

Análisis de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en plasmas parcialmente ionizados con términos de ionización y recombinación en la magnetósfera terrestre

Katherin Paola Gómez Romero

Trabajo de Grado para optar al título de Física

Director

Fabio Duvan Lora Clavijo

Físico, M.Sc., Ph.D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

A Taylor Swift, por haber escrito "*back when we were still changin' for the better, wanting was enough, for me it was enough*". A Nina, mi mayor amor.

Agradecimientos

A mi familia, por el apoyo incondicional que me brindaron durante toda la carrera. A Juan David, por haber estado conmigo durante todo el proceso y hacerlo mucho más ameno con su presencia. Y a German, por haberme prestado las herramientas necesarias para completar este trabajo de grado. Y también a mí misma, por no haberme rendido, aun cuando sentía que no estaba en el camino correcto.

Tabla de Contenido

Introducción	13
1. Objetivos	20
2. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz	21
3. Modelo de la MHD	29
3.1. Ecuaciones de la MHD	29
3.2. Términos de colisiones	38
3.2.1. Modelo de ionización y recombinación	44
4. Resultados	47
4.1. KHI en plasma totalmente ionizado	47
4.2. KHI en plasma parcialmente ionizado	55
4.2.1. Colisiones elásticas	56
4.2.2. Colisiones inelásticas	64
4.3. KHI en la magnetósfera de la Tierra	69
5. Conclusiones	79
Referencias Bibliográficas	82

Lista de Figuras

- Figura 1. Generación de una KHI. (a) Dos fluidos con velocidades distintas y una frontera común, (b) perturbación inicial, (c) un fluido comienza a moverse de un lado de la frontera al otro y (d) generación de los vórtices característicos de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Recuperado de: Philippi et al. (2015). 23
- Figura 2. Procesos de ionización y recombinación. (a) Electrón impactando una partícula neutra, (b) electrón impactando una partícula de carga positiva. Recuperado de: Goldston and Rutherford (1995). Modificado por: Autor. 45
- Figura 3. Representación gráfica de los dos fluidos. La parte superior representa el fluido con velocidad v_t y la parte inferior al fluido con velocidad v_b . 48
- Figura 4. Evolución de la KHI con $\beta = 0.02$. (a)-(c) Deformación de la frontera y crecimiento de la perturbación inicial, formación de una inestabilidad de menor tamaño. (d)-(f) Crecimiento del vórtice, enrollamiento del mismo y entrada a un estado turbulento. 50
- Figura 5. Evolución de la KHI con un modo de KH y $\beta = 0.05$. (a)-(c) Deformación de la frontera y crecimiento de la perturbación inicial, formación de una inestabilidad de menor tamaño. (d)-(f) Crecimiento del vórtice con poco enrollamiento y destrucción del mismo. 51

- Figura 6. Evolución de la KHI con un modo de KH y $\beta = 0.1$. (a)-(c) Deformación de la frontera y crecimiento de la perturbación inicial. (d)-(f) Comienza la formación de un vórtice de tamaño pequeño que se destruye rápidamente. 52
- Figura 7. Amplificación de la energía magnética (izquierda) y cinética (derecha) debido la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz para diferentes valores de β . La energía magnética en función del tiempo se calcula como $E_{mag}(t) = 0.5 \int B(t)^2 dA$. 54
- Figura 8. Amplitud de la perturbación como función del tiempo para diferentes valores de β . La amplitud de la perturbación se calcula como $\Delta v_y = 0.5(v_{ymax} - v_{ymin})$. 55
- Figura 9. (a)-(c) Densidad de masa para fluido neutro, (d)-(f) densidad de masa para fluido cargado, (g)-(h) diferencia de densidad de masa entre fluido cargado y neutro. 58
- Figura 10. (a)-(c) Vorticidad para fluido neutro, (d)-(f) vorticidad para fluido cargado, (g)-(h) diferencia de vorticidad entre fluido cargado y neutro. 60
- Figura 11. Amplificación de la energía magnética para diferentes valores de ξ en función del tiempo. 62
- Figura 12. Amplificación de la energía cinética para el fluido cargado (izquierda) y para el fluido neutro (derecha) debido la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz para diferentes valores de ξ en función del tiempo. 63
- Figura 13. Amplitud de la perturbación para el fluido cargado (izquierda) y para el fluido neutro (derecha) para diferentes valores de ξ en función del tiempo. 64
- Figura 14. (a)-(c) Densidad de masa de partículas neutras y (d)-(f) cargadas, para distintos valores de la frecuencia de recombinación. 66

- Figura 15. Magnitudes físicas del sistema a lo largo del eje x para diferentes valores de Ω_{rec} . (a) Γ^{rec} y Γ^{ion} , (b) densidad de masa, (c) momento y (d) energía. La línea continua representa a las partículas cargadas y la línea discontinua a las partículas neutras, a excepción de (a) donde la línea continua representa Γ^{rec} y la línea discontinua Γ^{ion} . 67
- Figura 16. Amplificación de la energía magnética del sistema para diferentes valores de Ω_{rec} en función del tiempo. 69
- Figura 17. Amplitud de la perturbación para el fluido cargado (izquierda) y el fluido neutro (derecha), para distintos valores del parámetro Ω_{rec} . 70
- Figura 18. Esquema de la magnetósfera de la Tierra. Recuperado de: Eastwood et al. (2015). Adaptado por: Autor. 71
- Figura 19. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz formada en la magnetopausa de la Tierra. Recuperado de: Sorathia et al. (2020). Adaptado por: Autor. 71
- Figura 20. Zona localizada de la magnetósfera de la Tierra. La zona morada representa el exterior a la magnetósfera y la zona roja representa el interior de la magnetósfera. La frontera entre ambas zonas es la magnetopausa. 73
- Figura 21. Densidad de masa para el fluido cargado para diferentes valores de tiempo. 74
- Figura 22. Densidad de masa para el fluido neutro para diferentes valores de tiempo. 75
- Figura 23. Gráficas de Γ^{rec} y Γ^{ion} (izquierda) y densidad de masa (derecha) para diferentes valores del tiempo. 76
- Figura 24. Amplificación de la energía magnética en función del tiempo. 77
- Figura 25. Amplitud de la perturbación en función del tiempo. 78

Resumen

Título: Análisis de la Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en plasmas parcialmente ionizados con términos de ionización y recombinación en la magnetósfera terrestre *

Autor: Katherin Paola Gómez Romero **

Palabras Clave: Magnetohidrodinámica, Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, Ionización, Recombinación.

Descripción: La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es un fenómeno común de la naturaleza ya que está presente en diferentes entornos, particularmente, astrofísicos. La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz ha sido estudiada en múltiples ocasiones en distintos contextos, como en prominencias solares, en la magnetopausa de distintos planetas, la magnetósfera terrestre, entre otros. Al ser un fenómeno tan común es necesario un entendimiento completo de su dinámica. Con el fin de entender la dinámica de este fenómeno se hace necesario construir un modelo matemático, el cual corresponde a la magnetohidrodinámica. En este trabajo de grado se analiza la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz haciendo uso de la magnetohidrodinámica, teniendo en cuenta fenómenos como las colisiones entre las diferentes especies del plasma, y los procesos de ionización y recombinación. Para esto, se hizo uso del código MAGNUS, un código de computación paralela que resuelve las ecuaciones de la MHD mediante esquemas de alta resolución. Para determinar los efectos de los fenómenos de ionización y recombinación, se implementó en MAGNUS un modelo experimental para dichos fenómenos. Adicionalmente, se estudió la dinámica de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en la magnetósfera de la Tierra como una aplicación práctica. Se encontró que las colisiones, tanto elásticas como inelásticas, participan activamente en la amplificación del campo magnético, y que dicha amplificación está presente en la magnetósfera de la Tierra debido a la formación de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Además, se comprobó

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duvan Loran Clavijo, Físico, M.Sc., Ph.D..

que las colisiones elásticas llevan a que los dos sistemas, tanto de partículas cargadas como neutras, tengan dinámicas similares. Por otro lado, se encontró que las zonas donde se forman los vórtices característicos de la KHI son regiones de máximos de recombinación, y representan a su vez máximos de densidad de masa, momento y energía para ambos fluidos.

Abstract

Title: Analysis of kelvin helmholtz instability in partially ionized plasmas with ionization and recombination phenomena in the Earth's magnetosphere *

Author: Katherin Paola Gómez Romero **

Keywords: Magnetohydrodynamics, Kelvin-Helmholtz instability, Ionization, Recombination.

Description: The Kelvin-Helmholtz instability is a common phenomenon in nature as it is present in different environments, particularly in astrophysical environments. The Kelvin-Helmholtz instability has been studied many times in different contexts, such as solar prominences, the magnetopause of different planets, and the Earth's magnetosphere, among others. Being such a common phenomenon, a complete understanding of its dynamics is necessary. In order to understand the dynamics of this phenomenon it is necessary to build a mathematical model, which corresponds to magnetohydrodynamics. In this work, the Kelvin-Helmholtz instability is analysed using magnetohydrodynamics, taking into account phenomena such as collisions between the different species in the plasma, and ionisation and recombination processes. For this, use was made of the MAGNUS code, a parallel computing code that solves the MHD equations by means of high-resolution schemes. To determine the effects of ionisation and recombination phenomena, an experimental model for these phenomena was implemented in MAGNUS. In addition, the dynamics of the Kelvin-Helmholtz instability in the Earth's magnetosphere was studied as a practical application. It was found that collisions, both elastic and inelastic, actively participate in the amplification of the magnetic field, and that such amplification is present in the Earth's magnetosphere due to the formation of the Kelvin-Helmholtz instability. Furthermore, it was found that elastic collisions lead to the two systems, both charged and neutral particles, having similar dyna-

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Civil, Electrónica y telecomunicaciones. Director: David Sebastián Cotes Prieto, Mágister en Ingeniería Civil.

mics. On the other hand, it was found that the areas where the characteristic vortices of the KHI form are regions of recombination maxima, and represent in turn maxima of mass, momentum and energy density for both fluids.

Introducción

En el Universo ocurren diversos fenómenos de gran interés para la comunidad científica, puesto que estos pueden interactuar y afectar en gran medida a nuestro planeta. En particular, las interacciones Sol-Tierra son especialmente importantes, debido a que su impacto y posibles consecuencias son las que más afectaciones pueden provocar en la Tierra. El clima espacial es el área encargada de estudiar dichas interacciones, siendo este un campo de la ciencia espacial que se encarga de analizar y comprender los posibles impactos de las interacciones entre la Tierra y el Sol, y sus consecuencias en la sociedad y la tecnología (Moldwin, 2008). El clima espacial se enfoca principalmente en el entorno geoespacial, incluyendo el Sol, el medio interplanetario, y la magnetósfera terrestre (Baker, 1998).

En la astrofísica y el clima espacial, la física del plasma es una herramienta de gran importancia, ya que el plasma está presente en todo el Universo debido a que representa la mayor parte de la materia visible. Gracias a esta ha sido posible analizar y entender los múltiples fenómenos que ocurren en el Universo, ya sea en los astros, los planetas, o incluso en discos de acreción alrededor de agujeros negros (Lovelace et al., 2010; Nishikawa et al., 2000). El entendimiento de los diferentes fenómenos físicos, como las eyecciones de masa coronal, las tormentas geomagnéticas o las erupciones solares, permite el avance tecnológico y, lo que podría ser más importante, como estos afectan a la Tierra y sus consecuencias sobre la vida (Hands et al., 2018). En múltiples ocasiones han sido reportados los efectos colaterales de estos fenómenos astrofísicos en la Tierra, entre los cuales se encuentran afectaciones en la órbita de satélites, en las radio comunicaciones,

entre otros (Moldwin, 2008).

La comprensión de los fenómenos asociados al clima espacial y la física del plasma se hace mediante la magnetohidrodinámica (MHD). Esta es una rama de la física que se encarga de estudiar los fluidos cargados y sus interacciones con los campos eléctricos y magnéticos (Bittencourt, 2004). Desde el punto de vista macroscópico, el plasma es un fluido globalmente neutro, compuesto por partículas neutras, iones y electrones, y su dinámica está regida por la MHD. Entre los fenómenos que se pueden estudiar con la MHD se encuentran las turbulencias (Beresnyak, 2019; Beresnyak and Lazarian, 2019; Tatali et al., 2021), las hojas de corriente (Priest, 1985), las erupciones solares (Priest, 1981; Shibata and Magara, 2011), las eyecciones de masa coronal (Möstl et al., 2013), la inestabilidad de Rayleigh-Taylor (Birk, 2002; Jiang and Jiang, 2015), entre otros. Adicionalmente, la MHD es un área tan completa y precisa que se ha llegado a utilizar en investigaciones médicas asociadas con el flujo sanguíneo (Keltner et al., 1990; Sankar and Lee, 2011), el fluido sinovial para el tratamiento de artritis (Ibrahim et al., 2019), entre otras.

Un fenómeno de gran interés que ocurre en los fluidos, así como en el plasma, y que se puede modelar mediante la MHD es la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (KHI por sus siglas en inglés). La KHI es una inestabilidad de tipo flujo cortante, que se da cuando dos fluidos que comparten una frontera en común poseen velocidades relativas entre sí. Este tipo de inestabilidad está presente en múltiples escenarios, tales como la corona solar (Foullon et al., 2011); la magnetopausa de la Tierra (Ong and Roderick, 1972), al igual que en la magnetopausa de otros planetas como Saturno (Delamere et al., 2011), Júpiter (Zhang et al., 2018), Mercurio (Sundberg et al., 2010), y Venus (Pope et al., 2009; Möstl et al., 2011); colas de cometas (Ershkovich, 1980); auroras boreales

les (Hallinan and Davis, 1970); jets cromosféricos solares (Kuridze et al., 2016); y la magnetósfera terrestre (Faganello and Califano, 2017), entre otros.

A pesar de que la KHI ha sido investigada en diversos entornos astrofísicos, la mayoría de estas investigaciones se han realizado ignorando fenómenos importantes y teniendo en cuenta ciertas aproximaciones, entre ellas, la aproximación ideal de la MHD (sin términos resistivos, viscosidad, flujo de calor, y colisiones entre especies). En adición a esto, se toman ciertas consideraciones, como el hecho de suponer el plasma como un fluido totalmente ionizado. El hecho de tomar en consideración estas aproximaciones no supone resultados erróneos, pues se ha comprobado que, a pesar de esto, los modelos implementados se adaptan de manera correcta a la realidad. Por ejemplo, se ha estudiado la KHI en jets magnetizados usando las ecuaciones de la MHD ideal (Keppens and Tóth, 1999). Igualmente, se ha investigado sobre la KHI en un plasma completamente ionizado inmerso en un campo magnético, usando un modelo de un solo fluido para el plasma (D'Angelo, 1965).

Como se mencionó con anterioridad, la dinámica de la KHI se estudia mediante la MHD. Debido a la complejidad de las ecuaciones que conforman la magnetohidrodinámica, su solución analítica se limita a un régimen lineal, pero una vez el sistema entra en un régimen no lineal no se puede encontrar una solución analítica. Para esto, se han desarrollado diversos métodos numéricos y computacionales que resuelven las ecuaciones de la MHD. Entre estos se encuentran el código VAC (por sus siglas en inglés *Versatile Advection Code*), el cual permite al usuario resolver ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólicas con esquemas de alta resolución (Toth, 1996); el código HERA (por sus siglas en inglés *Heating by Resonant Absorption*), el cual está diseñado

para el estudio de problemas que hacen uso de la MHD no lineal (Keppens et al., 1997, 1998); NIRVANA (Ziegler, 2008), un código de MHD de computación paralela con AMR (por sus siglas en inglés *Adaptative Mesh Refinement*) ideado para problemas astrofísicos y ATHENA, el cual fue desarrollado en especial para problemas de MHD asociados a la astrofísica (Stone et al., 2008).

Sin embargo, en muchas de las investigaciones que se han llevado a cabo respecto a la KHI no tienen en cuenta que, en diversos fenómenos, el plasma es un fluido parcialmente ionizado, es decir, compuesto por partículas cargadas y neutras. El hecho de considerar el plasma como un fluido completamente ionizado conlleva a despreciar fenómenos no ideales que pueden afectar la dinámica del problema de manera relevante. Fenómenos como las colisiones entre las diferentes especies del plasma, la resistencia de Cowling, el calentamiento debido a la fricción entre iones y partículas neutras, el intercambio de carga y de energía por ionización pueden jugar un papel importante en el estudio del plasma (Ballester et al., 2017). Es por esto que es de gran importancia considerar al plasma como un fluido parcialmente ionizado. Los plasmas parcialmente ionizados (PPI) han sido estudiados en fenómenos como la reconexión magnética (Ni et al., 2020) y los fenómenos de transporte (Rozhansky and Tsendin, 2001). Además, han sido investigados en diferentes escenarios como lo son el medio interestelar, la formación de discos protoplanetarios, etc (Ballester et al., 2017). Igualmente, procesos como la ionización y la recombinación también suelen ser despreciados, aún cuando estos pueden ser fundamentales en el análisis de distintos fenómenos, varios trabajos han demostrado que son de gran utilidad en la reconexión magnética mediada por plasmoides en el estudio de hojas de corriente de tipo Harris (Singh et al., 2019; Smith and Sakai, 2008).

La KHI también ha sido estudiada en plasmas parcialmente ionizados. Por ejemplo, se ha analizado la KHI en prominencias solares para comprender los efectos de la ionización parcial del plasma en tubos de flujo magnético, encontrándose que las colisiones entre los iones y las partículas neutras reducen la tasa de crecimiento, pero no suprimen completamente a la inestabilidad (Martínez-Gómez et al., 2015). Asimismo, se ha estudiado la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz y Rayleigh-Taylor en prominencias solares con PPI incluyendo términos gravitacionales, concluyéndose que las colisiones entre las diferentes especies afectan de manera significativa la tasa de crecimiento de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor, y bajo ciertas condiciones estas pueden favorecer la aparición de KHI (Díaz et al., 2012). También se han estudiado teniendo en cuenta la presencia de partículas de polvo, demostrando que al crecer la masa de dichas partículas ocurre un efecto estabilizador en los modos de Kelvin-Helmholtz, pero que a medida que el campo magnético aumenta, la dependencia con la masa de las partículas de polvo se pierde (Shadmehri and Downes, 2008). De igual forma, se ha investigado la KHI en PPI compresibles, tanto plasmas colisionales como no colisionales (Soler et al., 2012). Otras investigaciones tratan con PPI en medios porosos (Sunil, 1997); igualmente, se ha demostrado como el grosor de una capa formada por iones-electrones y partículas neutras afecta al crecimiento de la KHI (Shadmehri and Downes, 2007); entre otros (Chhajlani and Vyas, 1989; Watson et al., 2004; Birk and Wiechen, 2002; Wiechen, 2006).

Por otro lado, pocos trabajos investigativos se han realizado, en el ámbito de la astrofísica y la MHD, teniendo en cuenta los fenómenos de ionización y recombinación. Entre estos se encuentra el estudio de las hojas de corriente de tipo Harris en PPI teniendo en cuenta los términos de ionización y recombinación. Aquí se demostró que las interacciones entre los iones y las partículas

cargadas juegan un papel importante en la reconexión mediada por plasmoides (Singh et al., 2019). De igual forma, investigaciones sobre la reconexión magnética en regiones fuertemente magnetizadas de la atmósfera solar han encontrado que la tasa de ionización de las partículas neutras es siempre mayor que la de recombinación en la región donde se forman hojas de corriente (Ni et al., 2018). Adicionalmente, los fenómenos de ionización y recombinación han sido motivo de investigación en trabajos sobre la propagación de ondas acústicas en medio isotérmicos gravitacional, encontrándose que dichos procesos absorben una cantidad significativa de energía, además de concluir que un modelo más preciso de estos fenómenos puede ser esencial para el estudio de los plasmas parcialmente ionizados (Zhang et al., 2018). A pesar de que se han realizado investigaciones en lo que respecta a la ionización y recombinación, y la amplificación del campo magnético, estas no involucran a la KHI. Hasta donde se sabe, no hay evidencia científica de como dichos fenómenos afectan la dinámica del plasma en la KHI, y como estas aportan a la amplificación de los campos magnéticos.

Existen en la literatura códigos diseñados para la solución de la MHD no ideal. Entre estos se encuentra MANCHA (por sus siglas en inglés *Multi-fluid Advanced Non-ideal MHD Code for High-res simulations of the solar atmosphere*) (Khomenko and Collados, 2012), el cual resuelve las ecuaciones de la MHD no ideal en la atmósfera solar; BIFROST (Gudiksen et al., 2011), el cual soluciona las ecuaciones de la MHD en el contexto de la atmósfera estelar; y MAGNUS (Wandurraga, 2022), el cual incluye términos resistivos y de transferencia de calor para simular la propagación de ondas en el medio solar.

En este trabajo de grado se busca analizar la dinámica de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

por medio de simulaciones, con el fin de caracterizar su comportamiento y otras variables físicas, como la amplificación del campo magnético, la amplitud de la perturbación, la distribución de densidad de masa, entre otras. Adicionalmente, se busca determinar el efecto de ciertos fenómenos, como lo son las colisiones elásticas entre las diferentes partículas que componen el plasma y los procesos de ionización y recombinación, en la dinámica de la inestabilidad. Adicionalmente, como un ejemplo aplicativo, se realizarán simulaciones en el contexto de la magnetósfera de la Tierra para comprender como la KHI se forma en esta región astrofísica, y sus efectos y consecuencias en dicha región. Esto se llevará a cabo mediante simulaciones computacionales con el código MAGNUS (Wandurraga, 2022), el cual es un código de computación paralela que resuelve las ecuaciones de la magnetohidrodinámica. Dicho código funciona como un acople entre métodos de Runge-Kutta, para resolver la parte temporal; y métodos de volúmenes finitos, para resolver la parte espacial; los cuales se encuentran acoplados mediante el método de líneas. Adicionalmente, MAGNUS se encuentra paralelizado con OPENmp, y funciona con pasos de tiempo adaptativos.

Este trabajo de grado se encuentra organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se presenta la teoría sobre la KHI, el proceso de formación y su importancia; seguido a esto, en la sección 3, se presenta el modelo matemático de la magnetohidrodinámica que se usa para estudiar la KHI, junto con los términos de colisiones y los modelos de ionización y recombinación que se utilizarán; a continuación, en la sección 4, se presentan los resultados encontrados para las diferentes fases; finalmente, en la sección 5, se muestran las conclusiones y los futuros trabajos a realizar.

1. Objetivos

Objetivo general

Analizar la dinámica de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en un plasma parcialmente ionizado con términos de ionización y recombinación.

Objetivos específicos

Derivar las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, para el modelo de dos fluidos, teniendo en cuenta los fenómenos de ionización y recombinación.

Implementar en el código MAGNUS (Wandurraga, 2022) un módulo que calcule los términos de ionización y recombinación.

Diseñar condiciones iniciales y de frontera que permitan generar una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz.

Caracterizar la amplificación del campo magnético, y de otros parámetros como el perfil de velocidades integrado, en función de los términos de colisiones.

2. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

Una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es un tipo de inestabilidad que se presenta en fluidos, ya sea de forma hidrodinámica o magnetohidrodinámica, dependiendo de los fluidos que se vean involucrados en su formación. Esta inestabilidad fue reportada por primera vez gracias a los trabajos de Lord Kelvin (Thomson, 1871) y Hermann Von Helmholtz (Helmholtz, 1868), quienes estudiaron la dinámica de fluidos con diferentes densidades luego de aplicar sobre ellos una perturbación. En su forma magnetohidrodinámica, la KHI se presenta cuando los fluidos son conductores y se encuentran inmersos en campos eléctricos o magnéticos. Estos fluidos conductores pueden ser, en general, plasmas. Es esta forma magnetohidrodinámica de dicha inestabilidad la que es de particular interés.

En términos generales, una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es una inestabilidad de flujo cortante que se forma en la frontera entre dos fluidos¹ que poseen movimientos paralelos y una velocidad relativa (MacTaggart and Hillier, 2020). Para que dicha inestabilidad ocurra es necesario que sobre el sistema se aplique una perturbación inicial. Sin embargo, las perturbaciones están presentes en todo momento en la naturaleza, ya que no existe un estado “ideal” (Trinquete, 2017). Debido a esto, la KHI puede estar presente en diversos entornos astrofísicos, como en las eyecciones de masa coronal (Foullon et al., 2011); la magnetopausa de la tierra (Ong and Roderick, 1972), y de otros planetas como Saturno, Mercurio, Venus y Júpiter (Delamere et al., 2011; Zhang et al.,

¹ La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz se puede formar también en capas de un mismo fluido.

2018; Sundberg et al., 2010; Pope et al., 2009); jets cromosféricos solares (Kuridze et al., 2016); auroras boreales (Hallinan and Davis, 1970); entre otros.

Esta inestabilidad se forma cuando dos fluidos que poseen velocidades relativas² y una frontera común sufren una perturbación que altera el sistema, generando una deformación en la frontera (Zhelyazkov and Chandra, 2021). Del principio de Bernoulli se puede determinar que una deformación de la frontera generará una ligadura en el sistema, la cual lleva a incrementos en la velocidad de los fluidos y disminuciones en la presión; mientras que una expansión en la frontera genera disminuciones en la velocidad y aumento en la presión. Entonces, que la frontera entre los dos fluidos se vea perturbada, causará gradientes de presión en la dirección opuesta a la deformación de la frontera, lo que a su vez llevará a una fuerza de presión en la dirección de la deformación. Como resultado, esta deformación en la frontera crecerá, acelerando los fluidos y llevando el sistema a la formación de la KHI (Johnson et al., 2014). Este proceso se puede explicar en cuatro fases. En la primera fase se observan los fluidos con distintas velocidades. Seguido a esto, la aplicación de una perturbación inicial que deforma la frontera. A continuación, el crecimiento de la perturbación debido a gradientes de presión y el movimiento de los fluidos de un extremo de la frontera a otro. Como última fase, se aprecia la generación de los vórtices característicos (ver figura 1).

Aunque una de las condiciones para que se forme una KHI es una diferencia de velocidad entre los fluidos, dicha velocidad relativa no puede tomar un valor cualquiera. Existe cierta con-

² La velocidad relativa puede ser en dirección o magnitud.

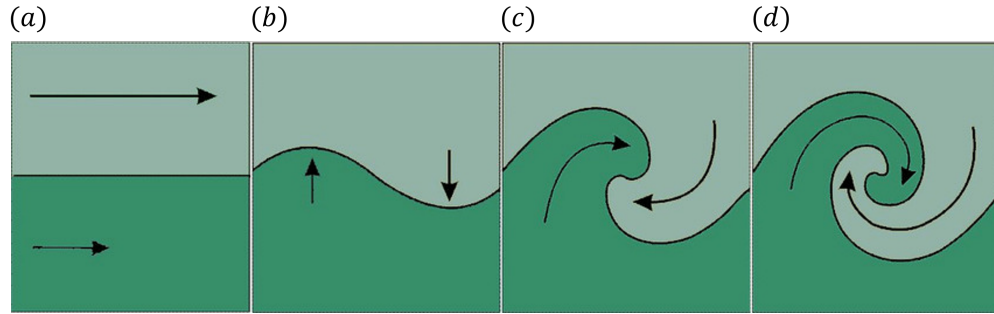


Figura 1

Generación de una KHI. (a) Dos fluidos con velocidades distintas y una frontera común, (b) perturbación inicial, (c) un fluido comienza a moverse de un lado de la frontera al otro y (d) generación de los vórtices característicos de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Recuperado de: Philippi et al. (2015).

dición sobre la velocidad relativa que se debe cumplir para la formación de una KHI, la cual está dada matemáticamente por la siguiente expresión³

$$\Delta U \leq \sqrt{\frac{B^2}{\mu_0} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)} \equiv v_A, \quad (1)$$

donde B es la magnitud del campo magnético, ρ_1 y ρ_2 son las densidades de los fluidos y v_A es la velocidad de Alfvén del sistema (Rossi, 2015). Dicha velocidad de Alfvén es de gran relevancia en la magnetohidrodinámica debido a que corresponde a la velocidad de propagación de las ondas tipo Alfvén, las cuales son una oscilación transversal incompresible que se propaga a través de las líneas de campo magnético. Matemáticamente, la velocidad de Alfvén se describe como (Cramer, 2011; Stone, 2011)

³ KHI en su forma magnetohidrodinámica.

$$v_A^2 = \frac{B^2}{\mu_0 \rho}, \quad (2)$$

donde $1/\rho = 1/\rho_1 + 1/\rho_2$.

La condición dada en (1) nos dice que si la velocidad relativa entre los fluidos es menor que la velocidad de Alfvén, el sistema es estable. Es decir, para que la KHI se forme, la diferencia de velocidad entre los fluidos debe ser mayor a la velocidad de Alfvén del sistema. Esto se debe a que el campo magnético, particularmente la tensión magnética, tiene un efecto estabilizador sobre el sistema. Al haber una velocidad de Alfvén mayor, habrá igualmente una tensión magnética mayor, que inhibirá el crecimiento de la perturbación inicial. Al inhibirse el crecimiento de la perturbación, el sistema no se inestabiliza; por el contrario, vuelve rápidamente a un estado estable. Esta condición se halla mediante un proceso matemático aplicado a las ecuaciones de la MHD, el cual es la teoría de perturbaciones. Siguiendo el procedimiento matemático presentado en Martínez-Gómez et al. (2015) se llega a la expresión presentada en (1).

Otra magnitud importante en el estudio de la KHI es el parámetro denominado “beta plasma” (β), el cual relaciona la presión magnética con la presión cinética del sistema. Este parámetro permite caracterizar de cierta forma el fenómeno, ya que es una medida de la razón entre dichas presiones y determina si el sistema es dominado por la presión magnética o cinética. Este parámetro se define matemáticamente como

$$\beta = \frac{B^2}{2\mu_0 p}, \quad (3)$$

donde B es la magnitud del campo magnético y p es la presión cinética.

En la formación de una KHI existen dos regímenes principales. En un primer momento, un régimen lineal, el cual se caracteriza por el crecimiento lineal de la perturbación inicial. Seguido a esto, se entra en un régimen no lineal, en el cual se comienzan a formar los vórtices de la KHI y termina con la disipación de la inestabilidad y la entrada a un estado turbulento. El régimen lineal se puede estudiar analíticamente mediante teoría de perturbaciones aplicada al modelo matemático de la magnetohidrodinámica. Esto permite estudiar las condiciones necesarias para la formación de una KHI en cualquier contexto, por ejemplo, la condición dada por (1) se halla mediante este tratamiento. Sin embargo, para un entendimiento completo de la dinámica y de la evolución global de la inestabilidad es necesario un tratamiento numérico (Massaglia et al., 2008; Malagoli et al., 1996).

Cuando se habla de la formación de una KHI en la magnetósfera terrestre, se hace necesario hablar de otros fenómenos, como las eyecciones de masa coronal y el transporte de plasma en la magnetósfera. En particular, en el Sol ocurre un fenómeno de desprendimiento de masa conocido como eyección de masa coronal (Webb and Howard, 2012). En estas eyecciones el material expulsado es plasma solar el cual, debido al teorema de líneas de campo congeladas, viaja a través del medio interplanetario con líneas de campo magnético solar⁴ sujetas a este. Este plasma llega a las cercanías de la magnetósfera terrestre e interactúa, en primer lugar, con el “Bow shock” de la magnetósfera, donde algunas propiedades del viento solar se ven afectadas. Por ejemplo, exis-

⁴ También conocido como campo magnético interplanetario (IMF por sus siglas en inglés).

ten teorías que explican la energización de los electrones del plasma del viento solar cuando este choca con el “Bow shock” (Leroy and Mangeney, 1984; Paschmann et al., 1980). Seguido a esto, interactúa con la magnetopausa, la cual actúa como una frontera entre el medio astrofísico y la magnetósfera. Debido a las velocidades relativas entre el plasma proveniente del viento solar y el plasma que se encuentra contenido dentro de la magnetósfera se forma la KHI en la magnetopausa (Guo et al., 2010; Hasegawa, 2012).

