq id(z_2)$, pero $e^{ia} = e^{i(a+2\pi)}$ es claramente una contradicción. Así, $id : S^1 \to S^1$ es esencial.

Después de ver que las funciones a la circunferencia y las funciones inesenciales son equivalentes. Mostraremos la relación que hay entre X un espacio unicoherente y las funciones inesenciales. Denotamos $\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} |x - y|$.

Teorema 3.16. *Sea X un continuo. Si f tiene logaritmo continuo en X para cualquier función continua $f : X \to S^1$, entonces X es unicoherente.*

Demostración. Supongamos que X no es unicoherente. Entonces existen dos subcontinuos X_1 y X_2 tales que $X = X_1 \cup X_2$ y $X_1 \cap X_2$ no es conexo. Sean P_1 y P_2 dos conjuntos cerrados disjuntos distintos del vació, tales que $X_1 \cap X_2 = P_1 \cup P_2$. Definamos, para cada $x \in X$,

$$\psi(x) = \pi \frac{\varrho(x, P_1)}{\varrho(x, P_1) + \varrho(x, P_2)}.$$

Además definimos

$$f(x) = \begin{cases} e^{i\psi(x)}, & \text{si } x \in X_1; \\ e^{-i\psi(x)}, & \text{si } x \in X_2. \end{cases}$$

Note que $\psi(x) = 0$ si $x \in P_1$ y $\psi(x) = \pi$ para $x \in P_2$. Por lo tanto, f esta bien definida. Como f tiene logaritmo continuo en X, existe una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$, para todo $x \in X$. Entonces tenemos que $e^{i\psi(x)} = e^{i\varphi(x)}$ para todo $x \in X_1$ y $e^{-i\psi(x)} = e^{i\varphi(x)}$ para todo $x \in X_2$. Además, existen dos enteros k_1 y k_2 tales que $\varphi(x) = \psi(x) + 2k_1\pi$ para cada $x \in X_1$ y $\varphi(x) = -\psi(x) + 2k_2\pi$ para todo $x \in X_2$, por la Proposición 3.8. Sean $x_1 \in P_1$ y $x_2 \in P_2$. Tenemos que $\psi(x_1) = 0$ y $\psi(x_2) = \pi$. Sustituyendo x_1 y x_2 en $\varphi(x)$, se obtiene por una parte $\varphi(x_1) = \psi(x_1) + 2k_1\pi = 2k_1\pi < \pi + 2k_1\pi = \psi(x_2) + 2k_1\pi = \varphi(x_2)$, es decir $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$; en segundo lugar $\varphi(x_1) = -\psi(x_1) + 2k_2\pi = 2k_2\pi > -\pi + 2k_2\pi = -\psi(x_2) + 2k_2\pi = \varphi(x_2)$, es decir $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$; pero esto es claramente una contradicción. Así, $X_1 \cap X_2$ es conexo y X es unicoherente. $\square$

Ejemplo 3.17. Sea $X = S^1 \cup \{\left(1 + e^{-\theta}\right) e^{i\theta} : \theta \geq 0\}$. Como vimos en el Ejemplo 2.4, X es unicoherente. Ahora si tomamos $r : X \to S^1$ la proyección radial, definida por $r(x) = \frac{x}{|x|}$, para todo $x \in X$, tenemos una retracción de X en S^1. Veamos que r es esencial. Supongamos lo contrario; es decir, r es inesencial. Por la Proposición 3.4, $r|_{S^1} : S^1 \to S^1$ es inesencial, pero como vimos en el Ejemplo 3.15, r es esencial el cual es una contradicción. Así, r es esencial, es decir r no tiene logaritmo continuo.

El recíproco del Teorema 3.16 se tiene si el espacio es localmente conexo, como mostramos en el siguiente teorema. Pero antes definamos que es una cadena en un espacio X.

Definición 3.18. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ una familia de conjuntos conexos de X. Diremos que $\mathcal{C}$ es una *cadena* siempre que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ si $|i - j| \leq 1$. Si $z \in C_1$ y $w \in C_n$ diremos que $\mathcal{C}$ es una cadena de z a w. Además, si $C_1 \cap C_n \neq \emptyset$ diremos que $\mathcal{C}$ es una *cadena cerrada*.

