

**ANÁLISIS, DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE
FOURIER Y WAVELET APLICADOS A LA IDENTIFICACION DE
CARACTERISTICAS DINÁMICAS EN ESTRUCTURAS**

CARLOS ANDRÉS TORRES OVIEDO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE FISICO-MECANICAS
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL
BUCARAMANGA**

2011

**ANÁLISIS, DESCRIPCIÓN Y COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE
FOURIER Y WAVELET APLICADOS A LA IDENTIFICACION DE
CARACTERISTICAS DINÁMICAS EN ESTRUCTURAS**

CARLOS ANDRÉS TORRES OVIEDO

Proyecto de grado para optar por el título de Ingeniero Civil.

DIRECTOR

**Jabid Eduardo. Quiroga Méndez
Prof. asociado esc. de ingeniería mecánica.**

CODIRECTOR

**Iván Darío Gómez Araujo
Ingeniero Civil, Msc.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE FISICO-MECANICAS
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL
BUCARAMANGA**

2011

Now we see but a poor reflection as in a mirror; then we shall see face to face.

Now I know in part; then I shall know fully, even as I am fully known.

1 Corinthians 13:12

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCION	13
1. FUNDAMENTOS DE ANALISIS ESTRUCTURAL	22
1.1 SOBRE LAS ESTRUCTURAS Y LA DISCRETIZACIÓN.	22
1.2 ANÁLISIS MATRICIAL POR EL MÉTODO DE RIGIDEZ.	23
1.3 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UN ELEMENTO PRISMÁTICO.	24
1.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA VIGA EN MATLAB®.	26
2. SOBRE LA DINAMICA DE LAS ESTRUCTURAS	29
2.1 DINÁMICA Y TIPOS DE FUERZAS.	29
2.2 SISTEMAS DINÁMICOS DE UN GRADO DE LIBERTAD.	30
2.3 EQUILIBRIO DINÁMICO.	31
2.4 SISTEMAS DINÁMICOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.	32
2.5 FUERZA ELÁSTICA.	33
2.6 FUERZAS DE AMORTIGUAMIENTO.	34
2.7 SOBRE LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO DE LA ESTRUCTURA.	35
2.8 SOLUCIÓN NUMÉRICA AL EQUILIBRIO DINÁMICO DE D'ALEMBERT MEDIANTE LA HERRAMIENTA SIMULINK DE MATLAB®.	36
2.9 SOLUCIÓN DEL SISTEMA MEDIANTE APROXIMACIÓN MODAL.	37
3. LAS SERIES DE FOURIER Y SU IMPLEMENTACION.	39
3.1 TRANSFORMADAS DE FOURIER Y ESPECTRO DE POTENCIA.	39
3.2 SOBRE LAS VENTANAS DE PROCESAMIENTO DE DATOS.	40
3.3 EL MÉTODO DE WELCH.	42

3.4 ANÁLISIS DE LA SEÑAL DE RESPUESTA CON MATLAB®.	43
3.5 FRECUENCIAS NATURALES HALLADAS CON FFT.	45
4. ANALISIS DINAMICO POR EL METODO WAVELET	47
4.1 FUNDAMENTOS.	47
4.2 FAMILIAS.	48
4.3 WAVELET MORLET.	48
4.4 LA TRANSFORMADA WAVELET.	49
4.5 TRANSFORMADA CONTINUA CWT	49
4.6 TRANSFORMADA DISCRETA DWT	53
4.7 APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA CONTINUA WAVELET.	55
4.8 RESPUESTA DEL SISTEMA.	60
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	65
BIBLIOGRAFIA	67

LISTA DE FIGURAS

	Pág..
Figura 1.1 Herramientas de excitación usadas en el método input-output (a) Martillo de impulso; (b) vibrador de masa excéntrica; (c) Shaker electrodinámico sobre tres células de carga; (d) dispositivo de excitación. .	13
Figura 1.2 Transformada de Fourier, vista de forma general.	15
Figura 1.3 Transformada Wavelet.	16
Figura 1.4 Modelo de la estructura de acero y la ubicación de los sensores.	17
Figura 1.5 Series de desplazamiento (metros) en el tiempo en la dirección Y.	18
Figura 1.6 Funciones PSD resueltas para los desplazamientos de salida de la estructura (Output).	18
Figura 1.7 Espectros de eigenvalores normalizados.	19
Figura 1.8 Grafica de coeficientes Wavelet vs el eje de la frecuencia (scales).	20
Figura 2.1. Viga idealizada objeto de los análisis estáticos y dinámicos.	22
Figura 2.2. Forma matricial de los valores respuesta de un elemento prismático.	23
Figura 2.3 Desplazamientos unitarios y fuerzas producidas.	24
Figura 2.4 Matriz de rigidez para un elemento empotrado en sus extremos.	25
Figura 2.5. Matriz de rigidez con elementos determinados mediante el uso del teorema de Castigliano.	26
Figura 2.6. Forma de la matriz de datos de rigidez organizados.	27
Figura 2.7. Matriz condensada de la viga modelada con 5 grados de libertad.	28
Figura 3.1. Ruido blanco de entrada, encargado de excitar el sistema.	30
Figura 3.2. Modelo idealizado de un solo grado de libertad (SDOF).	30
Figura 3.3. Diagrama de cuerpo libre del sistema.	31

Figura 3.4. Componentes dinámicos separados en el sistema de un grado de libertad.	32
Figura 3.5. Marco con dos plantas de masa concentrada.	32
Figura 3.6. Matriz de amortiguamiento de Caughey de la viga en estudio.	35
Figura 3.7 Esquema diseñado en SIMULINK de Matlab® para solucionar los sistemas diferenciales del análisis dinámico.	36
Figura 3.8. Matriz de masa modal.	36
Figura 3.9. Frecuencias naturales no amortiguadas de la viga en Hz.	38
Figura 4.1 Ejemplo de una señal transiente.	40
Figura 4.2 Discontinuidades generadas en la señal (superior) por el uso de una ventana inadecuada, o sea rectangular (inferior).	41
Figura 4.3 La señal (superior) es tratada con la función Hann. Las extremidades son forzadas a cero (inferior).	41
Figura 4.4 Visualización de la ventana en el dominio del tiempo.	42
Figura 4.5 Visualización de la ventana en el dominio de la frecuencia.	42
Figura 4.6. Identificación de la primera frecuencia natural. 2.051Hz.	44
Figura 4.7. Identificación de la segunda frecuencia natural. 8.613Hz.	44
Figura 4.8. Identificación de la tercera frecuencia natural. 18.87Hz.	44
Figura 4.9. Identificación de la quinta frecuencia natural. 32.4Hz	45
Figura 4.10. Identificación de la quinta frecuencia natural. 46.76Hz.	45
Figura 5.1 Wavelet Morlet.	48
Figura 5.2 La forma en la cual se corre la onda wavelet, es decir, se traslada.	50
Figuras 5.3 Variación de la forma de la wavelet madre.	50
Figura 5.4. Nivel de correlación (C) onda madre – señal para el primer segmento.	51
Figura 5.5. Nivel de correlación para el segmento siguiente del proceso.	52
Figura 5.6. Onda escalada para repetir el proceso desde el primer segmento.	52
Figura 5.7. Mapeo de las escalas-frecuencias, el tiempo y los coeficientes.	53

Figura 5.8. Primer nivel de descomposición DWT.	54
Figura 5.9. Los componentes de baja frecuencia pueden ser descompuestos nuevamente (niveles de descomposición).	54
Figura 5.10 Grafica de relación entre las frecuencias y las escalas en la CWT.	55
Figura 5.11 Punto de mayor energía en la frecuencia dominante con FFT.	57
Figura 5.12. Respuesta al aplicar la transformada Wavelet al vector de datos $x(t)$.	57
Figura 5.13 Punto de mayor energía en la frecuencia dominante con FFT. Señal con ruido simulado.	58
Figura 5.14. Respuesta al aplicar la CWT a la misma señal incluyendo un ruido de la mitad de la amplitud de los datos limpios.	59
Figura 5.15. Mapeo 3D respuesta de la viga medida en el nodo 5. (Escala = 11).	60
Figura 5.16. Mapeo 3D respuesta de la viga medida en el nodo 5. (Escala = 40).	60
Figura 5.17. Mapeo 3D respuesta de la viga medida en el nodo 5. (Escala = 17).	61
Figura 5.18. Mapeo 3D respuesta de la viga medida en el nodo 3. (Escala = 7).	61
Figura 5.19. Mapeo 3D respuesta de la viga medida en el nodo 3. Escala = 161).	62
Figura 5.20. Respuesta 2D de la viga medida en el nodo 5. (Escala= 11). Se observa como existe otro pico (Coeficiente 40) en ese instante de tiempo, que también es una frecuencia natural.	63

RESUMEN

TITULO: Análisis, descripción y comparación de los métodos de Fourier y Wavelet aplicados a la identificación de características dinámicas en estructuras*.

AUTOR: Carlos Andrés Torres Oviedo**

PALABRAS CLAVES: Análisis dinámico, Dominio tiempo-frecuencia, Espectro de potencia, Transformada Wavelet.

RESUMEN:

El trabajo que se presenta en esta tesis de grado tiene como objetivo principal analizar, describir y comparar los métodos de Fourier y Wavelet aplicados a la caracterización dinámica de una viga simplemente apoyada (discretizada en 5 nodos en los cuales se concentra la masa), a partir del uso de vibraciones ambientales simuladas. Su forma de uso y las respuestas que brindan, en términos de claridad. Para esto se le brinda al lector una introducción a los fundamentos teóricos del análisis estructural (en cuanto a la discretización de elementos individuales y aplicación del método del análisis matricial por energía para determinar la matriz de rigidez del sistema), la dinámica (naturaleza de la señal, los sistemas de un grado de libertad, las fuerzas elásticas y de amortiguamiento, sistemas de múltiples grados de libertad y la solución numérica al equilibrio dinámico de D'Alembert por medio de la aproximación modal), la herramientas de Fourier (transformada rápida, espectro de potencia, ventanas para el procesamiento de datos y método de Welch) y Wavelet (Wavelet madre Morlet, transformada continua y su aplicación); como un contexto que enmarca la simulación que se lleva a cabo usando el programa MATLAB®. La investigación en si aporta algunas opiniones sobre la respuesta a la transformada en el dominio del tiempo – frecuencia, donde se mapean los resultados permitiendo visualizar el comportamiento, patrones y fenómenos; aunque para efectos de practicidad mediante la transformada continua se generan tantos datos que hay redundancia, así que en estructuras muy complejas con muchas formas modales el esfuerzo computacional sería bastante considerable. Aun así, para la viga en estudio la diferencia en tiempo de cómputo entre los dos métodos es mínima (debido a la relativa poca cantidad de datos).

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ingenierías fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: Jabid Eduardo Quiroga Méndez. Codirector: Iván Darío Gómez Araujo.

ABSTRACT

TITLE: Analysis, description and comparison of Fourier and Wavelet methods applied to the identification of dynamic characteristics in structures^{*}.

AUTHOR: Carlos Andrés Torres Oviedo^{**}

KEYWORDS: Dynamic analyses, time-frequency domain, power spectrum, Wavelet transform.

SUMMARY:

The main objective of the work presented in this thesis is to analyze, describe and compare the Fourier and Wavelet methods applied to the dynamic characterization of a simply supported beam (discretized in 5 nodes in which the mass is concentrated), from the use of simulated environmental vibrations. Its usage and the answers they provide, in terms of clarity. For this, the work gives the reader an introduction to the theoretical foundations of structural analysis (in terms of discretization of individual elements and applying the method of matrix analysis by energy to determine the stiffness matrix of the system), the dynamic (nature of signal, systems with one degree of freedom SDOF, the elastic and damping forces, systems with multiple degrees of freedom MDOF and the numerical solution to the dynamic equilibrium of D'Alembert through modal approach), the Fourier tool (rapid transform FFT, power spectrum, windows for data processing and Welch method) and Wavelet (Morlet mother wavelet, continuously transform CWT and its application); as a context for the simulation that is performed using the MATLAB ® program. The research does provide some views about the response of the time-frequency domain transform, where the results are mapped allowing to visualize the behavior, patterns and phenomena; although for practical purposes, the continuous transformation generates so much data that it makes redundancy, so in very complex structures with many modal forms the computational effort would be considerable. Still, for the beam under study the difference in computation time between the two methods is minimal (due to the relatively small amount of data).

^{*} Graduation Project

^{**} Physical-Mechanics Faculty of Engineering. School of Civil Engineering Director: Jabid Eduardo Quiroga Méndez. Codirector: Iván Darío Gómez Araujo.

INTRODUCCION

Sobre las necesidades e implicaciones.

Debido al continuo desarrollo de las actividades constructivas humanas, se hace necesario abordar las herramientas de análisis, diseño y evaluación de estructuras como sistemas que necesariamente deben evolucionar para aportar cada vez mas información de forma rápida y confiable sin requerir mediciones costosas y de difícil aplicación como las de los métodos de vibración forzada: input-output [Caetano y Cunha, 2006].

Figura 1.1 Herramientas de excitación usadas en el método input-output (a) Martillo de impulso; (b) vibrador de masa excéntrica; (c) Shaker electrodinámico sobre tres células de carga; (d) dispositivo de excitación.

[K.U. Leuven].



Frente a estas exigencias se presenta el método de medición de vibraciones ambientales (AVM), que ofrece las ventajas de tener una fácil ejecución y un bajo costo, permitiendo formular un modelo estructural que por desgracia se encuentra restringido al rango elástico [Malaga, Christian y Gómez, Oscar].

Un aspecto que se debe considerar, es el de los cambios en las propiedades estructurales debido al paso del tiempo y el clima actuante; razones que implican un monitoreo periódico para garantizar una integridad dentro de los rangos que la ley considera como seguros y permisibles. Así que el procesamiento digital de señales (DSP) es el que nos permite interpretar dichos datos, como una señal discretizada en tiempo y amplitud. Los requisitos necesarios para este proceso son dos: un algoritmo y una maquina computadora encargada de implementar el algoritmo y realizar rápidamente los cálculos [Vignolo, Juan, 2008].

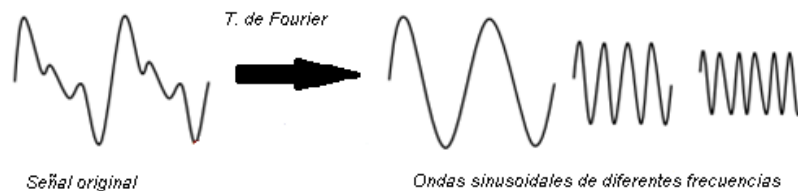
Acerca de las vibraciones ambientales.

Ya que las vibraciones ambientales son fenómenos no determinísticos, se hace necesario analizarlos desde un modelo estocástico cuyo funcionamiento puede ser interpretado como una función de probabilidades. Dichas probabilidades, a diferencia de los modelos probabilísticos ordinarios, pueden cambiar en función del tiempo; es decir: un proceso de desarrollo aleatorio. Al respecto, podemos considerar el caso de estudio del trabajo de Malaga y Gómez [2], en el cual se presentan dos torres de apartamentos en la ciudad de Grenoble, Francia. En dicha región se existen fallas activas que generan una zona de riesgo sísmico moderado. En 2006 se midieron las vibraciones ambientales y se determinaron las frecuencias naturales del sistema a partir de modelos teóricos sencillos que (como se menciona en las conclusiones) permiten reducir tiempo e instrumentos ya que basta solo un sensor ubicado en el piso superior para definir la razón entre frecuencias modales para poder estimarlas.