En principio, debido al mismo teorema de líneas de campo congeladas, no debería haber presencia de plasma de viento solar dentro de la magnetósfera terrestre. Sin embargo, se ha observado la presencia de plasma denso y frío característico del viento solar en dicha región (Rossi, 2015). Esto ocurre debido a que la interacción del IMF y el campo magnético terrestre conlleva a un fenómeno conocido como reconexión magnética, el cual es el principal responsable de la presencia de partículas de plasma de viento solar en la magnetósfera terrestre (Dungey, 1961; Sonnerup and Cahill Jr, 1967; Adhikari et al., 2019). Aunque la reconexión magnética sea la primera respuesta a dicho fenómeno, la KHI ha sido estudiada debido a que representa otro mecanismo que hace parte del transporte de plasma de viento solar en los flancos de la magnetósfera (Miura and Pritchett, 1982; Belmont and Chanteur, 1989; Nakamura et al., 2014; Dungey, 1955). Según varios estudios numéricos, dicho fenómeno de transporte puede darse por medio de la KHI si esta se encuentra lo suficientemente formada como para generar vórtices que se encuentren enrollados, con el fin de atrapar el plasma del viento solar (Hasegawa et al., 2004). Dichos vórtices se forman en la fase no lineal de la inestabilidad, lo que deja en claro que la KHI debe avanzar más allá de su fase lineal para poder ser parte del transporte de plasma en la magnetósfera. Asimismo, la KHI ha

ganado relevancia debido a que puede llegar a inducir reconexión magnética, facilitando aún más el transporte de masa y momento (Otto and Fairfield, 2000). Como consecuencia de este transporte de viento solar en la magnetósfera se presencian fenómenos como las tormentas geomagnéticas y las auroras boreales (Hallinan and Davis, 1970).

Además de sus propiedades de transporte, la KHI ha sido estudiada por representar una posible respuesta a otros fenómenos como la amplificación del campo magnético. Mediante un proceso de transformación de energía cinética a magnética, la KHI amplifica la energía magnética asociada al campo magnético (Pimentel and Lora-Clavijo, 2019; Zhang et al., 2009). Siendo más específicos, esta capacidad amplificadora de la KHI ha sido estudiada particularmente en la fusión de estrellas de neutrones, donde la KHI se forma cuando estas entran en contacto (Kiuchi et al., 2015). Múltiples estudios han demostrado que la KHI es el principal medio por el cual la energía magnética se amplifica cuando dos estrellas de neutrones colapsan (Palenzuela et al., 2021). En adición a esto, la KHI ha sido investigada en un nivel macroscópico como un medio para generar campos magnéticos a velocidades relativistas en jets astrofísicos (Nishikawa et al., 2014). A pesar de que esta propiedad de la KHI sea de interés en estudios relativistas, esta no ha sido objeto de estudio en el marco de la magnetósfera terrestre, aunque este fenómeno de amplificación pueda estar presente de igual forma en este entorno.

La KHI en la magnetósfera terrestre se ha reportado en latitudes bajas donde, generalmente, la tensión magnética no puede suprimir la inestabilidad (Guo et al., 2010). En tales latitudes se ha logrado observar dicha inestabilidad bajo condiciones de IMF hacia el norte (northward IMF) (Nykyri et al., 2017; Fairfield et al., 2000; Lin et al., 2014), así también como en presencia de IMF

hacia el sur (southward IMF) (Yan et al., 2014; Hwang et al., 2011). En latitudes altas, la KHI se ha formado en presencia de IMF hacia el oeste (dawnward o westward IMF) (Hwang et al., 2012), así como en presencia de IMF hacia el este (duskward o eastward IMF) (Ma et al., 2016), sin embargo, bajo estas condiciones se presenta con menor frecuencia.

Como se mencionó con anterioridad, la KHI y su dinámica en general, se estudia mediante la magnetohidrodinámica. La MHD es un conjunto de ecuaciones compuesto por las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de Maxwell, para poder comprender los fenómenos electromagnéticos y el comportamiento de los fluidos. Para poder analizar la KHI se hace necesario entender este modelo matemático y cada una de sus ecuaciones. Así, en la siguiente sección, se presenta el modelo de la MHD a usar, los términos de colisiones y los modelos experimentales de ionización y recombinación que se usarán durante este trabajo de grado.

3. Modelo de la MHD

3.1 Ecuaciones de la MHD

La magnetohidrodinámica es una rama de la física que estudia la dinámica de los fluidos conductores cuando se encuentran en presencia de campos eléctricos o magnéticos (Schnack, 2009). Matemáticamente, la MHD se describe mediante un conjunto de ecuaciones constituido por la conservación de la masa, el momento y la energía, y las ecuaciones de Maxwell, como la ley de Faraday y la ley solenoidal. Adicionalmente, también se encuentra la ley de Ohm. Generalmente, este conjunto de ecuaciones se suele describir como un acople entre las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales van a regir la dinámica de los fluidos; y las ecuaciones de Maxwell, las cuales se encargarán de los fenómenos electromagnéticos (Priest, 2014).

En particular, la MHD es sumamente útil cuando se estudia la dinámica del plasma⁵, ya que este es precisamente un fluido conductor. El plasma comúnmente está compuesto de partículas con carga, ya sea iones⁶ o electrones, y partículas neutras. Esta composición del plasma es la que permite tener en cuenta fenómenos como la ionización y la recombinación, los cuales son consecuencia directa de las interacciones entre las diferentes especies que componen el plasma. Para tener en cuenta dichas interacciones es necesario desarrollar el modelo de la MHD sin des-

⁵ El plasma es un gas ionizado, globalmente neutro, que presenta fenómenos colectivos.

⁶ Partículas de carga positiva.

preciar los términos de colisiones, y bajo un modelo de dos fluidos. En este modelo de dos fluidos se considera que un fluido está compuesto por las partículas con carga y el otro por las partículas neutras.

Para encontrar las ecuaciones que componen dicho modelo (y la MHD en general) se parte de la ecuación general integrada de Boltzmann, la cual está dada por (Goedbloed et al., 2019)

$$\partial_t (n_\alpha \langle g \rangle_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha \langle g \vec{v} \rangle_\alpha) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} g \rangle_\alpha = \partial_t (n_\alpha \langle g \rangle_\alpha)_{coll}, \quad (4)$$

donde el subíndice α hace referencia al tipo de partícula, n es la densidad de número, m es la masa, \vec{v} es la velocidad, \vec{F} son las fuerzas externas que actúan sobre el sistema y g son los momentos canónicos. Además, es necesario resaltar que los subíndices asociados al operador nabla (∇) representan cuales son las variables sobre las que aplica la derivada. Es decir, si se tiene $\nabla_{\vec{r}}$ se derivará respecto a las coordenadas espaciales; y si se tiene $\nabla_{\vec{v}}$ se derivará respecto a las componentes de la velocidad. Acá es importante tener en cuenta que el término de la parte derecha de la ecuación (4) denota la razón de cambio de la cantidad g por unidad de volumen debido a las colisiones, lo cual se expresa matemáticamente como

$$\partial_t (n_\alpha \langle g \rangle_\alpha)_{coll} = \int g \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V, \quad (5)$$

donde f es la función de distribución de las partículas, la cual depende de la posición espacial estas.

Los momentos canónicos representados por g son de suma importancia, ya que son estos

los que determinan si la ecuación es la conservación de la masa, del momento o de la energía. Estos momentos canónicos representan una propiedad física del sistema, en este caso, del plasma, y suelen ser funciones de la velocidad (\vec{v}) de las partículas. Estos están dados como (Goedbloed et al., 2019; Khomenko et al., 2014)

$$g = \begin{cases} \text{masa} & ; m_\alpha, \\ \text{momento} & ; m_\alpha \vec{v}_\alpha, \\ \text{energía} & ; \frac{1}{2} m_\alpha |\vec{v}_\alpha|^2. \end{cases} \quad (6)$$

Usando estos momentos canónicos dados por (6) y la ecuación integrada de Boltzmann (4) se encuentran las ecuaciones de la conservación de la masa, el momento y la energía (para mayores detalles ver apéndice 1), las cuales están dadas por

$$\partial_t(\rho_{m\alpha}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) = S_\alpha, \quad (7)$$

$$\rho_{m\alpha} \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_\alpha - \nabla_{\vec{r}} p_\alpha + \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha S_\alpha, \quad (8)$$

$$\frac{N}{2} \frac{Dp_\alpha}{Dt} + \frac{N+2}{2} p_\alpha \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_\alpha = -(\mathbb{M}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_\alpha - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha + H_\alpha, \quad (9)$$

donde ρ_m representa la densidad de masa, \vec{u} es la velocidad promedio de las partículas ($\langle \vec{v} \rangle$), \mathbb{M} es el tensor de viscosidad, p es la presión, N son los grados de libertad del sistema, \vec{q} es el flujo de calor, y los términos S , \vec{R} y H están asociados a las colisiones en el sistema. Este modelo se conoce comúnmente como el modelo de múltiples especies de la MHD.

La ecuación (7) es la conservación de la masa o ecuación de continuidad. Esta ecuación representa matemáticamente la conservación de la masa en un sistema, tanto temporal como espacialmente. Esta relaciona los cambios temporales de masa del sistema con el flujo de la misma a través de un volumen espacial, y los fenómenos como la ionización y la recombinación. La ecuación (8) representa la conservación del momento lineal del sistema. Físicamente, esta ecuación establece que la razón de cambio temporal del momento se debe a las fuerzas externas que actúan sobre el sistema, a la fuerza de viscosidad y presión, y a las colisiones del sistema. Esta ecuación de momento es también una expresión de la segunda ley de Newton. Asimismo, la ecuación (9) se conoce como la conservación de la energía del sistema o ecuación de evolución de la presión. Esta nos dice que la razón de cambio en el tiempo de la presión está relacionada con la viscosidad, el flujo de calor y las colisiones del sistema.

Si se tiene en cuenta ahora que el plasma está compuesto por tres tipos de partículas (iones, electrones y neutras) se tendrá entonces tres conjuntos de ecuaciones para la conservación de la masa, el momento y la energía. Sin embargo, el propósito de este trabajo es estudiar la dinámica de la KHI bajo el modelo de dos fluidos, en el cual un fluido está compuesto por las partículas neutras y otro por las partículas cargadas (para mayores detalles ver apéndice 2). Adicional a este modelo de dos fluidos, se tienen las ecuaciones de Maxwell, las cuales corresponden a la ley solenoidal y

la ley de Ampère. Finalmente, para obtener el modelo de dos fluidos, es importante tener en cuenta las fuerzas que actúan sobre los sistemas, donde se tiene que para el fluido cargado la fuerza está dada por la fuerza de Lorentz y la fuerza gravitacional de la forma

$$\vec{F}_c = \rho_c \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g}, \quad (10)$$

y para el fluido neutro, la fuerza corresponde simplemente a la fuerza gravitacional de la forma

$$\vec{F}_n = \rho_{mn} \vec{g}. \quad (11)$$

Sin embargo, a este modelo se debe aplicar la aproximación de pequeñas velocidades, la cual describe movimientos de bajas frecuencias. Estas velocidades, en comparación con la velocidad de la luz, son muy pequeñas, de manera que se tiene entonces que

$$\frac{u_c^2}{c^2} \ll 1. \quad (12)$$

Ahora, si se considera la ley de Ampère dada por

$$\mu_0 \vec{j} = \nabla_{\vec{r}} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}, \quad (13)$$

y se calcula la razón entre los términos de la parte derecha se tiene entonces que es aproximadamente (Schnack, 2009; Goedbloed et al., 2019; Priest, 2014)

$$\frac{|\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}|}{|\nabla_{\vec{r}} \times \vec{B}|} \sim \frac{E_0 \omega / c^2}{B_0 / L} \sim \frac{u_c \omega L}{c^2} \sim \frac{u_c^2}{c^2}, \quad (14)$$

donde se ha tenido en cuenta que $u_c = L/\tau$ y $\omega = 1/\tau$. Entonces, comparando (12) y (14) se encuentra que

$$\frac{|\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}|}{|\nabla_{\vec{r}} \times \vec{B}|} \ll 1, \quad (15)$$

lo que significa que el rotacional del campo magnético es mucho mayor que las corrientes de desplazamiento, permitiendo así que las corrientes de desplazamiento se desprecien. Entonces, la ley de Ampère queda de la forma

$$\mu_0 \vec{j} = \nabla_{\vec{r}} \times \vec{B}. \quad (16)$$

Ahora, si se toma la razón entre la fuerza eléctrica y la fuerza magnética se tiene (Schnack, 2009; Goedbloed et al., 2019; Priest, 2014)

$$\frac{|\rho_c \vec{E}|}{|\vec{j} \times \vec{B}|} \sim \frac{\tau u_c B}{B^2 / \mu_0 L} \sim \frac{\tau u_c \mu_0 L}{B} \sim \frac{\tau u_c \mu_0 L}{L \tau / \epsilon_0 u_c} \sim u_c^2 \mu_0 \epsilon_0 \sim \frac{u_c^2}{c^2}, \quad (17)$$

al comparar esta expresión con (12) se encuentra entonces

$$\frac{|\rho_c \vec{E}|}{|\vec{j} \times \vec{B}|} \ll 1, \quad (18)$$

lo que indica que la fuerza magnética es mucho mayor que la fuerza eléctrica, por lo que esta última se puede despreciar. Así, el modelo de la MHD para dos fluidos, considerando las ecuaciones de Maxwell, quedaría conformado por las ecuaciones para las partículas neutras dadas por

$$\partial_t(\rho_{mn}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn}\vec{u}_n) = S_n, \quad (19)$$

$$\rho_{mn} \frac{D\vec{u}_n}{Dt} = \rho_{mn}\vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_n - \nabla_{\vec{r}} p_n + \vec{R}_n - \vec{u}_n S_n, \quad (20)$$

$$\frac{N}{2} \frac{Dp_n}{Dt} + \frac{N+2}{2} p_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n = -(\mathbb{M}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + H_n, \quad (21)$$

y las ecuaciones para las partículas cargadas dadas por

$$\partial_t \rho_{mc} + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc}\vec{u}_c) = S_c, \quad (22)$$

$$\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc}\vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_c - \nabla_{\vec{r}} p_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c, \quad (23)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \frac{N+2}{2} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c = \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \eta j'^2 - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + H_c, \quad (24)$$

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{B} = 0, \quad (25)$$

$$\partial_t \vec{B} = \nabla_{\vec{r}} \times (\vec{u}_c \times \vec{B} - \eta \vec{j}), \quad (26)$$

$$\vec{j} = \sigma_0 (\vec{E} + \vec{u}_c \times \vec{B}). \quad (27)$$

El conjunto de ecuaciones compuesto por (19), (20), (21), (22), (23), (24) y (26) se pueden expresar en su forma conservativa como (para mayores detalles ver apéndice 3)

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho_{mn} \\ \rho_{mn} \vec{u}_n \\ E_n \end{bmatrix} + \nabla_{\vec{r}} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{mn} \vec{u}_n \\ \rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n + \mathbb{P}_n \\ (E_n \mathbb{I} + \mathbb{P}_n) \cdot \vec{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_n \\ \rho_{mn} \vec{g} + \vec{R}_n \\ \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} + H_n \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho_{mc} \\ \rho_{mc} \vec{u}_c \\ E_c \\ \vec{B} \end{bmatrix} + \nabla_{\vec{r}} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{mc} \vec{u}_c \\ \rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbb{I} + \mathbb{P}_c \\ [E_c \mathbb{I} + p_{Tc} \mathbb{I} + \mathbb{M}_c] \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{u}_c) \\ \vec{u}_c \vec{B} - \vec{B} \vec{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c \\ \rho_{mc} \vec{g} + \vec{R}_c \\ \rho_{mc} \vec{g} \cdot \vec{u}_c + H_c \\ -\eta \nabla_{\vec{r}} \times \vec{j} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Los vectores asociados a la derivada temporal son los vectores de variables conservativas. Los vectores asociados a la divergencia son los vectores de flujo del sistema. Finalmente, y los vectores que se encuentran al lado derecho de estas ecuaciones son los vectores fuentes. Esta forma conservativa es de vital importancia, ya que es esta representación matemática de la MHD la que permite resolver dichas ecuaciones mediante métodos computacionales. Nótese que en estos conjuntos de ecuaciones, los términos \vec{q}_n y \vec{q}_c no se han tenido en cuenta de manera directa, esto debido a que dichos términos se tendrán en cuenta en los términos de colisiones H_n y H_c respectivamente, como se verá a continuación.

3.2 Términos de colisiones

Los términos de colisiones en el modelo de dos fluidos están dados por S_n y S_c , para las colisiones asociadas a la conservación de la masa; \vec{R}_n y \vec{R}_c , para las colisiones asociadas a la conservación del momento; y H_n y H_c , para las colisiones asociadas a la conservación de la energía. La definición general de estos términos de colisiones está dada, matemáticamente, como

$$[\partial_t(n_\alpha \langle g \rangle_\alpha)]_{coll} = \int g \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V, \quad (30)$$

donde g representa los momentos canónicos dados por (6), y f es la función de distribución de las partículas. Esta definición está dada para cualquier partícula α . Así, para cada ecuación de conservación se encuentra entonces (Popescu, 2020)

$$S_\alpha = \partial_t(n_\alpha m_\alpha)_{coll} = m_\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V, \quad (31)$$

$$\vec{R}_\alpha = \partial_t(n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha)_{coll} = m_\alpha \int \vec{v}_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V, \quad (32)$$

$$H_\alpha = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right)_{coll} = m_\alpha \int \frac{v_\alpha^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V. \quad (33)$$

Estos términos de colisiones están asociados a la creación o destrucción de partículas (en el caso de las colisiones relacionadas a la conservación de la masa), y la pérdida o ganancia de momento o energía (para la conservación del momento y la energía) (Ballester et al., 2017). Dichos

términos, al sumarse sobre todas las especies, deben cumplir que

$$\sum_{\alpha} S_{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \vec{R}_{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} H_{\alpha} = 0, \quad (34)$$

lo cual se debe al principio de conservación total de la masa, el momento y la energía en el sistema. Mientras que los términos de colisiones para cada partícula, por lo general, no son cero o despreciables, para el sistema como un todo, si deben anularse, ya que físicamente se debe cumplir que la masa total, el momento total y la energía total del sistema no varía si no hay presencia de reacciones nucleares.

Al comparar las ecuaciones de conservación del momento y la energía, tanto para partículas neutras como cargadas, en su forma convencional y su forma conservativa, se encuentran algunas diferencias relacionadas principalmente con los términos de colisiones. Al mirar la ecuación (20) se encuentra que esta posee un término de colisiones adicional, el cual cuenta con la presencia de las colisiones dadas por la conservación de la masa, mientras que en su forma conservativa, esto no se presenta. De igual forma sucede para la ecuación (23). Por otro lado, revisando (21) se encuentra que esta posee una propagación de las colisiones, tanto de masa como de momento, los cuales no están presentes en la forma conservativa. Esto sucede nuevamente al comparar (24). Para las ecuaciones de momento, lo que sucede es que los términos $\vec{R}_n - \vec{u}_n S_n$ y $\vec{R}_c - \vec{u}_c S_c$ solamente tienen en cuenta las transferencias de momento dadas por variaciones en la velocidad de las partículas, como consecuencias de las colisiones; mientras que los términos \vec{R}_n y \vec{R}_c representan el intercambio de momento total. Por otro lado, para la conservación de la energía, sucede algo similar. Los

términos $H_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + \frac{1}{2}u_n^2 S_n$ y $H_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \frac{1}{2}u_c^2 S_c$ representan solo intercambio de energía cinética, mientras que los términos H_n y H_c representan intercambio de energía cinética, energía térmica y posibles emisiones de energía en forma de radiación (Ballester et al., 2017).

Las colisiones presentes en la conservación de la masa, es decir, S_n y S_c , están relacionadas con procesos de creación y destrucción de partículas. Esto se refiere a fenómenos como la ionización, donde partículas neutras se convierten en partículas con carga (perdiéndose una partícula neutra, mientras se ganan partículas con carga), o la recombinación, el cual es el proceso inverso a la ionización (se generan partículas neutras mientras se pierden partículas con carga) (Goldston and Rutherford, 1995). Estos términos deben cumplir (34), por lo que

$$S_n = -S_c. \quad (35)$$

Cuando se tienen la ionización y la recombinación, los términos de colisiones S_c y S_n se describen como (Popescu, 2020)

$$S_c = \rho_{mn}\Gamma^{ion} - \rho_{mc}\Gamma^{rec} \quad \text{y} \quad S_n = \rho_{mc}\Gamma^{rec} - \rho_{mn}\Gamma^{ion}, \quad (36)$$

donde Γ^{ion} está asociado a la ionización y Γ^{rec} a la recombinación. Esta definición de S_c y S_n se puede comprender al pensar que la ionización genera partículas cargadas, por lo que adiciona en la conservación de la masa de las partículas cargadas; mientras que la recombinación aniquila partículas con carga, por lo que resta a la conservación de la masa de las partículas cargadas. En el caso de S_n sucede el proceso inverso, la ionización restará partículas neutras mientras que la

recombinación las generará.

Por otro lado, las colisiones relacionadas con la conservación del momento, es decir, \vec{R}_n y \vec{R}_c , describen la transferencia de momento, ya sea por colisiones elásticas o inelásticas, por lo que

$$\vec{R}_\alpha = \vec{R}_\alpha^{elas} + \vec{R}_\alpha^{inel}. \quad (37)$$

Como se debe cumplir (34) se tiene que

$$\vec{R}_n = -\vec{R}_c. \quad (38)$$

Generalmente, las colisiones elásticas están dadas como (Leake et al., 2014)

$$\begin{aligned} \vec{R}_c^{elas} &= \alpha(\vec{u}_c - \vec{u}_n), \\ \vec{R}_n^{elas} &= \alpha(\vec{u}_n - \vec{u}_c), \end{aligned} \quad (39)$$

donde α es la frecuencia de colisiones elásticas entre partículas neutras y cargadas, y se encuentra dada por (Oliver et al., 2016)

$$\alpha = \frac{4}{3}\xi \sqrt{\frac{8k_B}{\pi} \left(\frac{T_c}{m_c} + \frac{T_n}{m_n} \right)} \rho_{mc} \rho_{mn}, \quad (40)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, T_c y T_n son las temperaturas de las partículas cargadas

y neutras, m_c y m_n son las masas de las partículas cargadas y neutras, y ξ es un parámetro relacionado a la intensidad de la interacción a través del área efectiva de colisión σ_{cn} , y está descrito matemáticamente como

$$\xi = \frac{\sigma_{cn}}{m_c + m_n}. \quad (41)$$

Para las colisiones inelásticas, que se encuentran relacionadas a los procesos de ionización y recombinación, se tiene (Murtas et al., 2022; Popescu, 2020)

$$\vec{R}_c^{inel} = \Gamma^{ion} \rho_{mn} \vec{u}_n - \Gamma^{rec} \rho_{mc} \vec{u}_c \quad \text{y} \quad \vec{R}_n^{inel} = \Gamma^{rec} \rho_{mc} \vec{u}_c - \Gamma^{ion} \rho_{mn} \vec{u}_n. \quad (42)$$

Así, los términos de colisiones generales para la ecuación de conservación del momento, es decir, \vec{R}_c y \vec{R}_n , quedan de la forma

$$\vec{R}_c = \Gamma^{ion} \rho_{mn} \vec{u}_n - \Gamma^{rec} \rho_{mc} \vec{u}_c + \alpha(\vec{u}_n - \vec{u}_c), \quad (43)$$

$$\vec{R}_n = \Gamma^{rec} \rho_{mc} \vec{u}_c - \Gamma^{ion} \rho_{mn} \vec{u}_n + \alpha(\vec{u}_c - \vec{u}_n). \quad (44)$$

Respecto a las colisiones relacionadas con la conservación de la energía, es decir, H_n y H_c , se encuentra que estos describen transferencia de energía, ya sea cinética o térmica. Debido a la conservación total de la energía del sistema dado por (34) se tiene que

$$H_n = -H_c. \quad (45)$$

Al igual que en los términos de colisiones de momento, las colisiones de energía están dadas por colisiones elásticas e inelásticas. Las colisiones elásticas están relacionadas a la transferencia de energía debido a choques entre partículas, mientras las colisiones inelásticas se relacionan con la propagación de los términos de colisiones de momento y de masa. Entonces

$$H_\alpha = H_\alpha^{elas} + H_\alpha^{inel}. \quad (46)$$

Las colisiones elásticas de energía están dadas como (Draine, 1986; Zhang et al., 2021; Popescu, 2020)

$$H_c^{elas} = \frac{1}{2} \alpha |\vec{u}_c - \vec{u}_n|^2 - \alpha \vec{u}_c \cdot (\vec{u}_c - \vec{u}_n) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m_c} \alpha (T_n - T_c), \quad (47)$$

$$H_n^{elas} = \frac{1}{2} \alpha |\vec{u}_n - \vec{u}_c|^2 - \alpha \vec{u}_n \cdot (\vec{u}_n - \vec{u}_c) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m_c} \alpha (T_c - T_n), \quad (48)$$

donde γ es la constante adiabática y toma el valor de $\gamma = 5/3$. Por otro lado, las colisiones inelásticas están dadas por

$$H_c^{inel} = \frac{1}{2} \Gamma^{ion} \rho_{mn} u_n^2 - \frac{1}{2} \Gamma^{rec} \rho_{mc} u_c^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m_n} (\rho_{mn} T_n \Gamma^{ion} - \rho_{mc} T_c \Gamma^{rec}), \quad (49)$$

$$H_n^{inel} = \frac{1}{2}\Gamma^{rec}\rho_{mc}u_c^2 - \frac{1}{2}\Gamma^{ion}\rho_{mn}u_n^2 + \frac{1}{\gamma-1}\frac{k_B}{m_n}(\rho_{mc}T_c\Gamma^{rec} - \rho_{mn}T_n\Gamma^{ion}). \quad (50)$$

Entonces, los términos de colisiones generales para la ecuación de conservación de la energía, es decir, H_c y H_n , quedan de la forma

$$\begin{aligned} H_c \alpha \vec{u}_c \cdot (\vec{u}_n - \vec{u}_c) + &= \frac{1}{2}\alpha|\vec{u}_n - \vec{u}_c|^2 + \frac{1}{\gamma-1}\frac{k_B}{m_c}\alpha(T_n - T_c) \\ &- \frac{1}{2}\Gamma^{rec}\rho_{mc}u_c^2 + \frac{1}{2}\Gamma^{ion}\rho_{mn}u_n^2 - \frac{1}{\gamma-1}\frac{k_B}{m_n}(\rho_{mc}T_c\Gamma^{rec} - \rho_{mn}T_n\Gamma^{ion}), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} H_n = \alpha \vec{u}_n \cdot (\vec{u}_c - \vec{u}_n) + &\frac{1}{2}\alpha|\vec{u}_n - \vec{u}_c|^2 + \frac{1}{\gamma-1}\frac{k_B}{m_c}\alpha(T_c - T_n) \\ &+ \frac{1}{2}\Gamma^{rec}\rho_{mc}u_c^2 - \frac{1}{2}\Gamma^{ion}\rho_{mn}u_n^2 + \frac{1}{\gamma-1}\frac{k_B}{m_n}(\rho_{mc}T_c\Gamma^{rec} - \rho_{mn}T_n\Gamma^{ion}). \end{aligned} \quad (52)$$

En estas ecuaciones, el primer término representa una propagación de los términos de colisiones elásticas de momento, mientras que el segundo y tercer término representan un intercambio de energía térmica, correspondiente a los términos \vec{q}_n y \vec{q}_c o flujo de calor. Finalmente, los últimos términos corresponden a la propagación de los fenómenos de ionización y recombinación.

3.2.1 Modelo de ionización y recombinación

Los fenómenos de ionización y recombinación son procesos físicos asociados a las colisiones de las diferentes especies del plasma. Estos fenómenos pertenecen al grupo de procesos conocidos como conversión de especies. Por un lado, la ionización ocurre cuando una partícula

de carga negativa (electrón) impacta una partícula neutra (sea un átomo o molécula de carga neutra), generándose así una nueva partícula que ha sido ionizada debido al impacto que genera una pérdida de electrones. Como consecuencia, el número de partículas con carga habrá aumentado, mientras que el número de partículas neutras habrá disminuido. Por otro lado, la recombinación ocurre cuando una partícula de carga negativa (electrón) impacta un ión de carga positiva, generándose así una partícula de carga neutra que ha ganado un electrón y que libera energía en forma de radiación electromagnética. Debido a esto, el número de partículas con carga habrá disminuido, mientras que el número de partículas neutras habrá aumentado (ver figura 2) (Goldston and Rutherford, 1995; Knoll, 2010).

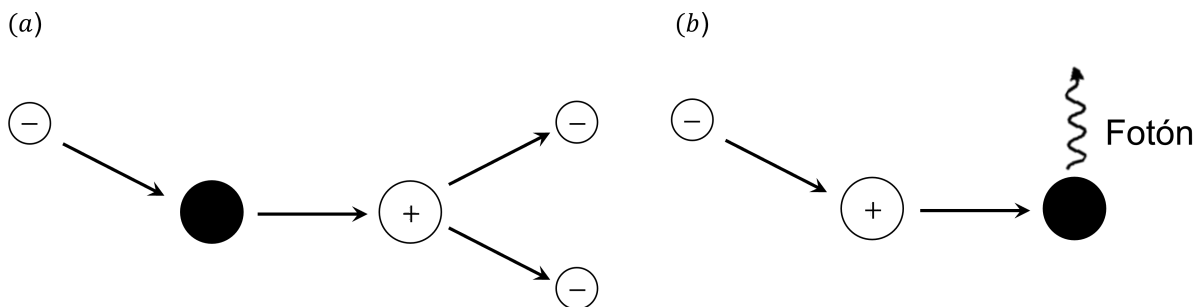


Figura 2

Procesos de ionización y recombinación. (a) Electrón impactando una partícula neutra, (b) electrón impactando una partícula de carga positiva. Recuperado de: Goldston and Rutherford (1995). Modificado por: Autor.

De esto se puede comprender que la ionización y la recombinación son fenómenos que generan, de cierta forma, partículas, cumpliendo con la conservación de la masa del sistema. Además, estos fenómenos son procesos inversos entre sí, es decir, la ionización es el proceso contrario a la recombinación y viceversa; mientras la ionización genera partículas con carga, la recombinación

las destruye, y mientras la ionización destruye partículas neutras, la recombinación las genera.

En particular, los fenómenos de ionización y recombinación no tienen un modelo matemático teórico que permita calcular de manera numérica dichos términos. Sin embargo, se han desarrollado modelos experimentales para estos fenómenos, basados en el estudio del átomo de Hidrógeno. Para la ionización se tiene (Cox and Tucker, 1969; Moore and Fung, 1972)

$$\Gamma^{ion} = n_c \left[2.34 \cdot 10^{-14} \left(\beta^{-1/2} e^{-\beta} \right) \right] [s^{-1}], \quad (53)$$

y para la recombinación (Cox and Tucker, 1969; Moore and Fung, 1972)

$$\Gamma^{rec} = n_c \left[5.20 \cdot 10^{-20} \sqrt{\beta} \left(0.4288 + 0.5 \ln \beta + 0.4698 \beta^{-1/3} \right) \right] [s^{-1}], \quad (54)$$

donde $\beta = A \cdot \phi_{ion} / T_e^*$. En esta definición de β , $\phi_{ion} = 13.6[eV]$, T_e^* es la temperatura de los electrones, y A es una constante que tiene en cuenta la influencia de los iones pesados y toma el valor $A = 0.6$ (Maneva et al., 2017).

