

Espacios Polacos Universales

Jose Guillermo Guerrero Mojica

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magister en Matemáticas

Director

Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias Exactas

Escuela de Matemáticas

Maestría en Matemáticas

Bucaramanga

2021

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos:

- A mis padres y a mi hermana Aldanary por brindarme su apoyo para lograr esta importante meta en mi vida.
- Al profesor Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin por su paciencia y sus buenos consejos.
- A Dina Luz por escucharme y apoyarme estos 3 años.
- A mis compañeros y demás docentes de la Universidad Industrial de Santander que me hicieron crecer como persona.

Tabla de Contenido

Introducción	7
1 Espacios polacos	9
1.1 Preliminares	9
1.2 Espacios polacos	11
1.3 Espacio de homeomorfismos	13
1.4 Espacio de las funciones Lipschitz	19
1.5 Espacio de isometrías	24
2 Grupos polacos	27
2.1 Grupos topológicos metrizablees	27
2.2 Grupos polacos	37
3 Espacio universal de Urysohn	43
3.1 Espacios métricos universales	43
3.2 Ultrahomogeneidad	45
3.3 Propiedad de Urysohn	49
3.3.1 Propiedad de Urysohn racional	54
3.4 Unicidad del espacio universal de Urysohn	58
3.5 Construcción del espacio de Urysohn	61
3.5.1 Hausdorff	61

ESPACIOS POLACOS UNIVERSALES	4
3.5.2 Katětov	73
3.5.3 Urysohn	81
4 Grupos universales	86
Referencias Bibliográficas	98

Resumen

Título: Espacios polacos universales ^{*}.

Autor: Jose Guillermo Guerrero Mojica ^{**}.

Palabras claves: Espacio polaco, Espacio de Urysohn, Grupo polaco, Espacio universal, Grupo universal.

Descripción:

Los espacios polacos universales han sido muy estudiados en los últimos años. En este trabajo presentaremos algunos resultados sobre este tema. Decimos que un espacio polaco X es universal si todos los espacios polacos están contenidos isométricamente en X . Estudiaremos ejemplos importantes de espacios universales como $C[0, 1]$, el espacio de las funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ con la métrica uniforme. Decimos que un espacio métrico es ultrahomogéneo si toda isometría entre subconjuntos finitos se puede extender a una isometría sobre todo el espacio. Estudiaremos la ultrahomogeneidad de $\mathbb{R}$ y verificaremos que $C[0, 1]$ no es ultrahomogéneo. Uno de nuestros objetivos principales es construir el espacio de Urysohn $\mathbb{U}$ y mostrar que es el único (salvo isometría) espacio polaco universal y ultrahomogéneo. Realizaremos tres construcciones del espacio universal de Urysohn, usando ideas de Urysohn, Hausdorff y Katětov, para esto seguiremos los trabajos (Hušek, 2008) y (Gao, 2009).

Un grupo topológico es polaco si como espacio topológico es polaco. Verificaremos que $Iso(X)$, el grupo de isometrías sobre un espacio polaco X con la topología de la convergencia puntual y la operación composición, es un grupo polaco. Decimos que un grupo polaco es universal si contiene a todos los grupos polacos isomorficamente como subgrupos cerrados. Verificaremos que $Iso(\mathbb{U})$, el grupo de isometrías sobre el espacio de Urysohn, es universal.

^{*}Trabajo de Grado

^{**}Facultad de Ciencias Exactas. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

Abstract

Title: Universal Polish Spaces^{***}.

Author: Jose Guillermo Guerrero Mojica^{****}.

Keywords: Polish space, Urysohn space, Polish group, Universal space, Universal group.

Description:

Universal Polish spaces have been extensively studied in recent years. In this work we will present some results on this topic. We say that a Polish space X is universal if all Polish spaces are isometrically contained in X . We will study important examples of universal spaces such as $C[0, 1]$, the space of continuous functions of the interval $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ with the uniform metric. We say that a metric space is ultrahomogeneous if every isometry between finite subsets can be extended to an isometry over the entire space. We will study the ultrahomogeneity of $\mathbb{R}$ and verify that $C[0, 1]$ is not ultrahomogeneous. One of our main objectives is to construct the Urysohn space $\mathbb{U}$ and show that it is the unique, up to isometry, universal and ultrahomogeneous Polish space. We will present three constructions of the Urysohn universal space, carried out by Urysohn, Hausdorff and Katětov following the presentation given in (Hušek, 2008) and (Gao, 2009).

A topological group is Polish if it is Polish as a topological space. We will verify that $Iso(X)$, the group of isometries over a Polish space X with the product topology and composition as the group operation, is a Polish group. We say that a Polish group is universal if it contains all Polish groups isomorphically as closed subgroups. We will verify that $Iso(\mathbb{U})$ is universal.

^{***} Master Thesis

^{****} Facultad de Ciencias Exactas. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

Introducción

En 1905 Fréchet definió el concepto de espacio métrico y demostró que todo espacio métrico separable está inmerso isométricamente en l_∞ , el espacio de las sucesiones acotadas. Fréchet se preguntaba en esa época si era posible encontrar un espacio métrico separable que contuviera copias isométricas de todos los espacios métricos separables. En el verano de 1924, él informó acerca de este problema a Urysohn y Aleksandrov; luego, en julio de ese mismo año, Urysohn y Aleksandrov visitaron a Hausdorff en Bonn, donde discutieron el problema. El 3 de agosto de 1924 ellos enviaron una carta a Hausdorff donde Urysohn presentaba la construcción de un espacio métrico separable completo que contenía todos los espacios métricos separables isométricamente (Hušek, 2008).

Urysohn inicialmente construyó un espacio métrico numerable $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ con distancias racionales que contiene isométricamente a todos los espacios métricos finitos con distancias racionales. La completación de este espacio contiene copias isométricas de todos los espacios métricos separables.

Un espacio polaco X es un espacio topológico completamente metrizable y separable. El cubo de Hilbert $[0, 1]^\mathbb{N}$ es un espacio polaco que contiene copias homeomorfas de todos los espacios polacos. Estamos interesados en estudiar construcciones de espacios polacos que contienen copias isométricas de todos los espacios polacos, a estos espacios se les conoce como espacios universales. Un ejemplo clásico viene dado por el teorema de Banach-Mazur que muestra que $C[0, 1]$ es un espacio universal. Decimos que un espacio X es ultrahomogéneo si para cada par de subconjuntos

finitos y toda isometría entre estos dos subconjuntos, se puede extender a una isometría de X sobre sí mismo. Uno de los principales objetivos de este trabajo es demostrar que existe un único espacio polaco universal ultrahomogéneo, a este espacio se le conoce como el espacio universal de Urysohn.

En los últimos años el espacio universal de Urysohn ha sido extensamente estudiado (ver, por ejemplo, los trabajos incluidos en (Leiderman et al., 2008)). Estudiaremos el artículo (Hušek, 2008) donde se describen diferentes construcciones de $\mathbb{U}$ elaboradas por Urysohn, Hausdorff y Katětov.

Dos ejemplos de espacios polacos que serán muy importantes para nuestro trabajo son el espacio de funciones Lipschitz $L(X, Y)$ y el espacio de isometrías $Iso(X, Y)$ entre dos espacios polacos X e Y . Inicialmente mostraremos que el espacio $L(X, Y)$ con la topología de la convergencia puntual es un espacio polaco, luego probaremos que el espacio de funciones que preservan las distancias $Dp(X, Y)$ es cerrado en $L(X, Y)$ y finalmente verificaremos que $Iso(X, Y)$ es polaco.

El segundo objetivo principal de este trabajo tiene que ver con los grupos topológicos. Un grupo polaco es un grupo topológico cuya topología es polaca. Un grupo polaco G es universal si todo grupo polaco es isomorfo a un subgrupo cerrado de G . Estudiaremos la demostración de que $Iso(\mathbb{U})$ (con la operación composición y la topología de la convergencia puntual) es un grupo polaco universal siguiendo (Gao, 2009).

1. Espacios polacos

1.1. Preliminares

En esta sección se definirán conceptos topológicos importantes, para plantear más adelante el concepto de espacio polaco, y presentar algunos ejemplos.

Definición 1.1. *Un espacio métrico (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Ejemplo 1.2. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo.

Ejemplo 1.3. $([0, 1], |\cdot|)$ es un espacio métrico completo.

Un subespacio de un espacio métrico completo no necesariamente es completo. Basta considerar $((0, 1), |\cdot|)$ subespacio de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$; tenemos que la sucesión $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, pero no es convergente en $(0, 1)$.

Todo conjunto X con la métrica discreta es un espacio métrico completo; porque la únicas sucesiones de Cauchy son las sucesiones constantes y estas son convergentes. Por ejemplo $\mathbb{N}$ con la métrica discreta es un espacio métrico completo.

Definición 1.4. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos, $f : X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es Lipschitz si para todo $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.

Definición 1.5. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos, $f : X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es una isometría si es sobreyectiva y para todo $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Es claro que si una función es una isometría entonces es Lipschitz. Pero si una función es Lipschitz no necesariamente es isometría, como lo podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6. Sea $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, donde $\|\cdot\|$ es la norma usual, esto quiere decir que si $(x_1, y_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|(x_1, y_2) - (y_1, y_2)\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

La función proyección a la primera coordenada $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\pi_1(x, y) = x$, es una función Lipschitz, pero no es una isometría.

Recordemos ahora cuando un subconjunto de un espacio métrico es denso, y cuando un espacio métrico es separable.

Definición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico, $D \subseteq X$ es denso en X si $\overline{D} = X$. Decimos que (X, d) es separable si contiene un subconjunto D que es denso y numerable.

Ejemplo 1.8. $\mathbb{N}$ con la métrica discreta es un espacio métrico separable.

Ejemplo 1.9. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio métrico separable. Porque tenemos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Cualquier subespacio de un espacio métrico separable es separable. Por ejemplo el intervalo $(0, 1]$ con la métrica usual es separable por ser subespacio del espacio métrico $\mathbb{R}$.

Decimos que (Y, d') es una completación de un espacio métrico (X, d) si (Y, d') es un espacio métrico completo, y existe una función $f : X \longrightarrow Y$ tal que f es una isometría de X sobre $f(X)$ y la imagen de X es denso en Y .

Ejemplo 1.10. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es completo y $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es una completación de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

Ejemplo 1.11. Sea (X, d) un espacio métrico, $l_\infty(X)$ el espacio de las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$ con la métrica uniforme d_u es un espacio métrico completo.

Utilizando el ejemplo anterior tenemos una forma de completar un espacio métrico (X, d) siguiendo (Heinonen, 2003, Sección 1.6). Fijemos $x_0 \in X$ y consideremos la función $f : X \longrightarrow l_\infty(X)$, definida como $f(x) : X \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x)(y) = d(x, x_0) + d(x_0, y).$$

Se tiene que f es una inmersión isométrica y $(\overline{f(X)}, d_u)$ es una completación de (X, d) .

Teorema 1.12. *Todo espacio métrico X tiene una única completación salvo isometría. Además, si X es separable, entonces la completación es separable.*

Una prueba del Teorema 1.12 la podemos leer en (Uzcátegui and Di Prisco, 2020, Teorema 1.30).

Definición 1.13. *Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que X es metrizable, si existe una métrica d sobre X tal que los abiertos de X coinciden con los abiertos respecto a d .*

X es completamente metrizable si admite una métrica d completa tal que la topología generada por d es equivalente a τ .

Tenemos que $((0, 1), |\cdot|)$ no es un espacio métrico completo, pero es un espacio completamente metrizable. En general todo intervalo abierto en $\mathbb{R}$ es completamente metrizable.

1.2. Espacios polacos

A continuación definiremos el concepto de espacio polaco, algunas propiedades importantes que utilizaremos muy seguido en nuestro estudio y veremos formas no directas para demostrar

que un espacio es polaco siguiendo (Uzcátegui and Di Prisco, 2020).

Definición 1.14. *Sea X un espacio topológico. X es polaco si es completamente metrizable y es separable.*

Para el siguiente resultado recordemos que un subconjunto F de un espacio topológico X es G_δ si es intersección numerable de abiertos de X .

Teorema 1.15. *(Alexandrov) Sean X un espacio polaco y $F \subseteq X$. Si F es G_δ entonces es polaco.*

Una demostración del Teorema 1.15 la podemos leer en (Uzcátegui and Di Prisco, 2020, Teorema 1.27). Utilizando este teorema tenemos una manera de obtener espacios polacos. Por ejemplo, tenemos que los conjuntos abiertos o cerrados de un espacio polaco son polacos por ser G_δ . Pero un subespacio G_δ de un espacio polaco X no necesariamente es completamente metrizable con la métrica que hace completamente metrizable a X . Basta considerar el subespacio $(0, 1)$, no es completo con la métrica usual del espacio polaco $\mathbb{R}$.

Teorema 1.16. *El producto numerable de espacios polacos es polaco.*

Una prueba del Teorema 1.16 la podemos encontrar en (Uzcátegui and Di Prisco, 2020, Teorema 1.26). Como consecuencia de este resultado, tenemos que el cubo de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ con la topología producto donde $[0, 1]$ tiene la topología usual en $\mathbb{R}$, es un espacio polaco. Además el conjunto de cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto donde $\{0, 1\}$ tiene la topología discreta, es un espacio polaco.

1.3. Espacio de homeomorfismos

Ahora estudiaremos $C(X, Y)$ el espacio de las funciones continuas de un espacio métrico compacto X a un espacio métrico polaco Y , con la métrica uniforme. Luego demostraremos que el espacio $H(X)$ de los homeomorfismos sobre X , es un espacio polaco.

Definición 1.17. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y (Y, d') un espacio polaco. Definimos $C(X, Y)$ como el espacio de las funciones continuas de X en Y , con la métrica uniforme

$$d_u(f, g) = \sup\{d'(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Observemos que d_u está bien definida. En efecto, consideremos $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = d'(f(x), g(x))$. Como las funciones f y g son continuas, h es continua. Luego como X es compacto, $h(X) = \{d'(f(x), g(x)) : x \in X\}$ es compacto. Así tenemos que $\{d'(f(x), g(x)) : x \in X\}$ es acotado; de donde $\sup\{d'(f(x), g(x)) : x \in X\}$ existe y además

$$d_u(f, g) = \sup\{d'(f(x), g(x)) : x \in X\} \geq 0.$$

Por tanto d_u está bien definida.

Teorema 1.18. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y (Y, d') un espacio polaco. Entonces d_u es una métrica completa en $C(X, Y)$.

Demostración. Observe que d_u es una métrica en $C(X, Y)$. Demostremos que d_u es una métrica completa en $C(X, Y)$.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C(X, Y)$. Luego para cada $x \in X$, $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y . Como Y es completo, $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en Y para todo $x \in X$.

Por lo tanto, podemos considerar la función $f : X \longrightarrow Y$ definida como $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Sea $x \in X$, veamos que f es continua en x . Como $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C(X, Y)$; para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$, $d'(f_n(z), f_m(z)) < \varepsilon/3$ para todo $z \in X$. Como f_{n_0} es continua en x , existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, $d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) < \varepsilon/3$. Luego para $y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ tenemos que:

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(y)) &\leq d'(f(x), f_{n_0}(x)) + d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d'(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d'(f_n(x), f_{n_0}(x)) + d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + \lim_{n \rightarrow \infty} d'(f_{n_0}(y), f_n(y)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto f es continua.

Como $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy; para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, $d_u(f_n, f_m) < \varepsilon$. Por tanto si $n \geq N$, $d'(f_n(x), f(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$. Concluimos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente, de donde d_u es completa. $\square$

Teorema 1.19. Sean (X, d) un espacio métrico compacto y (Y, d') un espacio polaco. Entonces $C(X, Y)$ es separable.

Demostración. Como (X, d) es compacto; para cada $m \in \mathbb{N}$, consideramos A_m un subconjunto finito de X tal que $X = \bigcup_{x \in A_m} B(x, 1/m)$. Para cada $l \in \mathbb{N}$, tomemos el cubrimiento $\{U_i^l : i \in \mathbb{N}\}$ de Y

donde cada U_i^l tiene diámetro menor que $1/l$. Consideremos,

$$C_{m,n} = \{f \in C(X, Y) : \forall x, y \in X, d(x, y) < 1/m \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < 1/n\}.$$

Fijemos $m \in \mathbb{N}$, entonces $A_m = \{x_1, \dots, x_k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Sea $s = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \mathbb{N}$. Para cada $n, l \in \mathbb{N}$, en caso de existir $f \in C_{m,n}$ tal que $f(x_j) \in U_{i_j}^l$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, escojemos una de ellas y la denotamos f_s . Sea $D_{m,n,l}$ la colección de todas las funciones f_s . Sea $D_{m,n} = \bigcup_l D_{m,n,l}$.

Veamos que $D = \bigcup_{m,n} D_{m,n}$ es denso en $C(X, Y)$. Sea $f \in C(X, Y)$, consideremos $B(f, 1/l)$ donde $l \in \mathbb{N}$. Para $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < 1/3l$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $x, y \in X$ con $d(x, y) < 1/m$, $d'(f(x), f(y)) < 1/n$; por ser f uniformemente continua. Por tanto $f \in C_{m,n}$. Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, existe $i_j \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_j) \in U_{i_j}^{3l}$. Por lo tanto, con $s = \{i_1, \dots, i_k\}$, tenemos que existe $f_s \in D_{m,n,3l}$. Así $f_s(x_j) \in U_{i_j}^{3l}$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Luego para todo $x \in X$, existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $d(x, x_j) < 1/m$, tenemos que:

$$\begin{aligned} d'(f_s(x), f(x)) &\leq d'(f_s(x), f_s(x_j)) + d'(f_s(x_j), f(x_j)) + d'(f(x_j), f(x)) \\ &< 1/n + 1/3l + 1/n < 1/3l + 1/3l + 1/3l = 1/l. \end{aligned}$$

Así $d'(f_s(x), f(x)) < 1/l$ para todo $x \in X$. Luego $f_s \in B(f, 1/l)$, de donde $D_{m,n,l} \cap B(f, 1/l) \neq \emptyset$. Por tanto $D \cap B(f, 1/l) \neq \emptyset$. Concluimos que D es denso en $C(X, Y)$. Como D es numerable, tenemos que $C(X, Y)$ es separable. $\square$

De los dos resultados anteriores concluimos que $C(X, Y)$ con la métrica uniforme d_u es un espacio polaco.

Definición 1.20. Sea X un espacio métrico compacto, definimos $H(X)$ como el espacio de homeomorfismos de X en X con la métrica uniforme d_u .

Nuestro objetivo es mostrar que $H(X)$ es polaco. Para esto, necesitaremos algunos resultados auxiliares.

Lema 1.21. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces $f \in C(X, X)$ es sobreyectiva si y sólo si $f(X)$ contiene un conjunto denso de X .

Demostración. Supongamos que $f \in C(X, X)$ es sobreyectiva, el resultado es inmediato.

Supongamos ahora que $D \subseteq f(X)$ es denso en X . Como f es continua y X es compacto, $f(X)$ es compacto, en particular $f(X)$ es cerrado. De donde $X = \overline{D} \subseteq \overline{f(X)} = f(X)$; de esto $X = f(X)$, así f es sobreyectiva. $\square$

Lema 1.22. Sean $(X, d), (Y, d')$ espacios métricos con X compacto y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a f en $(C(X, Y), d_u)$. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es tal que $x_n \rightarrow x$ en X , entonces $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \rightarrow x$ en (X, d) . Como f es continua, $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f uniformemente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq n_0$, $d'(f_n(z), f(z)) < \varepsilon/2$ para todo $z \in X$. Además como $f(x_n) \rightarrow f(x)$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$, $d'(f(x_n), f(x)) < \varepsilon/2$. Si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ tenemos que:

$$d'(f_n(x_n), f(x)) \leq d'(f_n(x_n), f(x_n)) + d'(f(x_n), f(x)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por tanto $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. $\square$

Lema 1.23. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos con X compacto. Si F es cerrado en $X \times Y$, entonces $\pi_2(F) = \{y \in Y : \exists x \in X, (x, y) \in F\}$ es cerrado en Y .

Demostración. Sean F cerrado en $X \times Y$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \pi_2(F)$ una sucesión que converge a $y \in Y$. Para $n \in \mathbb{N}$, existe $(x_n, y_n) \in F$ tal que $\pi_2(x_n, y_n) = y_n$. Como X es compacto y $y_n \rightarrow y$, la sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$; esto es $(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow (x, y)$ en $X \times Y$. Como F es cerrado en $X \times Y$, $(x, y) \in F$; así $y = \pi_2(x, y) \in \pi_2(F)$. Por tanto $\pi_2(F)$ es cerrado en $C(X, X)$. $\square$

Teorema 1.24. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces $H(X)$ es polaco.

Demostración. Demostremos que S , el conjunto de la funciones sobreyectivas y continuas de X en X , es cerrado en $C(X, X)$. Como X es un espacio métrico compacto, tenemos que es separable (ver (Rueda, 2019, Corolario 4.22)). Así consideremos $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ un subconjunto de X denso numerable. Para cada n consideremos el conjunto

$$O_n = \{f \in C(X, X) : d_n \in f(X)\}.$$

Mostraremos que O_n es cerrado. Sea $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en O_n que converge uniformemente a una función $f \in C(X, X)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $x_m \in X$ tal que $f_m(x_m) = d_n$. Como X es compacto, $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente, esto es $x_{m_k} \rightarrow z$ en X . Como las funciones f y f_m son continuas para todo $m \in \mathbb{N}$ y la convergencia es uniforme, por el Lema 1.22, $f_{m_k}(x_{m_k}) \rightarrow f(z)$. De donde $f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{m_k}(x_{m_k}) = d_n$, es decir $f \in O_n$. Por tanto O_n es cerrado en $C(X, X)$.

Concluimos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ es cerrado. Utilizando el Lema 1.21, tenemos que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \{f \in C(X, X) : D \subseteq f(X)\} = S.$$

De donde S es cerrado en $C(X, X)$.

