

ACCIONES DE GRUPOS PROFINITOS SOBRE ESPACIOS PROFINITOS

Andrés Yamith Villamizar Tarazona

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Matemáticas

Director

Héctor Edonis Pinedo Tapia

Doctor en Ciencias

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2022

Agradecimientos

Agradezco a cada persona que de una u otra forma ha contribuido en este largo proceso, en especial a mi madre Olga Tarazona, mi tía Yoly Tarazona y mi hermano Danilo Villamizar, quienes siempre han creído en mi y en mis capacidades como persona y profesional. También quiero agradecer enormemente a Alejandra Bueno Gómez, quien me acompañó en cada momento de esta etapa, sobre todo en los más difíciles; sin su cariño, comprensión y ayuda este proceso no hubiera sido igual de fructuoso.

Quiero agradecer a cada uno de los docentes que han aportado en mi crecimiento personal y profesional a lo largo de mi vida académica, en especial a mi director de tesis, el doctor Héctor Edonis Pinedo Tapia, por toda su confianza, su paciencia, sus consejos y enseñanzas, tanto dentro como fuera del aula. Valoro inmensamente cada aporte que ha brindado el profe Héctor en mi vida.

Por otro lado, también quisiera agradecer a mis amigos y compañeros de posgrado por los momentos compartidos a lo largo de este proceso, en especial a Astrid y Lucho, quienes además de compartir este proceso, aportaron significativamente vivencias y conocimientos que enriquecen mi vida personal y académica.

Por último, me felicito por afrontar y superar satisfactoriamente este reto académico, pues soy yo el único que sabe exactamente por las dificultades y sacrificios que afronté para culminar este proceso.

Tabla de Contenido

Introducción	7
1. Preliminares	11
1.1. Topología general	11
1.1.1. Redes y continuidad	11
1.1.2. Axiomas de separación	16
1.1.3. Compacidad	17
1.1.4. Espacios conexos y totalmente desconexos	19
1.1.5. Topología producto y cociente	26
1.2. Grupos topológicos	30
1.2.1. Conceptos básicos	30
1.2.2. Vecindades de la identidad	34
1.3. Teoría de Categorías	35
1.3.1. Definiciones y resultados claves	35
1.3.2. Límites inversos	37
2. Espacios y grupos profinitos	46
2.1. Teoría básica	46
2.2. Acciones de grupos profinitos sobre espacios profinitos	62

3. Acciones parciales de grupos profinitos sobre espacios profinitos	93
3.1. Acciones parciales	93
3.2. Acciones parciales topológicas	106
3.3. Acciones parciales y la relación de órbita	112
4. Grupos profinitos y Teoría de Galois	138
4.1. Preliminares	138
4.2. Teorema Fundamental de la Teoría de Galois	145
4.3. Grupos de Galois en dimensión infinita	148
Referencias Bibliográficas	153

Resumen

Título: Acciones de grupos profinitos sobre espacios profinitos *

Autor: Andrés Yamith Villamizar Tarazona **

Palabras Clave: Espacio profinito, grupo profinito, sección continua, relación de órbita, acción parcial.

Descripción: Sean I un conjunto dirigido y $\mathcal{C}$ una categoría. En el marco de la teoría de categorías, una clásica construcción es el llamado *límite inverso* asociado a un *sistema inverso* indizado por I , en particular, un *espacio profinito* X se define como el límite inverso de un sistema inverso conformado por espacios topológicos finitos y discretos, o de manera equivalente como se expresa en (Magid, 2014, p. 50), X es un espacio compacto, Hausdorff y totalmente desconexo. Adicionalmente, un grupo topológico G es un *grupo profinito* si visto como espacio topológico es profinito. Uno de los objetivos de este trabajo es analizar la estrecha relación que existe entre los grupos profinitos y la *Teoría de Galois*. Por otro lado, el concepto de *acción parcial de grupo* nace en el contexto de las C^* -álgebras, en medio de los trabajos realizados por el matemático brasileño Ruy Exel, sin embargo, la idea de *acción parcial de un grupo sobre un conjunto* fue introducida en (Exel, 1998), y generaliza la noción de acción de grupo.

Sea G un grupo y φ una acción de G sobre un espacio topológico X . La *relación de órbita* asociada a φ , junto con el *espacio de órbitas* (usualmente denotado por X/G) y la proyección $\psi_G : X \rightarrow X/G$, son conceptos destacados en el estudio de las acciones de grupo. Este trabajo se enfoca por un lado en estudiar condiciones establecidas en (Magid, 2014, Section 2.4), bajo las cuales X/G es profinito, y para que la proyección ψ_G admita secciones continuas; por otro lado, el interés es presentar formalmente las acciones parciales de grupo y extender al contexto parcial los resultados analizados en (Magid, 2014, Section 2.4).

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Ciencias.

Abstract

Title: Actions of profinite groups on profinite spaces *

Author: Andrés Yamith Villamizar Tarazona **

Keywords: Profinite space, profinite group, continuous section, orbit equivalence relation, partial action.

Description: Let I be a directed set and $\mathcal{C}$ a category. Within the framework of category theory, a classic construction is the so-called *inverse limit* associated with an *inverse system* indexed by I , in particular, a profinite space X is defined as the inverse limit of an inverse system made up of finite and discrete topological spaces, or equivalently as expressed in (Magid, 2014, p. 50), X is a compact, Hausdorff and totally disconnected space. Additionally, a topological group G is a *profinite group* is viewed as a topological space it is profinite. One of the objectives of this work is to analyze the close relationship that exists between the profinite groups and Galois Theory. On the other hand, the concept of *partial group action* is born in the context of the C^* -algebras, in through the works carried out by the Brazilian mathematician Ruy Exel, however, the idea of partial action of a group over a set was introduced in (Exel, 1998), and generalizes the notion of group action.

Let G be a group and φ an action of G on a topological space X . The *orbit relation* associated with φ , together with the orbit space (usually denoted by X/G) and the projection $\psi_G : X \rightarrow X/G$, are concepts highlighted in the study of group actions. This work focuses on the one hand on studying conditions established in (Magid, 2014, Section 2.4), under which X/G is profinite, and so that the projection ψ_G admits continuous sections; on the other hand, the interest is to formally present the partial group actions and extend the results analyzed in (Magid, 2014, Section 2.4) to the partial context.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director by: Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia.

Introducción

Sean I un conjunto dirigido y $\mathcal{C}$ una categoría. En el marco de la teoría de categorías, una clásica construcción es el llamado *límite inverso* asociado a un *sistema inverso* indizado por I , en particular, un *espacio profinito* X se define como el límite inverso de un sistema inverso conformado por espacios topológicos finitos y discretos, o de manera equivalente como se expresa en (Magid, 2014, p. 50), X es un espacio compacto, Hausdorff y totalmente desconexo. Adicionalmente, un grupo topológico G es un *grupo profinito* si visto como espacio topológico es profinito. Según se plantea en (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 72), los grupos profinitos fueron presentados de forma sistemática por primera vez en la obra *Cohomologie Galoisienne* de Jean-Pierre Serre, cuya primera edición fue publicada en 1964, allí los grupos profinitos recibían el nombre *grupos de tipo Galois*, sin embargo, en (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 73) se menciona que Jhon Tate, en el año 1962 fue el primero en establecer muchos resultados básicos sobre grupos profinitos, incluso en la teoría de cohomología, pues, en esa fecha se publica el trabajo titulado *Duality theorems in Galois cohomology over number fields* (Tate, 1962). Un hecho importante en la historia y desarrollo de la teoría de grupos profinitos es el interés que evidencia Wolfgang Krull por extender el conocido *Teorema Fundamental de la Teoría de Galois*, considerando extensiones de Galois no necesariamente con grado finito. Esta consideración llevó a Krull en los años 1920 (Morandi, 1996, p. 155) a construir la llamada *topología de Krull*, que además de permitir extender el clásico Teorema Fundamental de la Teoría de Galois, dota de manera natural a los grupos de Galois con estructura de grupo profinito. Por esta razón la Teoría de Galois ofrece un ambiente natural para el desarrollo

de los grupos profinitos.

Algunos ejemplos importantes de grupos y espacios profinitos son el *grupo de enteros p -ádicos* $\mathbb{Z}_{(p)}$, para un número primo p (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 26), el *espacio de Cantor*, los ya mencionados grupos de Galois asociados a extensiones de Galois, el *espacio de componentes conexas* $Comp(X)$ determinado por un espacio topológico compacto Hausdorff X , donde cada componente es intersección de conjuntos clopen (Magid, 2014, p. 52), el *espectro booleano* $X(R)$ de un anillo conmutativo con unidad R (Magid, 2014, p. 73) y el *grupo fundamental Étale*, considerado en geometría algebraica.

Por otro lado, las *acciones de grupo* han sido una herramienta de constante uso en el desarrollo de algunas ramas de la matemática como la *Teoría de Representaciones* y la *Teoría de Módulos*. El concepto de *acción parcial de grupo* nace en el contexto de las C^* -álgebras, en medio de los trabajos realizados por el matemático brasileño Ruy Exel. A pesar de que Exel ya hablaba en (Exel, 1994) sobre acciones parciales en el contexto de las C^* -álgebras, la idea de *acción parcial de un grupo sobre un conjunto* fue introducido en 1998 por Exel en (Exel, 1998) y generaliza la noción de acción de grupo. Entorno a las acciones parciales se ha desarrollado y enriquecido diversas ramas de la matemática como por ejemplo la *Teoría de C^* -álgebras*, la *Teoría de cohomología* descrita en (Dokuchaev and Khrypchenko, 2015) y la *Teoría de Galois*; de hecho, actualmente continúan las investigaciones relacionadas con acciones parciales como lo muestra (Batista, 2017), (Dokuchaev, 2019), (Exel, 2017), (Gómez et al., 2018) y (Pinedo and Uzcátegui, 2017).

Sea G un grupo actuando sobre un espacio topológico X mediante φ . La *relación de órbita* asociada a φ , junto con el *espacio de órbitas* (usualmente denotado por X/G), son conceptos desta-

cados en el estudio de las acciones de grupo. En este trabajo se tiene particular interés por estudiar algunas relaciones entre espacios y grupos profinitos, con las acciones de grupo, en particular se analiza el trabajo hecho por Magid en (Magid, 2014, Section 2.4), donde además de establecer condiciones suficientes para que el espacio de órbitas adquiriera estructura de espacio profinito, se interesa por encontrar secciones continuas de la proyección canónica vinculada a una acción de grupo dada. En este punto es importante resaltar la importancia de las secciones continuas para el desarrollo de la matemática en general pues, entre otras cosas la teoría de *haces de Banach*, descrita en (Fell and Doran, 1988), utiliza secciones continuas para definir *Secciones Transversales Continuas*, o en el contexto de las *acciones parciales torcidas de grupos localmente compactos sobre C^* -álgebras*, presentado en (Exel, 1997), donde el concepto de sección continua es crucial para definir continuidad en tales acciones.

Uno de los objetivos de este trabajo de grado, además de estudiar los espacios y grupos profinitos, se enfoca en extender algunos resultados presentados en (Magid, 2014, Section 2.4) al contexto más general de *acciones parciales* de grupos topológicos sobre espacios topológicos. Para lograr esto se ha decidido dividir este trabajo en cuatro capítulos: en el primer capítulo se establece la temática fundamental en torno a la topología y la teoría de categorías, lo que ayudará a desarrollar y precisar los objetivos de este trabajo de grado. En el Capítulo 2 se definen los espacios y grupos profinitos, así como también se presentan diversos resultados que rodean este par de conceptos, en particular, el Lema 5, ubicado en la Sección 2.2, propone algunas propiedades elementales de las acciones de grupo que son utilizadas en (Magid, 2014, Section 2.4) para demostrar que el espacio de órbitas asociado a una acción de grupo es profinito. Los Teoremas

2.2.6, 2.2.12, 2.2.13 y 2.2.14 resaltan la conexión entre los espacios y grupos profinitos con las acciones de grupo. También se proporcionan algunos ejemplos importantes. Ya en el Capítulo 3 se encuentra la teoría relacionada con las acciones parciales de grupos sobre conjuntos y espacios topológicos, además de algunos ejemplos que ayudan a ilustrar los tópicos abordados aquí. Indispensable resaltar que al final de la Sección 3.2 se establece la Proposición 3.2.9, que enuncia algunas propiedades convenientes que ayudarán al adecuado manejo de las acciones parciales, además de brindar condiciones bajo las cuales una acción parcial resulta una acción parcial topológica. La Sección 3.3 recoge los Teoremas 3.3.1, 3.3.5, 3.3.6 y 3.3.7, que son resultados obtenidos en este trabajo de grado y que en cierta medida generaliza lo presentado en (Magid, 2014, Section 2.4). Para finalizar, el Capítulo 4 aborda algunos aspectos relacionados con la Teoría de Galois y su estrecha relación con los grupos profinitos, iniciando en la Sección 4.1 con una breve recopilación de términos y proposiciones enmarcadas en la teoría de extensiones de cuerpos; luego, se presenta en la Sección 4.2 la terminología necesaria para enunciar el *Teorema Fundamental de la Teoría de Galois*. La Sección 4.3 destaca la importancia de considerar extensiones de Galois con grado finito, presentando un caso concreto donde el Teorema Fundamental falla, con exactitud, cuando se consideran extensiones de Galois con grado infinito; además ofrece un sumario que describe lo relacionado con el Teorema fundamental de la Teoría de Galois para extensiones de grado infinito, la construcción de la topología de Krull y la conexión con los grupos profinitos.

1. Preliminares

Este primer capítulo está enfocado en presentar de manera concisa algunas definiciones y resultados básicos tanto de la topología general como de la teoría de categorías, que se utilizarán de manera recurrente a lo largo de todo este trabajo; sin embargo, se asumirá que el lector está familiarizado con los conceptos enmarcados en estas dos teorías, de modo que no sea necesario profundizar con tantos detalles en torno a los tópicos mostrados aquí. Al interesado en indagar un poco más sobre topología general se recomienda consultar entre otras referencias las obras de (Camargo and Villamizar, 2019), (Munkres, 2002) y (Willard, 1970); mientras que en (Jacobson, 1989), (Lang, 2002), (Lezama, 2021b), (Mac Lane, 1998), (Rotman, 2010) y (Rotman, 2009) se encuentra una descripción más amplia de los conceptos que aborda la teoría de categorías.

1.1. Topología general

Antes de entrar en materia es importante resaltar que se aceptarán como verdaderos algunos conceptos claves de la teoría de conjuntos, en particular el *Lema de Zorn*. Serán usadas propiedades básicas de conjuntos tanto abiertos como cerrados en un espacio topológico arbitrario, así como notación estándar para la clausura $\overline{A}$ e interior A° de un conjunto A , nomenclatura relacionada con bases, subbases, sistemas de vecindades; en particular, un subconjunto que sea abierto y cerrado al mismo tiempo será referido como un conjunto *clopen*.

1.1.1. Redes y continuidad.

Definición 1.1.1. (Munkres, 2002, p. 213) Se dice que un conjunto I dotado con una relación de orden parcial $\preceq$ es un **conjunto dirigido** si satisface la siguiente condición:

i) Para cualquier par de elementos $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \preceq k$ y $j \preceq k$;

dicho de otro modo, un conjunto I será conjunto dirigido si existe una relación $\preceq$ sobre I que sea reflexiva, antisimétrica, transitiva y que satisfaga la condición enunciada en el ítem *i*). Para los casos donde sea necesario resaltar la relación de orden se procurará escribir un par de la forma $(I, \preceq)$, donde I es un conjunto y $\preceq$ representa una relación de orden parcial sobre I .

Ejemplo 1.1.2. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es un conjunto dirigido si se define el orden habitual sobre $\mathbb{N}$.

Ejemplo 1.1.3. Si X es un espacio topológico y $x_0 \in X$, considere el sistema de vecindades $\mathcal{U}_{x_0}$ y defina para cada $N_1, N_2 \in \mathcal{U}_{x_0}$, el orden **inclusión** e **inclusión inversa**, respectivamente como

$$N_1 \preceq_0 N_2 \Leftrightarrow N_1 \subseteq N_2 \text{ y } N_1 \preceq_1 N_2 \Leftrightarrow N_2 \subseteq N_1.$$

Las relaciones anteriores proveen al conjunto $\mathcal{U}_{x_0}$ estructura de conjunto dirigido.

Definición 1.1.4. (Munkres, 2002, p. 213) Sea $(I, \preceq)$ un conjunto dirigido. **Una red** en un espacio topológico X , es una función $x : I \rightarrow X$. Se escribirá x_i en lugar de $x(i)$ y se representará a la red x como $(x_i)_{i \in I}$; así mismo se dirá que la red $(x_i)_{i \in I}$ *converge* a $x \in X$ si para cada vecindad U de x , existe $i_0 \in I$ tal que $x_i \in U$, para todo $i_0 \preceq i$.

Dada una red $(x_i)_{i \in I}$ de un espacio topológico X sobre un conjunto dirigido I , se escribirá $x_i \rightarrow x$ para representar la convergencia de la red $(x_i)_{i \in I}$ al punto $x \in X$.

Ejemplo 1.1.5. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 145) Considere un espacio topológico X . Si $x \in X$ y $\mathcal{B}_x$ es una base de vecindades para x , entonces la relación $\preceq_1$, definida en el Ejemplo 1.1.3,

torna a $\mathcal{B}_x$ en conjunto dirigido. Para cada $B \in \mathcal{B}_x$ tome $z_B \in B$ y construya la red $(z_B)_{B \in \mathcal{B}_x}$. Teniendo en mente la definición de $\mathcal{B}_x$ y realizando una verificación de rutina se observa que $x_B \longrightarrow x$.

Proposición 1.1.6. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 149) Sean X un espacio topológico y A un subconjunto no vacío de X , entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una red $(x_i)_{i \in I}$ contenida en A de modo que $x_i \longrightarrow x$.

A manera de comentario adicional note que la Proposición 1.1.6 en particular da un criterio elemental para determinar cuándo un subconjunto no vacío de un espacio topológico X es cerrado: Dado $W \subseteq X$ no vacío se tiene que W es cerrado en X si toda red convergente y contenida en W converge en W .

Definición 1.1.7. (Willard, 1970, p. 44) Se dice que una función $f : X \longrightarrow Y$ entre los espacios topológicos X y Y es *continua* en un punto $a \in X$ si para todo abierto V de Y tal que $f(a) \in V$, existe un abierto U de X con $a \in U$, verificando la contención $f(U) \subseteq V$. Además se referirá a f como una *función continua* si ella es continua en cada punto del dominio.

Ejemplo 1.1.8. (Munkres, 2002, p. 118) Recuerde que al conjunto de números reales por lo general se le asigna la topología generada por los intervalos abiertos y es conocida como **la topología usual** en $\mathbb{R}$. Otra topología que es habitual definir sobre los reales es la conocida como **la topología del límite inferior** y es la generada por los intervalos de la forma $[a, b)$, donde a y b son números reales diferentes. El símbolo $\mathbb{R}_\ell$ representa frecuentemente los números reales dotado con la topología del límite inferior y es llamado la **Recta de Sorgenfrey**. La función identidad $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}_\ell \longrightarrow \mathbb{R}$ es

continua pero la identidad $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\ell}$ no lo es.

Proposición 1.1.9. (Willard, 1970, p. 44) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre espacios topológicos.

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (i) f es continua.
- (ii) Para todo abierto U de Y , $f^{-1}(U)$ es abierto en X .
- (iii) Para todo cerrado V de Y , $f^{-1}(V)$ es cerrado en X .

Dados una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos y $W \subseteq X$ no vacío, la restricción de f al subconjunto W será notada por $f|_W : W \longrightarrow Y$.

Proposición 1.1.10. (Willard, 1970, p. 45) Las siguientes afirmaciones son ciertas para espacios topológicos X, Y, Z y funciones $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$:

- (i) Si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua.
- (ii) Si $W \subseteq X$ y f es continua, entonces $f|_W$ es continua.

Definición 1.1.11. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Se dice que:

- (i) (Willard, 1970, p. 46) f es un *homeomorfismo* si ella es biyectiva, continua y su inversa f^{-1} también es continua. En este caso se dice que X es **homeomorfo** a Y y en ocasiones será escrito $X \cong Y$ para indicar que existe un homeomorfismo entre X y Y .
- (ii) (Willard, 1970, p. 54) f es una *función abierta* si para todo abierto U de X , $f(U)$ es abierto en Y .

(iii) (Willard, 1970, p. 54) f es una *función cerrada* si para cada cerrado F de X , $f(F)$ es cerrado en Y .

El lector podrá deducir de manera rápida que los conceptos de función abierta y cerrada no son equivalentes pues, si considera la proyección a la primera componente $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ella es abierta pero no cerrada, mientras tanto, dado $w \in \mathbb{R}$ la función constante $f_w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que envía todo número real a w , es cerrada pero no abierta.

Ejemplo 1.1.12. (Willard, 1970, p. 47) Considere en $\mathbb{R}$ la topología usual y tome dos puntos diferentes a y b . La función

$$f : (a, b) \longrightarrow (0, 1)$$

$$x \longmapsto \frac{x - a}{b - a},$$

donde (a, b) y $(0, 1)$ se consideran como subespacios de $\mathbb{R}$, es un homeomorfismo.

Proposición 1.1.13. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 103) Si X, Y son dos espacio topológicos, las siguientes afirmaciones son equivalentes para una función $f : X \longrightarrow Y$, continua y biyectiva:

(1) f es un homeomorfismo.

(2) f es abierta.

(3) f es cerrada.

1.1.2. Axiomas de separación.

Definición 1.1.14. (Willard, 1970, p. 85-86) Sea X un espacio topológico, entonces:

(S0) X es llamado T_0 si para cada $a, b \in X$, con $a \neq b$, existe una vecindad U_a de a tal que $b \notin U_a$.

(S1) X es un espacio T_1 si para cada $a, b \in X$, con $a \neq b$, existen vecindades U_a, V_b , de a y b respectivamente tales que $b \notin U_a$ y $a \notin V_b$.

(S2) X es T_2 o un espacio de **Hausdorff** si para cada $a, b \in X$, con $a \neq b$, existen vecindades disjuntas U_a, V_b , de a y b respectivamente.

Note que todo espacio discreto es Hausdorff, cada espacio de Hausdorff es un espacio T_1 y todo espacio T_1 es T_0 .

Ejemplo 1.1.15. Una verificación de rutina permite observar que todo espacio métrico es T_2 .

Proposición 1.1.16. (Willard, 1970, p. 86) Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un espacio topológico X :

(i) X es un espacio T_1 .

(ii) Para todo $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado en X .

Proposición 1.1.17. (Willard, 1970, p. 89) Cada subespacio de un espacio T_1 es T_1 .

Proposición 1.1.18. (Willard, 1970, p. 87) Cada subespacio de un espacio Hausdorff es Hausdorff.

Para finalizar este apartado se expone la definición de *espacios normales* según presenta (Willard, 1970), ya que algunas obras como por ejemplo (Engelking, 1989) o (Husain, 1966), exigen a los espacios normales ser además T_1 .

Definición 1.1.19. (Willard, 1970, p. 99) Un espacio topológico X es llamado **normal** si para todo par de cerrados disjuntos A y B , existen abiertos disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Ejemplo 1.1.20. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 176) Considere en $\mathbb{R}$ la topología generada por la base $\mathcal{B} := \{(x, \infty) : x \in \mathbb{R}\}$ y observe que por vacuidad el espacio es normal, pero no es T_1 ya que dados dos puntos diferentes $a, b \in \mathbb{R}$, si supone que $a < b$ y que U_a y V_b son vecindades de a y b respectivamente, entonces existirá un básico (m, ∞) tal que $a \in (m, \infty) \subseteq U_a$, de ello que $b \in U_a$ y así el espacio no es T_1 .

1.1.3. Compacidad.

Definición 1.1.21. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 192) Sea X un espacio topológico. Una **cubierta abierta** es una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos abiertos en X que cubren el espacio, es decir, $X = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} U$. Si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y además vale la igualdad $X = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$, entonces la familia $\mathcal{B}$ es llamada **subcubierta** de $\mathcal{A}$.

Definición 1.1.22. (Willard, 1970, p. 116) Un espacio topológico X es llamado **compacto** si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.

El lector podrá comprobar al instante que todo espacio topológico finito es compacto y que la colección definida en (Munkres, 2002, p. 186), como $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, es un subconjunto

compacto de $\mathbb{R}$ debido a la convergencia de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ al cero. En contraste recuerde que $\mathbb{R}$ no es un espacio compacto por que la cubierta abierta $\{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$ no admite una subcubierta finita. Otro ejemplo de un espacio que no es compacto es el conjunto

$$S := \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) : 0 < x \leq 1 \right\}, \quad (1)$$

que se define en (Munkres, 2002, p. 197-198), donde además se menciona por un lado que S no es cerrado en $\mathbb{R}^2$, y por otro lado se prueba que los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ son los conjuntos cerrados y acotados.

Los siguientes dos resultados serán utilizados más adelante para verificar que *componentes conexas* y *cuasicomponentes* son iguales en espacios topológicos compacto y Hausdorff.

Proposición 1.1.23. (Engelking, 1989, p. 124) Dados un espacio topológico X y $U \subseteq X$ abierto, si $\{F_s\}_{s \in S}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X tal que $\bigcap_{s \in S} F_s \subseteq U$ y al menos un F_s es compacto, entonces existen $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$ que satisfacen la contención $\bigcap_{i=1}^k F_{s_i} \subseteq U$.

Proposición 1.1.24. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 200) Todo espacio compacto y Hausdorff es normal.

Definición 1.1.25. (Willard, 1970, p. 144) Sean X un espacio topológico y $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de X . Si $\mathcal{V}$ es otro cubrimiento abierto de X se dice que $\mathcal{V}$ **refina** el cubrimiento $\mathcal{A}$, o que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento** de $\mathcal{A}$, si para cada $U \in \mathcal{V}$ existe $V \in \mathcal{A}$ tal que $U \subseteq V$.

Munkres reflexiona en (Munkres, 2002, p. 288) la definición de compacidad en términos de

refinamientos y afirma que *un espacio X es compacto si todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X tiene un refinamiento abierto y finito que cubre a X .*

Definición 1.1.26. (Willard, 1970, p. 117) Dados un conjunto X y $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos en X , se dirá que $\mathcal{F}$ satisface la **Propiedad de Intersección Finita** si $\bigcap_{k=1}^n F_{i_k} \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$.

Proposición 1.1.27. (Willard, 1970, p. 118) Un espacio topológico X es compacto si y solo si cada familia $\{F_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos cerrados en X que satisface la Propiedad de Intersección Finita tiene intersección no vacía, es decir, $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Proposición 1.1.28. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos, entonces

- (a) (Willard, 1970, p. 119) f envía compactos en compactos.
- (b) (Camargo and Villamizar, 2019, p. 207) f es cerrada siempre y cuando X sea compacto y Y Hausdorff.

Proposición 1.1.29. (Willard, 1970, p. 119) Las siguientes afirmaciones son válidas para cualquier espacio topológico X :

- (i) Si X es compacto, entonces todo subconjunto cerrado de X también es compacto.
- (ii) Si X es Hausdorff, entonces todo subconjunto compacto es cerrado.

1.1.4. Espacios conexos y totalmente desconexos.

Definición 1.1.30. (Willard, 1970, p. 191) Un espacio topológico X es *disconexo* si existe un par de subconjuntos abiertos no vacíos A y B , que son disjuntos y cuya unión coincide con X ; en tal caso el par (A, B) es llamado una *desconexión* del espacio. De no existir una desconexión del espacio, entonces se dirá que X es *conexo*.

Con respecto a la definición anterior resalte que un subconjunto de un espacio topológico dado será conexo si como subespacio él es conexo, así mismo, si un espacio X es *desconectado* por el par (A, B) , entonces $B = X \setminus A$ o $A = X \setminus B$; en cualquier caso, tanto A como B son conjuntos clopen, por lo tanto se deduce que si un espacio es conexo, entonces no puede contener subconjuntos clopen diferentes de X y $\emptyset$.

Ejemplo 1.1.31. Dados un espacio topológico X y $A \subseteq X$ un conexo note que si $\overline{A}$ es disconexo, entonces existe una desconexión (B, C) para $\overline{A}$, derivando de ello que $A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ lo cual contradice la hipótesis de conexidad para A , por lo tanto, si A es conexo, entonces $\overline{A}$ también lo es.

Proposición 1.1.32. (Munkres, 2002, p. 170) Sean X un espacio topológico disconexo y (A, B) una desconexión de X . Si Y es un subespacio conexo de X , entonces $Y \subseteq A$ ó $Y \subseteq B$.

La siguiente proposición relaciona la conexidad de conjuntos y la continuidad de funciones.

Proposición 1.1.33. (Willard, 1970, p. 192) La imagen de un conjunto conexo bajo una función continua es conexo.

El siguiente ejemplo es clásico en la literatura y se conoce como *curva seno del topólogo*.

Ejemplo 1.1.34. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 234) Utilizando la Proposición 1.1.33, es posible demostrar que el conjunto S definido en (1) es imagen continua del conexo $(0, 1]$ bajo la función $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que envía cada $t \in (0, 1]$ en el par $(t, \sin(\frac{1}{t}))$, por tanto S es conexo. La clausura de S es conocida como el **seno del topólogo** y se sigue del ejemplo anterior que es un espacio conexo.

A continuación se presentan una clase importante de conjuntos conexos.

Definición 1.1.35. (Willard, 1970, p. 194) Sean X un espacio topológico y $x \in X$. La **componente conexas** de x será representada por C_x y se define como el subconjunto conexo más grande que incluye a x como elemento, es decir, si $x \in V$, donde V es un conexo de X , entonces $V \subseteq C_x$.