4. Resultados

En esta sección se presentan los resultados encontrados. Esta sección se divide en tres fases principales. En una primera sección, se estudia la formación de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz con el fin de caracterizar su dinámica y ciertas magnitudes físicas. Además, en esta fase se busca determinar que el comportamiento de la inestabilidad es correcto en comparación con investigaciones previas. Seguido a esto, se encuentra una segunda fase, en la cual se estudia la KHI teniendo en cuenta las colisiones elásticas e inelásticas, con el fin de determinar cual es el impacto de tener en cuenta dichos fenómenos en la dinámica de la KHI. Finalmente, como una aplicación, se estudia la formación de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en la magnetósfera de la Tierra, teniendo en cuenta tanto colisiones elásticas como inelásticas.

4.1 KHI en plasma totalmente ionizado

Para el estudio de la KHI en un fluido totalmente ionizado, se analizaron diferentes configuraciones, siendo estas tres valores distintos para el beta plasma ($\beta = 0.02$, $\beta = 0.05$ y $\beta = 0.1$). Con el fin de analizar los efectos del beta plasma en la inestabilidad, se estudiaron magnitudes físicas como la energía magnética y cinética, y el crecimiento de la perturbación inicial aplicada al sistema. Para este primer análisis se tomó una inestabilidad formada en dos flujos magnetohidrodinámicos con velocidades diferentes (ver figura 3), siendo estas $v_t = 0.5$ para la parte superior y $v_b = -0.5$ para la parte inferior; la densidad de masa se tomó uniforme en todo el espacio con un valor $\rho_m = 1.0$; finalmente, la presión y campo magnético también se tomaron uniformes en todo el espacio, dando a la presión un valor de $p_c = 0.6$. Respecto a las condiciones de frontera, se

tomaron de flujo saliente en el eje y y periódicas en el eje x . La perturbación aplicada al sistema se dio en la componente y de la velocidad de la forma

$$v_y = v_{y0} \sin(k\pi x) e^{-(y/0.1)^2}, \quad (55)$$

donde k indica el número de modos de Kelvin-Helmholtz y se tomó como 2, y $v_{y0} = 0.01v_t$.

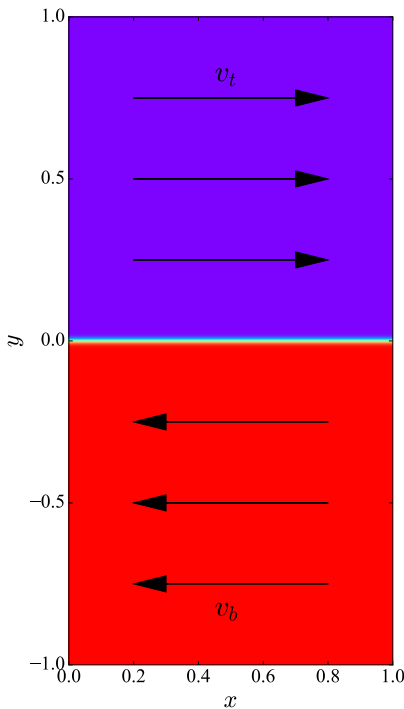


Figura 3

Representación gráfica de los dos fluidos. La parte superior representa el fluido con velocidad v_t y la parte inferior al fluido con velocidad v_b .

En la figura 4 se muestra la evolución de la KHI con un modo de Kelvin-Helmholtz y un valor de beta plasma de $\beta = 0.02$. Al observar dicha figura se puede ver como la perturbación inicial varía la densidad de masa en la frontera entre los dos fluidos. Esta deformación va creciendo

y se forman dos zonas de menor densidad, que poco a poco van formando el vórtice característico de la inestabilidad, el cual es simétrico y tiene enrollamiento. Finalmente, dicho vórtice se destruye llevando al sistema a un estado turbulento. Se puede observar el doblamiento de las líneas de campo magnético.

Al incrementar el valor del parámetro β a 0.05 (ver figura 5) se observa como la perturbación inicial crece y lleva a la formación de un vórtice que posee menor enrollamiento al presentado en el caso de $\beta = 0.02$. Igualmente, los filamentos se separan con mayor facilidad llevando al sistema a un estado turbulento de manera más rápida. Es claro que en este caso el vórtice no se forma de manera completa como en el caso de $\beta = 0.02$. Se observa también el enrollamiento de las líneas de campo de acuerdo a la distribución de la densidad de masa.

Finalmente, al analizar la formación de la KHI con un parámetro $\beta = 0.1$ (ver figura 6), se aprecia como la perturbación crece en menor medida y se intenta formar un vórtice característico, sin embargo, este es suprimido con facilidad, por lo que rápidamente se disipa, además de poseer muy poco enrollamiento. Nótese también que el máximo de densidad de masa en este caso es menor al presentado en los casos anteriores. Nuevamente se presenta el respectivo enrollamiento de las líneas de campo magnético.

Analizando las figuras 4, 5 y 6 se encuentra que la inestabilidad posee un mejor enrollamiento y una mejor formación con $\beta = 0.02$, mientras que a mayor β la inestabilidad no se forma completamente y es suprimida con facilidad. Esto tiene mucho sentido si se piensa que el parámetro β es directamente proporcional a la presión magnética, entonces, al tener mayor β se tendrá mayor presión magnética, la cual suprime el crecimiento de la inestabilidad. Respecto a la densidad

de masa, se observan zonas de menor densidad en el caso de $\beta = 0.1$.

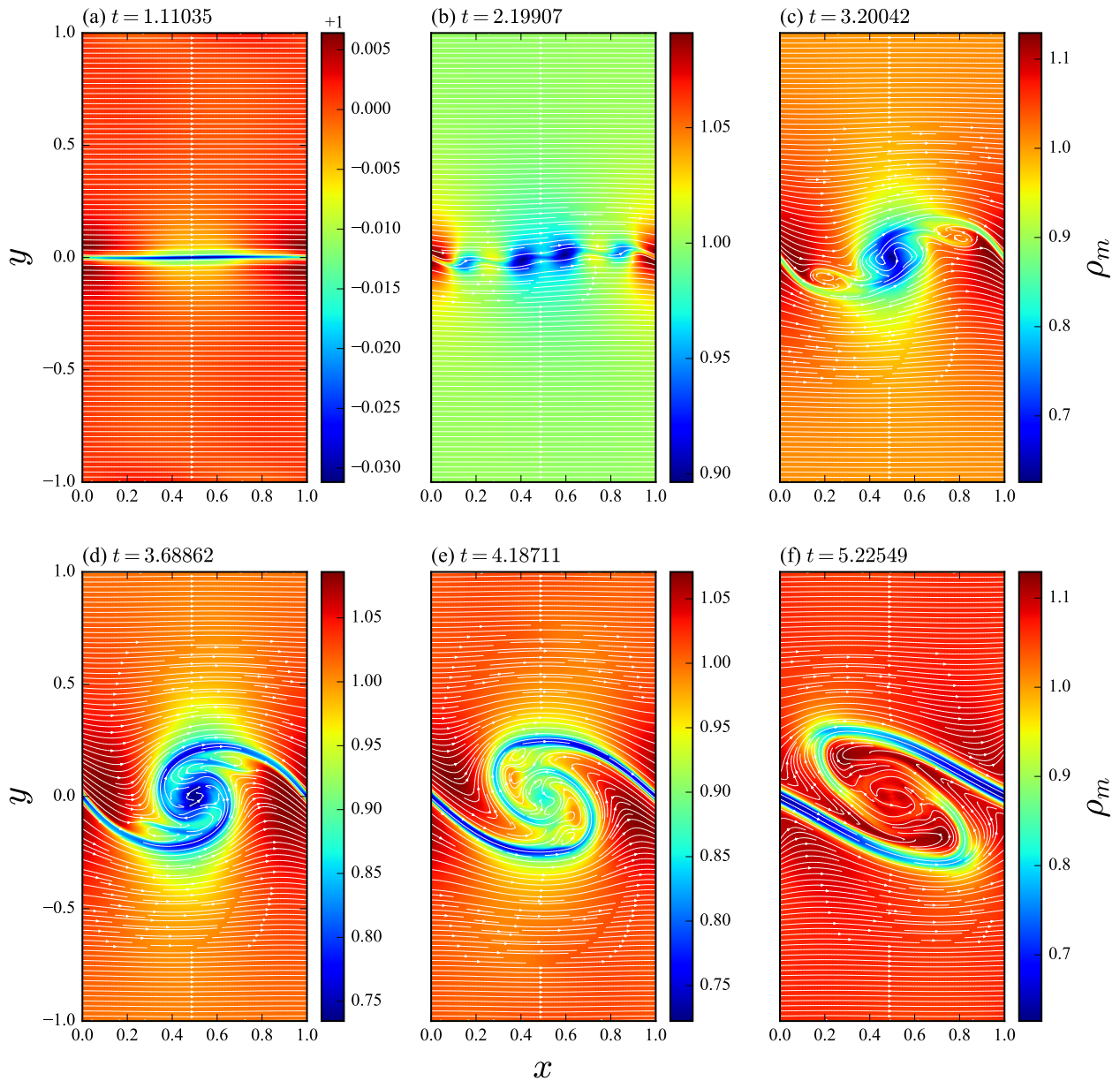
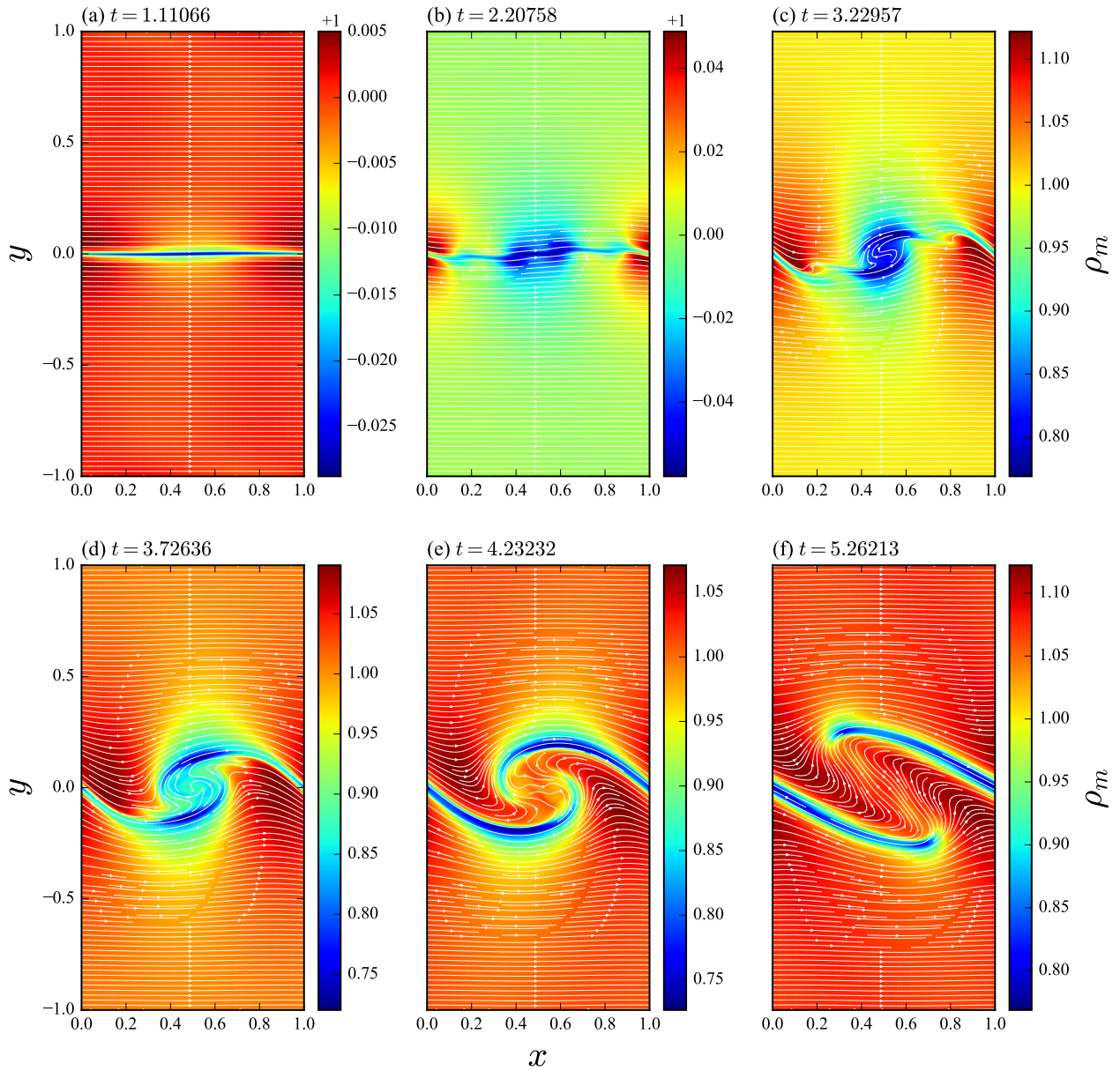


Figura 4

Evolución de la KHI con $\beta = 0.02$. (a)-(c) Deformación de la frontera y crecimiento de la perturbación inicial, formación de una inestabilidad de menor tamaño. (d)-(f) Crecimiento del vórtice, enrollamiento del mismo y entrada a un estado turbulento.


Figura 5

Evolución de la KHI con un modo de KH y $\beta = 0.05$. (a)-(c) Deformación de la frontera y crecimiento de la perturbación inicial, formación de una inestabilidad de menor tamaño. (d)-(f) Crecimiento del vórtice con poco enrollamiento y destrucción del mismo.

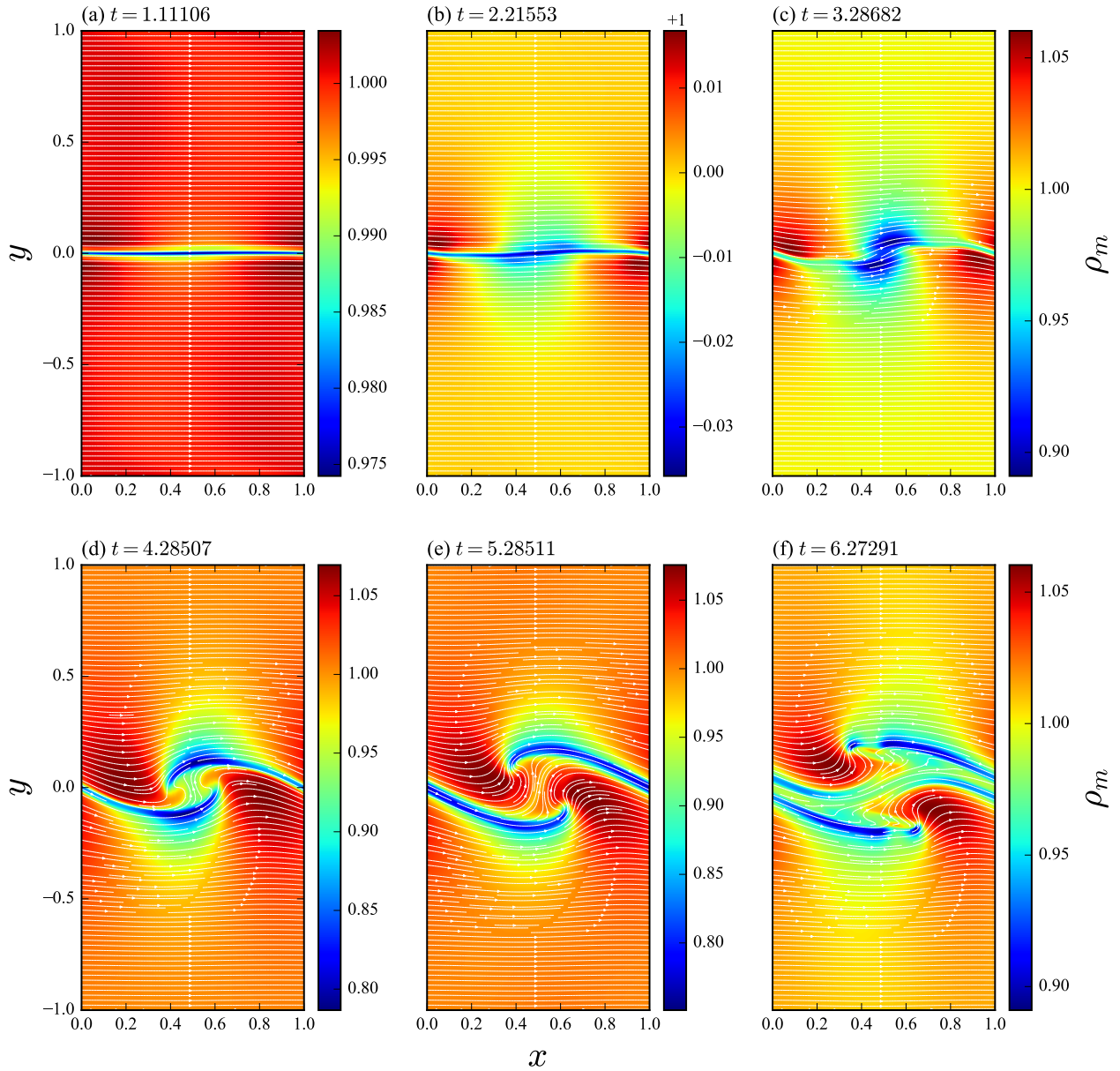
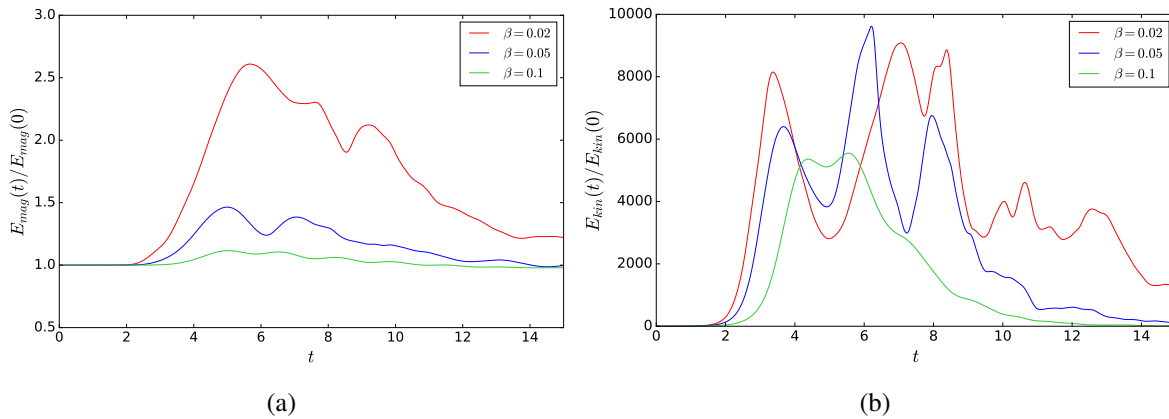


Figura 6

Evolución de la KHI con un modo de KH y $\beta = 0.1$. (a)-(c) Deformación de la frontera y crecimiento de la perturbación inicial. (d)-(f) Comienza la formación de un vórtice de tamaño pequeño que se destruye rápidamente.

Ahora, en la figura 7 se presenta la amplificación de la energía magnética ($E_{mag}(t)/E_{mag}(0)$) y la amplificación de la energía cinética ($E_{kin}(t)/E_{kin}(0)$) en función del tiempo para los diferentes parámetros de β . En la figura 7(a) se observa con claridad que un valor menor de β permite una mayor amplificación de la energía magnética, teniéndose que para $\beta = 0.02$ la energía magnética tuvo su máximo en un valor cercano a 2.5 veces la energía inicial, mientras que para $\beta = 0.1$ apenas aumentó en 1.1 veces la energía inicial. Este resultado concuerda con otras investigaciones como Pimentel and Lora-Clavijo (2019), donde se estudia la influencia de la polarización magnética en la formación de la KHI para diferentes β , encontrando que a menor beta plasma, la amplificación de la energía magnética es mayor. De igual forma, es posible notar de 7(b) que la energía cinética es mayor para valores menores de β . Esto se puede explicar si se tiene en cuenta que, a menor β el campo magnético es menor, por lo que las partículas se verán menos retenidas por la tensión magnética. Otro resultado que se puede apreciar de ambas gráficas es que el tiempo en el que la energía cinética y magnética decaen a valores cercanos al inicial es mayor para el $\beta = 0.02$. En adición a esto, se observa que, a menor beta plasma, la inestabilidad se comienza a formar en un menor tiempo, hecho que se puede corroborar observando el tiempo en el que la energía magnética comienza a aumentar. Asimismo, a menor beta plasma la energía magnética comienza a decaer en tiempos posteriores al caso de mayor beta plasma. Si se comparan los tiempos en los que la energía magnética comienza a aumentar contra los tiempos en los que la energía cinética disminuye, se puede observar que son bastante similares, lo que permite concluir que parte de la energía cinética que se pierde se ve reflejada en una conversión en energía magnética.

En la figura 8 se presenta la amplitud de la perturbación (Δv_y) como función del tiempo.


Figura 7

Amplificación de la energía magnética (izquierda) y cinética (derecha) debido la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz para diferentes valores de β . La energía magnética en función del tiempo se calcula como $E_{mag}(t) = 0.5 \int B(t)^2 dA$.

Aquí se aprecia la existencia de una fase lineal en la formación de la inestabilidad. Al comparar los tiempos presentados en las figuras 4, 5 y 6 con sus correspondientes β en la figura 8, se puede observar que el inicio de la formación del vórtice se da cuando la fase lineal acaba. Ahora, comparando los tiempos de 8 con 7(a) se aprecia que el crecimiento lineal de la perturbación acaba cuando la energía magnética comienza a aumentar. Esto permite concluir que la amplificación de la energía magnética está asociada a la fase no lineal de la inestabilidad y que a su vez, esta amplificación corresponde con la formación del vórtice. Además, se observa que la fase lineal del crecimiento de la inestabilidad comienza en tiempos menores para los casos de $\beta = 0.02$, lo cual va de acuerdo al resultado similar encontrado por Bucciantini and Del Zanna (2006), donde se estudia el efecto de la componente toroidal y poloidal del campo magnético; al analizar la amplitud de la perturbación, se encuentra que mayor β el régimen lineal de la inestabilidad tiene mayor duración. En adición a esto, si se observan los decaimientos para cada uno de los valores de β , se

aprecia que para mayor β , la amplitud de la perturbación decae con mayor rapidez, ocurriendo lo contrario para menor β . Esto conlleva a que, a mayor beta plasma, la inestabilidad se ve inhibida con mayor facilidad, provocando que la inestabilidad se deshaga más rápido, y que el sistema entre nuevamente en un estado estable en un tiempo más corto.

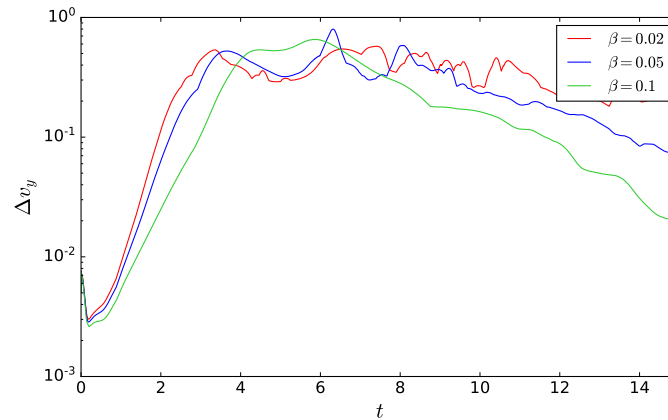


Figura 8

Amplitud de la perturbación como función del tiempo para diferentes valores de β . La amplitud de la perturbación se calcula como $\Delta v_y = 0.5(v_{y\max} - v_{y\min})$.

4.2 KHI en plasma parcialmente ionizado

Para el estudio de la KHI en un fluido parcialmente ionizado se tomó un valor de $\beta = 0.02$ y una densidad de masa estratificada con valores $\rho_m = 1.0$ para la parte superior y $\rho_m = 0.5$ para la parte inferior. Adicional a esto, se tomaron dos modos de Kelvin-Helmholtz. Por otro lado, el campo magnético y la presión se dejaron uniformes en el espacio, con presión $p_c = 0.6$. Las velocidades, las condiciones de frontera y la perturbación se tomaron iguales que la fase anterior, tomando $k = 4$ con el fin de generar dos modos de Kelvin-Helmholtz. Los datos iniciales, tanto para el fluido cargado como el fluido neutro, eran los mismos. El propósito de esta fase de la

investigación es determinar el comportamiento de la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz cuando se forma en fluidos parcialmente ionizados, y a su vez, determinar el impacto de los fenómenos de ionización y recombinación. Es por esto que esta fase se divide en dos partes: la primera, donde se estudia la KHI teniendo en cuenta solo las colisiones elásticas, es decir, las colisiones de masa son nulas; y la segunda, donde se estudia la KHI teniendo en cuenta solo las colisiones inelásticas, es decir, las colisiones dadas por la ionización y la recombinación.

4.2.1 Colisiones elásticas

Para determinar el impacto de las colisiones elásticas en la KHI se analizaron distintas magnitudes físicas, como la densidad de masa, la vorticidad del sistema, la amplificación de la energía magnética, la energía cinética, y la amplitud de la perturbación. Esto se realizó para tres valores distintos del parámetro ξ , siendo estos $\xi = 10^{-2}$, 1, y 100. En la figura 9 se pueden observar la densidad de masa para el fluido neutro (parte superior), la densidad de masa para el fluido cargado (parte media), y diferencia entre dichas densidades (parte inferior), en un mismo tiempo, para diferentes valores del parámetro de colisiones ξ . Observando las figuras 9(a), 9(d) y 9(g) correspondientes a un valor $\xi = 10^{-2}$, se encuentra que la densidad de masa de las partículas neutras tiene una distribución diferente a la de las partículas cargadas. La figura 9(a) muestra dicha densidad para las partículas neutras, donde se nota que los modos de KH no se forman en su totalidad, mientras que en la figura 9(d), donde se muestra dicha densidad para las partículas cargadas, los modos de KH se forman y tienen un buen enrollamiento. Esto lleva a que, en la figura 9(g), se observe una gran diferencia entre las densidades de masa.

Ahora, respecto a las figuras 9(b), 9(e) y 9(h) correspondientes a un valor $\xi = 1$, se observa

que, para el caso de partículas neutras (ver figura 9(b)), la inestabilidad empieza a tener una forma más completa, es decir, se forma de una mejor manera, incluso llegando a tener un poco de enrollamiento. Esto conlleva a que exista una similitud más cercana con la densidad de masa para las partículas cargadas (ver figura 9(e)). Esta similitud se corrobora al observar 9(h), donde vemos que las zonas que tenían una mayor diferencia en la densidad de masa se han reducido, además de que la magnitud observada en la barra de colores también se ha reducido considerablemente, tendiendo a ser valores cercanos a cero.

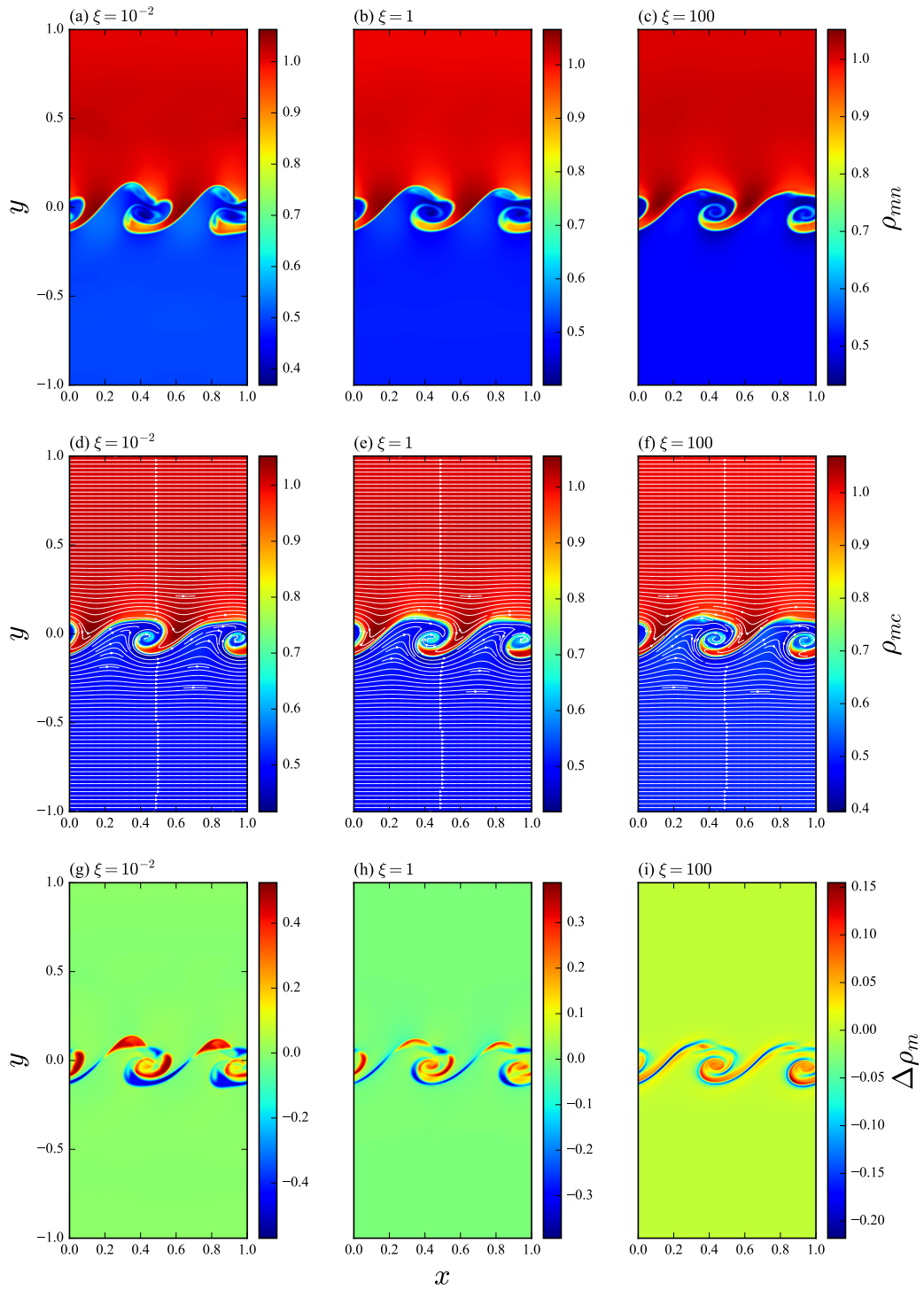


Figura 9

(a)-(c) Densidad de masa para fluido neutro, (d)-(f) densidad de masa para fluido cargado, (g)-(h) diferencia de densidad de masa entre fluido cargado y neutro.

Finalmente, para el caso de $\xi = 100$, el cual se representa en las figuras 9(c), 9(f) y 9(i), se encuentra que en la densidad de masa de las partículas neutras se forman los vórtices característicos de la KHI con mejor enrollamiento, y con cierta similitud a los vórtices formados en la densidad de masa de las partículas cargadas (ver figura 9(f)). Nuevamente, al observar 9(i) se encuentra que la diferencia entre las densidades de masa se ha reducido, tendiendo a ser cada vez más cero.