Sea $I \subset C(X, X)$ el conjunto de las funciones continuas e inyectivas, nuestra meta es demostrar que I es G_δ . Observemos que:

$$f \notin I \iff \exists x, y \in X, x \neq y \wedge f(x) = f(y).$$

Consideremos $R = \{(x, y, f) \in X \times X \times C(X, X) : x \neq y \wedge f(x) = f(y)\}$ y el conjunto $R_{n,m} = \{(x, y, f) \in X \times X \times C(X, X) : x \in \overline{B_n}, y \in \overline{B_m}, \overline{B_n} \cap \overline{B_m} = \emptyset, f(x) = f(y)\}$, donde $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de X . Tenemos que:

$$\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} R_{n,m} = \{(x, y, f) \in X \times X \times C(X, X) : x \neq y \wedge f(x) = f(y)\} = R.$$

Luego,

$$I^c = \pi_3(R) = \pi_3\left(\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} R_{n,m}\right) = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} \pi_3(R_{n,m}).$$

Por lo anterior para demostrar que I es G_δ , basta probar que $\pi_3(R_{n,m})$ es cerrado en $C(X, X)$.

Sea $\{(x_i, y_i, f_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $R_{n,m}$ que converge a $(x, y, f) \in X \times X \times C(X, X)$. Tenemos que $x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \in \overline{B_n}$, $y = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i \in \overline{B_m}$ y $f(z) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(z)$ para todo $z \in X$.

Como las funciones f_i, f son continuas y la convergencia es uniforme, por el Lema 1.22, $f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(y_i) = f(y)$. Por tanto $(x, y, f) \in R_{n,m}$, de donde $R_{n,m}$ es cerrado. Por el Lema 1.23, $\pi_3(R_{n,m})$ es cerrado.

Concluimos que $H(X)$ es polaco, porque $H(X) = S \cap I$ donde S y I son G_δ . $\square$

1.4. Espacio de las funciones Lipschitz

En esta sección presentaremos el espacio de las funciones Lipschitz entre dos espacios polacos y verificaremos que es un espacio polaco. Luego mostraremos que el espacio de funciones que preservan distancias entre espacios polacos es polaco. Con ayuda de este resultado más adelante veremos que el espacio de isometrías entre dos espacios polacos es un espacio polaco.

Definición 1.25. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios polacos. Definimos $L(X, Y)$ como el espacio de las funciones Lipschitz de X en Y con la topología de la convergencia puntual.

En el siguiente resultado estudiaremos una métrica para el espacio $L(X, Y)$ fijando un conjunto denso numerable de X .

Teorema 1.26. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios polacos, $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ un denso numerable en X . Entonces la siguiente función es una métrica para $L(X, Y)$

$$d_L(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} d'_Y(f(d_i), g(d_i))$$

donde d'_Y esta definida de la siguiente manera $d'_Y(y_1, y_2) = \frac{d_Y(y_1, y_2)}{1 + d_Y(y_1, y_2)}$ para todo $y_1, y_2 \in Y$.

Demostración. Sea $(f, g) \in L(X, Y) \times L(X, Y)$. Para $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2^{-i} d'_Y(f(d_i), g(d_i)) \leq 2^{-i}$, porque $d'_Y \leq 1$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$ es convergente, por el criterio de la comparación $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} d'_Y(f(d_i), g(d_i))$ es convergente. Por tanto d_L está bien definida. Observe que d_L satisface las propiedades de métrica.

□

Notemos que las funciones Lipschitz respecto a la métrica d_Y también son Lipschitz respecto a d'_Y . Sea $f \in (L(X, Y), d'_Y)$, entonces para $x_1, x_2 \in X$

$$d'_Y(f(x_1), f(x_2)) = \frac{d_Y(f(x_1), f(x_2))}{1 + d_Y(f(x_1), f(x_2))} \leq \frac{d_X(x_1, x_2)}{1 + d_Y(f(x_1), f(x_2))} \leq d_X(x_1, x_2).$$

Nuestra meta ahora es demostrar que d_L es compatible con la topología de la convergencia puntual en $L(X, Y)$. Para lograr este objetivo utilizaremos el siguiente resultado.

Lema 1.27. Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) espacios polacos y $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ denso en X . Los siguientes abiertos forman una base para $L(X, Y)$,

$$V(f, d_{i_1}, \dots, d_{i_n}, \varepsilon) = \{g \in L(X, Y) : d'_Y(f(d_{i_j}), g(d_{i_j})) < \varepsilon \text{ para todo } j \leq n\}$$

donde $f \in L(X, Y)$, $d_{i_1}, \dots, d_{i_n} \in D$ y $\varepsilon > 0$.

Demostración. Sean $f \in L(X, Y)$, $x_1, \dots, x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$, consideremos:

$$V(f, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \{g \in L(X, Y) : d'_Y(f(x_i), g(x_i)) < \varepsilon \text{ para todo } i \leq n\}.$$

Para cada $j \leq n$, existe $d_{i_j} \in D$ tal que $d_{i_j} \in B(x_j, \varepsilon/3)$. Sea $g \in V(f, d_{i_1}, \dots, d_{i_n}, \varepsilon/3)$. Luego

$$\begin{aligned} d'_Y(f(x_j), g(x_j)) &\leq d'_Y(f(x_j), f(d_{i_j})) + d'_Y(f(d_{i_j}), g(d_{i_j})) + d'_Y(g(d_{i_j}), g(x_j)) \\ &< d_X(x_j, d_{i_j}) + \varepsilon/3 + d_X(d_{i_j}, x_j) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así $g \in V(f, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$. De donde $V(f, d_{i_1}, \dots, d_{i_n}, \varepsilon/3) \subset V(f, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$.

□

Teorema 1.28. *La métrica d_L es compatible con la topología de la convergencia puntual en $L(X, Y)$.*

Demostración. Sea $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ denso en X . Por el Lema 1.27, los abiertos de la forma $V(f, d_{i_1}, \dots, d_{i_n}, \varepsilon)$ donde $f \in L(X, Y)$, $d_{i_1}, \dots, d_{i_n} \in D$ y $\varepsilon > 0$; forman un base para $L(X, Y)$.

Sean $f \in L(X, Y)$, $d_{i_1}, \dots, d_{i_n} \in D$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos $V(f, d_{i_1}, \dots, d_{i_n}, \varepsilon)$. Sea $m = \max\{i_1, \dots, i_n\}$, tomemos $\gamma = \varepsilon 2^{-m}$. Sea $g \in B_L(f, \gamma)$,

$$d_L(g, f) \geq 2^{-m} d'_Y(g(d_{i_j}), f(d_{i_j})) \text{ para todo } j \leq n.$$

Luego

$$d'_Y(g(d_{i_j}), f(d_{i_j})) \leq 2^m d_L(g, f) < 2^m \gamma = \varepsilon \text{ para todo } j \leq n,$$

de esto $g \in V(f, d_{i_1}, \dots, d_{i_n}, \varepsilon)$. Por tanto $B_L(f, \gamma) \subset V(f, d_{i_1}, \dots, d_{i_n}, \varepsilon)$.

Esto quiere decir que la topología de la convergencia puntual está contenida en la topología generada por la métrica d_L .

Por otro lado consideramos $f \in L(X, Y)$, $\gamma > 0$ y $B_L(f, \gamma)$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \gamma/2$, y tomemos $\{d_1, \dots, d_{n_0}\} \subset D$. Sea $g \in V(f, d_1, \dots, d_{n_0}, \gamma/2)$,

$$\begin{aligned} d_L(f, g) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} d'_Y(f(d_i), g(d_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n_0} 2^{-i} d'_Y(f(d_i), g(d_i)) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} d'_Y(f(d_i), g(d_i)) \\ &< \sum_{i=1}^{n_0} 2^{-i} \gamma/2 + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \gamma/2 + \gamma/2 = \gamma. \end{aligned}$$

De donde $d_L(f, g) < \gamma$. Así $g \in B_L(f, \gamma)$, de esto $V(f, d_1, \dots, d_{n_0}, \gamma/2) \subset B_L(f, \gamma)$.

Esto quiere decir que la topología generada por la métrica d_L está contenida en la topología de la convergencia puntual.

Por tanto d_L es una métrica compatible con la topología de la convergencia puntual en $L(X, Y)$. □

Para demostrar que $L(X, Y)$ es polaco, vamos a probar que $L(X, Y)$ es isométrico a un espacio separable y completo. Para lograr este propósito utilizaremos los siguientes resultados.

Lema 1.29. Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) espacios polacos y $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ denso en X . Entonces $F : L(X, Y) \longrightarrow Y^{\mathbb{N}}$ definida por $F(f) = \{f(d_i)\}_i$, es una inmersión isométrica. Además $F(L(X, Y))$ es cerrado en $Y^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Sean $f, g \in L(X, Y)$;

$$d_{Y^{\mathbb{N}}}(F(f), F(g)) = d_{Y^{\mathbb{N}}}(\{f(d_i)\}_i, \{g(d_i)\}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} d'_Y(f(d_i), g(d_i)) = d_L(f, g).$$

Por tanto F es una inmersión isométrica.

Demostremos que $F(L(X, Y))$ es cerrado en $Y^{\mathbb{N}}$. Sea $\{F(f_n)\}_n$ una sucesión de $F(L(X, Y))$ que converge a $y \in Y^{\mathbb{N}}$. Luego $\{F(f_n)\}_n$ es de Cauchy en $Y^{\mathbb{N}}$. Como F es una inmersión isométrica, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L(X, Y)$.

Para $j \in \mathbb{N}$ y para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$, $d_L(f_n, f_m) < 2^{-j}\varepsilon$. Así $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} d'_Y(f_n(d_i), f_m(d_i)) < 2^{-j}\varepsilon$. Por tanto $d'_Y(f_n(d_j), f_m(d_j)) < \varepsilon$, de donde $\{f_n(d_i)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $x \in X$, veamos que $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Para $\varepsilon > 0$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $d_i \in B(x, \varepsilon/3)$, porque $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ es denso en X . Como $\{f_n(d_i)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $d'_Y(f_n(d_i), f_m(d_i)) < \varepsilon/3$. Para $n, m \geq N$ tenemos que:

$$\begin{aligned} d'_Y(f_n(x), f_m(x)) &\leq d'_Y(f_n(x), f_n(d_i)) + d'_Y(f_n(d_i), f_m(d_i)) + d'_Y(f_m(d_i), f_m(x)) \\ &< d_X(x, d_i) + \varepsilon/3 + d_X(d_i, x) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (Y, d_Y) .

Como Y es completo, $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en Y . Luego, definamos $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Veamos que f es Lipschitz. En efecto, para $x, y \in X$

$$d_Y(f(x), f(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(f_n(x), f_n(y)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x, y) = d_X(x, y).$$

Como la topología en $L(X, Y)$ es la puntual y $f_n \rightarrow f$ puntualmente, entonces $f_n \rightarrow f$ en $L(X, Y)$.

Como F es continua, $F(f_n) \rightarrow F(f)$ en $Y^{\mathbb{N}}$; de donde $F(f) = y$. Así concluimos que $F(L(X, Y))$

es cerrado. □

Teorema 1.30. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios polacos. Entonces $(L(X, Y), d_L)$ es un espacio polaco.

Demostración. Por el Lema 1.29, $L(X, Y)$ es isométrico a $F(L(X, Y))$ que es cerrado en $Y^{\mathbb{N}}$. Luego $F(L(X, Y))$ es completo. Por tanto $L(X, Y)$ es separable y completo, de donde $L(X, Y)$ es polaco. □

Definición 1.31. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios polacos. Definimos $Dp(X, Y)$ como el espacio de las funciones que preservan la distancia de X en Y con la topología de la convergencia puntual.

Teorema 1.32. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios polacos, $Dp(X, Y)$ es cerrado en $L(X, Y)$.

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Dp(X, Y)$ que converge $f \in L(X, Y)$. Para $x, y \in X$

$$d_Y(f(x), f(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(f_n(x), f_n(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x, y) = d_X(x, y)$$

De donde $f \in Dp(X, Y)$. Por tanto $Dp(X, Y)$ es cerrado en $L(X, Y)$. □

Como $Dp(X, Y)$ es cerrado en $L(X, Y)$, concluimos que $Dp(X, Y)$ es un espacio polaco con la topología de la convergencia puntual.

1.5. Espacio de isometrías

En esta sección verificaremos que el espacio de isometrías entre dos espacios polacos es un espacio polaco, para esto vamos a demostrar que el conjunto de las isometrías es G_δ en el espacio de las funciones que preservan la distancia.

Definición 1.33. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios polacos, definimos $Iso(X, Y)$ como el espacio de las isometrías de X en Y con la topología de la convergencia puntual.

Para demostrar que $Iso(X, Y)$ es G_δ utilizaremos el siguiente resultado.

Lema 1.34. Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios polacos y $f \in Dp(X, Y)$. Entonces $f(X)$ es cerrado en Y .

Demostración. Consideremos $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de $f(X)$ tal que $f(x_n) \rightarrow y$ en Y , de donde $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Luego para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, $d_X(x_n, x_m) = d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Por tanto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como X es polaco, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente; esto quiere decir que $x_n \rightarrow x$ donde $x \in X$. Además como f es una función continua $f(x_n) \rightarrow f(x)$, de donde $f(x) = y$. Por tanto $f(X)$ es cerrado en Y . $\square$

Teorema 1.35. Sean X, Y espacios polacos, $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base para Y y además sea

$$O_n = \{f \in Dp(X, Y) : f(X) \cap B_n \neq \emptyset\}.$$

Entonces cada O_n es abierto en $Dp(X, Y)$ y $Iso(X, Y) = \bigcap_n O_n$.

Demostración. Veamos que O_n es abierto en $Dp(X, Y)$. Sea $f \in O_n$, entonces $f(X) \cap B_n \neq \emptyset$, de donde existe $b \in f(X) \cap B_n$; luego $b = f(x) \in B_n$ con $x \in X$. Como B_n es abierto en Y , existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subset B_n$.

Consideremos $V(f, x, \varepsilon)$ un abierto básico de $Dp(X, Y)$. Si $g \in V(f, x, \varepsilon)$, $d_Y(g(x), f(x)) < \varepsilon$. Por tanto $g(x) \in B(f(x), \varepsilon) \subset B_n$, de donde $g(X) \cap B_n \neq \emptyset$. Así $f \in V(f, x, \varepsilon) \subset O_n$, de donde O_n

es abierto en $Dp(X, Y)$.

Demostremos que $Iso(X, Y) = \bigcap_n O_n$. Sea $f \in Iso(X, Y)$ entonces f es sobreyectiva, por tanto $f(X) = Y$. Luego $f(X) \cap B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$, de donde $Iso(X, Y) \subset \bigcap_n O_n$.

Ahora sea $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$, entonces $f \in Dp(X, Y)$ y $f(X) \cap B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$; esto quiere decir que $\overline{f(X)} = Y$. Como $f(X)$ es cerrado, tenemos que $f(X) = \overline{f(X)} = Y$. Así f es sobreyectiva, por tanto es isometría; de donde $\bigcap_n O_n \subset Iso(X, Y)$.

Concluimos que $Iso(X, Y) = \bigcap_n O_n$. □

Del Teorema anterior, $Iso(X, Y)$ es intersección numerable de abiertos. Por tanto $Iso(X, Y)$ es G_δ en $Dp(X, Y)$, de donde $Iso(X, Y)$ es polaco.

2. Grupos polacos

2.1. Grupos topológicos metrizables

A continuación definiremos el concepto de grupo topológico metrizable. Estudiaremos algunos resultados importantes para estos grupos como el teorema de Birkhoff-Kakutani. Luego demostraremos que todo grupo topológico metrizable admite una única completación.

Antes de definir el concepto de grupo topológico metrizable, vamos a recordar qué es un grupo topológico y algunas propiedades.

Definición 2.1. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y τ una topología en G . Decimos que $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico si $f : G \times G \longrightarrow G$ definida por $f(x, y) = x \cdot y^{-1}$ es continua.

Ejemplo 2.2. $(\mathbb{R}, +, \tau_u)$ es un grupo topológico.

Ejemplo 2.3. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y τ_d la topología discreta. Entonces $(G, \cdot, \tau_d)$ es un grupo topológico.

Definición 2.4. Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico, decimos que G es metrizable si existe d una métrica compatible con la topología τ .

Definición 2.5. Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico y d una métrica compatible con la topología τ , decimos que d es invariante por la izquierda, si para todo $x, y, z \in G$ tenemos:

$$d(x, y) = d(zx, zy)$$

Decimos que es invariante por derecha si $d(x, y) = d(xz, yz)$.

El siguiente teorema muestra las mínimas condiciones para que un grupo sea metrizable. Además que todo grupo metrizable admite una métrica invariante por la izquierda.

Teorema 2.6. *(Birkhoff - Kakutani) Sea G un grupo topológico. Entonces G es metrizable si y sólo si G es Hausdorff y su elemento identidad tiene una base de vecindades que es numerable.*

Si G es metrizable, entonces existe una métrica invariante por la izquierda que es compatible con la métrica de G . Además admite una métrica invariante por derecha que es compatible.

Una demostración del Teorema 2.6 la podemos leer en (Uzcátegui and Di Prisco, 2020, Teorema 7.8).

Anteriormente vimos que un espacio métrico tiene una única completación salvo isometría. Ahora veremos un resultado equivalente para los grupos topológicos que son metrizables. Para lograr este objetivo consideraremos una métrica adecuada D , que introducimos en el siguiente resultado.

Teorema 2.7. *Sean $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico metrizable y d una métrica compatible con la topología τ . Para todo $x, y \in G$, definamos:*

$$D(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1})$$

Entonces D es una métrica compatible con la topología τ .

Demostración. Para demostrar que D es una métrica topológicamente equivalente a d , probaremos

que la función identidad $Id : (G, d) \longrightarrow (G, D)$ es un homeomorfismo.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ que converge a x en (G, d) . Como la función $z \longrightarrow z^{-1}$ es continua tenemos que $x_n^{-1} \rightarrow x^{-1}$ en (G, d) . Por tanto para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ y $d(x_n^{-1}, x^{-1}) < \varepsilon/2$. Luego para $n \geq n_0$, $D(x_n, x) = d(x_n, x) + d(x_n^{-1}, x^{-1}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Por tanto $x_n \rightarrow x$ en (G, D) .

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ que converge a x en (G, D) . Para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, $D(x_n, x) = d(x_n, x) + d(x_n^{-1}, x^{-1}) < \varepsilon$. De donde $d(x_n, x) < \varepsilon$. Por tanto $x_n \rightarrow x$ en (G, d) .

Concluimos que $Id : (G, d) \longrightarrow (G, D)$ es un homeomorfismo, de donde D es una métrica topológicamente equivalente a d . □

Lema 2.8. *Sea G un grupo metrizable con una métrica d invariante por la izquierda sobre G .*

Entonces $d(xy, 1_G) \leq d(x, 1_G) + d(y, 1_G)$ para todo $x, y \in G$.

Demostración. Sean $x, y \in G$;

$$d(xy, 1_G) = d(x^{-1}xy, x^{-1}) = d(y, x^{-1}) \leq d(y, 1_G) + d(1_G, x^{-1}) = d(x, 1_G) + d(y, 1_G).$$

□

En ocasiones nos referimos a una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_n$ en un espacio métrico (X, d) , como d -Cauchy.

Lema 2.9. *Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de Cauchy en (G, D) donde D es la métrica del*

Teorema 2.7. Entonces $\{x_n^{-1}y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n^{-1}x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy respecto a d .

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$, $D(x_n, x_m) < \varepsilon/3$; porque $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (G, D) . Por la continuidad de $y \mapsto x_{n_0}^{-1}yx_{n_0}$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $g \in G$ con $d(g, 1_G) < \delta$, $d(x_{n_0}^{-1}gx_{n_0}, x_{n_0}^{-1}1_Gx_{n_0}) = d(x_{n_0}^{-1}gx_{n_0}, 1_G) < \varepsilon/3$.

Como $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en (G, D) , existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_1$, $D(y_m, y_n) < \delta$. Entonces para $m, n \geq \max\{n_0, n_1\}$,

$$d(y_my_n^{-1}, 1_G) = d(y_n^{-1}, y_m^{-1}) \leq D(y_m, y_n) < \delta.$$

Por tanto $d(x_{n_0}^{-1}y_my_n^{-1}x_{n_0}, 1_G) < \varepsilon/3$.

Usando el Lema 2.8 dos veces, para $m, n \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$\begin{aligned} d(y_n^{-1}x_n, y_m^{-1}x_m) &= d(x_m^{-1}y_my_n^{-1}x_n, 1_G) = d(x_m^{-1}x_{n_0}x_{n_0}^{-1}y_my_n^{-1}x_{n_0}x_{n_0}^{-1}x_n, 1_G) \\ &\leq d(x_m^{-1}x_{n_0}, 1_G) + d(x_{n_0}^{-1}y_my_n^{-1}x_{n_0}, 1_G) + d(x_{n_0}^{-1}x_n, 1_G) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto $\{y_n^{-1}x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy respecto a d . Cambiando de lugar las sucesiones obtenemos también que $\{x_n^{-1}y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión d -Cauchy. $\square$

Para estudiar la completación de un grupo topológico metrizable, recordemos la completación de un espacio métrico por sucesiones de Cauchy siguiendo (Uzcátegui and Di Prisco, 2020, Teorema 1.30).

Sea (X, d) un espacio métrico, $\mathcal{C}$ la colección de todas las sucesiones de Cauchy en X . Decimos que dos sucesiones de Cauchy $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ están relacionadas es decir $\{x_n\}_n \sim \{y_n\}_n$ si y

sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$.

La completación de X es el espacio $\widehat{X} = \mathcal{C} / \sim$, con la métrica $\widehat{d}$ definida por:

$$\widehat{d}([\{x_n\}_n], [\{y_n\}_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Sea $f : X \longrightarrow \widehat{X}$, definida por $f(x) = [\{x\}_n]$. Tenemos que f es una inmersión isométrica y $f(X)$ es denso en $\widehat{X}$.