Análisis de Fourier.

Es en este punto donde interviene el análisis de Fourier o análisis armónico; el cual busca relacionar funciones sinusoidales con sistemas lineales variables en el tiempo (LTI). Ya que al pasar cualquier función sinusoidal a través de un sistema LTI obtenemos una versión de la misma función pero escalada, así que lo que realmente hacemos es determinar el efecto de la señal a analizar sobre todos los sinusoidales posibles, es decir, la función de transferencia de nuestro fenómeno aleatorio. Este paso de los sinusoidales a través de cualquier sistema cuya respuesta se genera en el tiempo mediante una convolución; resulta en la frecuencia una multiplicación, que es una operación mucho más sencilla; razón por la cual el análisis en el dominio de la frecuencia por medio de Fourier es tan popular.

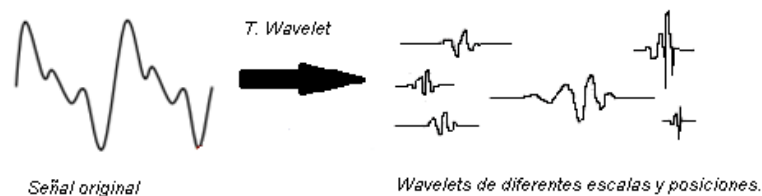
Figura 1.2 Transformada de Fourier, vista de forma general.



Análisis con Wavelet.

Por otra parte, el campo del análisis de señales se ha beneficiado con la reciente teoría de Wavelets; método que separa las funciones de la señal en términos de versiones trasladadas y dilatadas (o contraídas) de una *onda madre*. Estas formas de representar la señal analizada también puede considerarse una forma de análisis armónico que además brinda información en el tiempo y la frecuencia de forma simultánea, aunque con algunos sacrificios de resolución como se verá más adelante.

Figura 1.3 Transformada Wavelet.



A pesar del principio de incertidumbre de Heisenberg que afecta la resolución del análisis de la señal [Holcomb y Lee, 2001], es importante mencionar que esta herramienta permite cambiar las resoluciones y las frecuencias modificando la dimensión de las ventanas para ubicar los picos de las señales entre rangos de tiempo y frecuencia de forma grafica. Las transformadas Wavelet (WT) están divididas en transformadas Wavelet continuas (CWT) y transformadas Wavelet discretas (DWT), donde cada una de estas ofrece buena resolución temporal pero baja resolución en sucesos de alta frecuencia y viceversa.

Ventajas del uso de Wavelets.

Tal vez, la ventaja más importante de este método de análisis consista en que se especializa en señales que contienen pulsos o intermitencias, sucesos que no tienen periodicidad y que deben ser aislados de alguna manera para identificarlos. En el método de Fourier, todo el espectro se ve afectado por un impulso, mientras que en Wavelet solo se modifican algunos coeficientes, sin afectar al resto de los componentes de la respuesta. Desde un punto de vista computacional, la transformada discreta Wavelet (DWT) es más rápida que la transformada rápida de Fourier (FFT) para cualquier muestra de datos.

Desventajas del uso de Wavelets.

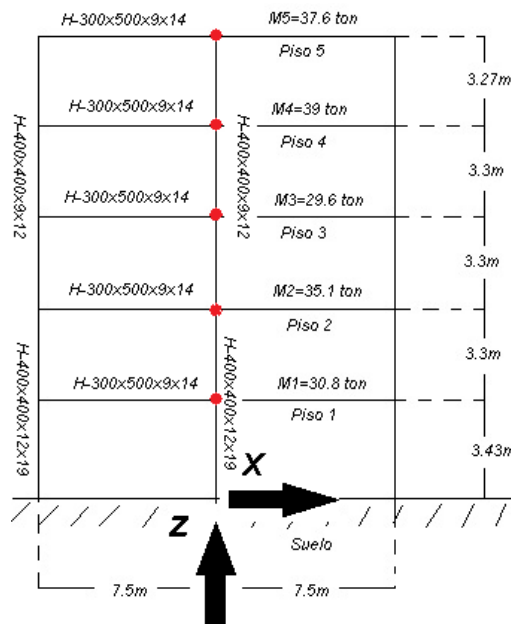
Al ser un método relativamente reciente, podríamos decir que no cuenta con un rigor matemático establecido, ni existe una unificación de métodos ni notaciones; esto debido en parte a la gran cantidad de documentos y publicaciones de autores

de diversas nacionalidades que no cuentan con un estándar sobre las formalidades que la información requeriría para su completo entendimiento.

Ejemplo de aplicación de Wavelets en la ingeniería civil.

De acuerdo al trabajo publicado por Thai-Hoa Le y Yukio Tamura [5], podemos observar como una estructura de acero de 5 plantas ubicada en el Disaster Prevention Research Institute (DRPI) de la universidad de Kyoto es monitoreada para cuantificar su respuesta frente a las excitaciones provenientes de la vibración ambiental.

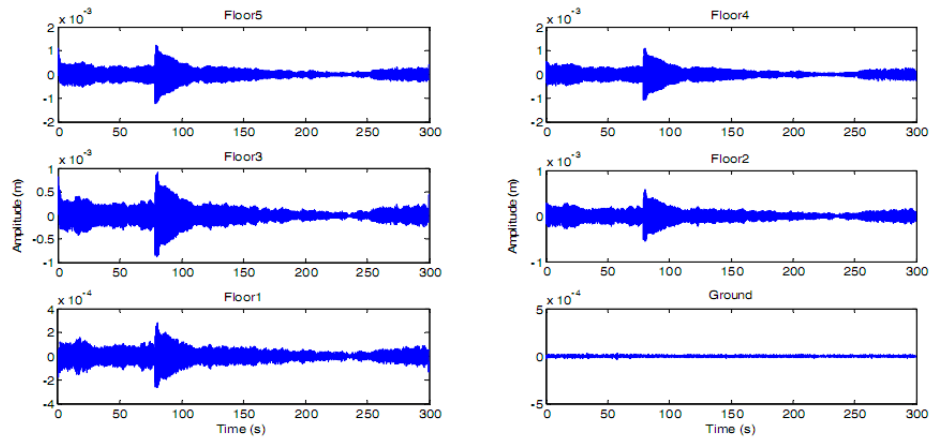
Figura 1.4 Modelo de la estructura de acero y la ubicación de los sensores.



Se midieron los desplazamientos de cada uno de los pisos por 30 minutos con una frecuencia de muestreo de 100Hz. Ya que el comportamiento dinámico solo podía medirse en la dirección Y, el documento analiza exclusivamente estas componentes. Usando una descomposición en el dominio de la frecuencia (FDD) mediante el espectro de densidad de poder (PSD), obtuvieron para los

desplazamientos medidos, las frecuencias naturales dominantes (para cada una de las mediciones por piso).

Figura 1.5 Series de desplazamiento (metros) en el tiempo en la dirección Y.



Ya que los sensores instalados brindan una recopilación de datos de velocidad, se hizo necesario aplicar una integración a la salida durante el intervalo de tiempo analizado.

Figura 1.6 Funciones PSD resueltas para los desplazamientos de salida de la estructura (Output).

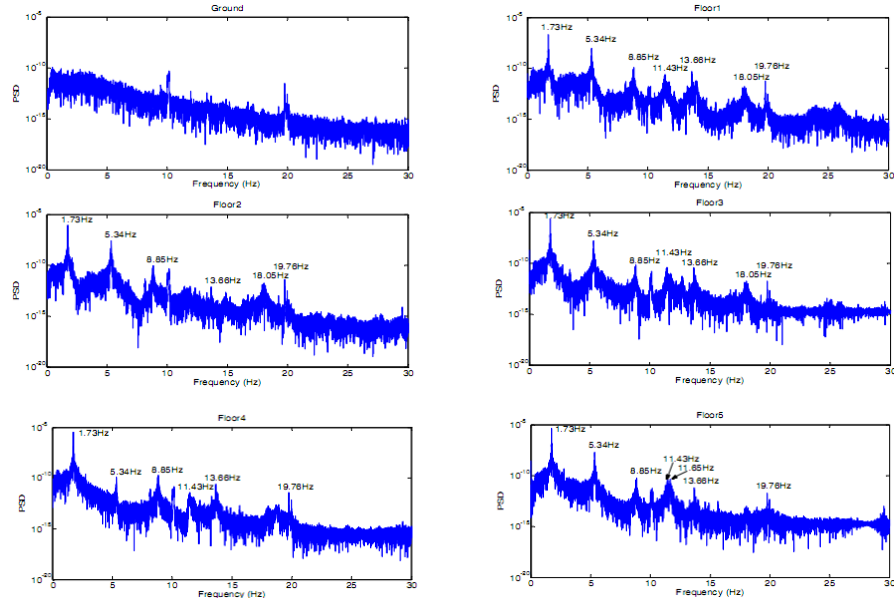
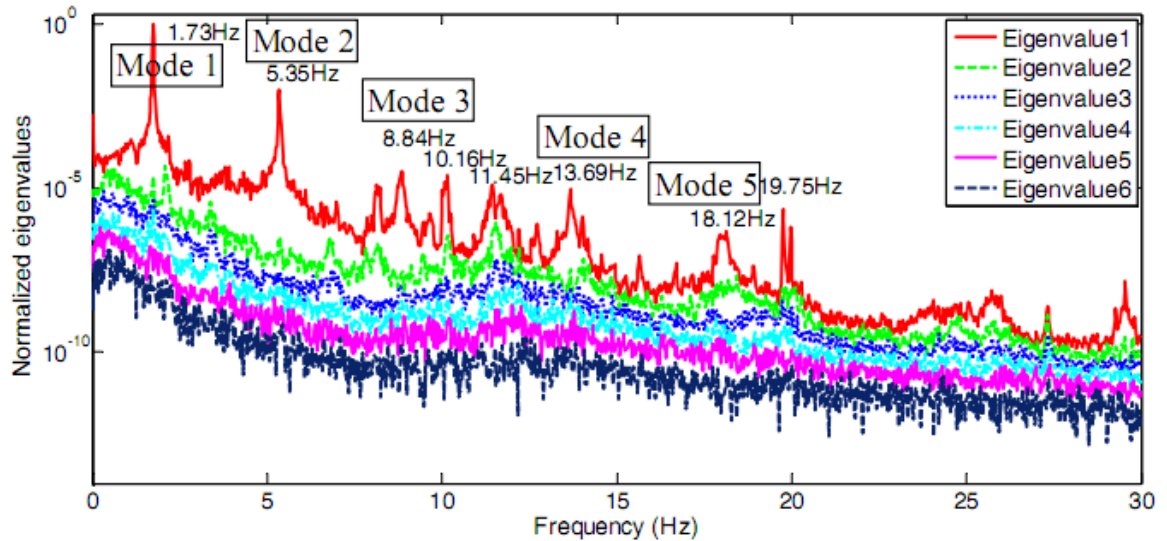


Figura 1.7 Espectros de eigenvalores normalizados.



En resumen, la respuesta medida en cada piso (velocidades, desplazamientos) a causa de la excitación externa ambiental por el viento, se trata mediante un sistema de transformación, en el cual los datos de entrada, analizados, arrojan una salida en la cual se contienen las características de la estructura, permitiendo una caracterización que posiblemente y con periodicidad del procedimiento, sirva para identificar posibles daños o deterioros en alguno de los componentes mediante una comparación rigurosa de las respuestas.

Por otra parte tenemos el mismo análisis pero con la herramienta de la transformada Wavelet, usando todos los datos de los desplazamientos y una Wavelet Morlet, los autores encuentran las diferentes componentes pero ubicadas en distintos periodos de tiempo; por ejemplo para $\tau = 80$ segundos, observamos la presencia de la primera frecuencia natural del sistema como un gran pico, sin embargo esta forma no se mantiene a lo largo del tiempo.

Figura 1.8 Grafica de coeficientes Wavelet vs el eje de la frecuencia (scales).

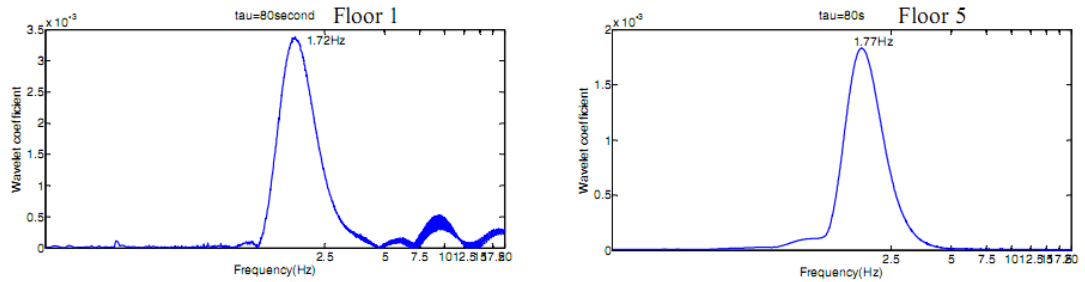


Tabla 1.1 Comparación de frecuencias naturales.

Mode	FE	FDD	Diff. %	WT	Diff. %
Mode 1	1.69	1.73	2.3	1.77	4.5
Mode 2	5.22	5.34	2.2	5.91	11
Mode 3	9.26	8.85	4.6	9.12	1.5
Mode 4	13.6	13.66	0.9	14.02	2.9
Mode 5	17.8	18.05	1.7	NA	NA

Como conclusión, los autores expresan que el FDD puede extraer frecuencias naturales en un momento arbitrario, es decir, con una resolución arbitraria, mientras que WT necesita mayor resolución localizada para hacer esto mismo, sobre todo en los modos no dominantes.

Objetivo de la tesis.

Analizar, describir y comparar los métodos de Fourier y Wavelet aplicados a la caracterización dinámica de una viga simplemente apoyada (discretizada en 5 nodos en los cuales se concentra la masa), a partir del uso de vibraciones ambientales simuladas. Su forma de uso y las respuestas que brindan, en términos de confiabilidad y claridad.

Organización de la tesis.

La tesis se ocupa en primer lugar de exponer los aspectos fundamentales del análisis estructural y su aplicación por medio de la herramienta computacional MATLAB®; posteriormente, se sintetizan algunas de las características de la dinámica estructural, que serán empleadas posteriormente para analizar el sistema MDOF con la ayuda de una excitación externa aleatoria que representa el AVM, para este procedimiento se usara la herramienta SIMULINK®; de tal manera que las aceleraciones que en mediciones reales serian tomadas por acelerómetros, en este caso son almacenadas en una matriz de salida del sistema.

Luego de esto, es necesario describir el funcionamiento de la transformada de Fourier y su uso con MATLAB®; para extraer los espectros de cada una de las respuestas por nodo de la estructura y determinar la ocurrencia o no de picos en las graficas.

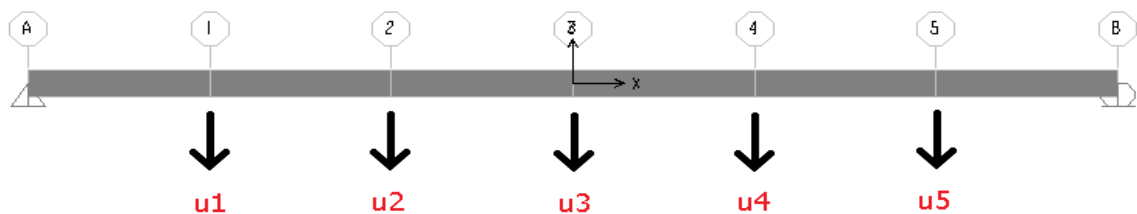
Finalmente, los mismos datos analizados por Fourier (FFT) son tratados por el método Wavelet para obtener las frecuencias naturales de una forma apreciable e indicar al usuario de la herramienta que problemas pueden surgir y como tratarlos. A esto sumamos también la comparación de los métodos usados y las conclusiones del proceso en su totalidad; así como los temas que pueden surgir del mismo para posteriores trabajos.