Teorema 3.19. *Sea X un continuo localmente conexo. X es unicoherente si y solo si f tiene logaritmo continuo en X, para cualquier función continua $f : X \to S^1$.*

Demostración. En virtud del Teorema 3.16, es suficiente mostrar que, si X es localmente conexo y unicoherente entonces f tiene logaritmo continuo en X, para cualquier función continua $f : X \to S^1$. Sea $f : X \to S^1$ una función continua.

Consideremos una sucesión finita de arcos abiertos $L_1, L_2, \ldots, L_n$ tales que:

1. $S^1 = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$,
2. $\text{diám}(L_i) < \frac{1}{2}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
3. $L_1 \cap L_n \neq \emptyset$ y $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$,
4. $\overline{L}_i \cap \overline{L}_j = \emptyset$ si y solo si $|i - j| > 1$.

Sea $\mathcal{K}_i = \{E \subset X : E$ es una componente de $f^{-1}(L_i)\}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos por $\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i$. Para cada $E \in \mathcal{K}$, E es abierto y conexo, por [5, Teorema 4.2, pág 113].

Afirmación 3.20. Sea $\mathcal{C} = \{D_1, \ldots, D_n\}$ una cadena cerrada de elementos de $\mathcal{K}$ tal que $D_i \neq D_j$ para todo $i \neq j$, con $i, j \in \{2, \ldots, n\}$ y $D_1 = D_n$. Si $x_i \in D_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, entonces $\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i), f(x_{i+1})] = 0$.

Para probar la Afirmación 3.20, veamos primero que diám$\{f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})\} < 1$. Sea D_k un elemento arbitrario de $\mathcal{C}$. Lo cual existe por definición un j tal que $f(D_k) \subset L_j$. Sean

$$R = \bigcup_{D \in \mathcal{K} - \{D_k\}} D \quad \text{y} \quad B = \bigcup_{i \neq k} D_i.$$

Note que B es conexo y $B \subset R$. Ahora sea P la componente de R tal que contiene al conjunto conexo B. Veamos que el conjunto $D_k \cup (R - P)$ es conexo. Note que $X = D_k \cup (R - P) \cup P$ donde cada uno es abierto en X. Supongamos que $D_k \cup (R - P) = E \cup F$ donde E y F son abiertos y $(\overline{E} \cap F) \cup (E \cap \overline{F}) = \emptyset$. Como D_k es conexo, $D_k \subset E$ o $D_k \subset F$. Supongamos que $D_k \subset E$. Por lo tanto $F \subset R - P$. Luego tenemos que $X = (E \cup P) \cup F$, como $E \cap F = \emptyset$ y $P \cap F = \emptyset$, contradice que X es conexo. Por lo tanto $D_k \cup (R - P)$ es conexo. Definamos

$$X_1 = \overline{P} \quad \text{y} \quad X_2 = \overline{D_k \cup (R - P)},$$

subcontinuos de X tales que $X = X_1 \cup X_2$. Veamos $\overline{P} \cap \overline{(R - P)} \cap R = \emptyset$. Como $P \cap (R - P) = \emptyset$, $P \subset X - (R - P)$. Ya que P es abierto y cerrado, tenemos que $\overline{P} \subset X - (R - P)$. Así, $\overline{P} \cap (R - P) = \emptyset$. Por otra parte, $R - P \subset X - P$, por ser P abierto y cerrado, $\overline{R - P} \subset X - P$. Luego, $\overline{R - P} \cap P = \emptyset$. Como $X = (R - P) \cup P \cup D_k$, $\overline{P} \cap \overline{(R - P)} \subset D_k$. Finalmente, como $D_k \cap R = \emptyset$, $\overline{P} \cap \overline{(R - P)} \cap R = \emptyset$. De manera similar $\overline{D}_k \cap \overline{[f^{-1}(L_j) - D_k]} \cap f^{-1}(L_j) = \emptyset$. Los conjuntos P y D_k son respectivamente componentes de los conjuntos abiertos R y $f^{-1}(L_j)$ en X, entonces:

$$\begin{aligned}
X_1 \cap X_2 =& \overline{P} \cap \overline{D_k \cup (R - P)} \\
=& (\overline{P} \cap \overline{D}_k) \cup (\overline{P} \cap \overline{(R - P)}) \\
=& (\overline{P} \cap \overline{D}_k) \cup ((\overline{P} \cap \overline{(R - P)}) \cap (D_k \cup R)) \\
=& (\overline{P} \cap \overline{D}_k) \cup (\overline{P} \cap \overline{(R - P)} \cap D_k) \cup (\overline{P} \cap \overline{(R - P)} \cap R) \\
\subset& \overline{P} \cap \overline{D}_k \\
\subset& \overline{D}_k \cap \overline{R}.
\end{aligned}$$

