ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES DE TIPO HIPERBÓLICO DE DIMENSIÓN DOS

Andrea Abaunza Galvis

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga

Octubre de 2005

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES DE TIPO HIPERBÓLICO DE DIMENSIÓN DOS

Andrea Abaunza Galvis

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de

Licenciada en Matemáticas

Director
RAFAEL CASTRO TRIANA

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga

Octubre de 2005

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a: Dios que me permitió alcanzar esta meta en mi vida, a mi madre CARMEN GALVIS y familiares que me apoyaron y confiaron en mi, al profesor RAFAEL CASTRO por su colaboración para la realización de esta monografía, y a todos mis amigos y compañeros de carrera por su compañía y motivación.

TITLE: DIFERENTIALS EQUATIONS IN PARTIALS DERIVED OF HIPERBOLIC TYPES FROM DIMENSION TWO *
AUTHOR: Andrea Abaunza Galvis**

KEY WORDS: equation of wave, clasic solution, continuity, initial conditions, conditions of border.

DESCRIPTION

In this essay a bibliographic revision it is made, about mathematics and physics of wave equations. In the first chapter contains the preliminaries of the project, in the second chapter show the use of the transformations and the reduction of the wave equation $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, transformed $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = 0$ and we solved this partial differential equation tied to initial conditions. In the third chapter we solve the problem mentioned before by adding boundary conditions. In the fourth chapter we used the energy method to show the only possible solution of that mixed problem. In the fifth chapter we solved the mixture problem with homogeneous enursomen conditions through Fourier series, thus we show in that chapter and interpretation of the solution. In the sixth chapter we analized the Fourier method used to solved the non homogeneous equation the signing a funtion of Green. In seventh and last chapter we developed then two possible methods to obtain generalized solutions.

---

*Thesis

** FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR RAFAEL CASTRO TRIANA
Ph.

TITULO: ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES DE TIPO HIPERBÓLICO DE DIMENSIÓN DOS*

AUTOR: Andrea Abaunza Galvis**

PALABRAS CLAVES: ecuación de onda, solución clásica, continuidad, condiciones iniciales, condiciones de frontera.

DESCRIPCIÓN

En el presente trabajo se hace una revisión bibliográfica sobre la matemática y física de la ecuación de onda.

En el primer capítulo contiene los preliminares de este proyecto, en el segundo capítulo mostramos la utilidad de las transformaciones en la reducción de la ecuación de onda $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, a la forma $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0$ y resolvimos ésta ecuación diferencial parcial sujeta a condiciones iniciales. En el tercer capítulo resolvemos el anterior problema añadiéndole condiciones de frontera. En cuarto capítulo utilizamos el método de la energía para demostrar la unicidad del problema mixto. En el quinto capítulo se soluciona el problema mixto con condiciones de contorno homogéneo a través de series de Fourier, así mismo en este mostramos una interpretación de la solución obtenida. En el sexto capítulo consideramos el método de Fourier para la solución de la ecuación no homogénea , modelando una función de Green. En el séptimo y último capítulo presentamos los dos métodos existentes para obtener soluciones generalizadas

*Tesis

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS. DIRECTOR RAFAEL CASTRO TRIANA.

Contenido

Índice de figuras

Introducción

Existen muchos problemas de la mecánica como lo son: vibraciones de cuerdas, barras, membranas y volúmenes, al igual que las ondas electromagnéticas, que son modeladas a través de la ecuación de onda de la forma

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(p \quad grad \quad u) - Ru_t - qu + F(x,t), \tag{0.1}$$

donde la función desconocida $u(x,t)$ depende de n coordenadas espaciales $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y del tiempo t. Los coeficientes $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x)$ y R son determinados por las propiedades del medio de propagación de la onda y, en general, dependen de x.

El término libre $F(x,t)$ describe la intensidad de una fuerza externa. Según la definición de los operadores div (divergencia) y grad (gradiente), tenemos:

$$div(p \quad grad \quad u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(p\frac{\partial u}{\partial x_i}).$$

Recordemos que la ecuación (0.1) es de tipo hiperbólico, y algunos de los casos particulares de esta ecuación son descritos abajo.

Las pequeñas vibraciones transversales de una cuerda elástica sin fricción se rige por la **ecuación unidimensional de onda**

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{0.2}$$

donde la función $u(x,t)$ depende de la variable real x y del tiempo t, describe el desplazamiento transversal de cada punto de la cuerda , la tensión en la cuerda T_0 se supone constante, $\rho(x)$ es la densidad lineal de masa y $F(x,t)$ es una fuerza externa. Si la densidad de masa es constante, $\rho(x) = \rho = cte$, entonces, la ecuación de las vibraciones transversales de una cuerda elástica toma la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{0.3}$$

para estos problemas obtener la solución es una tarea poco sencilla, puesto que debe satisfacer no solo la ecuación diferencial sino también ciertas condiciones iniciales o de frontera; es por esta razón que la ecuación mencionada anteriormente es la que estudiaremos en el presente trabajo, mostrando un esbozo de los métodos utilizados para solucionarla.

Capítulo 1

PRELIMINARES

A continuación se enuncian algunas definiciones y teoremas que se utilizaran en el desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.1. *(Regla de derivación de Leibnitz). Sean I; J intervalos reales no triviales, con I compacto y J abierto. Sea $f : I \times J \to R$ una función continua en $I \times J$ tal que $f(x, .)$ es derivable en J para todo $x \in I$. Supongamos además que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$, es continua en $I \times J$. Sea $t_0 \in I$ y $g : J \to I$ una función derivable. Entonces,*

1. $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(., \lambda)$ *es integrable para todo* $\lambda \in J$
2. $\int_{t_o}^{g(\lambda)} f(x, \lambda)dx$ *es derivable en* J *para todo* $x \in I$

y se cumple la regla de derivación de Leibnitz,

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0}^{g(\lambda)} f(x,\lambda)dx = f(g(\lambda),\lambda)g'(\lambda) + \int_{t_0}^{g(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}dx \quad \forall \lambda \in J.$$

La siguiente definición será utilizada en el capitulo cinco del presente trabajo.

Definición 1.2. *(Problema de Sturm-Liouville) Sean p, q,r y r' funciones de valor real continuas en un intervalo [a,b] y sean $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ para todo x en el intervalo. Entonces, el problema de Sturm-Liouville es una ecuación diferencial de la forma*

$$\frac{d}{dx}[r(x)y'] + (q(x)\lambda p(x))y = 0 \quad a < x < b \tag{1.1}$$

con las condiciones de frontera

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \tag{1.2}$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \tag{1.3}$$

La solución de estos problemas consiste en encontrar números λ (valores propios) y soluciones no triviales correspondientes a λ (funciones propias). Respecto a este tipo de soluciones tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.3. *(propiedades del problema regular de Sturm-Liouville)*

1. *Existe un número infinito de valores reales propios que se pueden ordenar en forma creciente, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ...\lambda_n < ...$ de modo que $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.*

2. *A cada valor propio corresponde solo una función propia (salvo por múltiplos no cero).*

3. *Las funciones propias que corresponden a los diversos valores propios son linealmente independientes.*

4. *El conjunto de funciones propias que corresponde al conjunto de los valores propios es ortogonal con respecto a la función peso $p(x)$ en el intervalo $[a, b]$.*

Definición 1.4. *Sea V un espacio vectorial real, $u \in V$ y $\{e_m\}$ una sucesión de elementos de v que constituyen un sistema ortonormal. Los números $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, ...,$ definidos por $\alpha_i = \langle e_i, u\rangle$ se denominan coeficientes de Fourier de u respecto del sistema ortonormal $\{e_m\}$. A la serie $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_m e_m + ...$ llamaremos serie de Fourier asociada a u respecto del sistema ortonormal dado, y lo denotamos por*

$$u \sim \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_m e_m + ...,$$

Teorema 1.5. *Sea V un espacio de Hilbert; si $\{e_m\}$, $e_m \in V$ es un sistema ortonormal completo respecto a v, entonces:*

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_m e_m + ...,$$

donde $\alpha_i = \langle u, e_i\rangle, \forall u \in V$

Definición 1.6. *Una función f se llama función de cuadrado integrable en X cuando la integral según Lebesgue $\int x f^2(x) dm$ existe. El conjunto de todas las funciones medibles de cuadrado integrable en X se designan con $L_2(X, m)$ o, brevemente, $L_2 X$.*

Teorema 1.7. *$L_2[-p, p]$ es un conjunto vectorial real.*

Teorema 1.8. *Si $f,\ g \in L_2[-p,p]$ entonces*

$$\langle f,g\rangle = \int\limits_{-p}^{p} f(x)g(x)$$

define un producto interior en $L_2[-p,p]$

Definición 1.9. *(Series de Fourier)*
sea f una función continua, periódica cuyo periodo es de $2p$, y definida en el intervalo $(-p,p)$ su serie de Fourier es,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right] \tag{1.4}$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx \tag{1.5}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx \tag{1.6}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}xdx \tag{1.7}$$

Seguidamente presentamos un corto esbozo del método de las características, que se utilizan en el transcurso del trabajo.