1. FUNDAMENTOS DE ANALISIS ESTRUCTURAL

1.1 SOBRE LAS ESTRUCTURAS Y LA DISCRETIZACIÓN.

Podemos decir que toda estructura es una cadena elástica que posee una estabilidad en cada uno de los elementos finitos que la componen [Aguilar, 2004]. Generalmente se diseñan y construyen con el propósito de soportar cargas, tanto estáticas como dinámicas (el cual es este caso); gracias al proceso de idealización que genera un modelo matemático lo suficientemente simple como para ser evaluado en simulaciones antes de la puesta en marcha de la obra. Dentro del desarrollo de la presente tesis, se propone un modelo que es la representación de una viga simplemente apoyada con características mecánicas conocidas (dimensiones, modulo de elasticidad, material, peso) y discretizado en cinco nodos que conectan seis elementos además de ser los puntos de aplicación del peso (masas nodales), que esta uniformemente distribuido de manera natural en toda la longitud de la viga.

Figura 2.1. Viga idealizada objeto de los análisis estáticos y dinámicos.



Los grados de libertad considerados en el modelo se muestran en la figura 2.1 y se entienden como las deflexiones verticales permitidas u_1 hasta u_5 causadas por la excitación ambiental mencionada en la introducción del trabajo. El análisis se desarrolla dentro del rango lineal y elástico del material, con el fin de efectuar

simplificaciones importantes en los cálculos; de forma tal que los efectos producidos por las cargas generan una variación lineal, presentándose el principio de superposición de causas y efectos. [Gonzales Cuevas, 2002]

1.2 ANÁLISIS MATRICIAL POR EL MÉTODO DE RIGIDEZ.

Para proceder de acuerdo a esta metodología se hace necesario establecer las siguientes hipótesis: La estructura se comporta linealmente (responde a la ley de Hooke), deformaciones pequeñas, los segmentos que componen la viga son rectos y de sección constante, el modulo de elasticidad no varía a lo largo del análisis, hay homogeneidad e isotropía. Además cabe aclarar que por la geometría de la viga, las coordenadas locales coinciden con las globales, por lo tanto no es necesario transformarlas.

El método consiste en expresar la rigidez de una estructura en forma de matriz, donde para un elemento prismático sometido a desplazamientos en sus extremos mediante la aplicación de cargas unitarias; generando cortante, momento flector y fuerza axial. Así, mediante el uso de un método energético (Teorema de Castigliano), es posible generar un modelo de la forma:

Figura 2.2. Forma matricial de los valores respuesta de un elemento prismático.

$$[A]_{m \times n} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esto se realiza con el fin de expresar cada uno de los elementos estructurales como un modelo matemático de valores finitos cuyas propiedades pueden representarse de forma matricial. Mediante la teoría del medio elástico continuo,

se pueden determinar las características elásticas de cada elemento para posteriormente efectuar el ensamblaje y resolver el sistema lineal. La relación entre la acción a la cual se somete la estructura y la respuesta generada se puede representar mediante:

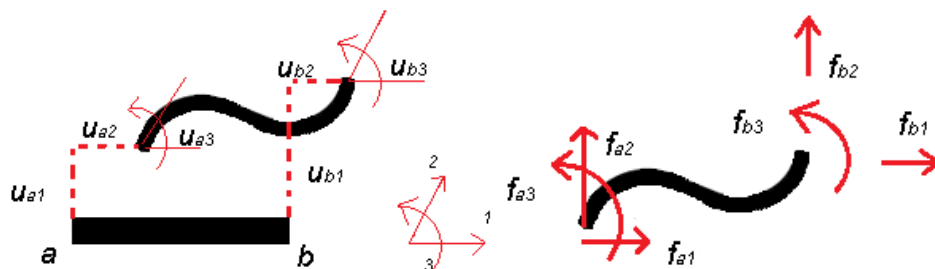
$$[F] = [K] * [U] \quad (2.1)$$

Donde $[U]$ es el vector de desplazamientos, $[K]$ es la matriz de rigidez y $[F]$ es el vector de fuerzas externas.

1.3 MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UN ELEMENTO PRISMÁTICO.

Dado un elemento prismático, cuyos apoyos se desplazan un valor unitario en dirección de los grados de libertad restringidos (suponiendo que son dos empotramientos perfectos), se generan fuerzas debido a la ley de Hooke como respuesta ante los movimientos del sistema; donde los valores de fuerzas y desplazamientos aparecen como vectores, mientras que la rigidez aparece como una matriz cuadrada.

Figura 2.3 Desplazamientos unitarios y fuerzas producidas.



De forma tal que fuerzas y desplazamientos comparten coordenadas i, j , las cuales indican el nodo y la dirección del desplazamiento respectivamente. Así al ver un elemento K_{a3b2} de la matriz, podemos decir que se trata de una fuerza f_{a3}

generada por un desplazamiento U_{b2} . [Maldonado R, Esperanza y Chio Cho, Gustavo, 1995]

Figura 2.4 Matriz de rigidez para un elemento empotrado en sus extremos.

$$\begin{bmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \\ F_{a3} \\ F_{a4} \\ F_{a5} \\ F_{a6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{a1a1} & K_{a1a2} & K_{a1a3} & K_{a1b1} & K_{a1b2} & K_{a1b3} \\ K_{a2a1} & K_{a2a2} & K_{a2a3} & K_{a2b1} & K_{a2b2} & K_{a2b3} \\ K_{a3a1} & K_{a3a2} & K_{a3a3} & K_{a3b1} & K_{a3b2} & K_{a3b3} \\ K_{b1a1} & K_{b1a2} & K_{b1a3} & K_{b1b1} & K_{b1b2} & K_{b1b3} \\ K_{b2a1} & K_{b2a2} & K_{b2a3} & K_{b2b1} & K_{b2b2} & K_{b2b3} \\ K_{b3a1} & K_{b3a2} & K_{b3a3} & K_{b3b1} & K_{b3b2} & K_{b3b3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \\ U_{a3} \\ U_{a4} \\ U_{a5} \\ U_{a6} \end{bmatrix} \quad *$$

Cada uno de los términos debe ser definido, para lo cual se utiliza uno de los métodos energéticos llamado el Teorema de Castigliano; donde partiendo de las ecuaciones de trabajo y energía se deducen cada uno de los elementos de la matriz de rigidez.

$$U = \frac{1}{2} \sum P * \delta = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_f^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V^2}{GA_r} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_t^2}{GJ} ds \quad (2.2)$$

Así, para un desplazamiento unitario en dirección axial, tenemos:

$$U_N = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} ds \rightarrow \frac{\partial U_N}{\partial P_i} = \int_0^L \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_i} \quad (2.3)$$

Igualando a uno y resolviendo obtenemos los términos de la primera columna:

$$N_a = \frac{AE}{L}; N_b = -\frac{AE}{L} \quad (2.4)$$

Para el caso de un movimiento unitario en la dirección vertical del apoyo; donde se genera un cortante y un momento.

$$u_{a2} = 1 = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_a} ds \quad (2.5) \quad u_{a3} = 0 = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_a} ds \quad (2.6)$$

Nuevamente igualando y resolviendo obtenemos los términos de la segunda columna:

$$M_a = \frac{6EI}{L^2}; V_a = \frac{12EI}{L^3} \quad (2.7) \qquad M_b = \frac{6EI}{L^2}; V_b = \frac{-12EI}{L^3} \quad (2.8)$$

Finalmente dándole un valor de una unidad al giro de un apoyo, nuevamente se genera un cortante y un momento; al aplicar (2.5) y (2.6), igualando y resolviendo obtenemos los términos de la tercera columna:

$$M_a = \frac{4EI}{L}; V_a = \frac{6EI}{L^2} \quad (2.9) \qquad M_b = \frac{2EI}{L}; V_b = -\frac{6EI}{L^2} \quad (2.10)$$

De esta manera obtenemos para todos los posibles movimientos de los nodos a y b la matriz de rigidez que se encarga de relacionar los desplazamientos de un nodo de la estructura con las fuerzas desarrolladas dentro de la misma.

Figura 2.5. Matriz de rigidez con elementos determinados mediante el uso del teorema de Castigliano.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

1.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA VIGA EN MATLAB®.

Dadas las anteriores aclaraciones relacionadas con los conceptos de rigidez y métodos energéticos, es necesario reemplazar los valores de la viga simplemente apoyada en la matriz de rigidez, de tal manera que resulte una matriz de 6x6 para cada uno de los 6 elementos discretos. Las longitudes son iguales en cada

segmento $L=0.6\text{m}$, la sección transversal es de $0.1\text{m} \times 0.1\text{m}$, resultando así una inercia $I=1.3333\text{e-}4$; el modulo de elasticidad del material es $E=1.8\text{e}10\text{N/m}^2$.

Ya que en los nodos de unión entre los segmentos las matrices se traslapan, es decir, algunos de sus elementos se suman, se hace necesario en primer lugar, eliminar los grados de libertad que no se desplacen debido a los apoyos impuestos, en este caso los movimientos axiales, eliminando filas 1,4 y columnas 1,4. Como segundo punto, los grados de libertad restantes se organizan colocando primero filas y columnas con desplazamiento vertical (5) a un lado, mientras que los giros se colocan al otro lado, también moviendo filas y columnas. Tercero, una vez realizado este procedimiento, se efectúa una condensación estática [R.J. Guyan, 1965]; donde al tener organizada la matriz de datos de esta forma:

Figura 2.6. Forma de la matriz de datos de rigidez organizados.

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix}$$

Nótese que la matriz K_{mm} es cuadrada y su tamaño es igual a los grados de libertad que se desean analizar. Así que se procede de acuerdo a las operaciones matriciales del método de Guyan, donde se define que:

$$\tilde{K}_{mm} = T_{Nm}^T K_{NN} T_{NN} = K_{ss} - K_{ms} K_{ss}^{-1} K_{sm} \quad (2.11)$$

Siendo \tilde{K}_{mm} la matriz de rigidez condensada.

Aplicando la programación realizada en el programa MATLAB® se determinó esta matriz condensada llamándola **Kc**; para los valores anteriormente mencionados de sección, geometría y material; y considerando 5 grados de libertad con desplazamientos verticales en cada uno de los nodos en los que se concentrara la masa de la estructura.

Figura 2.7. Matriz condensada de la viga modelada con 5 grados de libertad.

$K_c =$

$1.0e+006 *$

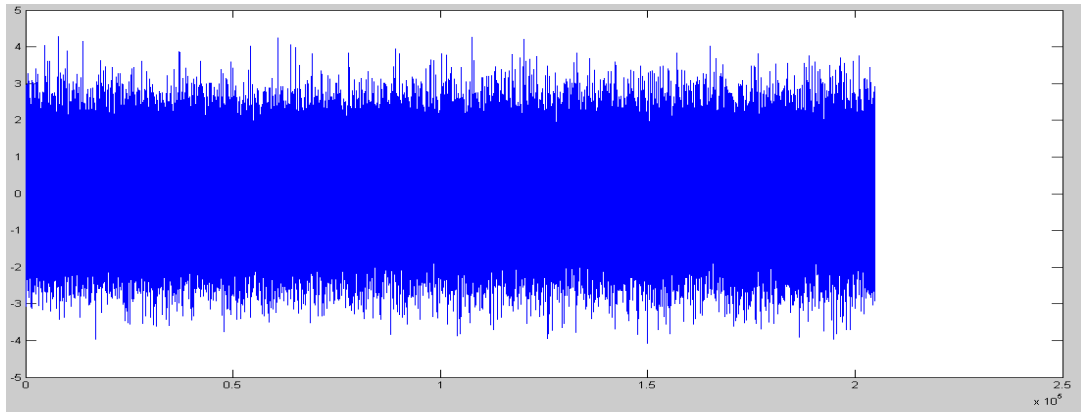
6.8590	-6.6026	2.8846	-0.7692	0.1923
-6.6026	9.7436	-7.3718	3.0769	-0.7692
2.8846	-7.3718	9.9359	-7.3718	2.8846
-0.7692	3.0769	-7.3718	9.7436	-6.6026
0.1923	-0.7692	2.8846	-6.6026	6.8590

2. SOBRE LA DINAMICA DE LAS ESTRUCTURAS

2.1 DINÁMICA Y TIPOS DE FUERZAS.

La dinámica estructural es el estudio de las características y los comportamientos de las estructuras producidas por las cargas dinámicas que pueden en un momento dado actuar en ellas, es decir, cargas externas que varían con el tiempo. Así mismo, estas fuerzas pueden ser periódicas (cuyos valores se repiten en un periodo determinado), o no periódicas (los valores no se repiten siguiendo un ciclo); según sea su variación en el tiempo. Podemos encontrarlas en la naturaleza en forma determinística (donde cada valor puede ser determinado por una expresión matemática) y de manera aleatoria (se presenta una gran fluctuación en su comportamiento). Para el caso específico de esta tesis, la señal de entrada al sistema es un ruido blanco generado gracias al programa Matlab®; además a la salida de las aceleraciones medidas en cada uno de los 5 nodos, se suma un ruido directo que corresponde al 1% del valor de la amplitud de la excitación de entrada, con el fin de simular perturbaciones debidas al ruido electrónico que aparecería al localizar acelerómetros en una estructura real. La razón por la cual se elige este tipo de excitación es la complejidad que representa, además, se entiende como un conjunto de valores aleatorios con una varianza cero, que en teoría, independientemente de la magnitud que puedan tener, lo importante son las frecuencias, que al ser muy numerosas excitan en algún instante las frecuencias naturales de la estructura permitiendo identificarlas.

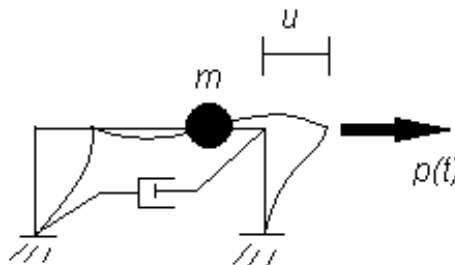
Figura 3.1. Ruido blanco de entrada, encargado de excitar el sistema.



2.2 SISTEMAS DINÁMICOS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

Es necesario modelar ahora de forma simple una estructura con un solo grado de libertad (SDOF) para comprender la mecánica del proceso de análisis. Por lo tanto, teniendo en cuenta que por cada grado de libertad o movimiento permitido de una estructura, se genera un modo de vibración o forma de deflexión, que depende directamente de la masa, la rigidez y el amortiguamiento; así una simplificación que podemos analizar consiste en un piso que concentra toda su masa en su centro geométrico, y se somete a una fuerza dependiente del tiempo $p(t)$ que actúa en la dirección u .

Figura 3.2. Modelo idealizado de un solo grado de libertad (SDOF).



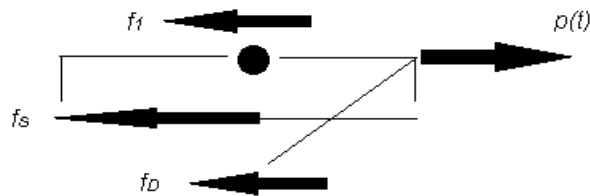
2.3 EQUILIBRIO DINÁMICO.