De esta manera:

$$
\begin{aligned}
X_1 \cap X_2 \subset & \overline{D}_k \cap \overline{R} = \overline{D}_k \cap (\overline{\bigcup_{i \neq j} f^{-1}(L_i)} \cup \overline{[f^{-1}(L_j) - D_k]}) \\
= & (\overline{D}_k \cap \overline{\bigcup_{i \neq j} f^{-1}(L_i)}) \cup (\overline{D}_k \cap \overline{[f^{-1}(L_j) - D_k]}) \\
= (\overline{D}_k \cap \overline{\bigcup_{i \neq j} f^{-1}(L_i)}) & \cup ((\overline{D}_k \cap \overline{[f^{-1}(L_j) - D_k]}) \cap (\bigcup_{i \neq j} f^{-1}(L_i) \cup f^{-1}(L_j))) \\
= (\overline{D}_k \cap \overline{\bigcup_{i \neq j} f^{-1}(L_i)}) & \cup (\overline{D}_k \cap \overline{[f^{-1}(L_j) - D_k]} \cap \bigcup_{i \neq j} f^{-1}(L_i)) \cup (\overline{D}_k \cap \overline{[f^{-1}(L_j) - D_k]} \cap f^{-1}(L_j)) \\
\subset & \overline{D}_k \cap \bigcup_{i \neq j} \overline{f^{-1}(L_i)} \\
\subset & \overline{f^{-1}(L_j)} \cap \bigcup_{i \neq j} \overline{f^{-1}(L_i)} \\
= & f^{-1}(\overline{L}_j \cap \bigcup_{i \neq j} \overline{L}_i).
\end{aligned}
$$

Así, por las condiciones de los L_i, tenemos que $X_1 \cap X_2 \subset f^{-1}(\overline{L}_j \cap \overline{L}_{j-1}) \cup f^{-1}(\overline{L}_j \cap \overline{L}_{j+1})$, con $\overline{L}_{j-1} \cap \overline{L}_{j+1} = \emptyset$.

De la unicoherencia de X, $X_1 \cap X_2$ es conexo. Por lo tanto, se puede suponer que $X_1 \cap X_2 \subset f^{-1}(\overline{L}_j \cap \overline{L}_{j+1})$ y como $B \cap D_k \subset X_1 \cap X_2$, $B \cap D_k \subset f^{-1}(\overline{L}_j \cap \overline{L}_{j+1}) = f^{-1}(\overline{L}_j) \cap f^{-1}(\overline{L}_{j+1})$. Así, $B \cap D_k \subset f^{-1}(\overline{L}_{j+1})$; es decir, $D_{k-1} \cap D_k \cap D_{k+1} \subset f^{-1}(\overline{L}_{j+1})$ y como $f(D_k) \subset L_j$, $f(D_{k-1}) \cup f(D_{k+1}) \subset L_{j+1}$. Luego, sustituyendo k sucesivamente por $1, 2, \ldots, n$ obtenemos que $f(D_1) \cup f(D_2) \cup \cdots \cup f(D_n) \subset L_j \cup L_{j+1}$. Por las condiciones de los L_i, tenemos que

$$\text{diám}\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} < 1.$$

Por la Proposición 3.7, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i), f(x_{i+1})] &= [f(x_1), f(x_2)] + [f(x_2), f(x_3)] + \cdots + [f(x_{n-1}), f(x_n)] \\
&= [f(x_1), f(x_2)] + [f(x_2), f(x_3)] + \cdots + [f(x_{n-1}), f(x_1)] \\
&= [f(x_1), f(x_1)] = 0.
\end{aligned}
$$