Teorema 2.10. (*Completación de un grupo metrizable*) Sea $(G, \cdot, \tau)$ un grupo topológico metrizable, donde τ es compatible con una métrica invariante por izquierda d . Sea D la métrica definida en el Teorema 2.7 y $(\widehat{G}, \widehat{D})$ la completación de (G, D) . Entonces la operación del grupo se extiende de forma única a $\widehat{G}$, de manera que $\widehat{G}$ es un grupo metrizable completo con la topología inducida por $\widehat{D}$.

Además existe una única extensión de la métrica d a $\widehat{G}$ que es compatible con $\widehat{D}$ e invariante por izquierda.

Demostración. Por el Teorema 2.7, D es una métrica compatible con la topología de G . Consideremos $(\widehat{G}, \widehat{D})$ la completación de (G, D) .

Del Lema 2.9, si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en (G, D) , entonces $\{x_n^{-1}y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n^{-1}x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones d -Cauchy. Luego para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$, $d(x_n^{-1}y_n, x_m^{-1}y_m) < \varepsilon/2$ y $d(y_n^{-1}x_n, y_m^{-1}x_m) < \varepsilon/2$. Así para $n, m \geq n_0$,

$$D(x_n^{-1}y_n, x_m^{-1}y_m) = d(x_n^{-1}y_n, x_m^{-1}y_m) + d(y_n^{-1}x_n, y_m^{-1}x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por tanto $\{x_n^{-1}y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es D -Cauchy. Tenemos que la sucesión $\{1_G\}_{n \in \mathbb{N}}$ es D -cauchy, luego $\{x_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de D -Cauchy. De donde $\{x_n y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es D -Cauchy. Así podemos extender la operación de G a su completación $\widehat{G}$ de la siguiente forma;

$$[\{x_n\}_n] \cdot [\{y_n\}_n] = [\{x_n y_n\}_n],$$

para $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ sucesiones de Cauchy respecto a D .

Demostremos que la operación $\cdot$ está bien definida. Sea

$$([\{x_n\}_n], [\{y_n\}_n]) = ([\{x'_n\}_n], [\{y'_n\}_n]) \in (\widehat{G}, \widehat{D}) \times (\widehat{G}, \widehat{D}).$$

Entonces $[\{x_n\}_n] = [\{x'_n\}_n]$ y $[\{y_n\}_n] = [\{y'_n\}_n]$. De donde $\{x_n\}_n \sim \{x'_n\}_n$, $\{y_n\}_n \sim \{y'_n\}_n$.

Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x'_n) = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} D(y_n, y'_n) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\{y_n\}_n$ es una sucesión D -Cauchy, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq m_1$, $D(y_n, y_m) < \varepsilon/6$. Además, como $\{y'_n\}_n$ es una sucesión D -Cauchy, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq m_2$, $D(y'_n, y'_m) < \varepsilon/12$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} D(y_n, y'_n) = 0$, existe $m_3 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m_3$, $D(y_n, y'_n) < \varepsilon/12$. Luego para $n \geq n_0 = \max\{m_1, m_2, m_3\}$:

$$d(y'_n, y_{n_0}) \leq d(y'_n, y'_{n_0}) + d(y'_{n_0}, y_{n_0}) < \varepsilon/12 + \varepsilon/12 = \varepsilon/6.$$

Por la continuidad de la operación, $g \mapsto y_{n_0}^{-1} g y_{n_0}$ es continua. Luego existe $\delta > 0$ tal que para todo $g \in G$ con $d(g, 1_G) < \delta$, $d(y_{n_0}^{-1} g y_{n_0}, y_{n_0}^{-1} 1_G y_{n_0}) = d(y_{n_0}^{-1} g y_{n_0}, 1_G) < \varepsilon/6$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x'_n) = 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_1$ se tiene que $D(x_n, x'_n) < \delta$.

Entonces para todo $n \geq \max\{n_0, n_1\}$;

$$d(x_n'^{-1}x_n, 1_G) = d(x_n, x'_n) \leq D(x_n, x'_n) < \delta.$$

Por tanto $d(y_{n_0}^{-1}x_n'^{-1}x_n y_{n_0}, 1_G) < \varepsilon/6$.

Luego para $n \geq \max\{n_0, n_1\}$;

$$\begin{aligned} d(x_n y_n, x'_n y'_n) &= d(y_n'^{-1}x_n'^{-1}x_n y_n, 1_G) = d(y_n'^{-1}y_{n_0}y_{n_0}^{-1}x_n'^{-1}x_n y_{n_0}y_{n_0}^{-1}y_n, 1_G) \\ &\leq d(y_n'^{-1}y_{n_0}, 1_G) + d(y_{n_0}^{-1}x_n'^{-1}x_n y_{n_0}, 1_G) + d(y_{n_0}^{-1}y_n, 1_G) \\ &< \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Por tanto $d(x_n y_n, x'_n y'_n) < \varepsilon/2$.

De forma análoga, probamos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_2$, $d(y_n^{-1}x_n^{-1}, y_n'^{-1}x_n'^{-1}) < \varepsilon/2$. Luego para $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$;

$$D(x_n y_n, x'_n y'_n) = d(x_n y_n, x'_n y'_n) + d(y_n^{-1}x_n^{-1}, y_n'^{-1}x_n'^{-1}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n y_n, x'_n y'_n) = 0$, de donde $\{x_n y_n\}_n \sim \{x'_n y'_n\}_n$. Así $[\{x_n y_n\}_n] = [\{x'_n y'_n\}_n]$.

Por tanto $\cdot$ está bien definida.

Veamos que $h : \mathcal{C}/\sim \times \mathcal{C}/\sim \longrightarrow \mathcal{C}/\sim$, dada por $h([\{x_n\}_n], [\{y_n\}_n]) = [\{x_n\}_n] \cdot [\{y_n\}_n]^{-1} = [\{x_n y_n^{-1}\}_n]$ es continua.

Sea $\{([\{x_n^i\}_n], [\{y_n^i\}_n])\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $([\{x_n\}_n], [\{y_n\}_n])$ en $\mathcal{C} / \sim \times \mathcal{C} / \sim$.

Luego $[\{x_n^i\}_n] \rightarrow [\{x_n\}_n]$ y $[\{y_n^i\}_n] \rightarrow [\{y_n\}_n]$, esto quiere decir que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \widehat{D}([\{x_n^i\}_n], [\{x_n\}_n]) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \widehat{D}([\{y_n^i\}_n], [\{y_n\}_n]) = 0,$$

luego

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n^i, x_n) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} D(y_n^i, y_n) = 0.$$

Para $\varepsilon > 0$, existe m_0 tal que para $n, m \geq m_0$, $D(y_n, y_m) < \varepsilon/12$; porque $\{y_n\}_n$ es una sucesión D -Cauchy. Además tenemos que existen $m_1, j_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m_1$ y $i \geq j_1$, $D(y_n^i, y_n) < \varepsilon/12$; porque $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} D(y_n^i, y_n) = 0$. Para $n \geq n_0 = \max\{m_0, m_1\}$ y $i \geq j_1$:

$$d(y_n^i, y_{n_0}) \leq d(y_n^i, y_n) + d(y_n, y_{n_0}) < \varepsilon/12 + \varepsilon/12 = \varepsilon/6.$$

Por la continuidad de la función $g \mapsto y_{n_0} g y_{n_0}^{-1}$, existe $\delta > 0$ tal que para $g \in G$ con $d(g, 1_G) < \delta$, $d(y_{n_0} g y_{n_0}^{-1}, y_{n_0} 1_G y_{n_0}^{-1}) = d(y_{n_0} g y_{n_0}^{-1}, 1_G) < \varepsilon/6$. Como $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n^i, x_n) = 0$, existen $n_1, j_2 \in \mathbb{N}$ tales que para $n \geq n_1$ y $i \geq j_2$, $D(x_n^i, x_n) < \delta$. Luego para $n \geq n_1$ y $i \geq j_2$:

$$d(x_n^{-1} x_n^i, 1_G) = d(x_n^i, x_n) \leq D(x_n^i, x_n) < \delta.$$

Por tanto $d(y_{n_0}x_n^{-1}x_n^iy_{n_0}^{-1}, 1_G) < \varepsilon/6$. Luego para $n \geq \{n_0, n_1\}$ y $i \geq \{j_1, j_2\}$:

$$\begin{aligned} d(x_n^i(y_n^i)^{-1}, x_n y_n^{-1}) &= d(y_n x_n^{-1} x_n^i (y_n^i)^{-1}, 1_G) = d(y_n y_{n_0}^{-1} y_{n_0} x_n^{-1} x_n^i y_{n_0}^{-1} y_{n_0} (y_n^i)^{-1}, 1_G) \\ &\leq d(y_n y_{n_0}^{-1}, 1_G) + d(y_{n_0} x_n^{-1} x_n^i y_{n_0}^{-1}, 1_G) + d(y_{n_0} (y_n^i)^{-1}, 1_G) \\ &< \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

De forma análoga probamos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_2$,

$d(y_n^i(x_n^i)^{-1}, y_n x_n^{-1}) < \varepsilon/2$. Por tanto,

$$D(x_n^i(y_n^i)^{-1}, x_n y_n^{-1}) = d(x_n^i(y_n^i)^{-1}, x_n y_n^{-1}) + d(y_n^i(x_n^i)^{-1}, y_n x_n^{-1}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Concluimos que $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n^i(y_n^i)^{-1}, x_n y_n^{-1}) = 0$, de donde

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \widehat{D}([\{x_n^i(y_n^i)^{-1}\}_n], [\{x_n y_n^{-1}\}_n]) = 0.$$

Así, $[\{x_n^i(y_n^i)^{-1}\}_n] \rightarrow [\{x_n y_n^{-1}\}_n]$. Por tanto h es continua.

Observe que $(\widehat{G}, \cdot)$ es un grupo. De donde $\widehat{G}$ es un grupo topológico con la operación $\cdot$ y la métrica $\widehat{D}$. Demostremos que la operación del grupo se extiende de esta única manera a $\widehat{G}$.

Identificaremos cada $g \in G$ como $f(g) = [\{g\}_n]$ en $\widehat{G}$. Tenemos $f(G)$ denso en $\widehat{G}$. Consideremos $h_1 : G \times G \rightarrow G$ dada por $h_1(x, y) = xy$, y $h_2 : \widehat{G} \times \widehat{G} \rightarrow \widehat{G}$ dada por $h_2([\{x_n\}_n], [\{y_n\}_n]) =$

$[\{x_n\}_n] \cdot [\{y_n\}_n] = [\{x_n y_n\}_n]$. Sean $x, y \in G$,

$$h_2(f(x), f(y)) = h_2([\{x\}_n], [\{y\}_n]) = [\{x\}_n] \cdot [\{y\}_n] = [\{xy\}_n] = f(xy).$$

Por tanto $\cdot$ extiende a la operación de G .

Supongamos que existe $h_3 : \widehat{G} \times \widehat{G} \longrightarrow \widehat{G}$, definida por $h_3([\{x_n\}_n], [\{y_n\}_n]) = [\{x_n\}_n] * [\{y_n\}_n]$, continua y que extiende la operación del grupo. De donde $h_2|_{f(G) \times f(G)} = h_3|_{f(G) \times f(G)}$. Tenemos que $f(G) \times f(G)$ es denso en $\widehat{G} \times \widehat{G}$, por ser $f(G)$ denso en $\widehat{G}$. Como h_2 y h_3 son continuas, $h_2 = h_3$.

Demostremos ahora que podemos extender la métrica d a $\widehat{G}$. Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de Cauchy respecto a D . Por el Lema 2.9, $\{y_n^{-1}x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy respecto a d .

Veamos que $\{d(y_n^{-1}x_n, 1_G)\}_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$;

$$|d(y_n^{-1}x_n, 1_G) - d(y_m^{-1}x_m, 1_G)| \leq d(y_n^{-1}x_n, y_m^{-1}x_m) < \varepsilon.$$

Por tanto $\{d(y_n^{-1}x_n, 1_G)\}_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

De donde $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n^{-1}x_n, 1_G)$ existe. Como d es una métrica invariante por izquierda $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ también existe. Luego definimos la métrica ρ en $\widehat{G}$ como

$$\rho([\{x_n\}_n], [\{y_n\}_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Por la completación de un espacio métrico, ρ es una métrica para $\widehat{G}$. Como d y D son topológicamente equivalentes ρ es compatible con $\widehat{D}$. Veamos que ρ es invariante por la izquierda.

Sean $[\{x_n\}_n], [\{y_n\}_n], [\{z_n\}_n] \in \mathcal{C} / \sim$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \rho([\{z_n\}_n] \cdot [\{x_n\}_n], [\{z_n\}_n] \cdot [\{y_n\}_n]) &= \rho([\{z_n x_n\}_n], [\{z_n y_n\}_n]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n x_n, z_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \\ &= \rho([\{x_n\}_n], [\{y_n\}_n]). \end{aligned}$$

Por la forma como se definió ρ es fácil ver que es la única extensión de la métrica d a $\widehat{G}$ compatible con $\widehat{D}$.

□

2.2. Grupos polacos

Estudiaremos ahora el concepto de grupo polaco y algunos resultados importantes para nuestra investigación, por ejemplo veremos que un subgrupo de un grupo polaco es polaco si es cerrado. Además presentaremos el grupo de homeomorfismos sobre un espacio métrico compacto y el grupo de isometrías sobre un grupo polaco.

Definición 2.11. *Un grupo topológico $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo polaco si (G, τ) es polaco.*

Ejemplo 2.12. $(\mathbb{R}, +, |\cdot|)$ es un grupo polaco.

Teorema 2.13. *Sea G un grupo polaco, un subgrupo H de G con la topología relativa es polaco si y sólo si H es G_δ si y sólo si H es cerrado.*

Una demostración del Teorema 2.13 se puede leer en (Uzcátegui and Di Prisco, 2020, Teorema 7.19). De este resultado tenemos una forma de identificar cuando un subgrupo es polaco, cualquier subgrupo que sea G_δ es polaco, y estos a su vez son cerrados. Por tanto un subgrupo H de un grupo G es completamente metrizable con la métrica que hace a G completamente metrizable.

Teorema 2.14. *Sea G un grupo polaco, con d una métrica que es invariante por la izquierda compatible. Entonces existe una métrica completa invariante por la izquierda compatible si y sólo si d es completa.*

Este resultado lo podemos leer en (Uzcátegui and Di Prisco, 2020, Teorema 7.22). Utilizando el Teorema 2.10 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.15. *Sea G un grupo polaco con una métrica d invariante por la izquierda compatible. Tenemos que:*

$$\forall x, y \in G, \quad D(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1}).$$

Es una métrica completa que es compatible. Además si d es invariante por izquierda y por derecha, entonces d es completa.

Ejemplo 2.16. *Sea (X, d) un espacio métrico polaco que es compacto. Consideremos $H(X)$ el grupo de homeomorfismos de X en X con la operación composición y la topología generada por la métrica uniforme d_u . Verifiquemos que $H(X)$ es un grupo topológico.*

Demostremos que $h : H(X) \times H(X) \longrightarrow H(X)$ definida por $h(f, g) = f \circ g^{-1}$, es continua.

Sean $(f, g) \in H(X) \times H(X)$ y $B_{d_u}(f \circ g^{-1}, \varepsilon)$ donde $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/4$. Como g^{-1} es

uniformemente continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que para $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta_1$, $d(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) < \delta$. Consideremos la vecindad abierta $B_{d_u}(f, \varepsilon/4) \times B_{d_u}(g, \delta_1)$ de (f, g) en $H(X) \times H(X)$. Sea $(f_1, g_1) \in B_{d_u}(f, \varepsilon/4) \times B_{d_u}(g, \delta_1)$. Para $x \in X$, existe $y \in X$ tal que $x = g_1(y)$; porque g_1 es sobre. Así,

$$\begin{aligned} d(g_1^{-1}(x), g^{-1}(x)) &= d(g_1^{-1}(g_1(y)), g^{-1}(g_1(y))) = d(y, g^{-1}(g_1(y))) \\ &= d(g^{-1}(g(y)), g^{-1}(g_1(y))) < \delta. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} d(f_1 g_1^{-1}(x), f g^{-1}(x)) &\leq d(f_1(g_1^{-1}(x)), f(g_1^{-1}(x))) + d(f(g_1^{-1}(x)), f(g^{-1}(x))) \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Concluimos que h es continua. De donde $H(X)$ es un grupo topológico.

En la Sección 1.3 vimos que la métrica d_u es polaca, luego $H(X)$ es un grupo polaco.

Además, tenemos que para $f, f_1, g \in H(X)$:

$$d_u(f \circ g, f_1 \circ g) = \sup\{d(f(g(x)), f_1(g(x))) : x \in X\} = d_u(f, f_1).$$

Por tanto d_u es invariante por la derecha. Por el Teorema 2.15, la métrica D definida como

$D(f, g) = d_u(f, g) + d_u(f^{-1}, g^{-1})$ es compatible y completa en $H(X)$.

La métrica d_u del ejemplo anterior no necesariamente es completa en el espacio $H(X)$, basta verificar que el conjunto $H(X)$ no necesariamente es cerrado en $C(X, X)$. En efecto, consideremos

$\{f_n\}_n \subset C([0, 1], [0, 1])$ donde $f_1(x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$ y para $n \geq 2$,

$$f_n(x) = \begin{cases} (2 - 2/n)x & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ 2x/n + 1 - 2/n & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Tenemos que las funciones f_n son homeomorfismos y además $f_n \rightarrow f$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2) \\ 1 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Como la función f no es inyectiva, concluimos que $H([0, 1])$ el conjunto de los homeomorfismos no es cerrado en $C([0, 1], [0, 1])$.

Ejemplo 2.17. Sea (X, d) un espacio polaco. Consideremos $\text{Iso}(X)$ el grupo de las isometrías de X en X con la operación composición y la topología producto. Verifiquemos que $\text{Iso}(X)$ es un grupo topológico. Para lograr este propósito veamos que $h : \text{Iso}(X) \times \text{Iso}(X) \rightarrow \text{Iso}(X)$ definida por $h(f, g) = f \circ g^{-1}$, es continua.

Sean $(f, g) \in \text{Iso}(X) \times \text{Iso}(X)$ y $V(f \circ g^{-1}, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$ donde $x_1, \dots, x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Como f es sobre, para todo $i \leq n$, existe $y_i \in X$ tal que $x_i = f(y_i)$. Consideremos la vecindad abierta $V(f, g^{-1}(x_1), \dots, g^{-1}(x_n), \varepsilon/2) \times V(g, y_1, \dots, y_n, \varepsilon/2)$.

Sea $(f_1, g_1) \in V(f, g^{-1}(x_1), \dots, g^{-1}(x_n), \varepsilon/2) \times V(g, y_1, \dots, y_n, \varepsilon/2)$. Para $i \leq n$,

$$\begin{aligned} d(g_1^{-1}(x_i), g^{-1}(x_i)) &= d(g_1^{-1}(f(y_i)), g^{-1}(f(y_i))) = d(g_1^{-1}(f(y_i)), y_i) \\ &= d(g_1^{-1}(f(y_i)), g_1^{-1}(g_1(y_i))) = d(g(y_i), g_1(y_i)) < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 d(f_1 g_1^{-1}(x_i), f g^{-1}(x_i)) &\leq d(f_1(g_1^{-1}(x_i)), f_1(g^{-1}(x_i))) + d(f_1(g^{-1}(x_i)), f(g^{-1}(x_i))) \\
 &= d(g_1^{-1}(x_i), g^{-1}(x_i)) + d(f_1(g^{-1}(x_i)), f(g^{-1}(x_i))) \\
 &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Concluimos que h es continua. De donde $\text{Iso}(X)$ es un grupo topológico.

En la Sección 1.3 se demostró que la topología producto en $\text{Iso}(X)$ es polaca, de donde $\text{Iso}(X)$ es un grupo polaco. Recordemos que en la Sección 1.3 se construyó una métrica compatible d_L para $\text{Iso}(X)$, considerando un subconjunto denso $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ de X de la siguiente forma:

$$d_L(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} d'(f(d_i), g(d_i))$$

donde d' esta definida como $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ para $x, y \in X$.

Veamos que las isometrías respecto a d también son isometrías respecto a d' . Sea $f \in \text{Iso}(X, d)$ entonces,

$$d'(f(x), f(y)) = \frac{d(f(x), f(y))}{1 + d(f(x), f(y))} = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = d'(x, y).$$

Ahora demostremos que d_L es invariante por la izquierda. En efecto, sean $f, f_1, f_2 \in Iso(X)$;

$$\begin{aligned} d_L(f \circ f_1, f \circ f_2) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} d'(f(f_1(d_i)), f(f_2(d_i))) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} d'(f_1(d_i), f_2(d_i)) = d_L(f_1, f_2). \end{aligned}$$

El espacio $(Iso(X), d_L)$ no necesariamente es completo, basta verificar que el conjunto $Iso(X)$ no necesariamente es cerrado en $L(X, X)$.

Consideremos $\mathbb{N}$ con la métrica discreta d . Veamos que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = L(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, en efecto, sean $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, n, m \in \mathbb{N}$. Si $n \neq m$, $d(f(n), f(m)) \leq 1 = d(n, m)$. Además, si $n = m$ tenemos que $f(n) = f(m)$, luego $d(f(n), f(m)) = 0 = d(n, m)$. Por tanto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = L(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Por el Teorema 1.28, $d_L(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d(\alpha(n), \beta(n))$ es compatible con la topología producto en $L(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Además $Iso(\mathbb{N}) = S_{\infty}$. Como S_{∞} no es cerrado en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, $Iso(\mathbb{N})$ no es cerrado en $L(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ respecto la métrica d_L .

3. Espacio universal de Urysohn

En este capítulo se presentaran los conceptos de universalidad y de ultrahomogeneidad. Definiremos el espacio universal de Urysohn y probaremos que es único salvo isometría. Luego estudiaremos diferentes construcciones del espacio universal de Urysohn siguiendo (Hušek, 2008).

3.1. Espacios métricos universales

Ahora definiremos el concepto de espacio universal. Estudiaremos l_∞ el espacio de las sucesiones acotadas y el cubo de Hilbert. Además presentaremos dos ejemplos muy estudiados de espacios polacos universales: $C[0, 1]$ el espacio de las funciones continuas de $[0, 1]$ a los reales, y el espacio universal de Urysohn $\mathbb{U}$.