De manera rápida se concluye que todo subconjunto conexo de un espacio topológico dado está contenido en una componente conexas. Por otro lado, en (Joshi, 1983, p. 151) se define el *Espacio Peine*, que entre otras cosas motiva el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.36. Considere el conjunto

$$X := \left(\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \times [0, 1] \right) \cup \{(0, 0), (0, 1)\},$$

como subespacio de $\mathbb{R}^2$. Primero observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$, además, siempre existen $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $\frac{1}{n-1} < a < \frac{1}{n} < b < \frac{1}{n+1}$, por lo tanto vale $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1] = X \cap ((a, b) \times \mathbb{R})$, de ellos se deduce que $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ sea clopen en X , luego, X no puede ser conexo. Basta bosquejar el conjunto X para percibir que la componente conexas de cada

punto $(\frac{1}{n}, x) \in X$ es el conjunto $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$. Suponga ahora que $C_{(0,0)}$ es la componente de $(0, 0)$ y tome $(x, y) \in C_{(0,0)}$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x, y) \in \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, entonces $C_{(0,0)} = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, pero esta última igualdad es contradictoria ya que $(0, 0) \notin \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, por lo tanto la componente del punto $(0, 0)$ posee a lo más dos elementos, es decir, $C_{(0,0)}$ es un subespacio discreto con más de un punto, por lo tanto desconexo. Se deduce de lo anterior que $C_{(0,0)} = \{(0, 0)\}$. De manera análoga se puede concluir que $C_{(0,1)} = \{(0, 1)\}$.

Proposición 1.1.37. (Willard, 1970, p. 194) Si X es un espacio topológico y $a \in X$, entonces C_a es cerrado en X .

En la literatura se encuentra que las componentes conexas de un espacio topológico X no son otra cosa que clases de equivalencia asociadas a una relación de equivalencia sobre X (ver (Camargo and Villamizar, 2019, p. 231), (Munkres, 2002, p. 181), (Willard, 1970, p. 195)). El siguiente concepto, al igual que la Definición 1.1.35, puede ser determinado mediante una relación de equivalencia.

Definición 1.1.38. (Willard, 1970, p. 196) Sea X un espacio topológico. La *cuasicomponente* de $x \in X$, se define como el conjunto $Q_x := \bigcap L$, donde cada L es un clopen de X tal que $x \in L$.

Ejemplo 1.1.39. Tenga en cuenta el conjunto X definido en el Ejemplo 1.1.36 y recuerde que para todo $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos de la forma $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ son componentes conexas de X que además son clopen. Sea $(\frac{1}{n}, x) \in X$ y considere $H \subseteq X$ clopen tal que $(\frac{1}{n}, x) \in H$. Como $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ es conexo, entonces $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1] \subseteq H$, por lo tanto $Q_{(\frac{1}{n}, x)} = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$. Considere ahora $Q_{(0,0)}$ y tome un punto $(x, y) \in Q_{(0,0)}$, entonces para todo clopen L que contiene a $(0, 0)$ también contiene

el punto (x, y) . Si existe $n \in \mathbb{N}$ y $\hat{y} \in [0, 1]$ tales que $(x, y) = (\frac{1}{n}, \hat{y})$, entonces $Q_{(0,0)} = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ lo que es contradictorio, por lo tanto $Q_{(0,0)}$ posee a lo más dos puntos. Observe ahora que para todo clopen H tal que $(0, 0) \in H$ existe $\varepsilon > 0$ y una bola abierta con centro en $(0, 0)$ y radio ε que está contenida en H , de donde se deduce además que existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que $(\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]) \cap H \neq \emptyset$, para todo $n > n_\varepsilon$, pero por conexidad $\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1] \subseteq H$. Considere la sucesión $(\frac{1}{n}, 1)_{n > n_\varepsilon} \in H$. Como H es cerrado y la sucesión convergente a $(0, 1)$, entonces $(0, 1) \in H$; por lo tanto, todo clopen que contiene a $(0, 0)$ también contiene el punto $(0, 1)$, luego $Q_{(0,0)} = \{(0, 0), (0, 1)\}$. De manera análoga se obtiene que $Q_{(0,1)} = \{(0, 0), (0, 1)\}$.

Proposición 1.1.40. (Engelking, 1989, p. 357) Si X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces $C_x \subseteq Q_x$, además si X es compacto Hausdorff entonces $C_x = Q_x$.

Demostración. Para ver que $C_x \subseteq Q_x$ basta verificar que C_x está contenido en todo clopen que contiene a x . Sea L un clopen de X tal que $x \in L$, entonces L y $X \setminus L$ desconectan al espacio X y por la Proposición 1.1.32 se llega a que $C_x \subseteq L$, de ello se deduce que $C_x \subseteq Q_x$.

Suponga ahora que X es compacto Hausdorff. Para demostrar que $C_x = Q_x$ es suficiente probar que Q_x es conexo, en ese sentido, si Q_x fuese desconexo entonces existirá una desconexión (A, B) de Q_x y de la Proposición 1.1.24 existirían subconjuntos abiertos y disjuntos U, V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, luego $Q_x \subseteq U \cup V$. Si $\mathcal{L} := \{L_i\}_{i \in I}$ es la colección de subconjuntos clopen que conforman a Q_x entonces, por la Proposición 1.1.23 existen clopens $L_1, L_2, \dots, L_k \in \mathcal{L}$ tales que $\bigcap_{s=1}^k L_s \subseteq U \cup V$. Por supuesto $Q_x \subseteq \bigcap_{s=1}^k L_s$. Suponga ahora que $x \in A$ y observe que $U \cap \left(\bigcap_{s=1}^k L_s \right)$ es clopen pues

$$\overline{U \cap \left(\bigcap_{s=1}^k L_s \right)} \subseteq \overline{U} \cap \left(\bigcap_{s=1}^k L_s \right) = \overline{U} \cap (U \cup V) \cap \left(\bigcap_{s=1}^k L_s \right) = U \cap \left(\bigcap_{s=1}^k L_s \right),$$

por lo tanto $Q_x \subseteq U \cap \left(\bigcap_{s=1}^k L_s \right)$ y de ello $B \subseteq U$, pero $U \cap V = \emptyset$, por lo tanto $B = \emptyset$, sin embargo se sabe que $B \neq \emptyset$ pues (A, B) es una desconexión de Q_x ; de modo que Q_x necesariamente es conexo, luego $Q_x \subseteq C_x$ y con esto termina la prueba. $\square$

Definición 1.1.41. (Willard, 1970, p. 210) Un espacio topológico X es denominado *totalmente desconexo* si sus componentes conexas son puntos.

Ejemplo 1.1.42. (Willard, 1970, p. 194) El espacio $\mathbb{Q}$ es totalmente desconexo pues dado $x \in \mathbb{Q}$ considere C_x y a su vez un punto $z \in C_x$. Como la componente de x también es subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces C_x es conexo en $\mathbb{R}$, pero los conexos de $\mathbb{R}$ son intervalos, puntos, todo el espacio o vacío, y la única opción que no genera contradicciones es que C_x sea un punto, por lo tanto $C_x = \{x\}$ y $z = x$.

Definición 1.1.43. (Willard, 1970, p. 210) Un espacio topológico X es llamado *cero-dimensional* si cada punto del espacio admite una base de vecindades clopen.

Si X es un espacio topológico, dado que la colección de vecindades básicas de cada punto $x \in X$ determinan una base para la topología de X , cuando se trabaje en el contexto de espacios cero-dimensionales, en ocasiones se tomará una base de subconjuntos clopen en vez de una base de vecindades clopen.

Ejemplo 1.1.44. (Willard, 1970, p. 210) La colección de números racionales $\mathbb{Q}$ es cero-dimensional ya que si $r \in \mathbb{Q}$ considere $\alpha, \beta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ tales que $\alpha < r < \beta$ y observe que $(\alpha, \beta) \cap \mathbb{Q} = [\alpha, \beta] \cap \mathbb{Q}$,

es decir, el conjunto

$$\mathcal{B}_r := \{(\alpha, \beta) \cap \mathbb{Q} : \alpha, \beta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \text{ y } \alpha < r < \beta\},$$

está compuesto por subconjuntos clopen de $\mathbb{Q}$, más aún, $\mathcal{B}_r$ es una base de vecindades clopen para r .

Proposición 1.1.45. (Willard, 1970, p. 210) Cada subespacio de un espacio totalmente desconexo es totalmente desconexo.

El siguiente resultado es un ejercicio propuesto en (Camargo and Villamizar, 2019, p. 318) y su demostración es una aplicación directa de la topología del subespacio.

Proposición 1.1.46. Todo subespacio de un espacio cero-dimensional es cero-dimensional.

Demostración. Dados un espacio topológico cero-dimensional X y $W \subseteq X$ un subespacio, note que si $x \in W$, entonces la colección $\tilde{\mathcal{B}}_x := \{B \cap W : B \in \mathcal{B}_x\}$ es una base de vecindades clopen para x contenida en W , donde $\mathcal{B}_x$ es una base de vecindades clopen para x . $\square$

Para finalizar este apartado se enuncia un importante resultado para el desarrollo de este trabajo de grado, pues, entre otras cosas permitirá caracterizar más adelante el principal objeto de estudio en esta disertación: los espacios profinitos.

Proposición 1.1.47. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 315) Si X es un espacio compacto y Hausdorff, entonces X es totalmente desconexo si y solo si X es cero-dimensional.

1.1.5. Topología producto y cociente.

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_i\}_{i \in I}$ considere el producto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ y la correspondiente familia de funciones proyección

$$\left\{ \pi_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j \right\}_{j \in I}. \quad (2)$$

De acuerdo a lo dicho en (Willard, 1970, p. 53) y (Munkres, 2002, p. 131-133), la topología que se vincula tradicionalmente al producto $\prod_{i \in I} X_i$ es llamada la *topología producto* y es aquella generada por la subbase $\{\pi_j^{-1}(V_j) : V_j \text{ es abierto en } X_j\}$, dicho de otro modo, un abierto en $\prod_{i \in I} X_i$ es una unión de elementos de la colección

$$\left\{ \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(V_j) : V_j \text{ es abierto en } X_j \text{ y } J \subseteq I \text{ es finito} \right\},$$

donde para cada $J \subseteq I$ finito, $\bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(V_j) = \prod_{j \in J} V_j \times \prod_{\substack{i \neq j \\ j \in J}} X_i$. El producto cartesiano dotado con la topología producto es usualmente conocido como *espacio producto*. En el caso donde todos los factores X_i sean iguales, digamos $X_i = X$ para todo $i \in I$, se adoptará en ocasiones la notación X^I para referir el espacio producto, en vez de la notación convencional $\prod_{i \in I} X_i$.

Ejemplo 1.1.48. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 102) Se define el *espacio de Cantor* como el espacio producto $\mathcal{C} := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, donde $\{0, 1\}$ es un espacio discreto.

En el caso particular de contar con una familia finita de espacios topológicos se tiene que cada abierto básico de la topología producto es un producto de abiertos, es decir, si $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de espacios topológicos y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto $V_i \subseteq X_i$ es abierto,

entonces $\prod_{i=1}^n V_i$ es un abierto básico de $\prod_{i=1}^n X_i$.

Las siguientes propiedades involucran a las funciones proyección mencionadas en (2).

Proposición 1.1.49. (Willard, 1970, p. 54) Dados una familia de espacios topológicos no vacíos $\{X_i\}_{i \in I}$ y el correspondiente espacio producto $\prod_{i \in I} X_i$, entonces para cada $j \in I$, π_j es una función continua, abierta y sobreyectiva.

El siguiente ejemplo muestra en particular que no toda función abierta y sobreyectiva es cerrada

Ejemplo 1.1.50. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 103) Considere la proyección π_1 de $\mathbb{R}^2$ a la primera componente y el subconjunto $A = \{(x, \frac{1}{x}) : x \neq 0\}$. Observe que A es cerrado porque $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es abierto, además $\pi_1(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pero $\{0\}$ no es abierto, por lo tanto $\pi_1(A)$ no es cerrado y de ello que π_1 no es cerrada.

Proposición 1.1.51. (Willard, 1970, p. 55) Sean X un espacio topológico y $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos, entonces una función $f : X \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ es continua si y solo si para cada $i \in I$, $\pi_i \circ f$ es continua.

La siguiente proposición recopila algunas propiedades que adquiere el espacio producto, de acuerdo con las propiedades de cada factor.

Proposición 1.1.52. Dada una familia de espacios topológicos no vacíos $\{X_i\}_{i \in I}$, las siguientes afirmaciones son ciertas para el espacio producto $\prod_{i \in I} X_i$ y una colección $\{A_i\}_{i \in I}$ donde cada A_i es un subespacio no vacío del correspondiente X_i :

- (i) (Munkres, 2002, p. 132) Producto de subespacios es subespacio: $\prod_{i \in I} A_i$ es subespacio de $\prod_{i \in I} X_i$.
- (ii) (Willard, 1970, p. 89) Producto de espacios T_k es T_k , para $k \in \{0, 1, 2\}$: si cada X_i es un espacio T_k , entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es un espacio T_k , con $k \in \{0, 1, 2\}$.
- (iii) (Munkres, 2002, p. 132) Producto de cerrados es cerrado: si cada A_i es cerrado en X_i , entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en $\prod_{i \in I} X_i$.
- (iv) (Willard, 1970, p. 120)(Teorema de Tychonoff) Producto de compactos es compacto: si cada X_i es compacto, entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es compacto.
- (v) (Willard, 1970, p. 210) Producto de espacios totalmente desconexos es totalmente desconexo: si cada X_i es totalmente desconexo, entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es totalmente desconexo.
- (vi) (Camargo and Villamizar, 2019, p. 326) Producto de espacios cero-dimensionales es cero-dimensional: si cada X_i es cero-dimensional, entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es cero-dimensional.

Ejemplo 1.1.53. Note que todo espacio discreto es Hausdorff y totalmente desconexo, además, si un espacio discreto es finito, entonces también es compacto, en particular $\{0, 1\}$ es compacto, Hausdorff y totalmente desconexo. De la proposición anterior se deduce que el espacio de Cantor $\mathcal{C}$, es un espacio topológico compacto, Hausdorff y totalmente desconexo.

Ahora se definirá la topología cociente

Definición 1.1.54. (Willard, 1970, p. 59) Si X es un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $f : X \longrightarrow Y$ una función sobreyectiva, entonces la colección de subconjuntos

$$\tau_f := \{U \subseteq Y : f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}, \quad (3)$$

define una topología sobre Y llamada la **topología cociente** referente a la función f y el espacio Y suele denominarse **espacio cociente**. f será declarada **función cociente** si Y está dotado con la topología cociente referente a f .

Sean X un espacio topológico y Y un espacio cociente determinado por $f : X \longrightarrow Y$. De la equivalencia dada en la Proposición 1.1.9 la función f resulta ser continua y además, para todo cerrado $W \subseteq Y$, $f^{-1}(W)$ es un cerrado de X . Adicionalmente, dada otra topología ρ sobre Y de tal forma que f es continua, note que si $U \in \rho$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X y por como se define τ_f en (3) se obtiene que $U \in \tau_f$, en conclusión $\rho \subseteq \tau_f$, es decir, τ_f es la topología más fina que torna a f continua.

Ejemplo 1.1.55. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 121) Sea $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ y tenga en cuenta la función $f : [0, 1] \longrightarrow S^1$ que asigna a cada $t \in [0, 1]$ el correspondiente punto $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in S^1$, viendo a $[0, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual. Observe que f es sobreyectiva y debido a la continuidad de las funciones $\sin(t)$ y $\cos(t)$ se obtiene que f es continua. Como $[0, 1]$ es compacto, S^1 Hausdorff y f continua, se sigue del apartado (b) de la Proposición 1.1.28 que f es cerrada. Debido a un resultado presentado en (Camargo and Villamizar, 2019, p. 121), donde se demuestra que cualquier función continua y sobreyectiva que sea abierta o cerrada es una función cociente; la función f es una función cociente, por tanto S^1 es un espacio cociente.

Proposición 1.1.56. (Willard, 1970, p. 60) Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función cociente. Entonces una función $g : Y \rightarrow Z$ es continua si y solo si $g \circ f : X \rightarrow Z$ es continua.

1.2. Grupos topológicos

Antes de presentar la definición de grupo topológico es conveniente resaltar que a lo largo de este trabajo, cuando se refiera a un grupo arbitrario o alguna de sus propiedades, será utilizada la notación multiplicativa, es decir, si $(G, \cdot)$ es un grupo y $a, b \in G$, entonces ab representará la imagen de (a, b) bajo la operación del grupo, así como a^{-1} denotará el inverso de a y la identidad del grupo, a menos que se indique lo contrario, siempre será simbolizada por 1.

1.2.1. Conceptos básicos.

Antes de definir el concepto de *grupo topológico* es conveniente recordar lo siguiente: si X es un espacio topológico y f es una función que va del producto $X \times X$ en X , entonces f es *continua en la primera componente* si para cada $(x, a) \in X \times X$, la función

$$\begin{aligned} f^a : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto f(x, a), \end{aligned}$$

es continua. De manera análoga se define la continuidad en la segunda componente, esto es, si $(a, x) \in X \times X$, entonces f es *continua en la segunda componente* si cada función

$$\begin{aligned} f_a : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto f(a, x), \end{aligned}$$

es continua. Se dice que f es *continua en cada variable por separado* si f es continua tanto en la primera como en la segunda componente. Además, f es continua en *ambas variables juntas* si f es continua en todo punto $(x, y) \in X \times X$.

Definición 1.2.1. (Husain, 1966, p. 27) Un **grupo topológico** es un par (G, τ) , siendo G un grupo y τ una topología en G tal que la operación del grupo, que va de $G \times G$ (visto como espacio producto) en G , es continua en ambas variables juntas, y la **función inversión**

$$Inv : G \rightarrow G$$

$$g \mapsto g^{-1},$$

es continua.

Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G . La intuición permite deducir que la noción de *subgrupo topológico* debe combinar la estructura algebraica y topológica en H . De acuerdo a lo establecido en (Husain, 1966, p. 54), H será un **subgrupo topológico** si visto como subespacio es un grupo topológico. Cabe aclarar en este punto que, pese a que existe la noción de *grupo semitopológico* (ver (Husain, 1966, p. 27)), que se caracteriza como aquella pareja (G, τ) tal que G es un grupo y τ es una topología en G de manera que la operación del grupo es continua en *cada variable por separado*, este concepto no se tendrá en cuenta en esta disertación.

Ejemplo 1.2.2.

- i) Cualquier grupo G dotado con la topología discreta o indiscreta es un grupo topológico.

ii) El grupo aditivo $\mathbb{R}$ dotado con la topología usual es un grupo topológico. El conjunto $\mathbb{Z}$ visto como subgrupo topológico es un espacio discreto.

iii) Dada una familia de grupos topológicos $\{G_i\}_{i \in I}$ considere el grupo producto $\prod_{i \in I} G_i$ con la operación usual definida allí. Si el producto es dotado con la topología producto, entonces $\prod_{i \in I} G_i$ es un grupo topológico.

iv) Si $n \in \mathbb{N}$ recuerde que el grupo aditivo de matrices cuadradas de orden n con entradas en $\mathbb{R}$, denotado por $M_n(\mathbb{R})$, es isomorfo como grupo a $\mathbb{R}^{n^2}$. La topología asignada a $M_n(\mathbb{R})$ es la topología usual de $\mathbb{R}^{n^2}$, de ello que $M_n(\mathbb{R})$ es un grupo topológico.

Dado un grupo topológico G y $H \subseteq G$, con respecto a notación se establece que $H \leq G$ denotará que H es un subgrupo topológico de G y si adicionalmente H es un subgrupo abierto o cerrado, entonces se escribirá respectivamente $H \leq_o G$ y $H \leq_c G$ para indicarlo.

Proposición 1.2.3. (Husain, 1966, p. 43) Si G es un grupo topológico y $a \in G$, las funciones

$$\begin{array}{ccc} r_a : G \longrightarrow G & & l_a : G \longrightarrow G \\ & \text{y} & \\ x \longmapsto xa & & x \longmapsto ax, \end{array}$$

denominadas traslaciones por derecha e izquierda, respectivamente, son homeomorfismos.

Sean G un grupo topológico, $g \in G$ y $U \subseteq G$. Defina los conjuntos $gU := \{gu : u \in U\}$ y $Ug := \{ug : u \in U\}$. Observe que si U es abierto o cerrado, debido a la Proposición 1.2.3, tanto gU como Ug son abiertos o cerrados respectivamente; en particular, dado $H \leq G$ el conjunto gH

es llamado *Clase Lateral Izquierda* de H en G y Hg es la *Clase Lateral Derecha* de H en G . El conjunto de todas las clases laterales izquierdas usualmente es denotado por G/H .

La siguiente definición permite equipar con estructura algebraica al conjunto de todas las clases laterales izquierdas.

Definición 1.2.4. Dados un grupo topológico G y $H \leq G$ se dirá que H es un **subgrupo normal** o **subgrupo distinguido** siempre que $H = a^{-1}Ha$, para todo $a \in G$, donde $a^{-1}Ha$ denota el conjunto cuyos elementos son de la forma $a^{-1}ha$, para algún $h \in H$.

En este trabajo se referirá a los subgrupos normales como *subgrupos distinguidos* para no presentar confusiones con los espacios topológicos normales, además se utilizará la notación estándar para denotar a tales subgrupos, es decir, si G es un grupo topológico y $H \leq G$, entonces el símbolo $H \trianglelefteq G$ indicará que H es un subgrupo topológico distinguido de G ; más aún, si H es abierto o cerrado se escribirá respectivamente $H \trianglelefteq_o G$ y $H \trianglelefteq_c G$ para resaltar la propiedad adicional.

Ahora se definirá el grupo topológico cociente.

Definición 1.2.5. (Husain, 1966, p. 57) Sea G un grupo topológico y $H \trianglelefteq G$. El grupo G/H equipado con la topología cociente que torna continua la proyección canónica

$$q_H : G \longrightarrow G/H$$

$$a \longmapsto aH,$$

es un grupo topológico denominado **Grupo Topológico Cociente**.

Ejemplo 1.2.6. (Husain, 1966, p. 44) Considere el grupo topológico aditivo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$. Se define el **Grupo Topológico Circular** como el grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Proposición 1.2.7. Las siguientes afirmaciones son ciertas para un grupo topológico G y $H \leq G$:

- (i) (Husain, 1966, p. 58) Si $H \trianglelefteq G$, entonces q_H es continua, sobreyectiva y abierta.
- (ii) (Bourbaki, 1995, p. 231) Si $H \trianglelefteq G$, entonces G/H es Hausdorff si y solo si H es cerrado en G .
- (iii) (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 22) Suponga que G es compacto, entonces H es abierto si y solo si es cerrado y G/H es finito.

1.2.2. Vecindades de la identidad.

Sea G un grupo topológico. Dado un par de subconjuntos no vacíos U y V de G defina $U^{-1} := \{u^{-1} : u \in U\}$ y $UV := \{uv : u \in U \text{ y } v \in V\}$.

Definición 1.2.8. (Husain, 1966, p. 45) Un subconjunto U de un grupo topológico G es llamado *simétrico* si $U = U^{-1}$.

La siguiente proposición permitirá construir una importante topología llamada la *Topología de Krull*. Antes de enunciar dicha proposición recuerde que para un conjunto X , la colección no vacía $\mathcal{A}$ de subconjuntos no vacíos en X es llamada *filtro sobre X* , si es cerrada bajo intersecciones finitas y superconjuntos, esto es, si $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$ y $F \subseteq X$, entonces

- i) $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{A}$.

ii) Si $F_1 \subseteq F$ entonces $F \in \mathcal{A}$.

Además, una subcolección no vacía $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ es llamada *base de filtro* para $\mathcal{A}$ si dado $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq A$.

Proposición 1.2.9. (Husain, 1966, p. 46) En todo grupo topológico G siempre existe una base de vecindades cerradas $\mathcal{B}$ de la identidad, tal que

(i) Cada $B \in \mathcal{B}$ es simétrico.

(ii) Dado $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $A^2 := AA \subseteq B$.

(iii) Si $B \in \mathcal{B}$ y $x \in G$, entonces existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq x^{-1}Ax$ o $xAx^{-1} \subseteq B$.

Recíprocamente, para un grupo G y una base de filtro $\mathcal{B}$ que satisface las condiciones anteriores, existe una única topología sobre G de manera que G resulta un grupo topológico y $\mathcal{B}$ forma una base de vecindades para la identidad.

1.3. Teoría de Categorías

El objetivo central de esta sección es presentar el concepto de *límite inverso*, pues es crucial a la hora de definir los *espacios y grupos profinitos*.

1.3.1. Definiciones y resultados claves.

Definición 1.3.1. (Rotman, 2009, p. 8) *Una categoría* $\mathcal{C}$ consta de tres ingredientes:

1. Una clase, denotada por $Ob(\mathcal{C})$, cuyos elementos son llamados *objetos de* $\mathcal{C}$.

2. Cada par de objetos A y B en $\mathcal{C}$ tiene asociado un conjunto, denotado por $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$, cuyos elementos son denominados **morfismos** de A en B . Usualmente se denotan como $A \xrightarrow{f} B$ o $f : A \longrightarrow B$.
3. Toda terna de objetos A, B y C en $\mathcal{C}$ define una función

$$\circ : Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \times Mor_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f,$$

denominada **producto** entre morfismos, que satisface las siguientes condiciones

- a) Dados $A, B, C, D \in Ob(\mathcal{C})$, los conjuntos $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$ son disjuntos, salvo si $A = C$ y $B = D$.
- b) Cada $A \in Ob(\mathcal{C})$ tiene un morfismo asociado $id_A \in Mor_{\mathcal{C}}(A, A)$, llamado **morfismo identidad**, tal que para cualquier otro objeto $B \in Ob(\mathcal{C})$ y cualesquiera morfismos $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, A)$, verifica que $f \circ id_A = f$ y $id_A \circ g = g$.
- c) Si $A, B, C, D \in Ob(\mathcal{C})$, $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B, C)$ y $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C, D)$, es válida la igualdad:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Cuando se sobre entienda la categoría $\mathcal{C}$ se omitirá el subíndice del conjunto $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ y se escribirá simplemente $Mor(A, B)$.

Definición 1.3.2. (Rotman, 2009, p. 22) Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $A, B \in Ob(\mathcal{C})$. Un morfismo $f \in Mor(A, B)$ es llamado **isomorfismo** si existe $g \in Mor(B, A)$ tal que $f \circ g = id_B$ y $g \circ f = id_A$.

Ejemplo 1.3.3. Si Λ es la colección de todos los espacios topológicos y Δ la colección de todas las funciones continuas entre espacios topológicos, entonces existe una categoría cuyos objetos y morfismos son respectivamente Λ y Δ . Dicha categoría se denota generalmente por **Top** y se refiere a ella como **la categoría de espacios topológicos**. De manera análoga es posible obtener las categorías **Grp**, **Rng**, **R-mod** y **TopGrp**; donde sus objetos correspondientes son grupos, anillos, R-módulos y grupos topológicos; junto con los morfismos, que son respectivamente homomorfismos de grupos, anillos, R-módulos y grupos topológicos.

Definición 1.3.4. (Lang, 2002, p. 57) Dada una categoría $\mathcal{C}$, un objeto $B \in Ob(\mathcal{C})$ es llamado **Terminal** o **Atractor**, si para todo $A \in Ob(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $g : A \rightarrow B$.

Ejemplo 1.3.5. En la categoría **Grp** el grupo trivial $\{e\}$ es un objeto terminal. El anillo trivial 0 es un objeto terminal en la categoría **Rng**.

Proposición 1.3.6. (Mac Lane, 1998, p. 20) Si $\mathcal{C}$ es una categoría en la cual A y B son dos objetos terminales, entonces existen únicos isomorfismos $f \in Mor(A, B)$ y $g \in Mor(B, A)$.

1.3.2. Límites inversos.

Definición 1.3.7. (Rotman, 2009, p. 230) Sea $(I, \preceq)$ un conjunto dirigido. Una familia de objetos $\{A_i\}_{i \in I}$ en una categoría $\mathcal{C}$, junto a una colección $\{f_i^j : A_j \rightarrow A_i\}_{i \preceq j \in I}$ de morfismos en $\mathcal{C}$, son llamadas **sistema inverso** (o sistema proyectivo) sobre I , si satisfacen las siguientes condiciones:

i) Para todo $i \in I$, $f_i^i = Id_{A_i}$.

ii) Si $i \preceq j \preceq k \in I$, entonces $f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$; es decir, si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A_k & \xrightarrow{f_i^k} & A_i \\ & \searrow f_j^k & \uparrow f_i^j \\ & & A_j. \end{array}$$

El sistema inverso conformado por los conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{f_i^j : A_j \rightarrow A_i\}_{i \preceq j \in I}$ será denotado por la doble colección $\{A_i; f_i^j\}_{i \preceq j \in I}$.

Con respecto al concepto de *sistema inverso* cabe resaltar que diferentes autores, como por ejemplo (Lezama, 2021b, p. 80) o (Jacobson, 1989, p. 70), definen *sistema inverso* mediante el concepto de *functor*; sin embargo, en este trabajo de grado se ha optado por definirlo sin necesidad de mencionar explícitamente un functor.

Ejemplo 1.3.8. (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 6) Dado un número primo p , considere a $\mathbb{N}$ como conjunto dirigido por el orden habitual. Si $n \leq m \in \mathbb{N}$ se tiene la proyección natural

$$p_n^m : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

$$a + p^m\mathbb{Z} \mapsto a + p^n\mathbb{Z},$$

entonces $\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}; p_n^m\}_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ es un sistema inverso de grupos finitos.

Ejemplo 1.3.9. (Camargo and Villamizar, 2019, p. 107) Suponga que $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia

infinita de espacios topológicos y defina el conjunto $\mathcal{I} := \{\alpha \subseteq I : \alpha \text{ es finito}\}$. Ordene a $\mathcal{I}$ con el Orden *Inclusión* $\preceq_0$. Para cada $\alpha \in \mathcal{I}$ considere el espacio producto $X_\alpha := \prod_{i \in \alpha} X_i$ y si $\beta \in \mathcal{I}$ tal que $\alpha \preceq_0 \beta$ se define la función continua

$$\begin{aligned} f_\alpha^\beta : X_\beta &\longrightarrow X_\alpha \\ (x_i)_{i \in \beta} &\mapsto (x_i)_{i \in \alpha}, \end{aligned}$$

entonces $\{X_\alpha; f_\alpha^\beta\}_{\alpha \preceq \beta \in \mathcal{I}}$ es un sistema inverso de espacios topológicos.

Se define a continuación el concepto de *familia de morfismos compatible* con un sistema inverso, que resulta esencial a la hora de definir límites inversos.

Definición 1.3.10. (Lezama, 2021b, p. 79) Sean $(I, \preceq)$ un conjunto dirigido y $\mathcal{C}$ una categoría.