Ahora, en la figura 10 se muestra la vorticidad del sistema para partículas neutras (parte superior), partículas cargadas (parte media) y la diferencia entre dichas vorticidades (parte inferior), para los tres valores del parámetro de colisiones ξ mencionados con anterioridad. Respecto a las figuras 10(a) y 10(b), se encuentra que la vorticidad relacionada a las partículas neutras es un poco asimétrica y deforme, lo cual permite corroborar la casi nula formación de vórtices que se presentaba en las densidades de masa, sin embargo, para 10(c) se observa una vorticidad más congruente y formada, lo que permite concluir que los modos de KH se pudieron formar de una mejor manera.

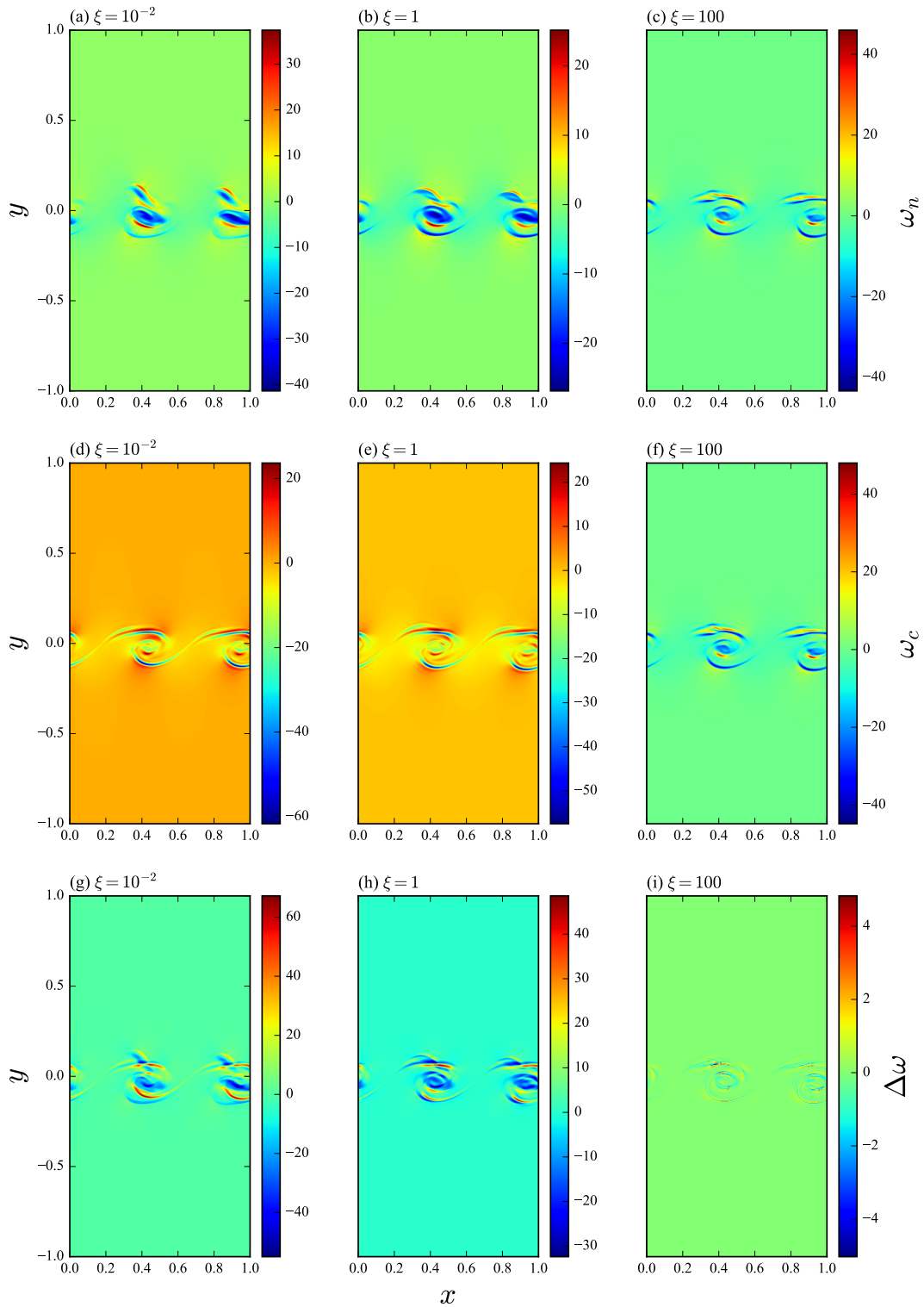


Figura 10

(a)-(c) Vorticidad para fluido neutro, (d)-(f) vorticidad para fluido cargado, (g)-(h) diferencia de vorticidad entre fluido cargado y neutro.

En el caso de las partículas cargadas, dadas por las figuras 10(d)-(e), se encuentra que dicha vorticidad es congruente con la completa formación de los modos de KH en la densidad de masa, y con el enrollamiento de los mismos. Si se tuviesen solamente las gráficas de vorticidad del sistema, se podría afirmar con exactitud que los vórtices característicos de la KHI se formaron con buen enrollamiento en el fluido cargado. El hecho de que estos vórtices se hayan formado de una mejor manera en las partículas cargadas se debe principalmente a que estas se ven afectadas en gran medida por el campo magnético, mientras que las partículas neutras no. Ahora, esto es algo que caracteriza las vorticidades para los parámetros $\xi = 10^{-2}$ y $\xi = 1$ donde las colisiones son relativamente bajas. Sin embargo, para $\xi = 100$, la vorticidad, tanto de neutras como de cargadas, es bastante similar debido a que, de manera indirecta, las partículas neutras se vieron afectadas por el campo magnético como consecuencia de las colisiones con las partículas cargadas.

Con todo esto, al observar las figuras 10(g)-(i), se puede notar que la diferencia entre las vorticidades tiende a ser cero al aumentar las colisiones, lo que permite concluir que los sistemas de partículas cargadas y neutras tuvieron comportamientos similares. Esto es un resultado completamente coherente, ya que, al haber más colisiones entre las partículas del sistema, se espera que las dinámicas individuales tiendan a ser iguales entre sí, llevando a que la diferencia de parámetros como la vorticidad y la densidad de masa entre el fluido neutro y el cargado tiendan a ser cero.

Respecto a la amplificación de la energía magnética, la cual se muestra en la figura 11, se encuentra que, para todos los valores del parámetro de colisiones, la energía magnética empieza a aumentar en tiempos similares, esto permite concluir que las colisiones entre las partículas no afectan el tiempo de formación de la inestabilidad de manera considerable. Adicionalmente, se

puede notar que la amplificación de dicha energía magnética es mayor para $\xi = 100$ y menor para $\xi = 10^{-2}$, es decir, entre más colisiones ocurran entre partículas neutras y cargadas, la energía magnética se amplifica en mayor medida. Este resultado es algo completamente esperado debido a que, entre más colisiones sucedan, las partículas neutras pueden transferir más energía cinética a las partículas cargadas, permitiendo entonces que dicha energía cinética se transforme en energía magnética adicional en el sistema.

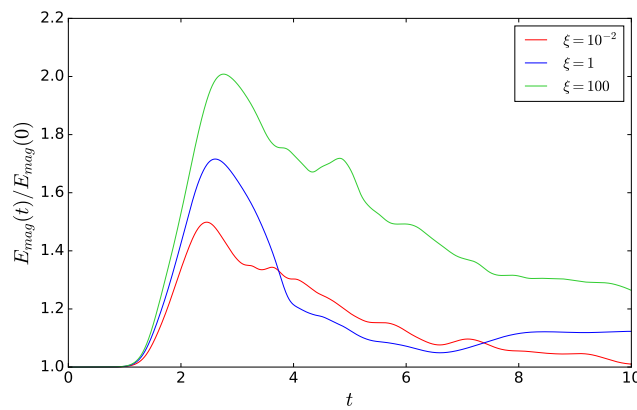


Figura 11

Amplificación de la energía magnética para diferentes valores de ξ en función del tiempo.

Este último resultado no solo se puede corroborar al observar la amplificación de la energía magnética, también se puede verificar al observar las figuras 12(a) y 12(b), las cuales muestran la energía cinética del fluido cargado y neutro respectivamente. Para el caso del fluido cargado, vemos como la energía cinética aumenta a medida que el parámetro de colisiones es mayor, mientras que para el fluido neutro ocurre lo contrario, a mayor colisiones, menor es la energía cinética. Esto se traduce como una transferencia de energía cinética de partículas neutras a partículas cargadas, que a su vez se ve reflejado en la amplificación de la energía magnética, como se mencionó an-

teriormente. En adición a esto, se puede observar como, para el caso de $\xi = 100$, el valor de la $E_{kin}(t)/E_{kin}(0)$, tanto para partículas cargadas como neutras, ronda entre los 4000 y 5000, confirmando nuevamente que los dos sistemas tienden a tener un estado similar debido a las colisiones entre las partículas.

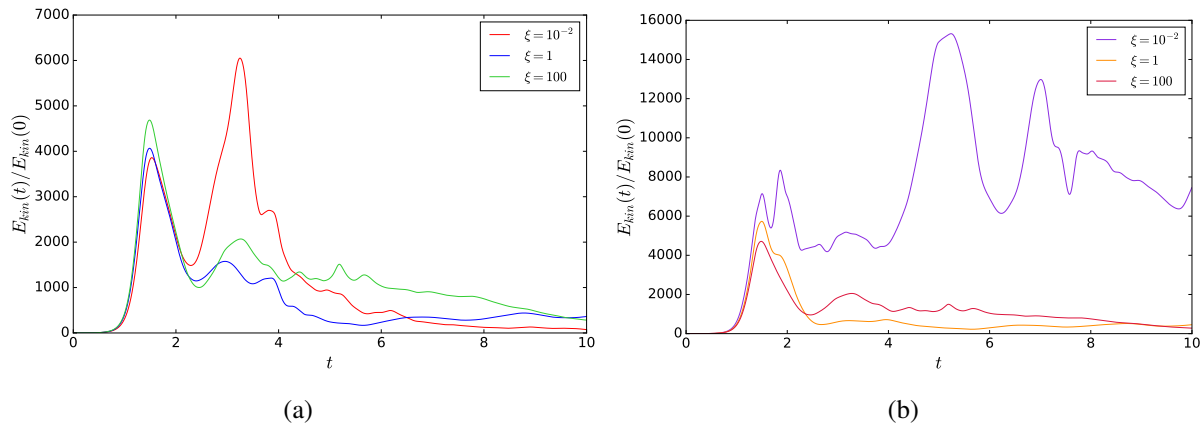
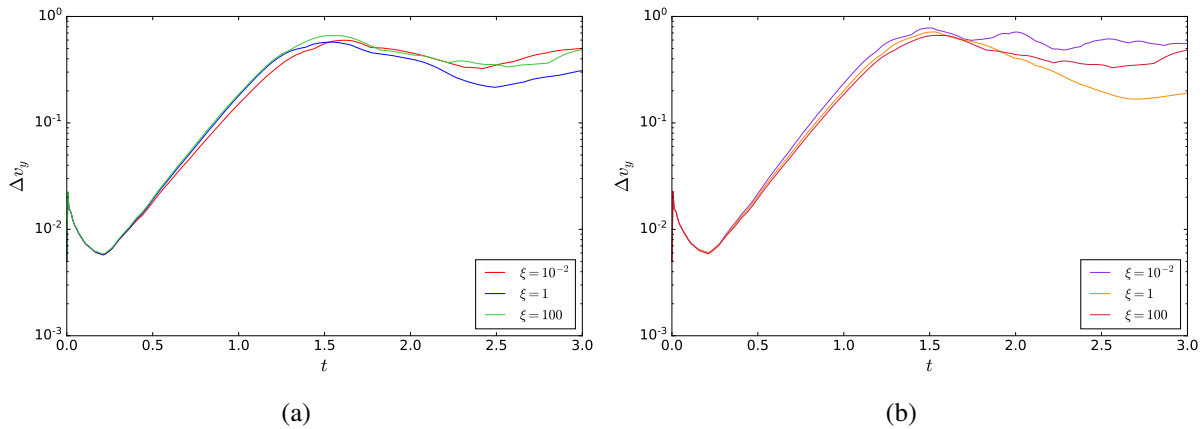


Figura 12

Amplificación de la energía cinética para el fluido cargado (izquierda) y para el fluido neutro (derecha) debido a la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz para diferentes valores de ξ en función del tiempo.

Finalmente, respecto a la amplitud de la perturbación (ver figura 13), se encuentra que el sistema, tanto para partículas cargadas (13(a)) como para partículas neutras (13(b)), pasa por una fase lineal, asociada a la formación de la inestabilidad, y una fase no lineal, asociada a la formación de los vórtices de la KHI y la entrada a un estado turbulento. Adicionalmente, se observa que, a mayor valor de ξ , la inestabilidad se forma un poco más rápido en el caso del fluido cargado. Por otro lado, en el caso del fluido neutro ocurre un efecto inverso. Sin embargo, estas diferencias en la entrada a la fase lineal no son muy grandes, por lo que se puede concluir que las colisiones no afectan en gran medida al tiempo de formación de la KHI.


Figura 13

Amplitud de la perturbación para el fluido cargado (izquierda) y para el fluido neutro (derecha) para diferentes valores de ξ en función del tiempo.

4.2.2 Colisiones inelásticas

Con el fin de determinar el impacto de los fenómenos de ionización y recombinación, se estudió la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz bajo los efectos de dichos fenómenos, sin tener en cuenta las colisiones elásticas en el sistema. Para esto se implementó en el código MAGNUS (Wandurraga, 2022) las ecuaciones de las colisiones inelásticas dadas por (36), (42), (49) y (50), donde los términos Γ^{ion} y Γ^{rec} están dados por (53) y (54) respectivamente. Estas ecuaciones se adecuaron de manera que se adicionaron dos términos, los cuales se denominaron “frecuencia de recombinación” y “frecuencia de ionización” y se representan como Ω_{rec} y Ω_{ion} respectivamente, los cuales se relacionan mediante la expresión

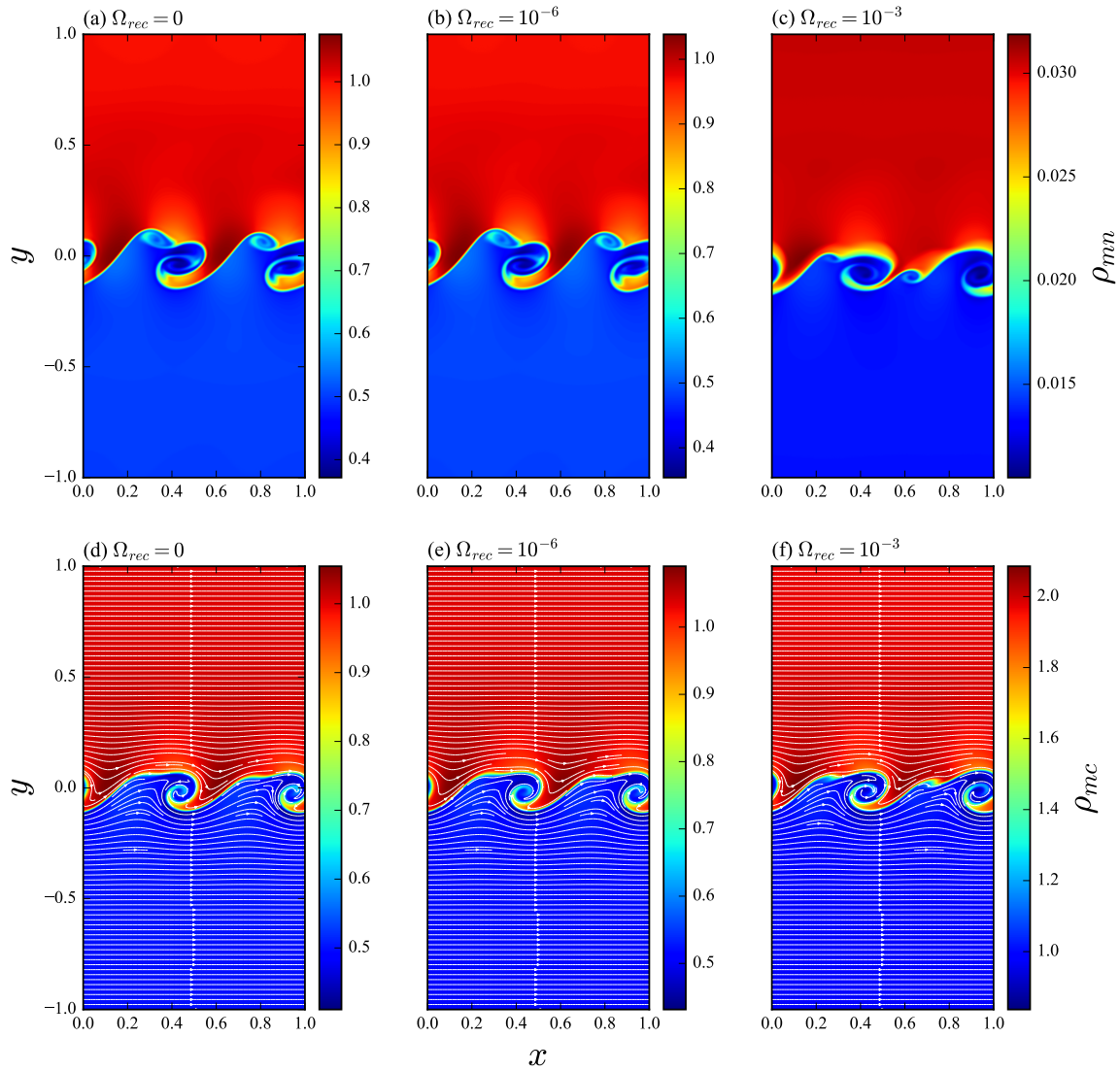
$$\Omega_{ion} = 10^5 \Omega_{rec}. \quad (56)$$

Entonces, se estudiaron diferentes casos para el valor de frecuencia de recombinación, siendo estos $\Omega_{rec} = 0, 10^{-6}$ y 10^{-3} . De la relación (56) se puede concluir que la ionización ocurre en mayor medida que la recombinación, es decir, se crean más partículas cargadas que neutras.

En la figura 14 se muestra la densidad de masa para el fluido de partículas neutras ((a)-(c)), y la densidad de masa para el fluido de partículas cargadas ((d)-(f)). En estas gráficas se puede apreciar el aumento en la densidad de masa del fluido cargado por las magnitudes observadas en la barra de colores en el caso de $\Omega_{rec} = 10^{-3}$, ocurriendo un efecto contrario para las partículas neutras. Esto se debe principalmente a que, a mayor valor de Ω_{rec} , hay mayor Ω_{ion} , lo que indica que una gran cantidad de partículas neutras están transformándose en partículas cargadas debido al fenómeno de ionización. Asimismo, debido a la conservación de la masa del sistema, al haber un aumento en la densidad de masa de las partículas cargadas, se debe compensar con una disminución de la misma para las partículas neutras.

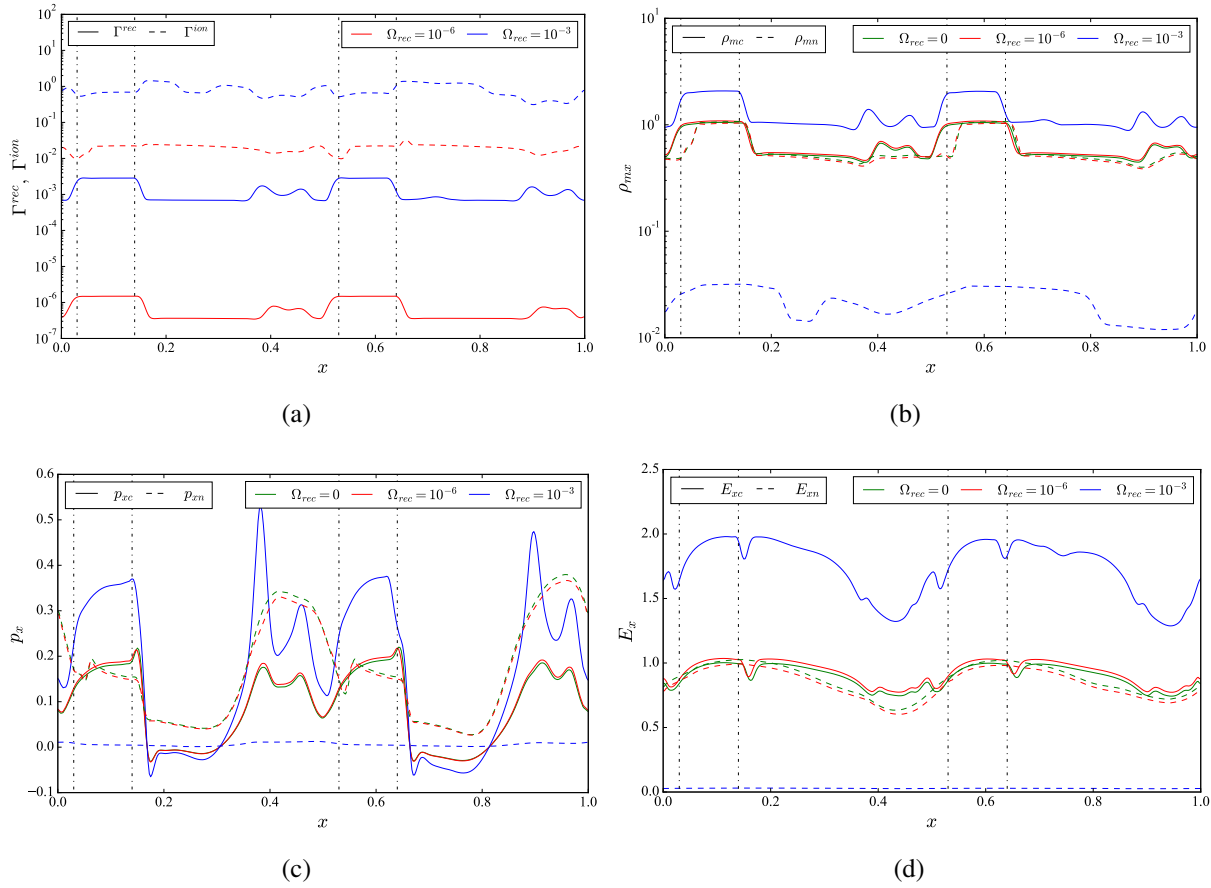
En la figura 15(a) se observan los valores de Γ^{rec} y Γ^{ion} para un tiempo t a lo largo del eje x . Aquí se puede apreciar que ambos fenómenos mantienen un comportamiento similar sin importar el valor de frecuencia de recombinación que se tome, lo único que varía de manera apreciable es la magnitud de dichos valores. Hay que tener en cuenta que en esta figura no se graficaron Γ^{rec} y Γ^{ion} para $\Omega_{rec} = 0$, pues en este caso no hay ionización ni recombinación.

Ahora, la figura 15(b) muestra los valores para la densidad de masa del fluido cargado (línea continua) y el fluido neutro (línea discontinua) a lo largo del eje x (para un valor fijo de y). En esta gráfica se puede apreciar un comportamiento similar para cada valor de Ω_{rec} , sin embargo, para $\Omega_{rec} = 10^{-3}$ se observa un aumento en dicha variable para el caso del fluido cargado, y una


Figura 14

(a)-(c) Densidad de masa de partículas neutras y (d)-(f) cargadas, para distintos valores de la frecuencia de recombinación.

disminución para el caso del fluido neutro. Esto significa que a mayor frecuencia de recombinación hay un aumento en la densidad de masa de las partículas cargadas, algo que es completamente lógico debido a la relación (56). Asimismo, este aumento en la densidad de las partículas cargadas


Figura 15

Magnitudes físicas del sistema a lo largo del eje x para diferentes valores de Ω_{rec} . (a) Γ^{rec} y Γ^{ion} , (b) densidad de masa, (c) momento y (d) energía. La línea continua representa a las partículas cargadas y la línea discontinua a las partículas neutras, a excepción de (a) donde la línea continua representa Γ^{rec} y la línea discontinua Γ^{ion} .

se compensa con la disminución en la densidad de las partículas neutras, pues al haber mayor ionización que recombinación, más partículas neutras se están transformando en cargadas. Este resultado se puede corroborar con (36), la cual indica que a mayor Γ^{ion} hay mayor S_c y menor S_n , los cuales corresponden a los términos fuentes de la ecuación de conservación de la masa.

Para el caso de la ecuación de momento sucede algo similar. En (42) se puede observar que

el término Γ^{ion} aporta positivamente al aumento de momento en las partículas cargadas, y resta al momento de las partículas neutras. Este resultado se muestra en la figura 15(c), donde se observa un aumento de momento para las partículas cargadas (línea continua) y una disminución del mismo para las partículas neutras (línea discontinua), para el caso de $\Omega_{rec} = 10^{-3}$. Igualmente, se puede observar como para $\Omega_{rec} = 10^{-6}$ el momento es mayor en comparación con $\Omega_{rec} = 0$.

Analizando la energía de ambos fluidos y los términos de fuentes para la ecuación de conservación de la energía dados por (49) y (50), se puede observar que el término de Γ^{ion} aumenta la energía para las partículas cargadas, y la disminuye para las partículas neutras. Observando la figura 15(d), se nota un comportamiento adecuado según las ecuaciones, ya que a mayor frecuencia de recombinación, hay un aumento en la energía de las partículas cargadas y una disminución en el caso de las partículas neutras.

En las gráficas presentadas en la figura 15 se muestran señaladas con líneas negras verticales ciertas zonas, las cuales corresponden a la formación de los vórtices. En estas zonas se puede apreciar que se presentan máximos de recombinación y mínimos de ionización (ver figura 15(a)). Igualmente, son zonas que corresponden a máximos de densidad de masa y energía, y máximos locales en el caso del momento, para partículas cargadas (ver figuras 15(b)-(d)).

Respecto a la amplificación de la energía magnética, la figura 16 muestra dicha amplificación a lo largo del tiempo para diferentes valores de la frecuencia de recombinación. Se observa que a mayor frecuencia de recombinación, la amplificación del campo magnético es mayor, ampliándose en mayor medida para $\Omega_{rec} = 10^{-3}$ con un aumento cercano a dos veces el valor inicial. Esto tiene mucho sentido ya que, al haber observado un aumento en la energía cinética de las partí-

culas cargadas, se puede entender que este aumento en la energía facilitó a su vez la amplificación de la energía magnética (más energía cinética se transforma en energía magnética del sistema).

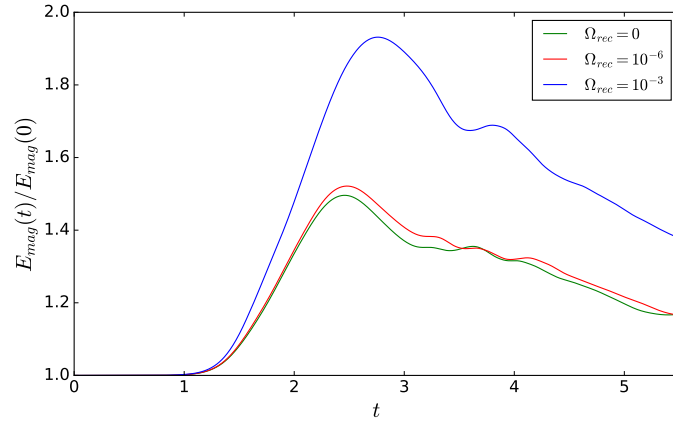


Figura 16

Amplificación de la energía magnética del sistema para diferentes valores de Ω_{rec} en función del tiempo.

Finalmente, en la figura 17 se representa la amplitud de la perturbación para el fluido cargado (izquierda) y el fluido neutro (derecha). Aquí se puede observar que las variaciones en la fase lineal de la inestabilidad son casi imperceptibles, notándose una diferencia apreciable únicamente para $\Omega_{rec} = 10^{-3}$. Esto significa que los fenómenos de ionización y recombinación no afectan, o de manera más precisa, afectan de manera mínima a la formación de la inestabilidad.

4.3 KHI en la magnetósfera de la Tierra

La magnetósfera de la Tierra es, muy probablemente, la región astrofísica de mayor importancia para la comunidad científica, pues es esta la encargada de proteger a la Tierra de las interacciones con el Sol, y de muchos otros fenómenos astrofísicos que pueden afectar la vida en ella. Es gracias a esta que fenómenos como las eyecciones de masa coronal no afectan en gran

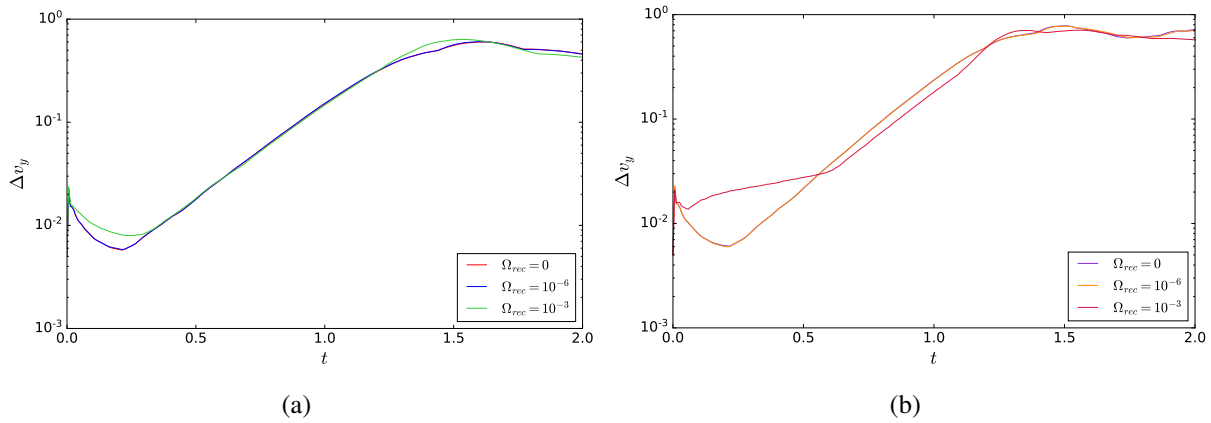


Figura 17

Amplitud de la perturbación para el fluido cargado (izquierda) y el fluido neutro (derecha), para distintos valores del parámetro Ω_{rec} .

medida a la humanidad, pues se encarga de repeler, a través del campo magnético, la entrada de partículas provenientes del plasma del viento solar. Sin embargo, como se mencionó con anterioridad, el viento solar ha sido observado en zonas internas de la magnetósfera, generando fenómenos visuales como las auroras boreales (Hallinan and Davis, 1970). La presencia de dichas partículas en el interior de la magnetósfera se debe principalmente a la reconexión magnética (Dungey, 1961; Sonnerup and Cahill Jr, 1967; Adhikari et al., 2019). No obstante, se ha comprobado científicamente que la KHI es otro fenómeno que influye en el transporte de masa en esta región astrofísica (Miura and Pritchett, 1982; Belmont and Chanteur, 1989; Nakamura et al., 2014; Dungey, 1955).