Apelando a la existencia de una fuerza inercial ficticia, función de la masa de la estructura; consideremos que el sistema se debe encontrar en equilibrio para cualquier instante de tiempo de acuerdo al principio de D'Alembert [Chopra, 1995]. Así, podemos aplicar la segunda ley de movimiento de Newton (Figura 3.3) (donde las unidades de la masa son fuerza/aceleración), para desarrollar la ecuación de la estructura idealizada sometida a una fuerza que varía con el tiempo, con una rigidez que actúa dentro del rango lineal y un amortiguamiento propio que se debe a las características de los elementos y juntas; que para efectos de cálculo generalmente se representa mediante un amortiguador viscoso.

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \quad (3.1)$$

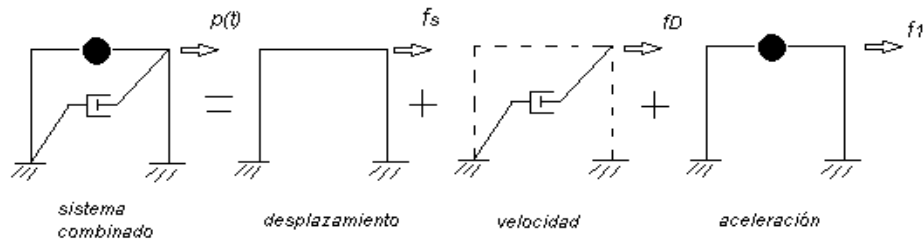
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (3.2)$$

Figura 3.3. Diagrama de cuerpo libre del sistema.



La ecuación 3.2 es la representación de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas que gobiernan el desplazamiento $u(t)$ de un grado de libertad sujeto a la fuerza dinámica $p(t)$; esto significa que para resolver el sistema se debe hacer de forma simultánea. Podemos visualizar el sistema (Figura 3.4) como la combinación de tres componentes separados: la rigidez, referida al desplazamiento, el amortiguamiento dependiente de la velocidad y la masa relacionada con la aceleración.

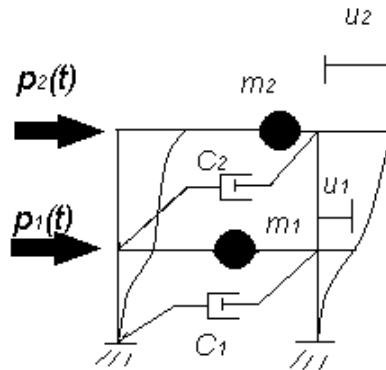
Figura 3.4. Componentes dinámicos separados en el sistema de un grado de libertad.



2.4 SISTEMAS DINÁMICOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

Para este tipo de análisis, se debe considerar lo anteriormente dicho pero aplicado a cada uno de los nodos que conforman la estructura; de esta manera obtenemos matrices de rigidez, amortiguamiento y masa; representando un sistema así:

Figura 3.5. Marco con dos plantas de masa concentrada.



Observamos cómo cada masa nodal se encuentra sujeta a fuerzas externas, se consideran los planos paralelos a dichas fuerzas infinitamente rígidos, de tal manera que todos los puntos ubicados sobre esa línea se mueven una misma longitud independientemente de si se encuentran cerca del centro de gravedad o a los extremos, así mismo se ignoran los efectos de las fuerzas axiales sobre la

rigidez de las columnas. El número de desplazamientos independientes requeridos para definir las posiciones desplazadas de todas las masas respecto a su posición de equilibrio se denominan grados de libertad [Chopra, 1995]. Usando nuevamente la segunda ley de movimiento de Newton, obtenemos de manera general:

$$m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{Sj} = p_{j(t)} \quad (3.3)$$

Como la ecuación 3.3 contiene dos ecuaciones para $j = 1$ y $j = 2$, podemos escribir de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Donde f_{Dj} es el vector de fuerzas viscosas y f_{Sj} es el vector de fuerzas elásticas.

2.5 FUERZA ELÁSTICA.

Asumiendo un comportamiento lineal en el desplazamiento relativo de cada piso.

$$\Delta_j = u_j - u_{j-1} \quad (3.5)$$

Se introduce el término (3.6), donde se establece el cortante V_j :

$$V_j = k_j \Delta_j \quad (3.6)$$

Tenemos la rigidez lateral como la suma de todas las rigideces de las columnas de un piso. O sea, para elementos de este tipo, empotrados en sus extremos se tiene:

$$k_j = \sum_{columnas} \frac{12EI}{h^3} \quad (3.7)$$

La fuerza elástica en el primero de los pisos está compuesta por:

$$f_{S1} = f_{S1}^b + f_{S1}^a \quad (3.8)$$

Si sustituimos en 3.6 y establecemos que:

$$\Delta_1 = u_1 \quad (3.9) \quad \Delta_2 = u_2 - u_1 \quad (3.10)$$

Encontramos:

$$f_{S1} = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) \quad (3.11) \quad f_{S2} = k_2 (u_2 - u_1) \quad (3.12)$$

De esta manera podemos encontrar la relación matricial para las fuerzas elásticas:

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \rightarrow f_s = ku \quad (3.13)$$

Donde la matriz K es la rigidez del sistema hallada de la forma descrita en el capítulo I.

2.6 FUERZAS DE AMORTIGUAMIENTO.

Las fuerzas de amortiguamiento están directamente relacionadas a la velocidad relativa de cada piso y al coeficiente de amortiguamiento del piso en estudio.

$$V_j = c_j \dot{\Delta}_j \quad (3.14)$$

Procediendo de igual manera que al hallar las fuerzas elásticas:

$$f_{D1} = c_1 \dot{u}_1 + c_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \quad (3.15) \quad f_{D2} = c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \quad (3.16)$$

Y nuevamente de forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \rightarrow f_D = c\dot{u} \quad (3.17)$$

2.7 SOBRE LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO DE LA ESTRUCTURA.

El amortiguamiento es el retiro de energía mecánica presente en un sistema vibratorio, que por lo general se transforma en calor. Todas las estructuras y materiales poseen algún amortiguamiento que es una propiedad intrínseca. Para efectos del análisis dinámico, se clasifican en: Viscoso, Histerético, Friccionante y modal, estando dentro de este último el de tipo proporcional (Rayleigh y Caughey) y el no-proporcional (energía). Debido a la disipación de energía por las deformaciones estructurales (amortiguamiento proporcional a la rigidez) y gracias a la fricción que se presenta con el aire (amortiguamiento proporcional a la masa), Caughey propone un tipo general de matriz de amortiguamiento “C” combinando estos dos fenómenos, que se puede usar para más de dos formas modales como se muestra en (3.18) donde j expresa el número de grados nodales de libertad que puede llegar hasta N [Caughey, 1960].

$$C = M \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} a_j (M^{-1}K)^j \right\} \quad (3.18)$$

Mediante esta metodología y usando un *script* programado en Matlab®, proponiendo un porcentaje de amortiguamiento modal del 5% para los 5 modos de vibración; se genera la matriz de amortiguamiento de la viga mostrada en el capítulo anterior, con el fin de solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales posteriormente.

Figura 3.6. Matriz de amortiguamiento de Caughey de la viga en estudio.

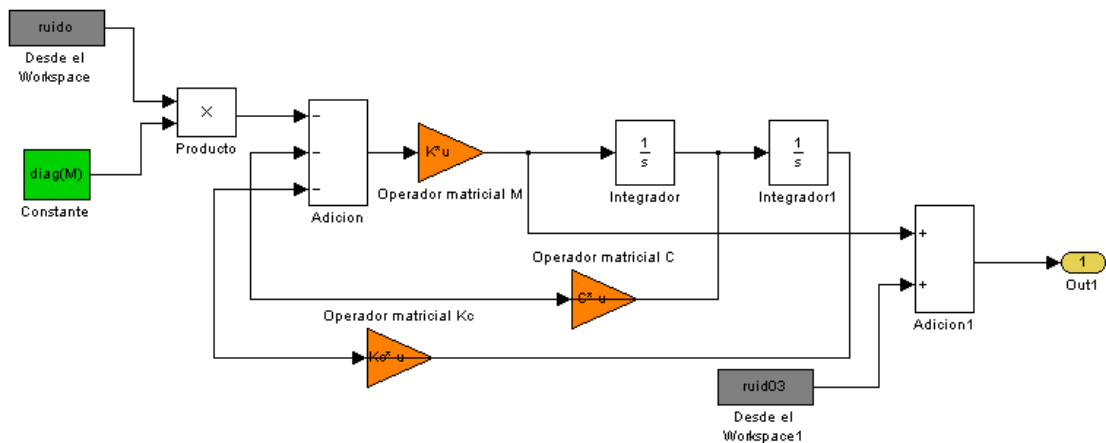
$$C =$$

$$1.0e+003 *$$

3.8678	-2.3432	0.3477	-0.0719	0.0154
-2.3432	4.2155	-2.4150	0.3631	-0.0719
0.3477	-2.4150	4.2310	-2.4150	0.3477
-0.0719	0.3631	-2.4150	4.2155	-2.3432
0.0154	-0.0719	0.3477	-2.3432	3.8678

2.8 SOLUCIÓN NUMÉRICA AL EQUILIBRIO DINÁMICO DE D'ALEMBERT MEDIANTE LA HERRAMIENTA SIMULINK DE MATLAB®.

Figura 3.7 Esquema diseñado en SIMULINK de Matlab® para solucionar los sistemas diferenciales del análisis dinámico.



Observamos como la señal de entrada “ruido” se genera en el *workspace* mediante una función aleatoria de varianza cero para excitar el sistema durante un periodo de tiempo definido por $t = (0: T s: Nwindow*nfft*T s - T s)$; donde $T s = 1/F s = 1/420$, la longitud de la ventana Hann = 200 y $nfft=2^{10}$ (Véase Capítulo III). La masa modal que multiplica al ruido blanco se establece mediante:

Figura 3.8. Matriz de masa modal.

$$M = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

El ciclo se completa al simular durante un periodo “*t*” para extraer mediante un bloque de salida los valores de las aceleraciones, sumándole el “*ruido03*” antes mencionado como una afectación que en mediciones reales sería producto de

errores, descuidos o simplemente ruido electrónico procedente de las herramientas de medición. Lo vemos en el “Out1”, que se encarga de almacenar una matriz de datos dentro de la cual las columnas (5) corresponden a los nodos = grados de libertad y el número de filas es igual al valor del tiempo de simulación “t”; los datos de los que estamos hablando son las aceleraciones a las cuales se someten los nodos de la viga que serán tratadas utilizando los métodos de Fourier y Wavelet en los capítulos III y IV.

2.9 SOLUCIÓN DEL SISTEMA MEDIANTE APROXIMACIÓN MODAL.

Debido a la complejidad que representa la solución de la ecuación de equilibrio dinámico, se puede adoptar una alternativa en la cual el amortiguamiento sea nulo en la ecuación diferencial homogénea.

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (3.19)$$

Donde una de las soluciones es:

$$q(t) = \Phi_i e^{\lambda_i t} \quad (3.20)$$

Entendiéndose Φ_i como los eigenvectores reales y λ_i como los eigenvalores; los cuales para la consideración anterior de sistema no amortiguado son iguales a las frecuencias naturales; así:

$$[K + \lambda_i^2 M]\Phi_i = 0 \quad (3.21)$$

Para luego definir las propiedades de ortogonalidad de los modos como:

$$\Phi^T M \Phi = [m_i] \quad (3.22) \quad \Phi^T K \Phi = [k_i] \quad (3.23)$$

Donde m_i representa las masas modales, k_i la rigidez modal y el superíndice T la transpuesta de la matriz.

Finalmente, las frecuencias naturales no amortiguadas de cada uno de los modos o formas modales pueden ser determinadas de acuerdo a:

$$\omega_i^2 = k_{e,i}/m_i \quad (3.24)$$

Implementando este método en Matlab®, obtenemos las frecuencias naturales correspondientes a los 5 modos de vibración de la viga:

Figura 3.9. Frecuencias naturales no amortiguadas de la viga en Hz.

```
f =  
  
46.4820  
32.4874  
18.7566  
8.3882  
2.0992
```

3. LAS SERIES DE FOURIER Y SU IMPLEMENTACION.

Ya que se ha establecido en anteriores capítulos que los datos de salida del sistema deben ser analizados mediante el método de Fourier, así que es necesario abordar los procesos del mismo para aplicarlo a este caso particular.

3.1 TRANSFORMADAS DE FOURIER Y ESPECTRO DE POTENCIA.

La representación de cualquier señal periódica mediante una serie de Fourier equivale a descomponer la señal en sus componentes armónicos. Para esto utilizamos la transformada discreta de Fourier (DFT) aunque últimamente es muy utilizada la transformada rápida de Fourier (FFT) [Tukey y Cooley, 1965], ya que realiza la misma función pero en un tiempo corto, por esta razón, para posteriores análisis de señales mediante la transformada de Fourier utilizaremos la FFT por ser de mayor utilidad en cuanto a capacidad de cómputo y tiempo.

La función que cumple la FFT es tomar una señal discreta en el dominio del tiempo y transformarla en una representación dentro del dominio de la frecuencia. Cabe resaltar que sin esta herramienta no podríamos computar la transformada con un micro procesador [13]. También vale la pena aclarar que existen dos diferenciaciones básicas de transformadas de Fourier las cuales son: Continua (CFT) y discreta (DFT). Desarrollándose estas en tiempo continuo (el eje de las ordenadas tiene un valor real para cualquier valor del tiempo) y en el tiempo discreto (solamente se entregan valores en espacios de una separación igual los cuales dividen el eje del tiempo), respectivamente.

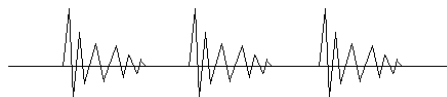
3.2 SOBRE LAS VENTANAS DE PROCESAMIENTO DE DATOS.

Las ventanas para el análisis de datos de forma discreta son funciones matemáticas usadas para evitar la presencia de discontinuidades al inicio y al final de la sección de señal analizada, es decir, que los valores en estos puntos sean cero. También ayuda a limitar la longitud del conjunto de datos para minimizar la capacidad de cómputo requerida haciendo el tiempo finito para los cálculos. El procedimiento es tan sencillo como multiplicar la señal original $S(t)$ por una ventana $H(t)$; así estudiamos solamente la respuesta del producto $X h(t)$. Así:

$$S_h(f) = S(f) * H(f) \quad (4.1)$$

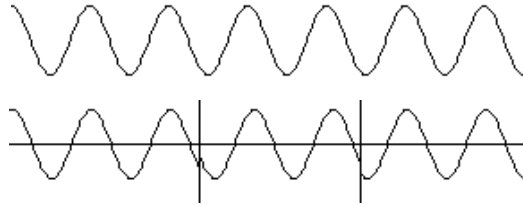
Donde $H(f)$ es la transformada de Fourier de la ventana que hayamos elegido para el procedimiento. En el caso de las señales denominadas *transientes*, se hace innecesario el uso de ventanas especializadas, ya que este tipo de ondas inician con un valor de cero; como el sonido de un golpe de martillo o una explosión. En este caso usamos ventanas rectangulares. [13]

Figura 4.1 Ejemplo de una señal transiente.