En el caso donde $\mathcal{C}$ contenga otros elementos iguales; es decir, cuando $D_k = D_l$, para $1 \leq k < l < n$. Entonces consideremos las cadenas, $D_1, D_2, \ldots, D_k = D_l, D_{l+1}, \ldots, D_n =$

D_1, y $D_k, D_{k+1}, \ldots, D_l = D_k$. Por la Proposición 3.7 y sabiendo que $x_1 = x_n$ y $x_k = x_l$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i), f(x_{i+1})] &= [f(x_1), f(x_2)] + \cdots + [f(x_{k-1}), f(x_k)] + \\
&+ [f(x_k), f(x_{k+1})] + \cdots + [f(x_{l-1}), f(x_l)] + \\
&+ [f(x_l), f(x_{l+1})] + \cdots + [f(x_{n-1}), f(x_n)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i), f(x_{i+1})] &= ([f(x_1), f(x_2)] + \cdots + [f(x_{k-1}), f(x_k)] + \\
&+ [f(x_l), f(x_{l+1})] + \cdots + [f(x_{n-1}), f(x_n)]) \\
&+ ([f(x_k), f(x_{k+1})] + \cdots + [f(x_{l-1}), f(x_l)]) \\
&= [f(x_1), f(x_n)] + [f(x_k), f(x_l)] = 0.
\end{aligned}$$

Con esto completamos la prueba de la Afirmación 3.20.

Como X es conexo, para todo pareja $x', x'' \in X$, existe una cadena que une a x' con x''. Sea $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ una cadena de x' a x'', de elementos de $\mathcal{K}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, sea $x_i \in A_i$. Definamos

$$I(x', x'') = [f(x'), f(x_1)] + \sum_{i=1}^{p-1} [f(x_i), f(x_{i+1})] + [f(x_p), f(x'')]\,. \tag{3.2}$$

Este número existe, porque diám$\{f(A_i)\} < \frac{1}{2}$, para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$. Por la Afirmación 3.20, no es difícil probar que $I(x', x'')$ es independiente de $\mathcal{C}$. Así, $I(x', x'')$ está bien definida.

Como $X = \bigcup_{A \in \mathcal{K}} A$, $I|_A$ es continua para cada $A \in \mathcal{K}$ y por [16, Teorema 18.2], tenemos que I es una función continua.

Sean $x_0 \in f^{-1}(1)$ y una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = I(x_0, x)$, de (3.2) y la Proposición 3.6, tenemos:

$$e^{i\varphi(x)} = e^{iI(x_0,x)} = e^{i[f(x_0),f(x_1)]} \left(\prod_{i=1}^{p-1} e^{i[f(x_i),f(x_{i+1})]} \right) e^{i[f(x_p),f(x)]} =$$

$$= \frac{f(x_1)}{f(x_0)} \left(\prod_{i=1}^{p-1} \frac{f(x_{i+1})}{f(x_i)} \right) \frac{f(x)}{f(x_p)} = \frac{f(x)}{f(x_0)} = f(x).$$

De este modo que f tiene logaritmo continuo en X, para cualquier función continua $f : X \to S^1$.

$\square$

Por los Teoremas 3.14 y 3.19 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.21. *Sea X un continuo localmente conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalente:*

1. *X es unicoherente.*
2. *$f : X \to S^1$ tiene logaritmo continuo, para cada función continua.*
3. *$f : X \to S^1$ es inesencial, para cada función continua.*

3.3. Continuos localmente conexos

En la Proposición 2.13, mostramos un continuo X unicoherente tal que X^2 no es unicoherente; es decir, el producto de dos continuos unicoherentes no necesariamente es unicoherente. En esta sección, además de algunas propiedades relacionadas con la unicoherencia en continuos localmente conexos, mostraremos que el producto de un número finito de continuos unicoherentes y localmente conexos es unicoherente.