En particular, la KHI se forma en la región de la magnetósfera conocida como magnetopausa, la cual funciona como una frontera entre el medio interplanetario y el interior de la magnetósfera (ver figura 18). En esta región, la KHI se forma como consecuencia de la interacción del plasma proveniente del viento solar y el plasma contenido dentro de la magnetósfera (ver figura

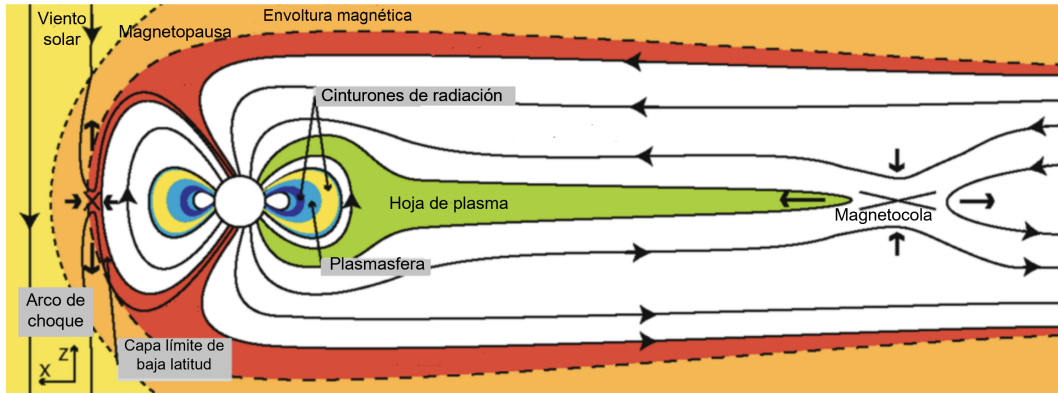


Figura 18

Esquema de la magnetósfera de la Tierra. Recuperado de: Eastwood et al. (2015). Adaptado por: Autor.

19) (Guo et al., 2010; Hasegawa, 2012). Además de representar un medio de transporte de masa en la magnetósfera, la KHI también se ha estudiado debido a que puede representar una respuesta al fenómeno de amplificación del campo magnético en esta región del medio astrofísico.

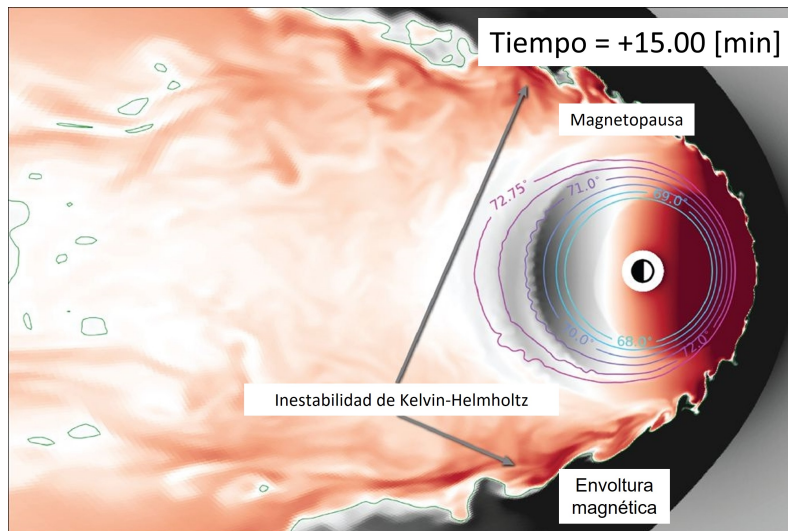


Figura 19

Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz formada en la magnetopausa de la Tierra. Recuperado de: Sorathia et al. (2020). Adaptado por: Autor.

Con el fin de estudiar la KHI en la magnetósfera terrestre, y los efectos de las colisiones elásticas e inelásticas en la dinámica de la misma, se implementó en el código MAGNUS (Wandurruga, 2022) una zona localizada de la magnetósfera tomando un modelo elíptico para esta, la cual, debido al dominio espacial utilizado se aprecia como en la figura 20. Adicionalmente, se construyó un dato inicial con valores de densidad de masa, campo magnético, y velocidad de las partículas correspondientes al plasma proveniente del viento solar y al plasma contenido dentro de la magnetósfera. La densidad de número se tomó como $\rho_{vs} = 0.3 \times 10^{-21} [kg\ m^{-3}]$ para el viento solar (parte superior), y $\rho_{mt} = 1.0 \times 10^{-21} [kg\ m^{-3}]$ para la magnetósfera (parte inferior) (Nakamura et al., 2014, 2020). Con respecto a la velocidad, se tomó $v_{vs} \approx 400 [km\ s^{-1}]$ para el viento solar, y $v_{mt} \approx 340 [km\ s^{-1}]$ para el plasma contenido en la magnetósfera, el plasma del viento solar fluye de izquierda a derecha y el plasma de la magnetósfera en sentido contrario (Russell, 2000; Nakamura et al., 2014). Para el campo magnético, se usó un valor de $B = 3 [nT]$ constante en todo el espacio. Finalmente, se trabajó con un valor de $\beta = 0.02$, una frecuencia de colisiones elásticas de $\xi = 10$ y una frecuencia de recombinación de $\Omega_{rec} = 10^{-3}$. Cabe resaltar que el dato inicial fue el mismo para el fluido cargado y neutro. En adición a esto, en esta última fase las condiciones de frontera, tanto para el eje x como el eje y , se tomaron de flujo saliente.

En las figuras 21 y 22 se muestran la distribución de la densidad masa para el fluido cargado y el fluido neutro respectivamente, en diferentes valores de tiempo. Observando ambas gráficas se puede notar las similitudes en sus dinámicas, debido a los efectos de las colisiones elásticas. Además, al comparar los valores de la densidad de masa del fluido cargado con los del fluido neutro, se aprecia claramente los efectos de la ionización. Debido a la curvatura de la frontera, los

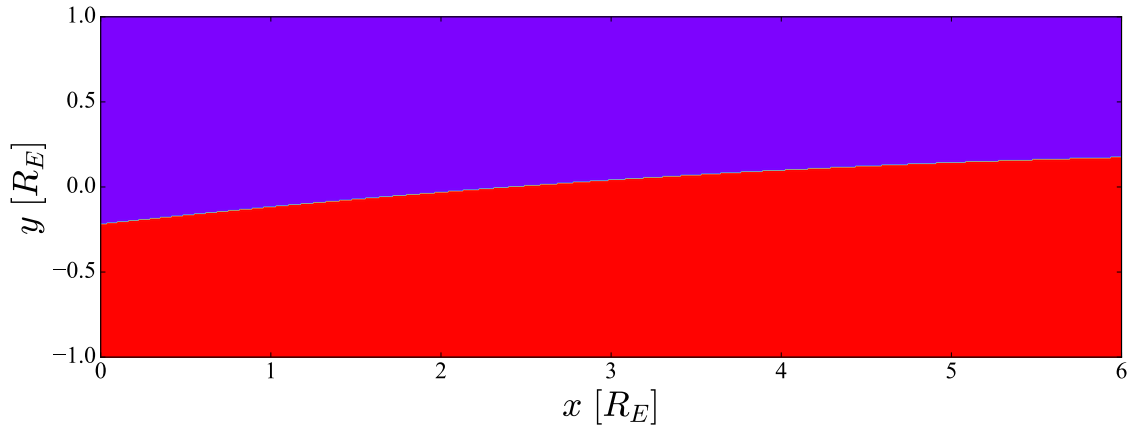
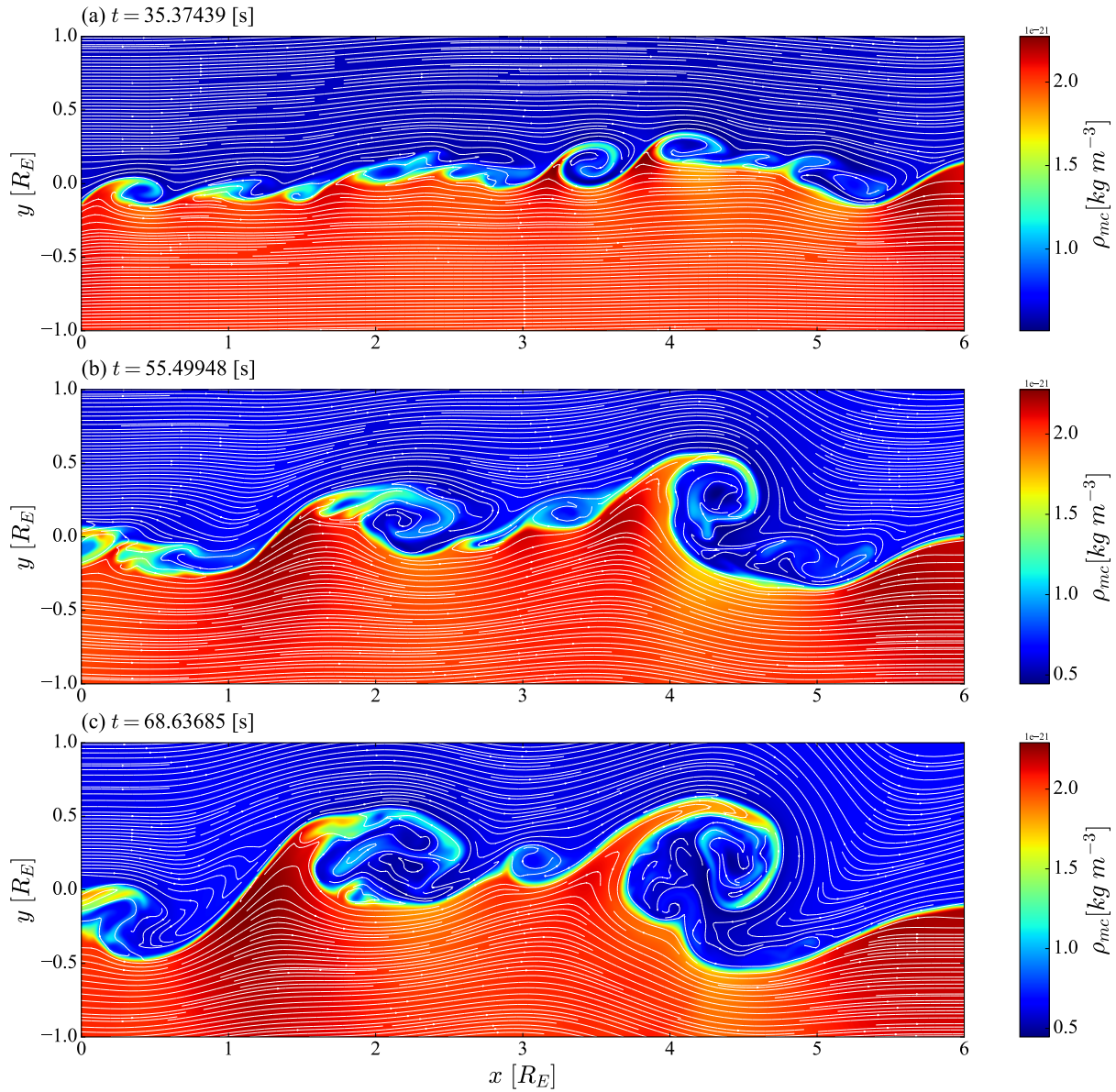


Figura 20

Zona localizada de la magnetósfera de la Tierra. La zona morada representa el exterior a la magnetósfera y la zona roja representa el interior de la magnetósfera. La frontera entre ambas zonas es la magnetopausa.

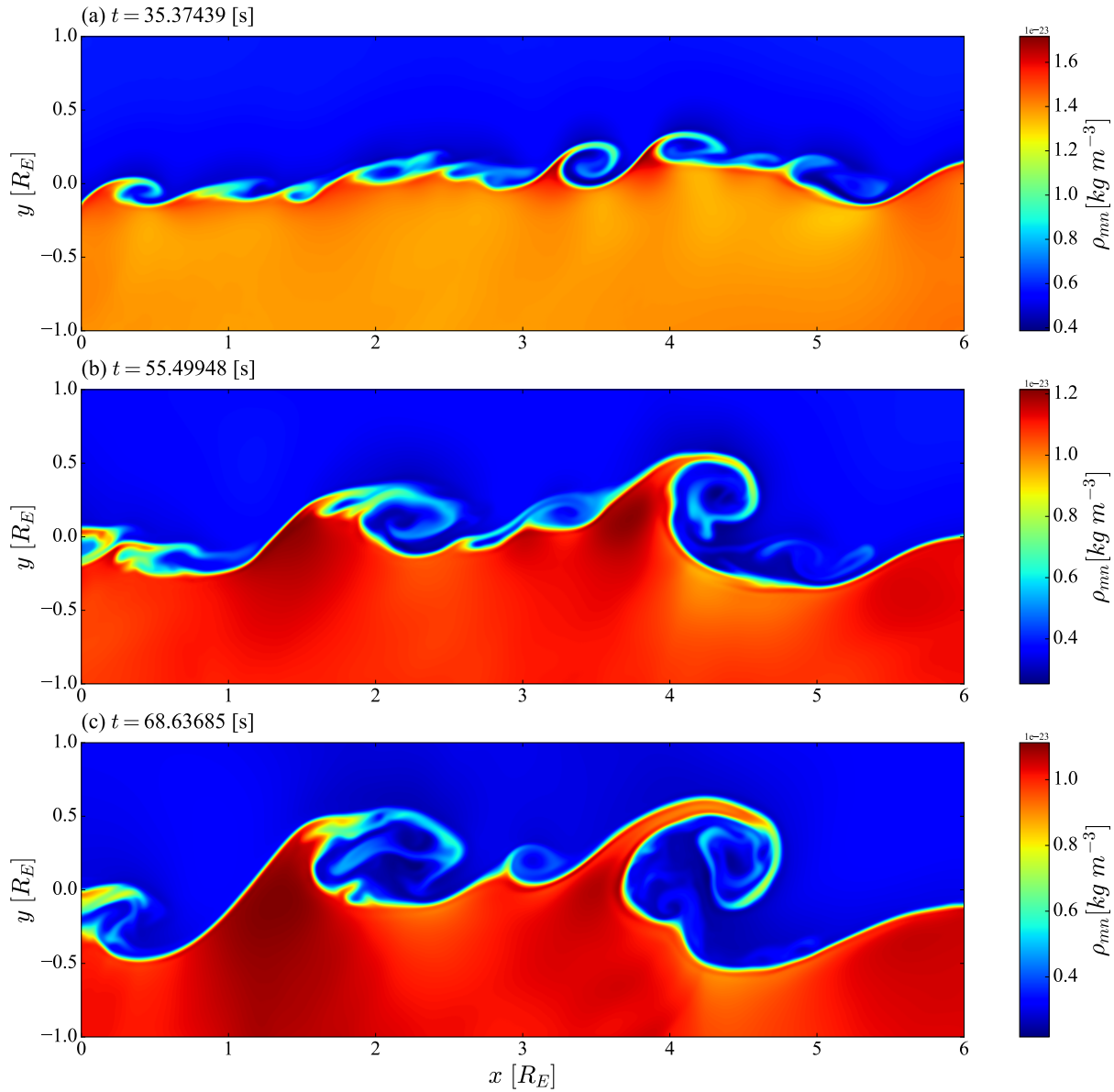
modos de KH que se forman son más inestables y no hay presencia de simetría. En estos instantes de tiempo se observa la formación de diversos vórtices, algunos de ellos con enrollamiento, los cuales evolucionan y colapsan entre sí formando vórtices de mayor tamaño, como se observa en 21(c) y 22(c).

Observando la figura 23 se presentan Γ^{rec} y Γ^{ion} (derecha), y la densidad de masa (izquierda), a lo largo del eje x (para un valor fijo de y) en tres tiempos distintos. Para el caso de 23(a), 23(c) y 23(d) se puede observar que Γ^{rec} y Γ^{ion} poseen comportamientos similares como consecuencia del efecto de las colisiones elásticas. A diferencia de 15(a), donde los máximos de recombinación correspondían a mínimos de ionización, en esta ocasión, se observa que los máximos de recombinación son igualmente máximos de ionización. Esto se debe nuevamente al efecto de las colisiones elásticas, las cuales llevan a que ambos sistemas posean dinámicas similares. Ahora, respecto a 23(b), 23(d) y 23(e) se observa que las zonas de mayor ionización en sus pares temporales corres-


Figura 21

Densidad de masa para el fluido cargado para diferentes valores de tiempo.

ponden a zonas de mayor densidad de masa, tanto para el fluido cargado como neutro. Finalmente, se aprecia que dichas zonas de máximos de recombinación, ionización y densidad de masa corresponden a la formación de los vórtices de la KHI en las figuras 21 y 22. Nótese también que


Figura 22

Densidad de masa para el fluido neutro para diferentes valores de tiempo.

los comportamientos de Γ^{rec} y Γ^{ion} son similares al comportamiento de la densidad de masa, este resultado es razonable teniendo en cuenta que los fenómenos de ionización y recombinación están relacionados directamente con la densidad de masa de los fluidos (ver ecuaciones (28) y (29)).

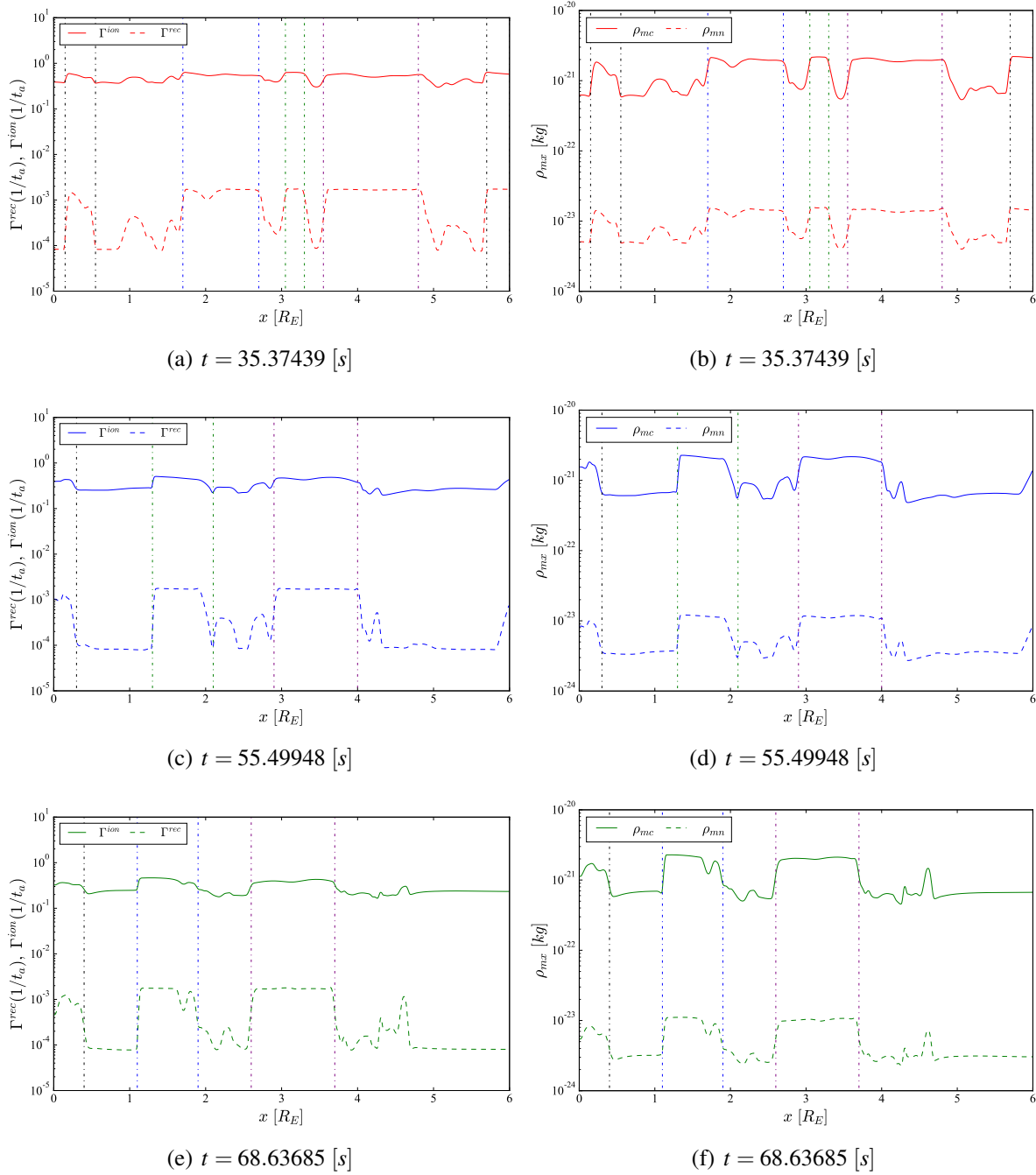


Figura 23

Gráficas de Γ^{rec} y Γ^{ion} (izquierda) y densidad de masa (derecha) para diferentes valores del tiempo.

En la figura 24 se muestra la amplificación del campo magnético a lo largo del tiempo. Aquí se puede observar que, efectivamente, la KHI en la magnetósfera, en presencia de colisiones elásticas e inelásticas, facilita la amplificación del campo magnético. Es posible observar una amplificación cercana a 3.5 veces el valor inicial de la energía magnética, la cual representa una amplificación mayor a la encontrada en las fases anteriores. Asimismo, al comparar con 25, la cual corresponde a la amplitud de la perturbación, se observa que la fase no lineal corresponde temporalmente a la amplitud de la energía magnética. Nótese también, en 25, que el proceso de crecimiento lineal y no lineal de la inestabilidad en ambos fluidos es bastante similar, lo que confirma el efecto de las colisiones elásticas, llevando a los dos sistemas a tener dinámicas similares. Esto indica que la inestabilidad se está desarrollando de la misma forma en ambos fluidos, hecho que se puede corroborar en 21 y 22, donde se observa que, en los tres tiempos, la inestabilidad es similar para los dos fluidos.

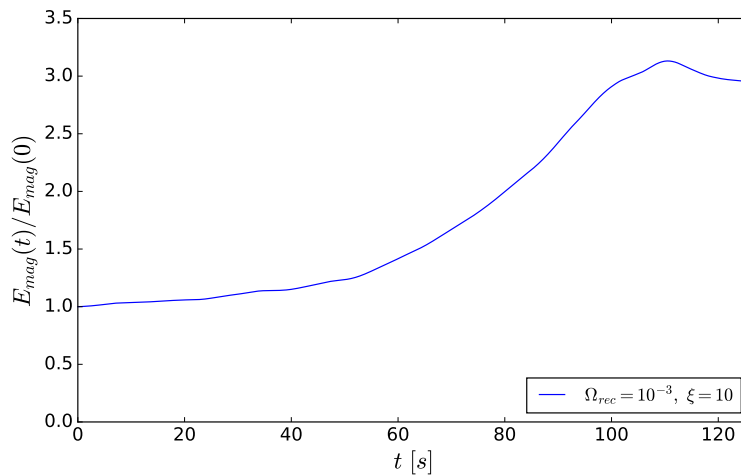
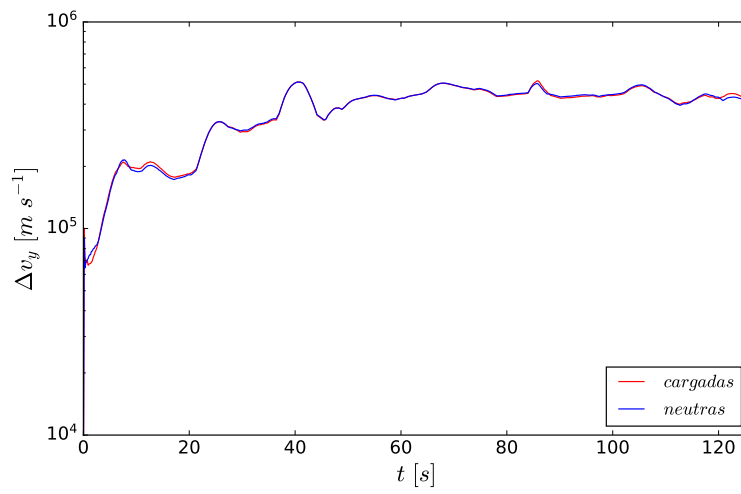


Figura 24

Amplificación de la energía magnética en función del tiempo.

**Figura 25**

Amplitud de la perturbación en función del tiempo.

5. Conclusiones

De los resultados presentados durante este trabajo se comprueba que la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz se forma en fluidos que posean una velocidad relativa entre sí y una frontera en común, sin necesidad de que dichos fluidos posean densidades de masa diferentes o presiones distintas. Otra conclusión importante es que la KHI funciona como un mecanismo de amplificación de la energía magnética en su forma magnetohidrodinámica, ya sea en presencia de colisiones o sin estas. Igualmente, se hace necesario recalcar que, al trabajar con un plasma parcialmente ionizado y tener en cuenta las colisiones elásticas e inelásticas entre las diferentes partículas que componen el plasma, dicha amplificación de la energía magnética se ve incrementada, lo que permite concluir que en un PPI, la KHI amplifica en mayor medida el campo magnético.

A partir de los resultados obtenidos en la primera fase es posible concluir que la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz representa un mecanismo para la amplificación de la energía magnética, y que esta se encuentra relacionada con la fase no lineal de la evolución de la inestabilidad. Es por esto que dicha amplificación es mayor cuando la KHI se desarrolla de manera más completa y presenta mayor enrollamiento. Además, esta amplificación de la energía magnética se da debido a conversiones de energía cinética a magnética. Igualmente, el campo magnético funciona como un inhibidor al crecimiento de la inestabilidad, por este motivo, la KHI se desarrolla de mejor manera, y amplifica en mayor medida, cuando se encuentra en presencia de campos magnéticos débiles.

Respecto a la segunda fase, donde se estudia el efecto de las colisiones entre las diferentes especies del plasma, se observa que, tanto las colisiones elásticas (relacionadas con transferen-

cias de momento y energía), como las colisiones inelásticas (relacionadas con la conversión de especies), son fenómenos que participan activamente en la amplificación de la energía magnética. Dichas colisiones facilitan la amplificación al permitir que la energía cinética de las partículas neutras se transfiera a las partículas cargadas, permitiendo así que más energía cinética se transforme en energía magnética. En el caso de las colisiones elásticas, se observó que la energía magnética aumentó un 100 % su valor inicial. Para las colisiones inelásticas, esta amplificación fue cercana a un 95 % del valor inicial. En adición a esto, las colisiones elásticas llevan a que ambos sistemas (fluido neutro y cargado) posean comportamientos similares, tendiendo a que distintas variables físicas, como la densidad de masa y la vorticidad, sean iguales. Por otro lado, respecto a los fenómenos de ionización y recombinación, se encuentra que las zonas donde el vórtice se comienza a formar son zonas de mayor recombinación; mientras que las zonas en la vecindad del vórtice son zonas de mayor ionización.

Finalmente, respecto a la tercera fase, donde se estudia la KHI en la magnetósfera de la Tierra, se comprueba que la KHI está relacionada con la amplificación de la energía magnética, nuevamente durante su fase no lineal. Adicionalmente, la presencia de colisiones elásticas juntos con los procesos de ionización y recombinación aportan a la amplificación del campo magnético, ya que se pudo observar que en conjunto de ambos tipos de colisiones dicha amplificación fue mayor que la presentada en las fases anteriores, llegando a representar una amplificación cercana al 200 % del valor inicial. Por otro lado, las colisiones elásticas afectan a los procesos de ionización y recombinación en igual medida que a otras variables físicas del sistema, pues estos fenómenos también presentaron un comportamiento similar entre sí. Esto tiene mucho sentido si se piensa

que la ionización y la recombinación están relacionadas directamente con las partículas cargadas y neutras respectivamente.

Para culminar, en el momento se está trabajando en un artículo sobre los resultados presentados en este trabajo de grado para ser sometido a una revista científica. Adicionalmente, se piensa extender este trabajo a futuro para hacer un análisis más profundo con simulaciones de la magnetósfera de la Tierra completa, teniendo en cuenta la estructura del campo magnético de la Tierra, e implementando un modelo más realista de la interacción viento solar-magnetósfera. Este es un primer trabajo en el cual se estudia la KHI de manera localizada; sin embargo, hasta donde se sabe, representa un avance en el estudio de dicha inestabilidad, ya que no se han reportado otros trabajos en la literatura donde se analicen los efectos de los fenómenos de ionización y recombinación.

Referencias Bibliográficas

- Adhikari, L., Khabarova, O., Zank, G. P., and Zhao, L.-L. (2019). The role of magnetic reconnection–associated processes in local particle acceleration in the solar wind. *The Astrophysical Journal*, 873(1):72.
- Baker, D. N. (1998). What is space weather?
- Ballester, J. L., Alexeev, I., Collados, M., Downes, T., Pfaff, R. F., Gilbert, H., Khodachenko, M., Khomenko, E., Shaikhislamov, I. F., Soler, R., Vazquez-Semadeni, E., and Zaqarashvili, T. (2017). Partially ionized plasmas in astrophysics.
- Belmont, G. and Chanteur, G. (1989). Advances in magnetopause kelvin-helmholtz instability studies. *Physica Scripta*, 40(1):124.
- Beresnyak, A. (2019). Mhd turbulence. *Living Reviews in Computational Astrophysics*, 5(1):1–59.
- Beresnyak, A. and Lazarian, A. (2019). *Turbulence in Magnetohydrodynamics*. de Gruyter.
- Birk, G. T. (2002). The onset of rayleigh-taylor instabilities in magnetized partially ionized dense dusty plasmas. *Physics of Plasmas*, 9:745.
- Birk, G. T. and Wiechen, H. (2002). Shear flow instabilities in magnetized partially ionized dense dusty plasmas. *Physics of Plasmas*, 9:964.
- Bittencourt, J. A. (2004). *Fundamentals of plasma physics*. Springer Science & Business Media.

- Bucciantini, N. and Del Zanna, L. (2006). Local kelvin-helmholtz instability and synchrotron modulation in pulsar wind nebulae. *Astronomy & Astrophysics*, 454(2):393–400.
- Chhajlani, R. K. and Vyas, M. K. (1989). Kelvin-helmholtz instability of composite plasma in an oblique magnetic field with resistivity.
- Cox, D. P. and Tucker, W. H. (1969). Ionization equilibrium and radiative cooling of a low-density plasma. *The Astrophysical Journal*, 157:1157.
- Cramer, N. F. (2011). *The physics of Alfvén waves*. John Wiley & Sons.
- D'Angelo, N. (1965). Kelvin-helmholtz instability in a fully ionized plasma in a magnetic field. *Physics of Fluids*, 8:1748–1750.
- Delamere, P. A., Wilson, R. J., and Masters, A. (2011). Kelvin-helmholtz instability at saturn's magnetopause: Hybrid simulations. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 116.
- Draine, B. (1986). Multicomponent, reacting mhd flows. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 220(1):133–148.
- Dungey, J. W. (1955). Electrodynamics of the outer atmosphere. *Physics of the Ionosphere*, page 229.
- Dungey, J. W. (1961). Interplanetary magnetic field and the auroral zones. *Physical Review Letters*, 6(2):47.

- Díaz, A. J., Soler, R., Ballester, J. L., and Goossens, M. (2012). Kelvin-helmholtz and rayleigh-taylor instabilities in partially ionised prominences.
- Eastwood, J. P., Hietala, H., Toth, G., Phan, T. D., and Fujimoto, M. (2015). What controls the structure and dynamics of earth's magnetosphere?
- Ershkovich, A. I. (1980). Kelvin-helmholtz instability in type-1 comet tails and associated phenomena.
- Faganello, M. and Califano, F. (2017). Magnetized kelvin-helmholtz instability: Theory and simulations in the earth's magnetosphere context.
- Fairfield, D., Otto, A., Mukai, T., Kokubun, S., Lepping, R., Steinberg, J., Lazarus, A., and Yamamoto, T. (2000). Geotail observations of the kelvin-helmholtz instability at the equatorial magnetotail boundary for parallel northward fields. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 105(A9):21159–21173.
- Foullon, C., Verwichte, E., Nakariakov, V. M., Nykyri, K., and Farrugia, C. J. (2011). Magnetic kelvin-helmholtz instability at the sun. *Astrophysical Journal Letters*, 729.
- Goedbloed, H., Keppens, R., and Poedts, S. (2019). *Magnetohydrodynamics: Of Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Cambridge University Press.
- Goldston, R. and Rutherford, P. (1995). Introduction to plasma physics iop. *Bristol, UK*.
- Gudiksen, B. V., Carlsson, M., Hansteen, V. H., Hayek, W., Leenaarts, J., and Martínez-Sykora, J.