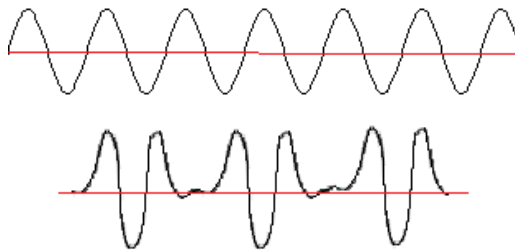
Pero si le aplicamos este tipo de ventanas simples a señales no transientes, lo que hacemos es generar una discontinuidad que va a afectar los resultados del análisis; así que usamos una ventana especializada (como en el caso del presente trabajo con la ventana Hann).

Figura 4.2 Discontinuidades generadas en la señal (superior) por el uso de una ventana inadecuada, o sea rectangular (inferior).



De esta manera, si la señal que tenemos es continua y al aplicar una ventana rectangular originamos discontinuidades, debemos seleccionar otro tipo de ventana. En este trabajo de grado hablaremos sobre un tipo especial de ventana llamado *Hann* por su inventor *Von Hann* aunque en algunas fuentes los autores lo mencionen como *Hanning*, en relación con el nombre de otra función (Hamming). [13]

Figura 4.3 La señal (superior) es tratada con la función Hann. Las extremidades son forzadas a cero (inferior).



De tal manera que los coeficientes de la ventana responden a la siguiente ecuación:

$$\omega(n) = 0.5 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \right), 0 \leq n \leq N \quad (4.2)$$

Figura 4.4 Visualización de la ventana en el dominio del tiempo.

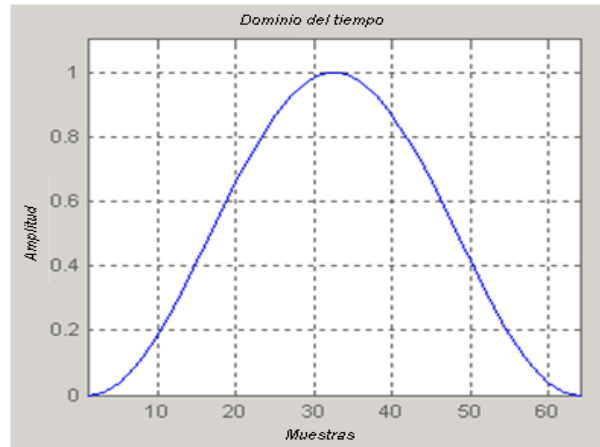
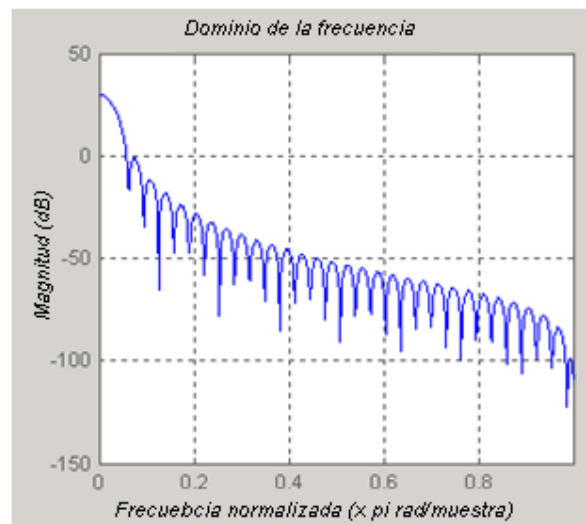


Figura 4.5 Visualización de la ventana en el dominio de la frecuencia.



3.3 EL MÉTODO DE WELCH.

Para estimar el espectro de potencia de una señal utilizamos el método de Welch que aplica un proceso de ventaneo para la reducción de ruido y transforma los datos del dominio del tiempo al de la frecuencia mediante la DFT. Para explicar a grandes rasgos el proceso, podemos decir que primero la señal se divide en (L)

segmentos, cada uno de una longitud (M), para luego ser traslapados en puntos (D). Donde vemos que si $D=M/2$ el traslapo es del 50%, mientras que si $D=0$ el traslapo es del 0%. Después de hacer esto, a cada una de las longitudes (L) se le asigna una función ventana que las trata en el dominio del tiempo, para posteriormente computar usando DFT y así poder graficar la potencia contra la frecuencia. Este método se comporta de acuerdo al teorema de Parseval, el cual propone que la integral del cuadrado de una función es igual a la integral del cuadrado de su transformada. [Luna Rojero, 2009]

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (4.3)$$

3.4 ANÁLISIS DE LA SEÑAL DE RESPUESTA CON MATLAB®.

Como se ha mencionado anteriormente, en el software MATLAB® se usa un código o *script* que mediante los procesos anteriormente expuestos genera las graficas de los espectros de potencia (SPD) de cada una de las señales provenientes de las excitaciones nodales, para posteriormente hacer un promedio de valores y generar un grafico (ANSPD) donde se pueden identificar los picos correspondientes a las frecuencias dominantes del sistema.

En cada uno de estos casos usamos una ventana de Hann dentro del método de Welch, con una longitud de 1024, es decir 2^{10} , para la transformada de Fourier y una longitud de 200, para la ventana. Para la excitación de cada uno de los nodos observamos los espectros resultantes de las mediciones de los 5 nodos de la estructura.

Figura 4.6. Identificación de la primera frecuencia natural. 2.051Hz.

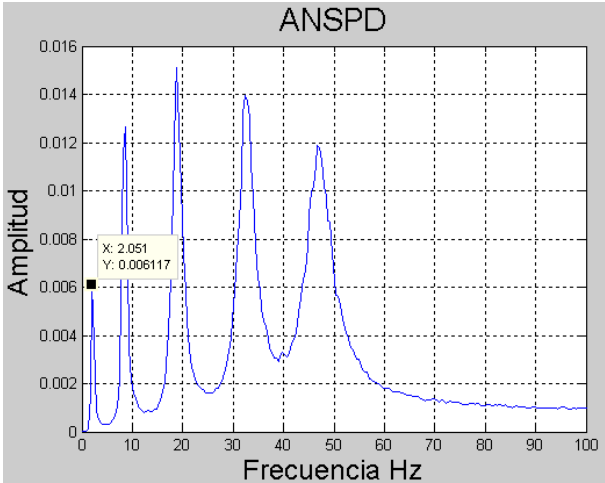


Figura 4.7. Identificación de la segunda frecuencia natural. 8.613Hz.

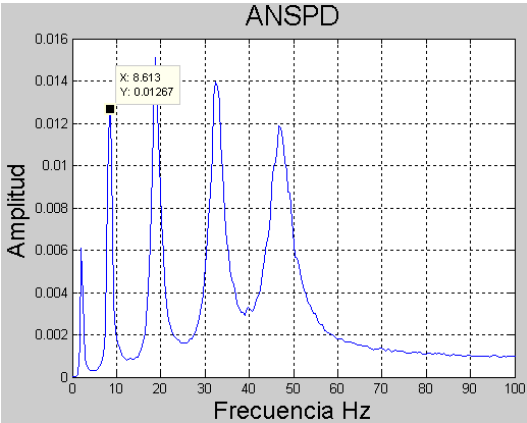


Figura 4.8. Identificación de la tercera frecuencia natural. 18.87Hz.

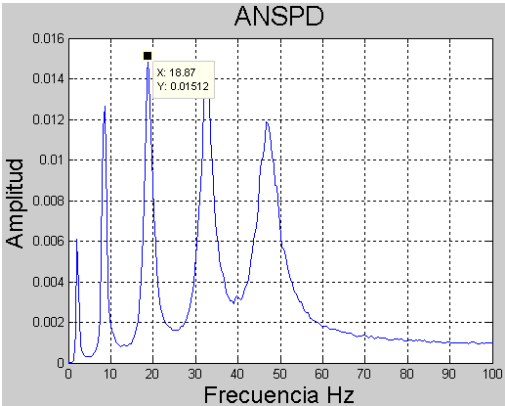


Figura 4.9. Identificación de la quinta frecuencia natural. 32.4Hz

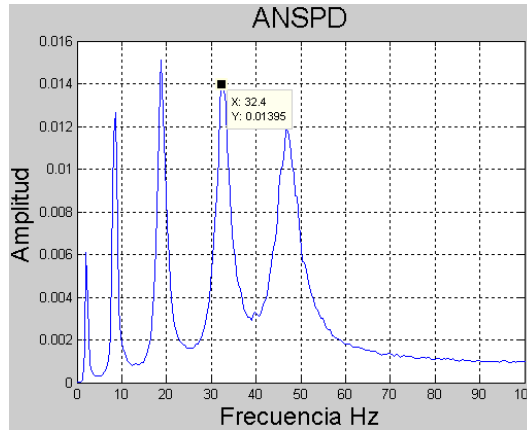
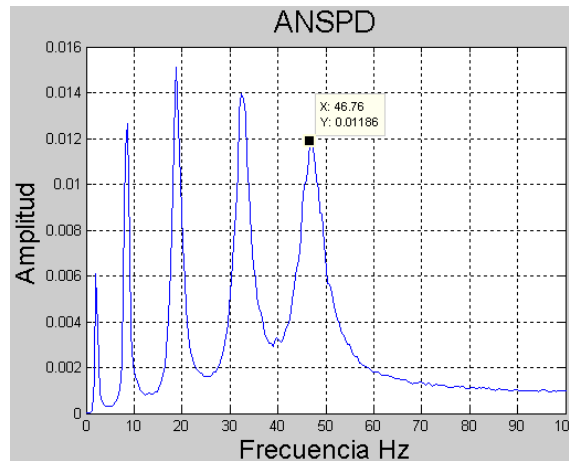


Figura 4.10. Identificación de la quinta frecuencia natural. 46.76Hz.



3.5 FRECUENCIAS NATURALES HALLADAS CON FFT.

Ahora, tras los resultados obtenidos de esta manera, es importante notar que existen variaciones en cuanto a los valores de frecuencia presentes en cada pico, es decir, no siempre se presentan todas las frecuencias en un nodo específico con una misma amplitud. Esto se debe principalmente a que cada una de las secciones que conforman la viga analizada, se une mediante nodos, los cuales para efectos de cálculo, representan los puntos en los que se colocarían

acelerómetros en la estructura real. Estos puntos de medición tienen una afectación en los datos que recopilan, puesto que para cada uno de los modos de vibración se espera un movimiento que excita aleatoriamente a un número (n) de nodos que va desde el 1 hasta el 5. Ahora, los valores pico presentados en los espectros de frecuencia se muestran en la siguiente tabla comparativa:

Tabla 4.1 Comparación de frecuencias naturales.

Frecuencias del sistema	Frecuencias por FFT	Diferencia
2.0992 Hz	2.051 Hz	2.296%
8.3882 Hz	8.613 Hz	2.679%
18.7566 Hz	18.87 Hz	0.604%
32.4874 Hz	32,4 Hz	0.269%
46.4820 Hz	46.76Hz	0.598%

Vale aclarar que los porcentajes de diferencia presentados en la tabla 4.1 son producto tanto de la diferencia de los métodos como de la presencia del ruido simulado al final de la respuesta de aceleraciones, esto con el fin de acercarnos de una forma más verídica a los resultados de mediciones reales.

4. ANALISIS DINAMICO POR EL METODO WAVELET

4.1 FUNDAMENTOS.

La principal función de esta herramienta, es mapear la señal en una representación de tiempo-escala. Su diferencia con Fourier radica en que desarrolla un análisis de multiresolución dilatando las ventanas. De esta manera, para las frecuencias de mayor rango se utilizan ventanas angostas, mientras que para las de menor rango se utilizan ventanas anchas [Y, Sheng, 1996]. Vale aclarar que el análisis de cual se habla, es aplicar un algoritmo con el fin de extraer información que permita describir o conocer aspectos relevantes de una señal; como por ejemplo los espectros de potencia.

Podemos interpretar las wavelet como ondas oscilatorias con una amplitud que inicia en cero, se incrementa tanto positiva como negativamente para finalmente llegar nuevamente a cero. Utilizando una técnica llamada convolución, estas ondas pueden moverse, multiplicarse o sumarse a una señal específica que se desee analizar, con el propósito de extraer información de esta.

Las wavelets originales han sido investigadas desde sus inicios, con el ánimo de formular ondas acoplables a cualquier señal que se desee analizar; dando así lugar a la creación de numerosas funciones denominadas *wavelet madre*, que apareciendo como sucesos de media cero proporcionan los valores de los coeficientes al desarrollar el proceso de transformación.

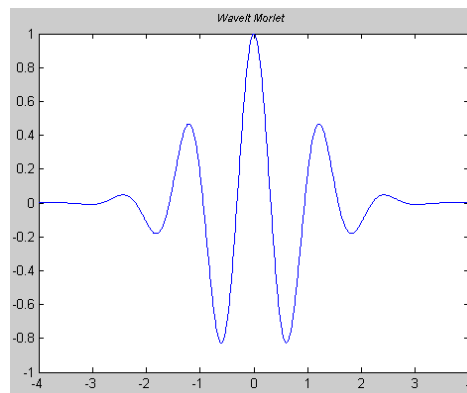
4.2 FAMILIAS.

Respecto a las *ondas madre*, existe un gran número de ellas, entre las cuales se escogió la denominada *Morlet*, debido a los buenos resultados mostrados en otros trabajos [Krishnan y Kiremidjian, 2009] [Thai-Hoa y Yukio Tamura 2009] [C. Pislaru, J.M. Freeman y D.G Ford, 2003], que analizan las frecuencias y características dinámicas de estructuras bajo excitaciones ambientales.

4.3 WAVELET MORLET.

Se observa que la onda cuenta con una duración finita y un periodo conocido. En si es simplemente una forma sinusoidal multiplicada por una curva envolvente gaussiana que da como resultado la figura 5.1.

Figura 5.1 Wavelet Morlet.



$$\psi_{\sigma}(t) = C_{\sigma} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2t^2}} (e^{i\sigma t} - k_{\sigma}) \quad (5.1)$$

Donde $K_{\sigma} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$ es definido por el criterio de normalización:

$$C_{\sigma} = (1 + e^{-\sigma^2} - 2e^{-\frac{3\sigma^2}{4}})^{-\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$

Convencionalmente se adopta la restricción de $\sigma > 5$, para evitar problemas de resolución temporal. Para señales con frecuencia baja solamente, se hace necesario utilizar $K_\sigma < 10^{-5}$. [Oppenheim et al, 2009]

Sobre esta *wavelet madre* es importante resaltar que es biortogonal, es decir que al descomponer la señal mediante un proceso de filtrado e intentar reconstruirla debemos utilizar filtros que difieren entre sí, de manera que estamos hablando de pares adaptados de filtros pasa-altos y pasa-bajos que al ser aplicados simultáneamente se genera una simetría alrededor de la frecuencia central de la banda pasante [Fernández, 2005].