Definición 3.1. *Un espacio métrico polaco (X, d) es universal si para todo espacio métrico polaco (Y, d') , existe una inmersión isométrica de Y en X . Esto quiere decir que (Y, d') es isométrico a un subespacio de (X, d) .*

Ejemplo 3.2. *El cubo de Hilbert $[0, 1]^\mathbb{N}$ contiene copias homeomorfas de todos los espacios métricos separables. En efecto, sean (X, d) un espacio métrico separable, $D = \{d_n\}_n$ un subconjunto denso de X y d' una métrica compatible con d tal que $d' \leq 1$. Consideremos $f : X \longrightarrow [0, 1]^\mathbb{N}$ definida como $f(x) = \{d'(x, d_n)\}_n$. Note que f es una inmersión topológica.*

Ejemplo 3.3. *El espacio de Banach $l_\infty = \{x \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$ es universal para los espacios métricos separables, pero no es un espacio separable. En efecto, sean X un espacio métrico separable y $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ denso en X . Fijando $d_1 \in D$ definamos $\varphi : X \longrightarrow l_\infty$ como*

$\varphi(x) = \{d(x, d_n) - d(d_n, d_1)\}_n$. Note que φ es una inmersión isométrica (utilizando la desigualdad triangular se demuestra que $|\varphi(x)| \leq d(x, d_1)$).

Ahora veamos que l_∞ no es separable. Consideremos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones cuyos terminos son ceros y unos, este conjunto no es numerable porque su cardinal es $2^{|\mathbb{N}|}$. Sean $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, si $x \neq y$ entonces tienen al menos una componente distinta; es decir existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq y_i$, esto quiere decir que $|x_i - y_i| = 1$. De donde $\|x - y\| = \sup\{|x_j - y_j| : j \in \mathbb{N}\} = 1$. Consideremos $\mathbb{A} = \{B(x, 1/4) : x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\}$. Sean $B(x, 1/4), B(y, 1/4) \in \mathbb{A}$ con $x \neq y$, tenemos que $\|x - y\| = 1$, de donde $B(x, 1/4) \cap B(y, 1/4) = \emptyset$. Por tanto $\mathbb{A}$ no es numerable.

Sea D un subconjunto denso de l_∞ . Tenemos que $D \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathbb{A}$. Por tanto D no es numerable. Luego concluimos que l_∞ no es separable.

El espacio l_∞ es el primer ejemplo conocido de espacio métrico que contiene copias isométricas de todos los espacios métrico separables. En 1914 se estaba buscando un espacio polaco que contuviera copias isométricas de todos los espacios polacos, fue hasta 1924 que Urysohn construyó un espacio métrico separable universal para los espacios métricos separable. Este espacio lo estudiaremos mas adelante en este capítulo.

Otro ejemplo importante de espacio polaco universal viene dado por el siguiente resultado clásico.

Lema 3.4. *Todo espacio de Banach separable es isométrico a un subespacio de $C[0, 1]$.*

Una demostración del Lema 3.4 se puede leer en (Fabian et al., 2013, Teorema 5.17). Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Todo espacio métrico separable es isométrico a un subespacio de $C[0, 1]$.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Como l_∞ es universal para los espacios métricos separables, existe una inmersión isométrica $\varphi : X \longrightarrow l_\infty$. Luego φ es una isometría de X sobre el espacio separable $\varphi(X)$. Entonces $Y = \overline{\text{gen}(\varphi(X))}$ es un espacio de Banach separable. Por el Lema 3.4, existe una inmersión isométrica $\psi : Y \longrightarrow C[0, 1]$. Por tanto $\psi \circ \varphi$ es una inmersión isométrica. $\square$

Del resultado anterior concluimos que $C[0, 1]$ es un espacio polaco universal.

3.2. Ultrahomogeneidad

En esta sección definiremos el concepto de ultrahomogeneidad. Luego estudiaremos la ultrahomogeneidad de $\mathbb{R}$ y probaremos que $C[0, 1]$ no tiene esta propiedad.

Definición 3.6. *Decimos que (X, d) un espacio métrico es ultrahomogéneo si para F_1, F_2 subconjuntos finitos de X y una isometría $\varphi : F_1 \longrightarrow F_2$, existe una isometría $\psi : X \longrightarrow X$ que extiende a φ .*

Ejemplo 3.7. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es ultrahomogéneo. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ finitos y una isometría $\varphi : A \longrightarrow B$. Es fácil demostrar que φ es de la forma $\varphi(x) = ax + c$ donde $a \in \{1, -1\}$, $c \in \mathbb{R}$. Consideremos $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $\hat{\varphi}(x) = ax + c$. Note que $\hat{\varphi}$ es una isometría que extiende a φ .

Mostraremos que la ultrahomogeneidad es un concepto que depende de la métrica y no de la topología.

Ejemplo 3.8. El espacio $(\mathbb{R}, d)$ con $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = |e^x - e^y|$, no es ultrahomogéneo. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y una isometría $\varphi : A \longrightarrow B$. Luego, $|e^{\varphi(x)} - e^{\varphi(y)}| = |e^x - e^y|$ para

todo $x, y \in A$. Observe que φ es de la forma $\varphi(x) = \ln(ae^x + c)$ donde $a = -1$, $c \in \mathbb{R}^+$ o $a = 1$, $c \in \mathbb{R}$. Consideremos $\varphi(x) = \ln(e^x - 1)$, tenemos que φ no se puede extender a una isometría de $\mathbb{R}$ en sí mismo. Por lo tanto $(\mathbb{R}, d)$ no es ultrahomogéneo.

Nuestra meta ahora es demostrar que $C[0, 1]$ no es ultrahomogéneo, para este propósito probaremos el siguiente resultado de isometrías entre espacios de Banach. Este resultado surge de la prueba de que toda isometría entre espacios de Banach es afín (ver (Benyamini and Lindenstrauss, 1998, Teorema 14.1)).

Teorema 3.9. Sean X, Y espacios de Banach y $f : X \rightarrow Y$ una isometría. Entonces $f((x+y)/2) = (f(x) + f(y))/2$ para todo $x \in X$.

Demostración. Sean $x, y \in X$, demostraremos que $f((x+y)/2) = (f(x) + f(y))/2$. Definamos recursivamente una familia decreciente de subconjuntos cerrados K_n .

$$K'_1 = \{u : \|u - x\| \leq \|x - y\|/2 \text{ y } \|u - y\| \leq \|x - y\|/2\}$$

$$K_1 = \{u : K'_1 \subset \overline{B}(u, d_1)\}$$

$$K'_2 = \{u \in K_1 : \|u - x\| \leq \|x - y\|/4 \text{ y } \|u - y\| \leq \|x - y\|/4\}.$$

$$K_2 = \{u \in K_1 : K'_2 \subset \overline{B}(u, d_2)\}$$

$$K'_n = \{u \in K_{n-1} : \|u - x\| \leq \|x - y\|/2^n \text{ y } \|u - y\| \leq \|x - y\|/2^n\}.$$

$$K_n = \{u \in K_{n-1} : K'_n \subset \overline{B}(u, d_n)\},$$

donde $d_n = \|x - y\|/2^n$.

Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$. Demostremos que $\bigcap K_n = \{(x+y)/2\}$. Sea $u \in K'_1$,

$$\left\| \frac{x+y}{2} - u \right\| = \left\| \frac{x+y-2u}{2} \right\| \leq \frac{\|x-u\|}{2} + \frac{\|y-u\|}{2} \leq \frac{\|x-y\|}{2}.$$

Por tanto $(x+y)/2 \in K_1$.

Sea $u \in K'_2$,

$$\left\| \frac{x+y}{2} - u \right\| = \left\| \frac{x+y-2u}{2} \right\| \leq \frac{\|x-u\|}{2} + \frac{\|y-u\|}{2} \leq \frac{\|x-y\|}{4}.$$

De donde $(x+y)/2 \in K_2$.

Continuando de esta manera obtenemos que $(x+y)/2 \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$, $\bigcap K_n = \{(x+y)/2\}$.

Utilizando que f es una isometría obtenemos que

$$\begin{aligned} f(K'_1) &= \{f(u) : \|u-x\| \leq \|x-y\|/2 \text{ y } \|u-y\| \leq \|x-y\|/2\} \\ &= \{f(u) : \|f(u)-f(x)\| \leq \|f(x)-f(y)\|/2 \text{ y } \\ &\quad \|f(u)-f(y)\| \leq \|f(x)-f(y)\|/2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(K_1) &= \{f(u) : K'_1 \subset \overline{B}(u, d_1)\} \\ &= \{f(u) : f(K'_1) \subset \overline{B}(f(u), d_1)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(K_n) &= \{f(u) \in f(K_{n-1}) : K'_n \subset \overline{B}(u, d_n)\} \\ &= \{f(u) \in f(K_{n-1}) : f(K'_n) \subset \overline{B}(f(u), d_n)\}. \end{aligned}$$

Definamos:

$$L'_1 = \{u : \|u - f(x)\| \leq \|f(x) - f(y)\|/2 \text{ y } \|u - f(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\|/2\}$$

$$L_1 = \{u : L'_1 \subset \overline{B}(u, d_1)\}.$$

$$L'_2 = \{u \in L_1 : \|u - f(x)\| \leq \|f(x) - f(y)\|/4 \text{ y }$$

$$\|u - f(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\|/4\}$$

$$L_2 = \{u \in L_1 : L'_2 \subset \overline{B}(u, d_2)\}.$$

$$L'_n = \{u \in L_{n-1} : \|u - f(x)\| \leq \|f(x) - f(y)\|/2^n \text{ y }$$

$$\|u - f(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\|/2^n\}.$$

$$L_n = \{u \in L_{n-1} : L'_n \subset \overline{B}(u, d_n)\}.$$

Por lo anterior, note que $f(K_n) \subset L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Procediendo de forma similar como con los K_n , obtenemos que $\bigcap L_n = \{(f(x) + f(y))/2\}$. Como f es una isometría, $(f(x) + f(y))/2 = f((x+y)/2)$. □

Ejemplo 3.10. $C[0, 1]$ no es ultrahomogéneo. En efecto, sean $\{f_1, f_2, f_3\}, \{g_1, g_2, g_3\} \subset C[0, 1]$

donde $f_1(x) = -\frac{1}{2}$, $f_2(x) = \frac{1}{2}$, $f_3(x) = 0$, $g_1(x) = \frac{2}{x+1}$, $g_2(x) = \frac{2}{x+2}$ y $g_3(x) = \frac{2}{x+\frac{4}{3}}$.

Consideremos $\varphi : \{f_1, f_2, f_3\} \longrightarrow \{g_1, g_2, g_3\}$ definida como $\varphi(f_i) = g_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Tenemos que:

$$d_u(\varphi(f_1), \varphi(f_2)) = d_u(g_1, g_2) = \sup \left\{ \left| \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+2} \right| : x \in [0, 1] \right\} = 1 = d_u(f_1, f_2),$$

$$d_u(\varphi(f_3), \varphi(f_1)) = d_u(g_3, g_1) = \sup \left\{ \left| \frac{2}{x + \frac{4}{3}} - \frac{2}{x+1} \right| : x \in [0, 1] \right\} = \frac{1}{2} = d_u(f_3, f_1),$$

$$d_u(\varphi(f_3), \varphi(f_2)) = d_u(g_3, g_2) = \sup \left\{ \left| \frac{2}{x + \frac{4}{3}} - \frac{2}{x+2} \right| : x \in [0, 1] \right\} = \frac{1}{2} = d_u(f_3, f_2).$$

Por tanto φ es una isometría.

Tenemos que

$$\varphi \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) (x) = \varphi(f_3)(x) = g_3(x) = \frac{2}{x + \frac{4}{3}} \quad y$$

$$\left(\frac{\varphi(f_1) + \varphi(f_2)}{2} \right) (x) = \frac{g_1(x) + g_2(x)}{2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$

Por el Teorema 3.9, no existe una extensión isométrica de φ . Por tanto $C[0, 1]$ no es ultrahomogéneo.

3.3. Propiedad de Urysohn

Existe un espacio polaco $\mathbb{U}$ universal y ultrahomogéneo que será construido más adelante (ver Sección 3.5). Este espacio es único salvo isometría y se conoce como el **espacio universal de Urysohn**.

A continuación definiremos la propiedad de Urysohn. Luego probaremos que si un espacio polaco tiene la propiedad de Urysohn entonces es el espacio universal de Urysohn.

Definición 3.11. *Un espacio métrico separable (X, d) tiene la propiedad de Urysohn si para $x_1, \dots, x_n \in X$, $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tales que $|\mu_i - \mu_j| \leq d(x_i, x_j) \leq \mu_i + \mu_j$ para todo $i, j \leq n$, existe $a \in X$ tal que $d(a, x_i) = \mu_i$ para todo $i \leq n$.*

Ejemplo 3.12. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ no tiene la propiedad de Urysohn. En efecto, consideremos $\{1, 3\} \subset \mathbb{R}$, $\mu_1 = 2$ y $\mu_2 = 1/2$. Note que $|\mu_1 - \mu_2| < |1 - 3| \leq \mu_1 + \mu_2$. Supongamos que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_1 = |1 - y|$ y $\mu_2 = |3 - y|$. Tenemos que $2 = \mu_1 = |1 - y|$, de donde $y = 3$ o $y = -1$. Además $1/2 = \mu_2 = |3 - y|$, por tanto $y = 5/2$ o $y = 7/2$. Luego tenemos una contradicción.

El siguiente resultado lo utilizaremos para estudiar la universalidad y ultrahomogeneidad de un espacio con la propiedad de Urysohn.

Lema 3.13. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos completos, D_X denso en X , D_Y denso en Y y $\varphi : D_X \rightarrow D_Y$ una isometría. Entonces existe una única isometría $\widehat{\varphi} : X \rightarrow Y$ que extiende a φ .

Demostración. Sea $x \in X$, existe $\{x_i\}_i \subset D_X$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$. Como $\{x_i\}_i$ es convergente, $\{x_i\}_i$ es d -Cauchy. Luego $\{\varphi(x_i)\}_i$ es d' -Cauchy, porque φ es una isometría. Por tanto $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(x_i)$ existe. Definimos $\widehat{\varphi} : X \rightarrow Y$ como $\widehat{\varphi}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(x_i)$.

Probemos que $\widehat{\varphi}$ está bien definida. Sea $x \in X$, consideremos $\{x_i\}_i, \{x'_i\}_i \subset D_X$ tales que $x_i \rightarrow x$ y $x'_i \rightarrow x$ en X , ya se demostró que $\varphi(x_i) \rightarrow z$ y $\varphi(x'_i) \rightarrow y$ en Y , por tanto

$$d'(z, y) = \lim_{i \rightarrow \infty} d'(\varphi(x_i), \varphi(x'_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_i, x'_i) = 0.$$

Por tanto $\widehat{\varphi}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(x'_i)$. Concluimos que $\widehat{\varphi}$ está bien definida.

Veamos que $\widehat{\varphi}$ preserva distancia. Sean $x, y \in X$, tenemos que existen $\{x_i\}_i, \{z_i\}_i \subset D_X$ tales que $x_i \rightarrow x$ y $z_i \rightarrow y$. Luego

$$d'(\widehat{\varphi}(x), \widehat{\varphi}(y)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d'(\varphi(x_i), \varphi(z_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_i, z_i) = d(x, y).$$

Probaremos ahora que $\widehat{\varphi}$ es sobreyectiva. Sea $y \in Y$, existe $\{y_i\}_i \subset D_Y$ tal que $y_i \rightarrow y$. Como φ es sobre, para $i \in \mathbb{N}$, existe $x_i \in D_X$ tal que $\varphi(x_i) = y_i$. Luego $\varphi(x_i) \rightarrow y$, de donde $\{\varphi(x_i)\}_i$ es d' -Cauchy. Como φ es una isometría, $\{x_i\}_i$ es d -Cauchy. Luego, $x_i \rightarrow x$ en X . De donde, $\widehat{\varphi}(x_i) \rightarrow \widehat{\varphi}(x)$; porque $\widehat{\varphi}$ es continua. Por tanto $\widehat{\varphi}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \widehat{\varphi}(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y$, de donde $\widehat{\varphi}$ es sobreyectiva.

Concluimos que $\widehat{\varphi}$ es una extensión isométrica de φ . $\square$

Lema 3.14. *Sea (X, d) un espacio polaco con la propiedad de Urysohn. Entonces X es universal.*

Demostración. Sean (Y, d') un espacio métrico separable, $D = \{y_1, y_2, \dots\} \subset Y$ denso y $x_1 \in X$.

Construiremos una sucesión $\{x_n\}_n$ en X y una isometría $\varphi : \{y_n\}_n \rightarrow \{x_n\}_n$. Luego utilizando el Lema 3.13 demostraremos que Y está contenido isométricamente en X .

Para todo $n \in \mathbb{N}$, construiremos $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ y una isometría $\varphi_n : \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ que extiende a φ_i para todo $i \leq n$.

Para $n = 1$, tenemos $\{x_1\} \subset X$ y $\varphi_1 : \{y_1\} \rightarrow \{x_1\}$ dada por $\varphi_1(y_1) = x_1$. Sea $n > 1$. Supongamos que hemos construido $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ y una isometría $\varphi_n : \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ que extiende a φ_i para todo $i \leq n$.

Consideremos $\mu_i = d'(y_{n+1}, \varphi_n^{-1}(x_i))$ para todo $i \leq n$. Note que:

$$|\mu_i - \mu_j| \leq d(x_i, x_j) \leq \mu_i + \mu_j \text{ para todo } i, j \leq n.$$

Como X tiene la propiedad de Urysohn, existe $x_{n+1} \in X$ tal que:

$$d(x_{n+1}, x_i) = \mu_i = d'(y_{n+1}, \varphi_n^{-1}(x_i)) \text{ para todo } i \leq n.$$

Definamos $\varphi_{n+1} : \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}\} \longrightarrow \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ como $\varphi_{n+1}(y_{n+1}) = x_{n+1}$ y $\varphi_{n+1}(y_i) = \varphi_n(y_i)$ para todo $i \leq n$. Para $i \leq n$ tenemos que

$$d(\varphi_{n+1}(y_{n+1}), \varphi_{n+1}(y_i)) = d(x_{n+1}, \varphi_n(y_i)) = d'(y_{n+1}, y_i).$$

Por tanto φ_{n+1} es una isometría. Note que φ_{n+1} extiende a φ_n .

Sea $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Así $\varphi_\infty = \bigcup_n \varphi_n$ es una isometría de D en A . Por el Lema 3.13, existe una isometría $\widehat{\varphi}_\infty : Y \longrightarrow \overline{A}$. Concluimos que Y está contenido isométricamente en X . $\square$

Para obtener el siguiente resultado utilizaremos el método de “back and forth”.

Lema 3.15. *Sea (X, d) un espacio polaco con la propiedad de Urysohn. Entonces X es ultrahomogéneo.*

Demostración. Sean $F, F' \subset X$ finitos y una isometría φ de F en F' . Consideremos $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ denso en X . Para todo $n \in \mathbb{N}$, construiremos $A_n, B_n \subset X$ finitos y una isometría $\varphi_n : A_n \longrightarrow B_n$ tales que $F \cup \{d_1, \dots, d_n\} \subset A_n$, $F' \cup \{d_1, \dots, d_n\} \subset B_n$ y φ_n extiende a φ_i para todo $i \leq n$.

Sea $n = 1$. Si $d_1 \in F$, tomamos $\psi = \varphi$. Supongamos que $d_1 \notin F$. Consideremos $\mu_y = d(d_1, \varphi^{-1}(y))$ para todo $y \in F'$. Note que $|\mu_y - \mu_b| \leq d(b, z) \leq \mu_y + \mu_b$ para todo $y, b \in F'$. Por la propiedad de Urysohn, existe $c \in X$ tal que $d(c, y) = \mu_y = d(d_1, \varphi^{-1}(y))$ para todo $y \in F'$.

Definamos $\psi : F \cup \{d_1\} \longrightarrow F' \cup \{c\}$ como $\psi(d_1) = c$ y $\psi(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in F$. Para $x \in F$, $d(\psi(d_1), \psi(x)) = d(c, \varphi(x)) = d(d_1, x)$. Por tanto ψ es una isometría.

Si $d_1 \in F' \cup \{c\}$, tomamos $\varphi_1 = \psi$. Supongamos que $d_1 \notin F' \cup \{c\}$. Consideremos $\mu'_x = d(d_1, \psi(x))$ para todo $x \in F \cup \{d_1\}$. Note que $|\mu'_x - \mu'_a| \leq d(x, a) \leq \mu'_x + \mu'_a$ para todo $x, a \in$

$F \cup \{d_1\}$. Por la propiedad de Urysohn, existe $z \in X$ tal que $d(z, x) = \mu'_x = d(d_1, \psi(x))$ para todo $x \in F \cup \{d_1\}$.

Definamos $\varphi_1 : F \cup \{d_1, z\} \longrightarrow F' \cup \{c, d_1\}$ como $\varphi_1(z) = d_1$ y $\varphi_1(x) = \psi(x)$ para todo $x \in F \cup \{d_1\}$. Para $x \in F \cup \{d_1\}$, $d(\varphi_1(z), \varphi_1(x)) = d(d_1, \psi(x)) = d(z, x)$. Por tanto φ_1 es una isometría. Tomamos $A_1 = F \cup \{d_1, z\}$ y $B_1 = F' \cup \{c, d_1\}$. Note que φ_1 extiende a φ .

Sea $n > 1$. Supongamos que hemos construido $A_n \subset X$, $B_n \subset Y$ finitos y una isometría $\varphi_n : A_n \longrightarrow B_n$ tales que $F \cup \{d_1, \dots, d_n\} \subset A_n$, $F' \cup \{d_1, \dots, d_n\} \subset B_n$ y φ_n extiende a φ_i para todo $i \leq n$. De la misma manera como se hizo en el primer paso (utilizando la propiedad de Urysohn) construimos $A_{n+1} \subset X, B_{n+1} \subset Y$ finitos y una isometría $\varphi_{n+1} : A_{n+1} \longrightarrow B_{n+1}$ tales que $F \cup \{d_1, \dots, d_n, d_{n+1}\} \subset A_{n+1}$, $F' \cup \{d_1, \dots, d_n, d_{n+1}\} \subset B_{n+1}$ y φ_{n+1} extiende a φ_n .