Definición 1.10. *ECUACIONES CARACTERÍSTICAS En el método de las características para resolver la ecuación diferencial*

$$a(x,t)u_x + b(x,t)v_t = c(x,t)v + d(x,t). \tag{1.8}$$

las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x,t), \\ \frac{dt}{ds} = b(x,t), \\ \frac{dv}{ds} = c(x,t)v + d(x,t), \end{cases} \tag{1.9}$$

son llamadas ecuaciones características y su solución son llamadas las curvas características.

Para una mayor cobertura sobre el tema remitirse al libro *curso básico de ecuaciones en derivadas parciales.*

Capítulo 2

MÉTODO DE D'ALEMBERT

El método de D'Alembert se basa en el uso de una transformación de las variables independientes x y t, de tal forma que la ecuación diferencial parcial transformada (2.3), sea fácil de resolver como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. *El desplazamiento vertical $u(x,t)$ de una cuerda infinitamente larga está determinado por el problema de valor inicial*

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \tag{2.1}$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \tag{2.2}$$

1. *Demuestre que la ecuación de onda se puede expresar en la forma*

$$u_{\eta\xi} = 0 \tag{2.3}$$

   mediante las sustituciones $\xi = x + at$ y $\eta = x - at$.

2. *Integre la ecuación diferencial parcial* (2.3) *primero con respecto a η y después con respecto a ξ, para demostrar que la solución $u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$, donde F y G son funciones arbitrarias diferenciables dos veces. Use esta solución y las condiciones iniciales dadas para demostrar que*

$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} g(s)\, ds + c$$

   y

$$G(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}g(s)\,ds-c$$

donde x_0 es arbitraria y c es una constante de integración.

3. *Use los resultados de la parte (2) para mostrar que*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+at)+f(x-at)\}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)\,ds \tag{2.4}$$

Observe que cuando la velocidad inicial $g(x)=0$, se obtiene

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+at)+f(x-at)\},\quad -\infty<x<\infty.$$

Esta última solución se puede interpretar como superposición de dos ondas viajeras*, una que se mueve hacia la derecha (esta es $(\frac{1}{2}f(x-at))$ y una hacia la izquierda $(\frac{1}{2}f(x+at))$. Ambas viajan con velocidad a y tienen la misma forma básica que la del desplazamiento inicial $f(x)$. La forma de la solución $u(x,t)$ dada en* (2.4) *se llama solución de D'Alembert.*

4. *Emplee la solución de D'Alembert ecuación* (2.4)*, para resolver el mismo problema de valor inicial, pero sujeto a las condiciones iniciales*

$$f(x)=sen(x),\qquad g(x)=1.$$

Solución:

1. Usando la regla de la cadena obtenemos:

$$u_x=u_\eta\eta_x+u_\xi\xi_x=u_\xi+u_\eta \tag{2.5}$$
$$u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \tag{2.6}$$
$$u_{tt}=a^2\{u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\} \tag{2.7}$$

reemplazando (2.6) y (2.7) en (2.1) obtenemos (2.3)

2. Integrando (2.3) en primer lugar con respecto a η y luego con respecto a ξ obtenemos la siguiente función:

$u(\xi,\eta)=\int h(\xi)d\xi+G(\eta)$. Nombrando $F(\xi)=\int h(\xi)d\xi$ tenemos,
$u(\xi,\eta)=F(\xi)+G(\eta)$. Y reemplazando ξ y η obtenemos la solución general de (2.1)

$$u(x,t)=F(x+at)+G(x-at)$$

Aplicando (2.2) obtenemos el siguiente sistema para las incógnitas F y G.

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x), \tag{1}$$
$$u_t(x,0) = aF'(x) - aG'(x) = g(x), \tag{2}$$

derivando y multiplicando (1) por a y sumando con (2), obtenemos $2aF'(x) = af'(x) + g(x)$ entonces $F'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2a}g(x)$. Para obtener F integramos

$$\int_{x_0}^{x} F'(s)ds = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'(s)ds + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)ds,$$

entonces

$$F(x) - F(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f(x_0)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)ds,$$
$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)ds + c,$$

donde $c = F(x_0) - \frac{1}{2}f(x_0)$.

De la misma manera se llega a:

$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)ds - c.$

donde $-c = G(x_0) - \frac{1}{2}f(x_0)$.

Para demostrar esta última igualdad partimos de:

$$\begin{aligned} F(x_0) + G(x_0) &= f(x_0) \\ G(x_0) &= f(x_0) - F(x_0). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} G(x_0) - \frac{1}{2}f(x_0) &= f(x_0) - F(x_0) - \frac{1}{2}f(x_0) \\ &= \frac{1}{2}f(x_0) - F(x_0) \\ &= -\left(F(x_0) - \frac{1}{2}f(x_0)\right) \\ &= -c \end{aligned}$$

3. Para obtener (2.4) sustituimos las expresiones para $F(x)$ y $G(x)$ hallados anteriormente en la solución general, esto es:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= F(x+at) + G(x-at) \\
&= \frac{1}{2}f(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0+at_0}^{x+at} g(s)ds + c + \frac{1}{2}f(x-at) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0+at_0}^{x-at} g(s)ds - c \\
&= \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\int\limits_{x_0+at_0}^{x+at} g(s)ds - \int\limits_{x_0+at_0}^{x-at} g(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(s)ds
\end{aligned}$$

concretamente tenemos (2.4).

Capítulo 3

FÓRMULA DE D'ALEMBERT PARA PROBLEMAS MIXTOS. MÉTODO DE LA REFLEXIÓN DE ONDAS

Anteriormente consideramos la ecuación de onda solamente con condiciones iniciales, ahora añadimos condiciones de frontera.

Consideramos el siguiente problema mixto.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in (0, L), \ t > 0, \tag{3.1}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \ x \in [0, L], \tag{3.2}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \ t \geq 0 \tag{3.3}$$

Este problema describe el proceso de vibraciones de una cuerda de longitud L con extremos fijos. Se busca una solución u en el espacio $c^2([0, L] \times [0, \infty))$, es decir, u es una solución clásica. Entonces las condiciones (3.2) sobre f y g implican que f debe pertenecer al espacio $c^2([0, L])$, y g al espacio $c^1([0, L])$. Por otro lado la condiciones (3.2) y (3.3) implican que f y g deben ser tales que

$$f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0. \tag{3.4}$$

A continuación probamos las anteriores condiciones de concordancia

1. $\lim_{t \to 0^+} u(0, t) = \lim_{t \to 0^+} 0 = 0 = u(0, 0)$, entonces $u(0, 0) = 0$

2. $\lim_{x\to 0^+} u(x,0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = u(0,0)$.

3. $\lim_{x\to L^-} u(x,0) = \lim_{x\to L^-} f(x) = f(L) = u(L,0)$, entonces, $u(L,0) = f(L)$

4. $\lim_{t\to 0^+} u(L,t) = \lim_{t\to 0^+} 0 = 0 = u(L,0)$, entonces $u(L,0) = 0$

Luego de (1) y (2) se llega a $f(0) = 0$, de (3) y (4) concluimos que $f(L) = 0$. Análogamente obtenemos $g(0) = g(L) = 0$.