Dado un sistema inverso $\mathcal{A} := \{A_i; f_i^j\}_{i \preceq j \in I}$ y $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, se dice que la colección de morfismos $\{f_i : A \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ es una *familia de morfismos compatible* con $\mathcal{A}$, si para cada $i \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo para todo índice $j \in I$ que esté por encima de i

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_i} & A_i \\ & \searrow f_j & \uparrow f_i^j \\ & & A_j, \end{array}$$

esto es, para cada $i \in I$ y todo $j \in I$ tal que $i \preceq j$, $f_i = f_i^j \circ f_j$.

Ejemplo 1.3.11. Dada una familia infinita de espacios topológicos $\{X_i\}_{i \in I}$ recuerde el sistema inverso $\mathcal{X} := \{X_\alpha; f_\alpha^\beta\}_{\alpha \preceq \beta \in \mathcal{I}}$ construido en el Ejemplo 1.3.9. Defina $X := \prod_{i \in I} X_i$ y considere para

cada $\alpha \in \mathcal{I}$ la proyección

$$\begin{aligned}\pi_\alpha : X &\longrightarrow X_\alpha \\ (x_i)_{i \in I} &\mapsto (x_i)_{i \in \alpha}.\end{aligned}$$

La colección de proyecciones $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ es una familia de funciones continuas compatible con el sistema $\mathcal{X}$.

Observación 1. Sean $(I, \preceq)$ un conjunto dirigido y $\mathcal{A} := \{A_i; f_i^j\}_{i \preceq j \in I}$ un sistema inverso en una categoría $\mathcal{A}$. En (Lang, 2002, p. 161) se afirma que es posible construir una categoría $\mathcal{C}$ cuyos objetos son familias de morfismos compatibles con $\mathcal{A}$. Para probar la anterior afirmación, primero se establece la colección

$$\Gamma := \{(A, (f_i)_{i \in I}) : A \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \text{ y } (f_i)_{i \in I} \text{ es una familia de morfismos compatible con } \mathcal{A}\}.$$

Defina la categoría $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ como aquella cuya clase de objetos es la colección Γ y para cada par $(A, (f_i)_{i \in I}), (B, (h_i)_{i \in I}) \in \Gamma$, un morfismo

$$(A, (f_i)_{i \in I}) \xrightarrow{f} (B, (h_i)_{i \in I}),$$

es un morfismo $f \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ de manera que $f_i = h_i \circ f$, para cada $i \in I$, en particular, la identidad de A en $\mathcal{A}$ es la identidad de $(A, (f_i)_{i \in I})$ en $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$. Si $(C, (g_i)_{i \in I}) \in \Gamma$ y $g \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C)$

de modo que $h_i = g_i \circ g$, para todo $i \in I$, entonces se define el producto de g y f , como aquel morfismo $g \circ f \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C)$ que satisface la igualdad $f_i = g_i \circ (g \circ f)$, para todo $i \in I$. Debido a que $\mathcal{A}$ es una categoría, los incisos a) y b) de la Definición 1.3.1 son verificados por $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$; de hecho, si $(A, (f_i)_{i \in I}), (B, (h_i)_{i \in I}), (C, (g_i)_{i \in I}), (D, (d_i)_{i \in I}) \in \Gamma$, $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(A, B)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(B, C)$ y $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}}(C, D)$, de la asociatividad de los morfismos en $\mathcal{A}$ se deduce la asociatividad en $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, es decir, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$; además, para cada $i \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} d_i \circ [(h \circ g) \circ f] &= (d_i \circ h) \circ g \circ f \\ &= g_i \circ g \circ f \\ &= h_i \circ f \\ &= f_i, \end{aligned}$$

luego $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ en efecto es una categoría.

Definición 1.3.12. (Lang, 2002, p. 161) Considere un conjunto dirigido $(I, \preceq)$ y un sistema inverso sobre una categoría $\mathcal{A}$, a saber, $\mathcal{A} := \{A_i; f_i^j\}_{i \preceq j \in I}$. Un objeto terminal $(A, (\varphi_i)_{i \in I})$ en la categoría $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ es llamado **límite inverso** del sistema $\mathcal{A}$; esto es, si $(B, (h_i)_{i \in I}) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$, entonces existe un único morfismo $\psi : B \rightarrow A$ de manera que $\varphi_i \circ \psi = h_i$, para cada $i \in I$. Se escribirá $A = \varprojlim A_i$ para representar el límite inverso, omitiendo la familia de morfismos cuando no sea necesario hacer mención de las mismas, además, se sigue de la Proposición 1.3.6 que el límite inverso es único salvo isomorfismos.

Ejemplo 1.3.13. (Lang, 2002, p. 50) Si p es un número primo, del Ejemplo 1.3.8 se sabe que $\mathcal{F} := \{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}; p_n^m\}_{n \leq m \in \mathbb{N}}$ es un sistema inverso. Considere el grupo:

$$X = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} : x_i \equiv x_j \pmod{p^j}, j \leq i \right\}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ tome la proyección natural $p_i : X \rightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$. La colección de homomorfismos $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ constituye una familia de morfismos compatible con el sistema $\mathcal{F}$. Siendo así se tiene que X junto con la familia $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es límite inverso del sistema $\mathcal{F}$, es decir, $(X, (p_i)_{i \in \mathbb{N}})$ es un objeto terminal en la categoría $\mathcal{C}_{\text{Grp}}$. Este límite inverso se conoce en la literatura como el *grupo de enteros p -ádicos* y se acostumbra a denotarlo como $\mathbb{Z}_{(p)}$ o $\mathbb{Z}_p$.

Observación 2. Con respecto a la Definición 1.3.12 cabe resaltar que algunos autores, como por ejemplo (Rotman, 2009, p. 231), definen límite inverso en una categoría utilizando una propiedad que usualmente es conocida como *propiedad universal*, de hecho, (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 2), al igual que (Wilson, 1998, p.12), definen el límite inverso de un sistema conformado por espacios topológicos y funciones continuas por medio de dicha propiedad universal, adaptada en el contexto topológico; de manera análoga lo hace (Rotman, 2010, p. 500), cuando define límite inverso en R -módulos; por lo tanto, si $(I, \preceq)$ es un conjunto dirigido, $\mathcal{A} := \{A_i; f_i^j\}_{i \preceq j \in I}$ un sistema inverso sobre una categoría $\mathcal{C}$ y $(A, (\varphi_i)_{i \in I})$ el límite inverso de $\mathcal{A}$, la propiedad que caracteriza al límite será referida como la ***Propiedad Universal del Límite Inverso***, y ella garantiza que, dado un objeto B en $\mathcal{C}$ y $\{h_i : B \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ una familia de morfismos compatible con $\mathcal{A}$, existirá un único

morfismo $\psi : B \longrightarrow A$ de manera que el siguiente diagrama es conmutativo para cada índice $i \in I$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\psi} & A \\ & \searrow h_i & \downarrow \varphi_i \\ & & A_i. \end{array}$$

En lo que resta de este trabajo de grado se utilizará de manera constante el concepto de límite inverso y su respectiva propiedad universal.

Ejemplo 1.3.14. Dado un número primo p , el sistema inverso $\mathcal{F}$ construido en el Ejemplo 1.3.13 puede ser interpretado en la categoría de grupos finitos, sin embargo, el grupo $\mathbb{Z}_{(p)}$ de los enteros p -ádicos no es un grupo finito, luego, en la categoría de grupos finitos no todo sistema inverso admite límite inverso.

El Ejemplo 1.3.14 pone en evidencia que el límite inverso no siempre existe, sin embargo, el siguiente resultado establece que en ciertas categorías específicas el límite inverso siempre existe.

Proposición 1.3.15. (Vinroot, 2008, p. 4) Si $(I, \preceq)$ es un conjunto dirigido y $\{A_i; f_i^j\}_{i \preceq j \in I}$ un sistema inverso en cualquiera de las siguientes categorías:

- i) **Top.**
- ii) **TopGrp.**
- iii) **Grp.**
- iv) **Rng.**

v) ***R-mod.***

Entonces $\varprojlim A_i$ siempre existe.

Ejemplo 1.3.16. Considere una familia infinita de espacios topológicos $\{X_i\}_{i \in I}$ y $X := \prod_{i \in I} X_i$.

Recuerde que en el Ejemplo 1.3.11 se definen un sistema inverso $\mathcal{X}$ y una familia de funciones

$\{\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ compatible con $\mathcal{X}$. Una verificación de rutina permite concluir que X junto

con la familia de proyecciones $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ conforman el límite inverso del sistema $\mathcal{X}$, en particular,

si $I = \mathbb{N}$ y cada X_i es el espacio discreto $\{0, 1\}$, entonces $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \varprojlim_{\alpha \in \mathbb{N}} \{0, 1\}^\alpha$, es decir, el **Espacio**

de Cantor puede expresarse como límite inverso de espacios topológicos finitos y discretos.

Teniendo en cuenta que uno de los objetivos de este trabajo es estudiar la estructura profinita tanto en espacios topológicos como en grupos topológicos, se ha decidido a partir de ahora enfocar la atención en las categorías **Top** y **TopGrp**, por lo tanto, de ahora en adelante, cuando se refiera a un sistema inverso, se entenderá que dicho sistema está conformado por espacios topológicos y funciones continuas o por grupos topológicos y homomorfismos entre grupos topológicos.

Proposición 1.3.17. (Wilson, 1998, p. 11-14) Sean $(I, \preceq)$ un conjunto dirigido, $\mathcal{X} := \{X_i; f_i^j\}_{i \preceq j \in I}$ un sistema inverso y $(\varprojlim X_i, (\varphi_i)_{i \in I})$ el límite inverso de $\mathcal{X}$, entonces

i) $\varprojlim X_i$ es único salvo homeomorfismos.

ii) $\varprojlim X_i$ es identificado con el subespacio

$$\left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : x_i = f_i^j(x_j), \text{ para todo } i \preceq j \right\}.$$

iii) Si cada X_i es Hausdorff, entonces $\varprojlim X_i$ también lo es y además, visto como subespacio de

$\prod_{i \in I} X_i$ es cerrado.

iv) Si cada X_i es totalmente desconexo, entonces $\varprojlim X_i$ también lo es.

v) Si cada X_i es no vacío, compacto y Hausdorff, entonces $\varprojlim X_i$ es no vacío, compacto y Hausdorff.

vi) Si Y es un espacio topológico y $\theta : Y \longrightarrow \varprojlim X_i$ una función, entonces, θ es continua si y solo si para cada $i \in I$, $\varphi_i \circ \theta$ es continua.

Proposición 1.3.18. (Wilson, 1998, p. 14) Suponga que $\mathcal{X} := \{X_i, \varphi_i^j\}_{i \leq j \in I}$ es un sistema inverso conformado por espacios topológicos no vacíos, compactos y Hausdorff, y $(\varprojlim X_i, (\pi_i)_{i \in I})$ es el límite inverso de $\mathcal{X}$. Si $Y \subseteq \varprojlim X_i$ satisface que $\pi_i(Y) = X_i$, para cada $i \in I$, entonces Y es denso en $\varprojlim X_i$.

En el marco de la teoría de categorías existe lo que se conoce como *sistema directo* y *límite directo*, conceptos que son duales a los de sistema inverso y límite inverso, respectivamente; esto es, basta con cambiar la dirección de las flechas que conforman un sistema inverso para obtener un sistema directo. De forma análoga es posible conseguir un límite directo. A pesar de la relación entre los límites directos e inversos, en este trabajo no serán considerados ni sistemas ni límites directos.

2. Espacios y grupos profinitos

En este capítulo se presentan las definiciones y resultados básicos que rodean el concepto de *espacio y grupo profinito*, en particular se desarrollará la relación de los grupos profinitos y las acciones de grupo.

2.1. Teoría básica

Definición 2.1.1. (Magid, 2014, p. 45) Un espacio topológico X es llamado *espacio profinito* si X es homeomorfo al límite inverso de algún sistema inverso de espacios topológicos finitos y discretos. Un grupo topológico se denomina *grupo profinito* si visto como espacio topológico es profinito.

De la definición anterior se sigue que un espacio profinito es compacto y Hausdorff. Más adelante se caracterizarán los espacios profinitos, agregando una característica adicional a las ya mencionadas.

Ejemplo 2.1.2. El Ejemplo 1.3.16 muestra que el espacio de Cantor puede ser expresado como límite inverso de espacios topológicos finitos y discretos, es decir, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es un espacio profinito por definición.

Ejemplo 2.1.3. Dado un número primo p , el Ejemplo 1.3.13 presenta el grupo de enteros p -ádicos como límite inverso de un sistema compuesto por grupos finitos. Si dotamos con la topología discreta a cada grupo, entonces $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un grupo profinito.

Definición 2.1.4. (Magid, 2014, p. 45) Sean X un espacio topológico y P, Q dos subconjuntos de

X . Decimos que P y Q **se pueden separar** si existen subconjuntos abiertos y disjuntos U, V de X , tal que $P \subseteq U$, $Q \subseteq V$ y $U \cup V = X$.

Los subconjuntos U y V mencionados en la definición anterior resultan ser clopen y son llamados *separación* de P y Q , o simplemente se dice que U y V *separan* los subconjuntos P y Q .

Lema 1. Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- a) (Magid, 2014, p. 45) Suponga que C y D son subconjuntos compactos de X que satisfacen la siguiente propiedad: para todo par $(c, d) \in C \times D$ se cumple que c y d pueden ser separados. Entonces C y D pueden ser separados.
- b) (Magid, 2014, p. 41) Si X es límite inverso de espacios discretos, entonces en X se separan puntos diferentes.

El siguiente resultado caracteriza los espacios compactos donde es posible separar cualquier par de puntos distintos.

Proposición 2.1.5. (Magid, 2014, p. 46) Si X es un espacio compacto, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es Hausdorff y cero-dimensional.
2. Cualquier par de puntos diferentes de X pueden ser separados.

Demostración. Suponga 1. y sean $p \neq q \in X$. Como X es Hausdorff y cero-dimensional, existe un clopen E de X tal que $p \in E$ y $q \notin E$. Si define $F = X \setminus E$ note que E y F separan a p y q como

se buscaba. Ahora suponga 2. Observe primero que la hipótesis implica que X es Hausdorff. Resta ver que X es cero-dimensional. Sea U un abierto no vacío de X y $p \in U$. Si U es propio, entonces $D = X \setminus U$ es compacto, pues X lo es. Por la parte a) del Lema 1 p y D pueden ser separados, digamos, por los conjuntos M_p y M_D , que además son clopen de X ; más aún, $M_p \subset U$ pues en caso contrario M_p y M_D no separan a p y D . Como p fue escogido de forma arbitraria se concluye que $U = \bigcup_{p \in U} M_p$. Ahora, si $U = X$, suponga que X tiene por lo menos dos puntos distintos p y q , entonces por hipótesis existen conjuntos clopen E_p, F_q que separan a p y q , de donde se sigue que $X = E_p \cup F_q$. Para finalizar, si X tiene solo un punto, por vacuidad se obtiene el resultado buscado. En todos los casos se consiguió una base para X conformada por subconjuntos clopen. $\square$

Definición 2.1.6. (Magid, 2014, p. 47) Si X es un espacio topológico, se dirá que una familia finita $P = \{X_1, \dots, X_n\}$, de subconjuntos no vacíos de X , es una **partición** de X , si P es un cubrimiento abierto de X , donde cada par de elementos en P son disjuntos.

Ejemplo 2.1.7. Considere el conjunto $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times [0, 1] \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$. Recuerde que A_n es un clopen de X . Los conjuntos A_n y $X \setminus A_n$ conforman una partición para X .

Ejemplo 2.1.8. Sean P y Q particiones de un espacio topológico X , entonces la colección

$$T := \{A \cap B : A \in P \text{ y } B \in Q\},$$

es una partición de X .

Sean X un espacio topológico y $\mathcal{P}$ la colección de todas las particiones de X . Note que $\{X\}$ es una partición de sí mismo, luego $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Sobre $\mathcal{P}$ Se define la **relación de refinamiento** “ $\preceq$ ” como sigue:

Si $P, Q \in \mathcal{P}$, entonces $P \preceq Q$ si y solo si Q es un refinamiento de P ,

es decir, si $P \preceq Q$, entonces para todo $U \in Q$ existe $V \in P$ tal que $U \subseteq V$. El siguiente lema será utilizado más adelante.

Lema 2. El conjunto $\mathcal{P}$ dotado con la relación de refinamiento es un conjunto dirigido.

Demostración. La reflexividad de la relación es clara, pues cualquier partición es un refinamiento de sí mismo. Sean $P, Q \in \mathcal{P}$ tales que $P \preceq Q$ y $Q \preceq P$. Si $A \in Q$, entonces existe $B \in P$ tal que $A \subseteq B$. Observe que la existencia de B es única, pues si existiera $B' \in P$ de manera que $A \subseteq B'$, entonces $B \cap B' \neq \emptyset$ y como P es partición se debe dar que $B = B'$. Ahora, como $B \in P$, entonces existe $A' \in Q$ tal que $B \subseteq A'$ y de esto se sigue que $A \cap A' \neq \emptyset$, con lo cual $A = A'$. Se concluye de lo anterior que $A = B$ y de esta forma $Q \subseteq P$. De manera análoga se obtiene que $P \subseteq Q$, de ello $P = Q$ como se quería. Suponga que $P \preceq Q \preceq T \in \mathcal{P}$ y tome $U \in T$, luego, existen $V_1 \in Q$ y $V_2 \in P$ tales que $U \subseteq V_1 \subseteq V_2$, por lo tanto $P \preceq T$. Para finalizar, suponga que $P, Q \in \mathcal{P}$. Por lo hecho en el Ejemplo 2.1.8, la colección T descrita allí es una partición para X y de su construcción se sigue que $P \preceq T$ y $Q \preceq T$ como se quería. $\square$

Observación 3. Si X es un espacio topológico y $\mathcal{P}$ es la colección de particiones en X , se sigue de la unicidad mencionada en la demostración del Lema 2 que, para cada $P, Q \in \mathcal{P}$ tal que $P \preceq Q$, las funciones $f_P^Q : Q \longrightarrow P$ que asigna a cada $A \in Q$ un único $B_A \in P$ están bien definidas. Por

otro lado, para propósitos de este trabajo se considerará en cada partición la topología discreta. En ese sentido se obtiene que cada función f_P^Q es continua, donde $P \preceq Q$. De hecho la colección $\mathcal{P}$ junto con la familia de funciones $\{f_P^Q : P \preceq Q\}$ definidas anteriormente determinan un sistema inverso sobre $\mathcal{P}$, que será denotado en este trabajo como $\overline{\mathcal{P}}$. En efecto, sea $P \in \mathcal{P}$. Dado $A \in P$, como $\mathcal{P}$ es un conjunto dirigido, entonces $P \preceq P$, luego existe $B \in P$ tal que $A \subseteq B$. Se sigue de la demostración del Lema 2 que $A = B$ y de esto $f_P^P = id_P$. Resta ver que $f_P^Q \circ f_Q^T = f_P^T$, para particiones $P \preceq Q \preceq T \in \mathcal{P}$. Para esto, si $C \in T$, como $Q \preceq T$ existe un único $B_C \in Q$ tal que $f_Q^T(C) = B_C$. Por otro lado, ya que $P \preceq Q$, existe un único $A_{B_C} \in P$ tal que $f_P^Q(B_C) = A_{B_C}$. Además de lo anterior, como $P \preceq T$, entonces existe $W \in P$ de manera que $f_P^T(C) = W$ y de ello que $W \cap A_{B_C} \neq \emptyset$ con lo cual se concluye que $W = A_{B_C}$. Del razonamiento anterior se infiere que $f_P^Q(f_Q^T(C)) = f_P^Q(B_C) = A_{B_C} = f_P^T(C)$, por lo tanto $\overline{\mathcal{P}}$ es un sistema inverso sobre $\mathcal{P}$.

El siguiente teorema caracteriza los espacios profinitos.

Teorema 2.1.9. (Magid, 2014, p. 48) Las siguientes condiciones son equivalentes para un espacio topológico X :

1. X es compacto, Hausdorff y cero-dimensional.
2. X es profinito.

Demostración. Suponga primero que X es profinito. En primer lugar X es compacto Hausdorff. En segundo lugar se sigue de la parte b) del Lema 1 que distintos puntos de X pueden ser separados y por la Proposición 2.1.5 X es cero-dimensional.

Recíprocamente, si X es compacto, Hausdorff y cero-dimensional, tome la colección $\mathcal{P}$ de particiones en X dotada con la relación de refinamiento " $\preceq$ ". Se sigue del Lema 2 que $\mathcal{P}$ es un conjunto dirigido. Considere ahora el sistema inverso $\overline{\mathcal{P}}$ construido en la Observación 3, equie a cada partición P con la topología discreta y tenga en cuenta el límite inverso $\tilde{X} = \varprojlim_{\mathcal{P}} P$, junto con la colección de proyecciones $\{\pi_P : \tilde{X} \longrightarrow P \mid P \in \mathcal{P}\}$ que acompañan a $\tilde{X}$. Se construirá una familia de funciones compatible con el sistema $\overline{\mathcal{P}}$, para ello sea $P = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ una partición de X y defina la función continua $f_P : X \longrightarrow P$, dada por $f_P(x) = X_i$, si $x \in X_i$. La colección $\mathcal{F} := \{f_P : P \in \mathcal{P}\}$, es compatible con $\overline{\mathcal{P}}$, pues dados $P \preceq Q \in \mathcal{P}$ y $w \in X$, como P y Q son particiones, existen $A \in P$ y $B \in Q$ tal que $w \in A \cap B$. Ahora bien, como $P \preceq Q$, entonces existe $C_B \in P$ de modo que $B \subseteq C_B$ y de esta forma $w \in C_B \cap A$, luego $A = C_B$. Del razonamiento anterior se deduce que $f_P^Q \circ f_Q(w) = f_P^Q(f_Q(w)) = f_P^Q(B) = C_B = f_P(w)$, así $\mathcal{F}$ es compatible con $\overline{\mathcal{P}}$. Por la Propiedad Universal del Límite Inverso se obtiene una única función continua $f : X \longrightarrow \tilde{X}$, que verifica $\pi_P \circ f = f_P$, además, $\pi_P(f(X)) = f_P(X) = P$, es decir, $f(X)$ es denso en $\tilde{X}$ en virtud de la Proposición 1.3.18. Note además que $f(X)$ es cerrado pues X es compacto, f es continua y $\tilde{X}$ es Hausdorff, en conclusión f es sobreyectiva. Por otro lado, debido a la Proposición 2.1.5, X separa puntos diferentes. Sean $x \neq y \in X$ y suponga que $f(x) = f(y)$, en tal caso, para cada $P \in \mathcal{P}$, $f_P(x) = \pi_P(f(x)) = \pi_P(f(y)) = f_P(y)$. Como $x \neq y$ existen conjuntos abiertos U, V que separan a x, y . Si P es una partición de X y $X_i \in P$ tal que $x, y \in X_i$ defina $\tilde{U} := X_i \cap U$ y $\tilde{V} := X_i \cap V$. Observe que la colección $\tilde{\mathcal{P}} := (\mathcal{P} \setminus \{X_i\}) \cup \{\tilde{U}, \tilde{V}\}$ es una partición de X y por lo tanto $\tilde{U} = f_{\tilde{\mathcal{P}}}(x) = f_{\tilde{\mathcal{P}}}(y) = \tilde{V}$, lo cual es una contradicción. De lo anterior se concluye que $f(x) \neq f(y)$ y f es inyectiva como se quería. Además de lo anterior, f es cerrada

y en conclusión un homeomorfismo. Así $X \cong \varprojlim_{\mathcal{P}} P$ es profinito. $\square$

Ejemplo 2.1.10. Cualquier espacio (grupo) finito y discreto es profinito.

La caracterización dada en el Teorema 2.1.9 puede ser reformulada en términos de espacios totalmente desconexos.

Proposición 2.1.11. (Magid, 2014, p. 50) Si X es un espacio topológico, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es compacto, Hausdorff y totalmente desconexo.
2. X es profinito.

Demostración. Suponga que X es compacto, Hausdorff y totalmente desconexo. Se sigue de la Proposición 1.1.47 que X es cero-dimensional y por el Teorema 2.1.9 X es profinito. La recíproca se obtiene, nuevamente del Teorema 2.1.9 y de la Proposición 1.1.47. $\square$

En (Magid, 2014, p. 50) se presenta una demostración diferente del anterior resultado. El siguiente lema servirá para recordar la demostración que propone Magid.

Lema 3. (Magid, 2014, p. 49) Sean X un espacio compacto y Hausdorff y $p \in X$. Defina

$$A := \{q \in X : q \text{ puede ser separado de } p\},$$

entonces A es abierto y $X \setminus A$ es conexo.

Demostración del Teorema 2.1.11: Si X es profinito, entonces se sigue del Teorema 2.1.9 y de la Proposición 1.1.47 que X es compacto, Hausdorff y totalmente desconexo. Por otro lado, si supone que X es compacto, Hausdorff y totalmente desconexo, tome $p \in X$. Por el Lema 3 el conjunto de puntos que pueden ser separados de p tiene complemento conexo. Sea A dicho complemento conexo, entonces A contiene al punto p , pero X es totalmente desconexo, luego $A = \{p\}$. Como p fue tomado de manera arbitraria se sigue que cualquier par de puntos distintos de X pueden ser separados y por la Proposición 2.1.5, X es cero-dimensional. Se concluye del Teorema 2.1.9 que X es profinito.

Ejemplo 2.1.12. (Ramírez, 2017, p. 23) Un espacio topológico es llamado **espacio de Stone** si es compacto, Hausdorff y totalmente desconexo, es decir, todo espacio de Stone es un espacio profinito.

Las propiedades que caracterizan a los espacios profinitos permiten encontrar de manera sencilla ejemplos de espacios que no son profinitos.

Ejemplo 2.1.13.

- i)* En general cualquier espacio conexo no es profinito, en particular $\mathbb{R}$ y el seno del topólogo no son profinitos.
- ii)* $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no son profinitos pues ellos no son compactos.
- iii)* $\mathbb{Z}$ no es compacto pues es un espacio discreto infinito.

El lector podrá deducir del Teorema 2.1.9 o de la Proposición 2.1.11 que los subespacios cerrados de un espacio profinito son profinitos, sin embargo, la siguiente proposición ofrece una prueba formal de este hecho y además da condiciones para que un grupo cociente sea profinito. Cabe resaltar en este punto que las obras consultadas sobre espacios profinitos, como por ejemplo (Magid, 2014), (Ribes and Zalesskii, 2000) y (Wilson, 1998), no proporcionan una prueba formal sobre el hecho en mención, no obstante, se cree que en algún libro sobre el tema debe estar el resultado.

Proposición 2.1.14. Dado un grupo profinito G y $H \trianglelefteq_c G$, entonces tanto H como G/H son profinitos.

Demostración. Debido a que H es un subespacio de un espacio Hausdorff y totalmente desconexo, entonces H también es Hausdorff y totalmente desconexo, además, como es un subespacio cerrado de un espacio de Hausdorff, se deduce que H es compacto, por ende H es profinito en virtud de la Proposición 2.1.11.

Para ver que el grupo cociente es profinito primero note que G/H es compacto porque él es imagen continua del compacto G mediante la proyección canónica q_H , de hecho también es Hausdorff debido a la Proposición 1.2.7. Considere ahora la componente conexa C_H de la identidad y suponga que ella tiene más de un elemento. Sea $gH \in C_H$. Puesto que G/H es Hausdorff, entonces existen abiertos disjuntos U, V de modo que $gH \in V$ y $H \in U$, de ello que $q_H^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de $1 \in G$, además, dado que G es cero-dimensional existe un clopen $V_1 \subseteq G$ tal que $1 \in V_1 \subseteq q_H^{-1}(U)$, es decir, $q_H(V_1) \subseteq U$; de hecho $q_H(V_1)$ es clopen ya que q_H es abierta y V_1 es

un compacto abierto de G . Observe que necesariamente $C_H \subseteq q_H(V_1)$, pues en caso contrario C_H se desconecta, luego $C_H \subseteq q_H(V_1) \subseteq U$, lo que conlleva a que $gH \in U$ pero esto no puede suceder porque $gH \in V$ y $V \cap U = \emptyset$, por lo tanto $C_H = \{H\}$, por consiguiente, si $xH \in G/H$, entonces $C_{xH} = xH \cdot C_H = \{xH\}$. Así G/H es totalmente desconexo y de nuevo por la Proposición 2.1.11, G/H es profinito. $\square$

Con el objetivo de proporcionar más ejemplos sobre espacios profinitos se recapitulará una parte del trabajo hecho por Ramírez en (Ramírez, 2017), donde muestra entre otras cosas que el espectro primo de un anillo de Boole es un espacio de Stone, es decir, un espacio profinito. Primero se recordarán algunas definiciones.

Definición 2.1.15. Un anillo R es llamado *anillo de Boole* si todo elemento es idempotente, esto es, si para cada $x \in R$, $x^2 = x$.

Ejemplo 2.1.16.

- (i) El anillo $\mathbb{Z}_2$ es un anillo de Boole.
- (ii) Dado un conjunto no vacío X , la colección $\mathcal{P}(X)$ junto con la diferencia simétrica y la intersección forman un anillo que además es de Boole.

Definición 2.1.17. Sea R un anillo conmutativo con unidad. El conjunto

$$\text{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ es ideal primo de } R\},$$

es conocido como el *espectro primo* de R .

Dado un anillo R conmutativo con uno, considere $\text{Spec}(R)$. Para cada ideal $I \subseteq R$ se define el conjunto

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) : I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

El espectro primo de R suele dotarse con la topología que tiene como base a los conjuntos de la forma $D(\langle a \rangle) := \text{Spec}(R) \setminus V(\langle a \rangle)$, para cada $a \in R$, y es conocida en la literatura como la **Topología de Zariski**. Dicha topología torna compacto a $\text{Spec}(R)$ (ver (Atiyah, 2018, p. 12)). El siguiente ejemplo muestra que en general el espectro primo de un anillo no es profinito.

Ejemplo 2.1.18. $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ no es T_1 pues $\{\langle 0 \rangle\}$ no es cerrado, por lo tanto tampoco es Hausdorff; de hecho, el espectro de $\mathbb{Z}$ tampoco es totalmente desconexo porque en caso contrario él sería T_1 .

El siguiente resultado se encuentra en (Ramírez, 2017, p. 26).

Proposición 2.1.19. Si R es un anillo de Boole con unidad, entonces $\text{Spec}(R)$ es un espacio de Stone (por tanto profinito).