Teorema 3.22. *Sean X_1 y X_2 continuos unicoherentes y localmente conexos. Si $X_1 \cap X_2$ es conexo, entonces $X_1 \cup X_2$ es unicoherente.*

Demostración. Sea $f : X_1 \cup X_2 \to S^1$ una función continua. Veamos que f tiene logaritmo continuo. Como X_1 y X_2 son unicoherentes localmente conexos, por el Teorema 3.21, tenemos que f tiene logaritmo continuo en X_1 y X_2. Además, como $X_1 \cap X_2$ es conexo, por la Proposición 3.10, tenemos que f tiene logaritmo continuo en $X_1 \cup X_2$. Por el Teorema 3.21, $X_1 \cup X_2$ es unicoherente. $\square$

Teorema 3.23. *Sean X y Y continuos. Si X y Y son unicoherentes y localmente conexos, entonces $X \times Y$ es unicoherente.*

Demostración. Sea $f : X \times Y \to S^1$ una función continua. Veamos que f tiene logaritmo continuo. Como Y es un continuo unicoherente localmente conexo y por el Teorema 3.21, $f|_{\{x\}\times Y}$ tiene logaritmo continuo en $\{x\} \times Y$, para todo $x \in X$. De forma análoga, tenemos que $f|_{X\times\{y\}}$ tiene logaritmo continuo en $X \times \{y\}$, para todo $y \in Y$. Luego, como

X y Y son localmente conexos y por el Teorema 3.12, tenemos que f tiene logaritmo continuo en $X \times Y$. Finalmente por el Teorema 3.21, $X \times Y$ es unicoherente. $\square$

Corolario 3.24. *Sean $X_1, \ldots, X_n$, son continuos. Si $X_1, \ldots, X_n$, son unicoherentes y localmente conexos, para un $n \in \mathbb{N}$, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es unicoherente.*

Recordemos que $S^n = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : |(x_i)_{i=1}^n| = 1\}$. Ahora, consideremos el conjunto $X_{n+1} = \{(x_i)_{i=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} : \left|(x_i)_{i=1}^{n+1}\right| = 1 \text{ y } x_{n+1} \geq 0\}$ y $D_n = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : |(x_i)_{i=1}^n| \leq 1\}$. Veamos que $\varphi : X_{n+1} \to D_n$, definida por $\varphi((x_i)_{i=1}^{n+1}) = (x_i)_{i=1}^n$ es un homeomorfismo. Es fácil ver que φ es función continua y biyectiva. Veamos que φ^{-1} es continua, entonces para cada $(x_i)_{i=1}^n$ en D_n, tenemos que $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1$. Así, $(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2})$ pertenece a X_{n+1}. Si $\varphi^{-1} : D_n \to X_{n+1}$, definida por $\varphi^{-1}((x_i)_{i=1}^n) = (x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2})$ es una función continua. Por lo tanto, tenemos que X_{n+1} y D_n son homeomorfos. De la misma manera se puede ver que el conjunto $Y_{n+1} = \{(x_i)_{i=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} : \left|(x_i)_{i=1}^{n+1}\right| = 1 \text{ y } x_{n+1} \leq 0\}$ es homeomorfo a D_n. Nótese que $S^{n+1} = X_{n+1} \cup Y_{n+1}$, para $n \geq 1$. Además, $X_{n+1} \cap Y_{n+1} = \{(x_i)_{i=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} : \left|(x_i)_{i=1}^{n+1}\right| = 1 \text{ y } x_{n+1} = 0\}$ es homeomorfo a S^n.

Sabemos que $[0,1]^n$ es el producto cartesiano de n arcos y como mencionamos antes $S^{n+1} = X_{n+1} \cup Y_{n+1}$ es la unión de dos conjuntos homeomorfo a $[0,1]^{n+1}$, y cuya intersección es conexa. Entonces por los Teoremas 3.22 y 3.23, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.25. *Para todo $n = 1, 2, \ldots$, los continuos $[0,1]^n$ y S^{n+1} son unicoherentes.*

Un mejor resultado para el producto de continuos unicoherentes fue demostrado por T. Ganea, el cual dice lo siguiente: *El producto de una familia arbitraria de continuos localmente conexos y unicoherentes es unicoherente*. El cual solo enunciamos, pero una demostración de este teorema se puede encontrar en [9, Teorema 1.3].

Por otro lado como vimos en el Ejemplo 2.10 las retracciones no preservan la unicoherencia. Sin embargo, con el siguiente resultado mostramos que si el espacio es localmente conexo y unicoherente entonces el retracto es unicoherente.