4.4 LA TRANSFORMADA WAVELET.

Hoy en día se puede hablar de dos tipos principales de transformada usando las wavelet: La transformada wavelet continua (CWT) y la transformada wavelet discreta (DWT). Aunque en rigor, la diferencia entre CWT y DWT no está comprendida totalmente [Torresani, 1999]. Al tratar de analizar señales no estacionarias como las de vibración, es muy interesante intentar conservar las características en tiempo que se pierden al pasar al dominio de la frecuencia como en el caso de la transformada de Fourier; así que la WT aparece como una generalización de la información espectral y temporal; aunque la relación entre estas dos características es inversamente proporcional. [Farias G. et al, 2004]

4.5 TRANSFORMADA CONTINUA CWT

La transformada continua wavelet (CWT) se define como la suma sobre todo el dominio del tiempo de la señal multiplicada por una versión trasladada y escalada de la función *wavelet madre* ψ . Como resultado del proceso se obtienen una gran

cantidad de coeficientes; los cuales son una medida de la correlación entre la función elegida para realizar la transformación y la señal propiamente dicha.

$$C_{(a,b)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{a,b}(t) dt \quad (5.3)$$

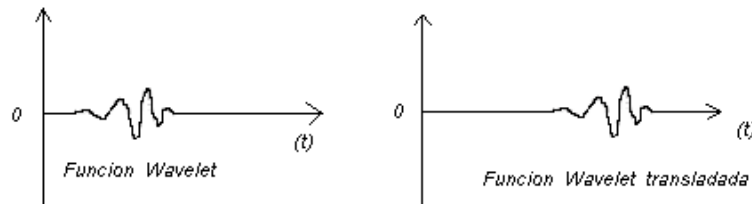
$$\text{Donde: } \psi_{a,b}(t) = a^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (5.4)$$

Siento α el parámetro de “escala” relacionado con la frecuencia y b el de translación de la onda madre al ser aplicada a una señal $f(t)$.

De modo que los procesos desarrollados son:

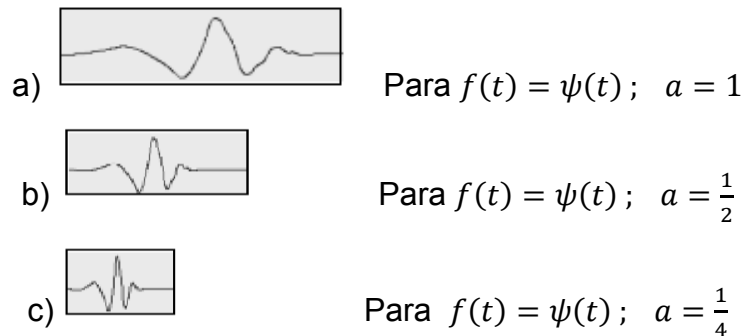
1. Traslación.

Figura 5.2 La forma en la cual se corre la onda wavelet, es decir, se traslada.



2. Cambio de escala: Se refiere al procedimiento de hacer más ancha o angosta la wavelet madre

Figuras 5.3 Variación de la forma de la wavelet madre.

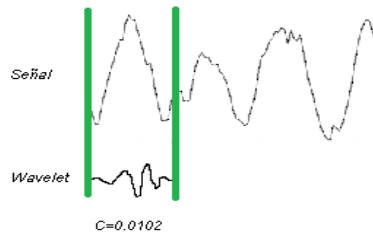


3. Traslación y cambio de escala.

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (5.5)$$

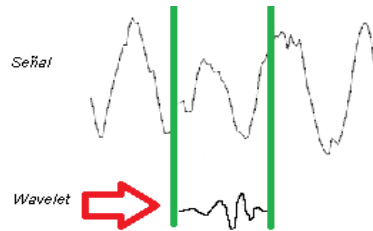
Este es el procedimiento que une los pasos 1 y 2, el cual se usará en el análisis de las aceleraciones respuesta de la viga. La transformada continua es en si la suma sobre el periodo de tiempo de la señal que se multiplica por una versión escalada y trasladada de una wavelet madre; lo cual finalmente produce una cierta cantidad de coeficientes que son función de la escala y la posición. El primer paso es tomar una función wavelet madre y compararla con la sección inicial de la señal original. Calculamos un numero **C** que representa el nivel de correlación entre las dos. Es importante anotar que entre más cercano sea el valor de **C** a uno, mayor nivel de correlación, es decir, más parecidas serán las ondas. En este punto, el resultado del valor del coeficiente depende completamente de la forma de la wavelet elegida. [Oppenheim et al, 2009]

Figura 5.4. Nivel de correlación (C) onda madre – señal para el primer segmento.



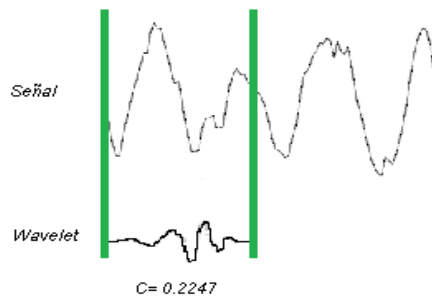
A continuación corremos la onda hacia el siguiente segmento para repetir de nuevo el paso anterior, hasta cubrir toda la señal.

Figura 5.5. Nivel de correlación para el segmento siguiente del proceso.



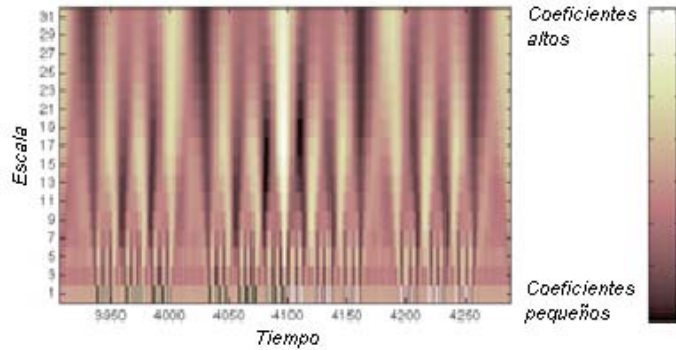
Una vez obtenidos todos estos coeficientes necesitamos repetir nuevamente los pasos anteriores asegurándonos de asignarle una nueva escala a la wavelet elegida.

Figura 5.6. Onda escalada para repetir el proceso desde el primer segmento.



Ahora con el total de coeficientes de toda la señal a varias escalas de la onda madre se exporta gráficamente como un eje "x" donde se ubica el tiempo, un eje "y" que representa las escalas halladas y un código de colores que indica los valores máximos y mínimos alcanzados por cada una de las escalas adoptadas.

Figura 5.7. Mapeo de las escalas-frecuencias, el tiempo y los coeficientes.



A cerca de los resultados derivados del análisis continuo de la señal, vale la pena señalar que al ser una respuesta tridimensional, esta se presenta de manera similar a como vemos un plano topográfico donde los colores indican las alturas (“z”) a las cuales se encuentra cada uno de los puntos que a su vez tienen una única posición “x”, “y” en el plano correspondiente.

4.6 TRANSFORMADA DISCRETA DWT

Por otro lado, la transformada discreta (DWT) puede ser hallada directamente aplicándola a la señal de entrada o a partir de un muestreo (plano tiempo-frecuencia) de una CWT, eligiendo para esto una wavelet madre que no es arbitraria, en caso de que la matriz deba ser invertible [Fernández, 2005]. El método es tan sencillo como aplicar un proceso de filtrado con filtros de respuesta finita al impulso descomponiendo la señal de entrada en datos de alta y baja frecuencia como un tipo de ventanas que se encargan de almacenar los datos que corresponden a un rango de frecuencia específico (por lo que también se utiliza para separar los componentes del ruido electrónico).

Figura 5.8. Primer nivel de descomposición DWT.

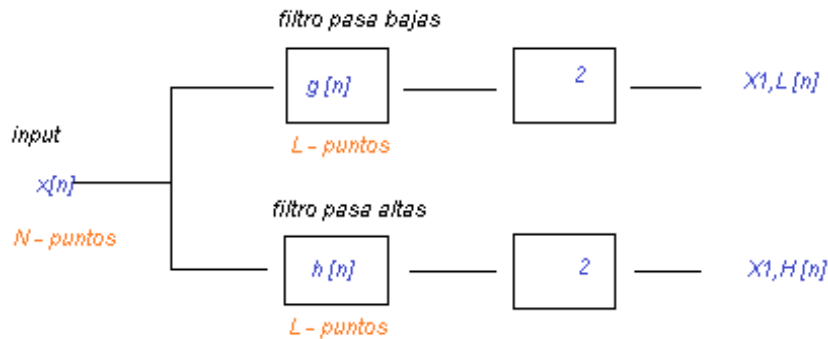
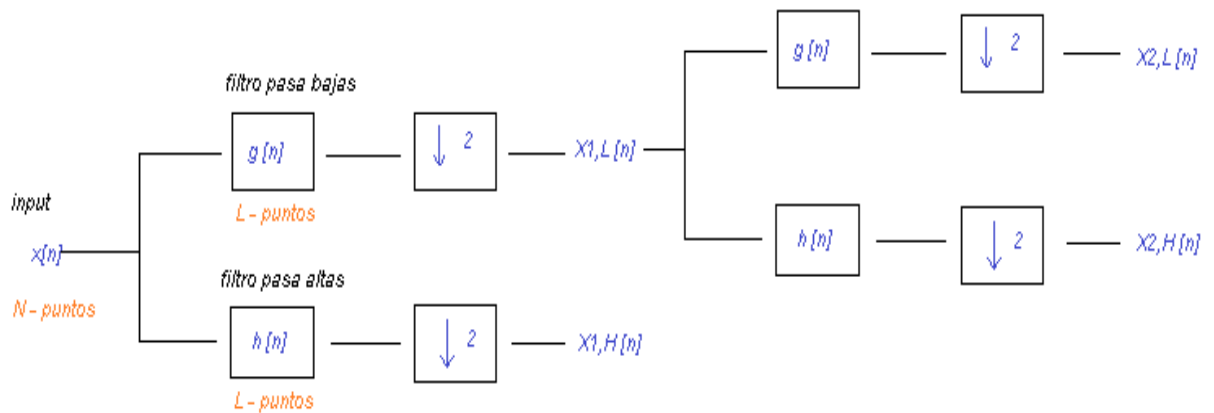


Figura 5.9. Los componentes de baja frecuencia pueden ser descompuestos nuevamente (niveles de descomposición).



Visto de otra manera, cada uno de los denominados niveles aporta cierta resolución a la respuesta de la transformada wavelet, esto se muestra en la figura 5.9. Como previamente se había mencionado en la introducción de la tesis, la resolución en las frecuencias halladas disminuye mientras los valores de las mismas van en aumento, debido a las separaciones de las ventanas, que no son fijas sino que cambian (una importante característica que diferencia wavelet de Fourier).

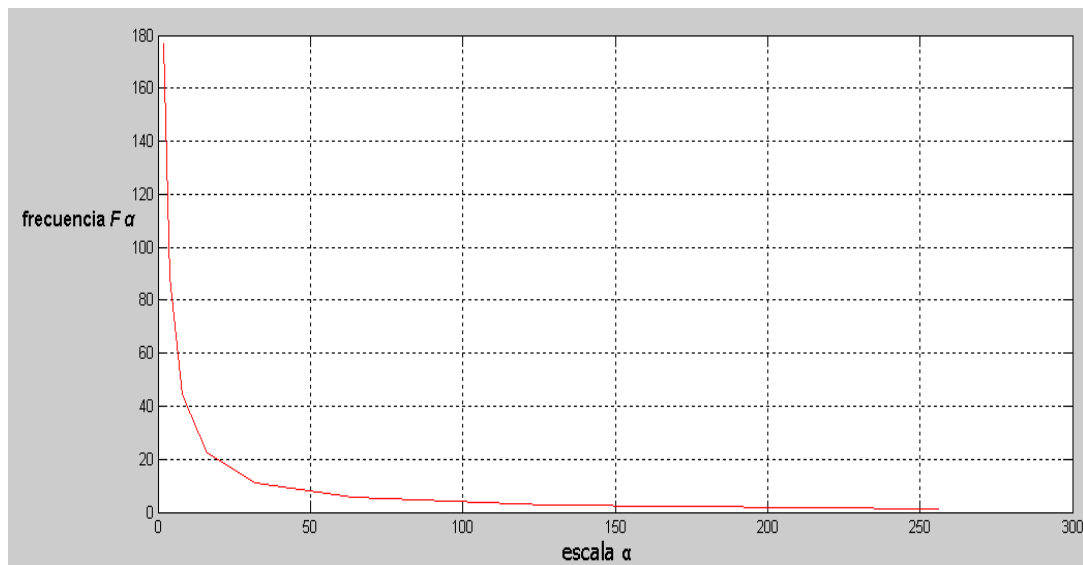
4.7 APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA CONTINUA WAVELET.

Como se había dicho previamente, se usará la transformada continua para el análisis de las señales. En este punto se debe aclarar que a diferencia de la transformada rápida de Fourier (que utiliza un espectro promedio), en este caso se analiza cada uno de los vectores de aceleración nodal; es decir, las 5 respuestas obtenidas del sistema montado en SIMULINK® de Matlab® (tema mencionado en el capítulo II). Cabe mencionar que la respuesta del programa como tal, no incluye frecuencias sino unos valores denominados *escalas*, que pueden convertirse a frecuencias dependiendo de la wavelet usada de la siguiente manera:

$$F_{\alpha} = \frac{F_c}{\alpha * \Delta} \quad (5.6)$$

Donde el valor de α es la escala, Δ corresponde al periodo de muestreo, F_c es la frecuencia central de la wavelet elegida y F_{α} es la pseudo-frecuencia asociada a la escala α . [Oppenheim et al, 2009]

Figura 5.10 Grafica de relación entre las frecuencias y las escalas en la CWT.



Analizando de una manera más detallada la wavelet Morlet, podemos empezar por definirla como una operación matemática que se encarga de tomar una función $f(x)$ ubicada en un dominio específico y convertirla en parte de otro dominio diferente con el fin de poder realizar de manera más sencilla determinadas operaciones. Previamente se ha explicado cómo trabajan la transformada continua y la transformada discreta; ahora, con respecto a la *Wavelet madre* que permite estos procesos (Morlet) se sabe que su origen o base es una función de senos y cosenos que oscilan a la frecuencia central establecida como parámetro de entrada F_0 .

De acuerdo con el trabajo de Kijewski y Kareem (2003), la flexibilidad al momento de estipular la frecuencia central permite obtener diferentes resoluciones, ajustándose así al principio de incertidumbre; sin embargo, como se puede apreciar en la sección Respuesta del sistema, para la primera frecuencia de la viga existe una resolución con tantos datos que se hace poco perceptible como pico. Para ilustrar la aplicación del método se propone a continuación una señal armónica sinusoidal con una frecuencia dominante conocida de 50Hz de la siguiente manera:

$$x(t) = \text{seno}(2\pi t * 50) \quad (5.7)$$

De tal forma que tenemos una periodicidad, es decir que la variación en la frecuencia no se dará, ya que por definición debe permanecer constante al hallar la respuesta en tiempo- frecuencia. Para confirmar la existencia de un nivel de energía alto en un único punto específico para todo el dominio de t se aplica en primer lugar la transformada rápida de Fourier y luego para comparar, la Wavelet Morlet en toda la serie de datos entre las escalas 1 a 32.

Figura 5.11 Punto de mayor energía en la frecuencia dominante con FFT.