En el anterior capítulo obtuvimos la solución :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x+at) + f(x-at)\} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds,$$

donde f y g están definidas en toda la recta real.

Ahora las funciones f y g están definidas en el intervalo $[0, L]$, luego el punto (x,t) es tal que $0 \leq x - at,\ y\ x + at \leq L$. Así la solución está definida en la región $R = \{(x,t) : t \leq \frac{x}{a},\ t \leq \frac{L-x}{a},\ t \geq 0\}$. (figura 3.1)
Como deseamos encontrar una solución en la semibanda definida por el producto cartesiano del intervalo $[0, L]$ y el conjunto $\{t \geq 0\}$ por esta razón necesitamos extender las funciones f y g para cualquier valor de esta franja.

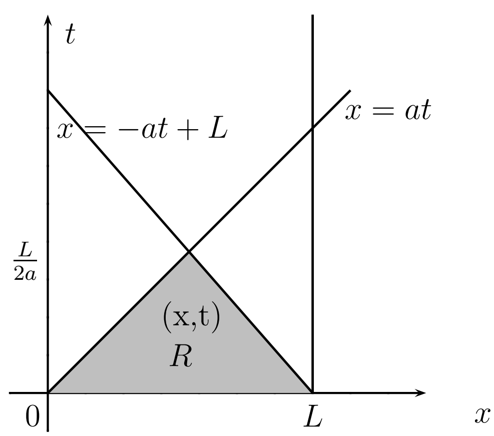

Figura 3.1: Descripción de la región

Iniciamos con la siguiente proposición:

Proposición 3.1. *Las funciones F y G definidas por :*

$$F(x) = f(x) \quad G(x) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

y para cualquier otro x

$$F(x) = -F(-x) \quad F(x) = -F(2L - x),$$
$$G(x) = -G(-x) \quad G(x) = -G(2L - x),$$

satisfacen $F \in C^2(\mathbb{R})$ y $G \in C^1(\mathbb{R})$ si y solo si:

1. $f \in C^2(0, L), \quad g \in C^1(0, L)$
2. $f, g \in C[0, L]$
3. *Existen las derivadas laterales* $f'_+(0), f''_+(0), g'_+(0), f'_-(L), f''_-(L), g'_-(L)$ *y verifica* $f(0) = f(L)$ $= g(0) = g(L) = f''_+(0) = f''_-(L) = 0$

Demostración.

1. supongamos $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $G \in C^1(\mathbb{R})$ la restricción de f y g al intervalo $(0, L)$, son tales que $f \in C^2(0, L)$ y $g \in C^1(0, L)$.
2. Supongamos ahora $f \in C^2(0, L)$ y $g \in C^1(0, L)$ aplicamos un resultado de análisis matemático (continuidad), obtenemos que $f \in C(0, L)$ y $g \in C(0, L)$, mas específicamente debemos ver que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

   Sea $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$ por la hipótesis y la definición de la función, obtenemos $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.De forma análoga tenemos los siguientes resultados: $\lim_{x \to L^-} f(x) = f(L)$, $\lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$,$\lim_{x \to L^-} g(x) = g(L)$. Por lo tanto $f, g \in C[0, L]$.
3. Por hipótesis existe $F'(0) = F'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} F'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = f'_+(0)$, entonces $f'_+(0) = F'_+(0)$. Luego existe. De manera análoga obtenemos los demás resultados.

$\square$

Para encontrar una solución que este definida en la semibanda $[0, L] \times t \geq 0$, tenemos en cuenta las condiciones (3.3), y sugerimos que f y g se extiendan de manera impar respecto a los extremos $x_0 = 0$ y $x_0 = L$.

En efecto si la función $g(x)$ es impar respecto a $x_0 = 0$ entonces $\int\limits_{-at}^{at} g(s)ds = 0$, así:

$$u(0,t) = \frac{1}{2}\{f(at) + f(-at)\} = 0$$

entonces $f(at) = -f(-at)$, esto es f es impar lo anterior sugiere que la extensiones F y G de f y g del $[0, L]$ a la recta real sean impares esto es:

$$\begin{gathered}
F(x) = f(x),\ x \in [0, L] \\
F(x) = -f(-x), si\ x \in [-L, 0] \\
G(x) = g(x), si\ x \in [0, L] \\
G(x) = -g(-x), si\ x \in [-L, 0]
\end{gathered}$$

en particular si $x \in [(2k-1)L, 2kl]$ entonces $x - 2kL \in [-L, 0] y\ F(x) = F(x - 2kL) = -F(-x + 2kl) = -F(-x + 2L)$. por tanto $F(x) = -F(2L - x)$.
Si $x \in [2kL, (2k+1)L]$ entonces $x - 2kL \in [0, L]$ y $F(x) = F(x - 2kL) = -F(-x + 2kL) = -F(-x + 2L)$.
En general tenemos: $F(x) = -F(2L - x).\forall x \in \mathbb{R}$. Análogamente obtenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = -G(2L - x)$.

sean entonces: $F, \quad G$ definidas mediante :

$$F(x) = f(x) \quad G(x) = g(x) \quad si\ 0 \le x \le L \tag{3.5}$$

y para cualquier otro x

$$F(x) = -F(-x) \quad F(x) = -F(2L - x) \tag{3.6}$$
$$G(x) = -\varphi(-x) \quad G(x) = -G(2L - x) \tag{3.7}$$

Consideremos ahora :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}F(x + at) + F(x - at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} G(s)dS \tag{3.8}$$

Veamos que las extensiones F y G anteriormente definidas satisfacen las condiciones (3.2) y (3.3)

Sea $x \in [0, L]$

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[F(x + 0) + F(x - 0)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(0)}^{x+a(0)} G(s)ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[F(x) + F(x)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x}^{x} G(s)ds \\
&= \frac{1}{2}[2F(x)] + 0 \\
&= F(x) = f(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_t(x,0) &= \frac{1}{2}\left[F^{'}(x + a(0)) - F^{'}(x - a(0))\right] + \frac{1}{2a}[G(x) + G(x)] \\
&= \frac{1}{2}[F^{'}(x) - F^{'}(x)] + \frac{1}{2a}(2cG(x)) \\
&= \frac{1}{2}(0) + \varphi(x) \\
&= G(x) = g(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \frac{1}{2}\left[F(at) + F(-at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{-ct}^{ct} G(s)ds \\
&= \frac{1}{2}\{F(at) + F(at)\} \\
&= \frac{1}{2}\{-F(-at) + F(at)\} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \frac{1}{2}\left[F(L + at) + F(L - at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{L-ct}^{L+ct} G(s)ds \\
&= \frac{1}{2}\{F(L + at) + F(L - at)\}\} \\
&= \frac{1}{2}\{-F(2L - (L + at)) + F(L - at)\} \\
&= \frac{1}{2}\{-F(L - at) + F(L - at)\} = 0
\end{aligned}
$$

De tal manera que podemos concluir que (3.8) es solución clásica del problema

$$
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{3.9}
$$

Una verificación directa de que la función $u(x,t)$ definida en (3.8) es solución de (3.9) es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
u_t &= \frac{1}{2}\left[F'(x+at).a - F'(x-at).a\right] + \frac{1}{2c}\left[G(x+at).a + G(x-at).a\right] \\
u_{tt} &= \frac{a^2}{2}\left[F^{''}(x+at) + F^{''}(x-at)\right] + \frac{a}{2}\left[G'(x+at) - G'(x-at)\right] \\
u_x &= \frac{1}{2}\left[F^{'}(x+at) + F^{'}(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[G(x+at) - G(x-at)\right] \\
u_{xx} &= \frac{1}{2}\left[F^{''}(x+at) + F^{''}(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[G^{'}(x+at) - G^{'}(x-at)\right]
\end{aligned}
$$

Reemplazando (3.9) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^2}{2}\left[F^{''}(x+at) + F^{''}(x-at)\right] - \frac{a}{2}\left[G^{'}(x+at) - G^{'}(x-at)\right] \\
&-\left(\frac{a^2}{2}\left[F^{''}(x+at) + F^{''}(x-at)\right] - \frac{a}{2}\left[G^{'}(x+ct) - G^{'}(x-at)\right]\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Analizaremos ahora la fórmula:

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}F(x+at) + F(x-at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} G(s)ds
$$

y el papel de las características. Tomemos un punto de coordenadas (x^*, t^*) tal que $0 < x^* < L$, y $t^* < \frac{x^*}{a}$, $t^* < \frac{L-x^*}{a}$, es decir se encuentra en el interior del intervalo $[0, L]$ (figura 3.2)

por el método de D'Alembert podemos encontrar $u(x,t)$ y extenderla de manera impar, llegando a:

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+at) + F(x-at)\right] \quad \text{y en } t = 0, u(x,t) = F(x).
$$

Si tomamos un x dentro del entorno (figura 3.1) que sea menor que x^* con $f > 0, lafuncin\ u(x,t) > 0$, crece a partir de $t = 0$ manteniendo el hecho de que $u(x,t) > 0$; para $t \approx \frac{x_0 - x}{a}$, cuando el punto (x,t) esta cerca de la característica $x + at$, esta se refleja en el punto $(0, \frac{x_0}{a})$ dando lugar a una característica a derecha, dicho efecto suele llamarse eco.