La recíproca de la Proposición 2.1.19 no es verdadera pues si considera el anillo $\mathbb{Z}_6$, note que $\text{Spec}(\mathbb{Z}_6) = \{\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle\}$ y la topología de Zariski en este caso coincide con la discreta, de ello que $\text{Spec}(\mathbb{Z}_6)$ sea profinito, sin embargo $\mathbb{Z}_6$ no es un anillo de Boole.

Ahora se presentará un espacio topológico que, entre otras cosas, es utilizado por Tarizadeh en (Tarizadeh, 2013) para demostrar que la categoría de espacios profinitos es una *subcategoría reflexiva* de la categoría de espacios compacto y Hausdorff.

Definición 2.1.20. (Magid, 2014, p. 51) Sea X un espacio topológico. El conjunto

$$Comp(X) := \{A \subseteq X : A \text{ es una componente conexa de } X\},$$

equipado con la topología cociente, que torna continua la función $\varphi : X \rightarrow Comp(X)$ que asigna a cada $x \in X$ su respectiva componente conexa C_x , es llamado el *espacio de componentes de X* .

El objetivo ahora será establecer condiciones bajo las cuales el espacio de componentes sea profinito.

Observación 4. Con respecto a la definición anterior note que φ es sobreyectiva, de hecho si X es compacto, $Comp(X)$ también lo es. Además de lo anterior cabe resaltar algunas propiedades adicionales de φ :

1. Si $W \subseteq Comp(X)$, entonces $\varphi^{-1}(W)$ es unión de componentes de X . Exactamente se tiene que $\varphi^{-1}(W) = \bigcup_{C \in W} C$ pues, si $x \in \varphi^{-1}(W)$, entonces existe $C \in W$ tal que $\varphi(x) = C$, luego $x \in \bigcup_{C \in W} C$. La contención restante es inmediata.
2. Para cada $C \in Comp(X)$ vale la igualdad $\varphi(C) = \{C\}$.
3. Suponga que A es un subconjunto de X que es una unión de componentes conexas, entonces $A = \varphi^{-1}(\varphi(A))$.

La observación anterior es útil para demostrar que $Comp(X)$ es totalmente desconexo. Se presenta a continuación una prueba de esta afirmación.

Proposición 2.1.21. (Magid, 2014, p. 51) El espacio $Comp(X)$ es totalmente desconexo, para cualquier espacio topológico X .

Demostración. Sea C una componente conexa de $Comp(X)$. Se mostrará que $C = \{P\}$, para algún $P \in Comp(X)$, para ello primero considere $F := \varphi^{-1}(C)$ y note que F es conexo en X , pues si F es unión disjunta de los cerrados W y E , por un lado, del inciso 1. de la Observación 4 se obtiene que $F = \bigcup_{M \in C} M$; por otro lado, como $\bigcup_{M \in C} M = W \cup E$ y cada M es una componente de X , entonces $W = \bigcup_{M \cap W \neq \emptyset} M$ y $E = \bigcup_{M \cap E \neq \emptyset} M$. Se concluye del ítem 3. de la Observación 4 que $E = \varphi^{-1}(\varphi(E))$ y $W = \varphi^{-1}(\varphi(W))$, de donde $\varphi(E)$ y $\varphi(W)$ son cerrados; adicionalmente $C = \varphi(\varphi^{-1}(C)) = \varphi(E \cup W) = \varphi(E) \cup \varphi(W)$. De hecho $\varphi(E)$ y $\varphi(W)$ son disjuntos pues si existe $A \in \varphi(E) \cap \varphi(W) \subset \varphi(E) \cup \varphi(W) = C$, entonces existen elementos $x \in E$ y $y \in W$ tales que $\varphi(x) = A = \varphi(y)$. Por otra parte, como $A \in C$, entonces $A \subseteq \varphi^{-1}(C) = E \cup W$, pero A es conexo y $E \cap W = \emptyset$ luego $A \subseteq E$ ó $A \subseteq W$, de donde $A \cap E = \emptyset$ ó $A \cap W = \emptyset$, pero esto es una contradicción ya que $x \in A \cap E$ y $y \in A \cap W$. Con esto se concluye que $(\varphi(E), \varphi(W))$ desconecta a C y como C es una componente de $Comp(X)$, entonces $\varphi(E) = \emptyset$ o $\varphi(W) = \emptyset$, es decir, $E = \emptyset$ o $W = \emptyset$; así F es conexo. De la conexidad de F se sigue que existe $P \in Comp(X)$ tal que $F \subseteq P$, luego $C = \varphi(F) = \{P\}$ y de esta forma $Comp(X)$ es totalmente desconexo. $\square$

El espacio $Comp(X)$ además satisface la siguiente propiedad universal:

Proposición 2.1.22. (Magid, 2014, p. 51) Dado un espacio topológico X , si Y es totalmente desconexo y $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces existe una única función continua $q : Comp(X) \longrightarrow Y$, tal que $q \circ \varphi = f$.

Demostración. Dado un espacio totalmente desconexo Y y $f : X \longrightarrow Y$ continua percate que si C es una componente conexa de X , entonces f es constante en C ya que $f(C)$ es conexo en Y ,

y los subconjuntos conexos de Y solo tienen un punto, es decir, existe un único $y_C \in Y$ tal que $f(C) = \{y_C\}$. La observación anterior permite definir una función $q : \text{Comp}(X) \longrightarrow Y$ que asigna a cada componente conexa C de X un único y_C tal que $f(C) = y_C$, es decir, $q(C) := y_C$. Note que si $x \in X$, entonces $q \circ \varphi(x) = q(\varphi(x)) = q(C_x) = y_{C_x} = f(x)$ y con esto $q \circ \varphi = f$ como se quería. Debido a que $q \circ \varphi$ es continua y φ es una función cociente se sigue de la Proposición 1.1.56 que q es continua. Para finalizar, si $t : \text{Comp}(X) \longrightarrow Y$ es una función continua tal que $t \circ \varphi = f$, entonces $q \circ \varphi = t \circ \varphi$ y por la sobreyectividad de φ se obtiene $t = q$. $\square$

Se probó que para un espacio topológico X , $\text{Comp}(X)$ es totalmente desconexo. Si X es además compacto, entonces $\text{Comp}(X)$ resulta compacto, sin embargo, en general tal espacio no es Hausdorff pues Magid en (Magid, 2014, p. 51) afirma que si X es el espacio exhibido en el Ejemplo 1.1.36, entonces $\text{Comp}(X)$ no es Hausdorff. El siguiente resultado brinda condiciones necesarias y suficientes para que el espacio $\text{Comp}(X)$ sea Hausdorff.

Proposición 2.1.23. (Magid, 2014, p. 52) Sea X un espacio topológico compacto, entonces $\text{Comp}(X)$ es Hausdorff si y solo si toda componente de X es intersección de subconjuntos clopen.

Demostración. Suponga que $\text{Comp}(X)$ es Hausdorff, entonces él es profinito ya que $\text{Comp}(X)$ es totalmente desconexo y además compacto pues X también es compacto. Observe que si $\mathcal{C}$ es una componente de $\text{Comp}(X)$, entonces existe $P \in \text{Comp}(X)$ tal que $\mathcal{C} = \{P\}$. Por otro lado, como $\text{Comp}(X)$ es compacto y Hausdorff, entonces las componentes conexas y cuasicomponentes (ver Definición 1.1.38) son iguales, es decir, $\mathcal{C} = \bigcap M$, donde cada M es un clopen de $\text{Comp}(X)$. Se deduce de las consideraciones anteriores que $\mathcal{C} = P = \varphi^{-1}(P) = \varphi^{-1}(\bigcap M) = \bigcap \varphi^{-1}(M)$, por

lo tanto P es una intersección de subconjuntos clopen de X como se quería. Recíprocamente, si cada componente de X es intersección de conjuntos clopen, tome dos componentes $C_1 \neq C_2$ de X . Note primero que C_1 y C_2 son compactos porque ellos son cerrados y X es compacto. Por otro lado, de la hipótesis se obtiene que $C_1 = \bigcap_{i \in I} W_{1,i}$ y $C_2 = \bigcap_{j \in J} W_{2,j}$, donde cada $W_{1,i}$ y $W_{2,j}$, son conjuntos clopen en X . Se desea construir una separación de C_1 y C_2 , para ello observe que $C_2 \subseteq X \setminus C_1 = X \setminus \bigcap_{i \in I} W_{1,i} = \bigcup_{i \in I} (X \setminus W_{1,i})$, además, la compacidad de C_2 implica que existen índices $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$, tales que $C_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^n (X \setminus W_{1,i_k})$. Defina $V := \bigcup_{k=1}^n (X \setminus W_{1,i_k})$ y $U := \bigcap_{k=1}^n W_{1,i_k}$, luego $C_1 \subseteq U, U \cap V = \emptyset, U \cup V = X$, y tanto U como V son conjuntos clopen en X , luego U y V separan a C_1 y C_2 . Ahora, si $C \subseteq X$ es una componente, entonces $C \subseteq U$ ó $C \subseteq V$, por lo tanto, $U = \bigcup_{x \in U} C_x$ y $V = \bigcup_{y \in V} C_y$, donde para cada par $(x, y) \in U \times V$, los conjuntos C_x y C_y , son componentes. De acuerdo a la Observación 4, $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U$ y $\varphi^{-1}(\varphi(V)) = V$, de modo que $\varphi(U)$ y $\varphi(V)$ son conjuntos clopen. Los conjuntos $\varphi(U)$ y $\varphi(V)$ separan los puntos C_1 y C_2 en $Comp(X)$ pues, si existe $C \in \varphi(U) \cap \varphi(V)$, entonces existirán $x \in U$ y $y \in V$ de modo que $\varphi(x) = C = \varphi(y)$, es decir, $x, y \in C$, luego $C \cap U \neq \emptyset$ y $C \cap V \neq \emptyset$, pero esto contradice la conexidad de C , por lo tanto $\varphi(U) \cap \varphi(V) = \emptyset$, con esto $\varphi(U)$ y $\varphi(V)$ separan a C_1 y C_2 , luego, $Comp(X)$ es Hausdorff. $\square$

Corolario 2.1.24. Si X es compacto Hausdorff, entonces $Comp(X)$ es profinito.

La recíproca del corolario anterior no es verdad. Para sustentar esta afirmación se probará que para un anillo conmutativo con unidad R , el espacio de componentes asociado a $Spec(R)$ es profinito.

Definición 2.1.25. (Magid, 2014, p. 70) Si R es un anillo conmutativo con unidad, se define el *espectro booleano de R* como el espacio $Comp(Spec(R))$, donde $Spec(R)$ está dotado con la topología de Zariski. El espectro booleano de R será denotado por $X(R)$.

Lema 4. (Magid, 2014, p. 71) Sea R un anillo conmutativo con unidad. Un subconjunto no vacío $U \subseteq Spec(R)$ es clopen si y solo si $U = V(Re)$, para algún idempotente $e \in R$.

El conjunto de idempotentes de un anillo conmutativo con unidad R se denotará por $E(R)$, en particular, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R , entonces $E(\mathfrak{p})$ representa el conjunto de idempotentes de R que son elementos de $\mathfrak{p}$.

Proposición 2.1.26. (Magid, 2014, p. 72) Para un anillo conmutativo con unidad R considere dos ideales primos $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subseteq R$, entonces $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ son elementos de la misma componente conexa de $Spec(R)$ si y solo si ellos contienen los mismos idempotentes.

Teorema 2.1.27. (Magid, 2014, p.73) Dado un anillo conmutativo con unidad R , el espacio $X(R)$ es profinito.

Demostración. Basta ver que $X(R)$ es Hausdorff pues de entrada él es compacto y totalmente desconexo. Sean $\mathcal{C} \subseteq Spec(R)$ una componente y $\mathfrak{p} \in \mathcal{C}$. En virtud de la Proposición 2.1.26, si $\mathfrak{q} \in \mathcal{C}$ es otro ideal primo diferente a $\mathfrak{p}$, entonces $E(\mathfrak{p}) = E(\mathfrak{q})$, en consecuencia, para todo $e \in E(\mathfrak{p})$, vale la contención $Re \subseteq \mathfrak{q}$, de esto se tiene que $\mathfrak{q} \in \bigcap_{e \in E(\mathfrak{p})} V(Re)$. Por otro lado, si $\mathfrak{q} \in \bigcap_{e \in E(\mathfrak{p})} V(Re)$, note que para cada $e \in E(\mathfrak{p})$, $Re \subseteq \mathfrak{q}$, luego $E(\mathfrak{p}) \subseteq E(\mathfrak{q})$; de hecho $E(\mathfrak{p}) = E(\mathfrak{q})$, ya que si existe $e \in E(\mathfrak{q})$ tal que $e \notin E(\mathfrak{p})$, entonces $e(1 - e) = 0 \in \mathfrak{p}$, pero como $\mathfrak{p}$ es primo se tiene que $1 - e \in \mathfrak{p}$, esto es, $1 - e$ es un idempotente de $\mathfrak{q}$ y con esto $1 = e + (1 - e) \in \mathfrak{q}$, lo cual es contradictorio. De

esta manera $E(\mathfrak{p}) = E(\mathfrak{q})$ y nuevamente utilizando la Proposición 2.1.26 se concluye que $\mathfrak{q} \in \mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C} = \bigcap_{e \in E(\mathfrak{p})} V(Re)$ y por la Proposición 2.1.23 $X(R)$ es Hausdorff como se quería probar. $\square$

En consecuencia del Teorema 2.1.27 el espectro booleano de $\mathbb{Z}$ es profinito, sin embargo, como se evidenció en el Ejemplo 2.1.18, $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ no es Hausdorff, por lo tanto la recíproca del Corolario 2.1.24 no es cierta.

2.2. Acciones de grupos profinitos sobre espacios profinitos

Esta sección estudia en detalle los resultados establecidos en (Magid, 2014, Section 2.4), que vinculan las acciones de grupo no solo con los espacios y grupos profinitos, sino además con la existencia de secciones continuas. Pensando que el lector logre comprender en profundidad las ideas y procedimientos implementados en el desarrollo de esta sección, será necesario fijar algunas definiciones y proposiciones auxiliares que permitan el fluido avance de la misma, además, cabe resaltar que posterior a este apartado se extenderá al contexto de acciones parciales, las ideas centrales que serán exhibidas aquí. Se inicia definiendo la herramienta principal de esta sección, las *acciones de grupo*.

Definición 2.2.1. (Lang, 2002, p. 26) Sean G un grupo y X un conjunto. Se dice que una *acción de G sobre X* es una función $\varphi : G \times X \rightarrow X$ que satisface las siguientes dos condiciones:

- i) $\varphi(1, a) = a$, para todo $a \in X$.
- ii) $\varphi(g, \varphi(h, a)) = \varphi(gh, a)$, para cada $g, h \in G$ y todo $a \in X$.

Una acción ϕ de un grupo G sobre un conjunto X se representa de manera alternativa por una colección de funciones $\{\phi_g : X \rightarrow X\}$ tal que $\phi_1 = id_X$ y $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$, para cada $g, h \in G$.

En la literatura (ver (Gao, 2009, p. 73), (Gómez, 2017, p. 85), (Gómez et al., 2018, p. 1) y (Magid, 2014, p. 61)) suele referirse a una acción de un grupo G sobre un conjunto X diciendo que G **actúa sobre** X ; por esta razón se utilizará de manera opcional la frase G *actúa sobre* X para mencionar a una acción de grupo. Adicional a lo anterior se empleará la notación gx para representar al elemento $\varphi(g, x) \in X$.

Ejemplo 2.2.2.

i) Dado un grupo G siempre existe por lo menos una acción de G sobre un conjunto arbitrario X , conocida en la literatura como **acción trivial** y se define para cada $g \in G$ y $x \in X$ por $gx := x$.

ii) El grupo aditivo $\mathbb{R}$ actúa sobre $\mathbb{R}^2$ vía $r \cdot (x, y) := (x + ry, y)$, donde $r \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Para propósitos de este trabajo se tendrán en cuenta acciones de grupos topológicos sobre espacios topológicos y en ocasiones se pedirá que sean continuas, por lo tanto una **acción continua** de un grupo topológico G sobre un espacio topológico X no es más que una acción de G sobre X que es continua como función. A lo largo de esta sección se asumirá que toda acción está definida de un grupo topológico sobre un espacio topológico.

Ejemplo 2.2.3. (Exel, 2017, p. 22) Sean G un grupo topológico y $\{0, 1\}$ con la topología discreta. Considere el espacio producto $X := \{0, 1\}^G$ y para cada $g \in G$ la función $\eta_g : X \rightarrow X$, que asigna a cada $(\omega_h)_{h \in G} \in X$ el correspondiente elemento $(\hat{\omega}_{gh})_{h \in G} \in X$, cuyas entradas quedan

determinadas por $(\omega_h)_{h \in G}$, en concreto, dado $h \in G$ se define

$$\hat{\omega}_{gh} := \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_h = 1 \\ 0, & \text{si } \omega_h = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

en particular $\eta_1 = id_X$ y si $g_1, g_2 \in G$, entonces $\eta_{g_1} \circ \eta_{g_2} = \eta_{g_1 g_2}$, luego, $\eta := \{\eta_g : X \longrightarrow X\}_{g \in G}$ es una acción de G sobre X la cual es llamada en (Exel, 2017) la **acción global de Bernoulli** sobre G . Note que X es un espacio profinito.

Observación 5. Dada una acción $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ de un grupo topológico G sobre un espacio topológico X se define la siguiente relación en X :

$$x \sim y \text{ si y solo si existe } g \in G \text{ tal que } gy = x.$$

Se sigue inmediatamente de los ítems *i)* y *ii)* de la Definición 2.2.1 que la relación es reflexiva, simétrica y transitiva; en consecuencia “ $\sim$ ” resulta ser una relación de equivalencia. El conjunto de clases de equivalencia suele denotarse como X/G . Sea $x \in X$ y considere $w \in X$ tal que $w \sim x$. Observe que $w = gx$, para algún $g \in G$, luego, todo elemento relacionado con x es de la forma gx ; por ello se decide representar para cada $x \in X$ la respectiva clase de equivalencia como $G \cdot x$, es decir, $G \cdot x := \{w \in X : w \sim x\}$. A partir de este momento la relación “ $\sim$ ” será llamada **relación de órbita** generada por φ y cada clase de equivalencia $G \cdot x$ será denominada la **órbita de x** sobre X . La función que asigna a cada $x \in X$ su respectiva órbita $G \cdot x$ es sobreyectiva y suele llamarse la **proyección canónica**. En esta disertación se escribirá $\psi_G : X \longrightarrow X/G$ para denotar dicha función. Resulta de particular interés para el desarrollo de este trabajo que la función ψ_G sea continua, por lo tanto, si X es un espacio topológico, se dotará al conjunto X/G con la topología cociente.

El primer objetivo de esta sección es presentar condiciones bajo las cuales el espacio de órbitas asociado a una acción de grupo sea profinito, las cuales se establecerán en el Teorema 2.2.6. Previamente se enuncian una definición y un lema que ayudarán al desarrollo de dicho teorema.

Definición 2.2.4. Si un grupo topológico G actúa sobre un espacio X y $U \subseteq X$ es no vacío, entonces se define el conjunto

$$G \cdot U := \{gu : u \in U \text{ y } g \in G\}, \quad (5)$$

en particular, si $g \in G$, se define $g \cdot U := \{gu : u \in U\}$. Si $G \cdot U = U$, entonces U es dicho un conjunto *invariante* o *G-invariante* bajo la acción de G en X .

Ejemplo 2.2.5. Dado un grupo G que actúa sobre un conjunto X y $x \in X$, la órbita $G \cdot x$ es de manera natural un conjunto G -invariante, de hecho, si $U \subseteq X$ es invariante, entonces todo elemento de U es de la forma gu , para algún $g \in G$ y $u \in U$, por lo tanto $U = \bigcup_{u \in U} G \cdot u$, de ello que sea suficiente conocer las órbitas para determinar subconjuntos invariantes.

Observación 6. Sean G un grupo topológico, φ una acción continua de G sobre un espacio X y $U \subseteq X$ no vacío. Con respecto a la Definición 2.2.4 es preciso señalar que si se considera el ítem *i*) de la Definición 2.2.1, entonces U está contenido en $G \cdot U$, por esta razón, en las situaciones donde se deba demostrar que un conjunto es *invariante* bajo una acción dada, es suficiente con verificar únicamente la contenencia que se sabe, puede no darse. Por otra parte, si se piensa a φ como la colección $\{\varphi_g : X \rightarrow X\}_{g \in G}$, donde cada φ_g es inducida por φ , esto es, φ_g envía un $x \in X$ en $\varphi(g, x) \in X$, entonces cada φ_g es automáticamente biyectiva y además heredan la continuidad de

φ , en particular, $\varphi_{g^{-1}}$ es continua. Note que $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$, por lo tanto φ_g es un homeomorfismo, luego, que $U \subseteq X$ sea abierto o cerrado implica que $g \cdot U$ sea abierto o cerrado, según corresponda.

El siguiente lema recoge algunas propiedades importantes ligadas al concepto de acción de grupo que serán de utilidad más adelante.

Lema 5. Las siguientes afirmaciones son válidas para una acción continua $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ de un grupo topológico G sobre un espacio X y un subconjunto no vacío $U \subseteq X$:

- i) $G \cdot U = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$. En particular, si U es abierto, entonces $G \cdot U$ es abierto.
- ii) $\varphi(G \times U) = G \cdot U$.
- iii) $G \cdot U$ y $X \setminus G \cdot U$ son invariantes bajo φ .
- iv) Si U es G -invariante, entonces $\psi_G^{-1}(\psi_G(U)) = U$, donde $\psi_G : X \longrightarrow X/G$ es la proyección canónica.

Demostración.

- i) $w \in G \cdot U$ si y solo si existen $g \in G$ y $u \in U$ tales que $w = gu$, pero $w = gu \in g \cdot U \subset \bigcup_{g \in G} g \cdot U$, de ello $G \cdot U = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$. Suponga que U es abierto. Por lo hecho en la Observación 6 se sigue que cada $g \cdot U$ es abierto en X , en consecuencia $\bigcup_{g \in G} g \cdot U = G \cdot U$ es abierto.
- ii) $w \in \varphi(G \times U)$ equivale a que exista $(g, u) \in G \times U$ tal que $w = gu$, de ello que $w \in G \cdot U$ y con esto la igualdad se verifica.

iii) Sean $A := G \cdot U$ y $B := X \setminus A$. Primero se comprobará que $G \cdot A = A$. Si $w \in G \cdot A$, entonces existen $g_1, g_2 \in G, h_1 \in A$ y $h_2 \in U$ tal que $w = g_1 h_1$ y $h_1 = g_2 h_2$, luego $w = (g_1 g_2) h_2 \in A$ y $G \cdot A = A$. Ahora, para ver que $G \cdot B = B$ considere $w = g_1 h_1 \in G \cdot B$ y suponga que $w \in A$, por tanto existe $g_2 \in G$ y $h_2 \in U$ tal que $g_1 h_1 = g_2 h_2$, luego $h_1 = (g_1^{-1} g_2) h_2$ de donde $h_1 \in A$. Como $h_1 \in B$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$ pero esto es una contradicción. De esta forma se concluye que $G \cdot B \subseteq B$ y así B es G -invariante bajo φ , como se quería.

iv) En primera medida se demostrará que $\psi_G^{-1}(\psi_G(U)) = G \cdot U$. Si $x \in \psi_G^{-1}(\psi_G(U))$, entonces existe $y \in U$ tal que $x \sim y$, es decir, $x = gy$, para algún $g \in G$. Así $x \in G \cdot U$. Por otro lado si $x \in G \cdot U$, entonces existen elementos $g \in G$ y $v \in U$ tales que $x = gv$, de ello que $x \sim v$, con lo cual $\psi_G(x) = \psi_G(v) \in \psi_G(U)$ y de esta forma $x \in \psi_G^{-1}(\psi_G(U))$. La prueba concluye notando que, la invarianza de U implica $U = G \cdot U = \psi_G^{-1}(\psi_G(U))$, como se buscaba.

□

Observación 7. Dados un grupo topológico G , una acción φ de G sobre un espacio topológico X y la proyección canónica $\psi_G : X \longrightarrow X/G$. Con respecto al ítem iv) del Lema 5, si U es abierto se sigue que $\psi_G^{-1}(\psi_G(U))$ es abierto, por lo tanto $\psi_G(U)$ es abierto en X/G , de ello ψ_G es una función abierta; de hecho, Pinedo y Uzcátegui en (Pinedo and Uzcátegui, 2017) demuestran en un contexto más general que la función análoga a ψ_G , en el marco de la teoría de *acciones parciales topológicas* es una función abierta. En capítulos posteriores se pondrá en evidencia que una acción de grupo es un caso particular de una acción parcial, conocida como *acción global*.

Hasta este punto ya se han recopilado las herramientas suficientes para determinar cuando

el espacio de órbitas asociado a una acción de grupo es profinito. El siguiente teorema enuncia y demuestra de manera detallada que dicho espacio es profinito siempre y cuando se consideren grupos profinitos que actúen de manera continua sobre espacios profinitos.

Teorema 2.2.6. (Magid, 2014, p. 59) Sea $\varphi : G \times X \rightarrow X$ una acción continua de un grupo profinito G sobre un espacio profinito X , entonces X/G es un espacio profinito.

Demostración. Para demostrar que el espacio X/G es profinito basta comprobar que es Hausdorff y cero-dimensional, dado que X/G es imagen continua del compacto X bajo la proyección ψ_G , por tanto se sigue del ítem (a) de la Proposición 1.1.28 que X/G es compacto; de manera que se utilizarán la Proposición 2.1.5 y la Definición 2.1.4 para constatar las propiedades restantes que determinan a X/G como espacio profinito. Sean $x, y \in X$ de modo que $G \cdot x \neq G \cdot y$. Como X es cero-dimensional, entonces la colección

$$\mathcal{C} := \{U \subseteq X : U \text{ es clopen y } x \in U\},$$

es no vacía. Con el objetivo de encontrar una separación para $G \cdot x$ y $G \cdot y$ se afirma que existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $(G \cdot U) \cap (G \cdot y) = \emptyset$, ya que en caso contrario es posible considerar para cada $V \in \mathcal{C}$ el conjunto

$$F_y(V) := \{(g, v) \in G \times V : gv = y\}.$$

Observe que $F_y(V)$ es no vacío pues de no ser así tome $w \in (G \cdot V) \cap (G \cdot y)$, de ello que existan $g, g' \in G$ y $v \in V$ tales que $w = gv$ y $g'w = y$, de donde $y = g'w = g'(gv) = (g'g)v$, es decir, $(g'g, v) \in F_y(V)$ pero esto contradice el supuesto de que $F_y(V)$ sea vacío; en conclusión $F_y(V) \neq \emptyset$

para todo $V \in \mathcal{C}$. Orientado a comprobar que $\{F_y(V)\}_{V \in \mathcal{C}}$ es una familia de subconjuntos cerrados que satisface la Propiedad de Intersección Finita primero note que $(g, v) \in F_y(V)$ si y solo si $(g, v) \in G \times V$ y $gv = y$, pero $\varphi(g, v) = gv = y$, por tanto $(g, v) \in \varphi^{-1}(y)$ y de ello se deduce que $(g, v) \in (G \times V) \cap \varphi^{-1}(y)$, en consecuencia $F_y(V) = (G \times V) \cap \varphi^{-1}(y)$, de allí que $F_y(V)$ sea cerrado.

Ahora, si $V_1, V_2 \in \mathcal{C}$, note que $F_y(V_1) \cap F_y(V_2) \neq \emptyset$, pues para cada $(g, v) \in F_y(V_1 \cap V_2)$, vale que $gv = y$, $v \in V_1 \cap V_2$ y $g \in G$, de ello $(g, v) \in F_y(V_1) \cap F_y(V_2)$. Aplicando el anterior análisis de manera inductiva se deduce que la intersección de cualquier cantidad finita de conjuntos $F_y(V)$, con $V \in \mathcal{C}$ es no vacía, de esta manera la familia $\{F_y(V)\}_{V \in \mathcal{C}}$ satisface la Propiedad de Intersección Finita, no obstante, percate que $G \times X$ es compacto porque G y X lo son, de modo que $\bigcap_{V \in \mathcal{C}} F_y(V) \neq \emptyset$ a causa de la Proposición 1.1.27. Sea $(g, v) \in \bigcap_{V \in \mathcal{C}} F_y(V)$ y suponga que $v \neq x$. Puesto que X es Hausdorff existen abiertos disjuntos W_v, W_x tales que $v \in W_v, x \in W_x$, además X es cero-dimensional, por consiguiente existen familias $\{H_{i,v}\}_{i \in I}, \{H_{j,x}\}_{j \in J}$ de subconjuntos clopen que satisfacen

$$W_v = \bigcup_{i \in I} H_{i,v} \text{ y } W_x = \bigcup_{j \in J} H_{j,x},$$

de hecho observe que

$$\emptyset = W_v \cap W_x = \left(\bigcup_{i \in I} H_{i,v} \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} H_{j,x} \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (H_{i,v} \cap H_{j,x}),$$

luego $H_{i,v} \cap H_{j,x} = \emptyset$ para cada $(i, j) \in I \times J$. Por otro lado, como $x \in W_x$, existe $j \in J$ tal que $x \in H_{j,x}$, luego $H_{j,x} \in \mathcal{C}$ y por tanto $(g, v) \in F_y(H_{j,x})$, de ello que $v \in H_{j,x}$ pero como $v \in W_v$, entonces existe $i \in I$ tal que $v \in H_{i,v}$ de donde se sigue que $H_{i,v} \cap H_{j,x} \neq \emptyset$ contradiciendo el

hecho de que $W_v \cap W_x = \emptyset$; en consecuencia se debe dar la igualdad $v = x$ y con esto $gx = y$, pero esta conclusión conlleva a que $x \sim y$, luego $(G \cdot x) \cap (G \cdot y) \neq \emptyset$, sin embargo esto último es contradictorio pues inicialmente se ha establecido que $(G \cdot x) \neq (G \cdot y)$; en conclusión existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $(G \cdot U) \cap (G \cdot y) = \emptyset$.