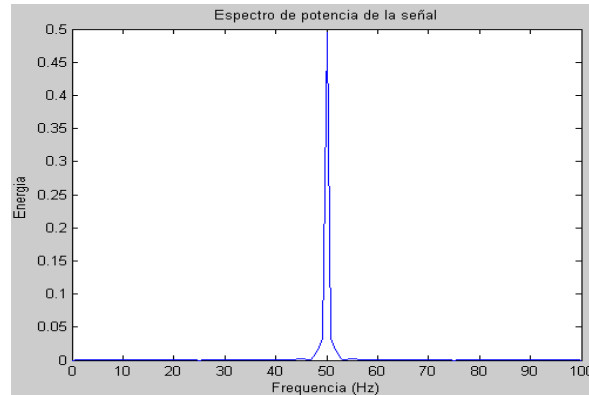
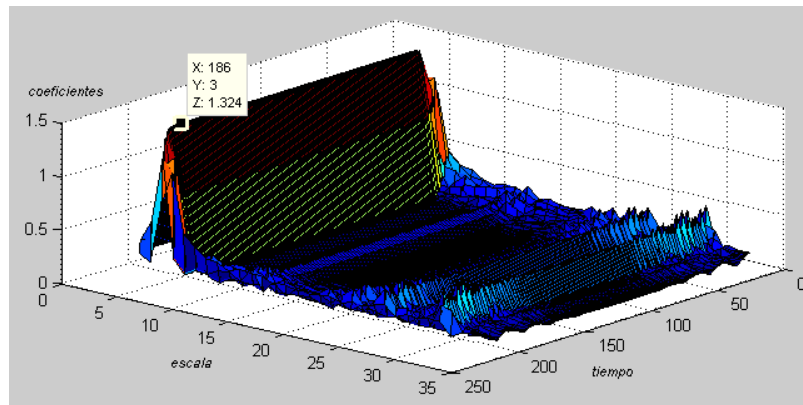


Figura 5.12. Respuesta al aplicar la transformada Wavelet al vector de datos $x(t)$.



Obsérvese en la figura 5.12 como el valor de la escala es 3, es decir 54.16Hz (error inducido por la ya mencionada pérdida de resolución en frecuencia para la visualización en tiempo). Otra manera de ver el error que inevitablemente se presenta, es el de las ventanas que encierran los datos para tratarlos y extraer el valor de los coeficientes; una ventana variable de análisis wavelet tiene un valor medio de frecuencia, como al dividir una serie de datos con decimales en rangos cuyos límites son números siempre enteros y decir que todos los datos encerrados entre los mencionados límites tienen el valor de la media de los dos límites.

De forma más clara, sea un vector de datos $x = 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, \dots, 12$; este se descompone en rangos con límites enteros $[a, b] = [1, 4]$; tendríamos pues 3 ventanas cada una encerrando valores entre 0 y 4, 4 y 8, 8 y 12. Determinando así que el valor medio del rango $[4, 8]$ es 6; por lo tanto ese será el valor visible de dicha ventana, a pesar de contener valores que difieren (tanto mayores como menores) del 6. A menos que hagamos ventanas más pequeñas que es justamente la característica principal del método Wavelet, por lo tanto, como el valor de los límites $[a, b]$ no puede hacerse indefinidamente pequeño para tomar todos los valores posibles de los datos arrojados por las mediciones o simulaciones, siempre va a existir el error descrito anteriormente. Si bien es cierto que la señal modelada es pura, es decir, carente de ruido electrónico; se puede modificar nuevamente la simulación para incluir una perturbación a lo largo del tiempo, agregando una señal caótica y aplicando las transformadas nuevamente; recordemos: FFT para comprobar la energía y CWT para constatar que efectivamente la frecuencia dominante corresponde a 50Hz.

Figura 5.13 Punto de mayor energía en la frecuencia dominante con FFT.
Señal con ruido simulado.

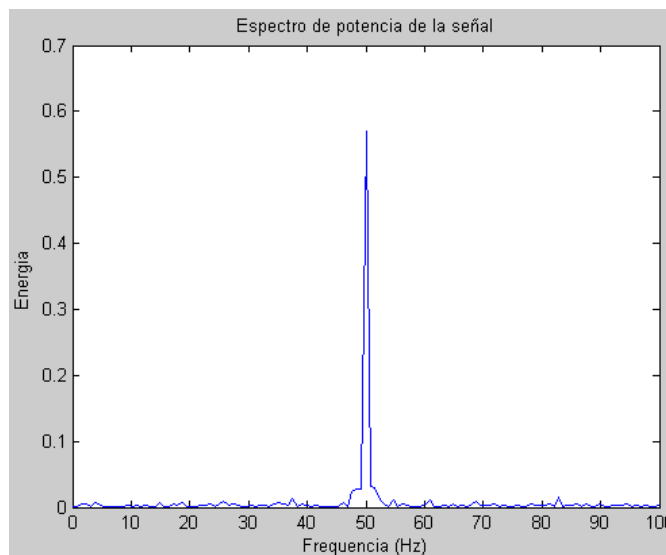
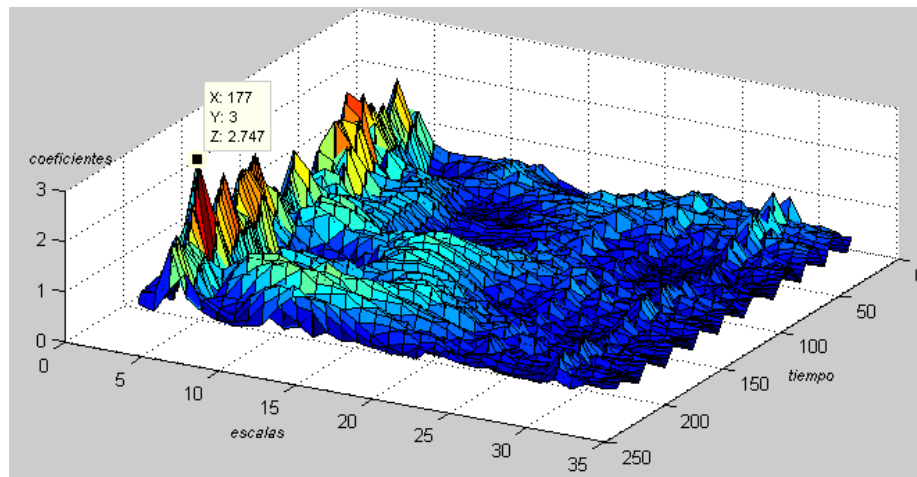


Figura 5.14. Respuesta al aplicar la CWT a la misma señal incluyendo un ruido de la mitad de la amplitud de los datos limpios.



De lo anterior podemos concluir que el método Wavelet es muy sensible a las variaciones que se puedan presentar por errores de medición que alcancen y superen a la mitad de la amplitud de la señal. A diferencia de la transformada de Fourier que soporta hasta el doble de la amplitud de entrada debido a la aplicación de la ventana (en este caso Hann) para el tratamiento de los datos. Podríamos decir también que esta es una señal simple que en la naturaleza no tendría esta periodicidad; como se ha mencionado repetidamente, la viga se excita mediante un ruido caótico que necesita un proceso estocástico ya que se adapta de mejor manera a las condiciones medioambientales del mundo real, el ruido electrónico considerado es del 1% (teniendo en cuenta una toma de datos que sería en un laboratorio donde se minimizarían los errores de medición) como existen 5 nodos en los cuales se concentra la masa, buscaremos los 5 picos con los coeficientes mas grandes ubicados en diferentes escalas, las cuales nos brindan el valor de frecuencia medio de la ventana en la cual se ubican nuestros sucesos.

Como el lector ya habrá notado, la respuesta a la transformación es una matriz de datos que hace posible evaluar la señal en el dominio del tiempo-frecuencia de

manera simultánea para luego graficar de manera tridimensional; aspecto que no se logra con la DWT.

4.8 RESPUESTA DEL SISTEMA.

Figura 5.15. Mapeo 3D respuesta de la viga medida en el nodo 5. (Escala = 11).

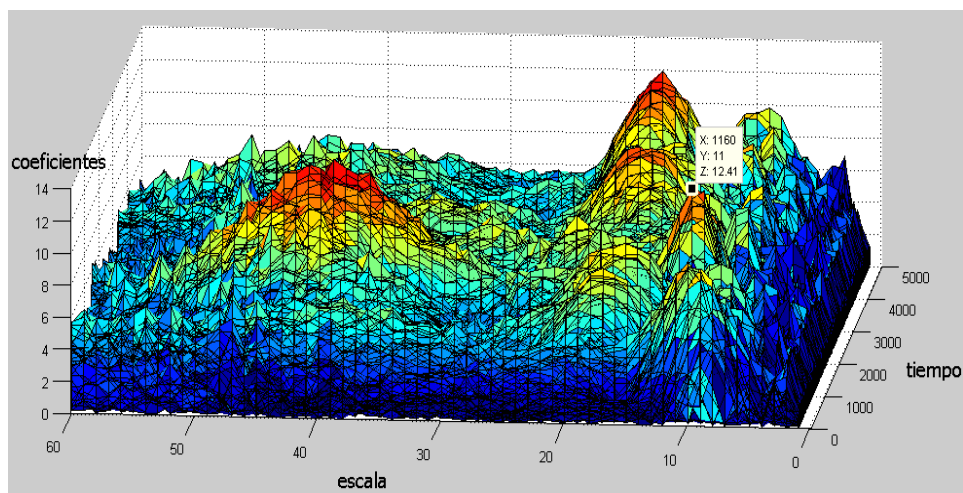


Figura 5.16. Mapeo 3D respuesta de la viga medida en el nodo 5. (Escala = 40).

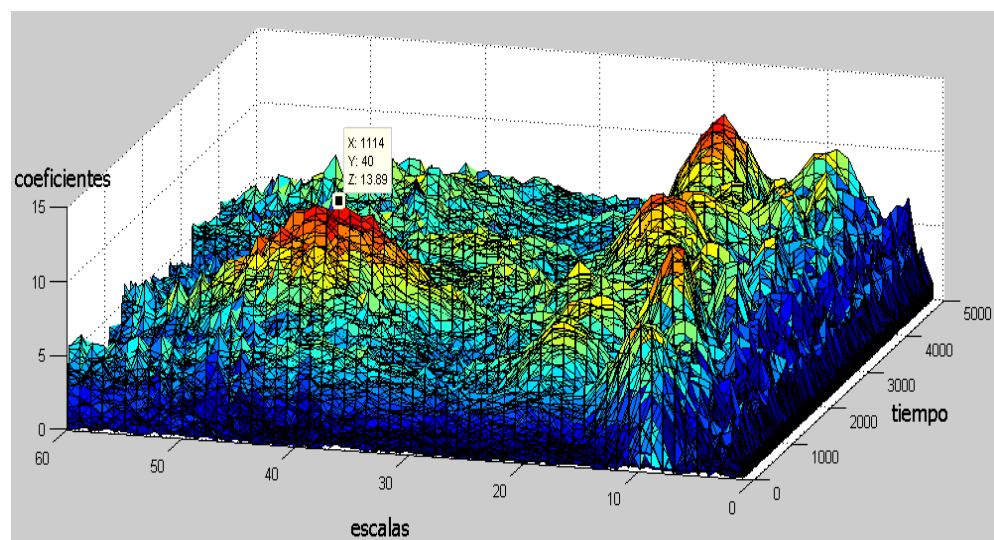


Figura 5.17. Mapeo 3D respuesta de la viga medida en el nodo 5. (Escala = 17).

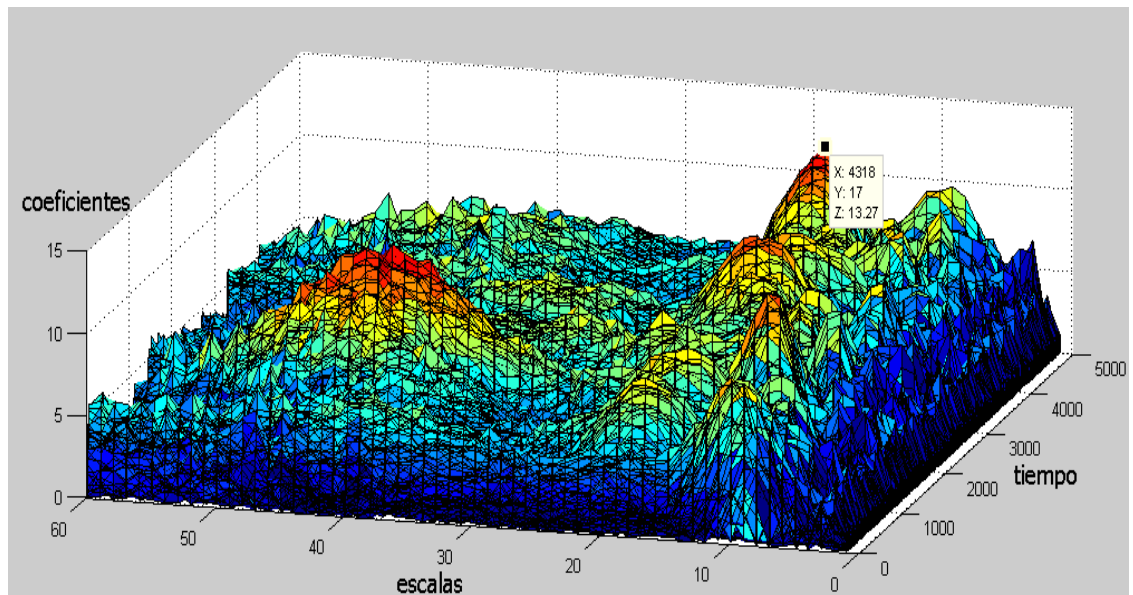


Figura 5.18. Mapeo 3D respuesta de la viga medida en el nodo 3. (Escala = 7).

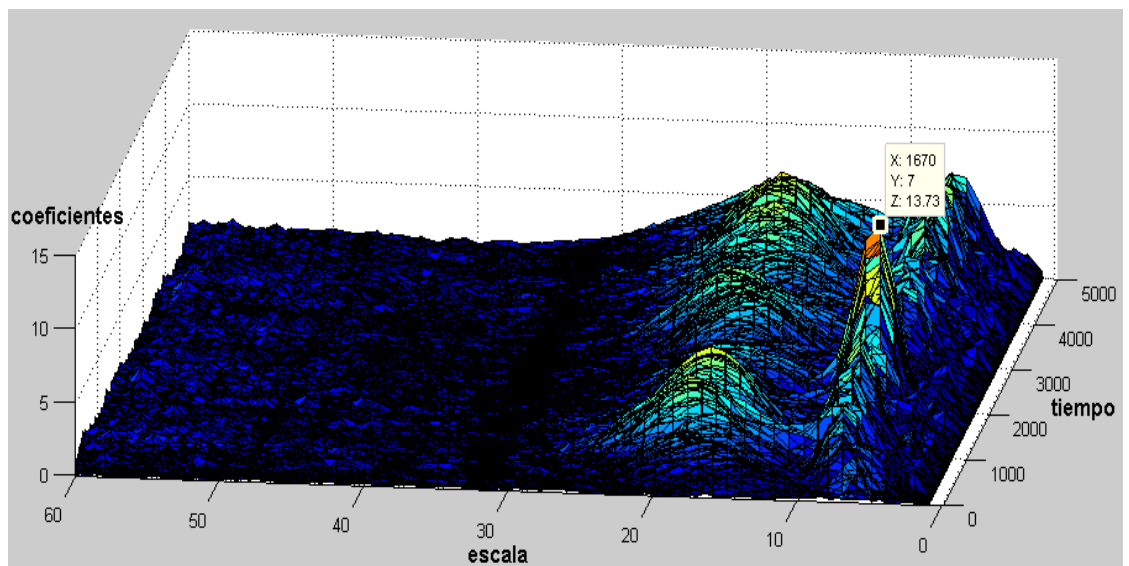
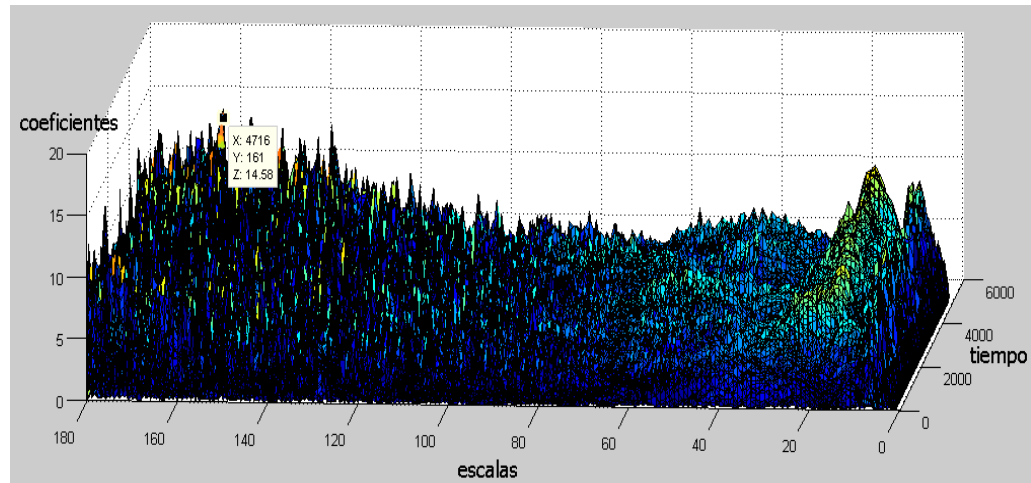