Así de manera concreta la solución del problema

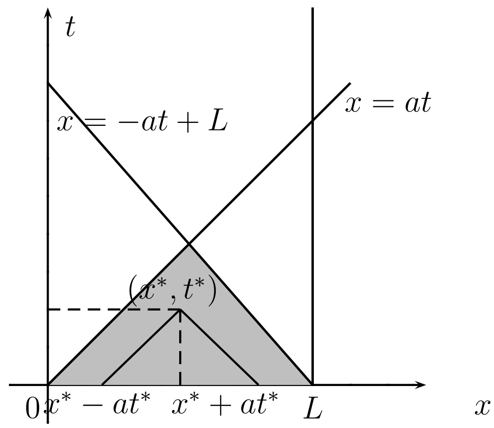

Figura 3.2: Ilustración de las extensiones

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \geq 0, \ t > 0, \tag{3.10}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \ x \geq 0, \tag{3.11}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{3.12}$$

necesita una extensión en $x = 0$.

Capítulo 4

MÉTODO DE LA INTEGRAL DE ENERGÍA PARA LA DEMOSTRACIÓN DE LA UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN

4.1. INTRODUCCIÓN

En esta sección demostraremos un teorema de unicidad de solución de un problema mixto, utilizando el método de la integral de energía. Para realizar esto comenzamos mostrando algunas consideraciones físicas.

Consideremos una cuerda vibrante de longitud L, con sus extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$, conociendo su posición inicial, como se observa en la (figura 4.1). Sea $u(x,t)$ el desplazamiento vertical de cualquier punto de la cuerda, medido a partir del eje x.

A continuación presentamos una expresión de la energía total $E(t)$ de dicha cuerda.

Sea $\tilde{\Delta_x} = [x, x + \Delta_x]$ un segmento de la cuerda, dicho segmento se mueve transversalmente con una velocidad u_t, que puede tomarse como la misma para todos los puntos de este segmento; supongamos que la densidad es constante e igual al valor de $\rho(x)$ en un punto del segmento, entonces la energía cinética del mismo será.

$$(\frac{1}{2})mv^2 \approx (\frac{1}{2})\rho(x)\Delta_x(u_t)^2 \tag{4.1}$$

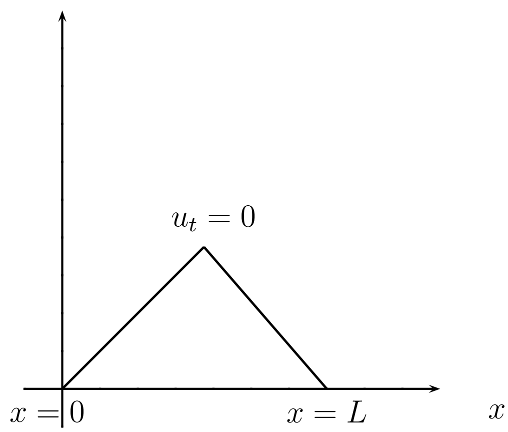

Figura 4.1: Descripción de la cuerda

La energía cinética total de la cuerda es la suma de las energía de los segmentos en los que se ha dividido la cuerda. La aproximación (4.1) es mas exacta cuando se considera nula la longitud de los segmentos, es entonces correcto considerar el límite de tales sumas cuando la longitudes de los segmentos tiene a hacerse mas pequeña, mas exactamente nula, luego la energía cinética es igual a:

$$K = \frac{1}{2}\int_0^L \rho(x)[u_t(x,t)]^2 dx. \tag{4.2}$$

Tomamos la energía potencial en un instante dado, como el trabajo que debe realizarse para llevar la cuerda desde su posición de equilibrio hasta la posición que tiene en ese instante. Este trabajo es realizado por la fuerza de tensión, o de manera mas precisa su componente transversal. Consideremos que la cuerda en su inicio se encuentra en su posición de equilibrio $u(x,0) = 0$ y en un instante t_0 cualquiera, la configuración de la cuerda se describe por la función $u(x,t_0) = u_0(x)$. La tensión T es tangente a los extremos del intervalo $[x, x+\Delta_x]$ (figura4.2), por lo tanto esta es:

$$Tu_x|_{x+\Delta_x} - Tu_x|_x \approx Tu_{xx}(x+\theta\Delta_x)\Delta_x, \tag{4.3}$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ si aplicamos ésta fuerza, el segmento Δ_x se mueve a una distancia $u_t(x,t)dt$ en un tiempo dt. El trabajo que se realiza sobre el segmento lo tomaremos como el producto de la fuerza y la distancia empleada; de esta manera el trabajo total realizado en la cuerda equivaldrá a la suma de todos estos trabajos y tomando el limite cuando la longitud de los segmentos tiende a cero y su número a infinitos

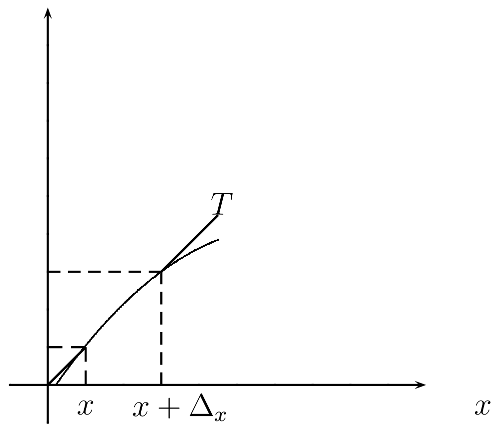

Figura 4.2: Descripción de la tensión

(puntos), obtenemos:

$$\bar{W} = \{\int_0^L Tu_{xx}u_t dx\}dt.$$

Al integrar por partes y aplicar la regla de Leibnitz de derivación bajo la integral, entonces

$$\begin{aligned}\bar{W} &= \{Tu_xu_t|_0^L - \int_0^L Tu_{xx}u_{tx}dx\}dt \\ &= \{-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L Tu_x^2 dx + Tu_xu_t|_0^L\}dt\end{aligned}$$

Integrando con respecto a t en el intervalo $[0, t_0]$ y utilizando
el hecho de que $u_(x, 0) = 0$, puesto que $u(x, 0) \equiv 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned}W &= \{-\frac{1}{2}\int_0^L Tu_x^2 dx\}|_0^{t_0} + \int_0^{t_0}(Tu_xu_t|_0^L)dt\} \\ &= \frac{-1}{2}\int_0^L T[u_x(x, t_0)]^2 dx + \int_0^{t_0} Tu_xu_t|_0^L dt. \qquad (4.4)\end{aligned}$$

Si tenemos la cuerda fija de sus extremos,$u(0, t) = u(L, t) = 0$; entonces, $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$, con lo cual se anularía el ultimo término de (4.4) y la energía potencial en el instante $t = t_0$ será,

$$\rho(t_0) = \frac{1}{2}\int_0^L \{T[u_x(x,t_0)]^2 dx\} \tag{4.5}$$

y la energía total es:

$$E(t_0) = \frac{1}{2}\int_0^L \{T[u_x(x,t_0)]^2 dx + \rho(x)[u_t(x,t_0)]^2\} \tag{4.6}$$