Teorema 3.26. *Sea X un continuo localmente conexo y unicoherente. Si Y es un retracto de X, entonces Y es unicoherente.*

Demostración. Como Y es un retracto, existe una función $r : X \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$. Considere una función continua arbitraria $f : Y \to S^1$. Tenemos que $f \circ r : X \to S^1$ es continua. Como X es unicoherente, por el Teorema 3.21, $f \circ r$ tiene logaritmo continuo en X. Como resultado $f \circ r$ tiene logaritmo continuo en Y, de donde f tiene logaritmo continuo en Y, ya que $(f \circ r)(y) = f(y)$, para cada $y \in Y$. $\square$

Para terminar esta sección definimos cuando un conjunto separa dos puntos en un continuo. Luego relacionamos la unicoherencia con separar puntos en un continuo.

Definición 3.27. Un subconjunto B de X *separa* dos puntos p y q de X si existen conjuntos separados L y M tales que $X - B = L \cup M$, $p \in L$ y $q \in M$. Un subconjunto B *separa irreduciblemente* a p y q, si B separa a p y q y ningún subconjunto propio de B separa a p y q.

Lema 3.28. *Sea X un espacio localmente conexo. Si C es un subconjunto cerrado de X el cual separa dos puntos p y q en X, entonces existe un conjunto cerrado $H \subset C$ tal que separa irreduciblemente a p y q.*

Demostración. Sean R la componente de $X - C$ tal que $p \in R$ y S la componente de $X - Cl(R)$ tal que $q \in S$. Por [13, Teorema 3, pág. 238], tenemos que $Fr(S) \subset Fr(R) \cap C$, pues $q \in S$ y $p \in X - Cl(S)$. Luego se sigue que $H = Fr(S)$ separa a p y q. Sea D un conjunto propio de H tal que D separa irreduciblemente a p y q. Note que $X - D = (X - Cl(S)) \cup (S \cup (Fr(S) - D))$ y $(X - Cl(S)) \cap (S \cup (Fr(S) - D)) \neq \emptyset$. Así, $X - D$ es conexo y H separa irreduciblemente a p y q. $\square$

Lema 3.29. *Sea X un espacio localmente conexo. Si A y B son subconjuntos cerrados disjuntos de X y N un subconjunto conexo de X que intercepta a A y B, entonces existe una componente C de $X - (A \cup B)$ tal que $Cl(C) \cap A \neq \emptyset$, $Cl(C) \cap B \neq \emptyset$ y $N \cap C \neq \emptyset$.*

Demostración. Asumamos que el lema es falso. Definamos $H = A \cup (\bigcup\{C : C$ es una componente de $X - (A \cup B), Fr(C) \subset A\})$ y $K = B \cup (\bigcup\{C : C$ es una componente de $X - (A \cup B), Fr(C) \subset B\})$. Si existe un punto z en $H \cap K$, entonces existe C una componente de $X - (A \cup B)$ tal que $Fr(C) \subset A$ y $Fr(C) \subset B$, así $Cl(C) \cap A \neq \emptyset$ y $Cl(C) \cap B \neq \emptyset$. Luego, tenemos que H y K son conjuntos cerrados disjuntos. Además, $N \cap H \neq \emptyset$ y $N \cap K \neq \emptyset$, luego esto contradice que N es conexo. $\square$

Los lemas anteriores los usamos para mostrar el siguiente teorema, damos un listado de algunas propiedades equivalentes a la unicoherencia en continuos localmente conexos, el cual caracteriza la unicoherencia usando la separación de dos puntos en un continuo.

Teorema 3.30. *Sea X un continuo localmente conexo. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *X es unicoherente.*

2. *Cada conjunto cerrado que separa a un par de puntos irreduciblemente es conexo*

3. *Cada conjunto cerrado que separa dos puntos p y q, tiene una componente que separa a p y q.*

4. *Cada conjunto cerrado que separa a X tiene una componente que separa a X.*

Demostración. Probaremos el teorema de la siguiente forma $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Probemos que *1* implica *2*. Sea K un subconjunto cerrado en X tal que K separa irreduciblemente a p y q. Supongamos que K no es conexo; es decir, existen cerrados, no vacíos y disjuntos A y B de K tales que $K = A \cup B$. Como K es cerrado en X. Sean S_A y S_B las componentes de $X - A$ y $X - B$, respectivamente, tales que $p \in S_A$ y $q \in S_B$. Nótese que, $S_A \cup B$ y $S_B \cup A$ son subcontinuos de X. Además, como X es unicoherente, $(S_A \cup B) \cap (S_B \cup A) = S_A \cap S_B$ es un continuo, esta contenido en $X - K$ y $\{p, q\} \subset S_A \cap S_B$. Lo anterior contradice que K separa a p y q.