Concluimos que $A = \bigcup_n A_n$ es denso en X , $B = \bigcup_n B_n$ es denso en X y $\varphi_\infty = \bigcup_n \varphi_n$ es una isometría de A en B , que extiende a φ . Por el Lema 3.13, existe una isometría $\widehat{\varphi}_\infty : X \longrightarrow X$ que extiende a φ_∞ . Note que $\widehat{\varphi}_\infty$ extiende a φ . $\square$

Utilizando los resultados anteriores podemos demostrar una conexión entre la propiedad de Uryshon y el espacio $\mathbb{U}$.

Teorema 3.16. *Un espacio polaco con la propiedad de Urysohn es el espacio universal de Urysohn.*

Demostración. Sea X un espacio polaco con la propiedad de Urysohn. Por los Lemas 3.14 y 3.15, X es ultrahomogéneo y universal. $\square$

3.3.1. Propiedad de Uryshon racional. A continuación introduciremos el concepto de propiedad de Urysohn racional para obtener una caracterización mas general del espacio universal de Urysohn. Esta caracterización la utilizaremos mas adelante para demostrar que la completación de un espacio numerable con distancia racional $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$, es el espacio universal de Urysohn (ver Subsección 3.5.3).

Definición 3.17. *Un espacio métrico separable (X, d) tiene la propiedad de Urysohn racional si para $x_1, \dots, x_n \in X$, $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset \mathbb{Q}^+$ tales que $|\mu_i - \mu_j| \leq d(x_i, x_j) \leq \mu_i + \mu_j$ para todo $i, j \leq n$, existe $a \in X$ tal que $d(a, x_i) = \mu_i$ para todo $i \leq n$.*

Note que si un espacio métrico separable tiene la propiedad de Urysohn, entonces también tiene la propiedad de Urysohn racional.

Lema 3.18. *Sea (Y, d) un espacio polaco y $X \subseteq Y$ denso. Supongamos que (X, d) tiene la propiedad de Urysohn racional. Sean $F = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq Y$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ tales que:*

$$|\alpha_i - \alpha_j| \leq d(y_i, y_j) \leq \alpha_i + \alpha_j \text{ para todo } i, j \leq n.$$

Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $y_\varepsilon \in X$ tal que $|d(y_i, y_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon$ para todo $i \leq n$.

Demostración. Sea $\delta = \min\{d(y_i, y_j) : i \neq j \leq n\}$. Consideremos $\varepsilon_0, \delta_0 \in \mathbb{Q}^+$ tales que $\varepsilon_0 < \varepsilon$ y $\delta_0 < \delta$. Tomemos $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{4n+3}, \frac{\delta_0}{4n+3}\right\}$.

Como X es denso en Y , para cada $i \leq n$, existe $x_i \in X$ tal que $d(x_i, y_i) < \varepsilon_1$. Escojamos $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n \in \mathbb{Q}^+$ tales que $|\alpha'_i - \alpha_i| < \varepsilon_1$ para todo $i \leq n$.

Definimos $\mu_i = \alpha'_i + (4i + 1)\varepsilon_1$ para todo $i \leq n$. Asumamos que $\alpha'_1 \geq \alpha'_2 \geq \dots \geq \alpha'_n > 0$.

Para $i < j \leq n$ tenemos que $\alpha'_i \geq \alpha'_j$, de donde $\alpha'_j - \alpha'_i \leq 0$. Así,

$$\begin{aligned} \mu_j - \mu_i &= \alpha'_j + (4j + 1)\varepsilon_1 - \alpha'_i - (4i + 1)\varepsilon_1 = \alpha'_j - \alpha'_i + 4(j - i)\varepsilon_1 < 4n\varepsilon_1 \\ &< (4n + 3 - 2)\varepsilon_1 = (4n + 3)\varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 < \delta_0 - (d(x_i, y_i) + d(x_j, y_j)) \\ &< d(y_i, y_j) - d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j) \leq d(x_i, x_j). \end{aligned}$$

Además tenemos:

$$\begin{aligned} \mu_i - \mu_j &= \alpha'_i + (4i + 1)\varepsilon_1 - \alpha'_j - (4j + 1)\varepsilon_1 = \alpha'_i - \alpha'_j - 4(j - i)\varepsilon_1 \\ &\leq \alpha'_i - \alpha'_j - 4\varepsilon_1 = \alpha'_i - \varepsilon_1 - \alpha'_j - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_1 < \alpha_i - \alpha_j - 2\varepsilon_1 \\ &< d(y_i, y_j) - d(x_i, y_i) - d(x_j, y_j) \leq d(x_i, x_j). \end{aligned}$$

Para la otra parte de la desigualdad tenemos:

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq d(x_i, y_i) + d(y_i, y_j) + d(y_j, x_j) \\ &\leq d(x_i, y_i) + \alpha_i + \alpha_j + d(y_j, x_j) \\ &< 2\varepsilon_1 + \alpha_i + \alpha_j < 2\varepsilon_1 + \alpha'_i + \varepsilon_1 + \alpha'_j + \varepsilon_1 < \mu_i + \mu_j. \end{aligned}$$

Por tanto $|\mu_i - \mu_j| < d(x_i, x_j) < \mu_i + \mu_j$ para todo $i, j \leq n$. Como X tiene la propiedad de

Urysohn racional, existe $y_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_i, y_\varepsilon) = \mu_i$ para todo $i \leq n$. Luego,

$$\begin{aligned}
 |d(y_i, y_\varepsilon) - \alpha_i| &\leq |d(y_i, y_\varepsilon) - d(x_i, y_\varepsilon)| + |d(x_i, y_\varepsilon) - \alpha_i| \\
 &= |d(y_i, y_\varepsilon) - d(x_i, y_\varepsilon)| + |\mu_i - \alpha_i| \\
 &\leq d(y_i, x_i) + |\mu_i - \alpha'_i| + |\alpha'_i - \alpha_i|. \\
 &< \varepsilon_1 + (4i + 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_1 = (4i + 3)\varepsilon_1 \\
 &< \frac{(4i + 3)\varepsilon_0}{4i + 3} = \varepsilon_0 < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Por tanto $|d(y_i, y_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon$ para todo $i \leq n$. □

Lema 3.19. (Urysohn) Sea (X, d) un espacio métrico separable con la propiedad de Urysohn racional, entonces la completación de X tiene la propiedad de Urysohn.

Demostración. Sea $(\widehat{X}, d')$ la completación de (X, d) . Sean $F = \{z_1, \dots, z_n\} \subseteq \widehat{X}$ y $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $|\mu_i - \mu_j| \leq d'(z_i, z_j) \leq \mu_i + \mu_j$ para todo $i, j \leq n$.

Asumamos que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > 0$. Por el Lema 3.18, existe $x_1 \in X$ tal que $|d'(z_i, x_1) - \mu_i| < \mu_n/2$ para todo $i \leq n$.

Veamos que $|\mu_i - \mu_n/2| < d'(z_i, x_1) < \mu_i + \mu_n/2$ para todo $i \leq n$. Para $i \leq n$ tenemos que $\mu_i > \mu_n$, de donde $\mu_i - \mu_n > 0$. Como $\mu_i - d'(z_i, x_1) < \mu_n/2$, $0 < \mu_i - \mu_n/2 < d'(z_i, x_1)$. Por tanto $|\mu_i - \mu_n/2| < d'(z_i, x_1)$.

Como $d'(z_i, x_1) - \mu_i < \mu_n/2$, $d'(z_i, x_1) < \mu_i + \mu_n/2$. Concluimos que:

$$|\mu_i - \mu_n/2| < d'(z_i, x_1) < \mu_i + \mu_n/2 \text{ para todo } i \leq n.$$

Por el Lema 3.18, existe $x_2 \in X$ tal que $|d(x_2, x_1) - \mu_n/2| < \mu_n/4$ y $|d'(z_i, x_2) - \mu_i| < \mu_n/4$ para todo $i \leq n$. De donde $d(x_2, x_1) < \mu_n/4 + \mu_n/2$.

Continuando de esta manera obtenemos que

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \mu_n/2^{k+1} + \mu_n/2^k \text{ y } |d'(x_k, z_i) - \mu_i| < \mu_n/2^k \text{ para todo } i \leq n \text{ y } k \geq 1.$$

Utilizando que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n/2^{k+1} + \mu_n/2^k$ es convergente, probamos que $\{x_k\}_k$ es una sucesión de Cauchy en X . De donde $\{x_k\}_k$ converge a un punto $x \in \widehat{X}$. Para $i \leq n$,

$$|d'(x, z_i) - \mu_i| = \lim_{k \rightarrow \infty} |d'(x_k, z_i) - \mu_i| = 0.$$

Por tanto $d'(x, z_i) = \mu_i$ para todo $i \leq n$.

□

Luego obtenemos el siguiente resultado para caracterizar el espacio universal de Urysohn.

Teorema 3.20. *Sea (X, d) un espacio métrico separable con la propiedad de Urysohn racional. Entonces la completación de X es el espacio universal de Urysohn.*

Demostración. Sea $(\widehat{X}, d')$ la completación de X . Por el Lema 3.19, $\widehat{X}$ tiene la propiedad de Urysohn. Por el Teorema 3.16, $\widehat{X}$ es el espacio universal de Urysohn. □

Como todo espacio métrico separable con la propiedad de Urysohn tiene la propiedad de Urysohn racional, la completación de un espacio métrico separable con la propiedad de Urysohn, es el espacio universal de Urysohn.

3.4. Unicidad del espacio universal de Urysohn

En esta sección mostraremos que el espacio universal de Urysohn es único salvo isometría. Para eso probaremos algunos resultados auxiliares.

Observemos que dos espacios polacos universales no son necesariamente isométricos. Por ejemplo, consideremos los espacios $\mathbb{U}$ y $C[0, 1]$. Note que $\mathbb{U}$ es ultrahomogéneo y $C[0, 1]$ no lo es. Sin embargo, probaremos a continuación que si dos espacios polacos tienen la propiedad de Urysohn entonces son isométricos. Utilizaremos nuevamente el método de “back and forth”.

Lema 3.21. *(Urysohn) Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios polacos con la propiedad de Urysohn, entonces existe una isometría de X sobre Y .*

Demostración. Sea $D_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ denso en X y $D_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ denso en Y . Para todo $n \in \mathbb{N}$, construiremos $A_n \subset X$, $B_n \subset Y$ finitos y una isometría $\varphi_n : A_n \longrightarrow B_n$ tales que $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A_n$, $\{y_1, \dots, y_n\} \subset B_n$ y φ_n extiende a φ_i para todo $i \leq n$.

Para $n = 1$, tenemos $A_1 = \{x_1\}$, $B_1 = \{y_1\}$ y $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ dada por $\varphi(x_1) = y_1$. Sea $n > 1$, supongamos que hemos construido $A_n \subset X$, $B_n \subset Y$ finitos y una isometría $\varphi_n : A_n \longrightarrow B_n$ tales que $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A_n$, $\{y_1, \dots, y_n\} \subset B_n$ y φ_n extiende a φ_i para todo $i \leq n$.

Si $x_{n+1} \in A_n$, ponemos $\psi = \varphi_n$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_{n+1} \notin A_n$. Consideremos $\mu_y = d_X(x_{n+1}, \varphi_n^{-1}(y))$ para todo $y \in B_n$. Note que $|\mu_y - \mu_z| \leq d_Y(y, z) \leq \mu_y + \mu_z$ para todo $y, z \in B_n$. Como Y tiene la propiedad de Urysohn, existe $c \in Y$ tal que $d_Y(c, y) = \mu_y = d_X(x_{n+1}, \varphi_n^{-1}(y))$ para todo $y \in B_n$.

Definamos $\psi : A_n \cup \{x_{n+1}\} \longrightarrow B_n \cup \{c\}$ como $\psi(x_{n+1}) = c$ y $\psi(x) = \varphi_n(x)$ para todo

$x \in A_n$. Para $x \in A_n$ tenemos que

$$d_Y(\psi(x_{n+1}), \psi(x)) = d_Y(c, \varphi_n(x)) = d_X(x_{n+1}, x).$$

Por tanto ψ es una isometría.

Si $y_{n+1} \in B_n \cup \{c\}$, ponemos $\varphi_{n+1} = \psi$. Asumamos que $y_{n+1} \notin B_n \cup \{c\}$. Consideramos $\mu'_x = d_Y(y_{n+1}, \psi(x))$ para todo $x \in A_n \cup \{x_{n+1}\}$. Note que $|\mu'_x - \mu'_a| \leq d_X(x, a) \leq \mu'_x + \mu'_a$ para todo $x, a \in A_n \cup \{x_{n+1}\}$. Como X tiene la propiedad de Urysohn racional, existe $d \in X$ tal que $d_X(d, x) = \mu'_x = d_Y(y_{n+1}, \psi(x))$ para todo $x \in A_n \cup \{x_{n+1}\}$.

Definamos $\varphi_{n+1} : A_n \cup \{x_{n+1}, d\} \longrightarrow B_n \cup \{c, y_{n+1}\}$ como $\varphi_{n+1}(d) = y_{n+1}$ y $\varphi_{n+1}(x) = \psi(x)$ para todo $x \in A_n \cup \{x_{n+1}\}$. Luego, para $x \in A_n \cup \{x_{n+1}\}$,

$$d_Y(\varphi_{n+1}(d), \varphi_{n+1}(x)) = d_Y(y_{n+1}, \psi(x)) = d_X(d, x).$$

Por tanto φ_{n+1} es una isometría. Además tomamos $A_{n+1} = A_n \cup \{x_{n+1}, d\}$ y $B_{n+1} = B_n \cup \{c, y_{n+1}\}$. Note que φ_{n+1} extiende a φ_n .

Concluimos que $A = \bigcup_n A_n$ es denso en X , $B = \bigcup_n B_n$ es denso en Y y $\varphi_\infty = \bigcup_n \varphi_n$ es una isometría de A en B . Por el Lema 3.13, existe una isometría $\widehat{\varphi}_\infty : X \longrightarrow Y$.

□

Introduciremos el concepto de universalidad para espacios métricos finitos para obtener una caracterización de los espacios con la propiedad de Urysohn.

Definición 3.22. *Un espacio métrico separable (X, d) es universal para los espacios métricos finitos si contiene a todos los espacios métricos finitos isométricamente.*

En la Sección 3.3 se demostró que todo espacio polaco con la propiedad de Urysohn es universal y ultrahomogéneo. Utilizando el siguiente resultado probaremos el recíproco de esta afirmación.

Lema 3.23. *Sea (X, d) un espacio métrico separable, ultrahomogéneo y universal para los espacios métricos finitos. Entonces X tiene la propiedad de Urysohn.*

Demostración. Sean $x_1, \dots, x_n \in X$, $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tales que $|\mu_i - \mu_j| \leq d(x_i, x_j) \leq \mu_i + \mu_j$ para todo $i, j \leq n$. Probaremos que existe $x \in X$ tal que $d(x, x_i) = \mu_i$ para todo $i \leq n$.

Para cada $i \leq n$, definimos $a_{x_i} = (d(x_i, x_1), \dots, d(x_i, x_n)) \in \mathbb{R}^n$. Utilizando la desigualdad triangular obtenemos que $\|a_{x_i} - a_{x_j}\|_\infty = d(x_i, x_j)$ para todo $i, j \leq n$. Consideremos $a = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Note que $|\mu_j - d(x_i, x_j)| \leq \mu_i$ para todo $i, j \leq n$, de donde $\|a - a_{x_i}\|_\infty = \mu_i$ para todo $i \leq n$. Como X es universal para los espacios métricos finitos, $\{a_{x_1}, \dots, a_{x_n}, a\}$ está contenido isométricamente en X . De donde existe una inmersión isométrica $\varphi : \{a_{x_1}, \dots, a_{x_n}, a\} \longrightarrow X$. Tenemos que $\varphi(a) = z \in X$ y $\varphi(a_{x_i}) = y_i \in X$ para todo $i \leq n$. Luego obtenemos que $d(z, y_i) = d(\varphi(a), \varphi(a_{x_i})) = \|a - a_{x_i}\|_\infty = \mu_i$ para todo $i \leq n$.

Consideremos $\psi : \{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$ definida por $\psi(x_i) = \varphi(a_{x_i}) = y_i$. Note que ψ es una isometría. Como X es ultrahomogéneo, existe una isometría $\hat{\psi} : X \longrightarrow X$ tal que $\hat{\psi}$ extiende a ψ . Sea $x = \hat{\psi}^{-1}(z)$, tenemos que:

$$d(x, x_i) = d(\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x_i)) = d(z, \psi(x_i)) = d(z, y_i) = \mu_i \text{ para todo } i \leq n. \quad \square$$

Procediendo de la misma manera como en el Lema 3.23, obtenemos el siguiente resultado que utilizaremos mas adelante en la Subsección 3.5.3.

Lema 3.24. *Sea (X, d) un espacio métrico separable con distancia en $\mathbb{Q}$, ultrahomogéneo y universal para los espacios métricos finitos con distancia en $\mathbb{Q}$. Entonces X tiene la propiedad de Urysohn racional.*

Como todo espacio polaco universal particularmente es universal para los espacios métricos finitos, por el Lema 3.23, todo espacio polaco ultrahomogéneo y universal tiene la propiedad de Urysohn. Con ayuda de esto obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.25. *Sean X e Y espacios polacos universales y ultrahomogéneos. Entonces X e Y son isométricos.*

Demostración. Como X e Y son espacios polacos universales y ultrahomogéneos, tienen la propiedad de Urysohn. Por el Lema 3.21, X e Y son isométricos. $\square$

3.5. Construcción del espacio de Urysohn

Existen diferentes enfoques para construir el espacio universal de Urysohn. En el artículo (Hušek, 2008) se describen tres formas de construir este espacio, las realizadas respectivamente por Urysohn, Hausdorff y Katětov. A continuación realizaremos estas construcciones.

3.5.1. Hausdorff. El 3 de agosto de 1924, Urysohn envió una carta a Hausdorff donde anunció la construcción del espacio $\mathbb{U}$. Luego Hausdorff decidió realizar su propia construcción de este espacio y demostró la universalidad ese mismo año, pero no publicó esta construcción. Estudiaremos detalladamente esa construcción siguiendo la presentación hecha en (Hušek, 2008).

Sea $\mathbb{M}$ el conjunto de las matrices cuadradas simétricas. Definamos:

$$\mathbb{U}_0 = \{(a_{i,j})_{i,j \leq n} \in \mathbb{M} : a_{i,i} = 0, a_{i,j} \geq 0 \wedge a_{i,j} + a_{j,k} \geq a_{i,k} \text{ para todo } i, j, k \leq n\}.$$

A cada matriz $(a_{i,j})_{i,j \leq n} \in \mathbb{U}_0$ se le asocia un espacio pseudométrico de la siguiente manera. Sea X el espacio pseudométrico finito $\{p_1, \dots, p_n\}$ donde la pseudométrica viene dada por $d(p_i, p_j) = a_{i,j}$ para todo $i, j \leq n$.

Ejemplo 3.26. Consideremos $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y el subespacio $X = \{p_1, p_2, p_3\}$ donde $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ y $p_3 = 4$. Luego $a_{i,j} = |p_i - p_j|$ para $i, j \leq 3$. Obtenemos así un elemento de $\mathbb{U}_0$

$$(a_{i,j})_{i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escribiremos $(a_{i,j})_{i,j \leq n}$ como α_n . Para $m \leq n$, denotamos por α_m a la matriz $(a_{i,j})_{i,j \leq m}$ que tiene asociado al espacio pseudométrico $\{p_1, \dots, p_m\}$; es decir, α_m es una submatriz de α_n . Ahora definiremos una pseudométrica en $\mathbb{U}_0$. Comenzaremos definiendo la distancia entre una matriz y sus submatrices. Sea

$$D(\alpha_m, \alpha_n) = a_{m,n}.$$

Veamos que se satisface la desigualdad triangular para todas las submatrices de una matriz de $\mathbb{U}_0$. Sea $\alpha_n \in \mathbb{U}_0$. Sean $i, j, k \leq n$, tenemos que $D(\alpha_i, \alpha_j) + D(\alpha_j, \alpha_k) = a_{i,j} + a_{j,k} \geq a_{i,k} =$

$D(\alpha_i, \alpha_k)$. Por tanto las submatrices de α_n satisfacen la desigualdad triangular.

Definiremos $D(\alpha_n, \beta_m)$ por recursión. Sean $\alpha_n, \beta_m \in \mathbb{U}_0$ y supongamos que todas las distancias $D(\alpha_n, \beta_l), D(\alpha_k, \beta_m)$ están definidas para $k < n, l < m$. Luego definimos:

$$D(\alpha_n, \beta_m) = \max\{|D(\alpha_n, \alpha_k) - D(\beta_m, \alpha_k)|, |D(\alpha_n, \beta_l) - D(\beta_m, \beta_l)| : k < n, l < m\}.$$

Veamos un ejemplo de cómo se calculan distancias.

Ejemplo 3.27. Consideremos $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y los subespacios $A = \{p_1, p_2, p_3\}$, $B = \{h_1, h_2\}$ donde $p_1 = 1, p_2 = 1/2, p_3 = 1/3, h_1 = 1/4$ y $h_2 = 1/6$. Luego, $a_{i,j} = |p_i - p_j|$ para $i, j \leq 3$ y $b_{i,j} = |h_i - h_j|$ para $i, j \leq 2$.