A continuación se presenta el teorema de unicidad

Teorema 4.1. *El siguiente problema tiene solución única:*

$$\rho u_{tt} = [ku_x]_x + f(x,t) \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{4.7}$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq L \tag{4.8}$$
$$u(0,t) = \mu_1(t) \quad u(L,t) = \mu_2(t) \qquad t \geq 0, \tag{4.9}$$

donde $u \in C^2([0,L] \times \{t \geq 0\}$*,* $varphi(x)$*,* μ_1*,* μ_2*,* $\psi(x) \in C^2[0,L]$ *y* $\rho(x)$ *y* $k(x)$ *son continuas en* $[0,L]$ *y positivas.*

Demostracion 4.1. *supongamos que existen dos soluciones* u_1 *y* u_2 *y sea* $v(x,t) = u_1 - u_2$*. Entonces* v *es solución del problema homogéneo*

$$\rho v_{tt} = [kv_x]_x \tag{4.10}$$
$$v(x,0) = v_t(x,0) = 0 \tag{4.11}$$
$$v(0,t) = v(l,t) = 0. \tag{4.12}$$

De acuerdo con lo deducido anteriormente la energía total esta dada por (4.6)*, esto es:*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [kv_x^2 + \rho v_t^2] dx \tag{4.13}$$

donde en este caso la tensión es $k(x)$*.*

Derivando (4.13) *respecto de* t*, y usando la regla de Leibnitz,*

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \frac{d}{dt}\{k(x,v_x)v_x^2 + \rho(x)v_t^2\}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^L \{(\frac{d}{dt}k).v_x^2 + k^2 v_x.v - xt + \rho(x)v_t.v_{tt}\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \{\frac{d}{dt}k.v_x^2 dx + \int_0^L [kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt}]dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \{kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt}\}dx$$

donde

$$\int_0^L kv_x v_{xt} dx = kv_x v_t|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L v_t (kv_x)_x dx;$$

el primer término se anula, puesto que $v_t(0,t) = v_t(L,t) = 0$*, porque* $v(0,t) = v(L,t) = 0$*. Así,*

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \{\rho v_t v_{tt} - v_t(Kv_x)_x dx$$

$$= \int_0^L v_t[\rho v_{tt} - (Kv_x)_x]dx = 0$$

sabemos que v *es solución de (4.10-4.12). Por lo tanto,*

$$E(t) = cte = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^L [Kv_x^2 + \rho v_t^2]|_{t=0} dx = 0$$

De donde deducimos que $v_x(x,t) \equiv v_t(x,t) \equiv 0$ *y de aquí* $v(x,t) = cte$ *y como* $v(x,0) = 0$ *entonces* $v = 0$ *lo cual implica que* $u_1 = u_2$*.*

la siguiente proposición es una aplicación de la unicidad de la solución

Proposición 4.2. *El operador* $L : C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}) \to C^2(\mathbb{R} \times \{t \geq 0\})$ *definida por* $L(f,g) = u(x,t)$ *donde* $u(x,t)$ *es la solución del problema*

$$\begin{gathered} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad c = cte \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \ x \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{4.14}$$

es lineal.

Demostración.

Sean

$$L(f_1, g_1) = u, \quad u(x,0) = f_1 \quad u_t(x,0) = g_1,$$
$$L(f_2, g_2) = v, \quad v(x,0) = f_2 \quad v_t(x,0) = g_2.$$

Entonces

$$L[(f_1, g_1) + (f_2, g_2)] = L[f_1 + f_2, g_1 + g_2] = z$$

donde

$$\begin{gathered} z(x,0) = f_1 + f_2 \\ z(x,0) = u(x,0) + v(x,0) \\ z(x,0) = (u+v) = (x,0) \\ z_t(x,0) = g_1 + g_2 \\ z_t(x,0) = u_t(x,0) + v_t(x,0) \\ z_t(x,0) = (u+v)_t(x,0) \end{gathered}$$

entonces z y $u + v$n son soluciones del problema

$$\begin{gathered} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = f_1(x) + f_2(x), \quad w_t(x,0) = g_1(x) + g_2(x), \end{gathered} \tag{4.15}$$

Por el teorema de existencia y unicidad enunciada en el presente capítulo, se concluye que

$$z = u + v$$

esto es:

$$L[(f_1, g_1) + (f_2, g_2)] = L(f_1, g_1) + L(f_2, g_2)$$

□

Capítulo 5

MÉTODO DE FOURIER PARA EL PROBLEMA MIXTO RELATIVO A LA ECUACIÓN DE LA CUERDA VIBRANTE CON CONDICIONES DE CONTORNO HOMOGÉNEAS

Consideremos el problema

$$u_{tt} = u_{xx} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{5.1}$$
$$u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x) \;\; 0 \leq x \leq L \tag{5.2}$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0 \tag{5.3}$$

Recordemos que debe satisfacer la condiciones de concordancia enunciadas en capitulo tres, en la ecuación (3.4)

$$f(0) = f(L). \tag{5.4}$$

Este método inicia buscando una solución del tipo:

$$u(x,t) = T(t)X(x). \tag{5.5}$$

Entonces

$$u_{tt} = T^{''}(t)X(x)$$

y

$$u_{xx} = T(t)X^{''}(x),$$

ahora sustituyendo estas expresiones en (5.1)obtenemos:

$$XT^{''} = X^{''}T \tag{5.6}$$

Como lo deseado son soluciones no triviales, tomamos $X(x_0) \neq 0$ para algún x_0. Entonces de (5.6), para cualesquiera t tenemos,

$$T^{''}(t) = [\frac{X^{''}(x_0)}{X(x_0)}]T(t) = \lambda_1 T(t).$$

De igual manera, tomando t_0 tal que $T(t_0) \neq 0$, para cualquier x obtenemos,

$$X^{''} = [\frac{T^{''}(t_0)}{T(t_0)}]X(x) = \lambda_2 X(x).$$

Pero en todo punto donde $X(x)T(t) \neq 0$, tenemos

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{T^{''}(t)}{T(t)}, \tag{5.7}$$

luego, $\lambda_1 = \lambda_2$. Llamaremos $-\lambda$ a ese valor. De (5.7) llegamos, a las siguientes ecuaciones:

$$T^{''} + \lambda T = 0 \tag{5.8}$$

$$X^{''} + \lambda X = 0 \tag{5.9}$$

De (5.4) y (5.5) resulta,

$$X(0) = X(L) = 0. \tag{5.10}$$

Consideremos ahora el problema formado por la ecuaciones (5.9)-(5.10). Éste es un problema del tipo Sturm-Liouville; el cual consiste en buscar los valores de λ para los cuales existe solución no trivial.

Analicemos tres casos:

a) $\lambda < 0$.
La solución general de (5.9) es,

$$X(x) = C_1 \exp[\sqrt{-\lambda}x] + C_2 \exp[-\sqrt{-\lambda}x].$$

Utilizando la condiciòn(5.10),nos queda

$$C_1 + C_2 = 0 \quad C_1 \exp[-\sqrt{-\lambda}L] + C_2 \exp[\sqrt{-\lambda}L] = 0.$$

De aquí obtenemos,

$$C_1 \exp[-\sqrt{-\lambda}L] = C_1 \exp[\sqrt{-\lambda}L]$$

y esto ocurrirá solamente cuando $C_1 = 0$ (y por tanto $C_2 = 0$), luego tendríamos una solución trivial.

b) $\lambda = 0$.
En este caso la ecuación (5.9) será $X'' = 0$, cuya solución general es,

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

De $X(0) = 0$, nos queda $C_1 = 0$, y de $X(L) = 0$, resulta $C_2 L = 0$; luego llegamos a una solución trivial.

c) $\lambda > 0$.
La solución general es ahora,

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x.$$

Utilizando que $X(0) = 0$, obtenemos $C_1 = 0$. La condición $X(L) = 0$ nos dice

$$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}L = 0, \tag{5.11}$$

ya que eliminamos la posibilidad de que $C_2 = 0$ que nos llevaría nuevamente a una solución trivial. Entonces de (5.11) obtenemos $\sqrt{\lambda}L = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, es decir,

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{5.12}$$

luego es suficiente tomar los valores positivos de k para que obtengamos los posibles λ, que no admiten soluciones triviales.