Defina $A := G \cdot U$ y $B := X \setminus A$. Como $U \subseteq A$ y $(G \cdot U) \cap (G \cdot y) = \emptyset$, entonces $x \in A$ y $y \in B$, además por hipótesis U es clopen, luego, por el ítem i) del Lema 5 A es abierto; asimismo note que del apartado (i) de la Proposición 1.1.29 se sigue que $G \times U$ es compacto pues él es cerrado (ver Proposición 1.1.52 numeral (iii)) en el compacto $G \times X$ y debido a que A es imagen continua del compacto $G \times U$ bajo la acción φ (ver Lema 5 ítem ii)), entonces A es compacto; más aún, como X es Hausdorff, entonces del ítem (ii) de la Proposición 1.1.29 se obtiene que A es cerrado, por lo tanto A y B son clopens en X ; asimismo, de los apartados iii) y iv) del Lema 5 se concreta respectivamente que A y B son estables bajo φ y que satisfacen las igualdades

$$A = \psi_G^{-1}(\psi_G(A)) \text{ y } B = \psi_G^{-1}(\psi_G(B)),$$

de donde se infiere que $\psi_G(A)$ y $\psi_G(B)$ son clopens en X/G ; de hecho $\psi_G(A)$ y $\psi_G(B)$ separan a $G \cdot x$ y $G \cdot y$: observe primero que $G \cdot x \in \psi_G(A)$ y $G \cdot y \in \psi_G(B)$, además $\psi_G(A)$ y $\psi_G(B)$ son disjuntos pues en caso contrario se precisa $\psi_G^{-1}(\psi_G(A) \cap \psi_G(B)) \neq \emptyset$ y esto implica que

$$\emptyset = A \cap B = \psi_G^{-1}(\psi_G(A)) \cap \psi_G^{-1}(\psi_G(B)) = \psi_G^{-1}(\psi_G(A) \cap \psi_G(B)) \neq \emptyset,$$

lo que efectivamente es una contradicción, en conclusión $\psi_G(A) \cap \psi_G(B) = \emptyset$. Por otro lado, dado $G \cdot x \in X/G$, como $x \in A$ ó $x \in X \setminus A$, entonces $G \cdot x \in \psi_G(A)$ ó $G \cdot x \in \psi_G(B)$, así pues $X/G \subseteq \psi_G(A) \cup \psi_G(B)$ y con esto $X/G = \psi_G(A) \cup \psi_G(B)$. Acorde a la Definición 2.1.4, $\psi_G(A)$

y $\psi_G(B)$ separan los puntos $G \cdot x$ y $G \cdot y$ luego, de la Proposición 2.1.5 y del Teorema 2.1.9 se concluye que X/G es un espacio profinito, como se quería demostrar. $\square$

Ejemplo 2.2.7. Considere la acción global de Bernoulli η , de un grupo discreto G sobre el producto $X = \{0, 1\}^G$, tome $(h, (x_g)_{g \in G}) \in G \times X$ y $U \subseteq X$ un abierto de modo que $\eta(h, (x_g)_{g \in G}) \in U$. El conjunto $\{h\} \times h^{-1}U$ es abierto en $G \times X$ y además $\eta(\{h\} \times h^{-1}U) = U$, en consecuencia η es una acción continua; en particular, si G es finito, entonces G resulta profinito y del Teorema 2.2.6 X/G es profinito.

El objetivo ahora será estudiar las secciones continuas de la proyección canónica. Sean G un grupo profinito y φ una acción de G sobre un espacio topológico X . Ribes y Zalesskii en (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 184) definen el concepto de *Sección Continua* para la proyección canónica $\psi_G : X \rightarrow X/G$, como una función continua $\sigma : X/G \rightarrow X$ tal que $\psi_G \circ \sigma = id_{X/G}$. La siguiente definición es una generalización natural del concepto de sección que dan Ribes y Zalesskii en (Ribes and Zalesskii, 2000).

Definición 2.2.8. Sean X, Y espacios topológicos. Dada una función $f : X \rightarrow Y$ se dirá que la función $g : f(X) \rightarrow X$ es una **sección** de f si $f \circ g = id_{f(X)}$. Además, si g es continua se referirá a ella como una **sección continua** de f .

En (Magid, 2014, p. 60) se afirma que, en el contexto de acciones continuas de grupos profinitos sobre espacios profinitos, no es cierto en general que toda proyección canónica de un espacio profinito en su espacio de órbitas, admita sección continua. El siguiente es un ejemplo tomado de (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 188), y muestra una acción continua de un grupo profinito

G sobre un espacio profinito X de manera que la proyección ψ_G no admite sección continua.

Ejemplo 2.2.9. Considere el cuerpo $K = \{-1, 0, 1\}$ de enteros módulo 3 con la topología discreta y $G = \{-1, 1\}$ el grupo multiplicativo discreto. Sea $X := K^I$ con la topología producto, donde I es un conjunto de índices. La acción trivial de G sobre X resulta continua y además, Ribes y Zalesskii demuestran que ψ_G admite secciones continuas si y solo si I es numerable, en ese sentido se concluye que no existirá sección continua de la proyección canónica si I es no numerable.

Una de las razones por las cuales es importante estudiar secciones continuas es debido a que son empleadas para el desarrollo de algunas ramas de la matemática moderna, como por ejemplo la *teoría de haces de Banach* descrita en (Fell and Doran, 1988), donde son utilizadas las secciones continuas para definir *Secciones Transversales continuas*, o en el marco de la *teoría de acciones parciales torcidas* de grupos localmente compactos sobre C^* -álgebras, descrita en cierta medida en (Exel, 1997); allí el concepto de sección continua es central para definir continuidad en tales acciones. Magid en (Magid, 2014, p. 60) estudia la existencia de secciones continuas asociadas a la proyección canónica que determina una acción continua de un grupo profinito sobre un espacio profinito. La siguiente definición establece una condición suficiente para que tal proyección admita una sección continua.

Definición 2.2.10. (Magid, 2014, p. 60) Sean G un grupo y $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ una acción de G sobre un conjunto no vacío X . Se dice que φ es *fiel* (o efectiva) si para cada $g \in G$ y cada $x \in X$ tal que $gx = x$, entonces $g = 1$.

Ejemplo 2.2.11. El lector puede constatar de manera rápida que no toda acción de grupo es fiel si

considera la acción trivial. Por otro lado, tomando el grupo discreto $G = \{-1, 1\}$ y el producto X definidos en el Ejemplo 2.2.9, note que cualquier otra acción de G sobre X que no sea la trivial será necesariamente fiel.

Observación 8. Considere un grupo finito y discreto G , una acción fiel φ , de G sobre un espacio T_0 y cero-dimensional X . Dado $x \in X$, se construirá de manera inductiva una familia $\{U_g\}_{g \in G}$ de conjuntos clopen en X , tales que, si $g \in G$, entonces $gx \in U_g$, y para todo $h \neq g \in G$, U_h y U_g son disjuntos. Primero tenga en cuenta que la fidelidad de la acción garantiza que elementos diferentes de G determinan elementos diferentes en X , por otro lado suponga que $G = \{g_1, g_2\}$ y considere $g_1x, g_2x \in X$. Como X es T_0 , existe una vecindad W_1 de g_1x , y a su vez un clopen U_1 de X , tales que $g_1x \in U_1 \subseteq W_1$ y $g_2x \notin W_1$. Defina $U_2 := X \setminus U_1$, entonces U_1 y U_2 son dos clopen disjuntos de modo que $g_1x \in U_1$, y $g_2x \in U_2$. Suponga que $G = \{g_1, g_2, g_3\}$, y tome $g_1x, g_2x, g_3x \in X$. Por lo hecho anteriormente existen clopens disjuntos A_1, A_2 tales que $g_1x \in A_1$ y $g_2x \in A_2$. Nuevamente, por ser X un espacio T_0 , existen conjuntos clopens B_1 y B_2 , que satisfacen $g_1x \in B_1, g_2x \in B_2$ y $g_3x \notin B_1 \cup B_2$. Si define $U_1 := A_1 \cap B_1, U_2 := A_2 \cap B_2$ y $U_3 := (X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2) = X \setminus (U_1 \cup U_2)$, notará que $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \emptyset$, con esto $\{U_1, U_2, U_3\}$ es una familia de clopens disjuntos dos a dos tal que $g_ix \in U_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Si supone ahora que $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, se sabe que existen conjuntos clopens A_1, A_2, A_3 , disjuntos dos a dos, tales que $g_1x \in A_1, g_2x \in A_2$ y $g_3x \in A_3$. Una vez más, por ser X un espacio T_0 se obtienen clopens B_1, B_2, B_3 verificando que $g_ix \in B_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y $g_4x \notin \bigcup_{i=1}^3 B_i$. Defina para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ $U_i := A_i \cap B_i$ y $U_4 := X \setminus \bigcup_{i=1}^3 B_i$, entonces por construcción la familia $\{U_i\}_{i=1}^4$ está conformada por conjuntos clopens y disjuntos dos a dos con la condición que $g_ix \in U_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. El mismo

razonamiento que se ha venido aplicando para los casos anteriores es válido para un grupo G con n elementos, por tanto, para cualquier grupo finito y discreto G siempre se puede construir una colección $\{U_g\}_{g \in G}$ de clopens disjuntos dos a dos verificando para cada $g \in G$ que $gx \in U_g$.

Sea X un espacio topológico. Considere los subconjuntos $A, B \subseteq X$, donde A es cerrado, B es abierto y advierta lo siguiente

$$\begin{aligned} A \cap (X \setminus B) &= (A \cap X) \setminus (A \cap B) \\ &= A \setminus (A \cap B) \\ &= A \setminus B. \end{aligned}$$

Como $A \cap (X \setminus B)$ es cerrado, entonces $A \setminus B$ es cerrado. De manera similar es posible demostrar que $B \setminus A$ es abierto, de hecho, si A y B son clopen, entonces tanto $A \setminus B$ como $B \setminus A$ son clopen. Lo anterior es un ejercicio propuesto en (Munkres, 2002, p. 114) y su uso será primordial para demostrar el lema que se presenta a continuación.

Lema 6. (Magid, 2014, p. 48) Si X es un espacio topológico no vacío, compacto y cero-dimensional, entonces todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento finito el cual es una partición de X .

Demostración. Sea $\mathcal{H} = \{H_i\}_{i \in I}$ una base de conjuntos clopen para X . Note que toda cubierta abierta de X admite a $\mathcal{H}$ como refinamiento y por ser X compacto existen $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ tal que $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_n}\}$ es un cubrimiento finito para X . Defina

$$E_1 := H_{i_1},$$

$$E_2 := H_{i_2} \setminus H_{i_1},$$

$$E_3 := (H_{i_3} \setminus H_{i_2}) \setminus H_{i_1},$$

en general, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se define

$$E_k := (\dots((H_{i_k} \setminus H_{i_{k-1}}) \setminus H_{i_{k-2}}) \setminus \dots) \setminus H_{i_1}.$$

Por construcción los conjuntos $E_1, \dots, E_n$ son clopen y disjuntos dos a dos, además, si $x \in X$, existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $x \in H_{i_k}$. Si $k = 1$, entonces $x \in E_1$. Suponga que $k \neq 1$ y considere los siguientes casos

(i) Si $x \in H_{i_k} \cap H_{i_m}$, para algún $1 \leq m < k$, entonces $x \in E_m$. En última instancia x será elemento de E_1 .

(ii) Si $x \in H_{i_k} \cap H_{i_m}$, para algún $k < m < n$, entonces $x \in E_k$.

En cualquier caso se concluye que $X = \bigcup_{k=1}^n E_k$, luego $\{E_k\}_{k=1}^n$ es un refinamiento finito que es una partición del espacio X . □

El siguiente resultado destaca la importancia de las acciones fieles y su relación con la existencia de secciones continuas para la proyección ψ_G asociada a acciones de grupos finitos y discretos G sobre espacios profinitos X .

Teorema 2.2.12. (Magid, 2014, p. 60) Sea G un grupo finito y discreto. Si φ es una acción continua y fiel de G sobre un espacio profinito X , entonces la proyección ψ_G admite secciones continuas.

Demostración. Dada la acción continua y efectiva φ de G sobre X , el objetivo es definir una sección continua $\Gamma : X/G \longrightarrow X$ de la proyección ψ_G , para ello se construirá Γ a partir de otras funciones Γ_V , donde cada V es un subconjunto adecuado de X . Antes de entrar en detalle sobre la construcción de cada Γ_V y cada V , es necesario precisar que, como G es profinito por ser finito y discreto, entonces el Teorema 2.2.6 señala que X/G es profinito. Ahora, para construir V y Γ_V primero tome $x \in X$ y note por un lado que la fidelidad de la acción asegura que si $g \neq h$ son elementos en G , entonces $gx \neq hx$ en X , por otro lado la Observación 8 garantiza una colección $\{U_g\}_{g \in G}$ de subconjuntos clopen en X verificando para cada $g \in G$ que $gx \in U_g$ y $U_h \cap U_g = \emptyset$, para cualquier $h \neq g$ en G .

Observe ahora que, para todo $g \in G$, $x = g^{-1}(gx) \in (g^{-1} \cdot U_g)$, luego $\bigcap_{g \in G} (g^{-1} \cdot U_g) \neq \emptyset$; además, se sabe que G es finito y cada $g^{-1} \cdot U_g$ es clopen por la Observación 6, de modo que $\bigcap_{g \in G} (g^{-1} \cdot U_g)$ es clopen, pero al ser X compacto se sigue del ítem (i) de la Proposición 1.1.29 que $\bigcap_{g \in G} (g^{-1} \cdot U_g)$ es compacto. Defina $V_x := \bigcap_{g \in G} (g^{-1} \cdot U_g)$ y considere la función restricción $\psi_G|_{V_x} : V_x \longrightarrow \psi_G(V_x)$, la cual será denotada por ψ_{V_x} . Enseguida se demostrará que ψ_{V_x} es un homeomorfismo, para ello note que si existe $g \in G$ de modo que $g \cdot V_x$ y V_x no son disjuntos, entonces tome $y \in g \cdot V_x \cap V_x$, de ahí se sigue inmediatamente que $y \in g \cdot V_x \subseteq g \cdot (g^{-1} \cdot U_g) = U_g$ y $y \in 1 \cdot V_x \subseteq 1 \cdot (1^{-1} \cdot U_1) = U_1$, luego $y \in U_g \cap U_1$ y debido a como se construyó la familia $\{U_g\}_{g \in G}$ en la Observación 8 se deduce que $g = 1$. En conclusión ψ_{V_x} es inyectiva pues si w y w' son elementos de V_x tales que $\psi_{V_x}(w) = \psi_{V_x}(w')$, entonces $w \sim w'$ (recuerde que $x \sim y$ si y solo si existe $g \in G$ verificando $gx = y$), por ende existe $h \in G$ que verifica la ecuación $w' = hw$, es decir, $w' \in h \cdot V_x \cap V_x$ y debido al análisis realizado anteriormente, $h = 1$, luego

$w = w'$ como se quería ver. Desde luego ψ_{V_x} es continua por ser restricción de la función ψ_G , de hecho también es sobreyectiva por construcción; más aún, como V_x es compacto y X/G es Hausdorff, entonces ψ_{V_x} es una función cerrada; en pocas palabras ψ_{V_x} es una biyección continua y cerrada, o equivalentemente, ψ_{V_x} es un homeomorfismo. La inversa de ψ_{V_x} , que será denotada por Γ_{V_x} , efectivamente es una sección continua de ψ_{V_x} ; además, de la prueba del Lema 5 se sigue la igualdad $\psi_G^{-1}(\psi_G(V_x)) = \bigcup_{g \in G} (g \cdot V_x)$, pero como G es finito y cada $g \cdot V_x$ es clopen, entonces $\psi_G(V_x)$ es clopen en X/G . Para sintetizar lo hecho anteriormente: se obtuvo para cada $x \in X$ un clopen V_x y una sección continua Γ_{V_x} de ψ_{V_x} tal que $x \in V_x$ y $\psi_G(V_x)$ es clopen en X/G .

Como x fue tomado arbitrariamente, se sigue que $\{V_x\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto del espacio compacto y cero dimensional X , por lo tanto, del Lema 6 existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ y subconjuntos clopen $E_1 \subseteq V_{x_1}, \dots, E_n \subseteq V_{x_n}$ tales que $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ es una partición de X . Continuando con la demostración se verificará que la colección $\{\psi_G(E_1), \psi_G(E_2), \dots, \psi_G(E_n)\}$ da lugar a una partición del espacio de órbitas X/G . Por un lado, note que

$$\begin{aligned}
 X/G &= \psi_G(X), \\
 &= \psi_G\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right), \\
 &= \bigcup_{k=1}^n \psi_G(E_k),
 \end{aligned}$$

además, como cada $\psi_{V_{x_k}}$ es inyectiva, entonces para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cumple la igualdad $\psi_G^{-1}(\psi_G(E_k)) = E_k$ y de ello que para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ se verifica $\psi_G(E_i) \cap \psi_G(E_j) = \emptyset$ ya que en caso contrario se sigue

$$\emptyset \neq \psi_G^{-1}(\psi_G(E_i) \cap \psi_G(E_j)) = \psi_G^{-1}(\psi_G(E_i)) \cap \psi_G^{-1}(\psi_G(E_j)) = E_i \cap E_j = \emptyset,$$

lo que ciertamente es una contradicción, por lo tanto los conjuntos $\psi_G(E_i)$ y $\psi_G(E_j)$ son disjuntos y de esta forma la colección $\{\psi_G(E_1), \psi_G(E_2), \dots, \psi_G(E_n)\}$ es una partición de X/G . Defina

$$\Gamma : X/G \longrightarrow X$$

$$\psi_G(w) \mapsto \Gamma_{V_{x_k}}(\psi_G(w)), \text{ si } \psi_G(w) \in \psi_G(E_k).$$

Por la forma en que se construyó Γ se deduce enseguida que ella es una función bien definida y que además es una sección continua de ψ_G , como se quería demostrar. $\square$

El objetivo ahora es extender el Teorema 2.2.12 al caso general de un grupo profinito. Para lograrlo, es pertinente considerar las siguientes aclaraciones con respecto a la Observación 5, donde se define la relación de órbita “ $\sim$ ”: si considera un subgrupo H de un grupo topológico G y una acción φ de G sobre un espacio topológico X , entonces la relación “ $\sim$ ” puede ser restringida si considera únicamente elementos de H , es decir, si $x_1, x_2 \in X$, entonces $x_1 \sim x_2$ si existe $h \in H$ de modo que $hx_1 = x_2$. Dicho lo anterior se establece la notación “ $\sim_H$ ” para indicar que la relación de órbita ha sido restringida al subgrupo H y se referirá a ella como **relación de órbita restringida a H** ; de hecho, la órbita de un elemento $x \in X$ se denotará por $H \cdot x$, el cociente asociado será expresado como X/H y se escribirá ψ_H para denotar la función proyección que asocia a cada $x \in X$ la correspondiente órbita $H \cdot x \in X/H$. Tenga en cuenta que, de igual manera al espacio X/G , el conjunto X/H será dotado con la topología cociente, de ello que ψ_H sea continua. Por la

Observación 7, ψ_H también es abierta.

Observación 9. Considere un grupo topológico G y una acción φ de G sobre un espacio topológico X . Sea $H \trianglelefteq G$ y defina la función

$$\begin{aligned} g_H : G \times X &\longrightarrow (G/H) \times (X/H) \\ (g, x) &\longmapsto (gH, H \cdot x). \end{aligned}$$

g_H será de gran utilidad a la hora de demostrar el Teorema 2.2.13.

El siguiente teorema brinda un método para construir una acción continua y fiel de un grupo cociente sobre un espacio de órbitas, partiendo de una acción continua y fiel. Tal resultado puede ser consultado en (Magid, 2014, p. 61), sin embargo, para comodidad del lector, este trabajo de grado ofrece una prueba que pretende detallar aquellas afirmaciones realizadas por Magid en (Magid, 2014, Lemma 2.11), que no son abordadas con la profundidad adecuada.

Teorema 2.2.13. Sean X un espacio profinito y φ una acción continua de un grupo profinito G sobre X . Si φ es *fiel* y H es un subgrupo distinguido y cerrado en G , entonces G/H actúa de manera continua y fiel sobre X/H , y $(X/H)/(G/H) \cong X/G$.

Demostración. En la primera parte de esta prueba se construirá una acción continua y fiel de G/H

sobre X/H , para ello considere inicialmente la proyección canónica $\psi_H : X \longrightarrow X/H$ y defina

$$\Phi : (G/H) \times (X/H) \longrightarrow X/H$$

$$(gH, \psi_H(x)) \longmapsto gH \cdot \psi_H(x) := \psi_H(gx).$$

Sean $g_1H, g_2H \in G/H$ y $\psi_H(x_1), \psi_H(x_2) \in X/H$ tales que $g_1H = g_2H$ y $\psi_H(x_1) = \psi_H(x_2)$, es decir, $g_1^{-1}g_2 \in H$ y $x_1 \sim_H x_2$. Se quiere mostrar que $g_1x_1 \sim_H g_2x_2$, por lo tanto se debe encontrar un $\hat{h} \in H$ adecuado de forma que $\hat{h}g_1x_1 = g_2x_2$. Como $x_1 \sim_H x_2$, existe $h \in H$ tal que $hx_1 = x_2$ y por ser H un subgrupo distinguido se verifica para algún $\tilde{h} \in H$ la igualdad $h = g_1^{-1}\tilde{h}g_1$; de hecho $g_2g_1^{-1} \in H$ ya que $g_2g_1^{-1} = g_1(g_1^{-1}g_2)g_1^{-1} \in H$. Defina $\hat{h} := g_2g_1^{-1}\tilde{h}$ y observe que $\hat{h} \in H$, de hecho $\hat{h}$ verifica que $\hat{h}(g_1x_1) = (g_2g_1^{-1}\tilde{h})(g_1x_1) = g_2(hx_1) = g_2x_2$, luego $g_1x_1 \sim_H g_2x_2$ y con esto Φ es una función bien definida. Ahora se comprobará que Φ es una acción de G/H sobre X/H . Dado $x \in X$ vale la igualdad $H \cdot \psi_H(x) = \psi_H(x)$; además, si $g_1, g_2 \in G$, entonces

$$\begin{aligned} g_1H \cdot (g_2H \cdot \psi_H(x)) &= g_1H \cdot (\psi_H(g_2x)) \\ &= \psi_H(g_1(g_2x)) \\ &= \psi_H((g_1g_2)x) \\ &= g_1g_2H \cdot \psi_H(x) \\ &= (g_1Hg_2H) \cdot \psi_H(x), \end{aligned}$$

por lo tanto Φ es una acción de G/H sobre X/H . La fidelidad de Φ es heredada de la acción φ

pues si $gH \in G/H$ y $\psi_H(x) \in X/H$ tales que $gH \cdot \psi_H(x) = \psi_H(x)$, entonces $\psi_H(gx) = \psi_H(x)$, de ello existe $h \in H$ que valida la igualdad $gx = hx$, o equivalentemente $h^{-1}gx = x$. Como φ es fiel se sigue que $h^{-1}g = 1$ y de esta manera $g = h \in H$, de donde $gH = H$, es decir, Φ es una acción fiel. Para la continuidad de Φ tome la función g_H definida en la Observación 9 y note que para cada $(g, x) \in G \times X$ se tiene que

$$\begin{aligned} (\psi_H \circ \varphi)(g, x) &= \psi_H(gx) \\ &= \Phi(gH, \psi_H(x)) \\ &= \Phi(g_H(g, x)) \\ &= (\Phi \circ g_H)(g, x), \end{aligned}$$

luego $\psi_H \circ \varphi = \Phi \circ g_H$. Por otro lado, dados $(gH, \psi_H(x)) \in (G/H) \times (X/H)$ y $A \subseteq X/H$ un abierto no vacío de manera que $\psi_H(gx) \in A$, entonces por continuidad de ψ_H y φ se obtienen subconjuntos abiertos $X_1, X_2 \subseteq X$ y $D \subseteq G$ de manera que $gx \in X_1, (g, x) \in D \times X_2, \psi_H(X_1) \subseteq A$ y $\varphi(D \times X_2) \subseteq X_1$. Defina $C := g_H(D \times X_2)$ y para el siguiente procedimiento contemple la proyección $q_H : G \longrightarrow G/H$, que entre otras cosas es abierta por la Proposición 1.2.7. Ahora, dado $(gH, \psi_H(x)) \in q_H(D) \times \psi_H(X_2)$ se sigue sin mayor dificultad que $(gH, \psi_H(x)) \in C$, de hecho, si $(tH, \psi_H(y)) \in C$, existe $(g_1, x_1) \in D \times X_2$ tal que $(g_1H, \psi_H(x_1)) = g_H(g_1, x_1) = (tH, \psi_H(y))$, de ello $(tH, \psi_H(y)) \in q_H(D) \times \psi_H(X_2)$, por tanto $g_H(D \times X_2) = q_H(D) \times \psi_H(X_2)$; además, como q_H y ψ_H son abiertas (ver Proposición 1.2.7 y Observación 7, respectivamente), entonces C es abierto y $(gH, \psi_H(x)) \in C$. Note que $\Phi(C) = \psi_H(\varphi(D \times X_2)) \subseteq \psi_H(X_1) \subseteq A$, por lo tanto Φ es

continua. De este modo se ha conseguido una acción continua y fiel de G/H sobre X/H .

En esta segunda parte de la prueba se describirá el homeomorfismo entre $(X/H)/(G/H)$ y X/G , para lograrlo conviene establecer la notación $\tilde{G} := G/H$, $\tilde{H} := X/H$ y $\psi_{\tilde{G}} : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}/\tilde{G}$ será la proyección canónica. Defina $\Psi : \tilde{H}/\tilde{G} \rightarrow X/G$ de tal manera que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi_H} & \tilde{H} \\ \psi_G \downarrow & & \downarrow \psi_{\tilde{G}} \\ X/G & \xleftarrow{\Psi} & \tilde{H}/\tilde{G}, \end{array}$$

es decir, si $\psi_H(x) \in \tilde{H}$, para algún $x \in X$, entonces $\Psi(\psi_{\tilde{G}}(\psi_H(x))) = \psi_G(x)$. Suponga ahora que $x, y \in X$ tales que $\psi_{\tilde{G}}(\psi_H(x)) = \psi_{\tilde{G}}(\psi_H(y))$, es decir, existe $gH \in \tilde{G}$ que verifica la igualdad $\psi_H(gx) = gH \cdot \psi_H(x) = \psi_H(y)$, por lo tanto existe $h \in H$ que satisface $h(gx) = y$, de esto último se obtiene que $x \sim y$, en otras palabras $\psi_G(x) = \psi_G(y)$, con lo cual Ψ es una función bien definida; de hecho, al observar el anterior diagrama se percibe al instante que Ψ es sobreyectiva. Se probará ahora que Ψ es continua, inyectiva y cerrada. Si $\psi_{\tilde{G}}(\psi_H(x)) \in \tilde{H}/\tilde{G}$ y $A \subseteq X/G$ es abierto tal que $\psi_G(x) \in A$, entonces por la continuidad de ψ_G se obtiene un abierto $W \subseteq X$ verificando que $x \in W$ y $\psi_G(W) \subseteq A$; de otro lado, como ψ_H y $\psi_{\tilde{G}}$ son abiertas, entonces $\psi_{\tilde{G}}(\psi_H(W))$ es abierto y $\psi_{\tilde{G}}(\psi_H(x)) \in \psi_{\tilde{G}}(\psi_H(W))$. Observe que $\Psi(\psi_{\tilde{G}}(\psi_H(W))) = \psi_G(W) \subseteq A$, por lo tanto Ψ es continua. Suponga ahora que existen $x, y \in X$ tales que $\psi_G(x) = \psi_G(y)$, es decir, existe $g \in G$ que garantiza la igualdad $1(gx) = gx = y$. Como $1 \in H$, entonces $\psi_H(gx) = \psi_H(y)$, pero $\psi_H(gx) = gH \cdot \psi_H(x)$, de ello que $\psi_H(x) \sim_{\tilde{G}} \psi_H(y)$, luego $\psi_{\tilde{G}}(\psi_H(x)) = \psi_{\tilde{G}}(\psi_H(y))$ y de ello Ψ es inyectiva. Para finalizar se probará que Ψ es una función cerrada. Sea $M \subseteq \tilde{H}/\tilde{G}$ un

cerrado, entonces $\psi_H^{-1}(\psi_{\tilde{G}}^{-1}(M))$ es cerrado en X . Como ψ_G es una función cerrada en virtud de la Proposición 1.1.28, entonces $\psi_G(\psi_H^{-1}(\psi_{\tilde{G}}^{-1}(M)))$ es un cerrado de X/G , además

$$\begin{aligned}\Psi(M) &= \Psi(\psi_{\tilde{G}}(\psi_H(\psi_H^{-1}(\psi_{\tilde{G}}^{-1}(M))))) \\ &= \psi_G(\psi_H^{-1}(\psi_{\tilde{G}}^{-1}(M))),\end{aligned}$$

luego Ψ es cerrada y debido a la Proposición 1.1.13 también es un homeomorfismo. $\square$

Observación 10. Sean M un grupo topológico y φ una acción de M sobre un espacio topológico X . Las siguientes afirmaciones son consideraciones que serán de gran ayuda para demostrar el Teorema 2.2.14:

i) Suponga que φ es continua y fiel. Si H es un subgrupo de M , una verificación de rutina permite observar que la función restricción $\varphi|_H : H \times X \longrightarrow X; (h, x) \longmapsto hx$, para todo $(h, x) \in H \times X$, define una acción de H sobre X que será llamada la **restricción** de φ a H . Adicional a lo anterior, es posible probar que $\varphi|_H$ hereda la continuidad y fidelidad de φ , por lo tanto la restricción de φ a H es una acción continua y fiel.

ii) Dados dos subgrupos H_1 y H_2 de M tales que H_1 es subgrupo de H_2 , defina la función

$\psi_{H_1, H_2} : X/H_1 \longrightarrow X/H_2$ de manera que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi_{H_2}} & X/H_2 \\ & \searrow \psi_{H_1} & \uparrow \psi_{H_1, H_2} \\ & & X/H_1, \end{array}$$

es decir, $\psi_{H_1, H_2} \circ \psi_{H_1} = \psi_{H_2}$; de hecho, teniendo en cuenta que ψ_{H_2} es continua y ψ_{H_1} es una función cociente, es posible deducir de la Proposición 1.1.56 que ψ_{H_1, H_2} es continua. Por otro lado, si $H_1 = H_2$, entonces $\psi_{H_1, H_1} = id_{X/H_1}$; además, cuando $H_1 = \{1\}$ se obtiene que $\psi_{H_1, H_2} = \psi_{H_2}$. Más aún, si son escogidos subgrupos H_1, H_2, H_3 de M , verificando que $H_3 \subseteq H_2 \subseteq H_1$, entonces para cada $\psi_{H_3}(x) \in X/H_3$ valen las igualdades

$$\begin{aligned} \psi_{H_2, H_1}(\psi_{H_3, H_2}(\psi_{H_3}(x))) &= \psi_{H_2, H_1}(\psi_{H_2}(x)) \\ &= \psi_{H_1}(x) \\ &= \psi_{H_3, H_1}(\psi_{H_3}(x)), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\psi_{H_3, H_1} = \psi_{H_2, H_1} \circ \psi_{H_3, H_2}. \quad (6)$$

iii) Tome $N \trianglelefteq M$ y defina $\tilde{M} := M/N, \tilde{T} := X/N$. Suponga además que φ es continua y que la función $t : \tilde{T}/\tilde{M} \longrightarrow \tilde{T}$ es una sección continua de la proyección $\psi_{\tilde{M}} : \tilde{T} \longrightarrow \tilde{T}/\tilde{M}$; donde el espacio $\tilde{T}/\tilde{M}$ es generado por la acción Φ definida en el Teorema 2.2.13; además recuerde que el homeomorfismo $\Psi : \tilde{T}/\tilde{M} \longrightarrow X/M$ construido en dicho teorema es definido para cada $\psi_{\tilde{M}}(\psi_N(x)) \in \tilde{T}/\tilde{M}$ como

$$\Psi(\psi_{\tilde{M}}(\psi_N(x))) := \psi_M(x). \quad (7)$$

Si $\alpha := t \circ \Psi^{-1}$, entonces α es continua. Se afirma además que α es una sección continua de la

función $\psi_{N,M}$. Primero tome $\psi_M(x) \in X/M$ y note que $t \circ \Psi^{-1}(\psi_M(x)) \stackrel{(7)}{=} t \circ \psi_{\tilde{M}}(\psi_N(x))$.