Probemos que *2* implica *3*. Sea K un subconjunto cerrado en X tal que separa a p y q. Por el Lema 3.28, existe un conjunto cerrado $H \subset K$ tal que separa irreduciblemente a p y q. Por (*2*), H es conexo. Como $H \subset K$, H es una componente que separa a p y q.

Probemos que *3* implica *4*. Sea K un conjunto cerrado que separa a X, entonces $X - K = A \cup B$ donde A y B son subconjuntos cerrados de X tal que $A \cap B = \emptyset$. Sean $p, q \in X - K$ tales que $p \in A$ y $q \in B$, entonces K separa a p y q, por (*3*) hay una componente $H \subset K$ que separa a p y q, como $H \subset K$, por lo tanto H separa a X.

Probemos que *4* implica 1. Supongamos que $X = A \cup B$ y $A \cap B = H \cup K$, donde A y B son subcontinuos de X, H y K son conjunto cerrados disjuntos distintos del vacío.

Por el Lema 3.29, sea R una componente de $X - A$ tal que $Cl(R) \cap H \neq \emptyset$ y $Cl(R) \cap K \neq \emptyset$. Sea $\{V_\alpha : \alpha \in J\}$ la colección de las componentes de $X - Cl(R)$ y considere el conjunto cerrado $L = Fr(R) \cup (\bigcup \{V_\alpha : Fr(V_\alpha) \subset H \text{ o } Fr(V_\alpha) \subset K\})$. Entonces L separa a X, por que R y cualquier V_α tal que $H \cap Fr(V_\alpha) \neq \emptyset$ y $K \cap Fr(V_\alpha) \neq \emptyset$ son componentes diferentes de $X - L$. Sin embargo, ninguna componente de L separa X, lo cual contradice (*4*). $\square$

Bibliografía

[1] Alzate A. M., *Clase de funciones monótonas entre continuos.* Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander. 2010. 61 pp.

[2] Borsuk K., "Quelques thèorémes sur les ensembles unicoherents", *Fund. Math.* 17 (1931), 171–209.

[3] Camargo J. y Isaacs R., "Continuos tipo knaster y sus modelos geométricos", *Revista Colombiana de Matemáticas.* 47 (2013), no. 1, 67–81.

[4] Charatonik J. J., "History of continuum theory", *Kluwer Academic Publisher. Printed in the Netherlands.* 2 (1998), 703–789.

[5] Dugundji J., *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[6] Eilenberg S., "Sur les transformations d'espaces métriques en circonférence", *Fund. Math.* 24 (1935), 160–176.

[7] Eilenberg S., "Sur les espaces multicoherent I", *Fund. Math.* 27 (1936), 153–190.

[8] Eilenberg S., "Tranformations continues en circonférence et la topologie du plan", *Fund. Math.* 26 (1936), 61–112.

[9] Ganea T., "Covering spaces and cartesian products", *Ann. Soc. Polon. Math.* 25 (1952),30–42.

[10] García A. and Illanes A., "A survey on unicoherence and related properties". *An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México*, 29 (1989), 17–67.

[11] Kuratowski K., "Sur les continus de jordan et le théoreème de m. brouwer", *Fund. Math.* 8 (1926), 137–150.

[12] Kuratowski K., *Topology,* Volume 1, Academic press, New York and London, Warszawa, 1966.

[13] Kuratowski K., *Topology*, Volume 2, Academic press, New York and London, Warszawa, 1968.

[14] Macías S., *Topics on Continua*, Volume 275. Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[15] Mackowiak T., "Continuous mappings on continua", *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, (1979), no. 158, 1–95.

[16] Munkres J. R., *Topología*, Volume 1, Prentice Hall, INC, Madrid, España, 2000.

[17] Nadler S. B. Jr., *Continuum Theory, An Introduction, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, Volume 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[18] Stone A. H., "Incidence relations in unicoherent spaces". *Trans. Amer. Math. Soc.* 65 (1949), 427–447.

[19] Willard S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1968.