Luego para A y B tenemos las siguientes matrices respectivamente,

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/6 \\ 2/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/12 \\ 1/12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\alpha_1 = (0)$ y $\beta_1 = (0)$, luego $D(\alpha_1, \beta_1) = 0$. Así obtenemos las siguientes distancias:

$$D(\alpha_2, \beta_1) = |D(\alpha_2, \alpha_1) - D(\beta_1, \alpha_1)| = a_{1,2} = 1/2,$$

$$D(\alpha_1, \beta_2) = |D(\alpha_1, \beta_1) - D(\beta_2, \beta_1)| = b_{1,2} = 1/12.$$

Utilizando estas distancias obtenemos:

$$\begin{aligned}
 D(\alpha_2, \beta_2) &= \max\{|D(\alpha_2, \alpha_1) - D(\beta_2, \alpha_1)|, |D(\alpha_2, \beta_1) - D(\beta_2, \beta_1)|\} \\
 &= |a_{1,2} - b_{1,2}| = 5/12, \\
 D(\alpha_3, \beta_1) &= \max\{|D(\alpha_3, \alpha_1) - D(\beta_1, \alpha_1)|, |D(\alpha_3, \alpha_2) - D(\beta_1, \alpha_2)|\} \\
 &= a_{1,3} = 2/3.
 \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos la distancia $D(\alpha_3, \beta_2)$,

$$D(\alpha_3, \beta_2) = \max\{|a_{1,3} - b_{1,2}|, |a_{2,3} - |a_{1,2} - b_{1,2}||\} = 7/12.$$

Lema 3.28. $(\mathbb{U}_0, D)$ es un espacio pseudométrico.

Demostración. Demostremos que se satisface la desigualdad triangular. Sean $\alpha_n, \beta_m, \gamma_p \in \mathbb{U}_0$, probemos por inducción sobre $n + m + p$ la desigualdad $D(\alpha_n, \beta_m) + D(\beta_m, \gamma_p) \geq D(\alpha_n, \gamma_p)$. Si $m = n = p = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = (0)$. Luego, $D(\alpha_1, \gamma_1) = 0 = D(\alpha_1, \beta_1) + d(\beta_1, \gamma_1)$.

Supongamos que se cumple la desigualdad triangular para todo $k, h, r \in \mathbb{N}$ tales que $k + h + r < n + m + p$. Sin perder la generalidad asumamos que $D(\alpha_n, \gamma_p) = |D(\alpha_n, \alpha_k) - D(\gamma_p, \alpha_k)|$ para algún $k < n$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 D(\alpha_n, \gamma_p) &= |D(\alpha_n, \alpha_k) - D(\gamma_p, \alpha_k)| \\
 &\leq |D(\alpha_n, \alpha_k) - D(\beta_m, \alpha_k)| + |D(\beta_m, \alpha_k) - D(\gamma_p, \alpha_k)| \\
 &\leq D(\alpha_n, \beta_m) + D(\beta_m, \gamma_p).
 \end{aligned}$$

Por tanto D es una pseudométrica. □

Decimos que $\alpha_n \sim \beta_m$ si $D(\alpha_n, \beta_m) = 0$. Definimos $[\alpha_n] = \{\beta_m \in \mathbb{U}_0 : \alpha_n \sim \beta_m\}$. Sea $\mathbb{U}_1$ el espacio cociente respecto a esa relación de equivalencia. Como es usual, $\mathbb{U}_1$ tiene una métrica dada de la siguiente forma $D([\alpha_n], [\gamma_m]) = D(\alpha_n, \gamma_m)$.

Ejemplo 3.29. Consideremos la matriz del Ejemplo 3.26,

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{y la matriz } \beta_2 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Luego,}$$

$$D(\alpha_3, \beta_2) = \max\{|a_{1,3} - b_{1,2}|, |a_{2,3} - |a_{1,2} - b_{1,2}||\} = 0.$$

Por tanto $\alpha_3 \sim \beta_2$.

Teorema 3.30. El espacio métrico $\mathbb{U}_1$ es universal para los espacios métricos numerables.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico con $X = \{p_1, p_2, \dots\}$. Consideremos las matrices $\alpha_n = (a_{i,j})_{i,j \leq n}$ tales que $a_{i,j} = d(p_i, p_j)$ para todo $i, j \leq n$, y la función $f : X \longrightarrow \mathbb{U}_0$ definida

como $f(p_n) = \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $i, j \in \mathbb{N}$

$$D(f(p_i), f(p_j)) = D(\alpha_i, \alpha_j) = a_{i,j} = d(p_i, p_j).$$

Consideremos $F : X \longrightarrow \mathbb{U}_1$ definida como $F(p_n) = [\alpha_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que F es una inmersión isométrica. □

Para demostrar que el espacio $\mathbb{U}_1$ es separable probaremos los siguientes lemas.

Lema 3.31. Sean $\alpha_n = (a_{i,j})_{i,j \leq n}$, $\beta_n = (b_{i,j})_{i,j \leq n} \in \mathbb{U}_0$ tales que $|a_{i,j} - b_{i,j}| < \varepsilon$ para todo $i, j \leq n$. Entonces $D(\alpha_n, \beta_n) < n\varepsilon$.

Demostración. Para $n = 1$ se cumple el lema porque $\alpha_1 = \beta_1 = (0)$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 < m < n$. Supongamos que se cumple el lema para todo $l \leq m$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $D(\alpha_{m+1}, \beta_{m+1}) = |D(\alpha_{m+1}, \alpha_q) - D(\beta_{m+1}, \alpha_q)|$ para algún $q < m + 1$. Luego,

$$\begin{aligned} D(\alpha_{m+1}, \beta_{m+1}) &= |D(\alpha_{m+1}, \alpha_q) - D(\beta_{m+1}, \alpha_q)| \\ &\leq |D(\alpha_{m+1}, \alpha_q) - D(\beta_{m+1}, \beta_q)| + |D(\beta_{m+1}, \beta_q) - D(\beta_{m+1}, \alpha_q)| \\ &\leq |a_{m+1,q} - b_{m+1,q}| + D(\beta_q, \alpha_q) \\ &< \varepsilon + q\varepsilon \leq \varepsilon + m\varepsilon = (1 + m)\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 3.32. Sean $\alpha_n = (a_{i,j})_{i,j \leq n} \in \mathbb{U}_0$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\beta_n = (b_{i,j})_{i,j \leq n} \in \mathbb{U}_0$ tal que $b_{i,j} \in \mathbb{Q}^+$ y $|a_{i,j} - b_{i,j}| < \varepsilon$ para todo $i, j \leq n$.

Demostración. Consideremos $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y la función $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $F(\alpha_i) = (D(\alpha_i, \alpha_1), \dots, D(\alpha_i, \alpha_n))$ para todo $i \leq n$. Utilizando la desigualdad triangular obtenemos que $\|F(\alpha_i) - F(\alpha_j)\|_\infty = D(\alpha_i, \alpha_j)$.

Como $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$, para cada $i \leq n$ escogemos $r_i \in \mathbb{Q}^n$ tal que $\|F(\alpha_i) - r_i\|_\infty < \varepsilon/2$. Así escogemos $\beta_n = (b_{i,j})_{i,j \leq n}$ donde $b_{i,j} = \|r_i - r_j\|_\infty$. Note que $\beta_n \in \mathbb{U}_0$ y además,

$$\begin{aligned} |a_{i,j} - b_{i,j}| &= |D(\alpha_i, \alpha_j) - \|r_i - r_j\|_\infty| = \left| \|F(\alpha_i) - F(\alpha_j)\|_\infty - \|r_i - r_j\|_\infty \right| \\ &\leq \|F(\alpha_i) - r_i + r_j - F(\alpha_j)\|_\infty \leq \|F(\alpha_i) - r_i\|_\infty + \|r_j - F(\alpha_j)\|_\infty \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.33. $\mathbb{U}_1$ es separable.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $[\alpha_n] \in \mathbb{U}_1$. Sea $\alpha_n = (a_{i,j})_{i,j \leq n} \in \mathbb{U}_0$ un representante de la clase $[\alpha_n]$. Por el Lema 3.32, existe $\beta_n = (b_{i,j})_{i,j \leq n} \in \mathbb{U}_0$ donde $b_{i,j} \in \mathbb{Q}^+$ y $|a_{i,j} - b_{i,j}| < \varepsilon/n$. Así $[\beta_n] \in \mathbb{U}_1$. Por el Lema 3.31, $D([\alpha_n], [\beta_n]) = D(\alpha_n, \beta_n) < n(\varepsilon/n) = \varepsilon$.

Concluimos que el conjunto de las clases de matrices con entradas racionales de $\mathbb{U}_1$ es denso en $\mathbb{U}_1$. □

De ahora en adelante representaremos la clase $[\alpha_n]$ como α_n . A continuación probaremos una serie de resultados para demostrar que $\mathbb{U}_1$ tiene la propiedad de Urysohn.

Lema 3.34. Sean $\alpha_n, \beta_m \in \mathbb{U}_1$ y $F : \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \longrightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_m\}$ definida como $F(\alpha_n) = \beta_m$ y $F(\alpha_i) = \alpha_i$ para cada $i < n$. Supongamos que F es una isometría y que para cada $j < m$, existe

$i < n$ tal que $D(\alpha_i, \beta_j) = 0$. Entonces $D(\alpha_n, \beta_m) = 0$.

Demostración. Tenemos que

$$D(\alpha_n, \beta_m) = \max\{|D(\alpha_n, \alpha_k) - D(\beta_m, \alpha_k)|, |D(\alpha_n, \beta_l) - D(\beta_m, \beta_l)| : k < n, l < m\}.$$

Como F es una isometría, $|D(\alpha_n, \alpha_k) - D(\beta_m, \alpha_k)| = |D(\alpha_n, \alpha_k) - D(\alpha_n, \alpha_k)| = 0$ para todo $k < n$.

Por otra parte, para $l < m$, existe $i < n$ tal que $D(\alpha_i, \beta_l) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} |D(\alpha_n, \beta_l) - D(\beta_m, \beta_l)| &\leq |D(\alpha_n, \beta_l) - D(\alpha_i, \alpha_n)| + |D(\alpha_i, \alpha_n) - D(\beta_m, \beta_l)| \\ &\leq D(\alpha_i, \beta_l) + |D(\alpha_i, \beta_m) - D(\beta_m, \beta_l)| \\ &\leq D(\alpha_i, \beta_l) + D(\alpha_i, \beta_l) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto $D(\alpha_n, \beta_m) = 0$. □

Para referirnos a una sucesión de $\mathbb{U}_1$ escribiremos $\{\alpha_n\}_n$. En caso de que necesitemos distinguir la dimensión i_n de cada matriz escribiremos las sucesiones de la siguiente manera $\{\alpha_{i_n}^n\}_n$ donde $\alpha_{i_n}^n = (a_{i,j}^n)_{i,j \leq i_n}$.

Lema 3.35. Sean $\alpha_{i_1}^1, \alpha_{i_2}^2, \alpha_{i_3}^3, \dots \in \mathbb{U}_1$ y $\{\xi_n\}_n \subset \mathbb{U}_1$ tales que ξ_n es submatriz de ξ_{n+1} . Supongamos que la siguiente función es una isometría:

$$F : \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{i_1}^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{i_2}^2, \alpha_1^3, \dots, \alpha_{i_3}^3, \dots\} \longrightarrow \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$$

dada por $F(\alpha_j^1) = \xi_j$, $F(\alpha_k^{n+1}) = \xi_{i_1 + \dots + i_n + k}$ donde $j \leq i_1$, $k \leq i_{n+1}$. Entonces la distancia del

j -ésimo miembro del dominio de F a ξ_j es cero.

Demostración. Como $\alpha_1^1 = \xi_1 = (0)$, $D(\alpha_1^1, \xi_1) = 0$. Supongamos que la distancia del j -ésimo miembro del dominio de F a ξ_j es cero, para $j < m$. Por tanto el j -ésimo miembro del dominio de F es igual a ξ_j , para $j < m$. Supongamos sin perder la generalidad que el termino m -ésimo del dominio de F es α_k^{n+1} donde $k \leq i_{n+1}$. Luego la siguiente función es una isometría,

$$\begin{aligned} H : \{\xi_1, \dots, \xi_{i_1+i_2+\dots+i_n+k}\} &\longrightarrow \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{i_1}^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{i_2}^2, \dots, \alpha_1^{n+1}, \dots, \alpha_k^{n+1}\} \\ &= \{\xi_1, \dots, \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_1+\dots+i_n}, \dots, \xi_{i_1+\dots+i_n+k-1}, \alpha_k^{n+1}\} \end{aligned}$$

dada por $H(x) = F^{-1}(x)$. Por el Lema 3.34, $D(\xi_{i_1+\dots+i_n+k}, \alpha_k^{n+1}) = 0$. □

Del resultado anterior toda sucesión $\{a_n\}_n$ de $\mathbb{U}_1$ es una subsucesión de alguna sucesión $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$. En efecto, escribamos $\{a_n\}_n$ como $\{\alpha_{i_n}^n\}_n$. Por la demostración del Teorema 3.30, existe $\{\xi_n\}_n \subset \mathbb{U}_1$ y una inmersión isométrica

$$F : \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_{i_1}^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{i_2}^2, \alpha_1^3, \dots, \alpha_{i_3}^3, \dots\} \longrightarrow \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$$

definida como $F(\alpha_j^1) = \xi_j$, $F(\alpha_k^{n+1}) = \xi_{i_1+\dots+i_n+k}$ donde $j \leq i_1$, $k \leq i_{n+1}$. Por el Lema 3.35, $D(\alpha_{i_1}^1, \xi_{i_1}) = 0$ y $D(\alpha_{i_n}^n, \xi_{i_1+\dots+i_n}) = 0$ para todo $n > 1$. Por tanto $\{a_n\}_n = \{\alpha_{i_n}^n\}_n$ es una subsucesión de la sucesión $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$.

Lema 3.36. Sean $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{U}_1$, $\xi_{m+1} \in \mathbb{U}_1$ (donde ξ_{m+1} tiene dimensión $m+1$) y una iso-

metría

$$F : \{a_1, \dots, a_m\} \longrightarrow \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$$

definida como $F(a_i) = \xi_i$ para todo $i \leq m$. Entonces existe $a_{m+1} \in \mathbb{U}$ y una isometría $\widehat{F} : \{a_1, \dots, a_m, a_{m+1}\} \longrightarrow \{\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}\}$ dada por $\widehat{F}(a_i) = \xi_i$ para todo $i \leq m+1$.

Demostración. Demostraremos el teorema para $m = 3$. Sean $\{\alpha_n, \beta_r, \gamma_p\} \subset \mathbb{U}_1$, $\xi_4 \in \mathbb{U}_1$ y una isometría

$$F : \{\alpha_n, \beta_r, \gamma_p\} \longrightarrow \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$$

definida como $F(\alpha_n) = \xi_1$, $F(\beta_r) = \xi_2$ y $F(\gamma_p) = \xi_3$. Demostraremos que existe $\delta_q \in \mathbb{U}_1$ tal que la siguiente función es una isometría,

$$\widehat{F} : \{\alpha_n, \beta_r, \gamma_p, \delta_q\} \longrightarrow \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$$

dada por $\widehat{F}(\delta_q) = \xi_4$ y $\widehat{F}(x) = F(x)$ para todo $x \in \{\alpha_n, \beta_r, \gamma_p\}$.

Por la demostración del Teorema 3.30, existe $\eta_{n+r+p} \in \mathbb{U}_1$ y una isometría

$$F_1 : \{\alpha_n, \beta_r, \gamma_p, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}\} \longrightarrow \{\eta_1, \dots, \eta_{n+r+p}\}$$

donde la imagen de cada k -ésimo término del dominio de F_1 es igual η_k , para $k \leq n+r+p$.

Consideramos la isometría $F'_1 : \{\alpha_n, \beta_r, \gamma_p\} \longrightarrow \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ definida como $F'_1(x) = F_1(x)$.

Luego $H : \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \longrightarrow \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ definida como $H(x) = F'_1(F^{-1}(x))$, es una isometría. Por

el Lema 3.35, $D(\xi_i, \eta_i) = 0$ para todo $i \leq 3$. Por tanto $\eta_i = \xi_i$ para $i \leq 3$.

Nuevamente por la demostración del Teorema 3.30, existe $\zeta_{n+r+p+1} \in \mathbb{U}_1$ y una isometría

$$F_2 : \{\eta_4, \dots, \eta_{n+2}, \eta_1, \eta_{n+3}, \dots, \eta_{n+r+1}, \eta_2, \eta_{n+r+2}, \dots, \eta_{n+r+p}, \eta_3, \xi_4\} \longrightarrow \{\zeta_1, \dots, \zeta_{n+r+p+1}\}$$

donde la imagen de cada k -ésimo término del dominio de F_2 es igual ζ_k .

Tomemos $\delta_q = \zeta_{n+r+p+1}$. Luego considere la isometría:

$$F_3 : \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_r, \gamma_1, \dots, \gamma_p\} \longrightarrow \{\zeta_1, \dots, \zeta_{n+r+p}\}$$

dada por $F_3(x) = F_2(F_1(x))$, es decir, la imagen de cada k -ésimo término del dominio de F_3 es igual ζ_k .

Por el Lema 3.35, $D(\alpha_n, \zeta_n) = 0$, $D(\beta_r, \zeta_{n+r}) = 0$ y $D(\gamma_p, \zeta_{n+r+p}) = 0$. De donde $\alpha_n = \zeta_n$, $\beta_r = \zeta_{n+r}$ y $\gamma_p = \zeta_{n+r+p}$. Como $\eta_1 = \xi_1$, $\eta_2 = \xi_2$ y $\eta_3 = \xi_3$, la siguiente función es una isometría,

$$\widehat{F} : \{\alpha_n, \beta_r, \gamma_p, \delta_q\} = \{\zeta_n, \zeta_{n+r}, \zeta_{n+r+p}, \zeta_{n+r+p+1}\} \longrightarrow \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \xi_4\} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$$

definida como $\widehat{F}(x) = F_2^{-1}(x)$.

De forma análoga se prueba el teorema para un subconjunto finito de m elementos de $\mathbb{U}_1$. □

Lema 3.37. Sean $\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{U}_1$ y una isometría $F : \{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow \{b_1, \dots, b_n\}$

definida como $F(a_i) = b_i$. Entonces para $b_{n+1} \in \mathbb{U}_1$, existe $a_{n+1} \in \mathbb{U}_1$ y una isometría

$$\widehat{F} : \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\} \longrightarrow \{b_1, \dots, b_n, b_{n+1}\}$$

definida como $\widehat{F}(a_i) = b_i$ para todo $i \leq n+1$.

Demostración. Por la demostración del Teorema 3.30, existe $\xi_{n+1} \in \mathbb{U}_1$ y una isometría

$$F_1 : \{b_1, \dots, b_n, b_{n+1}\} \longrightarrow \{\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}\}$$

definida como $F_1(b_i) = \xi_i$ para todo $i \leq n+1$.

Tenemos que la siguiente función es una isometría

$$F_2 : \{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$$

definida como $F_2(a_i) = F_1(F(a_i)) = \xi_i$ para todo $i \leq n$.

Por el Teorema 3.36, existe $a_{n+1} \in \mathbb{U}_1$ y una isometría $F_3 : \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\} \longrightarrow \{\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}\}$ definida como $F_3(a_i) = \xi_i$ para todo $i \leq n+1$. Por tanto la siguiente función es una isometría

$$\widehat{F} : \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\} \longrightarrow \{b_1, \dots, b_n, b_{n+1}\}$$

dada por $\widehat{F}(a_i) = F_1^{-1}(F_3(a_i)) = b_i$ para todo $i \leq n+1$. □

Teorema 3.38. $\mathbb{U}_1$ tiene la propiedad de Urysohn.

Demostración. Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{U}_1$, $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tales que $|\mu_i - \mu_j| \leq D(a_i, a_j) \leq \mu_i + \mu_j$ para todo $i, j \leq n$. Probaremos que existe $a \in \mathbb{U}_1$ tal que $D(a, a_i) = \mu_i$ para todo $i \leq n$.

Para cada $i \leq n$, definimos $x_{a_i} = (D(a_i, a_1), \dots, D(a_i, a_n)) \in \mathbb{R}^n$. Utilizando la desigualdad triangular obtenemos que $\|x_{a_i} - x_{a_j}\|_\infty = D(a_i, a_j)$ para todo $i, j \leq n$. Consideremos $x = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Note que $|\mu_j - D(a_i, a_j)| \leq \mu_i$ para todo $i, j \leq n$, de donde $\|x - x_{a_i}\|_\infty = \mu_i$ para todo $i \leq n$. Como $\mathbb{U}_1$ es universal para los espacios métricos finitos, $\{x_{a_1}, \dots, x_{a_n}, x\}$ está contenido isométricamente en $\mathbb{U}_1$. De donde existe una inmersión isométrica $\varphi : \{x_{a_1}, \dots, x_{a_n}, x\} \longrightarrow \mathbb{U}_1$. Tenemos que $\varphi(x) = z \in \mathbb{U}_1$ y $\varphi(x_{a_i}) = y_i \in \mathbb{U}_1$ para todo $i \leq n$. Luego obtenemos que $D(z, y_i) = D(\varphi(x), \varphi(x_{a_i})) = \|x - x_{a_i}\|_\infty = \mu_i$ para todo $i \leq n$.

Consideremos $\psi : \{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow \{y_1, \dots, y_n\}$ definida por $\psi(a_i) = \varphi(x_{a_i}) = y_i$. Note que ψ es una isometría. Por el Lema 3.37, existe $a \in \mathbb{U}_1$ y una isometría $\hat{\psi} : \{a_1, \dots, a_n, a\} \longrightarrow \{y_1, \dots, y_n, z\}$ que extiende a ψ . Tenemos que:

$$D(a, a_i) = D(\hat{\psi}(a), \hat{\psi}(a_i)) = D(z, \psi(a_i)) = D(z, y_i) = \mu_i \text{ para todo } i \leq n. \quad \square$$

Tenemos que $\mathbb{U}_1$ tiene la propiedad de Urysohn. Por el Teorema 3.20, la completación de $\mathbb{U}_1$, es el espacio universal de Urysohn $\mathbb{U}$.

3.5.2. Katětov. En 1986 Katětov presentó su propia construcción del espacio universal de Urysohn en el Prague Topological Symposium (Hušek, 2008). Estudiaremos detalladamente esa construcción siguiendo (Gao, 2009, Sección 1.2). Para presentar la construcción de $\mathbb{U}$ realizada por Katětov introduciremos los conceptos de función admisible y función finitamente soportada. Luego fijando un espacio métrico separable (X, d) construiremos un espacio métrico

separable (X_ω, d_ω) con la propiedad de Urysohn.