Defina

$$t \circ \psi_{\tilde{M}}(\psi_N(x)) := \psi_N(x_1), \quad (8)$$

luego $\psi_{\tilde{M}}(\psi_N(x)) = \psi_{\tilde{M}}(\psi_N(x_1))$, en consecuencia existe $gN \in \tilde{M}$ que verifica la igualdad $gN \cdot \psi_N(x) = \psi_N(x_1)$, es decir, $\psi_N(gx) = \psi_N(x_1)$, de ello que $n(gx) = x_1$, para algún $n \in N \subseteq M$. Como $ng \in M$, entonces

$$\psi_M(x) = \psi_M(x_1). \quad (9)$$

Lo anterior valida la equivalencia

$$(\psi_{N,M} \circ \alpha)(\psi_M(x)) = \psi_{N,M}(t \circ \Psi^{-1}(\psi_M(x))) \stackrel{(8)}{=} \psi_{N,M}(\psi_N(x_1)) = \psi_M(x_1) \stackrel{(9)}{=} \psi_M(x),$$

de modo que α es una sección continua de $\psi_{N,M}$.

iv) Considere el conjunto

$$\Gamma := \{(N, s) : N \leq_c M \text{ y } s : X/M \longrightarrow X/N \text{ es una sección continua de } \psi_{N,M}\}.$$

Por *ii)* se obtiene que $\psi_{M,M} = id_{X/M}$ y la identidad es sección continua de sí misma, por lo tanto $(M, id_{X/M}) \in \Gamma$, de ello $\Gamma \neq \emptyset$. Para cada par $(N_1, s_1), (N_2, s_2) \in \Gamma$ se define

$$(N_1, s_1) \leq (N_2, s_2) \text{ si y solo si } N_2 \subseteq N_1 \text{ y } \psi_{N_2, N_1} \circ s_2 = s_1. \quad (10)$$

La relación definida en (10) dota a Γ de un orden parcial: dado $(N, s) \in \Gamma$, recuerde que $\psi_{N,N} = id_{X/N}$, luego $\psi_{N,N} \circ s = s$, de ello $(N, s) \leq (N, s)$. Ahora, si $(N_1, s_1), (N_2, s_2) \in \Gamma$ tales que $(N_1, s_1) \leq (N_2, s_2)$ y $(N_2, s_2) \leq (N_1, s_1)$, entonces $N_1 = N_2, \psi_{N_1, N_2} \circ s_1 = s_2$ y $\psi_{N_2, N_1} \circ s_2 = s_1$. Como $N_1 = N_2$ note que $\psi_{N_1, N_2} = id_{X/N_1}$ y $\psi_{N_1, N_2} \circ s_1 = s_1$. Se sigue de las consideraciones anteriores que $s_1 = \psi_{N_1, N_2} \circ s_1 = s_2$, así $(N_1, s_1) = (N_2, s_2)$. Para ver la transitividad tome $(N_1, s_1), (N_2, s_2), (N_3, s_3) \in \Gamma$ tales que $(N_1, s_1) \leq (N_2, s_2) \leq (N_3, s_3)$, de ello que $N_3 \subseteq N_2 \subseteq N_1, \psi_{N_3, N_2} \circ s_3 = s_2$ y $\psi_{N_2, N_1} \circ s_2 = s_1$. Recuerde que la igualdad $\psi_{N_3, N_1} = \psi_{N_2, N_1} \circ \psi_{N_3, N_2}$ es válida gracias al apartado *ii*) de esta observación, luego

$$\begin{aligned} \psi_{N_3, N_1} \circ s_3 &= (\psi_{N_2, N_1} \circ \psi_{N_3, N_2}) \circ s_3 \\ &= \psi_{N_2, N_1} \circ s_2 \\ &= s_1, \end{aligned}$$

por lo tanto $\psi_{N_3, N_1} \circ s_3 = s_1$ y de esta forma $(N_1, s_1) \leq (N_3, s_3)$. Se concluye que Γ es ordenado parcialmente por la relación “ $\leq$ ” definida anteriormente.

Lema 7. (Magid, 2014, p. 64) Sean G un grupo profinito y $M \trianglelefteq_c G$. Si $M \neq \{1\}$, entonces existe un subgrupo propio M' de M que es abierto en M y distinguido en G .

El objetivo de la Observación 10 y del Lema 7 es facilitar la escritura y comprensión de la prueba del siguiente resultado, que extiende el Teorema 2.2.12 al caso de un grupo profinito arbitrario.

Teorema 2.2.14. (Magid, 2014, p. 62) Si un grupo profinito G actúa continuamente y *fielmente* sobre un espacio profinito X , entonces ψ_G admite una sección continua.

Demostración. Sean G un grupo profinito y φ una acción continua de G sobre un espacio profinito X , que además es fiel. Para determinar una sección continua de ψ_G tenga en cuenta el conjunto parcialmente ordenado $(\Gamma, \leq)$ construido en el numeral *iv*) de la Observación 10. Se comprobará que Γ posee un elemento maximal, para ello escoja un subconjunto totalmente ordenado de Γ , por ejemplo $\mathcal{A} = \{(T_i, s_i) : i \in I\}$. Se construirá una cota superior para $\mathcal{A}$. Primero note que todo T_i es profinito debido a la Proposición 2.1.14; de hecho cada X/T_i es un espacio profinito a causa del Teorema 2.2.6. Por otro lado, el apartado *ii*) de la Observación 10 permite afirmar que la colección de espacios topológicos $\{X/T_i\}_{(T_i, s_i) \in \mathcal{A}}$ junto con la familia de funciones continuas $\{\psi_{T_i, T_j} : (T_j, s_j) \leq (T_i, s_i)\}$ determinan un sistema inverso sobre $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{W}$ dicho sistema. Tome el límite inverso $\varprojlim X/T_i$ asociado a $\mathcal{W}$, acompañado del conjunto conformado por proyecciones $\{\pi_i : \varprojlim X/T_i \rightarrow X/T_i\}_{(T_i, s_i) \in \mathcal{A}}$ y defina $T := \bigcap_{i \in I} T_i$. Basta recordar que cada T_i es cerrado para caer en cuenta que T también lo es, más aún, aplicando una vez más la Proposición 2.1.14 T resulta ser profinito y en consecuencia X/T también es profinito. Se demostrará que X/T y $\varprojlim X/T_i$ son homeomorfos, para ello considere nuevamente el ítem *ii*) de la Observación 10, donde se definen las funciones que conforman el sistema inverso $\mathcal{W}$ y percate que la colección $\{\psi_{T_i} : X \rightarrow X/T_i\}_{(T_i, s_i) \in \mathcal{A}}$ se ratifica inmediatamente como una familia de funciones compatible con $\mathcal{W}$; aplicando la Propiedad Universal del Límite Inverso se garantiza la existencia de una única

función continua $\hat{q}$ de manera que el siguiente diagrama conmuta para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi_{T_i}} & X/T_i \\ & \searrow \hat{q} & \uparrow \pi_i \\ & & \varprojlim X/T_i. \end{array}$$

Adicionalmente note que dado $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$ la siguiente igualdad es válida

$$\pi_i \circ \hat{q}(X) = \pi_i(\hat{q}(X)) = \psi_{T_i}(X) = X/T_i,$$

luego, por la Proposición 1.3.18 se concluye que $\hat{q}(X)$ es denso en $\varprojlim X/T_i$; pero recuerde que X es compacto, $\hat{q}$ continua y $\varprojlim X/T_i$ es Hausdorff, por ende $\hat{q}(X)$ es cerrado en $\varprojlim X/T_i$; así $\hat{q}(X) = \overline{\hat{q}(X)} = \varprojlim X/T_i$ y con esto $\hat{q}$ es sobreyectiva. La función $\hat{q}$ permite relacionar cada órbita $\psi_T(x) \in X/T$ con un único $\hat{q}(x) \in \varprojlim X/T_i$ pues si $\psi_T(x) = \psi_T(y)$, para algún par de puntos $x, y \in X$, entonces existe $t \in T$ que satisface la igualdad $tx = y$, de esto último se sigue que $\psi_{T_i}(x) = \psi_{T_i}(y)$ para todo $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$, por ende la siguiente equivalencia es válida para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$

$$(\pi_i \circ \hat{q})(x) = \psi_{T_i}(x) = \psi_{T_i}(y) = (\pi_i \circ \hat{q})(y),$$

de manera que $\hat{q}(x) = \hat{q}(y)$. Defina la función

$$\begin{aligned} \hat{\hat{q}} : X/T &\longrightarrow \varprojlim X/T_i \\ \psi_T(x) &\longmapsto \hat{\hat{q}}(\psi_T(x)) := \hat{q}(x). \end{aligned}$$

Es inmediato que $\hat{q}$ es sobreyectiva porque $\hat{q}$ lo es; de hecho, como ψ_T es abierta, X/T compacto, $\varprojlim X/T_i$ Hausdorff y $\hat{q}$ es continua, entonces $\hat{q}$ es continua y cerrada. Resta ver que $\hat{q}$ es inyectiva. Sean $\psi_T(x_1), \psi_T(x_2) \in X/T$ tales que $\hat{q}(x_1) = \hat{q}(x_2)$, es decir, para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$ es válida la igualdad $\psi_{T_i}(x_1) = \psi_{T_i}(x_2)$, por tanto existe $t_i \in T_i$ tal que $t_i x_1 = x_2$. Se quiere encontrar un $t \in T$ que verifique $t x_1 = x_2$. Analice que dados $(T_i, s_i), (T_j, s_j) \in \mathcal{A}$ existen $t_i \in T_i$ y $t_j \in T_j$ que satisfacen $t_i x_1 = x_2 = t_j x_1$, pero por hipótesis φ es fiel, luego $t_j^{-1} t_i = 1$, o equivalentemente $t_i = t_j$; en conclusión el conjunto

$$\{t_i : t_i \in T_i \text{ y } t_i x_1 = x_2, \text{ para algún } (T_i, s_i) \in \mathcal{A}\},$$

consta de un único elemento, en otras palabras, para todo $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$, $t_i = t$, para algún $t \in G$, de manera que $t \in T$ y $t x_1 = x_2$, por consiguiente $\psi_T(x_1) = \psi_T(x_2)$ y así $\hat{q}$ es inyectiva como se quería probar; en resumen $\hat{q}$ es una biyección continua y cerrada, esto es un homeomorfismo tal como se quería obtener.

Ahora, con el objetivo de construir una sección continua $r : X/G \longrightarrow X/T$ para la función $\psi_{T,G}$, considere la colección $\mathcal{S} := \{s_i : X/G \longrightarrow X/T_i\}_{(T_i, s_i) \in \mathcal{A}}$. De acuerdo a lo establecido en (10) se sigue rápidamente que $\mathcal{S}$ es una familia de funciones compatible con el sistema $\mathcal{W}$, más aún, recuerde que para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$, s_i es una sección continua de $\psi_{T_i,G}$, es decir,

$$\psi_{T_i,G} \circ s_i = id_{X/G}; \quad (11)$$

aplicando nuevamente la Propiedad Universal del Límite Inverso existe una única función continua $s : X/G \longrightarrow \varprojlim X/T_i$ que satisface para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$ la igualdad $\pi_i \circ s = s_i$. Se quiere probar

que $\psi_{T,G} \circ r = id_{X/G}$, donde $r := \hat{q}^{-1} \circ s$ es continua por definición. Sea $\psi_G(x) \in X/G$ y defina $r(\psi_G(x)) := \psi_T(\hat{x})$, para algún $\hat{x} \in X$, en otras palabras $\hat{q}^{-1} \circ s(\psi_G(x)) = \psi_T(\hat{x})$, luego

$$s(\psi_G(x)) = \hat{q}(\psi_T(\hat{x})) = \hat{q}(\hat{x}), \quad (12)$$

por lo tanto, para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$ se obtiene

$$s_i(\psi_G(x)) = \pi_i \circ s(\psi_G(x)) \stackrel{(12)}{=} \pi_i \circ \hat{q}(\hat{x}) = \psi_{T_i}(\hat{x}). \quad (13)$$

Aplicando $\psi_{T_i,G}$ en (13) se concluye

$$\psi_G(x) \stackrel{(11)}{=} \psi_{T_i,G} \circ (s_i(\psi_G(x))) \stackrel{(13)}{=} \psi_{T_i,G} \circ \psi_{T_i}(\hat{x}) = \psi_G(\hat{x}). \quad (14)$$

En consecuencia, del análisis anterior infiera lo siguiente

$$\begin{aligned} (\psi_{T,G} \circ r)(\psi_G(x)) &= (\psi_{T,G} \circ (\hat{q}^{-1} \circ s))(\psi_G(x)) \\ &= \psi_{T,G}(\hat{q}^{-1}(s(\psi_G(x)))) \\ &\stackrel{(12)}{=} \psi_{T,G}(\hat{q}^{-1}(\hat{q}(\psi_T(\hat{x})))) \\ &= \psi_{T,G}(\psi_T(\hat{x})) \\ &= \psi_G(\hat{x}) \\ &\stackrel{(14)}{=} \psi_G(x), \end{aligned}$$

de manera que $\psi_{T,G} \circ r = id_{X/G}$, por ende r es una sección continua de $\psi_{T,G}$, así $(T, r) \in \Gamma$. Note que para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$ es válido $\psi_{T,T_i}(r(\psi_G(x))) = \psi_{T,T_i}(\psi_T(\hat{x})) = \psi_{T_i}(\hat{x}) \stackrel{(13)}{=} s_i(\psi_G(x))$, luego $(T_i, s_i) \leq (T, r)$; de modo que $\mathcal{A}$ es acotado superiormente, por consiguiente, del Lema de Zorn se sigue que Γ admite elemento maximal, digamos $(M, g) \in \Gamma$.

Para concluir la demostración se probará que $M = \{1\}$ utilizando el Lema 7. Suponga que N es un subgrupo abierto de M tal que $N \trianglelefteq G$. Recuerde que M es profinito por ser cerrado, en particular M es compacto, luego, por la Proposición 1.2.7, N es cerrado en M y tiene índice finito, es decir, M/N es finito; de hecho M/N es profinito en virtud de la Proposición 2.1.14. Debido a que $\varphi|_M$ es continua y fiel, del Teorema 2.2.13 se sigue que M/N actúa de manera continua y fiel sobre el espacio profinito X/N ; es más, como M/N es profinito y finito se obtiene del Teorema 2.2.12 una sección continua $t : (X/N)/(M/N) \rightarrow X/N$ de la proyección canónica $\psi_{(M/N)} : X/N \rightarrow (X/N)/(M/N)$. Por otro lado el apartado *iii*) de la Observación 10 establece que la función $t \circ \Psi^{-1}$ es sección continua de $\psi_{N,M}$, donde Ψ es el homeomorfismo descrito en el Teorema 2.2.13. Defina $\beta := t \circ \Psi^{-1} \circ g$ y fije la atención en las siguientes equivalencias: $\psi_{N,G} \circ \beta \stackrel{(6)}{=} (\psi_{M,G} \circ \psi_{N,M}) \circ (t \circ \Psi^{-1} \circ g) = \psi_{M,G} \circ (\psi_{N,M} \circ t \circ \Psi^{-1}) \circ g = \psi_{M,G} \circ g = id_{X/G}$. En consecuencia β es una sección continua de $\psi_{N,G}$ y por ello $(N, \beta) \in \Gamma$; así mismo, como $t \circ \Psi^{-1}$ es sección continua de $\psi_{N,M}$, entonces $\psi_{N,M} \circ \beta = g$, de manera que $(M, g) \leq (N, \beta)$, contradiciendo la maximalidad de (M, g) , en consecuencia M no posee subgrupos abiertos que sean distinguidos en G . Aplicando el Lema 7 se llega a que $M = \{1\}$, de ello $X/M = X$ y $g : X/G \rightarrow X$ es una sección continua de la función $\psi_{\{1\},G} = \psi_G$ como se quería probar. $\square$

Ejemplo 2.2.15. Considere el grupo multiplicativo discreto $G = \{-1, 1\}$ y X el espacio profinito

definido en el Ejemplo 2.2.9. G actúa sobre X de manera continua y fiel mediante las ecuaciones $1 \cdot (x_i)_{i \in I} := (x_i)_{i \in I}$ y $-1 \cdot (x_i)_{i \in I} := (-x_i)_{i \in I}$, por lo tanto, del Teorema 2.2.14 se sigue que ψ_G admite secciones continuas.

3. Acciones parciales de grupos profinitos sobre espacios profinitos

El contenido de este apartado reflexiona sobre el trabajo realizado en el capítulo anterior y desarrolla en un contexto de acciones parciales los Teoremas 2.2.6, 2.2.12, 2.2.13 y 2.2.14, lo que generaliza de cierta manera los teoremas establecidos en (Magid, 2014, Section 2.4). La primera sección se encarga de cubrir los suficientes detalles relacionados con la teoría básica de acciones parciales para llevar a cabo la generalización deseada, la segunda sección presenta las acciones parciales topológicas y en la última sección se encuentran distribuidos los resultados presentados en (Magid, 2014, Section 2.4), pero en términos de acciones parciales.

3.1. Acciones parciales

Respecto a las acciones de grupo “clásicas” es común encontrar en la literatura que se definen en principio sobre conjuntos, luego son extendidas al caso de conjuntos con estructura adicional (espacios topológicos, álgebras sobre anillos, etc.), realizando algunas adaptaciones si se llega a necesitar (exigir que el grupo sea topológico o que la función sea continua, por ejemplo). De manera análoga las *acciones parciales de grupo* son definidas sobre conjuntos y posteriormente adaptadas de manera coherente a los casos donde el conjunto tenga alguna estructura particular. Uno de los intereses de este trabajo de grado está enfocado en obtener acciones parciales de grupos topológicos (en particular grupos profinitos) sobre espacios topológicos (en particular espacios profinitos). El lector interesado en indagar un poco más sobre la teoría básica de acciones parciales puede tomar como referencia el trabajo hecho en (Exel, 2017), donde además de encontrar algunas demostraciones que en esta sección son omitidas, tendrá la oportunidad de profundizar acerca

de los conceptos que rodean a las acciones parciales y su relación con diferentes ramas de la matemática.

Definición 3.1.1. (Exel, 2017, p. 5) Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Una **acción parcial** de G sobre X es una colección $\{X_g\}_{g \in G}$ de subconjuntos de X , junto con una familia de funciones $\{\theta_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g\}_{g \in G}$ que satisfacen los siguientes axiomas:

$$i) \quad X_1 = X \text{ y } \theta_1 = id_X.$$

$$ii) \quad \theta_{gh} \text{ es una extensión de la función } \theta_g \circ \theta_h, \text{ para todo } g, h \in G.$$

Con relación a las acciones parciales cabe resaltar que ellas pueden ser representadas de diferentes maneras; por ejemplo, en (Exel, 2017) son denotadas por medio de una pareja de la forma $\theta := (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$, donde $\{X_g\}_{g \in G}$ y $\{\theta_g\}_{g \in G}$ son las colecciones de subconjuntos y funciones, respectivamente; en (Pinedo and Uzcátegui, 2017) se utiliza en ocasiones la familia de funciones $\theta := \{\theta_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g\}_{g \in G}$ para hacer referencia a una acción parcial sin necesidad de resaltar la familia $\{X_g\}_{g \in G}$. De hecho, si se define el conjunto

$$G * X := \{(g, x) \in G \times X : x \in X_{g^{-1}}\}, \quad (15)$$

de acuerdo a lo establecido en (Pinedo and Uzcátegui, 2017), la función θ , que asigna a cada $(g, x) \in G * X$ el único $\theta_g(x) \in X$, representa una acción parcial. Además de lo anterior observe que en (Exel, 2017, p. 16), se representa una acción parcial $\theta := (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ por medio de una función $\theta : G \longrightarrow \mathcal{I}(X)$, donde $\mathcal{I}(X)$ simboliza el semigrupo inverso de simetrías parciales de

X . En este trabajo de grado se utilizará de manera indistinta las diferentes notaciones establecidas en (Exel, 2017) y (Pinedo and Uzcátegui, 2017), para representar acciones parciales. Note que (15) permite dar una descripción explícita a los conjuntos X_g , es decir

$$X_{g^{-1}} := \{x \in X : (g, x) \in G * X\}, \quad (16)$$

para cada $g \in G$.

Definición 3.1.2. Sean G un grupo, $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ una acción parcial de G sobre un conjunto X y $w \in X$. Se define el conjunto

$$G^w := \{g \in G : (g, w) \in G * X\} \stackrel{(15)}{=} \{g \in G : w \in X_{g^{-1}}\}. \quad (17)$$

Observación 11. Dado un grupo G y una acción parcial $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ de G sobre un conjunto X , recuerde que el ítem *ii*) de la Definición 3.1.1 exige que para cada $g, h \in G$, la función θ_{gh} sea una extensión de $\theta_g \circ \theta_h$, es decir, que el dominio de la función composición sea un subconjunto de $X_{(gh)^{-1}}$. Tal como se menciona en (Exel, 2017), el dominio de la compuesta no está definido en el contexto tradicional, ya que la imagen de θ_h no necesariamente está contenido en el dominio de θ_g , por lo tanto, en el ambiente de acciones parciales, una composición de la forma $\theta_g \circ \theta_h$ se refiere a la función cuyo dominio está conformado por todos los elementos $x \in X$ para los cuales la expresión $\theta_g(\theta_h(x))$ tiene sentido. Claramente $x \in X_{h^{-1}}$ y $\theta_h(x) \in X_{g^{-1}}$, además

se sigue de (Exel, 2017), que

$$\theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}), \quad (18)$$

es el dominio de $\theta_g \circ \theta_h$.

El siguiente resultado lista propiedades inmediatamente deducidas de la Definición 3.1.1, de hecho, algunas obras como (Abadie, 2003) y (Exel et al., 2011), prefieren incluirlas en la definición de acción parcial.

Proposición 3.1.3. Dados un grupo G y un conjunto X , las siguientes proposiciones son válidas para cualquier acción parcial $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ de G sobre X

a) (Exel, 2017, p. 6) Para cada $g \in G$, θ_g es biyectiva y $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$.

b) (Exel, 2017, p. 7) Para cada $g, h \in G$,

$$\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) = X_g \cap X_{gh}. \quad (19)$$

En particular $\theta_{h^{-1}}(X_h \cap X_{g^{-1}}) = X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$.

La siguiente proposición caracteriza las acciones parciales

Proposición 3.1.4. (Exel, 2017, p. 6) Si G es un grupo y X un conjunto no vacío, una familia $\{X_g\}_{g \in G}$, de subconjuntos en X , junto con una colección de funciones $\{\theta_g : X_{g^{-1}} \longrightarrow X_g\}_{g \in G}$, determinan una acción parcial de G sobre X si y solo si se satisfacen las siguientes propiedades para cada $g, h \in G$

- i) $X_1 = X$ y $\theta_1 = id_X$.
- ii) $\theta_g(X_{g^{-1}} \cap X_h) \subseteq X_{gh}$.
- iii) $\theta_g(\theta_h(x)) = \theta_{gh}(x)$, para cada $x \in X_{h^{-1}} \cap X_{(gh)^{-1}}$.

Sean G un grupo y X un conjunto. En (Kellendonk and Lawson, 2004) se da una definición alternativa de acción parcial, utilizando el concepto de *función parcial*. Recuerde que una función parcial no es más que una función definida no necesariamente para todo elemento del conjunto de salida, es decir, si $f : W \longrightarrow Y$ es una función parcial, entonces f está definida en un subconjunto de W , digamos $A \subseteq W$. Se escribe $\exists f(x)$ para significar que x hace parte del dominio de f , por lo tanto $f(x)$ está definido. En (Kellendonk and Lawson, 2004) se define *acción parcial unitaria* de G sobre X como una función parcial $n : G \times X \longrightarrow X, (g, x) \mapsto n(g, x)$, que satisface las siguientes propiedades para cada $g, h \in G$

(PA1) Si $\exists n(g, x)$, entonces $\exists n(g^{-1}, n(g, x))$ y $n(g^{-1}, n(g, x)) = x$.

(PA2) Si $\exists n(g, n(h, x))$, entonces $\exists n(gh, x)$ y $n(g, n(h, x)) = n(gh, x)$.

(PA3) $\exists n(1, x)$ y $n(1, x) = x$.

En (Gómez, 2017) se muestra que la Proposición 3.1.4 es equivalente a la definición de acción parcial unitaria dada en (Kellendonk and Lawson, 2004), por lo tanto, la Definición 3.1.1 equivale a la definición de acción parcial unitaria descrita en (Kellendonk and Lawson, 2004).

Ejemplo 3.1.5. Dados un grupo G y un conjunto no vacío X , toda acción $\varphi : G \times X \rightarrow X$ de G sobre X , es de inmediato una acción parcial denominada *acción global* de G sobre X . En

este caso el par $(\{X_g\}_{g \in G}, \{\varphi_g\}_{g \in G})$ representa la acción φ , donde para cada $g \in G$, $X_g = X$ y $\varphi_g(x) := \varphi(g, x)$.

El ejemplo anterior ilustra que toda acción es una acción parcial. En general las acciones parciales no son acciones globales y el siguiente ejemplo muestra este hecho.

Ejemplo 3.1.6. (Batista, 2017, p. 6) Considere el grupo aditivo $\mathbb{Z}$ y $X = \mathbb{Z}^+$. Defina para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ los conjuntos $X_{-n} = \mathbb{Z}^+$, $X_n = \{m \in \mathbb{Z}^+ : m \geq n\}$, y la función

$$\alpha_n : X_{-n} \ni m \mapsto m + n \in X_n,$$

entonces $\alpha = (\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$ es una acción parcial de $\mathbb{Z}$ sobre X .

Ejemplo 3.1.7. (Abadie, 2003, p. 19) Dados un espacio topológico X y un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$, para todo $r \in \mathbb{R}$ se definen $X_r = X$ y $\alpha_r = h^r$, si $r \in \mathbb{Z}$; $X_r = \emptyset$ y $\alpha_r = \emptyset$, si $r \notin \mathbb{Z}$. Las colecciones $\{X_r\}_{r \in \mathbb{R}}, \{\alpha_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ determinan una acción parcial α de $\mathbb{R}$ sobre X .

Observación 12. Recuerde que el ítem *i*) de la Observación 10 menciona que dada una acción global φ de un grupo G sobre un conjunto no vacío X , es permitido realizar restricciones a ciertos subconjuntos de $G \times X$, de tal manera que la función resultante sigue siendo una acción. De forma similar, pero en el contexto de acciones parciales, es posible llevar a cabo restricciones a ciertos subconjuntos denominados *invariantes*, que determinan acciones parciales de una acción parcial dada. En concreto, si $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ es una acción parcial de un grupo G sobre un conjunto X , entonces $W \subseteq X$ no vacío es llamado **subconjunto invariante** bajo la acción θ (ver

(Exel, 2017, Definition 2.9)), si para todo $g \in G$, vale la contención

$$\theta_g(W \cap X_{g^{-1}}) \subseteq W. \quad (20)$$

Exel en (Exel, 2017, p. 8) demuestra que dados una acción parcial $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$, de un grupo G sobre un conjunto X y $W \subseteq X$ un subconjunto invariante bajo θ , entonces la colección de conjuntos $\{D_g := X_g \cap W\}_{g \in G}$, junto con la familia de funciones $\{\theta_g|_{D_{g^{-1}}} : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g\}_{g \in G}$, establecen una acción parcial $\theta' = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\theta_g|_{D_{g^{-1}}}\}_{g \in G})$, de G sobre W . θ' será llamada la **restricción** de θ al subconjunto W . En el caso de acciones globales, el proceso de restricción se puede efectuar a subconjuntos que no necesariamente sean invariantes bajo la acción, esto es, si $\alpha = \{\alpha_g : X \longrightarrow X\}_{g \in G}$ es una acción global de un grupo G sobre un conjunto X , y $Y \subseteq X$ no vacío, entonces la familia de subconjuntos $\{D_g := \alpha_g(Y) \cap Y\}_{g \in G}$, junto con las restricciones $\{\alpha_g|_{D_{g^{-1}}} : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g\}_{g \in G}$, determinan de manera inmediata una acción parcial de G sobre Y , llamada la **restricción** de α al subconjunto Y .