- (2011). The stellar atmosphere simulation code bifrost-code description and validation. *Astronomy & Astrophysics*, 531:A154.
- Guo, X. C., Wang, C., and Hu, Y. Q. (2010). Global mhd simulation of the kelvin-helmholtz instability at the magnetopause for northward interplanetary magnetic field. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 115.
- Hallinan, T. J. and Davis, T. N. (1970). Small-scale auroral arc distortions.
- Hands, A. D., Ryden, K. A., Meredith, N. P., Glauert, S. A., and Horne, R. B. (2018). Radiation effects on satellites during extreme space weather events. *Space Weather*, 16(9):1216–1226.
- Hasegawa, H. (2012). Structure and dynamics of the magnetopause and its boundary layers. *Monogr. Environ. Earth Planets*, 1(2):71–119.
- Hasegawa, H., Fujimoto, M., Phan, T. D., Rème, H., Balogh, A., Dunlop, M. W., Hashimoto, C., and TanDokoro, R. (2004). Transport of solar wind into earth's magnetosphere through rolled-up kelvin-helmholtz vortices. *Nature*, 430:755–758.
- Helmholtz, H. v. (1868). Über discontinuierliche flüssigkeits-bewegungen [on the discontinuous movements of fluids]. *Monatsberichte der Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin [Monthly Reports of the Royal Prussian Academy of Philosophy in Berlin]*, 23:215–228.
- Hwang, K.-J., Goldstein, M., Kuznetsova, M., Wang, Y., Viñas, A., and Sibeck, D. (2012). The first in situ observation of kelvin-helmholtz waves at high-latitude magnetopause during strongly

- dawnward interplanetary magnetic field conditions. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 117(A8).
- Hwang, K.-J., Kuznetsova, M., Sahraoui, F., Goldstein, M., Lee, E., and Parks, G. (2011). Kelvin-helmholtz waves under southward interplanetary magnetic field. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 116(A8).
- Ibrahim, M., Hasona, W., and ElShekhiy, A. (2019). Concentration-dependent viscosity and thermal radiation effects on mhd peristaltic motion of synovial nanofluid: Applications to rheumatoid arthritis treatment. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 170:39–52.
- Jiang, F. and Jiang, S. (2015). On linear instability and stability of the rayleigh–taylor problem in magnetohydrodynamics. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 17(4):639–668.
- Johnson, J. R., Wing, S., and Delamere, P. A. (2014). Kelvin helmholtz instability in planetary magnetospheres. *Space Science Reviews*, 184(1):1–31.
- Keltner, J. R., Roos, M. S., Brakeman, P. R., and Budinger, T. F. (1990). Magnetohydrodynamics of blood flow.
- Keppens, R., Poedts, S., and Goedbloed, J. (1998). Data parallel simulations of the magnetohydrodynamics of plasma loops. In *International Conference on High-Performance Computing and Networking*, pages 233–241. Springer.
- Keppens, R., Poedts, S., Meijer, P., and Goedbloed, J. (1997). A data parallel pseudo-spectral

- semi-implicit magnetohydrodynamics code. In *International Conference on High-Performance Computing and Networking*, pages 190–199. Springer.
- Keppens, R. and Tóth, G. (1999). Nonlinear dynamics of kelvin?helmholtz unstable magnetized jets: Three-dimensional effects. *Physics of Plasmas*, 6:1461–1469.
- Khomenko, E. and Collados, M. (2012). Heating of the magnetized solar chromosphere by partial ionization effects. *The Astrophysical Journal*, 747(2):87.
- Khomenko, E., Collados, M., Diaz, A., and Vitas, N. (2014). Fluid description of multi-component solar partially ionized plasma. *Physics of Plasmas*, 21(9):092901.
- Kiuchi, K., Cerdá-Durán, P., Kyutoku, K., Sekiguchi, Y., and Shibata, M. (2015). Efficient magnetic-field amplification due to the kelvin-helmholtz instability in binary neutron star mergers. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 92.
- Knoll, G. F. (2010). *Radiation detection and measurement*. John Wiley & Sons.
- Kuridze, D., Zaqarashvili, T. V., Henriques, V., Mathioudakis, M., Keenan, F. P., and Hanslmeier, A. (2016). Kelvin?helmholtz instability in solar chromospheric jets: Theory and observation. *The Astrophysical Journal*, 830:133.
- Leake, J., DeVore, C., Thayer, J., Burns, A., Crowley, G., Gilbert, H., Huba, J., Krall, J., Linton, M., Lukin, V., et al. (2014). Ionized plasma and neutral gas coupling in the sun?s chromosphere and earth?s ionosphere/thermosphere. *Space Science Reviews*, 184(1):107–172.

- Leroy, M. and Mangeney, A. (1984). A theory of energization of solar wind electrons by the earth's bow shock. In *Annales Geophysicae*, volume 2, pages 449–456.
- Lin, D., Wang, C., Li, W., Tang, B., Guo, X., and Peng, Z. (2014). Properties of kelvin-helmholtz waves at the magnetopause under northward interplanetary magnetic field: Statistical study. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 119(9):7485–7494.
- Lovelace, R., Romanova, M., and Newman, W. (2010). Kelvin-helmholtz instability of the magnetopause of disc-accreting stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 402(4):2575–2582.
- Ma, X., Otto, A., Delamere, P. A., and Zhang, H. (2016). Interaction between reconnection and kelvin-helmholtz at the high-latitude magnetopause. *Advances in Space Research*, 58(2):231–239.
- MacTaggart, D. and Hillier, A. (2020). *Topics in Magnetohydrodynamic Topology, Reconnection and Stability Theory*. Springer.
- Malagoli, A., Bodo, G., and Rosner, R. (1996). On the nonlinear evolution of magnetohydrodynamic kelvin-helmholtz instabilities. *The Astrophysical Journal*, 456:708.
- Maneva, Y. G., Laguna, A. A., Lani, A., and Poedts, S. (2017). Multi-fluid modeling of magnetosonic wave propagation in the solar chromosphere: effects of impact ionization and radiative recombination. *The Astrophysical Journal*, 836(2):197.

- Martínez-Gómez, D., Soler, R., and Terradas, J. (2015). Onset of the kelvin-helmholtz instability in partially ionized magnetic flux tubes. *Astronomy & Astrophysics*, 578:A104.
- Martínez-Gómez, D., Soler, R., and Terradas, J. (2015). Onset of the kelvin-helmholtz instability in partially ionized magnetic flux tubes.
- Massaglia, S., Bodo, G., Mignone, A., and Rossi, P. (2008). *Jets from young stars III: numerical MHD and instabilities*, volume 754. Springer.
- Miura, A. and Pritchett, P. (1982). Nonlocal stability analysis of the mhd kelvin-helmholtz instability in a compressible plasma. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 87(A9):7431–7444.
- Moldwin, M. (2008). *An introduction to space weather*, volume 1. Cambridge University Press Cambridge.
- Moore, R. and Fung, P. (1972). Structure of the chromosphere-corona transition region. *Solar Physics*, 23(1):78–102.
- Möstl, U. V., Erkaev, N. V., Zellinger, M., Lammer, H., Gröller, H., Biernat, H. K., and Korovinskiy, D. (2011). The kelvin-helmholtz instability at venus: What is the unstable boundary? *Icarus*, 216(2):476–484.
- Murtas, G., Hillier, A., and Snow, B. (2022). Collisional ionization and recombination effects on coalescence instability in chromospheric partially ionized plasmas. *Physics of Plasmas*, 29(6):062302.

- Möstl, U. V., Temmer, M., and Veronig, A. M. (2013). The kelvin-helmholtz instability at coronal mass ejection boundaries in the solar corona: Observations and 2.5d mhd simulations. *Astrophysical Journal Letters*, 766.
- Nakamura, T., Daughton, W. S., Karimabadi, H., and Eriksson, S. (2014). Plasma mixing and transport caused by the three-dimensional development of the kelvin-helmholtz instability. In *AGU Fall Meeting Abstracts*, volume 2014, pages SM51H–02.
- Nakamura, T., Stawarz, J. E., Hasegawa, H., Narita, Y., Franci, L., Wilder, F. D., Nakamura, R., and Nystrom, W. D. (2020). Effects of fluctuating magnetic field on the growth of the kelvin-helmholtz instability at the earth's magnetopause. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 125(3):e2019JA027515.
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F. D., and González, G. A. (2017). Magnus: A new resistive mhd code with heat flow terms. *The Astrophysical Journal*, 844:57.
- Ni, L., Ji, H., Murphy, N. A., and Jara-Almonte, J. (2020). Magnetic reconnection in partially ionized plasmas.
- Ni, L., Lukin, V. S., Murphy, N. A., and Lin, J. (2018). Magnetic reconnection in strongly magnetized regions of the low solar chromosphere. *The Astrophysical Journal*, 852:95.
- Nishikawa, K., Wakatani, M., and Wakatani, M. (2000). *Plasma physics*, volume 8. Springer Science & Business Media.

- Nishikawa, K.-I., Hardee, P., Duřan, I., Niemiec, J., Medvedev, M., Mizuno, Y., Meli, A., Sol, H., Zhang, B., Pohl, M., et al. (2014). Magnetic field generation in core-sheath jets via the kinetic kelvin–helmholtz instability. *The Astrophysical Journal*, 793(1):60.
- Nykyri, K., Ma, X., Dimmock, A., Foullon, C., Otto, A., and Osmane, A. (2017). Influence of velocity fluctuations on the kelvin-helmholtz instability and its associated mass transport. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 122(9):9489–9512.
- Oliver, R., Soler, R., Terradas, J., and Zağarashvili, T. (2016). Dynamics of coronal rain and descending plasma blobs in solar prominences. ii. partially ionized case. *The Astrophysical Journal*, 818(2):128.
- Ong, R. S. B. and Roderick, N. (1972). On the kelvin-helmholtz instability of the earth’s magnetopause.
- Otto, A. and Fairfield, D. (2000). Kelvin-helmholtz instability at the magnetotail boundary: Mhd simulation and comparison with geotail observations. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 105(A9):21175–21190.
- Palenzuela, C., Aguilera-Miret, R., Carrasco, F., Ciolfi, R., Kalinani, J., Kastaun, W., Miřano, B., and Viganò, D. (2021). Turbulent magnetic field amplification in binary neutron star mergers. *arXiv preprint arXiv:2112.08413*.
- Paschmann, G., Sckopke, N., Asbridge, J., Bame, S., and Gosling, J. (1980). Energization of solar

wind ions by reflection from the earth's bow shock. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 85(A9):4689–4693.

Philippi, P., Mattila, K., Hegele Jr, L., and Siebert, D. (2015). Kinetic projection and stability in lattice- boltzmann schemes.

Pimentel, O. M. and Lora-Clavijo, F. D. (2019). On the linear and non-linear evolution of the relativistic mhd kelvin–helmholtz instability in a magnetically polarized fluid. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 490(3):4183–4193.

Pope, S. A., Balikhin, M. A., Zhang, T. L., Fedorov, A. O., Gedalin, M., and Barabash, S. (2009). Giant vortices lead to ion escape from venus and re-distribution of plasma in the ionosphere. *Geophysical Research Letters*, 36.

Popescu, B. (2020). *Simulations of the solar chromosphere in the two-fluid approximation*. PhD thesis, Universidad de La Laguna.

Priest, E. (2014). *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press.

Priest, E. R. (1981). Solar flare magnetohydrodynamics. *Solar Flare Magnetohydrodynamics*.

Priest, E. R. (1985). The magnetohydrodynamics of current sheets. *Reports on Progress in Physics*, 48(7):955.

Rossi, C. (2015). *Kelvin-Helmholtz instability at the magnetopause: theory and observations*. PhD thesis, Paris 6.

Rozhansky, V. A. and Tsendin, L. D. (2001). *Transport Phenomena in Partially Ionized Plasma*.

Russell, C. (2000). The solar wind interaction with the earth's magnetosphere: A tutorial. *IEEE transactions on plasma science*, 28(6):1818–1830.

Sankar, D. and Lee, U. (2011). Fdm analysis for mhd flow of a non-newtonian fluid for blood flow in stenosed arteries. *Journal of mechanical science and technology*, 25(10):2573–2581.

Schnack, D. (2009). *Lectures in Magnetohydrodynamics: With an Appendix on Extended MHD*.

Shadmehri, M. and Downes, T. P. (2007). Kelvin-helmholtz instability in a weakly ionized layer. *Astrophysics and Space Science*, 312:79–84.

Shadmehri, M. and Downes, T. P. (2008). The role of kelvin-helmholtz instability in dusty and partially ionized outflows. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 387:1318–1322.

Shibata, K. and Magara, T. (2011). Solar flares: magnetohydrodynamic processes. *Living Reviews in Solar Physics*, 8(1):1–99.

Singh, K. A. P., Sakaue, T., Nakamura, N., Kawamura, A. D., Isobe, H., and Shibata, K. (2019). Effect of ionization and recombination on the evolution of the harris-type current sheet in partially ionized plasmas. *The Astrophysical Journal*, 884:161.

Smith, P. and Sakai, J. (2008). Chromospheric magnetic reconnection: two-fluid simulations of coalescing current loops. *Astronomy & Astrophysics*, 486(2):569–575.

- Soler, R., Díaz, A. J., Ballester, J. L., and Goossens, M. (2012). Kelvinhelmholtz instability in partially ionized compressible plasmas. *Astrophysical Journal*, 749.
- Sonnerup, B. Ö. and Cahill Jr, L. (1967). Magnetopause structure and attitude from explorer 12 observations. *Journal of Geophysical Research*, 72(1):171–183.
- Sorathia, K. A., Merkin, V. G., Panov, E. V., Zhang, B., Lyon, J. G., Garretson, J., Ukhorskiy, A. Y., Ohtani, S., Sitnov, M., and Wiltberger, M. (2020). Ballooning-interchange instability in the near-earth plasma sheet and auroral beads: Global magnetospheric modeling at the limit of the mhd approximation. *Geophysical Research Letters*, 47.
- Stone, J. M. (2011). Astrophysical magnetohydrodynamics.
- Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F., and Simon, J. B. (2008). Athena: a new code for astrophysical mhd. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 178(1):137.
- Sundberg, T., Boardsen, S. A., Slavin, J. A., Blomberg, L. G., and Korth, H. (2010). The kelvinhelmholtz instability at mercury: An assessment. *Planetary and Space Science*, 58:1434–1441.
- Sunil (1997). Kelvin-helmholtz instability of a partially ionized plasma in porous medium. *Polymer - Plastics Technology and Engineering*, 36:945–961.
- Tatali, R., Serre, E., Tamain, P., Galassi, D., Ghendrih, P., Nespoli, F., Bufferand, H., Cartier-Michaud, T., and Ciraolo, G. (2021). Impact of collisionality on turbulence in the edge of tokamak plasma using 3d global simulations. *Nuclear Fusion*, 61(5):056002.

- Thomson, W. (1871). Xlvi. hydrokinetic solutions and observations. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 42(281):362–377.
- Toth, G. (1996). A general code for modeling mhd flows on parallel computers: Versatile advection code. *Astrophysical Letters and Communications*, 34:245.
- Trinquete, J. J. (2017). Estudio de la inestabilidad de kelvin-helmholtz.
- Wandurraga, P. C. (2022). *Construcción de un código MHD con dos fluidos para el estudio de la dinámica del plasma en la atmósfera solar*. PhD thesis.
- Watson, C., Zweibel, E. G., Heitsch, F., and Churchwell, E. (2004). Kelvin-helmholtz instability in a weakly ionized medium.
- Webb, D. F. and Howard, T. A. (2012). Coronal mass ejections: Observations. *Living Reviews in Solar Physics*, 9(1):1–83.
- Wiechen, H. M. (2006). Simulations of kelvin-helmholtz modes in partially ionized dusty plasmas comparing different charge numbers, charge polarities, and masses of the dust. *Physics of Plasmas*, 13.
- Yan, G., Mozer, F., Shen, C., Chen, T., Parks, G., Cai, C., and McFadden, J. (2014). Kelvin-helmholtz vortices observed by themis at the duskside of the magnetopause under southward interplanetary magnetic field. *Geophysical Research Letters*, 41(13):4427–4434.
- Zhang, B., Delamere, P. A., Ma, X., Burkholder, B., Wiltberger, M., Lyon, J. G., Merkin, V. G.,

and Sorathia, K. A. (2018). Asymmetric kelvin-helmholtz instability at jupiter's magnetopause boundary: Implications for corotation-dominated systems. *Geophysical Research Letters*, 45:56–63.

Zhang, F., Poedts, S., Lani, A., Kuźma, B., and Murawski, K. (2021). Two-fluid modeling of acoustic wave propagation in gravitationally stratified isothermal media. *The Astrophysical Journal*, 911(2):119.

Zhang, W., MacFadyen, A., and Wang, P. (2009). Three-dimensional relativistic magnetohydrodynamic simulations of the kelvin–helmholtz instability: magnetic field amplification by a turbulent dynamo. *The Astrophysical Journal*, 692(1):L40.

Zhelyazkov, I. and Chandra, R. (2021). *Kelvin–Helmholtz Instability in Solar Atmospheric Jets*. World Scientific.

Ziegler, U. (2008). The nirvana code: Parallel computational mhd with adaptive mesh refinement. *Computer Physics Communications*, 179(4):227–244.

Apéndices

Apéndice A. Ecuaciones de conservación

Conservación de la masa

Para encontrar la ecuación de continuidad, es decir, la conservación de la masa, se parte de la ecuación de Boltzmann (4) y se toma $g(\vec{v}_\alpha) = m_\alpha$ de la ecuación (6). Entonces

$$\partial_t (n_\alpha \langle m \rangle_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha \langle m \vec{v} \rangle_\alpha) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} m \rangle_\alpha = \partial_t (n_\alpha \langle m \rangle_\alpha)_{coll}. \quad (57)$$

Sabiendo que $\langle m \rangle_\alpha = m_\alpha$ y que $\nabla_{\vec{v}} m_\alpha = 0$ se tiene entonces que

$$\partial_t (n_\alpha m_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha) = \partial_t (n_\alpha m_\alpha)_{coll}. \quad (58)$$

Se define

$$\langle \vec{v} \rangle_\alpha = \vec{u}_\alpha, \quad (59)$$

entonces

$$\partial_t (n_\alpha m_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha) = \partial_t (n_\alpha m_\alpha)_{coll}. \quad (60)$$

Teniendo en cuenta que $n_\alpha m_\alpha = \rho_{m\alpha}$, la cual representa la densidad de masa de las partículas α , y además que el término $\partial_t (n_\alpha m_\alpha)_{coll} = S_\alpha$ y representa las colisiones del sistema, se

encuentra que

$$\partial_t (\rho m_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho m_\alpha \vec{u}_\alpha) = S_\alpha, \quad (61)$$

donde

$$S_\alpha = \partial_t (n_\alpha m_\alpha)_{coll} = m_\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V. \quad (62)$$

Conservación del momento

Para la conservación del momento se parte de la ecuación de Boltzmann dada por (4) y del segundo momento canónico $g(\vec{v}_\alpha) = m_\alpha \vec{v}_\alpha$. Entonces

$$\partial_t (n_\alpha \langle m \vec{v} \rangle_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha \langle m \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} m \vec{v} \rangle_\alpha = \partial_t (n_\alpha \langle m \vec{v} \rangle_\alpha)_{coll}. \quad (63)$$

Teniendo en cuenta que $\langle m \vec{v} \rangle_\alpha = m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha$, y además que m_α no depende de las componentes de la velocidad, se encuentra

$$\partial_t (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} m_\alpha \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{v} \rangle_\alpha = \partial_t (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha)_{coll}. \quad (64)$$

1) Analizando el primer término de la parte izquierda de la ecuación (64), se encuentra que dicha derivada se puede reescribir usando la regla de Leibniz de la forma

$$\partial_t (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha) = n_\alpha m_\alpha \partial_t \langle \vec{v} \rangle_\alpha + \langle \vec{v} \rangle_\alpha \partial_t (n_\alpha m_\alpha). \quad (65)$$

Recordando (59)

$$\partial_t (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha) = n_\alpha m_\alpha \partial_t \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha \partial_t (n_\alpha m_\alpha). \quad (66)$$

Haciendo uso de la ecuación (60) y de la relación (62) se encuentra que

$$\partial_t (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha) = n_\alpha m_\alpha \partial_t \vec{u}_\alpha - \vec{u}_\alpha \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha) + m_\alpha \vec{u}_\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V. \quad (67)$$

2) Ahora, analizando el segundo término de la parte izquierda de la ecuación (64) se encuentra que existe un producto tensorial de la forma $\vec{v}\vec{v}$. Tomando

$$\vec{v} = \vec{c}_\alpha + \langle \vec{v} \rangle_\alpha, \quad (68)$$

donde \vec{c}_α es la velocidad relativa entre \vec{v} y $\langle \vec{v} \rangle_\alpha$. Nótese que si se calcula el promedio de \vec{v} sobre las partículas α este debe ser igual a $\langle \vec{v} \rangle_\alpha$, por lo que $\langle \vec{c}_\alpha \rangle = 0$. Entonces

$$\vec{v}\vec{v} = (\vec{c}_\alpha + \langle \vec{v} \rangle_\alpha) (\vec{c}_\alpha + \langle \vec{v} \rangle_\alpha) \quad (69)$$

$$= c_\alpha c_\alpha + c_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha + \langle \vec{v} \rangle_\alpha c_\alpha + \langle \vec{v} \rangle_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha, \quad (70)$$

calculando el promedio de la expresión anterior y recordando (59)

$$\langle \vec{v}\vec{v} \rangle_\alpha = \langle \vec{c}_\alpha \vec{c}_\alpha \rangle + \langle \vec{c}_\alpha \rangle \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha \langle \vec{c}_\alpha \rangle + \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha. \quad (71)$$

Nótese que en la expresión anterior los valores de \vec{u}_α salen del promedio debido a que esta cantidad ya es un promedio como tal. El segundo y tercer término se hacen cero debido a $\langle \vec{c}_\alpha \rangle = 0$, entonces

$$\langle \vec{v}\vec{v} \rangle_\alpha = \langle \vec{c}_\alpha \vec{c}_\alpha \rangle + \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha. \quad (72)$$

Usando la relación anterior, se calcula

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v}\vec{v} \rangle_\alpha) = \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{c}_\alpha \vec{c}_\alpha \rangle) + \underbrace{\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha)}_a. \quad (73)$$

Si se considera el término denominado a en la expresión anterior, podemos reescribir el producto tensorial como

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) = \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha [u_{\alpha x} \vec{u}_\alpha + u_{\alpha y} \vec{u}_\alpha + u_{\alpha z} \vec{u}_\alpha]), \quad (74)$$

luego, analizando por componentes el operador divergencia se tiene

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial x} (n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha x} \vec{u}_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial y} (n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha y} \vec{u}_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial z} (n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha z} \vec{u}_{\alpha}). \quad (75)$$

Esta expresión se puede reescribir de la forma

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}) = \overbrace{n_{\alpha} m_{\alpha} \left(u_{\alpha x} \frac{\partial \vec{u}_{\alpha}}{\partial x} + u_{\alpha y} \frac{\partial \vec{u}_{\alpha}}{\partial y} + u_{\alpha z} \frac{\partial \vec{u}_{\alpha}}{\partial z} \right)}^1 + \underbrace{\vec{u}_{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x} (n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha x}) + \frac{\partial}{\partial y} (n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha y}) + \frac{\partial}{\partial z} (n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha z}) \right]}_2. \quad (76)$$

En el término denominado 1 en la expresión anterior se puede identificar un producto vectorial entre \vec{u}_{α} y el gradiente del mismo. Asimismo, en el término denominado 2 de la misma expresión se puede identificar un producto entre \vec{u}_{α} y la divergencia de $n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}$, quedando entonces la expresión de la forma

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}) = n_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{u}_{\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\alpha} + \vec{u}_{\alpha} [\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})]. \quad (77)$$

Reemplazando (77) en (73)

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v} \rangle_{\alpha}) = \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{c}_{\alpha} \vec{c}_{\alpha} \rangle) + n_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{u}_{\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\alpha} + \vec{u}_{\alpha} [\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha})]. \quad (78)$$

De acá se obtiene entonces que la cantidad $n_\alpha m_\alpha \langle \vec{c}_\alpha \vec{c}_\alpha \rangle$ es el tensor de presión cinética, el cual se puede escribir como

$$\mathbb{P}_\alpha = n_\alpha m_\alpha \langle \vec{c}_\alpha \vec{c}_\alpha \rangle = \mathbb{M}_\alpha + p_\alpha \mathbb{I}, \quad (79)$$

donde \mathbb{M}_α es el tensor de viscosidad y p_α es la presión cinética escalar. De esta forma

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_\alpha + \nabla_{\vec{r}} p_\alpha + n_\alpha m_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha [\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha)]. \quad (80)$$

3) Finalmente, analizando el tercer término de la parte izquierda de la ecuación (64) se encuentra que

$$-n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{v} \rangle_\alpha = -n_\alpha \left\langle \left(F_x \frac{\partial}{\partial v_x} \hat{e}_x + F_y \frac{\partial}{\partial v_y} \hat{e}_y + F_z \frac{\partial}{\partial v_z} \hat{e}_z \right) \vec{v} \right\rangle_\alpha, \quad (81)$$

lo cual se puede reescribir como

$$-n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{v} \rangle_\alpha = -n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha \quad (82)$$

Reemplazando los términos (67), (80) y (82) en (64) se obtiene

$$\begin{aligned}
 n_\alpha m_\alpha \partial_t \vec{u}_\alpha - \vec{u}_\alpha \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha) + m_\alpha \vec{u}_\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V + \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_\alpha + \nabla_{\vec{r}} p_\alpha + \\
 n_\alpha m_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha [\nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha)] - n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha = \partial_t (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha)_{coll},
 \end{aligned} \tag{83}$$

expresión que se puede simplificar de la forma

$$\begin{aligned}
 n_\alpha m_\alpha \partial_t \vec{u}_\alpha + m_\alpha \vec{u}_\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V + \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_\alpha + n_\alpha m_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_\alpha - n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha \\
 + \nabla_{\vec{r}} p_\alpha = \partial_t (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha)_{coll},
 \end{aligned} \tag{84}$$

y reescribiendo

$$\begin{aligned}
 n_\alpha m_\alpha (\partial_t + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_\alpha + \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_\alpha + \nabla_{\vec{r}} p_\alpha - n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha \\
 = \partial_t (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha)_{coll} - m_\alpha \vec{u}_\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V.
 \end{aligned} \tag{85}$$

Teniendo en cuenta que $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$, la ecuación de conservación de momento se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \rho_{m\alpha} (\partial_t + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_\alpha + \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_\alpha + \nabla_{\vec{r}} p_\alpha - n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha \\
 = \partial_t (\rho_{m\alpha} \langle \vec{v} \rangle_\alpha)_{coll} - m_\alpha \vec{u}_\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V.
 \end{aligned} \tag{86}$$

Considerando la derivada Lagrangiana $\left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}\right)$

$$\rho_{m\alpha} \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_\alpha - \nabla_{\vec{r}} p_\alpha + \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha S_\alpha. \quad (87)$$

donde se ha tenido en cuenta la expresión (62) y además

$$\vec{R}_\alpha = \partial_t (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha)_{coll} = m_\alpha \int \vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V. \quad (88)$$

Conservación de la energía

Para hallar la ecuación de conservación de la energía se parte de la ecuación de Boltzmann dada por (4) y del tercer momento canónico $g(\vec{v}_\alpha) = \frac{1}{2} m_\alpha |\vec{v}_\alpha|^2$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_t \left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle_\alpha \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m \vec{v} v^2 \right\rangle_\alpha \right) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \left\langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \left(\frac{1}{2} m_\alpha v^2 \right) \right\rangle_\alpha \\ = \partial_t \left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle_\alpha \right)_{coll}. \end{aligned} \quad (89)$$

Teniendo en cuenta que $\langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha$ y además que m_α no depende de las componentes de la velocidad, se encuentra

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} v^2 \rangle_\alpha \right) - \frac{n_\alpha}{2 m_\alpha} m_\alpha \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} v^2 \rangle_\alpha \\ = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right)_{coll}. \end{aligned} \quad (90)$$

Al igual que en la conservación del momento, hay que tener en cuenta la expresión (68), a lo cual se le calcula la magnitud al cuadrado obteniendo

$$|\vec{v}|^2 = v^2 = |\vec{c}_\alpha + \langle \vec{v} \rangle_\alpha|^2 = c_\alpha^2 + 2\vec{c}_\alpha \cdot \langle \vec{v} \rangle_\alpha + |\langle \vec{v} \rangle_\alpha|^2, \quad (91)$$

lo cual se puede reescribir teniendo en cuenta (59) de la forma

$$v^2 = c_\alpha^2 + 2\vec{c}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + u_\alpha^2. \quad (92)$$

Calculando el promedio de la expresión anterior

$$\langle v^2 \rangle_\alpha = \langle c_\alpha^2 \rangle + 2\langle \vec{c}_\alpha \rangle \cdot \langle \vec{v} \rangle_\alpha + \langle u_\alpha^2 \rangle, \quad (93)$$

donde el segundo término de la parte derecha se cancela debido a que $\langle \vec{c}_\alpha \rangle = 0$. Ahora, recordando que \vec{u}_α es un promedio como tal, la expresión queda como

$$\langle v^2 \rangle_\alpha = \langle c_\alpha^2 \rangle + u_\alpha^2. \quad (94)$$

1) Analizando el primer término de la parte izquierda de la ecuación (90) se encuentra que

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right) = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 \right) + \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle c_\alpha^2 \rangle \right). \quad (95)$$

Teniendo en cuenta que

$$Np_\alpha = n_\alpha m_\alpha \langle c_\alpha^2 \rangle, \quad (96)$$

donde N es el número de grados de libertad de un gas, la expresión anterior queda de la forma

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right) = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 \right) + \partial_t \left(\frac{1}{2} N p_\alpha \right) = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right). \quad (97)$$

2) Ahora, analizando el segundo término de la parte izquierda de la ecuación (90), se observa que se puede expresar como

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} v^2 \rangle_\alpha \right) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha \right]. \quad (98)$$

Teniendo en cuenta (68) y (59) se calcula

$$\begin{aligned} \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha &= \langle (c_\alpha^2 + 2\vec{c}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + u_\alpha^2) (\vec{c}_\alpha + \vec{u}_\alpha) \rangle, \\ &= u_\alpha^2 \vec{u}_\alpha + u_\alpha^2 \langle \vec{c}_\alpha \rangle + 2(\vec{u}_\alpha \cdot \langle \vec{c}_\alpha \rangle) \vec{u}_\alpha + 2\vec{u}_\alpha \cdot \langle \vec{c}_\alpha \vec{c}_\alpha \rangle + \vec{u}_\alpha \langle c_\alpha^2 \rangle + \langle c_\alpha^2 \vec{c}_\alpha \rangle, \\ &= u_\alpha^2 \vec{u}_\alpha + 2\vec{u}_\alpha \cdot \langle \vec{c}_\alpha \vec{c}_\alpha \rangle + \vec{u}_\alpha \langle c_\alpha^2 \rangle + \langle c_\alpha^2 \vec{c}_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (99)$$