Definición 3.39. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es admisible si para todo $x, y \in X$ se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \leq f(x) + f(y).$$

Definición 3.40. Sea (X, d) un espacio métrico separable y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función admisible.

Un soporte de f es un conjunto $S \subseteq X$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que

$$f(x) = \inf\{f(y) + d(x, y) : y \in S\}.$$

f esta finitamente soportada si existe un soporte finito de f .

Todo subconjunto de un espacio métrico separable (X, d) que contenga un soporte de una función admisible f también es un soporte de f . En efecto, sea S un soporte de una función admisible $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y S' un subconjunto de X que contiene a S . Sean $x \in X$ y $z \in S'$. Como f es admisible, $f(x) \leq f(z) + d(x, z)$, de donde $f(x) \leq \inf\{f(z) + d(x, z) : z \in S'\}$. Por otra parte, como S es soporte de f , $f(x) = \inf\{f(s) + d(x, s) : s \in S\}$. Por tanto $f(x) = \inf\{f(z) + d(x, z) : z \in S'\}$.

Ejemplo 3.41. Sean X un espacio métrico separable y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función admisible, entonces X es un soporte de f . En efecto, fijemos $x \in X$. Como f es admisible, $f(x) \leq f(y) + d(x, y)$ para todo $y \in X$. Por tanto $f(x) = \inf\{f(y) + d(x, y) : y \in X\}$.

Ejemplo 3.42. Sean X un espacio métrico separable y $x \in X$, entonces $f_x : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = d(y, x)$, es una función admisible y $\{y\}$ es un soporte de f . Por tanto f es finitamente soportada.

Ejemplo 3.43. Sean (X, d) un espacio métrico separable, $\phi : X \rightarrow X$ una isometría y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función admisible. Entonces $f \circ \phi$ es admisible.

Ejemplo 3.44. Sea $\mathbb{N}$ con la métrica discreta, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$. Observe que f es admisible y su único soporte es $S = \mathbb{N}$. Por tanto f no es finitamente soportada.

Sea (X, d) un espacio métrico separable. Definimos $E(X)$ como el espacio de las funciones admisibles con la métrica uniforme d_u .

Sea $f \in E(X)$. Veamos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. En efecto, para $x, y \in X$, $f(x) - f(y) \leq d(x, y) \leq f(x) + f(y)$. De donde $f(x) - f(y) \leq f(x) + f(y)$. Por tanto $f(y) \geq 0$ para todo $y \in X$.

Demostremos que d_u está bien definida. Sean $f, g \in E(X)$, fijemos $c \in X$. Luego $f(x) \leq d(x, c) + f(c)$ y $d(x, c) - g(c) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Tenemos que:

$$f(x) - g(x) \leq d(x, c) + f(c) - (d(x, c) - g(c)) = f(c) + g(c) \text{ para todo } x \in X.$$

De forma análoga vemos que $g(x) - f(x) \leq g(c) + f(c)$ para todo $x \in X$. Por tanto $|f(x) - g(x)| \leq g(c) + f(c)$ para todo $x \in X$. Concluimos que d_u está bien definida en $E(X)$.

Sea (X, d) un espacio métrico separable. Definimos $E(X, \omega)$ como el subespacio de las

funciones finitamente soportadas de $E(X)$. Para $n \in \omega$ definimos:

$$\begin{aligned} X_0 &= X \\ X_{n+1} &= E(X_n, \omega) \\ X_\omega &= \bigcup_n X_n. \end{aligned}$$

Como consecuencia del Ejemplo 3.42, la función $h_1 : X \longrightarrow E(X, \omega)$ definida por $h_1(x) = f_x$, es una inmersión isométrica. Por tanto $X_0 = X$ está contenido isométricamente en $X_1 = E(X, \omega)$.

Notemos que $E(X_1, \omega) = E(E(X, \omega), \omega)$ son las funciones admisibles de $E(X, \omega)$ en $\mathbb{R}$ finitamente soportadas, con la distancia uniforme. Observemos que para toda $f \in E(X, \omega)$ la función $F_f : E(X, \omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_f(g) = d_u(g, f)$, es admisible y su soporte es $\{f\}$. Así, la función $h_2 : E(X, \omega) \longrightarrow E(E(X, \omega), \omega)$ definida como $h_2(f) = F_f$, es una inmersión isométrica. Por tanto X_1 está contenido isométricamente en X_2 .

Continuando recursivamente se muestra que cada X_n está contenido isométricamente en X_{n+1} . Definimos para X_ω la métrica d_ω como una extensión natural de d en X_ω .

Para $x \in X$, $h_1(x) \in X_1 = E(X, \omega)$, entonces $h_2(h_1(x)) \in X_2 = E(E(X, \omega), \omega)$. Entonces X_0 está inmerso isométricamente en X_2 .

Si $f, g \in X_\omega = \bigcup_n X_n$, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f \in X_n$ y $g \in X_m$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $n \geq m$, ya demostramos que X_m está inmerso isométricamente en X_n . Así obtenemos una inmersión isométrica $F : X_m \longrightarrow X_n$ definida como $F(x) = (h_n \circ h_{n-1} \circ \dots \circ h_{m+1})(x)$. Por tanto $d_\omega(f, g) = d_u(f, F(g))$.

Lema 3.45. Sean X un espacio métrico separable y $f \in E(X)$. Entonces $d_u(f, f_x) = f(x)$ para todo $x \in X$ (donde f_x es la función abmisible del Ejemplo 3.42).

Demostración. Sea $x \in X$. Consideremos $f_x \in E(X)$ definida por $f_x(y) = d(y, x)$ para todo $y \in X$. Sea $y \in X$. Como f es abmisible, $f(y) - f(x) \leq d(y, x) \leq f(y) + f(x)$. De donde $d(y, x) - f(y) \leq f(x)$. Además $f(x) - f(y) \geq -d(y, x)$, de donde $f(x) \geq f(y) - d(y, x)$. Por tanto $|f(y) - d(y, x)| \leq f(x)$.

Luego, $|f(y) - f_x(y)| = |f(y) - d(y, x)| \leq f(x)$ para todo $y \in X$. Concluimos que $d_u(f, f_x) = f(x)$. □

Demostraremos una serie de resultados para probar que X_ω es separable.

Lema 3.46. Sean $f, g \in E(X, \omega)$. Si $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un soporte de f y g , entonces $d_u(f, g) = \sup\{|f(x_i) - g(x_i)| : i \leq n\}$.

Demostración. Sea $x \in X$, tenemos que existen $i, j \leq n$ tales que $f(x) = f(x_i) + d(x, x_i)$ y $g(x) = g(x_j) + d(x, x_j)$. Luego

$$f(x) - g(x) = f(x) - g(x_j) - d(x, x_j) \leq f(x_j) - g(x_j).$$

De forma análoga vemos que $g(x) - f(x) \leq g(x_i) - f(x_i)$.

Concluimos que $d_u(f, g) = \sup\{|f(x_i) - g(x_i)| : i \leq n\}$. □

Lema 3.47. Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un espacio métrico. Entonces $E(X)$ es separable.

Demostración. Consideremos $\varphi : E(X) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(f) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$. Sean $f, g \in E(X)$,

$$\|\varphi(f) - \varphi(g)\|_\infty = \sup\{|f(x_i) - g(x_i)| : i \leq n\} = d_u(f, g)$$

Concluimos que φ es una inmersión isométrica. Como $\mathbb{R}^n$ es separable, $\varphi(E(X))$ es separable. Por tanto $E(X)$ es separable. $\square$

Lema 3.48. Sea (X, d) un espacio métrico, $S \subseteq X$ y f una función admisible sobre S . Para todo $x \in X$ definimos:

$$g_f(x) = \inf\{f(y) + d(x, y) : y \in S\}.$$

Entonces g_f es admisible sobre X , g_f extiende a f y S es un soporte de g_f .

Demostración. Sean $x, z \in X$, $y \in S$. Tenemos que $f(y) + d(x, y) \leq f(y) + d(z, y) + d(x, z)$; de esto $g_f(x) \leq f(y) + d(z, y) + d(x, z)$, luego $g_f(x) - d(x, z) \leq f(y) + d(z, y)$. Por tanto $g_f(x) - d(x, z) \leq g_f(z)$, de donde $g_f(x) - g_f(z) \leq d(x, z)$.

De forma análoga mostramos que $g_f(z) - g_f(x) \leq d(x, z)$. De esta manera concluimos que $|g_f(z) - g_f(x)| \leq d(x, z)$.

Por otro lado, tenemos que $g_f(x) + g_f(z) = \inf\{f(y) + d(x, y) + f(y') + d(z, y') : y, y' \in S\}$.

Además, para $y, y' \in S$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, y') + d(y', z) \leq f(y) + d(x, y) + f(y') + d(z, y').$$

Por tanto $d(x, z) \leq g_f(x) + g_f(z)$.

Concluimos que g_f es admisible sobre X . Note que g_f extiende a f y S es un soporte de g_f . □

Consideremos (X, d) un espacio métrico separable y $F \subset X$ finito, definimos $E(X, F, \omega)$ como el conjunto de las funciones admisibles con soporte F . Además si $A \subset X$, definimos $E^*(X, A, \omega)$ como el conjunto de las funciones admisibles con soporte finito contenido en A .

Lema 3.49. *Sean (X, d) un espacio métrico separable y $F \subset X$ finito. Entonces $E(X, F, \omega)$ es separable.*

Demostración. Sea $F = \{x_1, \dots, x_n\}$. Consideremos $\varphi : E(F) \rightarrow E(X, F, \omega)$ definida como $\varphi(f) = g_f$, veamos que φ es sobreyectiva. Sea $h \in E(X, F, \omega)$, luego $h(x) = \min\{h(x_i) + d(x, x_i) : i \leq n\}$ para todo $x \in X$. Consideremos $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = h(x)$. Note que $f \in E(F)$ y $\varphi(f) = h$. Por tanto φ es sobreyectiva.

Demostremos que φ es continua. Sea $\{f_m\}_m \subset E(F)$ que converge a $f \in E(F)$ respecto a d_u . Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq m_0$, $|f_m(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ para todo $i \leq n$. Por el Lema 3.46, $d_u(\varphi(f_m), \varphi(f)) = d_u(g_{f_m}, g_f) = \sup\{|f_m(x_i) - f(x_i)| : i \leq n\} < \varepsilon$. Por tanto φ es continua.

Concluimos que $E(X, F, \omega)$ es separable. □

Teorema 3.50. *Sea (X, d) un espacio métrico separable. $E^*(X, D, \omega)$ es denso en $E(X, \omega)$ si D es denso numerable en X .*

Demostración. Sea $f \in E(X, \omega)$. Sea $B = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tal que

$$\forall x \in X, \quad f(x) = \min\{f(x_k) + d(x, x_k) : k \leq n\}.$$

Consideremos $B_{d_u}(f, \varepsilon)$. Sea $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ denso en X . Para todo $k \leq n$, existe $d_{i_k} \in B(x_k, \varepsilon/2)$.

Definamos $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = \min\{f(d_{i_k}) + d(x, d_{i_k}) : k \leq n\}$.

Demostremos ahora que $g \in E^*(X, D, \omega)$. En efecto, para $x, y \in X$, existen $j, h \leq n$ tales que $g(x) = f(d_{i_j}) + d(x, d_{i_j})$ y $g(y) = f(d_{i_h}) + d(y, d_{i_h})$. Tenemos que $g(y) = f(d_{i_h}) + d(y, d_{i_h}) \leq f(d_{i_j}) + d(y, d_{i_j})$, luego:

$$g(y) - g(x) \leq f(d_{i_j}) + d(y, d_{i_j}) - f(d_{i_j}) - d(x, d_{i_j}) = d(y, d_{i_j}) - d(x, d_{i_j}) \leq d(y, x).$$

De forma análoga vemos que $g(x) - g(y) \leq d(x, y)$. Por tanto $|g(x) - g(y)| \leq d(x, y)$.

Por otro lado, tenemos que:

$$g(x) + g(y) = f(d_{i_j}) + d(x, d_{i_j}) + f(d_{i_h}) + d(y, d_{i_h}) \geq f(x) + f(y) \geq d(x, y).$$

Concluimos que $g \in E^*(X, D, \omega)$.

Sea $x \in X$, existen $l, r \leq n$ tales que $f(x) = f(x_l) + d(x, x_l)$ y $g(x) = f(d_{i_r}) + d(x, d_{i_r})$.

Tenemos que $g(x) = f(d_{i_r}) + d(x, d_{i_r}) \leq f(d_{i_l}) + d(x, d_{i_l})$. Así;

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &\leq f(d_{i_l}) + d(x, d_{i_l}) - f(x_l) - d(x, x_l) \\ &\leq d(d_{i_l}, x_l) + d(d_{i_l}, x_l) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

De forma análoga vemos que $f(x) - g(x) < \varepsilon$. Concluimos que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. $\square$

Sean D denso numerable en X y $F \subset D$ finito. Por el Lema 3.49, $E(X, F, \omega)$ es separable. Así $E^*(X, D, \omega)$ también es separable. Por el Teorema 3.50, $E(X, \omega)$ es separable. Por tanto X_ω es separable.

El espacio X_ω tiene la propiedad de Urysohn. En efecto, sean $F = \{f_1, \dots, f_n\} \subset X_\omega$ y $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $|\mu_i - \mu_j| \leq d_\omega(f_i, f_j) \leq \mu_i + \mu_j$ para todo $i \leq n$. Definamos $\varphi : F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ como $\varphi(f_i) = \mu_i$. Note que φ es una función admisible sobre F . Por la forma como se definió X_ω , existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $F \subset X_m$.

Definamos $\psi : X_m \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\psi(f) = \inf\{\varphi(f_i) + d_u(f, f_i) : i \leq n\}$. Por el Lema 3.48, ψ es una función admisible. Consideremos $\psi_{f_i}(f) = d_u(f, f_i)$. Por el Lema 3.45, $d_\omega(\psi, f_i) = d_u(\psi, \psi_{f_i}) = \psi(f_i) = \varphi(f_i) = \mu_i$. Por tanto X_ω tiene la propiedad de Urysohn.

Tenemos que X_ω es un espacio métrico separable con la propiedad de Urysohn (y por lo tanto, la de Urysohn racional). Por el Teorema 3.20, la completación de X_ω , es el espacio universal de Urysohn $\mathbb{U}$.

3.5.3. Urysohn. Urysohn fue el primero en construir un espacio polaco universal y ultrahomogéneo. Inicialmente construyó un espacio métrico numerable $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ donde todas las dis-

tancias entre sus elementos son números racionales. Existen diferentes enfoques para construir $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$, por ejemplo en (Cuervo, 2017), se construye a partir de un límite de Fraissé. Estudiaremos la universalidad de este espacio y probaremos que la completación de $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ es el espacio universal de Urysohn. La construcción de $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ la presentamos a partir de la construcción realizada por Katětov y no es la presentada en (Hušek, 2008).

Definición 3.51. Sea (X, d) un espacio métrico numerable con distancia racional. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$ es admisible racional si para todo $x, y \in X$ se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \leq f(x) + f(y).$$

Ejemplo 3.52. Sean (X, d) un espacio métrico finito con distancia racional y $x \in X$, entonces $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f_x(y) = d(y, x)$ es una función admisible racional.

Sea (X, d) un espacio métrico finito con distancia racional. Definimos $E_{\mathbb{Q}}(X)$ como el espacio de las funciones admisibles racionales con la métrica uniforme d_u . De manera similar como lo hicimos en la construcción de Katětov, para $i \in \omega$ definimos:

$$\begin{aligned} X_0^{\mathbb{Q}} &= X \\ X_{i+1}^{\mathbb{Q}} &= E_{\mathbb{Q}}(X_i) \\ X_{\omega}^{\mathbb{Q}} &= \bigcup_i X_i^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

Utilizando recursivamente el Ejemplo 3.52 se muestra que cada $X_i^{\mathbb{Q}}$ está contenido isométricamente en $X_{i+1}^{\mathbb{Q}}$. La métrica de $X_{\omega}^{\mathbb{Q}}$ la tomamos como d_{ω} .

Teorema 3.53. *Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un espacio métrico finito con distancia racional. Entonces $X_\omega^\mathbb{Q}$ es numerable.*

Demostración. Consideremos $\varphi : E_\mathbb{Q}(X) \longrightarrow \mathbb{Q}^n$ dada por $\varphi(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$. Note que φ es inyectiva. De donde $E_\mathbb{Q}(X)$ es numerable. Por tanto $X_\omega^\mathbb{Q}$ es numerable. $\square$

De la misma manera como se hizo en la Sección 3.5.2 obtenemos los siguientes resultados.

Lema 3.54. *Sean X un espacio métrico numerable con distancia racional y $f \in E_\mathbb{Q}(X)$, entonces $d_u(f, f_x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*

Lema 3.55. *Sean (X, d) un espacio métrico numerable con distancia racional, $S \subseteq X$ finito y f una función admisible racional sobre S . Para todo $x \in X$ definimos:*

$$g_f(x) = \min\{f(y) + d(x, y) : y \in S\}.$$

Entonces g es admisible racional sobre X y extiende a f .

$X_\omega^\mathbb{Q}$ tiene la propiedad de Urysohn racional. En efecto, sean $F = \{f_1, \dots, f_n\} \subset X_\omega^\mathbb{Q}$ y $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{Q}^+$ tales que $|\mu_i - \mu_j| \leq d_\omega(f_i, f_j) \leq \mu_i + \mu_j$ para todo $i \leq n$. Definamos $\varphi : F \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ como $\varphi(f_i) = \mu_i$. Note que φ es una función admisible racional sobre F . Por la forma como se definió $X_\omega^\mathbb{Q}$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $F \subset X_m^\mathbb{Q}$.

Definamos $\psi : X_m^\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\psi(f) = \min\{\varphi(f_i) + d_u(f, f_i) : i \leq n\}$. Por el Lema 3.55, ψ es una función admisible. Consideremos $\psi_{f_i}(f) = d_u(f, f_i)$. Por el Lema 3.54, $d_\omega(\psi, f_i) = d_u(\psi, \psi_{f_i}) = \psi(f_i) = \varphi(f_i) = \mu_i$. Por tanto $X_\omega^\mathbb{Q}$ tiene la propiedad de Urysohn racional.

Escribiremos $X_\omega^\mathbb{Q}$ como $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$. Para estudiar la universalidad de $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ utilizamos el siguiente resultado.

Teorema 3.56. *Si dos espacios métricos numerables con distancia racional tienen la propiedad de Urysohn racional, entonces son isométricos.*

Demostración. Utilizando la propiedad de Urysohn racional, procedemos con el método de “back and forth”, como en el Lema 3.21. □

$\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ es universal para los espacios métricos finitos con distancia racional. Sea Y un espacio métrico finito con distancia racional. Tenemos que $Y_\omega^\mathbb{Q}$ es un espacio métrico numerable con distancia racional y tiene la propiedad de Urysohn racional. Por el Teorema 3.56, $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ es isométrico a $Y_\omega^\mathbb{Q}$, de donde Y está contenido isométricamente en $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$.

Para estudiar la ultrahomogeneidad de $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ utilizamos el siguiente resultado.

Teorema 3.57. *Sea (X, d) un espacio métrico numerable con distancia racional que tiene la propiedad de Urysohn racional. Entonces X es ultrahomogéneo.*

Demostración. Utilizando la propiedad de Urysohn racional, procedemos con el método de “back and forth”, como en el Lema 3.15. □

$\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ es ultrahomogéneo. Tenemos que $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ es un espacio métrico numerable con distancia racional y tiene la propiedad de Urysohn racional. Por el Teorema 3.57, $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ es ultrahomogéneo.

Veamos que $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ es único salvo isometría. Sea Z un espacio métrico con distancia racional, ultrahomogéneo y universal para los espacios métricos finitos con distancia racional. Por el Lema 3.24, Z tiene la propiedad de Urysohn racional. Por el Teorema 3.56, $\mathbb{U}_\mathbb{Q}$ y Z son isométricos.

Tenemos que $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ tiene la propiedad de Urysohn racional. Por el Teorema 3.20, la completación de $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$, es el espacio universal de Urysohn $\mathbb{U}$.

4. Grupos universales

En esta sección definiremos grupo universal y mencionaremos $Iso(\mathbb{U})$ el grupo de isometrías sobre el espacio universal de Urysonh. Utilizando la construcción del espacio $\mathbb{U}$ enfocada por K  t  tov estudiaremos de forma completa el grupo polaco universal $Iso(\mathbb{U})$ siguiendo (Gao, 2009, Sección 2.5). Otro ejemplo de grupo universal, que no estudiamos es $H([0, 1]^{\mathbb{N}})$ el grupo de homeomorfismo sobre el cubo de Hilbert.

Definición 4.1. *Un grupo polaco $(G, \cdot, \tau)$ es universal si cada grupo polaco $(H, *, \gamma)$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de $(G, \cdot, \tau)$.*

A continuación presentamos un teorema importante de grupos polacos universales para demostrar que el grupo polaco $Iso(\mathbb{U})$ es universal.

Teorema 4.2. *Si G es un grupo polaco, existe un espacio polaco (X, d) tal que G es isomorfo a un subgrupo cerrado de $Iso(X)$.*

Demostración. Sea d_G una métrica invariante por izquierda compatible con la topología de G . Sea (X, d) la completación de (G, d_G) . Luego existe una inmersión isométrica $\psi : G \longrightarrow X$ tal que $\overline{\psi(G)} = X$.

Sea $x \in X$, tenemos que existe $\{h_n\}_n \subset G$ tal que $\psi(h_n) \rightarrow x$ en X ; porque $\psi(G)$ es denso en X . Luego $\{\psi(h_n)\}_n$ es d -Cauchy. Como ψ preserva distancia, $\{h_n\}_n$ es d_G -Cauchy. Ahora fijemos $g \in G$, como d_G es invariante por la izquierda, $\{gh_n\}_n$ es d_G -Cauchy. De donde $\{\psi(gh_n)\}_n$ es convergente respecto a la métrica d .