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{5.13}$$

A cada λ_k asociamos la familia de funciones:

$$X_k = C_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{L}), \tag{5.14}$$

de la cual tomaremos como representante la que corresponde a $C_k = 1$ por ser un valor arbitrario; por lo tanto,

$$X_k = \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{L}). \tag{5.15}$$

Las funciones X_k son llamadas funciones propias y X_k es la función propia asociada al valor propio λ_k.

Reemplazando el λ_k dado en (5.13) en (5.8), tenemos:

$$T'' + (\frac{k^2\pi^2}{L^2}T) = 0. \tag{5.16}$$

La solución general de la anterior ecuación esta dada por :

$$T_k(t) = A_K \cos(\frac{k\pi t}{L}) + B_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi t}{L}). \tag{5.17}$$

Entonces las $u_k(x,t)$ se encuentran determinadas por:

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$$

es decir

$$u_k(x,t) = \operatorname{sen}(\frac{k\Pi x}{L})[A_k \cos(\frac{k\Pi t}{L}) + B_k \operatorname{sen}(\frac{k\Pi t}{L})],$$

las cuales son soluciones de la ecuación (5.1), que satisfacen las condiciones (5.3), sea cualesquiera los valores de los coeficientes A_k y B_k.

Para que obtengamos una función que además satisfaga las condiciones (5.2), consideremos la serie,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)[A_k \cos(\frac{k\pi t}{L}) + B_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi t}{L})]. \tag{5.18}$$

Entonces

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{L}) = f(x). \tag{5.19}$$

suponiendo que la la serie puede derivarse termino a termino,obtenemos

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k\pi}{L}) B_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{L}) = g(x). \tag{5.20}$$

Si las funciones f y g admiten un desarrollo en serie de Fourier según el sistema $\{X_n(x)\}$ en $[0,L]$, la fórmulas (5.19) y (5.20) definen unívocamente los coeficientes A_k y B_k , y $u(x,t)$ estaría determinada. Es lógico pensar que si la serie (5.18) es divergente no representará una solución.

Planteemos ahora las condiciones sobre las funciones f y g para que (5.18) proporcione la solución deseada. Escribamos esta de la siguiente forma,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \tag{5.21}$$

$u(x,t)$ será continua si la serie converge uniformemente, y satisface las condiciones (5.3) y la primera de las condiciones (5.2). Como

$$|u_k(x,t)| \leq |A_k| + |B_k|,$$

será suficiente entonces que la serie mayorante converja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| + |B_k|. \tag{5.22}$$

Para la segunda condición en (5.2) se requiere que $u_t(x,t)$ sea continua y para que esto suceda necesitamos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k\pi}{L}) \operatorname{sen}(\frac{k\pi x}{L}.)\{-A_k \operatorname{sen}(\frac{k\pi t}{L}) + B_k \cos(\frac{k\pi t}{L})\}, \tag{5.23}$$

converja uniformemente, que ocurría con la convergencia de:

$$\sum_{k=1} k(|A_k| + |B_k|). \tag{5.24}$$

De igual manera para que $u \in C^2([0, L`] \times [0, \infty])$, es suficiente con la convergencia de las series de las segundas derivadas, y para ello necesitamos que la serie,

$$\sum_{k=1} k^2(|A_k| + |B_k|). \tag{5.25}$$

sea convergente.
Cumpliendo todas las condiciones dadas anteriormente obtenemos la solución buscada.

A Continuación mostramos los teoremas que nos explican la convergencia de las series mencionadas anteriormente.

Teorema 5.1. *(Condición de Cauchy para la series de potencias) Una serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in D$, *converge uniformemente en d si y solo si, dado* $\epsilon \geq 0$ *existe* N *tal que para todo* $n > N$ *tenemos* $| \sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x) | \leq \epsilon$ *para todo* $x \in D$, *para todo* $q = 1, 2, 3, ...$ *donde* D *el dominio común de todas las funciones* f_n.

Demostración. ver [6]. □

Del anterior teorema se desprende la siguiente afirmación:

Proposición 5.2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} | f_n(x) |$ *converge uniformemente en* D, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *también converge uniformemente en* D

Teorema 5.3. *Criterio M de WEIERETRASS. Sea $\langle f_n(x)\rangle$ una sucesión de funciones acotadas en D para cada n. Sea M_n una constante tal que $\mid f_n(x) \mid \leq M_n$, para todo $x \in D$, $n = 1, 2, 3, ...$ Si la serie numérica de $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en D.*

Demostración. Sea $\mid \sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x) \mid \leq \sum_{k=n+1}^{n+q} \mid f_k(x) \mid \leq \sum_{k=n+1}^{n+q} M_k(x)$, deseamos encontrar el $\epsilon > 0$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe n tal que $n \geq N$, $\sum_{k=n+1}^{n+q} M_k(x) \leq \epsilon$, por lo tanto, $\mid \sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x) \mid \leq \epsilon$. □

5.1. INTERPRETACIÓN DE LA SOLUCIÓN

La solución (5.18), obtenida anteriormente, es la suma de ciertos términos, en esta sección analizaremos algunos de estos términos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})[A_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) \cos(\frac{n\pi t}{L}) + B_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{L})] \tag{5.26}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \tag{5.27}$$

donde

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})[A_n \cos(\frac{n\pi t}{L}) + B_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{L}). \tag{5.28}$$

Sean,

$$\alpha_n^2 = A_n^2 + B_n^2 \quad \delta_n = (\frac{-L}{n\pi}) \arctan(\frac{B_n}{A_n}), \tag{5.29}$$

utilizando la fórmula del coseno de la suma de dos ángulos, se comprueba que,

$$u_n(x,t) = \alpha_n \cos[(\frac{n\pi}{L}) + (t + \delta_n)] \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}]. \tag{5.30}$$

Estas soluciones $u_n(x,t)$ se denominan armónicos. El efecto de cada una de estas funciones en un punto x_0 es el desplazamiento periódico

$$u_n(x_0,t) = \alpha_n \cos[(\frac{n\pi}{L}) + (t + \delta_n)] \operatorname{sen}[\frac{n\pi x_0}{L}]. \tag{5.31}$$

Si x_0 es tal que $\operatorname{sen}[\frac{n\pi x_0}{L}] = 0$, es decir, si $x_0 = \frac{mL}{n}$, con $m = 1, 2, ..., n-1$, entonces $u_n(x_0, t) \equiv 0$, y por lo tanto el punto permanece estacionario en todo el proceso; estos puntos son denominados nodos. Los puntos $x_0 = \frac{(2m+1)L}{2n}, m = 0, 1, ..., n-1$, son llamados antinodos; estos puntos oscilan con la amplitud máxima $\alpha_n \operatorname{sen}(\frac{k\Pi x_0}{L})$.

Consideremos $n = 1$, el armónico fundamental:

$$u_1(x,t) = \{\alpha_1 \cos[(\frac{\pi}{L}) + (t + \delta_1)]\} \operatorname{sen}[\frac{\pi x}{L}]. \tag{5.32}$$

En este caso los únicos puntos fijos de la cuerda son los extremos $x = 0, \; x = L$. Para determinar los nodos y antinodos utilizamos las siguientes ecuaciones:

$$x_0 = \frac{mL}{n}, \quad con m = 1, 2, ..., n-1 \tag{5.33}$$

$$x_0 = \frac{(2m+1)L}{2n}, \quad m = 0, 1, ..., n-1. \tag{5.34}$$

Tomemos $n = 2$,$m = 1$ en la fórmula (5.33). Tenemos $x_0 = \frac{L}{2}$ y $m = 0, 1$ en la fórmula (5.34) tenemos $x_0 = \frac{L}{4}$, $x_0 = \frac{3L}{4}$ y así sucesivamente obtenemos los nodos y antinodos respectivos. En estos casos los segmentos de cuerda entre nodos vibran independientemente.