Insertando este resultado en (98)

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v} v^2 \rangle_{\alpha} \right) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} (u_{\alpha}^2 \vec{u}_{\alpha} + 2 \vec{u}_{\alpha} \cdot \langle \vec{c}_{\alpha} \vec{c}_{\alpha} \rangle + \vec{u}_{\alpha} \langle c_{\alpha}^2 \rangle + \langle c_{\alpha}^2 \vec{c}_{\alpha} \rangle) \right]. \quad (100)$$

Esta nueva expresión se puede reescribir teniendo en cuenta (79) y (96) de la forma

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v} v^2 \rangle_{\alpha} \right) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha}^2 \vec{u}_{\alpha} + \mathbb{P}_{\alpha} \cdot \vec{u}_{\alpha} + \frac{N}{2} p_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} + \frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle c_{\alpha}^2 \vec{c}_{\alpha} \rangle \right]. \quad (101)$$

Se define el vector flujo de calor de la forma

$$\vec{q}_{\alpha} = \frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle c_{\alpha}^2 \vec{c}_{\alpha} \rangle, \quad (102)$$

por lo que (101) queda de la forma

$$\nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle \vec{v} v^2 \rangle_{\alpha} \right) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha}^2 + \frac{N}{2} p_{\alpha} \right) \vec{u}_{\alpha} + \mathbb{P}_{\alpha} \cdot \vec{u}_{\alpha} + \vec{q}_{\alpha} \right]. \quad (103)$$

3) Finalmente, analizando el tercer término de la parte izquierda de (90), se reescribe usando

$$\nabla_{\vec{v}} v^2 = \nabla_{\vec{v}} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2 \vec{v} \times \nabla_{\vec{v}} \times \vec{v} + 2 (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}}) \vec{v}. \quad (104)$$

De la expresión anterior, el término relacionado al rotacional de \vec{v} es cero, debido a que las com-

ponentes de la velocidad no dependen de las demás componentes, por lo que

$$\nabla_{\vec{v}} v^2 = 2(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}}) \vec{v}. \quad (105)$$

Esto se reescribe de la forma

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{v}} v^2 &= 2 \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + v_y \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + v_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right) \vec{v} \\ &= 2(v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y + v_z \hat{e}_z) = 2\vec{v}. \end{aligned} \quad (106)$$

Usando esta expresión se tiene entonces

$$-\frac{n_\alpha}{2} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} v^2 \rangle_\alpha = -n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_\alpha. \quad (107)$$

Reemplazando los términos (97), (103) y (107) en (90) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \vec{u}_\alpha + \mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{q}_\alpha \right] - n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_\alpha \\ = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right)_{coll}. \end{aligned} \quad (108)$$

Usando (79) en la expresión anterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha}^2 + \frac{N}{2} p_{\alpha} \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha}^2 + \frac{N}{2} p_{\alpha} \right) \vec{u}_{\alpha} + \mathbb{M}_{\alpha} \cdot \vec{u}_{\alpha} + p_{\alpha} \mathbb{I} \cdot \vec{u}_{\alpha} + \vec{q}_{\alpha} \right] \\ - n_{\alpha} \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_{\alpha} = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v^2 \rangle_{\alpha} \right)_{coll}, \end{aligned} \quad (109)$$

lo que nos permite reescribir la ecuación de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha}^2 + \frac{N}{2} p_{\alpha} \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha}^2 + \frac{N+2}{2} p_{\alpha} \right) \vec{u}_{\alpha} + \mathbb{M}_{\alpha} \cdot \vec{u}_{\alpha} + \vec{q}_{\alpha} \right] \\ - n_{\alpha} \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_{\alpha} = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v^2 \rangle_{\alpha} \right)_{coll}. \end{aligned} \quad (110)$$

Para simplificar esta ecuación es necesario reescribirla de la forma

$$\begin{aligned} \overbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha}^2 \right)}^a + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{2} p_{\alpha} \right) + \overbrace{\nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} u_{\alpha}^2 \right)}^b + \\ \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N+2}{2} p_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} + \mathbb{M}_{\alpha} \cdot \vec{u}_{\alpha} + \vec{q}_{\alpha} \right) - n_{\alpha} \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_{\alpha} = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v^2 \rangle_{\alpha} \right)_{coll}. \end{aligned} \quad (111)$$

Luego, los términos denominados a y b de la expresión anterior se agrupan y se reescriben como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 \vec{u}_\alpha \right) &= \frac{1}{2} u_\alpha^2 \partial_t (n_\alpha m_\alpha) + n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \partial_t \vec{u}_\alpha \\ &+ \frac{1}{2} u_\alpha^2 \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha) + n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot [(\vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_\alpha]. \end{aligned} \quad (112)$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 \vec{u}_\alpha \right) &= \frac{1}{2} u_\alpha^2 [\partial_t (n_\alpha m_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha)] \\ &+ n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot [\partial_t + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}] \vec{u}_\alpha. \end{aligned} \quad (113)$$

Ahora, usando la conservación de la masa (60) y la definición de derivada Lagrangiana se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha u_\alpha^2 \vec{u}_\alpha \right) = \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha + n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt}. \quad (114)$$

Reemplazando esta expresión en (111)

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{N}{2} p_\alpha \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N+2}{2} p_\alpha \vec{u}_\alpha \right) + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha + n_\alpha m_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{M}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_\alpha \\ - n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_\alpha = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right)_{coll} \end{aligned} \quad (115)$$

Ahora, usando la conservación del momento (87), el cuarto término del lado izquierdo de la expresi-

sión anterior se puede escribir como

$$n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \cdot \frac{D\vec{u}_{\alpha}}{Dt} = n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \cdot \langle \vec{F} \rangle_{\alpha} - \vec{u}_{\alpha} \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_{\alpha}) - \vec{u}_{\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}} p_{\alpha} + \vec{u}_{\alpha} \cdot \vec{R}_{\alpha} - u_{\alpha}^2 S_{\alpha} \quad (116)$$

Insertando esta expresión en (115)

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{N}{2} p_{\alpha} \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N+2}{2} p_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} u_{\alpha}^2 S_{\alpha} + n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \cdot \langle \vec{F} \rangle_{\alpha} - \vec{u}_{\alpha} \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_{\alpha}) - \vec{u}_{\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}} p_{\alpha} \\ + \vec{u}_{\alpha} \cdot \vec{R}_{\alpha} - u_{\alpha}^2 S_{\alpha} + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{M}_{\alpha} \cdot \vec{u}_{\alpha}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_{\alpha} - n_{\alpha} \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_{\alpha} = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v^2 \rangle_{\alpha} \right)_{coll}. \end{aligned} \quad (117)$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{N}{2} p_{\alpha} \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N+2}{2} p_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \right) - \frac{1}{2} u_{\alpha}^2 S_{\alpha} - \vec{u}_{\alpha} \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_{\alpha}) - \vec{u}_{\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}} p_{\alpha} \\ + \vec{u}_{\alpha} \cdot \vec{R}_{\alpha} + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{M}_{\alpha} \cdot \vec{u}_{\alpha}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_{\alpha} = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v^2 \rangle_{\alpha} \right)_{coll}. \end{aligned} \quad (118)$$

Reescribiendo

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \left(\frac{N}{2} p_\alpha \right) + \frac{N+2}{2} (p_\alpha \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}} p_\alpha) - \vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}} p_\alpha \\
 & = -\vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{M}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_\alpha + \vec{u}_\alpha \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_\alpha) + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha + \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right)_{coll}.
 \end{aligned} \tag{119}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{u}_\alpha \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_\alpha) - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{M}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) = -(\mathbb{M}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_\alpha$, la expresión anterior se reescribe de la forma

$$\begin{aligned}
 \frac{N}{2} (\partial_t + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) p_\alpha + \frac{N+2}{2} p_\alpha \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_\alpha & = -(\mathbb{M}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_\alpha - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha \\
 & - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha + \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right)_{coll}.
 \end{aligned} \tag{120}$$

Usando nuevamente la definición de la derivada Lagrangiana

$$\frac{N}{2} \frac{Dp_\alpha}{Dt} + \frac{N+2}{2} p_\alpha \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_\alpha = -(\mathbb{M}_\alpha \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_\alpha - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha + H_\alpha, \tag{121}$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$H_\alpha = \partial_t \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right)_{coll} = m_\alpha \int \frac{v^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3V. \tag{122}$$

Apéndice B. Fluido cargado

Para acoplar las ecuaciones de los iones y electrones primero hay que establecer ciertas definiciones. Es importante mencionar que el subíndice c hace referencia a las partículas con carga.

Para la densidad de masa se tiene

$$\rho_{mc} = \rho_{me} + \rho_{mi}. \quad (123)$$

Para la densidad de carga

$$\rho_q = q_i n_i + q_e n_e = eZn_i - en_e, \quad (124)$$

donde e es la carga del electrón y Z es el número atómico de los iones. Para la densidad de corrientes de masa

$$\vec{j}_{mc} = \rho_{mc} \vec{u}_c = \rho_{me} \vec{u}_e + \rho_{mi} \vec{u}_i, \quad (125)$$

definición de la cual se puede obtener la velocidad de las partículas con carga de la forma

$$\vec{u}_c = \frac{\rho_{me} \vec{u}_e + \rho_{mi} \vec{u}_i}{\rho_{me} + \rho_{mi}}. \quad (126)$$

Se define igualmente una velocidad de difusión

$$\vec{w}_\mu = \vec{u}_\mu - \vec{u}_c, \quad (127)$$

la cual corresponde a una velocidad relativa entre la velocidad individual de las partículas que conforman el fluido (iones y electrones) con la velocidad general del fluido, por lo que el subíndice μ puede corresponder tanto a iones como a electrones (i o e). Particularmente, esta velocidad de difusión cumple que

$$\sum_{\mu} n_{\mu} m_{\mu} \vec{w}_{\mu} = 0. \quad (128)$$

Esto se puede demostrar de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} n_{\mu} m_{\mu} \vec{w}_{\mu} &= \sum_{\mu} (n_{\mu} m_{\mu} \vec{u}_{\mu} - n_{\mu} m_{\mu} \vec{u}_c) \\ &= n_i m_i \vec{u}_i + n_e m_e \vec{u}_e - (n_i m_i + n_e m_e) \vec{u}_c \\ &= \rho_{mi} \vec{u}_i + \rho_{me} \vec{u}_c - (\rho_{mi} + \rho_{me}) \vec{u}_c \\ &= \rho_{mc} \vec{u}_c - \rho_{mc} \vec{u}_c = 0. \end{aligned}$$

Se define la densidad de corriente de carga

$$\vec{j} = \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} \vec{u}_{\mu} = \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} (\vec{w}_{\mu} + \vec{u}_c) = \rho_q \vec{u}_c + \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} \vec{w}_{\mu}. \quad (129)$$

Con estas definiciones básicas es posible definir otras cantidades físicas como el tensor de presión cinética, que ya había sido definido para cualquier partícula en la ecuación (79), por lo que ahora, para las partículas con carga μ este estará dado por

$$\mathbb{P}_\mu = n_\mu m_\mu \langle \vec{c}_\mu \vec{c}_\mu \rangle, \quad (130)$$

donde ahora $\vec{c}_\mu = \vec{v}_c - \langle \vec{v}_c \rangle_\mu = \vec{v}_c - \vec{u}_\mu$ (ver ecuación (68)), recordando que $\langle \vec{v}_c \rangle_\mu = \vec{u}_\mu$ por (59).

Sin embargo, si se habla de las partículas con carga como un todo, es decir, que componen un solo fluido, es necesario definir esta velocidad relativa de forma análoga como

$$\vec{c}_{0\mu} = \vec{v}_c - \langle \vec{v} \rangle_c = \vec{v}_c - \vec{u}_c, \quad (131)$$

donde $\langle \vec{v} \rangle_c = \vec{u}_c$. Con esto, el tensor de presión cinética para el fluido cargado estará dado por

$$\mathbb{P}_c = \sum_\mu \rho_{m\mu} \langle \vec{c}_{0\mu} \vec{c}_{0\mu} \rangle, \quad (132)$$

el cual se puede redefinir teniendo en cuenta las definiciones de \vec{v}_c y \vec{u}_c , obteniendo

$$\vec{c}_{0\mu} = \vec{c}_\mu + \vec{u}_\mu - \vec{u}_\mu + \vec{w}_\mu = \vec{c}_\mu + \vec{w}_\mu. \quad (133)$$

Entonces, el tensor de presión cinética para el fluido cargado queda de la forma

$$\mathbb{P}_c = \sum_\mu \rho_{m\mu} \left[\langle \vec{c}_\mu \vec{c}_\mu \rangle + \langle \vec{c}_\mu \vec{w}_\mu \rangle + \langle \vec{w}_\mu \vec{c}_\mu \rangle + \langle \vec{w}_\mu \vec{w}_\mu \rangle \right]. \quad (134)$$

Recordando que $\langle \vec{c}_\mu \rangle = 0$, el tensor se reduce a

$$\mathbb{P}_c = \sum_{\mu} \rho_{m\mu} [\langle \vec{c}_{\mu} \vec{c}_{\mu} \rangle + \langle \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu} \rangle]. \quad (135)$$

Debido a que \vec{w}_{μ} está definido como la suma de dos cantidades que representan un promedio, se tiene entonces

$$\mathbb{P}_c = \sum_{\mu} \rho_{m\mu} [\langle \vec{c}_{\mu} \vec{c}_{\mu} \rangle + \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}]. \quad (136)$$

Teniendo en cuenta (130)

$$\mathbb{P}_c = \sum_{\mu} \mathbb{P}_{\mu} + \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \langle \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu} \rangle. \quad (137)$$

Ahora, definiendo la presión cinética escalar para las partículas con carga teniendo en cuenta (96)

$$Np_{\mu} = \rho_{m\mu} \langle c_{\mu}^2 \rangle, \quad (138)$$

y la presión cinética escalar del fluido cargado en términos de la traza de \mathbb{P}_c como

$$p_c = \frac{1}{N} \sum_i \mathbb{P}_{c_{ii}} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \langle \vec{c}_{0\mu_i} \vec{c}_{0\mu_i} \rangle. \quad (139)$$

Definiendo ahora el flujo de calor para el fluido cargado teniendo en cuenta (102)

$$\vec{q}_c = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \langle c_{0\mu}^2 \vec{c}_{0\mu} \rangle. \quad (140)$$

Finalmente, la densidad de energía térmica para el fluido cargado

$$\frac{N}{2} p_c = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \rho_{m\mu} \langle c_{0\mu}^2 \rangle. \quad (141)$$

Conservación de la masa

Para la conservación de la masa se tiene entonces

$$\sum_{\mu} \partial_t \rho_{m\mu} + \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) = \sum_{\mu} S_{\mu}. \quad (142)$$

Sabiendo que la derivada temporal y el operador divergencia no depende de las sumatoria, la expresión anterior se puede reescribir como

$$\partial_t \sum_{\mu} \rho_{m\mu} + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\sum_{\mu} \rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} \right) = \sum_{\mu} S_{\mu}. \quad (143)$$

Abriendo las sumatorias

$$\partial_t (\rho_{mi} + \rho_{me}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mi} \vec{u}_i + \rho_{me} \vec{u}_e) = S_i + S_e. \quad (144)$$

Teniendo en cuenta (123) y (126)

$$\partial_t (\rho_{mc}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) = S_c, \quad (145)$$

donde se ha tomado $S_c = S_i + S_e$.

Conservación del momento

Para la conservación del momento se tiene

$$\sum_{\mu} \rho_{m\mu} [\partial_t \vec{u}_{\mu} + (\vec{u}_{\mu} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\mu}] = \sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \rangle_{\mu} - \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_{\mu} - \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} p_{\mu} + \sum_{\mu} \vec{R}_{\mu} - \sum_{\mu} \vec{u}_{\mu} S_{\mu}, \quad (146)$$

lo cual se puede reescribir si se tiene en cuenta que $\mathbb{P}_{\mu} = \mathbb{M}_{\mu} + p_{\mu} \mathbb{I}$ similar a (79) de la forma

$$\sum_{\mu} \rho_{m\mu} [\partial_t \vec{u}_{\mu} + (\vec{u}_{\mu} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\mu}] = \sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \rangle_{\mu} - \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_{\mu} + \sum_{\mu} \vec{R}_{\mu} - \sum_{\mu} \vec{u}_{\mu} S_{\mu}. \quad (147)$$

Esto se reescribe teniendo en cuenta (137) como

$$\sum_{\mu} \rho_{m\mu} [\partial_t \vec{u}_{\mu} + (\vec{u}_{\mu} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\mu}] = \sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \rangle_{\mu} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c + \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}) + \sum_{\mu} \vec{R}_{\mu} - \sum_{\mu} \vec{u}_{\mu} S_{\mu}. \quad (148)$$

Utilizando la ecuación de conservación de la masa dada por (142) es posible reescribir el último término de la parte derecha de la expresión anterior de la forma

$$\sum_{\mu} \vec{u}_{\mu} S_{\mu} = \sum_{\mu} \vec{u}_{\mu} [\partial_t \rho_{m\mu} + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu})]. \quad (149)$$

Insertando (149) en (148)

$$\begin{aligned}
 \overbrace{\sum_{\mu} \rho_{m\mu} [\partial_t \vec{u}_{\mu} + (\vec{u}_{\mu} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\mu}]}^a &= \sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \rangle_{\mu} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c + \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}) + \sum_{\mu} \vec{R}_{\mu} \\
 &\quad - \underbrace{\sum_{\mu} \vec{u}_{\mu} [\partial_t \rho_{m\mu} + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu})]}_b.
 \end{aligned} \tag{150}$$

Ahora, los términos denominados a y b se agrupan y se operan

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu} \{ \rho_{m\mu} [\partial_t \vec{u}_{\mu} + (\vec{u}_{\mu} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\mu}] + \vec{u}_{\mu} [\partial_t \rho_{m\mu} + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu})] \} &= \\
 \sum_{\mu} [\rho_{m\mu} \partial_t \vec{u}_{\mu} + \rho_{m\mu} (\vec{u}_{\mu} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\mu} + \vec{u}_{\mu} \partial_t \rho_{m\mu} + \vec{u}_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu})] &.
 \end{aligned} \tag{151}$$

Esta expresión se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu} [\rho_{m\mu} \partial_t \vec{u}_{\mu} + \rho_{m\mu} (\vec{u}_{\mu} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_{\mu} + \vec{u}_{\mu} \partial_t \rho_{m\mu} + \vec{u}_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu})] &= \\
 \sum_{\mu} [\partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} \vec{u}_{\mu})] &.
 \end{aligned} \tag{152}$$

Ahora, usando (127)

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} [\partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} \vec{u}_{\mu})] = \\ \sum_{\mu} \{ \partial_t (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu}) + \partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot [\rho_{m\mu} (\vec{w}_{\mu} + \vec{u}_c) (\vec{w}_{\mu} + \vec{u}_c)] \}, \end{aligned} \quad (153)$$

donde el primer término de la parte derecha se hace cero debido (128). Luego

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} [\partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} \vec{u}_{\mu})] = \sum_{\mu} [\partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_c) \\ + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_c \vec{u}_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{u}_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_c \vec{w}_{\mu})]. \end{aligned} \quad (154)$$

En esta ecuación los últimos dos términos de la parte derecha se hacen cero debido a (128). De lo resultante se abren las primeras sumatorias obteniendo

$$\sum_{\mu} [\partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} \vec{u}_{\mu})] = \partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c) + \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}). \quad (155)$$

Seguido a esto, se usa la regla de Leibniz para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} [\partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} \vec{u}_{\mu})] = \\ \rho_{mc} \partial_t (\vec{u}_c) + \vec{u}_c \partial_t (\rho_{mc}) + \rho_{mc} (\vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_c + \vec{u}_c \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) + \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}), \end{aligned} \quad (156)$$

donde se puede observar que el primer y tercer término de la parte derecha pueden conformar una derivada Lagrangiana multiplicada por la densidad de masa; y el segundo y cuarto término, la conservación de la masa para las partículas cargadas dada por (145) multiplicada por la velocidad, de la forma

$$\sum_{\mu} [\partial_t (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{u}_{\mu} \vec{u}_{\mu})] = \rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} + \vec{u}_c S_c + \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}). \quad (157)$$

Recordando que este término surgió de sumar los términos a y b de (150) se escribe entonces esta ecuación como

$$\begin{aligned} \rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} + \vec{u}_c S_c + \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}) &= \sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \rangle_{\mu} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c \\ &+ \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{m\mu} \vec{w}_{\mu} \vec{w}_{\mu}) + \sum_{\mu} \vec{R}_{\mu}. \end{aligned} \quad (158)$$

Esta expresión se simplifica y resulta

$$\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} + \vec{u}_c S_c = \sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \rangle_{\mu} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c + \sum_{\mu} \vec{R}_{\mu}. \quad (159)$$

Se abren las sumatorias, se reemplaza $\mathbb{P}_c = \mathbb{M}_c + p_c \mathbb{I}$ y se despeja el término $\vec{u}_c S_c$ obteniendo

$$\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = n_i \langle \vec{F} \rangle_i + n_e \langle \vec{F} \rangle_e - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_c - \nabla_{\vec{r}} p_c + \vec{R}_i + \vec{R}_e - \vec{u}_c S_c. \quad (160)$$

Finalmente, se toma $\vec{R}_c = \vec{R}_i + \vec{R}_e$ y la expresión anterior queda de la forma

$$\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = n_i \langle \vec{F} \rangle_i + n_e \langle \vec{F} \rangle_e - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_c - \nabla_{\vec{r}} p_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c. \quad (161)$$

Ahora, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre el fluido cargado, es decir, sobre los iones y electrones, se considera la fuerza electromagnética y la fuerza gravitacional dadas por

$$\vec{F}_\mu = q_\mu \vec{E} + q_\mu (\vec{v}_\mu \times \vec{B}) + \rho_{m\mu} \vec{g}. \quad (162)$$

Esta expresión es la misma tanto para iones como electrones, entonces

$$n_i \langle \vec{F} \rangle_i + n_e \langle \vec{F} \rangle_e = n_i q_i \vec{E} + n_i q_i (\vec{v}_i \times \vec{B}) + \rho_{mi} \vec{g} + n_e q_e \vec{E} + n_e q_e (\vec{v}_e \times \vec{B}) + \rho_{me} \vec{g}, \quad (163)$$

lo que se puede reescribir como

$$n_i \langle \vec{F} \rangle_i + n_e \langle \vec{F} \rangle_e = (n_i q_i + n_e q_e) \vec{E} + (n_i q_i \vec{v}_i + n_e q_e \vec{v}_e) \times \vec{B} + (\rho_{mi} + \rho_{me}) \vec{g}, \quad (164)$$

obteniendo

$$n_i \langle \vec{F} \rangle_i + n_e \langle \vec{F} \rangle_e = \rho_q \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g}. \quad (165)$$

Esto se reemplaza en (161) encontrando

$$\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = \rho_q \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_c - \nabla_{\vec{r}} p_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c. \quad (166)$$

Conservación de la energía

Para la conservación de la energía del fluido cargado se comenzará de (89), sin embargo, el término asociado a las fuerzas externas, es decir, el tercer término del lado derecho de dicha ecuación se tomará como (107). Adicionalmente, vamos a tomar el término de colisiones como (122). Todo esto sumado sobre las partículas μ

$$\sum_{\mu} \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle v_c^2 \rangle_{\mu} \right) + \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle v_c^2 \vec{v}_c \rangle_{\mu} \right) - \sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \cdot \vec{v}_c \rangle_{\mu} = \sum_{\mu} H_{\mu} \quad (167)$$

1) Analizando el primer término de la parte derecha de (167), al reemplazar

$$\partial_t \sum_{\mu} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle v_c^2 \rangle_{\mu} \right) = \partial_t \sum_{\mu} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c \rangle_{\mu} \right). \quad (168)$$

Se calcula

$$\vec{v}_c \cdot \vec{v}_c = (\vec{c}_{0\mu} + \vec{u}_c) \cdot (\vec{c}_{0\mu} + \vec{u}_c) = c_{0\mu}^2 + u_c^2 + 2\vec{c}_{0\mu} \cdot \vec{u}_c, \quad (169)$$

lo cual se reemplaza en (168)

$$\partial_t \sum_{\mu} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle v_c^2 \rangle_{\mu} \right) = \partial_t \sum_{\mu} \frac{1}{2} \rho_{m\mu} (\langle c_{0\mu}^2 + u_c^2 + 2\vec{c}_{0\mu} \cdot \vec{u}_c \rangle). \quad (170)$$

Reescribiendo

$$\partial_t \sum_{\mu} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle v_c^2 \rangle_{\mu} \right) = \partial_t \sum_{\mu} \frac{1}{2} \rho_{m\mu} (\langle c_{0\mu}^2 \rangle + \langle u_c^2 \rangle + 2\langle \vec{c}_{0\mu} \rangle \cdot \langle \vec{u}_c \rangle). \quad (171)$$

Recordando que \vec{u}_c ya es un promedio y que $\langle \vec{c}_{\mu} \rangle = \langle \vec{c}_{\mu} \rangle + \langle \vec{w}_{\mu} \rangle = \vec{w}_{\mu}$ la expresión anterior queda de la forma

$$\partial_t \sum_{\mu} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle v_c^2 \rangle_{\mu} \right) = \partial_t \sum_{\mu} \frac{1}{2} \rho_{m\mu} (\langle c_{0\mu}^2 \rangle + u_c^2 + 2\vec{w}_{\mu} \cdot \vec{u}_c). \quad (172)$$

En esta expresión la sumatoria sobre \vec{w}_{μ} se anula debido a (128). Se separan las sumatorias restantes obteniendo

$$\partial_t \sum_{\mu} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle v_c^2 \rangle_{\mu} \right) = \partial_t \sum_{\mu} \frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle c_{0\mu}^2 \rangle + \partial_t \sum_{\mu} \frac{1}{2} \rho_{m\mu} u_c^2. \quad (173)$$

Se reemplaza (141) en la expresión anterior y haciendo la sumatoria y resulta

$$\partial_t \sum_{\mu} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle v_c^2 \rangle_{\mu} \right) = \partial_t \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right). \quad (174)$$

2) Ahora, analizando el segundo término de la parte derecha de (167) se estudia primero el término

$$\langle v_c^2 \vec{v}_c \rangle_{\mu} = \langle (c_{0\mu}^2 + u_c^2 + 2\vec{c}_{0\mu} \cdot \vec{u}_c) (\vec{c}_{0\mu} + \vec{u}_c) \rangle, \quad (175)$$

lo que se puede reescribir como

$$\langle v_c^2 \vec{v}_c \rangle_{\mu} = \langle c_{0\mu}^2 \vec{c}_{0\mu} \rangle + u_c^2 \vec{w}_{\mu} + 2\langle \vec{c}_{0\mu} \vec{c}_{0\mu} \rangle \cdot \vec{u}_c + \langle c_{0\mu}^2 \rangle \vec{u}_c + u_c^2 \vec{u}_c + 2(\vec{w}_{\mu} \cdot \vec{u}_c) \vec{u}_c. \quad (176)$$

Con esto, este segundo término se reescribe como

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle v_c^2 \vec{v}_c \rangle_{\mu} \right) &= \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\sum_{\mu} \frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle c_{0\mu}^2 \vec{c}_{0\mu} \rangle \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\sum_{\mu} \rho_{m\mu} \langle \vec{c}_{0\mu} \vec{c}_{0\mu} \rangle \cdot \vec{u}_c \right) \\ &+ \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\sum_{\mu} \frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle c_{0\mu}^2 \rangle \vec{u}_c \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\sum_{\mu} \frac{1}{2} \rho_{m\mu} u_c^2 \vec{u}_c \right). \end{aligned} \quad (177)$$

Usando las ecuaciones (140), (137) y (141), y haciendo la sumatoria resultante se llega a

$$\sum_{\mu} \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{m\mu} \langle v_c^2 \vec{v}_c \rangle_{\mu} \right) = \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N}{2} p_c \vec{u}_c \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \vec{u}_c \right). \quad (178)$$

3) Finalmente, analizando el tercer término, se deben tener en cuenta las fuerzas que actúan sobre el fluido. Al ser un fluido cargado, estas fuerzas son la fuerza electromagnética y la fuerza gravitacional dada por (162). Entonces

$$\sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \cdot \vec{v}_c \rangle_{\mu} = \sum_{\mu} n_{\mu} \left[q_{\mu} \langle \vec{E} \cdot \vec{v}_c \rangle + q_{\mu} \langle (\vec{v}_c \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_c \rangle_{\mu} + m_{\mu} \langle \vec{g} \cdot \vec{v}_c \rangle_{\mu} \right]. \quad (179)$$

En esta expresión, el segundo término del lado derecho de la ecuación se hace cero debido a que el producto cruz entre la velocidad y el campo magnético genera un vector perpendicular a la velocidad, y al hacer el producto punto con la velocidad nuevamente esto se hace cero, quedando de la forma

$$\sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \cdot \vec{v}_c \rangle_{\mu} = \sum_{\mu} n_{\mu} q_{\mu} \langle \vec{E} \cdot \vec{v}_c \rangle + \sum_{\mu} n_{\mu} m_{\mu} \langle \vec{g} \cdot \vec{v}_c \rangle_{\mu}. \quad (180)$$

Abriendo las sumatorias y teniendo en cuenta que ni el campo eléctrico ni la gravedad se ven afectadas por el promedio ni la sumatoria, se obtiene que

$$\sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \cdot \vec{v}_c \rangle_{\mu} = \vec{E} \cdot \sum_{\mu} n_{\mu} q_{\mu} \vec{u}_{\mu} + \vec{g} \cdot \sum_{\mu} n_{\mu} m_{\mu} \vec{u}_{\mu}, \quad (181)$$

lo cual se puede reescribir usando (125) y (129)

$$\sum_{\mu} n_{\mu} \langle \vec{F} \cdot \vec{v}_c \rangle_{\mu} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g}. \quad (182)$$

Se reemplazan las ecuaciones (174), (178) y (182) en (167)

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N}{2} p_c \vec{u}_c \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \vec{u}_c \right) \\ - \vec{j} \cdot \vec{E} - \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} = \sum_{\mu} H_{\mu} \end{aligned} \quad (183)$$

Reescribiendo el segundo y sexto término de la parte derecha de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N}{2} p_c \vec{u}_c \right) + \frac{1}{2} u_c^2 [\partial_t \rho_{mc} + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c)] + \vec{u}_c \cdot \left(\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} \right) + \nabla \cdot \vec{q}_c \\ + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) - \vec{j} \cdot \vec{E} - \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} = \sum_{\mu} H_{\mu}. \end{aligned} \quad (184)$$

Utilizando la conservación de la masa y del momento en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N}{2} p_c \vec{u}_c \right) + \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \vec{u}_c \cdot \rho_q \vec{E} + \vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} - \vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c \\ + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \vec{u}_c \cdot \vec{u}_c S_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) - \vec{j} \cdot \vec{E} - \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} = \sum_{\mu} H_{\mu} \end{aligned} \quad (185)$$

Reescribiendo y simplificando

$$\begin{aligned}
 \partial_t \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N}{2} p_c \vec{u}_c \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) - \vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c \\
 + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) + \rho_q \vec{u}_c \cdot \vec{E} - \vec{j} \cdot \vec{E} = \sum_{\mu} H_{\mu}.
 \end{aligned} \tag{186}$$

Se define ahora la densidad de corriente dada por (129) de la forma

$$\vec{j} = \vec{j}' + \rho_q \vec{u}_c, \tag{187}$$

donde \vec{j}' es la densidad de corriente de conducción, la cual representa la densidad de corriente de carga en un marco de referencia que se mueve con velocidad promedio global \vec{u}_c y el término $\rho_q \vec{u}_c$ es una densidad de corriente de carga de convección, la cual representa el flujo de la carga espacial con velocidad \vec{u}_c . Con esto, se analizan los términos de (186) que están relacionados con los campos eléctricos y magnéticos

$$\vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) + \rho_q \vec{u}_c \cdot \vec{E} - \vec{j} \cdot \vec{E} = -\vec{j}' \cdot (\vec{u}_c \times \vec{B}) + \rho_q \vec{u}_c \cdot \vec{E} - (\vec{j}' + \rho_q \vec{u}_c) \cdot \vec{E}. \tag{188}$$

Reescribiendo la expresión anterior

$$\vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) + \rho_q \vec{u}_c \cdot \vec{E} - \vec{j} \cdot \vec{E} = -\vec{j}' \cdot \vec{E} - (\vec{j}' + \rho_q \vec{u}_c) \cdot (\vec{u}_c \times \vec{B}), \tag{189}$$

lo cual se puede expresar de la forma

$$\vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) + \rho_q \vec{u}_c \cdot \vec{E} - \vec{j} \cdot \vec{E} = -\vec{j} \cdot [\vec{E} + (\vec{u}_c \times \vec{B})] = -\vec{j} \cdot \vec{E}', \quad (190)$$

donde se ha tomado $\vec{E}' = \vec{E} + (\vec{u}_c \times \vec{B})$, el cual corresponde al campo eléctrico medido por un observador que se mueve en un marco de referencia con velocidad global promedio \vec{u}_c . Reemplazando esta expresión en (186)

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N}{2} p_c \vec{u}_c \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c \\ + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) - \vec{j} \cdot \vec{E}' = \sum_{\mu} H_{\mu}. \end{aligned} \quad (191)$$

Luego, se tiene en cuenta que

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{N}{2} p_c \vec{u}_c \right) &= \partial_t \left(\frac{N}{2} p_c \right) + (\vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{N}{2} p_c + \frac{N}{2} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c \\ &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \frac{N}{2} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c, \end{aligned} \quad (192)$$

y además que $\nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) - \vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c = \mathbb{P}_c \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c)$, y se reemplazan en (191) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \frac{N}{2} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c - \vec{j} \cdot \vec{E}' + \mathbb{P}_c \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c) \\ = \sum_{\mu} H_{\mu}. \end{aligned} \quad (193)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbb{P}_c = \mathbb{M}_c + p_c \mathbb{I}$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \frac{N}{2} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c - \vec{j}' \cdot \vec{E}' + \mathbb{M}_c \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c) \\ + p_c (\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c) = \sum_{\mu} H_{\mu}. \end{aligned} \quad (194)$$

Esta expresión se puede reescribir como

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \frac{N+2}{2} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c - \vec{j}' \cdot \vec{E}' + (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c = \sum_{\mu} H_{\mu}. \quad (195)$$

Ahora, se define $\vec{E}' = \eta \vec{j}'$, donde η es la resistividad óhmica del plasma, por lo que la ecuación queda

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{N}{2} p_c \right) + \frac{N+2}{2} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c = \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \eta j'^2 - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + H_c, \quad (196)$$

donde se ha tomado $\sum_{\mu} H_{\mu} = H_i + H_e = H_c$.