De ahora en adelante si $g \in G$, identificaremos $\psi(g)$ en X como g .

Definimos $\varphi_g : X \longrightarrow X$ como $\varphi_g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} gh_n$. Veamos que φ_g está bien definida.

Sean $x \in X$, $\{h_n\}_n, \{h'_n\}_n \subset G$ tales que $h_n \rightarrow x$ y $h'_n \rightarrow x$ en X . Ya se demostró que $gh_n \rightarrow y$ y $gh'_n \rightarrow z$ respecto a d , donde $y, z \in X$. Luego

$$d(y, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(gh_n, gh'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_G(gh_n, gh'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_G(h_n, h'_n) = d(x, x) = 0.$$

Así, $\varphi_g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} gh_n = \lim_{n \rightarrow \infty} gh'_n$. Por tanto φ_g está bien definida.

Veamos que φ_g preserva distancia. Sean $x, y \in X$ tenemos que existen $\{h_n\}_n, \{h'_n\}_n \subset G$ tales que $h_n \rightarrow x$ y $h'_n \rightarrow y$ en X . Luego

$$d(\varphi_g(x), \varphi_g(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_G(gh_n, gh'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_G(h_n, h'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(h_n, h'_n) = d(x, y).$$

Demostramos ahora que φ_g es sobreyectiva. Sea $y \in X$ existe $\{p_n\}_n \subset G$ tal que $p_n \rightarrow y$. Como la función $h \longrightarrow gh$ es sobre, para $n \in \mathbb{N}$, existe $h_n \in G$ tal que $gh_n = p_n$. Luego, $\lim_{n \rightarrow \infty} gh_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = y$, de donde $\{gh_n\}_n$ es d_G -Cauchy. Por la invarianza a izquierda de d_G , $\{h_n\}_n$ es d_G -Cauchy. De donde $h_n \rightarrow x$ respecto a d , para algún $x \in X$. Así, $\varphi_g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} gh_n = y$. Por tanto φ_g es sobreyectiva.

Concluimos que φ_g es una isometría.

Consideremos $F : G \longrightarrow Iso(X)$ definida como $F(g) = \varphi_g$. Veamos que F es un homomorfismo. Sean $g_1, g_2 \in G$, veamos que $F(g_1 g_2) = F(g_1)F(g_2)$. Sea $x \in X$, existe $\{h_n\}_n \subset G$ tal que

$h_n \rightarrow x$ respecto a d . Tenemos que,

$$F(g_1 g_2)(x) = \varphi_{g_1 g_2}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_1 g_2 h_n = \varphi_{g_1}(\lim_{n \rightarrow \infty} g_2 h_n) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = F(g_1)F(g_2)(x)$$

Por tanto F es un homomorfismo.

Probemos que F es inyectivo. Sean $g_1, g_2 \in G$ tales que $F(g_1) = F(g_2)$. Tenemos que

$$g_1 = \varphi_{g_1}(1_G) = F(g_1)(1_G) = F(g_2)(1_G) = \varphi_{g_2}(1_G) = g_2.$$

Veamos que F es continuo. Sea $\{g_m\}_m \subset G$ tal que $g_m \rightarrow g$ en G . Sea $x \in X$, existe $\{h_n\}_n \subset G$ tal que $h_n \rightarrow x$. Luego $\{h_n\}_n$ es d_G -Cauchy; de donde para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, k \geq n_0$, $d_G(h_n, h_k) < \varepsilon/3$. Como $g_m \rightarrow g$ en G , $g_m h_{n_0} \rightarrow g h_{n_0}$ en G . Luego, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq m_0$, $d_G(g_m h_{n_0}, g h_{n_0}) < \varepsilon/3$. Para $n \geq n_0$ y $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned} d(g_m h_n, g h_n) &= d_G(g_m h_n, g h_n) \leq d_G(g_m h_n, g_m h_{n_0}) + d_G(g_m h_{n_0}, g h_{n_0}) + d_G(g h_{n_0}, g h_n) \\ &= d_G(h_n, h_{n_0}) + d_G(g_m h_{n_0}, g h_{n_0}) + d_G(h_{n_0}, h_n) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(F(g_m)(x), F(g)(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(\varphi_{g_m}(x), \varphi_g(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} d(g_m h_n, g h_n) = 0$$

Concluimos que $F(g_m) \rightarrow F(g)$. De donde F es un homomorfismo continuo.

Demostremos que $F(G)$ es cerrado en $Iso(X)$. Sea $\{F(g_n)\}_n \subset F(G)$ tal que $F(g_n) \rightarrow \psi$ en $Iso(X)$. En particular, $F(g_n)(1_G) = \varphi_{g_n}(1_G) = g_n \rightarrow \psi(1_G)$, por tanto $\{g_n\}_n$ es d_G -Cauchy.

Por otro lado, por la continuidad de la función inversa en $Iso(X)$, $F(g_n)^{-1} = \varphi_{g_n}^{-1} \rightarrow \psi^{-1}$. Como F es un homomorfismo, $\varphi_{g_n}^{-1} = \varphi_{g_n^{-1}}$. De donde $\varphi_{g_n^{-1}}(1_G) = g_n^{-1} \rightarrow \psi^{-1}(1_G)$. Por tanto $\{g_n^{-1}\}_n$ es d_G -Cauchy.

Por el Teorema 2.7, la siguiente métrica D es equivalente a d_G ,

$$\forall g, g' \in G, \quad D(g, g') = d_G(g, g') + d_G(g^{-1}, g'^{-1}).$$

Así $\{g_n\}_n$ es D -Cauchy. Como D es completa, existe $h \in G$ tal que $g_n \rightarrow h$ respecto a D . Por tanto $g_n \rightarrow h$ respecto a d_G , de donde $F(g_n) \rightarrow F(h)$ por la continuidad de F . Luego $F(h) = \psi$. Por tanto $F(G)$ es cerrado en $Iso(X)$.

Demostremos que F es abierto. Sea $\{g_n\} \subset G$ tal que $F(g_n) \rightarrow F(g)$ en $Iso(X)$, donde $g \in G$. De donde $g_n = \varphi_{g_n}(1_G) = F(g_n)(1_G) \rightarrow F(g)(1_G) = \varphi_g(1_G) = g$ en X . Por tanto $g_n \rightarrow g$ respecto a d_G . Concluimos que F es abierto.

Por tanto G es isomorfo al subgrupo $F(G)$, que es cerrado en $Iso(X)$. □

Sea X un espacio métrico separable, recordemos que $E(X)$ es el espacio de todas las funciones admisibles sobre X y $E(X, \omega)$ es el espacio de todas las funciones admisibles finitamente soportadas. Para $\varphi \in Iso(X)$, definimos $E(\varphi) : E(X) \rightarrow E(X)$ como $E(\varphi)(f)(x) = f(\varphi^{-1}(x))$.

Para demostrar que $Iso(\mathbb{U})$ es un grupo polaco universal, vamos a probar una serie de lemas.

Lema 4.3. Sean (X, d) un espacio polaco y $\varphi \in Iso(X)$. Entonces $E(\varphi) \in Iso(E(X))$.

Demostración. Sea $f \in E(X)$. Veamos que $E(\varphi)(f)$ es admisible. Para $x, y \in X$ tenemos que:

$$|E(\varphi)(f)(x) - E(\varphi)(f)(y)| = |f(\varphi^{-1}(x)) - f(\varphi^{-1}(y))| \leq d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) = d(x, y).$$

Además:

$$d(x, y) = d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \leq f(\varphi^{-1}(x)) + f(\varphi^{-1}(y)) = E(\varphi)(f)(x) + E(\varphi)(f)(y).$$

Por tanto $E(\varphi)(f)$ es admisible. De donde $E(\varphi)$ está bien definida.

Veamos que $E(\varphi)$ preserva distancia. Sean $f, g \in E(X)$ entonces:

$$\begin{aligned} d_u(E(\varphi)(f), E(\varphi)(g)) &= \sup\{|E(\varphi)(f)(x) - E(\varphi)(g)(x)| : x \in X\} \\ &= \sup\{|f(\varphi^{-1}(x)) - g(\varphi^{-1}(x))| : x \in X\} \\ &= \sup\{|f(y) - g(y)| : y \in X\} = d_u(f, g). \end{aligned}$$

Probemos que $E(\varphi)$ es sobreyectiva. Sea $g \in E(X)$, tomamos $g \circ \varphi = f$. Para $x \in X$ tenemos que

$$g(x) = g(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = f(\varphi^{-1}(x)) = E(\varphi)(f)(x).$$

De donde $E(\varphi)(f) = g$. Note que f es admisible. Por tanto $E(\varphi)$ es sobreyectiva.

Concluimos que $E(\varphi)$ es una isometría. □

Lema 4.4. Sean (X, d) un espacio polaco y $\varphi \in \text{Iso}(X)$. Si $f \in E(X, \omega)$, entonces $E(\varphi)(f) \in E(X, \omega)$.

Demostración. Sea $F = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ un soporte de f . Tenemos que f está definida como $f(x) = \min\{f(x_i) + d(x, x_i) : i \leq n\}$ para todo $x \in X$.

Tenemos que $E(\varphi)(f)(x) = f(\varphi^{-1}(x)) = \min\{f(x_i) + d(\varphi^{-1}(x), x_i) : i \leq n\}$ para todo $x \in X$. Luego consideremos $S = \{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\}$. Para $j \leq n$

$$E(\varphi)(f)(\varphi(x_j)) = \min\{f(x_i) + d(\varphi^{-1}(\varphi(x_j)), x_i) : i \leq n\} = f(x_j).$$

De donde $E(\varphi)(f)(x) = \min\{E(\varphi)(f)(\varphi(x_i)) + d(x, \varphi(x_i)) : i \leq n\}$ para todo $x \in X$.

Por tanto $S = \{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\}$ es un soporte de $E(\varphi)(f)$. De donde $E(\varphi)(f) \in E(X, \omega)$.

□

Lema 4.5. Sean (X, d) un espacio polaco y $\varphi \in \text{Iso}(X)$. Entonces $E(\varphi)$ es la única isometría que extiende a φ .

Demostración. Fijemos $x \in X$. Para todo $y \in X$,

$$E(\varphi)(f_x)(y) = f_x(\varphi^{-1}(y)) = d(x, \varphi^{-1}(y)) = d(\varphi(x), y) = f_{\varphi(x)}(y).$$

Por tanto $E(\varphi)$ extiende a φ . Sea $F : E(X) \longrightarrow E(X)$ una isometría que extiende a φ . Sean $f \in E(X)$, $x \in X$

$$F(f)(\varphi(x)) = d_u(F(f), \varphi(x)) = d_u(F(f), F(f_x)) = d_u(f, x) = f(x).$$

De donde $F(f)(x) = f(\varphi^{-1}(x))$ para todo $x \in X$. Concluimos que $E(\varphi)$ es la única isometría que extiende a φ . $\square$

Lema 4.6. Sea (X, d) un espacio polaco. Si $\varphi, \psi \in \text{Iso}(X)$, entonces $E(\varphi \circ \psi) = E(\varphi) \circ E(\psi)$.

Demostración. Sea $f \in E(X), x \in X$

$$\begin{aligned} E(\varphi \circ \psi)(f)(x) &= f((\varphi \circ \psi)^{-1}(x)) = f(\psi^{-1}(\varphi^{-1}(x))) = E(\varphi)(f \circ \psi^{-1})(x) \\ &= E(\varphi)(E(\psi)(f))(x) = (E(\varphi) \circ E(\psi))(f)(x). \end{aligned}$$

$\square$

Lema 4.7. Sean (X, d) un espacio polaco y $\{\varphi_m\}_m \subset \text{Iso}(X)$ tal que $\varphi_m \rightarrow \varphi$ en $\text{Iso}(X)$. Entonces $E(\varphi_m) \rightarrow E(\varphi)$ en $\text{Iso}(E(X, \omega))$.

Demostración. Veamos que $E(\varphi_m) \rightarrow E(\varphi)$. Fijemos $f \in E(X, \omega)$, tenemos que existen $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que $f(x) = \min\{f(x_i) + d(x, x_i) : i \leq n\}$. Como $\varphi_m \rightarrow \varphi$, para $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(\varphi_m(x_i), \varphi(x_i)) < \varepsilon$ para todo $m \geq m_0$ e $i \leq n$. Fijemos $m \geq m_0$. Tenemos que $S = \{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\}$ es un soporte de $E(\varphi)(f)$. Por tanto $S' = \{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n), \varphi_m(x_1), \dots, \varphi_m(x_n)\}$ es un soporte para $E(\varphi)(f)$.

De la misma manera vemos que S' es un soporte de $E(\varphi_m)(f)$.

Además para cada $i \leq n$,

$$\begin{aligned} |E(\varphi_m)(f)(\varphi(x_i)) - E(\varphi)(f)(\varphi(x_i))| &= |f(\varphi_m^{-1}(\varphi(x_i))) - f(\varphi^{-1}(\varphi(x_i)))| \\ &\leq d(\varphi_m^{-1}(\varphi(x_i)), \varphi(x_i)) \\ &= d(\varphi(x_i), \varphi_m(x_i)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

De forma análoga obtenemos que $|E(\varphi_m)(f)(\varphi_m(x_i)) - E(\varphi)(f)(\varphi_m(x_i))| < \varepsilon$. Luego por el Lema 3.46, $d_u(E(\varphi_m)(f), E(\varphi)(f)) = \sup\{|E(\varphi_m)(f)(s) - E(\varphi)(f)(s)| : s \in S'\} < \varepsilon$. Concluimos que $E(\varphi_m) \rightarrow E(\varphi)$. $\square$

Sea X un espacio métrico separable, recordemos que $X_0 = X$, $X_1 = E(X, \omega)$, $X_{n+1} = E(X_n, \omega)$ y $X_\omega = \bigcup_n X_n$.

Teorema 4.8. (*Uspenskij*) *$Iso(\mathbb{U})$ es un grupo polaco universal.*

Demostración. Sea X un espacio polaco, consideraremos $\mathbb{U}$ como la completación de X_ω . Sea $\varphi \in Iso(X)$, de forma inductiva definimos la sucesión $\{\varphi_n\}_n$ como $\varphi_0 = \varphi : X \rightarrow X$, $\varphi_1 = E(\varphi) : X_1 \rightarrow X_1$ y $\varphi_{n+1} = E(\varphi_n) : X_n \rightarrow X_n$. Por los Lemas 4.3 y 4.4, $\varphi_n \in Iso(X_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además por el Lema 4.5, φ_{n+1} es la única isometría que extiende a φ_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora definamos $\varphi_\omega = \bigcup_n \varphi_n$. Note que $\varphi_\omega \in Iso(X_\omega)$. Como X_ω es denso en $\mathbb{U}$, φ_ω admite una única extensión $\varphi^* \in Iso(\mathbb{U})$. Sea $z \in \mathbb{U}$, tenemos que existe $\{x_m\}_m \subset X_\omega$ tal que $x_m \rightarrow z$ en $\mathbb{U}$, φ^* está definida de la siguiente manera $\varphi^*(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_\omega(x_m)$.

Demostremos que $H : Iso(X) \rightarrow Iso(\mathbb{U})$ definida por $H(\varphi) = \varphi^*$ es un homomorfismo. Tenemos que H está bien definida; porque para cada $\varphi \in Iso(X)$, existe $H(\varphi) \in Iso(\mathbb{U})$ único. Sean

$\varphi, \psi \in Iso(X)$, por el Lema 4.6, $(\varphi \circ \psi)_\omega = \varphi_\omega \circ \psi_\omega$. Sea $z \in \mathbb{U}$, tenemos que existe $\{x_m\}_m \subset X_\omega$ tal que $x_m \rightarrow z$. Luego

$$\begin{aligned} H(\varphi \circ \psi)(z) &= (\varphi \circ \psi)^*(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi \circ \psi)_\omega(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi_\omega \circ \psi_\omega)(x_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_\omega(\psi_\omega(x_m)) = \varphi^*(\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_\omega(x_m)) \\ &= \varphi^*(\psi^*(z)) = (H(\varphi) \circ H(\psi))(z). \end{aligned}$$

Por tanto H es un homomorfismo.

Probemos que H es inyectivo. Sean $\varphi, \psi \in Iso(X)$ tales que $H(\varphi) = H(\psi)$. Tenemos que

$$\varphi = \varphi^*|_{X=H(\varphi)}|_{X=H(\psi)}|_{X=\psi^*} = \psi.$$

Veamos que H es continuo. Sea $\{\varphi^m\}_m \subset Iso(X)$ tal que $\varphi^m \rightarrow \varphi$ en $Iso(X)$. Por el Lema 4.7, $\varphi_\omega^m \rightarrow \varphi_\omega$. Veamos que $H(\varphi^m) \rightarrow H(\varphi)$.

Recordemos que d_ω es la métrica de X_ω . Escribamos la métrica de $\mathbb{U}$ como $\widehat{d_\omega}$, es decir es la métrica de la completación de X_ω . Sea $z \in \mathbb{U}$, tenemos que existe $\{x_n\}_n \subset X_\omega$ tal que $x_n \rightarrow z$ en $\mathbb{U}$. Luego $\{x_n\}_n$ es d_ω -Cauchy. Así para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, k \geq n_0$, $d_\omega(x_n, x_k) < \varepsilon/3$. Como $\varphi_\omega^m \rightarrow \varphi_\omega$, $\varphi_\omega^m(x_{n_0}) \rightarrow \varphi_\omega(x_{n_0})$. Luego, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq m_0$,

$d_\omega(\varphi_\omega^m(x_{n_0}), \varphi_\omega(x_{n_0})) < \varepsilon/3$. Para $n \geq n_0$ y $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned} \widehat{d}_\omega(\varphi_\omega^m(x_n), \varphi_\omega(x_n)) &= d_\omega(\varphi_\omega^m(x_n), \varphi_\omega(x_n)) \\ &\leq d_\omega(\varphi_\omega^m(x_n), \varphi_\omega^m(x_{n_0})) + d_\omega(\varphi_\omega^m(x_{n_0}), \varphi_\omega(x_{n_0})) \\ &\quad + d_\omega(\varphi_\omega(x_{n_0}), \varphi_\omega(x_n)) \\ &= d_\omega(x_n, x_{n_0}) + d_\omega(\varphi_\omega^m(x_{n_0}), \varphi_\omega(x_{n_0})) + d_\omega(x_{n_0}, x_n) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{d}_\omega(H(\varphi^m)(z), H(\varphi)(z)) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{d}_\omega((\varphi^m)^*(z), \varphi^*(z)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}_\omega(\varphi_\omega^m(x_n), \varphi_\omega(x_n)) = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $H(\varphi^m) \rightarrow H(\varphi)$. De donde H es un homomorfismo continuo.

Veamos que H es abierto. Sea $\{H(\varphi^m)\}_m \subset Iso(\mathbb{U})$ tal que $H(\varphi^m) \rightarrow H(\varphi)$ donde $\varphi \in Iso(X)$. Luego,

$$\varphi^m = (\varphi^m)^*|_X = H(\varphi^m)|_X \rightarrow H(\varphi)|_X = \varphi^*|_X = \varphi.$$

Por tanto H es abierto.

Demostremos que $H(Iso(X))$ es cerrado en $Iso(\mathbb{U})$. Sea $\{H(\varphi^m)\}_m \subset Iso(\mathbb{U})$ tal que $H(\varphi^m) \rightarrow \psi$ donde $\psi \in Iso(\mathbb{U})$. Tenemos que $\varphi^m = (\varphi^m)^*|_X = H(\varphi^m)|_X \rightarrow \psi|_X$. Así, $\psi|_X \in Iso(X)$. Como H es continua, $H(\varphi^m) \rightarrow H(\psi|_X)$. Por tanto $H(\psi|_X) = \psi$. Concluimos que $H(Iso(X))$ es cerrado en $Iso(\mathbb{U})$.

Luego, $H : Iso(X) \longrightarrow H(Iso(X))$ es un isomorfismo entre grupos topológicos, y $H(Iso(X))$ es un subgrupo cerrado de $Iso(\mathbb{U})$.

Sea G un grupo polaco. Por el Teorema 4.2, existe un espacio polaco (X, d) tal que G es isomorfo a un subgrupo cerrado de $Iso(X)$. Como $Iso(X)$ es isomorfo a un subgrupo cerrado de $Iso(\mathbb{U})$, G es isomorfo a un subgrupo cerrado de $Iso(\mathbb{U})$. $\square$

Teorema 4.9. (*Uspenskij*) Sea $H([0, 1]^{\mathbb{N}})$ el grupo de homeomorfismos sobre el cubo de Hilbert. Entonces $H([0, 1]^{\mathbb{N}})$ es un grupo polaco universal.

La demostración del Teorema 4.9 la podemos leer en (Kechris, 1995, Teorema 9.18).

Referencias Bibliográficas

- Benyamini, Y. and Lindenstrauss, J. (1998). *Geometric nonlinear functional analysis*, volume 48. American Mathematical Soc.
- Cuervo, N. (2017). *La universalidad del espacio de Urysohn y su grupo de isometrías (Tesis de Maestría)*. Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- Fabian, M., Habala, P., Hájek, P., Santalucía, V., Pelant, J., and Zizler, V. (2013). *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*. Springer Science & Business Media.
- Gao, S. (2009). *Invariant descriptive set theory*. Chapman & Hall / CRC.
- Heinonen, J. (2003). *Geometric embeddings of metric spaces*. University of Jyväskylä.
- Hušek, M. (2008). Urysohn universal space, its development and hausdorff's approach. *Topology and its Applications*, 155(14):1493–1501.
- Kechris, A. (1995). *Classical descriptive set theory*, volume 156. Graduate Texts in Mathematics. Springer & Verlag, New York.
- Leiderman, A., Pestov, V., Rubin, M., Solecki, S., and Uspenskij, V. (2008). Special issue: Workshop on the urysohn space, ben-gurion university of the negev, beer sheva, israel, 21–24 may 2006. *Top. Appl.*, 155(14):1451–1634.

Rueda, D. A. (2019). *Cálculo Diferencial*. Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.

Uzcátegui, C. and Di Prisco, C. (2020). *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Ediciones Uniandes-Universidad de los Andes.