Los primeros tres armónicos son:

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= \alpha_1 \cos(\frac{\pi}{L}) + (t + \delta_1)] \operatorname{sen}[\frac{\pi x}{L}]. \\
u_2(x,t) &= \alpha_2 \cos(\frac{2\pi}{L}) + (t + \delta_2)] \operatorname{sen}[\frac{2\pi x}{L}]. \\
u_3(x,t) &= \alpha_3 \cos(\frac{3\pi}{L}) + (t + \delta_3)] \operatorname{sen}[\frac{3\pi x}{L}].
\end{aligned}$$

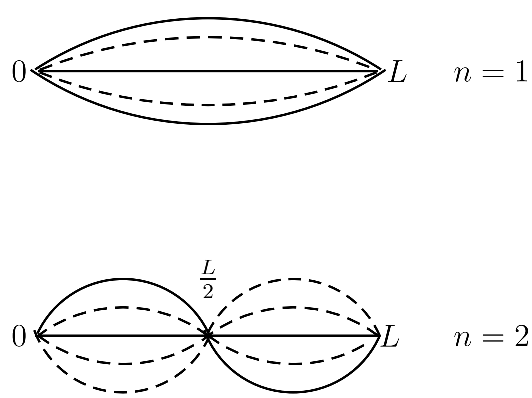

Figura 5.1: Armónicos

La frecuencia, $f_n = \frac{n\pi}{L\sqrt{\lambda_n}}$ no depende del punto, por lo tanto todos puntos tienen la misma frecuencia, por ejemplo en el primer armónico la frecuencia es, $f_1 = \frac{\pi}{L\sqrt{\lambda_1}}$.

El primer nodo normal se llama frecuencia fundamental o primera armónica se relaciona directamente con la altura del sonido que produce un instrumento de cuerda. Mientras mayor es la tensión de la cuerda, mas alto (agudo) será el sonido que produce.

Las frecuencia $f_n = nf_1$ es múltiplo entero de la frecuencia fundamental, recibiendo el nombre de armónicos o sobretonos. La segunda armónica es el primer sobretono y así sucesivamente.

Capítulo 6

MÉTODO DE FOURIER PARA LA ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA. FUNCIÓN DE GREEN

Adicionando el término $h(x,t)$ a la ecuación diferencial parcial (5.1), obtenemos la siguiente ecuación diferencial parcial no homogénea.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + h(x,t) \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{6.1}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{6.2}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0. \tag{6.3}$$

Las condiciones (6.2) y (6.3) son iniciales y de frontera respectivamente. El término $h(x,t)$ indica la acción de una fuerza externa, por tal razón las oscilaciones representadas por la función $u(x,t)$ son denominadas, forzadas. Supongamos que $h(x,t),\ fyg$ tengan los siguientes desarrollos:

$$h(x,t) = \sum_{n=1} h_n(t) \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}], \tag{6.4}$$

$$\tag{6.5}$$

donde

$$h_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(s,t) \operatorname{sen}[\frac{n\pi s}{L}] ds \tag{6.6}$$

$$f(x) = \sum_{n=1} A_n \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}], \tag{6.7}$$

$$\tag{6.8}$$

con

$$A_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(s)sin[\frac{n\pi s}{L}]ds, \tag{6.9}$$

$$g(x) = \sum_{n=1} C_n \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}], \tag{6.10}$$

$$C_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L g(s)sin[\frac{n\pi s}{L}]ds. \tag{6.11}$$

Entonces buscamos una solución del tipo,

$$u(x,t) = \sum_{n=1} u_n(t) \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}] \tag{6.12}$$

sustituyendo las expresiones de u y h en (6.1) y derivando término a término, obtenemos

$$\sum_{n=1}\{a^2(\frac{n\pi}{L}^2)u_n(t) + u_n^{''}(t) - h_n(t)\}.\operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}] = 0. \tag{6.13}$$

De esta igualdad se satisface si $u_n(t)$ es solución de la ecuación ordinaria de segundo orden:

$$u_n^{''} + [\frac{n\pi}{L}]^2 a^2 u_n(t) = h_n(t) \tag{6.14}$$

Por otro lado aplicando las condiciones iniciales, obtenemos:

$$u(x,0) = \sum_{n=1} u_n(0) \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}] = \sum_{n=1} A_n \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}] = f(x), \tag{6.15}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1} u_n^{'}(0) \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}] = \sum_{n=1} C_n \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}] = g(x). \tag{6.16}$$

De la unicidad del desarrollo de Fourier tenemos que, $u_n(t)$ debe satisfacer las siguientes condiciones,

$$u_n(0) = A_n \qquad u_n^{'}(0) = C_n. \tag{6.17}$$

En resumen u_n debe satisfacer el siguiente problema de valor inicial.

$$\begin{cases} u_n^{''} + [\frac{n\pi}{L}]^2 a^2 u_n(t) = h_n(t), \\ u_n(0) = A_n \qquad u_n^{'}(0) = C_n. \end{cases}$$

Sea $w = \frac{n\pi c}{L}$, entonces, $u_n^{''} + w^2 u_n = h_n$, aplicando transformada de laplace:

$$\mathfrak{L}\{u_n^{''} + w^2 u_n\} = \mathfrak{L}\{u_n^{''}\} + w^2\mathfrak{L}\{u_n\} + s\mathfrak{L}\{u_n'\} - u_n'(0)$$

$$
\begin{aligned}
&= s\mathcal{L}\{u_n^{'}\} - u_n^{'}(0) + w^2\mathcal{L}\{u_n\}\\
&= s[s\mathcal{L}\{u_n\} - u_n(0)] - u_n'(0) + w^2\mathcal{L}\{u_n\}\\
&= s^2\mathcal{L}\{u_n\} - su_n(0) - C_n + w^2\mathcal{L}\{u_n\}\\
&= \{s^2 + w^2\}\mathcal{L}\{u_n\} - (sA_ns + C_n)\\
&= \{s^2 + w^2\}\mathcal{L}\{u_n\} - (sA_ns + C_n) = \mathcal{L}\{h_n\}
\end{aligned}
$$

despejando $\mathcal{L}\{h_n\}$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u_n\} &= \frac{\mathcal{L}\{h_n\}}{w}.\frac{1.w}{s^2+w^2} + \frac{A_ns}{s^2+w^2} + \frac{C_n.w}{(s^2+w^2).w},\\
\mathcal{L}\{u_n\} &= \frac{1}{w}\mathcal{L}\{h_n\}.\mathcal{L}\{\operatorname{sen} wt\} + A_n\mathcal{L}\{\cos wt\} + \frac{C_n}{w}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} wt\}.
\end{aligned}
$$

aplicando transfornmada inversa

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{w}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{h_n\}.\mathcal{L}\{\operatorname{sen} wt\}\right\} + A_n\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{\cos wt\} + \frac{C_n}{w}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} wt\}\\
u_n &= \frac{1}{w}\{h_n(t).\operatorname{sen} wt\} + A_n\cos + \frac{C_n}{w}\operatorname{sen} wt\\
u_n &= \int_0^t \operatorname{sen} w(t-s)h_n(s)ds + A_n\cos wt + \frac{C_n}{w}\operatorname{sen} wt.
\end{aligned}
$$

Luego la solución particular de (6.14) es:

$$
u_n^I = [\frac{L}{n\pi a}]\int_0^t \operatorname{sen}[\frac{(n\pi a)(t-s)}{L}].h_n(s)ds.
$$

Por otra parte, la solución general de la ecuación homogénea asociada es,

$$
u_n^{II}(t) = K_n\cos[\frac{n\pi at}{L}] + L_n\operatorname{sen}[\frac{n\pi at}{L}]. \tag{6.18}
$$

Aplicando las condiciones (6.17) tenemos,

$$
K_n = A_n \qquad L_n = (\frac{L}{n\pi c})C_n.
$$

Luego,

$$
u_n^{II}(t) = A_n\cos[\frac{n\pi at}{L}] + [\frac{LC_n}{n\pi a}\operatorname{sen}[\frac{n\pi at}{L}]. \tag{6.19}
$$

Entonces,

$$
u_n(t) = u_n^I(t) + u_n^{II}(t) \tag{6.20}
$$

es la solución del sistema (6.14)-(6.17), sustituyendo (6.20) en (6.12), obtenemos :

$$u(x,t) = \sum_{n=1} (\frac{1}{n\pi a}) \int\limits_0^t \{\operatorname{sen}[\frac{(n\pi a)(t-s)}{L}] \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}].h_n(s)\} ds \tag{6.21}$$

$$+ \sum_{n=1} \{A_n \cos[\frac{n\pi act}{L}] + (\frac{1}{n\pi at}) C_n \operatorname{sen}[\frac{n\pi at}{L}]\} \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}].$$

Consideremos ahora el caso en donde la fuerza $h(x,t)$ sea periódica respecto a t, (de igual forma lo serán sus coeficientes).