Apéndice C. Ecuaciones de forma conservativa

Fluido neutro

Conservación de la masa

Esta ecuación ya se encuentra en su forma conservativa

$$\partial(\rho_{mn}) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn}\vec{u}_n) = S_n. \quad (197)$$

Conservación del momento

La ecuación de conservación del momento para las partículas neutras está dada por

$$\rho_{mn} \frac{D\vec{u}_n}{Dt} = \rho_{mn}\vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_n - \nabla_{\vec{r}} p_n + \vec{R}_n - \vec{u}_n S_n. \quad (198)$$

Abriendo la derivada Lagrangiana se tiene

$$\rho_{mn} \partial_t \vec{u}_n + \rho_{mn} (\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_n = \rho_{mn}\vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_n - \nabla_{\vec{r}} p_n + \vec{R}_n - \vec{u}_n S_n. \quad (199)$$

1) Analizando el primer término de la parte izquierda de la ecuación (199) se encuentra que se puede expresar como

$$\rho_{mn} \partial_t \vec{u}_n = \partial_t (\rho_{mn} \vec{u}_n) - \vec{u}_n \partial_t \rho_{mn}, \quad (200)$$

en donde se reemplaza la ecuación de conservación de la masa (197) obteniendo

$$\rho_{mn} \partial_t \vec{u}_n = \partial_t (\rho_{mn} \vec{u}_n) + \vec{u}_n \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n) - \vec{u}_n S_n, \quad (201)$$

2) Analizando el segundo término de la parte derecha de (199) se encuentra que se puede expresar como

$$\rho_{mn} (\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_n = -\vec{u}_n \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n). \quad (202)$$

Se reemplaza (201) en (199) obteniendo

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_{mn} \vec{u}_n) + \vec{u}_n \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n) - \vec{u}_n S_n - \vec{u}_n \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n) = \\ \rho_{mn} \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_n - \nabla_{\vec{r}} p_n + \vec{R}_n - \vec{u}_n S_n. \end{aligned} \quad (203)$$

Simplificando la ecuación anterior y usando la definición de \mathbb{P}_n

$$\partial_t (\rho_{mn} \vec{u}_n) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n) = \rho_{mn} \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_n + \vec{R}_n. \quad (204)$$

Reescribiendo

$$\partial_t (\rho_{mn} \vec{u}_n) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n + \mathbb{P}_n) = \rho_{mn} \vec{g} + \vec{R}_n. \quad (205)$$

Conservación de la energía

Para hallar la ecuación de la conservación de la energía en su forma conservativa hay que tener en cuenta que la energía en el fluido neutro está dada por

$$E_n = \frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 + \rho_{mn} e_n, \quad (206)$$

donde el primer término de la parte derecha hace referencia a la energía cinética y el segundo término a la energía interna. Si se supone que el fluido obedece a un gas ideal, se tiene que

$$p_n = (\gamma - 1) \rho_{mn} e_n, \quad (207)$$

donde γ es el índice adiabático. Ahora, para encontrar esta ecuación de forma conservativa es necesario encontrar uno a uno los términos de (206).

1) Para encontrar el término relacionado a la energía cinética se tomará la ecuación de conservación del momento dada por (198) y se opera a ambos lados por el producto punto con \vec{u}_n

$$\rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \frac{D\vec{u}_n}{Dt} = \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_n - \vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}} p_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - \vec{u}_n \cdot \vec{u}_n S_n, \quad (208)$$

lo cual se puede reescribir como

$$\rho_{mn} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_n^2 \right) = \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - u_n^2 S_n. \quad (209)$$

Se reescribe el siguiente término

$$\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_n = \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n) - (\mathbb{P}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n. \quad (210)$$

Igualmente, se reescribe

$$\rho_{mn} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_n^2 \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) - \frac{1}{2} u_n^2 \frac{D\rho_{mn}}{Dt}. \quad (211)$$

En esta última expresión se reemplaza la ecuación de conservación de la masa pero expresada en término de la derivada Lagrangiana $D_t \rho_{mn} + \rho_{mn} \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n = S_n$, obteniendo

$$\rho_{mn} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_n^2 \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) + \frac{1}{2} u_n^2 \rho_{mn} \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n - \frac{1}{2} u_n^2 S_n. \quad (212)$$

Las expresiones (210) y (212) se insertan en (213) obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) + \frac{1}{2} u_n^2 \rho_{mn} \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n - \frac{1}{2} u_n^2 S_n &= \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n) + (\mathbb{P}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n \\ &+ \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - u_n^2 S_n. \end{aligned} \quad (213)$$

El segundo término de la parte izquierda de la expresión anterior se puede reescribir como

$$\frac{1}{2} u_n^2 \rho_{mn} \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n = \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \vec{u}_n \right) - (\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2. \quad (214)$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \vec{u}_n \right) - (\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 - \frac{1}{2} u_n^2 S_n = \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} \\
 - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n) + (\mathbb{P}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - u_n^2 S_n.
 \end{aligned} \tag{215}$$

Analizando la parte izquierda de la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \vec{u}_n \right) - (\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 - \frac{1}{2} u_n^2 S_n = \\
 \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) + (\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \vec{u}_n \right) \\
 - (\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 - \frac{1}{2} u_n^2 S_n,
 \end{aligned} \tag{216}$$

lo que se puede simplificar de la forma

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \vec{u}_n \right) - (\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 - \frac{1}{2} u_n^2 S_n = \\
 \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \vec{u}_n \right) - \frac{1}{2} u_n^2 S_n.
 \end{aligned} \tag{217}$$

Reemplazando esta expresión en (218)

$$\begin{aligned}
 \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \vec{u}_n \right) - \frac{1}{2} u_n^2 S_n = \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n) \\
 + (\mathbb{P}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - u_n^2 S_n.
 \end{aligned} \tag{218}$$

Reescribiendo

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \vec{u}_n \right) - \frac{1}{2} u_n^2 S_n + \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n) \\ & + (\mathbb{P}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n. \end{aligned} \quad (219)$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right) \cdot \vec{u}_n \right] - \frac{1}{2} u_n^2 S_n + \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} \\ & + (\mathbb{P}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n, \end{aligned} \quad (220)$$

lo que se puede expresar como

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right) \cdot \vec{u}_n \right] - \frac{1}{2} u_n^2 S_n + \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} \\ & + (\mathbb{M}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n + p_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n. \end{aligned} \quad (221)$$

2) Para encontrar el segundo término de la expresión (206) se tiene

$$\frac{D}{Dt} (\rho_{mn} e_n) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{p_n}{\gamma - 1} \right). \quad (222)$$

La ecuación de conservación de la energía para las partículas neutras dada por (21) se reescribe teniendo en cuenta que

$$\gamma = \frac{N+2}{N}, \quad (223)$$

quedando de la forma

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{Dp_n}{Dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n = -(\mathbb{M}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + H_n. \quad (224)$$

Usando esta expresión en (225)

$$\frac{D}{Dt} (\rho_{mn} e_n) = -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + H_n. \quad (225)$$

Se abre la derivada Lagrangiana

$$\partial_t (\rho_{mn} e_n) + (\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \rho_{mn} e_n = -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + H_n. \quad (226)$$

El segundo término de la parte izquierda de la ecuación anterior se reescribe usando ley de Leibniz de la forma

$$(\vec{u}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \rho_{mn} e_n = \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} e_n \vec{u}_n) - \rho_{mn} e_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n, \quad (227)$$

lo cual se reemplaza en (226) encontrando

$$\begin{aligned}
 \partial_t (\rho_{mn} e_n) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} e_n \vec{u}_n) - \overbrace{\rho_{mn} e_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n}^a &= - \overbrace{\frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n}^b - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n \\
 &\quad - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + H_n.
 \end{aligned} \tag{228}$$

Los términos denominados a y b de la expresión anterior se agrupan y se obtiene

$$\begin{aligned}
 \left(\rho_{mn} e_n - \frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \right) \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n &= (\rho_{mn} e_n - \gamma \rho_{mn} e_n) \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n \\
 &= [(1 - \gamma) \rho_{mn} e_n] \rho_{mn} e_n \\
 &= -p_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n.
 \end{aligned} \tag{229}$$

Reemplazando esto en (228)

$$\begin{aligned}
 \partial_t (\rho_{mn} e_n) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} e_n \vec{u}_n) &= -p_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_n \\
 &\quad + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + H_n.
 \end{aligned} \tag{230}$$

Volviendo a (206) se calcula la derivada temporal

$$\partial_t E_n = \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \right) + \rho_{mn} e_n, \tag{231}$$

donde se reemplazan las expresiones (221) y (230)

$$\begin{aligned}
 \partial_t E_n = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right) \cdot \vec{u}_n \right] - \frac{1}{2} u_n^2 S_n + \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} + (\mathbb{M}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n \\
 & - p_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_n - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} e_n \vec{u}_n) \\
 & + p_n \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_n + H_n.
 \end{aligned} \tag{232}$$

Simplificando

$$\partial_t E_n = -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right) \cdot \vec{u}_n \right] + \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mn} e_n \vec{u}_n) - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_n + H_n. \tag{233}$$

Reescribiendo la expresión anterior

$$\partial_t E_n + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mn} u_n^2 + \rho_{mn} e_n \right) \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right] \cdot \vec{u}_n + \vec{q}_n \right\} = \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} + H_n. \tag{234}$$

Finalmente

$$\partial_t E_n + \nabla_{\vec{r}} \cdot [(E_n \mathbb{I} + \mathbb{P}_n) \cdot \vec{u}_n + \vec{q}_n] = \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} + H_n. \tag{235}$$

Forma característica

Las ecuaciones (197), (205) y (235) se puede escribir de forma compacta como

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho_{mn} \\ \rho_{mn} \vec{u}_n \\ E_n \end{bmatrix} + \nabla_{\vec{r}} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{mn} \vec{u}_n \\ \rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n + \mathbb{P}_n \\ (E_n \mathbb{I} + \mathbb{P}_n) \cdot \vec{u}_n - \vec{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_n \\ \rho_{mn} \vec{g} + \vec{R}_n \\ \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} + H_n \end{bmatrix} \quad (236)$$

donde el vector de variables conservativas está dado por

$$\mathbb{Q}_n = (\rho_{mn}, \rho_{mn} \vec{u}_n, E_n)^T, \quad (237)$$

el vector de flujos

$$\mathbb{F}_n = (\rho_{mn} \vec{u}_n, \rho_{mn} \vec{u}_n \vec{u}_n + \mathbb{P}_n, (E_n \mathbb{I} + \mathbb{P}_n) \cdot \vec{u}_n - \vec{q}_n)^T, \quad (238)$$

y el vector de fuentes

$$\mathbb{S}_n = (S_n, \rho_{mn} \vec{g} + \vec{R}_n, \rho_{mn} \vec{u}_n \cdot \vec{g} + H_n)^T. \quad (239)$$

Entonces (236) se puede escribir como

$$\partial_t Q_n + \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{F}_n = S_n. \quad (240)$$

Fluido cargado

Conservación de la masa

Esta ecuación ya se encuentra en su forma conservativa

$$\frac{\partial \rho_{mc}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) = S_c. \quad (241)$$

Conservación del momento

La ecuación de la conservación del momento para las partículas cargadas está dada por

$$\rho_{mc} \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{M}_c - \nabla_{\vec{r}} p_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c. \quad (242)$$

Abriendo la derivada Lagrangiana y reemplazando $\mathbb{P}_c = \mathbb{M}_c + p_c \mathbb{I}$

$$\rho_{mc} [\partial_t \vec{u}_c + (\vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_c] = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c. \quad (243)$$

1) Analizando el primer término de la parte derecha de la ecuación anterior s encuentra

$$\rho_{mc} \partial_t \vec{u}_c = \partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) - \vec{u}_c \partial_t \rho_{mc}. \quad (244)$$

Reemplazando en esta expresión la conservación de la masa

$$\rho_{mc} \partial_t \vec{u}_c = \partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) - \vec{u}_c S_c + \vec{u}_c \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c). \quad (245)$$

2) Analizando ahora el segundo término de la parte derecha de (243) se encuentra

$$\rho_{mc} (\vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_c = \nabla \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c) - \vec{u}_c \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c). \quad (246)$$

Se reemplaza (245) y (246) en (243)

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) - \vec{u}_c S_c + \vec{u}_c \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c) - \vec{u}_c \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c) &= \vec{j} \times \vec{B} \\ &+ \rho_{mc} \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c, \end{aligned} \quad (247)$$

lo que se puede simplificar para obtener

$$\partial_t (\rho_{mc} \vec{u}_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c) = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_{mc} \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c. \quad (248)$$

Ahora, la expresión de producto cruz y campo magnético se puede reescribir como

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\vec{B} \vec{B} - \frac{B^2}{2} \mathbb{I} \right). \quad (249)$$

Usando esto, la ecuación (248) se puede escribir

$$\partial_t(\rho_{mc}\vec{u}_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc}\vec{u}_c\vec{u}_c) = \frac{1}{\mu_0} \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\vec{B}\vec{B} - \frac{B^2}{2}\mathbb{I} \right) + \rho_{mc}\vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c. \quad (250)$$

Esta última expresión se puede reescribir como

$$\partial_t(\rho_{mc}\vec{u}_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\rho_{mc}\vec{u}_c\vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}\vec{B} + \frac{B^2}{2\mu_0}\mathbb{I} + \mathbb{P}_c \right) = \rho_{mc}\vec{g} + \vec{R}_c. \quad (251)$$

Conservación de la energía

Para hallar la forma conservativa para el fluido cargado se debe comenzar desde la energía total de las partículas, las cuales son la energía magnética, la energía cinética y la energía interna

$$E_c = \frac{1}{2}\rho_{mc}u_c^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \rho_{mc}e_c. \quad (252)$$

1) Para encontrar el primer término de (252) se parte de la conservación del momento aplicando un producto punto con la velocidad de las partículas a ambos lados

$$\rho_{mc}\vec{u}_c \cdot \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = \vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) + \rho_{mc}\vec{u}_c \cdot \vec{g} - \vec{u}_c \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c) + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \vec{u}_c \cdot \vec{u}_c S_c. \quad (253)$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\rho_{mc}\vec{u}_c \cdot \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = \rho_{mc} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2}u_c^2 \right), \quad (254)$$

entonces

$$\rho_{mc} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = \vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} - \vec{u}_c \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c) + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \vec{u}_c \cdot \vec{u}_c S_c. \quad (255)$$

Ahora, el término de la izquierda de la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\rho_{mc} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 \frac{D\rho_{mc}}{Dt}. \quad (256)$$

Usando la conservación de la masa escrita en forma de derivada Lagrangiana $D_t \rho_{mc} + \rho_{mc} \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c = S_c$ obteniendo

$$\rho_{mc} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \frac{1}{2} u_c^2 \rho_{mc} \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c. \quad (257)$$

El último término de la parte derecha de esta expresión se puede expresar como

$$\frac{1}{2} u_c^2 \rho_{mc} \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c = \frac{1}{2} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} u_c^2 \vec{u}_c) - \frac{1}{2} \vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}} (\rho_{mc} u_c^2), \quad (258)$$

el cual al reemplazarlo se obtiene

$$\rho_{mc} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \frac{1}{2} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} u_c^2 \vec{u}_c) - \frac{1}{2} \vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}} (\rho_{mc} u_c^2). \quad (259)$$

Al abrir la derivada Lagrangiana que se encuentra en el lado derecho de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \rho_{mc} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = & \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) + (\vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \frac{1}{2} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} u_c^2 \vec{u}_c) \\ & - \frac{1}{2} \vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}} (\rho_{mc} u_c^2). \end{aligned} \quad (260)$$

Simplificando

$$\rho_{mc} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \frac{1}{2} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} u_c^2 \vec{u}_c). \quad (261)$$

Ahora, se analiza el primer término de la parte derecha de (255)

$$\vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) = -\vec{j} \cdot (\vec{u}_c \times \vec{B}) = -\vec{j} \cdot \left[\eta \vec{j} + \frac{1}{ne} \vec{j} \times \vec{B} - \vec{E} \right], \quad (262)$$

donde se ha utilizado la ley de Ohm. El término $\frac{1}{ne} \vec{j} \times \vec{B}$ está asociado al efecto Hall y este no se considerará, entonces

$$\vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) = -\eta j^2 + \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (263)$$

Finalmente, se analiza el tercer término de la ecuación (255) el cual se puede expresar como

$$-\vec{u}_c \cdot (\nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{P}_c) = -\nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) + (\mathbb{P}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c. \quad (264)$$

Las ecuaciones (261), (263) y (264) se reemplazan en (255) obteniendo

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \frac{1}{2} \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} u_c^2 \vec{u}_c) = & -\eta j^2 + \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) \\ & + (\mathbb{P}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \vec{u}_c \cdot \vec{u}_c S_c. \end{aligned} \quad (265)$$

Esta expresión se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_c \right) \cdot \vec{u}_c \right] - \eta j^2 + \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} \\ & + p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c + (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \frac{1}{2} u_c^2 S_c. \end{aligned} \quad (266)$$

2) Ahora, analizando el término asociado a la energía magnética de (252), se comienza desde la ley de Faraday

$$\partial_t \vec{B} = -\nabla_{\vec{r}} \times \vec{E}, \quad (267)$$

la cual se opera con el producto punto con el campo magnético a ambos lados obteniendo

$$\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} = -\vec{B} \cdot \nabla_{\vec{r}} \times \vec{E}. \quad (268)$$

Esta nueva expresión se puede reescribir de la forma

$$\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} = -\nabla_{\vec{r}} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot (\nabla_{\vec{r}} \times \vec{B}), \quad (269)$$

luego

$$\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} = \partial_t \left(\frac{B^2}{2} \right), \quad (270)$$

por lo que se tendrá

$$\partial_t \left(\frac{B^2}{2} \right) = -\nabla_{\vec{r}} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot (\nabla_{\vec{r}} \times \vec{B}). \quad (271)$$

Seguido a esto, se multiplica por $1/\mu_0$ la ecuación anterior obteniendo

$$\partial_t \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla_{\vec{r}} \times \vec{B} \right). \quad (272)$$

3) Finalmente, para encontrar el término relacionado a la energía interna del fluido en (252)

se modela el plasma como un gas ideal de la forma

$$p_c = (\gamma - 1) \rho_{mc} e_c, \quad (273)$$

y se calcula la derivada Lagrangiana de dicha expresión

$$\frac{D}{Dt} (\rho_{mc} e_c) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{p_c}{\gamma - 1} \right). \quad (274)$$

La ecuación de conservación de la energía se puede reescribir teniendo en cuenta (223) de la forma

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{p_c}{\gamma-1} \right) = & -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \eta j'^2 \\ & - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + H_c, \end{aligned} \quad (275)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\rho_{mc} e_c) = & -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \eta j'^2 \\ & - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + H_c. \end{aligned} \quad (276)$$

Se procede a abrir la derivada Lagrangiana y se asume que las densidades de los electrones y los iones son similares, de manera que se tiene $n_e = n_i$ (teniendo en cuenta que el modelo usado es del átomo de hidrógeno por que $Z = 1$), por lo que $\vec{j}' = \vec{j}$, entonces

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_{mc} e_c) + (\vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \rho_{mc} e_c = & -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c \\ & + \eta j^2 - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + H_c. \end{aligned} \quad (277)$$

Ahora, el segundo término de la parte derecha de la ecuación anterior se puede reescribir como

$$(\vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \rho_{mc} e_c = \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} e_c \vec{u}_c) - \rho_{mc} e_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c, \quad (278)$$

y esto se reemplaza en (277) obteniendo

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_{mc} e_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} e_c \vec{u}_c) - \overbrace{\rho_{mc} e_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c}^a = & - \overbrace{\frac{\gamma}{\gamma-1} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c}^b + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c \\ & - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \eta j^2 - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + H_c. \end{aligned} \quad (279)$$

Ahora, los términos denominados a y b de la expresión anterior se agrupan y se encuentra que

$$\rho_{mc} e_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c - \frac{\gamma}{\gamma-1} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c = \left(\rho_{mc} e_c - \frac{\gamma}{\gamma-1} p_c \right) \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c = (\rho_{mc} e_c - \gamma \rho_{mc} e_c) \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c, \quad (280)$$

por lo que

$$\rho_{mc} e_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c - \frac{\gamma}{\gamma-1} p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c = [\rho_{mc} e_c (1 - \gamma)] \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c = -p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c. \quad (281)$$

Este resultado se reemplaza en (279) y se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho_{mc} e_c) + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} e_c \vec{u}_c) = & - p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c \\ & - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \eta j^2 - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + H_c. \end{aligned} \quad (282)$$

Despejando

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho_{mc}e_c) = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc}e_c\vec{u}_c) - p_c\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c + \frac{1}{2}u_c^2S_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c \\ & - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \eta j^2 - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + H_c. \end{aligned} \quad (283)$$

Se calcula la derivada temporal de la expresión (252)

$$\partial_t E_c = \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \right) + \partial_t \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \partial_t (\rho_{mc} e_c). \quad (284)$$

Las ecuaciones (266), (272) y (283) se reemplazan en las expresión anterior encontrando

$$\begin{aligned} \partial_t E_c = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_c \right) \cdot \vec{u}_c \right] - \eta j^2 + \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} + p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c + (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_c \\ & + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla_{\vec{r}} \times \vec{B} \right) - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} e_c \vec{u}_c) \\ & - p_c \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \eta j^2 - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \cdot \vec{u}_c + H_c. \end{aligned} \quad (285)$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \partial_t E_c = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_c \right) \cdot \vec{u}_c \right] + \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_{mc} \vec{u}_c \cdot \vec{g} - \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) \\ & - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla_{\vec{r}} \times \vec{B} \right) - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\rho_{mc} e_c \vec{u}_c) - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + H_c. \end{aligned} \quad (286)$$

Esta expresión se puede reescribir teniendo en cuenta que

$$\vec{E} \times \vec{B} = -(\vec{u}_c \times \vec{B}) \times \vec{B} + \eta \vec{j} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \times \vec{B} + \vec{u}_c B^2 - \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u}_c), \quad (287)$$

donde se ha usado la ley de Ohm. Esto se reemplaza en (286) y se reescribe como

$$\begin{aligned} \partial_t E_c = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 + \rho_{mc} e_c \right) \mathbb{I} + p_c \mathbb{I} + \mathbb{M}_c \right] \cdot \vec{u}_c + \frac{B^2}{\mu_0} \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u}_c) \right\} \\ & - \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \eta \vec{j} \times \vec{B} \right) - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \rho_{mc} \vec{g} \cdot \vec{u}_c - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla_{\vec{r}} \times \vec{B} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + H_c. \end{aligned} \quad (288)$$

El término $\frac{B^2}{\mu_0}$ se reemplaza por $\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B^2}{2\mu_0}$, para reacomodar la expresión anterior como

$$\begin{aligned} \partial_t E_c = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 + \rho_{mc} e_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbb{I} + \left(p_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbb{I} + \mathbb{M}_c \right] \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u}_c) \right\} \\ & - \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \eta \vec{j} \times \vec{B} \right) - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \rho_{mc} \vec{g} \cdot \vec{u}_c - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla_{\vec{r}} \times \vec{B} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + H_c. \end{aligned} \quad (289)$$

Reemplazando la ley de Ampere

$$\begin{aligned} \partial_t E_c = & -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mc} u_c^2 + \rho_{mc} e_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbb{I} + \left(p_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbb{I} + \mathbb{M}_c \right] \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u}_c) \right\} \\ & - \nabla_{\vec{r}} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \eta \vec{j} \times \vec{B} \right) - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \rho_{mc} \vec{g} \cdot \vec{u}_c - \vec{E} \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \vec{E} + H_c. \end{aligned} \quad (290)$$

En esta nueva expresión se puede observar que se encuentra la expresión para E_c , además que el término $p_c + \frac{B^2}{2\mu_0}$ corresponde a la presión total p_{Tc} , la cual es presión cinética más presión magnética. Recordando que el efecto Hall se debe despreciar, la expresión anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} \partial_t E_c = -\nabla_{\vec{r}} \cdot \left\{ [E_c \mathbb{I} + p_{Tc} \mathbb{I} + \mathbb{M}_c] \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{u}_c) \right\} \\ - \nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{q}_c + \rho_{mc} \vec{g} \cdot \vec{u}_c + H_c. \end{aligned} \quad (291)$$

Agrupando términos y despejando

$$\partial_t E_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot \left[(E_c \mathbb{I} + p_{Tc} \mathbb{I} + \mathbb{M}_c) \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{u}_c) + \vec{q}_c \right] = \rho_{mc} \vec{g} \cdot \vec{u}_c + H_c. \quad (292)$$

Ley de Faraday

Es posible escribir la ley de Faraday de forma conservativa, recordando que el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E} = -\vec{u}_c \times \vec{B} + \eta \vec{j}. \quad (293)$$

Se calcula el rotacional y se tiene en cuenta la ley de Faraday

$$\begin{aligned}
 \partial_t \vec{B} &= \nabla_{\vec{r}} \times (\vec{u}_c \times \vec{B} - \eta \vec{j}), \\
 &= \nabla_{\vec{r}} \times (\vec{u}_c \times \vec{B}) - \eta \nabla_{\vec{r}} \times \vec{j}, \\
 &= (\vec{B} \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{u}_c + \vec{u}_c (\nabla_{\vec{r}} \times \vec{B}) - (\vec{u}_c \cdot \nabla_{\vec{r}}) \vec{B} - \vec{B} (\nabla_{\vec{r}} \cdot \vec{u}_c) - \eta \nabla_{\vec{r}} \times \vec{j}.
 \end{aligned} \tag{294}$$

Agrupando términos es posible reescribir de la forma

$$\begin{aligned}
 \partial_t \vec{B} &= \nabla_{\vec{r}} \cdot (\vec{B} \vec{u}_c) - \nabla_{\vec{r}} \cdot (\vec{u}_c \vec{B}) - \eta \nabla_{\vec{r}} \times \vec{j}, \\
 &= -\nabla_{\vec{r}} \cdot (\vec{u}_c \vec{B} - \vec{B} \vec{u}_c) - \eta \nabla_{\vec{r}} \times \vec{j},
 \end{aligned} \tag{295}$$

obteniendo finalmente

$$\partial_t \vec{B} + \nabla_{\vec{r}} \cdot (\vec{u}_c \vec{B} - \vec{B} \vec{u}_c) = -\eta \nabla_{\vec{r}} \times \vec{j}. \tag{296}$$

Forma característica

Las ecuaciones (241), (251), (292) y (296) se pueden escribir de forma compacta como

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho_{mc} \\ \rho_{mc} \vec{u}_c \\ E_c \\ \vec{B} \end{bmatrix} + \nabla_{\vec{r}} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{mc} \vec{u}_c \\ \rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbb{I} + \mathbb{P}_c \\ [E_c \mathbb{I} + p_{Tc} \mathbb{I} + \mathbb{M}_c] \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{u}_c) + \vec{q}_c \\ \vec{u}_c \vec{B} - \vec{B} \vec{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_c \\ \rho_{mc} \vec{g} + \vec{R}_c \\ \rho_{mc} \vec{g} \cdot \vec{u}_c + H_c \\ -\eta \nabla_{\vec{r}} \times \vec{j} \end{bmatrix}, \quad (297)$$

donde el vector de variables conservativas está dado

$$\mathbb{Q}_c = \left(\rho_{mc}, \rho_{mc} \vec{u}_c, E_c, \vec{B} \right)^T, \quad (298)$$

el vector de flujos

$$\mathbb{F}_c = \left(\rho_{mc} \vec{u}_c, \rho_{mc} \vec{u}_c \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{B} + \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbb{I} + \mathbb{P}_c, [E_c \mathbb{I} + p_{Tc} \mathbb{I} + \mathbb{M}_c] \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{u}_c) + \vec{q}_c, \vec{u}_c \vec{B} - \vec{B} \vec{u}_c \right)^T, \quad (299)$$

y el vector de fuentes

$$\mathbb{S}_c = \left(S_c, \rho_{mc} \vec{g} + \vec{R}_c, \rho_{mc} \vec{g} \cdot \vec{u}_c + H_c, -\eta \nabla_{\vec{r}} \times \vec{j} \right)^T. \quad (300)$$

Entonces, (297) se puede escribir como

$$\partial_t \mathbb{Q}_c + \nabla_{\vec{r}} \cdot \mathbb{F}_c = \mathbb{S}_c. \quad (301)$$