Sean G un grupo, φ una acción global de G sobre un conjunto X y $U \subseteq X$ no vacío. Enseguida se define para el caso de acciones parciales el análogo al conjunto $G \cdot U$, definido en (5), además se establecerán algunas propiedades similares a las enunciadas en el Lema 5

Definición 3.1.8. (Pinedo and Uzcátegui, 2017, p. 2) Si $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ es una acción parcial de un grupo G sobre un conjunto X y $U \subseteq X$ no vacío, entonces se define

$$a) \ G^U := \{g \in G : u \in X_{g^{-1}}, \text{ para algún } u \in U\} \stackrel{(17)}{=} \bigcup_{u \in U} G^u.$$

b) El conjunto $G^U \cdot U := \{\theta_g(u) : u \in U, g \in G^u\} \stackrel{(17)}{=} \{\theta_g(u) : u \in U \cap X_{g^{-1}}\}$ es denominado la **saturación** de U . Se escribirá $G^x \cdot x$ cuando $U = \{x\}$.

Adicionalmente, si $G^U \cdot U = U$, entonces U es llamado **conjunto invariante** bajo la acción θ , o G -invariante bajo θ .

El lector podrá recordar que en la Observación 6 se menciona, para el caso de cualquier acción global η de un grupo dado G sobre un conjunto no vacío X , que para verificar la invarianza de un subconjunto no vacío $U \subseteq X$ es suficiente con comprobar la contención $G \cdot U \subseteq U$. Para el caso de acciones parciales la situación es la misma, es decir, si $\theta = (\{Y_g\}_{g \in G'}, \{\theta_g\}_{g \in G'})$ es una acción parcial de un grupo G' sobre un conjunto no vacío Y y $U' \subseteq Y$ no vacío, entonces del ítem *i*) de la Definición 3.1.1 se sigue $U' \subseteq G'^{U'} \cdot U'$; por lo tanto cuando se quiera verificar la invarianza de un conjunto en el contexto de acciones parciales, es suficiente con verificar la contención que puede no ser verdadera. Por otro lado cuando la situación requiera resaltar la acción parcial a la hora de referirse a la saturación de U' , se escribirá $G_\theta^{U'} \cdot U'$ en vez de $G^{U'} \cdot U'$; esto por cuestiones de claridad y para no generar confusiones cuando se trabaje con más de una acción parcial de manera simultánea.

Lema 8. Dados un grupo G y un conjunto X no vacío, las siguientes afirmaciones son verdaderas para una acción parcial $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$, de G sobre X , y un subconjunto no vacío $U \subseteq X$:

$$i) \quad G^U \cdot U = \bigcup_{g \in G^U} \theta_g(U \cap X_{g^{-1}}).$$

$$ii) \quad \theta(G * U) = G^U \cdot U.$$

iii) $G^U \cdot U$ y $X \setminus (G^U \cdot U)$ son invariantes bajo θ .

Demostración.

i) $y \in \bigcup_{g \in G^U} \theta_g(U \cap X_{g^{-1}})$ si y solo si existe $g \in G^U$ tal que $y \in \theta_g(U \cap X_{g^{-1}})$, luego, existe $u \in U \cap X_{g^{-1}}$ que satisface la igualdad $y = \theta_g(u)$, de ello $y \in G^U \cdot U$.

ii) $\theta(G * U) = \{\theta_g(u) : (g, u) \in G * U\} = \{\theta_g(u) : u \in U \cap X_{g^{-1}}\} = G^U \cdot U$.

iii) Defina $A := G^U \cdot U$ y $B := X \setminus A$. Si $y \in G^A \cdot A$, entonces $y \in \theta_g(A \cap X_{g^{-1}})$, para algún $g \in G^A$, es decir, existe $x \in A \cap X_{g^{-1}}$ tal que $\theta_g(x) = y$, pero $A = G^U \cdot U$, por lo tanto habrán elementos $h \in G^U$ y $m \in U \cap X_{h^{-1}}$ de modo que $x \in \theta_h(U \cap X_{h^{-1}})$ y $\theta_h(m) = x$. Note que $m \in \theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$, de ello $gh \in G^m$, luego $y = \theta_g(x) = \theta_g(\theta_h(m)) = \theta_{gh}(m)$ con lo cual $y \in G^U \cdot U = A$; de manera que $G^A \cdot A \subseteq A$ como se quería mostrar.

Para verificar la invarianza de B primero tome $y \in G^B \cdot B$, entonces existe $x \in B$ y $g \in G^x$ tal que $\theta_g(x) = y$. Como $x \in B$, entonces $x \notin A$, de ello que para todo $m \in U$ y todo $g \in G^m$, $\theta_g(m) \neq x$. Suponga ahora que $y \in A$, entonces existen $m \in U$ y $h \in G^m$ tales que $\theta_h(m) = y$. Observe que $\theta_h(m) \in X_h$ y $\theta_h(m) = y \in X_g$, luego $m \in \theta_h^{-1}(X_h \cap X_g) \subseteq X_{g^{-1}h}$, de donde se deriva que $\theta_{g^{-1}h}(m) = x$, lo cual es una contradicción pues $m \in U$ y $g^{-1}h \in G^m$. De este modo se concluye que $y \in B$ y así B es G - invariante bajo θ .

□

Sean G un grupo y $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ una acción parcial de G sobre un conjunto no vacío X . Tal como se vio en la Observación 12, la definición de conjunto invariante establecida en

(Exel, 2017, p. 8) afirma que si $U \subseteq X$ no vacío es invariante bajo θ , entonces para todo $g \in G$, $\theta_g(U \cap X_{g^{-1}}) \subseteq U$, luego $G^U \cdot U = \bigcup_{g \in G^U} \theta_g(U \cap X_{g^{-1}}) \subseteq U$, así, de la Definición 3.1.8 se sigue que U es invariante bajo θ . Recíprocamente, si $U \subseteq X$ es invariante según la Definición 3.1.8, entonces $\bigcup_{g \in G^U} \theta_g(U \cap X_{g^{-1}}) \subseteq U$, en particular, para cada $g \in G$, vale la contención $\theta_g(U \cap X_{g^{-1}}) \subseteq U$, con esto U es invariante bajo la definición dada en (Exel, 2017, p. 8). Esta reflexión permite concluir que la definición de invarianza dada en la Observación 12 es equivalente a la Definición 3.1.8.

Por otro lado, recuerde que en el segundo párrafo de la Observación 12 se aclara que, vía restricción es posible inducir acciones parciales partiendo de una acción global dada, dicho de otro modo, es posible generar acciones parciales efectuando restricción a una acción global arbitraria. En este punto es natural preguntar si dada una acción parcial $\alpha = (\{X'_g\}_{g \in G'}, \{\alpha_g\}_{g \in G'})$ de un grupo G' sobre un conjunto no vacío X' ¿existirán un conjunto Y y una acción global $\mu = \{\mu_g : Y \longrightarrow Y\}_{g \in G'}$ de G' sobre Y de tal forma que $X' \subseteq Y$ y que la restricción de μ a X' coincida con α ?, o dicho de otra manera, ¿será que toda acción parcial α proviene de alguna acción global μ , vía restricción? Según (Abadie, 2003, p. 18) y (Gómez, 2017, p. 52), si α es una acción parcial de un grupo G sobre un conjunto no vacío X , en realidad lo que se busca es una acción global μ de G sobre un conjunto no vacío Y de tal manera que Y contenga un subconjunto X' que se identifique con X y que la restricción de μ al subconjunto X' sea de alguna manera *equivalente* a la acción parcial α dada inicialmente. La siguiente definición establece razonablemente relaciones entre acciones parciales utilizando funciones.

Definición 3.1.9. (Exel, 2017, p. 7) Sean G un grupo y X, Y un par de conjuntos no vacíos. Si $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ y $\alpha = (\{Y_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ son acciones parciales de G sobre X y Y ,

respectivamente, entonces una función $\phi : X \longrightarrow Y$ es llamada *G-equivariante* cuando para cada $g \in G$ se cumple

$$(i) \quad \phi(X_g) \subseteq Y_g.$$

$$(ii) \quad \phi(\theta_g(x)) = \alpha_g(\phi(x)), \text{ para todo } x \in X_{g^{-1}}.$$

Si ϕ es biyectiva y ϕ^{-1} es *G-equivariante*, entonces ϕ será llamada una *equivalencia* entre θ y α , además se dirá que θ es *equivalente* a α si existe una equivalencia entre θ y α .

Dados un grupo G , $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ y $\alpha = (\{Y_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ un par de acciones parciales de G sobre los conjuntos X y Y , respectivamente, y $\phi : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva *G-equivariante*, si se asume que ϕ es una equivalencia, se tiene del ítem (i) de la Definición 3.1.9 que para cada $g \in G$, $\phi(X_g) \subseteq Y_g$ y $\phi^{-1}(Y_g) \subseteq X_g$, de ello se sigue que $\phi(X_g) = Y_g, \forall g \in G$. Recíprocamente, si se supone que para cada $g \in G$, $\phi(X_g) = Y_g$, entonces para todo $g \in G$ se tiene de manera inmediata que $\phi^{-1}(Y_g) = X_g$ y $\phi^{-1} \circ \alpha_g = \theta_g \circ \phi^{-1}$, por lo tanto ϕ^{-1} es *G-equivariante* y se concluye que ϕ es una equivalencia.

Retomando la pregunta ¿será que toda acción parcial α de un grupo G sobre un conjunto X proviene de alguna acción global μ vía restricción? La respuesta a este interrogante es afirmativa y Exel en (Exel, 2017) demuestra esta declaración utilizando la saturación de X . Antes de recordar la construcción de tal acción global es necesario dar la siguiente definición.

Definición 3.1.10. Sean X un conjunto no vacío y $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ una acción parcial de un grupo G sobre X . Una acción global μ de G sobre un conjunto Y es llamada una *globalización*

de θ si existe una función inyectiva $\iota : X \longrightarrow Y$ de tal manera que $G \cdot \iota(X) = Y$ y la restricción de μ al subconjunto $\iota(X)$ es equivalente a θ , vía ι .

Cabe resaltar que la definición anterior es una adaptación adecuada de la definición de *globalización* propuesta en (Gómez, 2017, p. 53), al contexto de acciones parciales de grupos sobre conjuntos. La importancia de incluir la condición de saturación se debe a que en la demostración del Teorema 3.1.11, contenida en (Exel, 2017, p. 12), se utiliza la saturación de X para garantizar cierta unicidad a la globalización construida.

Dada una acción parcial $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ de un grupo G sobre un conjunto no vacío X se define la siguiente relación R sobre $G \times X$:

$$(g, x)R(h, y) \Leftrightarrow x \in X_{g^{-1}h} \text{ y } \theta_{h^{-1}g}(x) = y. \quad (21)$$

la relación R de manera inmediata es reflexiva y simétrica. Si $(g, x), (h, y), (k, z) \in G \times X$ tales que $(g, x)R(h, y)R(k, z)$, entonces de (21) se sigue $x \in X_{g^{-1}h}, \theta_{h^{-1}g}(x) = y \in X_{h^{-1}k}$ y $\theta_{k^{-1}h}(y) = z$. Se quiere verificar que $x \in X_{g^{-1}k}$ y $\theta_{k^{-1}g}(x) = z$. Observe que $\theta_{h^{-1}g}(x) = y \in X_{h^{-1}g} \cap X_{h^{-1}k}$ luego $x = \theta_{g^{-1}h}(y) \in \theta_{g^{-1}h}(X_{h^{-1}g} \cap X_{h^{-1}k}) \stackrel{(19)}{=} X_{g^{-1}h} \cap X_{(g^{-1}h)(h^{-1}k)} = X_{g^{-1}h} \cap X_{g^{-1}k}$, por tanto $x \in X_{g^{-1}k}$ y $z = \theta_{k^{-1}h}(y) = \theta_{k^{-1}h}(\theta_{h^{-1}g}(x)) = \theta_{(k^{-1}h)(h^{-1}g)}(x) = \theta_{k^{-1}g}(x)$; de esta manera $(g, x)R(k, z)$. Se denotará por X_G a la colección de clases de equivalencia determinadas por R , donde para cada $(g, x) \in G \times X$, la correspondiente clase de equivalencia será denotada por $[g, x]$.

Defina

$$\mu : G \times X_G \ni (g, [h, x]) \longmapsto [gh, x] \in X_G, \quad (22)$$

entonces (22) es una función bien definida ya que si $(g_1, [h_1, x_1]), (g_2, [h_2, x_2]) \in G \times X_G$ tales que $g_1 = g_2$ y $[h_1, x_1] = [h_2, x_2]$, por (21) se sigue que $x_1 \in X_{h_1^{-1}h_2}$ y $\theta_{h_2^{-1}h_1}(x_1) = x_2$, pero note que $h_2^{-1}h_1 = h_2^{-1}g_2^{-1}g_1h_1 = (g_2h_2)^{-1}(g_1h_1)$, luego $x_1 \in X_{(g_1h_1)^{-1}(g_2h_2)}$ y $\theta_{(g_2h_2)^{-1}(g_1h_1)}(x_1) = x_2$, de manera que $[g_1h_1, x_1] = [g_2h_2, x_2]$. Además de lo anterior, μ es una acción global pues si se toman $[h, x] \in X_G$ y $g_1, g_2 \in G$, entonces $\mu(1, [h, x]) = [h, x]$ y

$$\begin{aligned} \mu(g_1, \mu(g_2, [h, x])) &= \mu(g_1, [g_2h, x]) \\ &= [g_1(g_2h), x] \\ &= [(g_1g_2)h, x] \\ &= \mu(g_1g_2, [h, x]). \end{aligned}$$

Note además que X puede ser identificado con un subconjunto de X_G utilizando la función

$$\iota : X \ni x \longmapsto [1, x] \in X_G. \quad (23)$$

Con certeza ι está bien definida y si $x, y \in X$ tales que $[1, x] = \iota(x) = \iota(y) = [1, y]$, entonces $x = \theta_1(x) = y$, luego ι es inyectiva y X es identificado con su imagen $\iota(X)$ en X_G . Por otro lado, si $[g, x] \in X_G$, entonces $[g, x] = \mu(g, [1, x]) \in \mu(G \times \iota(X)) = G_\mu \cdot \iota(X)$, de ello que $G_\mu \cdot \iota(X) = X_G$; de hecho en (Exel, 2017, p. 12-13) se demuestra que $\iota : X \longrightarrow \iota(X)$ es una equivalencia entre θ y μ restringida a $\iota(X)$, de este modo μ es una globalización de θ .

Lo anterior es un pequeño bosquejo de la prueba del siguiente teorema

Teorema 3.1.11. (Exel, 2017, p. 12) Toda acción parcial admite una globalización, la cual es única salvo equivalencias, esto es, si θ es una acción parcial de un grupo G sobre un conjunto X y μ, τ son globalizaciones de G sobre los conjuntos Y_μ, Y_τ , respectivamente, entonces existe una equivalencia $\phi : Y_\mu \longrightarrow Y_\tau$ tal que la restricción de ϕ a X coincide con la identidad sobre X .

3.2. Acciones parciales topológicas

Si G es un grupo y $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ una acción parcial de G sobre un conjunto no vacío X , de acuerdo a lo mencionado en (Dokuchaev, 2019, p. 196), si X está dotado con alguna estructura adicional, entonces serán exigidas condiciones extra a los subconjuntos X_g y funciones θ_g para adaptar adecuadamente el concepto de acción parcial al contexto correspondiente, como se puede apreciar en (Abadie, 2003, p. 16), donde Abadie define acciones parciales de grupos topológicos sobre espacios topológicos, o en (Exel, 1997, p. 418) y (Exel, 2017, p. 26), donde Exel define correspondientemente acciones parciales torcidas de grupos localmente compactos sobre C^* -álgebras y acciones parciales sobre K -álgebras. Esta sección está enfocada en estudiar los conceptos básicos de las acciones parciales topológicas, es decir, acciones parciales de grupos topológicos sobre espacios topológicos; por lo tanto, cabe resaltar que en adelante $G \times X$ estará dotado con la topología producto y $G * X$ será considerado como un subespacio de $G \times X$.

Definición 3.2.1. (Exel, 2017, p. 19) Sean G un grupo topológico y X un espacio topológico. Una acción parcial $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ de G sobre X es *continua* si $\theta : G * X \rightarrow X$ lo es. Se dice que θ es una **acción parcial topológica** si cada X_g es abierto en X y θ_g un homeomorfismo, para todo $g \in G$.

Toda acción parcial θ de un grupo G sobre un conjunto X es una acción parcial topológica continua si tanto G como X son discretos.

Ejemplo 3.2.2. Dado un grupo topológico G , recuerde que la acción global de Bernoulli, de G sobre el producto $X := \{0, 1\}^G$, se define mediante la colección $\eta := \{\eta_g : X \rightarrow X\}_{g \in G}$, donde además, para cada $g \in G$, η_g es continua. Por el ítem a) de la Proposición 3.1.3 cada η_g es una biyección, por lo tanto η es una acción global topológica.

Ejemplo 3.2.3. (Abadie, 2003, p. 20) Considere el grupo multiplicativo discreto $G = \{-1, 1\}$ y $X = [0, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. Defina $X_1 = X$, $X_{-1} = (a, 1]$, donde $a > 0$; $\alpha_1 = id_X$ y $\alpha_{-1} = id_{(a, 1]}$. Entonces $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ es una acción parcial topológica que además es continua.

Ejemplo 3.2.4. (Exel et al., 2011, p. 198) Para un espacio topológico X , tome un homeomorfismo parcial h , de X , esto es, existen abiertos $U, V \subseteq X$, tales que $h : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo. Defina $X_0 = X$, $\alpha_0 = id_X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{-n} = dom(h^n)$, $\alpha_n = h^n$. Observe que cada X_n es un abierto de X y toda α_n es continua, luego, $\alpha = (\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$ es una acción parcial topológica de $\mathbb{Z}$ sobre X .

Ejemplo 3.2.5. (Exel et al., 2011, p. 199) Si $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es el espacio de Cantor y $1^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}$, son las sucesiones cuyos términos son todos uno y cero, respectivamente, defina $X_{-1} = X \setminus \{1^{\mathbb{N}}\}$ y $X_1 = X \setminus \{0^{\mathbb{N}}\}$. Sea $h : X_{-1} \rightarrow X_1$ la función que asigna a cada $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_{-1}$, la sucesión que resulta de sumar 1 a un número finito de términos de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, como se indica: por el principio del buen orden existe $n \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $x_n = 0$, luego, para todo $i < n$, se deduce que $x_i = 1$,

esto es, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (1, 1, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$; así pues $h((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (0, 0, \dots, 1, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$; es más, h es un homeomorfismo. De manera similar al Ejemplo 3.2.4, es posible determinar una acción parcial topológica $\theta = (\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{\theta_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$, de $\mathbb{Z}$ sobre X , iterando la función h , en otras palabras, $X_0 = X, \theta_0 = id_X$ y para todo $m \in \mathbb{N}, X_m = \text{dom}(h^{-m})$ y $\theta_m = h^m$. Este ejemplo es conocido como *El Odómetro*.

Ejemplo 3.2.6. Dado un grupo topológico G tome la acción global de Bernoulli $\eta = \{\eta_g : X \rightarrow X\}$, donde $X = \{0, 1\}^G$. En (Exel, 2017, p. 22), se define el conjunto $\Omega_1 := \{(x_n) \in X : x_1 = 1\}$, el cual es compacto y abierto, y se establece la acción parcial topológica $\beta = \{\beta_g : D_{g^{-1}} \rightarrow D_g\}_{g \in G}$, que resulta de restringir la acción global de Bernoulli a Ω_1 . Tal acción es llamada por Exel *acción parcial de Bernoulli*. Note que $D_g = \{(x_n) \in X : x_n = 1 = x_g\}$.

Observación 13. Dados un grupo topológico G y $\beta = \{\beta_g\}_{g \in G}$ una acción global topológica de G sobre un espacio topológico X , recuerde que en la Observación 12 se menciona que vía restricción es posible construir nuevas acciones parciales. En el contexto topológico el proceso de restringir β a subconjuntos abiertos produce de manera natural acciones parciales topológicas, esto es, si $U \subseteq X$ es un subconjunto abierto no vacío, entonces la colección de conjuntos $\{D_g := \beta_g(U) \cap U\}_{g \in G}$ junto con la familia de funciones $\{\theta_g := \beta_g|_{D_{g^{-1}}}\}_{g \in G}$ determinan una acción parcial topológica de G sobre U . Por otro lado, la Definición 3.1.9 puede ser adaptada al contexto de acciones parciales como lo presenta Gómez en (Gómez, 2017, p. 52), donde define morfismo de acciones parciales topológicas como una función continua que es G -equivariante; en ese sentido una equivalencia topológica entre acciones parciales topológicas no es más que una equivalencia entre acciones

parciales que es continua como función.

Definición 3.2.7. Sea G un grupo topológico y asuma que $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ es una acción parcial topológica de G sobre un espacio topológico X . Una acción global topológica μ de G sobre un espacio Y es llamada una *globalización topológica* de θ si existe una función continua e inyectiva $\iota : X \longrightarrow Y$ tal que $\iota(X)$ es abierto en Y , $G \cdot \iota(X) = Y$ y la restricción de μ al subconjunto $\iota(X)$ es equivalente a θ vía ι .

El Teorema 3.1.11 se extiende con naturalidad al caso de acciones parciales topológicas, como se ve a continuación.

Teorema 3.2.8. (Exel, 2017, p. 20) Toda acción parcial topológica admite una única globalización topológica (salvo equivalencias).

Sean G un grupo topológico, $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ una acción parcial topológica de G sobre un espacio X . Para complementar el Teorema 3.2.8 note que, en (Gómez, 2017, p. 54) se prueba que las funciones μ y ι definidas en (22) y (23) son funciones continuas; de hecho, si θ es continua, en (Kellendonk and Lawson, 2004, p. 104) se demuestra que ι resulta ser abierta. Lo mencionado en este párrafo será utilizado más adelante para el desarrollo de la siguiente sección.

Por otro lado, si $A \subseteq G$ y $V \subseteq X$, de acuerdo a como se definió el conjunto $G * X$ en (15), se establecen los siguientes conjuntos

$$A * V := \{(g, v) \in A \times V : v \in X_{g^{-1}}\}, \quad (24)$$

dato $v \in V$,

$$A^v := \{g \in A : v \in X_{g^{-1}}\}, \quad (25)$$

$$A^V := \{\theta_g(v) : v \in V \text{ y } g \in A^v\} \text{ y } A^V \cdot V := \{\theta_g(x) : x \in V \cap X_{g^{-1}}\}. \quad (26)$$

La intención de lo establecido en (24), (25) y (26) es disponer de una notación alternativa para los subconjuntos de $G * X$, de manera que no se sobrecargue la escritura con demasiados símbolos cuando se trabajen con acciones parciales. En esa misma línea se presentan las siguientes propiedades que serán de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo de grado.

Proposición 3.2.9. Dados un grupo topológico G , un espacio topológico X , una acción parcial topológica $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ de G sobre X y subconjuntos no vacíos $A \subseteq G, V \subseteq X$, se establecen las siguientes afirmaciones:

- (i) Si $G * X$ es cerrado, entonces para todo $g \in G, X_g$ es cerrado en X .
- (ii) Para cada $v \in V, A^v = G^v \cap A$.
- (iii) $A * V = (G * X) \cap (A \times V)$. En particular $G * V = (G * X) \cap (G \times V)$ y si tanto A como V son abiertos o cerrados de manera simultánea, entonces $A * V$ es abierto o cerrado en $G * X$, según corresponda.
- (iv) $\theta(A * V) = A^V \cdot V$. En particular, si V es abierto, entonces $\theta(A * V)$ es abierto en X .

Demostración.

- (i) Sean $g \in G, I$ un conjunto dirigido y $(x_i)_{i \in I} \subseteq X_g$ una red que converge a $x \in X$. Para ver que $x \in X_g$ observe primero que para cada $i \in I, (g^{-1}, x_i) \in G * X$, luego $((g^{-1}, x_i)_{i \in I})$ es una red en $G * X$, además de lo anterior $((g^{-1}, x_i)_{i \in I})$ es una red que converge a (g^{-1}, x) y como $G * X$ es cerrado, entonces $(g^{-1}, x) \in G * X$, es decir, $x \in X_g$ y se concluye que X_g es cerrado en X .
- (ii) Si $v \in V$, entonces $g \in A^v$ si y solo si $g \in A \subseteq G$ y $v \in X_{g^{-1}}$, pero esto equivale a $g \in G^v \cap A$.
- (iii) $(g, x) \in A * V$ si y solamente si $(g, x) \in A \times V \subseteq G \times X$ y $x \in X_{g^{-1}}$ lo que es equivalente a $(g, x) \in (G * X) \cap (A \times V)$, por lo tanto $A * V = (G * X) \cap (A \times V)$; en particular, si $A = G$, entonces $G * V = (G * X) \cap (G \times V)$. De manera inmediata se sigue que $A * V$ es abierto o cerrado en $G * X$ si $A \subseteq G$ y $V \subseteq X$ son abiertos o cerrados de manera simultánea.
- (iv) Es suficiente considerar el apartado ii) del Lema 8 y realizar los correspondientes ajustes a la demostración para llegar a la igualdad buscada, más aún, el ítem i) del Lema 8 establece que $G^V \cdot V = \bigcup_{g \in G^V} \theta_g(V \cap X_{g^{-1}})$, de ello se obtiene que $G^V \cdot V$ es abierto si V lo es; en particular $A^V \cdot V = \bigcup_{g \in A^V} \theta_g(V \cap X_{g^{-1}})$ y $A^V \cdot V$ es abierto si V lo es.

□

Dado un grupo topológico G y una acción parcial $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ de G sobre un espacio X (no necesariamente topológica), con relación al ítem (i) de la Proposición 3.2.9 note que si $G * X$ es abierto, entonces cada X_g también lo será pues si $g \in G$ y $x \in X_{g^{-1}}$, percate que (g, x) es un elemento del abierto $G * X$, es decir, existen abiertos $G_1 \subseteq G$ y $U \subseteq X$ tales que

$(g, x) \in G_1 \times U \subseteq G * X$, de ello que $x \in U \subseteq X_{g^{-1}}$ pues si $y \in U$, entonces $(g, y) \in G_1 \times U \subseteq G * X$, luego $y \in X_{g^{-1}}$, de ello $X_{g^{-1}}$ es abierto. Lo anterior permite deducir que si α es una acción parcial continua de G sobre X tal que $G * X$ es abierto, entonces α será una acción parcial topológica. Esta pequeña observación permitirá desarrollar teoría de acciones parciales topológicas de manera más general, pues amplía la clase de acciones parciales que satisfacen algún resultado de interés.

Proposición 3.2.10. (Pinedo and Uzcátegui, 2017, p. 6) Si $\theta : G * X \longrightarrow X$ es una acción parcial topológica de un grupo topológico G sobre un espacio topológico X , entonces θ es una función abierta.

Demostración. Sea W un abierto básico de $G * X$, de ello que existan conjuntos abiertos $A \subseteq G$ y $V \subseteq X$ tales que $W = (G * X) \cap (A \times V)$, es decir, $W = A * V$ (ver (24)). Por el ítem *iv*) de la Proposición 3.2.9 se sigue que $\theta(W) = A^V \cdot V$ y como V es abierto, entonces $\theta(W)$ es abierto en X . El resultado general se sigue tomando uniones arbitrarias de abiertos básicos de $G * X$. $\square$

3.3. Acciones parciales y la relación de órbita

En esta sección se ha procurado recopilar las herramientas suficientes para poder extender al contexto de acciones parciales los resultados establecidos en (Magid, 2014, Section 2.4), que relacionan los espacios y grupos profinitos con el espacio de órbitas y la existencia de secciones continuas de la proyección. Los teoremas centrales de esta sección son versiones análogas de los Teoremas 2.2.6, 2.2.12, 2.2.13 y 2.2.14, enmarcados en el contexto de acciones parciales. Para empezar recuerde que la Observación 5 define la relación de órbita “ $\sim$ ” generada por una acción global φ , dicha relación puede ser extendida de manera natural al caso de acciones parciales, es

decir, existe una versión para acciones parciales de la relación de órbita “ $\sim$ ”, la cual será descrita a continuación: Para un grupo topológico G y una acción parcial $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ de G sobre un espacio topológico X , se define sobre X la relación “ $\sim_G$ ” de la siguiente manera

$$x \sim_G y \text{ si y solo si existe } g \in G^x \text{ tal que } \theta_g(x) = y.$$

Al igual que en el caso global, la relación “ $\sim_G$ ” resulta ser de equivalencia: Del ítem $i)$ de la Definición 3.1.1 se sigue para todo $x \in X$, que $x \sim_G x$, y del apartado $a)$ de la Proposición 3.1.3 resulta que para cada $x, y \in X$, la relación $x \sim_G y$ implica que $y \sim_G x$. Para verificar la transitividad escoja elementos $x, y, z \in X$ de tal manera que $x \sim_G y \sim_G z$, esto es, existen $g \in G^x$ y $h \in G^y$ verificando que $\theta_g(x) = y$ y $\theta_h(y) = z$, luego $\theta_g(x) \in X_g \cap X_{h^{-1}}$ por lo tanto $x \in \theta_{g^{-1}}(X_g \cap X_{h^{-1}})$ y del numeral $iii)$ de la Proposición 3.1.4 se deduce que $z = \theta_h(y) = \theta_h(\theta_g(x)) = \theta_{hg}(x)$, en consecuencia $x \sim_G z$ como se estaba buscando. Dado que se estará trabajando en gran parte con acciones parciales se ha decidido, con el fin de lograr una mayor comodidad en el desarrollo de esta sección, que la relación “ $\sim_G$ ” de ahora en adelante también será llamada **relación de órbita** y el correspondiente conjunto de clases de equivalencia será denotado por $X / \sim_G$. Sean $x, y \in X$ de manera que $x \sim_G y$, es decir, $\theta_g(x) = y$ para algún $g \in G^x$, en consecuencia $y \in G^x \cdot x$; por otro lado, todo $y \in G^x \cdot x$ siempre estará relacionado con x , por lo tanto la órbita de $x \in X$ será la saturación de $\{x\}$ bajo la acción θ ; de hecho, si $U \subseteq X$ es no vacío, entonces $x \in G^U \cdot U$ si y solo si existen $u \in U$ y $g \in G^u$ tales que $x = \theta_g(u)$, es decir, $x \in G^u \cdot u \subset \bigcup_{u \in U} G^u \cdot u$; en conclusión $G^U \cdot U = \bigcup_{u \in U} G^u \cdot u$. La proyección canónica de X a $X / \sim_G$ será denotada por φ_G , y la topología asignada al conjunto de órbitas será la topología cociente que torna continua a $\varphi_G : X \longrightarrow X / \sim_G$;

más aún, el ítem *iv*) del Lema 5 se adapta naturalmente al contexto de acciones parciales como se muestra a continuación.