Sea,

$$h_n(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t$$

Si $\omega \neq \frac{n\pi a}{L}$, de (6.21) tenemos que el coeficiente $u_n(t)$ de la ecuación (6.12) tiene la forma

$$u_n(t) = \frac{1}{n\pi a} \int_0^t \operatorname{sen}[\frac{(n\pi a)(t-s)}{L}] h_n(s) ds$$

$$+ A_n \cos[\frac{n\pi at}{L}] + (\frac{1}{n\pi at}) C_n \operatorname{sen}[\frac{n\pi at}{L}] \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}].$$

que consta de una parte periódica de frecuencia ω y otra de frecuencia $\frac{n\pi a}{L}$. Pero si para algún n, $\omega = \frac{n\pi a}{L}$, entonces, $u_n(t)$ no está acotada como se sabe a partir de (6.14); este es el caso de la llamada resonancia.

Si consideramos ahora que las condiciones iniciales nulas la solución toman la forma:

$$u^I(x,t) = \sum_{k=1} u_n^I(t) \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}],$$

sustituyendo la expresión de u_n^I, y en esta la de $h_n(t)$, intercambiando los símbolos de integral y serie , obtenemos,

$$u^I(x,t) = \int_0^t \int_0^L \frac{2}{L} \{\sum_{n=1} (\frac{L}{n\pi c}) \operatorname{sen}[\frac{(n\pi c)(t-\tau)}{L}]$$

$$\operatorname{sen}(\frac{n\pi\xi}{L})\}.h(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Es decir,

$$u^I(x,t) = \int_0^t \int_0^L G(x,\xi,t-\tau) h(\xi,\tau) d\xi d\tau \tag{6.22}$$

donde

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=1} \{\frac{1}{L} \operatorname{sen}[\frac{(n\pi c)(t-\tau)}{L}]. \operatorname{sen}[\frac{n\pi x}{L}] \operatorname{sen}[\frac{n\pi\xi}{L}], \tag{6.23}$$

la cual denominamos función de Green.

Capítulo 7

SOLUCIONES GENERALIZADAS

Anteriormente hemos venido trabajando el concepto de solución clásica, pero ¿qué sucedería en el caso de involucrar funciones no necesariamente derivables en algún punto?, buscamos introducir otro tipo de soluciones, las generalizadas, una de las razones del uso de éstas es el hecho que las funciones que proporcionan las condiciones iniciales o de frontera, sólo se conocen en la práctica de manera aproximada. Por eso la suposición de que satisfacen determinadas condiciones de suavidad es un tanto arbitraria. Existen dos formas fundamentales para definir soluciones generalizadas:

1. MÉTODO DE IDENTIDADES INTEGRALES

   Una solución generalizada de una ecuación diferencial parcial es una función que satisface una cierta identidad integral.

   El método se basa en multiplicar la ecuación que involucra la incognita por una función suficientemente suave que a su vez se anule en un conjunto apropiado, llamada función de prueba y mediante integraciones por partes, se deduce la identidad integral que satisface la solución.

   Ejemplo 7.1. *Determinar la identidad integral que satisface la solución generalizada de la siguiente ecuación,*

   $$u_t + a(x,t)u_x + b(x,t)u = f(x,t) \tag{7.1}$$
   $$\tag{7.2}$$

   multiplicando por la función de prueba g e integrando, tenemos

   $$\int gu_t + \int a(x,t)gu_x + \int b(x,t)gu = \int gf(x,t). \tag{7.3}$$

Aplicando integración por partes, siendo B el soporte compacto

$$\int\int_B gu_t dtdx = (-1)\int\int_B g_t(x,t)u(x,t)dtdx \tag{7.4}$$

$$\int\int_B agu_x dxdt = (-1)\int\int_B \frac{\partial}{\partial x}(ag)udxdt \tag{7.5}$$

$$(-1)\int\int_B g_t udxdt + \int\int_B \frac{\partial}{\partial x}(ag)udxdt + \int\int_B b(x,t)gu = \int\int_B gf(x,t)dxdt \tag{7.6}$$

$$-\int_B \left\{u[g_t + \frac{\partial}{\partial x}(ag) - bg] - gf\right\} dxdt = 0 \tag{7.7}$$

$$\tag{7.8}$$

llamando $u[gt + \frac{\partial}{\partial x}(ag) + bg] = uH(g)$, tenemos:

$$\boxed{\int_B uH(g)dxdt = fgdxdt.} \tag{7.9}$$

Definición 7.2. *$u(x,t)$ es solución generalizada de(7.1) si para toda $g \in C_0^1(B)$ satisface (7.9), conocida con identidad integral.*

2. MÉTODO DE PASO AL LÍMITE

Ejemplo 7.3. *Considerando el siguiente problema:*

$$u_t = u_x \quad a < x + t < b,\ t > 0 \tag{7.10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b \tag{7.11}$$

solución, en primer lugar haciendo el siguiente cambio de coordenadas.

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,t) = x + 2t, \\ \eta = \eta(x,t) = x + t, \end{cases} \tag{7.12}$$

el cual tiene transformación inversa dada por:

$$\begin{cases} x = 2\eta - \xi \\ t = \xi - \eta. \end{cases} \tag{7.13}$$

Considerando u como función de ξ y de η tenemos:

$$u(x,t) = u(2\eta - \xi, \xi - \eta) = v(\xi,\eta)$$

$$u_t(x,t) = 2v_\xi + v_\eta$$
$$u_x(x,t) = v_\xi + v_\eta$$

Entonces la igualdad $u_t = u_x$ *se transforma en*

$$v_\xi(\xi,\eta) = 0$$

luego deducimos que:

$$v(\xi,\eta) = f(\eta).$$

donde f *es una función arbitraria en el espacio de las funciones con primera derivada continua.*

Retomando las coordenadas iniciales

$$u(x,t) = f(x+t)$$
$$u(x,0) = \varphi(x) = f(x)$$

Entonces

$$u(x,t) = \varphi(x+t) \quad para \quad a \leq x+t \leq b. \tag{7.14}$$

Si $\varphi \in C^1[a,b]$, *es la solución del anterior problema. Si* φ *es solamente continua en* $[a,b]$, *no sería solución. Sin embargo sabemos que puede encontrarse una sucesión* $\varphi_n \in c^1[a,b]$ *tal que* φ_n *converge uniformemente a* φ, *en* $[a,b]$; *por lo tanto,* $\varphi_n(z)$ *converge uniformemente a* $\varphi(z)$, *si* $a \leq z \leq b$. *En este sentido tenemos la siguiente definición.*

Definición 7.4. $u(x,t) = \varphi(x+t)$ *es la solución generalizada de* (7.10)-(7.11) *cuando* φ *es solamente continua en* $[a,b]$.

Bibliografía

[1] AGUIRRE, Ignacio, Series de Fourier, universidad industrial de santander, 1995.

[2] CASTRO, Abel,Curso básico de ecuaciones en derivadas parciales, Addison,1997.

[3] DJAIRO, Guedes de Fiqueredo, Análise de Furier equaçôes diferencias parcias. Quinta edicao.1977 (projeto Euclides).

[4] G.ZILL,Dennis. Ecuaciones deferenciales con problemas de valores en la frontera.Thomson,Learning.Quinta edición 1999.

[5] SANCHEZ,Raúl, Fundamentos de métodos matemáticos para física e ingeniería,Noriega editores,2003.

[6] YU TAKEUCHY, Sucesiones y series tomo dos, Limusa S.A, 1980.