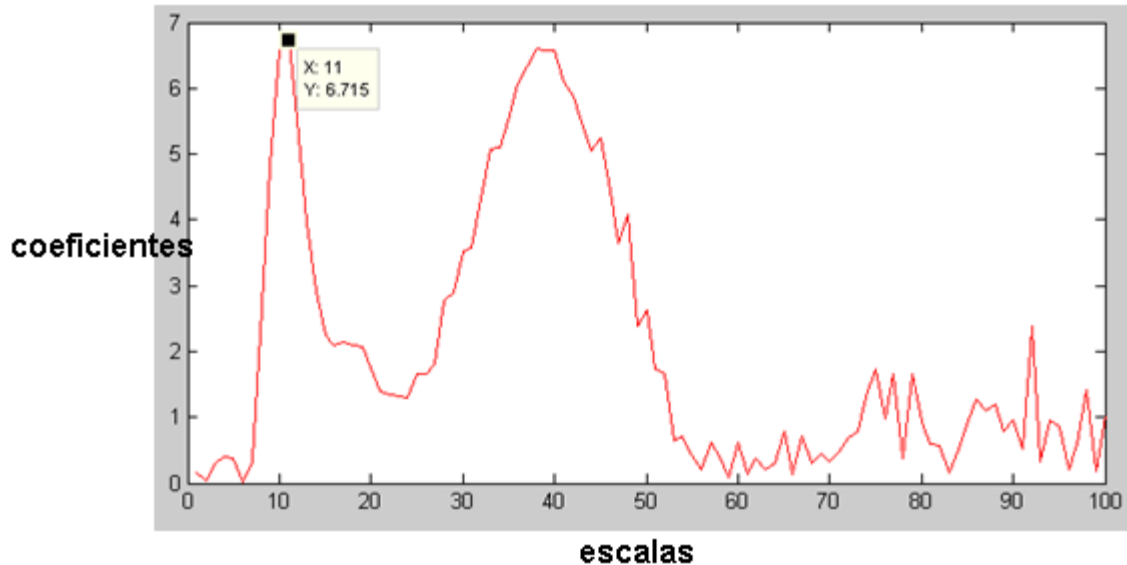
Figura 5.19. Mapeo 3D respuesta de la viga medida en el nodo 3. (Escala = 161).



En las figuras tridimensionales resaltan en color rojo-naranja-amarillo los coeficientes que presentan un valor alto (mayor correlación) y por lo tanto se pueden diferenciar gráficamente del ruido (negro-azul-verde oscuro). La generación de este tipo de respuesta visual permite una interacción más agradable para las personas no familiarizadas con el sistema, siendo fácil identificar picos y valles como valores bajos y altos, o sea, dominantes y ruido. Uno de los aspectos que llaman la atención es que los picos no aparecen en todas las respuestas con la misma amplitud, como en la respuesta de Fourier; en la transformación de datos de cada nodo habrá mayores o menores aceleraciones debido a su posición respecto a la geometría de la estructura y el modo de vibración que tenga la misma en un instante dado. También se observa claramente que si nos desplazamos en el eje del “tiempo” (entiéndase por tiempo desde el inicio de la transformación), de inmediato se ven las oscilaciones discontinuas en las que aparecen los picos, como se menciona en la teoría, al tener la respuesta en tiempo-frecuencia se percibe el comportamiento dinámico de las frecuencias, que existen durante periodos de tiempo, disminuyen en energía y vuelven a aparecer nuevamente. En la figura 5.20 se muestra el “corte” (ejes

escalas vs coeficientes) de la grafica tridimensional 5.15 en el “tiempo”=muestra 1160 (es decir, a 2.76 segundos del inicio de la excitación).

Figura 5.20. Respuesta 2D de la viga medida en el nodo 5. (Escala= 11). Se observa como existe otro pico (Coeficiente 40) en ese instante de tiempo, que también es una frecuencia natural.



Como se había mencionado anteriormente, las ventanas que el método utiliza no tienen un ancho constante sino que su magnitud es inversamente proporcional a los valores de frecuencia analizados. Es por esto que al hallar la primera frecuencia natural (2.099Hz) se observa un área de datos bastante amplia en comparación con las frecuencias más altas; mientras estas últimas muestran picos, las bajas se ven como colinas suaves; debido a que las ventanas se hacen más pequeñas mientras más pequeños son los valores de frecuencias de la señal, es decir, tomando muchos datos en estas zonas, mientras que las formas abruptas de picos se producen por los pocos datos tomados debido a la gran amplitud con la que se inicia el proceso de transformación.

Finalmente, los valores de los picos más “altos” que se hallaron con este método (teniendo en cuenta que lo que se hallan son rangos de frecuencias que varían en el tiempo, es decir, para diferentes instantes existen probabilidades de hallar frecuencias específicas pero nunca las frecuencias exactas y los instantes al mismo tiempo por el principio de incertidumbre de Heisenberg) [Holcomb y Lee, 2001], se resumen en la tabla 5.1.

Tabla 5.1. Comparación de frecuencias naturales.

Frecuencias del sistema	Frecuencias por CWT	Diferencia
2.0992 Hz	2.120 Hz	0.99%
8.3882 Hz	8.531 Hz	1.7023%
18.7566 Hz	20.074 Hz	7.023%
32.4874 Hz	31.023 Hz	4.5075%
46.4820 Hz	48.75Hz	4.879%

Podemos afirmar que no es en que instante aparece una determinada frecuencia sino en que periodo de tiempo aparece un determinado rango de frecuencias que contienen nuestro pico característico (los valores de la tabla 5.1 son los promedios entre los límites de los rangos o segmentos en los cuales las ventanas han separado los componentes); lo que indica que estas características no ocurren todo el tiempo con una energía idéntica ni tampoco todas las formas se excitan de igual manera en los mismos instantes.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Debido a los resultados obtenidos, se ha determinado que debido a la naturaleza misma de la señal (ruido caótico) la *Wavelet madre* apropiada para efectuar la transformada es la Morlet debido a que su base matemática es en esencia una transformada de Fourier con ventana de una función gaussiana; además la elección se basa en los variados reportes de su eficiencia en la literatura. Cabe señalar que los algoritmos matemáticos que determinan el desarrollo de la transformada wavelet no se discuten en este proyecto, debido a su alta complejidad y poca importancia para efectos de nuestro análisis.

La extracción de frecuencias naturales con la transformada de Fourier es bastante eficiente en cuanto a la calidad de los picos mostrados en el espectro de potencia, sin embargo, la información temporal de la señal se pierde al cambiar de dominio. Es en este punto donde interviene el mapeo gráfico que permite visualizar el comportamiento, patrones y fenómenos en el plano tiempo-frecuencia; aunque para efectos de practicidad mediante la transformada continua se generan tantos datos que hay redundancia, así que en estructuras muy complejas con muchas formas modales el esfuerzo computacional sería bastante considerable. Aun así, para la viga que ha sido descrita, excitada y cuyas respuestas en aceleraciones nodales han sido medidas, la diferencia en tiempo de cómputo entre los dos métodos es aproximadamente de 5 segundos más con Wavelet (debido a la relativa poca cantidad de datos).

Es importante señalar que no se recomienda el uso de las Wavelet para señales contaminadas con tanto ruido que este alcance a cubrir el rango de frecuencias de la excitación. También, se debe restringir el espacio de búsqueda de fenómenos de alta energía al efectuar la transformación como medida de reducción de tiempo

ya que las familias biortogonales como la Morlet, al necesitar diferentes algoritmos de reconstrucción, entrega mayor cantidad de datos.

También se observa en las respuestas mapeadas que el principio de incertidumbre impone un límite a la calidad de los picos de frecuencia mientras que de otro modo facilita cierta resolución temporal que permite ver los cambios del contenido de frecuencias en el tiempo. Tanto así que para obtener la respuesta en el tiempo después de la transformación se hizo un sacrificio de la resolución en frecuencia, tal como mencionan los trabajos de varios autores.

Respecto a la DWT, esta permite ahorrar tiempo y genera muy pocos datos, sin embargo es comúnmente usada para separar el ruido de señales medidas o simuladas para permitir un análisis más sencillo y para este caso específico de ruido caótico que requiere un proceso estocástico que su ortogonalidad no permite tratar adecuadamente según la literatura.; además su respuesta necesita un análisis más técnico y detallado y no es tan claro ni atrayente como los mapeos tridimensionales, haciendo más difícil el proceso para personas no especializadas.

La transformada Wavelet es relativamente nueva, y como toda novedad genera opiniones encontradas aunque últimamente ha ganado bastante popularidad; pero como todo proceso requiere ser evaluado mencionando sus puntos fuertes y débiles como se ha hecho en este trabajo.

Existen numerosas preguntas y desafíos que merecen ser resueltos. Es por eso que se invita al lector de esta tesis a experimentar con las señales y diseñar estrategias analíticas que permitan mejorar y simplificar los procesos, reduciendo tiempo de cómputo en el análisis de estructuras cada vez más complejas.

BIBLIOGRAFIA

1. Cunha, Alvaro y Caetano, Elsa. Experimental modal analysis of civil engineering structures. Portugal. Universidad de Porto. 2006. [Consultado el 10 de Marzo de 2011]. Disponible en internet: http://imacwww.epfl.ch/genieparasismique/edoc_st09/course_6/cunha06.pdf
2. Malaga, Christian y Gómez, Oscar. Caracterización de estructuras por medio de vibraciones ambientales. XVI Congreso Nacional de Ingeniería Civil, Perú. 2007. [Consultado el 10 de Marzo de 2011] Disponible en internet: <http://www.freewebs.com/cmalaga/Estructuras6/MALAGA%20-%20Vibraciones%20ambientales%20edificios.pdf>
3. Vignolo, Juan. Introducción al Procesamiento Digital de Señales, Ediciones Universitarias de Valparaíso, Chile. 2008. ISBN 978-956-17-0426-8. (pp.13-14).
4. Holcomb, Elizabeth y Lee, Juna. The Heisenberg uncertainty principle and Wavelets. University of North Carolina Department of Mathematics, USA. 2001. [Online]. [Consultado el 12 de Marzo de 2011]. Disponible en internet: <http://www.docstoc.com/docs/12873121/Heisenberg-Uncertainty-Principle-and-Wavelets>.
5. Thai-Hoa Le y Yukio Tamura; Modal identification of ambient vibration structure using frequency domain decomposition and wavelet, The Seventh Asia-Pacific Conference on Wind Engineering, 2009. Wind Engineering Research Center, Tokyo Polytechnic University, 1583 Iiyama, Atsugi, Kanagawa 243-0297,

Japan. Disponible en internet :
http://www.iawe.org/Proceedings/7APCWE/M1D_3.pdf

6. Aguilar, Roberto. Análisis matricial de estructuras. Tercera edición. Escuela politécnica del ejército, Ecuador. 2004. (563p)
7. González Cuevas, Oscar. Análisis estructural. Limusa Noriega editores, México. ISBN: 9681860039. Universidad Autónoma Metropolitana 2002. 584 p
8. Maldonado R, Esperanza y Chio Cho, Gustavo. Analisis de estructuras I. Editorial Universidad Industrial de Santander. Escuela de Ingenieria Civil, Bucaramanga 1995. (155p)
9. R. J. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. AIAA Journal, Vol. 3, No. 2 (February, 1965). (p. 380)
10. Chopra, Anil. Dynamic of structures, Theory and applications to earthquake engineering. Ed. Prentice Hall, University of California at Berkeley ISBN 0-13-855214-2, USA, 1995.
11. T, Caughey. Classical normal modes in damped linear systems. Journal of Applied Mechanics Series E. 1965; 32(3):583-588.
12. Cooley, J. W. y Tukey, J. W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Math. Computat.*, 19, 297–301. 1965.
13. White, Glen. Introducción al análisis de vibraciones. Azima DLI 300 TradeCenter, Suite 4610, Woburn, MA 01801 U.S.A p. 781-938-0707, f: 781-935-0179 sales@AzimaDLI.com. 2010.

14. Luna Rojero, Erick. Matemáticas avanzadas. Versión 1.1. Facultad de ingeniería, división de ciencias básicas, Universidad Autónoma de México. 2003. (p.69)
15. Sheng, Yulong. Wavelet transform from Transform and applications handbook. Third Edition. CRC Press Taylor and Francis Group Boca Raton, London, New York. Chapter 10-1. 1996.
16. Krishnan, K y Kiremidjian, Anne. A damage detection algorithm using the Morlet Wavelet Transform. Department of Civil and Environmental Engineering, Stanford University, CA-94305, USA. 2009. [Consultado en Abril de 2011] Disponible en internet: http://www.stanford.edu/~kknair/pdf/asceemd_kknask.pdf
17. C. Pislaru, J. Freeman y D.G. Ford. Modal parameter identification for CNC machine tools using Wavelet Transform. International Journal of Machine Tools & Manufacture 43 (987–993). Ultra Precision Engineering Centre, University of Huddersfield, Queensgate, Huddersfield HD1 3DH, UK. 2003.[Consultado en Mayo de 2011]. Disponible en internet: <http://infolib.hua.edu.vn/Fulltext/ChuyenDe2009/CD129/43.pdf>
18. Misiti, M; Misiti, Y; Oppenheim, G; Poggi, J. Wavelet Toolbox™ 4 User's Guide. The MathWorks, Inc. 3 Apple Hill Drive Natick, MA 01760-2098. (p. 1-8 a 1-47). 2009.
19. Fernández, Juana Graciela. Caracterización y filtrado de señales inmersas en ruido caótico y estocástico. Universidad Nacional de Mar del Plata, Departamento de Electrónica. Argentina. 2005. (p. 22-36)

20. B. Torrèsani. Time Frequency and Time Scale Analysis. In Signal Processing for Multimedia, NATO sciences series, series F, Computer and Systems Sciences, Vol 174, J. Byrnes Ed. (1999) (p. 55-70).

21. Farias, G; Santos, M; F, Marron; Dormido-Canto, S. Determinación de parámetros de la transformada Wavelet para la clasificación de señales de diagnóstico scattering thomson. XXV Jornadas de Automática Ciudad Real, del 8 al 10 de Septiembre. España. 2004. [Consultado en Mayo de 2011] Disponible en internet: <http://www.ceafiac.es/actividades/jornadas/XXV/documentos/35-aredecugon.pdf>