Lema 9. Sean G un grupo topológico, X un espacio topológico y $\theta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ una acción parcial de G sobre X . Si $U \subseteq X$ es no vacío, entonces $\varphi_G^{-1}(\varphi_G(U)) = G^U \cdot U$. En particular, si U es invariante bajo θ , entonces $\varphi_G^{-1}(\varphi_G(U)) = U$, y si U es abierto, entonces $\varphi_G(U)$ es abierto.

Demostración. Si $x \in \varphi_G^{-1}(\varphi_G(U))$, entonces existen $y \in U$ y $g \in G^x$ tales que $\theta_g(y) = x$, en consecuencia $x \in G^U \cdot U$. De manera recíproca, dado $x \in G^U \cdot U$ existen $v \in U$ y $g \in G^u$ verificando $x = \theta_g(v)$, luego $x \sim_G v$, de ello $\varphi_G(x) = \varphi_G(v) \in \varphi_G(U)$ y $x \in \varphi_G^{-1}(\varphi_G(U))$ como se buscaba. Si se supone ahora que U es abierto, el numeral (*iv*) de la Proposición 3.2.9 garantiza que $G^U \cdot U$ es abierto, en otras palabras $\varphi_G^{-1}(\varphi_G(U))$ es abierto y por la topología dada a $X/\sim_G$ se concluye que $\varphi_G(U)$ es abierto. Si U es invariante bajo θ , entonces $U = G^U \cdot U = \varphi_G^{-1}(\varphi_G(U))$. $\square$

El propósito ahora es establecer condiciones bajo las cuales el espacio de órbitas asociado a una acción parcial sea profinito. Con el ánimo de dar claridad cuando se necesite, recuerde que el Teorema 2.1.9 caracteriza los espacios profinitos como aquellos espacios que son compacto, Hausdorff y cero-dimensionales; y que la Definición 2.1.4 describe cuando un par de subconjuntos abiertos de un espacio topológico X forman una *separación* del espacio.

Teorema 3.3.1. Si $\eta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\eta_g\}_{g \in G})$ es una acción parcial continua de un grupo profinito G sobre un espacio profinito X , tal que $G * X$ es cerrado, entonces $X/\sim_G$ es un espacio profinito.

Demostración. La demostración de este teorema se realizará de manera análoga a la prueba del Teorema 2.2.6, establecido en este trabajo, por lo tanto, bastará verificar que el espacio $X/\sim_G$

es Hausdorff y cero-dimensional, ya que $X/\sim_G$ es imagen continua del compacto X bajo la proyección φ_G , por tanto $X/\sim_G$ es de forma automática un espacio compacto. Se utilizará la Proposición 2.1.5 para comprobar que $X/\sim_G$ sea Hausdorff y cero-dimensional. Sean $x, y \in X$ tales que $G^x \cdot x \neq G^y \cdot y$. Como X es cero-dimensional la colección

$$\tilde{\mathcal{C}} := \{U \subseteq X : U \text{ es clopen y } x \in U\},$$

es no vacía. Se quiere encontrar una separación para los puntos $G^x \cdot x$ y $G^y \cdot y$, encontrando $U \in \tilde{\mathcal{C}}$ adecuado que verifique la condición $(G^U \cdot U) \cap (G^y \cdot y) = \emptyset$. Para hallar dicho U suponga que para todo $V \in \tilde{\mathcal{C}}, (G^V \cdot V) \cap (G^y \cdot y) \neq \emptyset$. Con el fin de llegar a una contradicción lógica considere el conjunto

$$\tilde{F}_y(V) := \{(g, v) \in G * V : \eta_g(v) = y\}.$$

Note que $\tilde{F}_y(V) \neq \emptyset$ pues en caso contrario tome $w \in (G^V \cdot V) \cap (G^y \cdot y)$, de ello que existan $m \in V, g \in G^m$ y $h \in G^w$ tales que $\eta_g(m) = w$ y $\eta_h(w) = y$, por consiguiente $\eta_g(m) \in X_g \cap X_{h^{-1}}$ y $m \in \eta_{g^{-1}}(X_g \cap X_{h^{-1}}) \stackrel{(19)}{=} X_{g^{-1}} \cap X_{(hg)^{-1}}, (hg, m) \in G * V, y = \eta_h(w) = \eta_h(\eta_g(m)) = \eta_{hg}(m)$; en consecuencia $(hg, m) \in \tilde{F}_y(V)$ lo cual contradice que $\tilde{F}_y(V)$ sea vacío, de esta manera $\tilde{F}_y(V) \neq \emptyset$ para todo $V \in \tilde{\mathcal{C}}$. Ahora se comprobará que $\{\tilde{F}_y(V)\}_{V \in \tilde{\mathcal{C}}}$ es una familia de cerrados en $G * X$ que satisface la Propiedad de Intersección Finita, para ello primero observe que $(g, v) \in \tilde{F}_y(V)$ si y solo si $(g, v) \in G * V$ y $\eta_g(v) = y$, pero $\eta(g, v) = \eta_g(v) = y$, por tanto $(g, v) \in \eta^{-1}(y)$, de donde se deduce que $\tilde{F}_y(V) = (G * V) \cap \eta^{-1}(y)$; es más, $\tilde{F}_y(V)$ es cerrado por ser intersección de dos conjuntos cerrados: $G * V$ es cerrado en $G * X$ debido al ítem (iii) de la Proposición 3.2.9 y como X es Hausdorff en particular es un espacio T_1 , en consecuencia $\{y\}$ es cerrado en X

y por continuidad $\eta^{-1}(y)$ es cerrado en $G * X$. Por otro lado, si $V_1, V_2 \in \tilde{\mathcal{C}}$, entonces para cada $(g, v) \in \tilde{F}_y(V_1 \cap V_2)$, vale que $(g, v) \in G * (V_1 \cap V_2)$ y $\eta_g(v) = y$, esto es, $(g, v) \in G \times (V_1 \cap V_2)$, $v \in X_{g^{-1}}$ y $\eta_g(v) = y$; de ello se deduce $v \in V_1 \cap V_2 \cap X_{g^{-1}}$ y $\eta_g(v) = y$, lo cual implica que $(g, v) \in G * V_1 \cap G * V_2$ y $\eta_g(v) = y$. Por lo tanto se concluye que $(g, v) \in \tilde{F}_y(V_1) \cap \tilde{F}_y(V_2)$, luego $\tilde{F}_y(V_1 \cap V_2) \subseteq \tilde{F}_y(V_1) \cap \tilde{F}_y(V_2)$ y como $\tilde{F}_y(V_1 \cap V_2) \neq \emptyset$, entonces $\tilde{F}_y(V_1) \cap \tilde{F}_y(V_2) \neq \emptyset$. Usando de forma inductiva el anterior análisis resulta que si $V_1, V_2, \dots, V_n \in \tilde{\mathcal{C}}$, entonces $\bigcap_{i=1}^n \tilde{F}_y(V_i) \neq \emptyset$, con esto la colección $\{\tilde{F}_y(V)\}_{V \in \tilde{\mathcal{C}}}$ es una familia de cerrados en $G * X$ con la Propiedad de Intersección Finita pero por hipótesis $G * X$ es un cerrado contenido en el compacto $G \times X$, entonces $G * X$ es compacto y la Proposición 1.1.27 implica que $\bigcap_{V \in \tilde{\mathcal{C}}} \tilde{F}_y(V) \neq \emptyset$. Sea $(g, v) \in \bigcap_{V \in \tilde{\mathcal{C}}} \tilde{F}_y(V)$ y perciba que necesariamente $v = x$ pues en caso contrario y al igual que sucedió en la prueba del Teorema 2.2.6, se contradeciría que el espacio X fuese Hausdorff, luego $(g, x) \in \bigcap_{V \in \tilde{\mathcal{C}}} \tilde{F}_y(V)$ y $\eta_g(x) = y$, pero esta conclusión conlleva a que $x \sim_G y$, de donde $(G^x \cdot x) \cap (G^y \cdot y) \neq \emptyset$, lo que es contradictorio pues inicialmente se establece que $(G^x \cdot x) \neq (G^y \cdot y)$; en conclusión existe $U \in \tilde{\mathcal{C}}$ de tal manera que $(G^U \cdot U) \cap (G^y \cdot y) = \emptyset$.

Sean $A := G^U \cdot U$ y $B := X \setminus A$. Como $U \subseteq A$ y $A \cap (G^y \cdot y) = \emptyset$, entonces $x \in A$ y $y \in B$, además U es abierto por hipótesis, entonces del numeral (iv) de la Proposición 3.2.9 se sigue que A también es abierto. Dado que $G * U$ es compacto y η continua, entonces $\eta(G * U) = G^U \cdot U = A$ es compacto; además, por ser X Hausdorff se obtiene del ítem (ii) de la Proposición 1.1.29 que A es cerrado, por tanto A y B son clopens en X ; también, por el numeral iii) del Lema 8, y por el Lema 9 se concluye que A y B son invariantes bajo η , y satisfacen las igualdades

$$\varphi_G^{-1}(\varphi_G(A)) = A \text{ y } \varphi_G^{-1}(\varphi_G(B)) = B,$$

en conclusión $\varphi_G(A)$ y $\varphi_G(B)$ son clopens en $X/\sim_G$ tales que $G^x \cdot x \in \varphi_G(A)$ y $G^y \cdot y \in \varphi_G(B)$; de hecho, un razonamiento análogo al realizado en la prueba del Teorema 2.2.6 permite afirmar que $\varphi_G(A)$ y $\varphi_G(B)$ separan a $G^x \cdot x$ y $G^y \cdot y$, luego, la Proposición 2.1.5 y el Teorema 2.1.9 concluyen que $X/\sim_G$ es un espacio profinito. $\square$

Ejemplo 3.3.2. Tome un grupo finito y discreto G . Recuerde que la acción global de Bernoulli η , de G sobre $\{0,1\}^G$, definida en el Ejemplo 2.2.3 es continua, por lo tanto, la restricción de η al subconjunto $G * \Omega_1$ también es continua, luego, la acción parcial de Bernoulli de G sobre el compacto abierto Ω_1 es continua. Si $(n_i, x_i)_{i \in I} \subseteq G * \Omega_1$ es una red convergente a $(n, x) \in G \times \Omega_1$, caiga en cuenta que, para cada $i \in I$, vale que $x_i \in D_{n_i^{-1}}$, es decir, $x_i(1) = 1 = x_i(n_i^{-1})$. Por otro lado, como $n_i \rightarrow n$ existe $i_0 \in I$ tal que $n_i = n$, para todo $i > i_0$. Debido a la convergencia de la red $(x_i)_{i \in I}$ se obtiene que $x_i(1) \rightarrow x(1)$ y $x_i(n_i^{-1}) \rightarrow x(n^{-1})$. Como $\{0,1\}^G$ es Hausdorff y todo $x_i(1) = 1$, entonces $x(1) = 1$, de donde $x \in \Omega_1$. Ahora, para cada $i > i_0$, $x_i(n_i^{-1}) \rightarrow x(n^{-1})$, luego $1 \rightarrow x(n^{-1})$, de modo que $x(n^{-1}) = 1$; en conclusión $x \in D_{n^{-1}}$, es decir, $(n, x) \in G * \Omega_1$, así $G * \Omega_1$ es cerrado. Aplicando el Teorema 3.3.1 se obtiene que $X/\sim_G$ es profinito.

El objetivo ahora es extender el Teorema 2.2.12 al contexto de acciones parciales. Para lograrlo es indispensable la siguiente definición.

Definición 3.3.3. Sea G un grupo. Si $\eta : G * X \longrightarrow X$ es una acción parcial de G sobre un conjunto X , se dice que η es **fiel** si el único elemento que actúa trivialmente es la identidad, esto es, para cada $(g, x) \in G * X$ tal que $\eta(g, x) = x$, entonces $g = 1$.

Ejemplo 3.3.4. Recuerde que en el Ejemplo 3.1.6 se establece una acción parcial α de $\mathbb{Z}$ sobre $X := \mathbb{Z}^+$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n(m) = m + n$, para todo $m \in X$. Una verificación de rutina permite concluir que α es una acción parcial fiel.

Observación 14. Dados un grupo G y una acción parcial fiel $\eta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\eta_g\}_{g \in G})$ de G sobre un conjunto X note que:

- (i) Si η es global y $Y \subseteq X$ es no vacío, entonces la restricción de η al subconjunto Y hereda la fidelidad de η , es decir, la restricción también es fiel.
- (ii) Si $\mu = \{\mu_g : X_G \longrightarrow X_G\}_{g \in G}$ es la globalización de η , entonces μ también es fiel pues si $(g, [h, x]) \in G \times X_G$ tal que $\mu_g([h, x]) = [h, x]$, entonces $(gh, x)R(h, x)$, esto es, $x \in X_{(gh)^{-1}h}$ y $\eta_{h^{-1}(gh)}(x) = x$, pero como η es fiel, entonces $h^{-1}gh = 1$, de donde se deduce que $g = 1$ como se afirmaba.

Teorema 3.3.5. Sea G un grupo finito y discreto. Si $\eta = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\eta_g\}_{g \in G})$ es una acción parcial continua y fiel de G sobre un espacio profinito X de manera que $G * X$ es clopen, entonces φ_G admite al menos una sección continua.

Demostración. Antes de iniciar con la demostración se destacan un par de conclusiones previas: del Teorema 3.3.1 el espacio $X / \sim_G$ resulta ser profinito pues η es fiel, $G * X$ es cerrado y tanto X como G son profinitos; por la Proposición 3.2.9 cada X_g es clopen en X , ya que $G * X$ es clopen por hipótesis. La prueba que se presenta enseguida está basada en los argumentos utilizados para validar el Teorema 2.2.12, en consecuencia se construirá una función $\tilde{\Gamma} : X / \sim_G \longrightarrow X$ que

sea sección continua de la proyección φ_G , para ello será necesario establecer funciones $\tilde{\Gamma}_V$ y subconjuntos $V \subseteq X$ que determinarán a $\tilde{\Gamma}$. Sea $x \in X$. Por un lado la fidelidad de la acción asegura que elementos diferentes de G actúen de manera diferente en X , de hecho, como G es finito, η es fiel y X es T_0 por ser profinito, es posible construir una familia $\{U_g\}_{g \in G^x}$ de subconjuntos clopen en X , disjuntos dos a dos tales que cada $\eta_g(x)$ pertenece al correspondiente U_g . Note que $x \in \eta_g^{-1}(U_g \cap X_g)$ para cada $g \in G^x$, de ello $x \in \bigcap_{g \in G^x} \eta_g^{-1}(U_g \cap X_g)$; asimismo, por continuidad de cada η_g y la finitud de G se sigue que $\bigcap_{g \in G^x} \eta_g^{-1}(U_g \cap X_g)$ es clopen en X , pero como X es compacto, entonces $\bigcap_{g \in G^x} \eta_g^{-1}(U_g \cap X_g)$ también es compacto. Defina $V_x := \bigcap_{g \in G^x} \eta_g^{-1}(U_g \cap X_g)$ y tenga en cuenta la restricción $\varphi_G|_{V_x} : V_x \longrightarrow \varphi_G(V_x)$, que será denotada por φ_{V_x} . De manera análoga a la prueba del Teorema 2.2.12 se puede ver que la función φ_{V_x} es un homeomorfismo, es decir, φ_{V_x} es continua por ser restricción de una función continua, es sobreyectiva por construcción, también es cerrada por la Proposición 1.1.28 y debido a la siguiente anotación se deduce que también es inyectiva: suponga que para algún $g \in G^x$ vale $\eta_g(X_{g^{-1}} \cap V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ y tome $y \in \eta_g(X_{g^{-1}} \cap V_x) \cap V_x$, como $V_x \subseteq \eta_g^{-1}(U_g \cap X_g)$, entonces $\eta_g(X_{g^{-1}} \cap V_x) \subseteq U_g \cap X_g \subseteq U_g$, de ello que $y \in U_g$; además observe que $y \in V_x = \eta_1(V_x) \subseteq U_1$, luego $y \in U_g \cap U_1$, pero U_g y U_1 deben ser disjuntos por construcción, de ello que $g = 1$.

La inversa de φ_{V_x} , que será denotada por $\tilde{\Gamma}_{V_x}$, efectivamente es una sección continua de φ_{V_x} ; además, de la demostración del Lema 9 se sigue la igualdad $\varphi_G^{-1}(\varphi_G(V_x)) = \bigcup_{g \in G^{V_x}} \eta_g(V_x \cap X_{g^{-1}})$, pero como G es finito y cada $\eta_g(V_x \cap X_{g^{-1}})$ es clopen, entonces $\varphi_G(V_x)$ es clopen en $X/\sim_G$. La anterior construcción vale para todo $x \in X$, esto es, para cada $x \in X$ se obtiene un clopen V_x y una sección continua $\tilde{\Gamma}_{V_x}$ de φ_{V_x} tal que $x \in V_x$ y $\varphi_G(V_x)$ es clopen en $X/\sim_G$, por

lo tanto la familia $\{V_x\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto del compacto X luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_m}$ cubren todo X , más aún, como X es profinito, entonces por el Lema 6 se obtienen subconjuntos clopen $E_1 \subseteq V_{x_1}, E_2 \subseteq V_{x_2}, \dots, E_m \subseteq V_{x_m}$ de tal forma que la colección $\{E_i\}_{i=1}^m$ es una partición de X . Del mismo modo que en la prueba del Teorema 2.2.12 la familia $\{\varphi_G(E_1), \varphi_G(E_2), \dots, \varphi_G(E_m)\}$ da lugar a una partición del espacio $X/\sim_G$ y la sección continua $\tilde{\Gamma}$ que se está buscando se define de manera análoga a como se realizó allí, es decir,

$$\tilde{\Gamma} : X/\sim_G \longrightarrow X$$

$$\varphi_G(w) \mapsto \tilde{\Gamma}_{V_{x_k}}(\varphi_G(w)), \text{ si } \varphi_G(w) \in \varphi_G(E_k),$$

está bien definida y es una sección continua de la proyección canónica $\varphi_G : X \longrightarrow X/\sim_G$. Con esto se termina la prueba. $\square$

Sean G un grupo topológico y $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ una acción parcial de G sobre un espacio X . Si H es un subgrupo de G , observe que la acción α induce una acción parcial que se obtiene al considerar exclusivamente elementos de H , tal acción parcial se denominará en este trabajo *la restricción de α al subgrupo H* . Por otro lado, el símbolo “ $\sim_H$ ” representará la relación de órbita generada por la restricción de α a H , la órbita de un elemento $x \in X$ será denotada por $H^x \cdot x$, el espacio de órbitas se escribirá como $X/\sim_H$ y la proyección canónica asociada será simbolizada por $\varphi_H : X \longrightarrow X/\sim_H$; además, si considera la globalización $\{\beta_g : X_G \longrightarrow X_G\}_{g \in G}$ de α , entonces la proyección canónica de X_G a X_G/H se indicará con el símbolo $\tilde{\varphi}_H$. El siguiente lema será utilizado para demostrar el Teorema 3.3.6.

Lema 10. Considere una acción parcial continua $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ de un grupo topológico G sobre un espacio X y $\{\beta_g : X_G \longrightarrow X_G\}_{g \in G}$ la globalización de α . Si H es un subgrupo de G defina

$$\varphi : (X / \sim_H) \longrightarrow (X_G / H)$$

$$H^x \cdot x \longmapsto \varphi(H^x \cdot x) := H \cdot [1, x].$$

Entonces φ es una función inyectiva, continua y abierta.

Demostración. En primer lugar se verificará que φ define una función. Sean $H^x \cdot x, H^y \cdot y \in X / \sim_H$ tales que $H^x \cdot x = H^y \cdot y$, es decir, existe $h \in H^x$ que verifica $\alpha_h(x) = y$. De acuerdo a la relación “ R ” definida en (21) se sigue que $(h, x)R(1, y)$, esto es, $[h, x] = [1, y]$; sin embargo $\beta_h([1, x]) = [h, x]$, por lo tanto $[1, x] \sim_H [1, y]$ y con ello $H \cdot [1, x] = H \cdot [1, y]$, de este modo φ define una función. Ahora se comprobará que φ es inyectiva, para esto tome $H^x \cdot x, H^y \cdot y \in X / \sim_H$ tales que $\varphi(H^x \cdot x) = \varphi(H^y \cdot y)$, luego $[1, x] \sim_H [1, y]$ y de ello existe $h \in H^x$ verificando entre otras cosas la igualdad $\alpha_h(x) = y$, en consecuencia $x \sim_H y$, esto es $H^x \cdot x = H^y \cdot y$, de manera que φ es inyectiva.

Para probar que φ es continua y abierta considere el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_G & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_H} & (X_G / H) \\ \uparrow \iota & & \uparrow \varphi \\ X & \xrightarrow{\varphi_H} & (X / \sim_H), \end{array}$$

donde ι es la función continua y abierta definida en (23), que asigna a cada $x \in X$ la clase $\iota(x) = [1, x]$. Dado $x \in X$ note lo siguiente

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_H \circ \iota)(x) &= \tilde{\varphi}_H([1, x]) \\ &= H \cdot [1, x] \\ &= \varphi(H^x \cdot x) \\ &= \varphi(\varphi_H(x)) \\ &= (\varphi \circ \varphi_H)(x), \end{aligned}$$

de lo anterior se sigue que $\tilde{\varphi}_H \circ \iota = \varphi \circ \varphi_H$ y como $\tilde{\varphi}_H \circ \iota$ es continua, entonces $\varphi \circ \varphi_H$ también lo es, luego, por la Proposición 1.1.56, φ es continua. Por último se probará que para todo $W \subseteq X / \sim_H$ no vacío se cumple la igualdad $\varphi(W) = \tilde{\varphi}_H(\iota(\varphi_H^{-1}(W)))$. Si $H \cdot [g, x] \in \tilde{\varphi}_H(\iota(\varphi_H^{-1}(W)))$, entonces existe $w \in \varphi_H^{-1}(W)$ tal que

$$\begin{aligned} H \cdot [g, x] &= \tilde{\varphi}_H(\iota(w)) \\ &= \tilde{\varphi}_H([1, w]) \\ &= H \cdot [1, w] \\ &= \varphi(H^w \cdot w) \in \varphi(W), \end{aligned}$$

por otro lado, si $H \cdot [g, x] \in \varphi(W)$, entonces existe $H^w \cdot w \in W$ tal que $H \cdot [1, w] = H \cdot [g, x]$, pero $H \cdot [1, w] = \tilde{\varphi}_H([1, w]) = \tilde{\varphi}_H(\iota(w)) \in \tilde{\varphi}_H(\iota(\varphi_H^{-1}(W)))$, de modo que $\varphi(W) = \tilde{\varphi}_H(\iota(\varphi_H^{-1}(W)))$;

en particular, debido a la continuidad de φ_H y al hecho de que $\tilde{\varphi}_H$ y ι son abiertas, si W es abierto, entonces $\varphi(W)$ es abierto y de esta forma se concluye que φ es abierta. $\square$

Observación 15. Tome un grupo topológico G y una acción parcial $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ de G sobre un espacio X . Si $H \trianglelefteq G$ y $\beta = \{\beta_g : X_G \longrightarrow X_G\}_{g \in G}$ es la globalización de α , entonces con el propósito de facilitar la lectura del Teorema 3.3.6, atienda a las siguientes consideraciones

(i) Defina

$$\begin{aligned} \tilde{g}_H : G \times X_G &\longrightarrow (G/H) \times (X_G/H) \\ (g, [t, x]) &\longmapsto (gH, H \cdot [t, x]). \end{aligned}$$

Si $(g_1, [t_1, x_1]) = (g_2, [t_2, x_2]) \in G \times X_G$, entonces $g_1H = g_2H$ y $H \cdot [t_1, x_1] = H \cdot [t_2, x_2]$, de ello que $\tilde{g}_H(g_1, [t_1, x_1]) = (g_1H, H \cdot [t_1, x_1]) = (g_2H, H \cdot [t_2, x_2]) = \tilde{g}_H(g_2, [t_2, x_2])$, así $\tilde{g}_H$ es una función bien definida.

(ii) Suponga que α es continua y fiel, luego β es continua y fiel. Note que β induce una acción global continua y fiel $\beta_{G/H} = \{\beta_{gH} : (X_G/H) \longrightarrow (X_G/H)\}_{gH \in G/H}$ de G/H sobre X_G/H , donde para cada $(gH, H \cdot [t, x]) \in (G/H) \times (X_G/H)$ se define

$$\beta_{G/H}(gH, H \cdot [t, x]) = \beta_{gH}(H \cdot [t, x]) := H \cdot \beta_g([t, x]) = H \cdot [gt, x].$$

En efecto, primero considere $(gH, H \cdot [t, x]) = (g'H, H \cdot [t', x']) \in (G/H) \times (X_G/H)$, de ello

que $g'g^{-1} \in H$ y existe $h \in H$ verificando

$$\beta_h([t, x]) = [t', x'], \quad (27)$$

pero como H es distinguido, existe $\tilde{h} \in H$ tal que $h = g^{-1}\tilde{h}g$. Aplicando $\beta_{g'}$ en (27) se llega a $[gt, x] \sim_H [g't', x']$, por lo tanto $\beta_{G/H}(gH, H \cdot [t, x]) = \beta_{G/H}(g'H, H \cdot [t', x'])$, así $\beta_{G/H}$ es una función. Por otro lado, si $H \cdot [h, x] \in X_G/H$ y $gH, tH \in G/H$, entonces

$$\beta_H(H \cdot [h, x]) = H \cdot \beta_1([h, x]) = H \cdot [h, x],$$

luego $\beta_H = id_{X_G/H}$; además

$$\begin{aligned} \beta_{gtH}(H \cdot [h, x]) &= H \cdot \beta_{gt}([h, x]) \\ &= H \cdot \beta_g(\beta_t([h, x])) \\ &= \beta_{gH}(H \cdot \beta_t([h, x])) \\ &= \beta_{gH}(\beta_{tH}(H \cdot [h, x])) \\ &= (\beta_{gH} \circ \beta_{tH})(H \cdot [h, x]), \end{aligned}$$

de ello que $\beta_{gtH} = \beta_{gH} \circ \beta_{tH}$, así $\beta_{G/H}$ es una acción global. Para verificar la fidelidad de la acción tome $gH \in G/H$ y $H \cdot [h, x] \in X_G/H$ tales que $\beta_{gH}(H \cdot [h, x]) = H \cdot [h, x]$, entonces $H \cdot [gh, x] = H \cdot [h, x]$, por lo tanto existe $m \in H$ que satisface $[mgh, x] = [h, x]$ y esto último implica que $\alpha_{h^{-1}mgh}(x) = x$, pero como α es fiel, entonces $h^{-1}mgh = 1$, de donde $g \in H$;

así $gH = H$ como se buscaba. Resta ver que $\beta_{G/H}$ es continua, para ello se procederá de forma análoga a la demostración del Teorema 2.2.13, donde se construye una acción global continua y fiel Φ . Considere la función $\tilde{g}_H$ definida en el ítem (i) de esta observación y percate que para cada $(g, [t, x]) \in G \times X_G$ vale

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_H \circ \beta)(g, [t, x]) &= \tilde{\varphi}_H([gt, x]) \\ &= H \cdot [gt, x] \\ &= \beta_{G/H}(gH, H \cdot [t, x]) \\ &= \beta_{G/H}(\tilde{g}_H(g, [t, x])) \\ &= (\beta_{G/H} \circ \tilde{g}_H)(g, [t, x]), \end{aligned}$$

luego $\tilde{\varphi}_H \circ \beta = \beta_{G/H} \circ \tilde{g}_H$. Ahora, dados $(gH, H \cdot [t, x]) \in (G/H) \times (X_G/H)$ y $A \subseteq X_G/H$ un abierto no vacío tal que $H \cdot [gt, x] \in A$, por continuidad de las funciones $\tilde{\varphi}_H$ y β se obtienen abiertos $X_1, X_2 \subseteq X_G$ y $D \subseteq G$ verificando que $[gt, x] \in X_1, (g, [t, x]) \in D \times X_2, \tilde{\varphi}_H(X_1) \subseteq A$ y $\beta(D \times X_2) \subseteq X_1$. Si define $\tilde{C} := \tilde{g}_H(D \times X_2)$, es posible probar de forma análoga a lo establecido en el Teorema 2.2.13 que $\tilde{C} = q_H(D) \times \tilde{\varphi}_H(X_2)$, donde q_H es la proyección canónica que asigna a cada $t \in G$ su respectiva clase lateral $tH \in G/H$. Como q_H y $\tilde{\varphi}_H$ son abiertas, entonces $\tilde{C}$ es abierto y $(gH, H \cdot [t, x]) \in \tilde{C}$. Finalmente note que

$$\beta_{G/H}(\tilde{C}) = \tilde{\varphi}_H(\beta(D \times X_2)) \subseteq \tilde{\varphi}_H(X_1) \subseteq A,$$

por lo tanto $\beta_{G/H}$ es continua. De este modo se ha conseguido una acción continua y fiel de G/H sobre X_G/H .

El siguiente resultado extiende al contexto de acciones parciales el Teorema 2.2.13 y es uno de los resultados principales de esta sección

Teorema 3.3.6. Sea $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ una acción parcial continua y fiel de un grupo profinito G sobre un espacio profinito X . Si $H \trianglelefteq_c G$, entonces existe una acción parcial continua y fiel $\alpha_{G/H} = (\{(X/\sim_H)_{gH}\}_{gH \in G/H}, \{\alpha_{gH}\}_{gH \in G/H})$ del grupo profinito G/H sobre el espacio $X/\sim_H$, y $X/\sim_H / \sim_{G/H}$ es homeomorfo a $X/\sim_G$.

Demostración. Para construir una acción parcial continua y fiel de G/H sobre $X/\sim_H$ primero considere la globalización $\beta = \{\beta_g : X_G \longrightarrow X_G\}_{g \in G}$ de α y recuerde que en el ítem (ii) de la Observación 15 β induce una acción global continua y fiel $\beta_{G/H}$, de G/H sobre X_G/H , donde para cada $(gH, H \cdot [t, x]) \in (G/H) \times (X_G/H)$ se define $\beta_{G/H}(gH, H \cdot [t, x]) := \beta_{gH}(H \cdot [t, x]) := H \cdot [gt, x]$. Ahora contemple el conjunto $\varphi(X/\sim_H) \subseteq X_G/H$, donde φ es la función continua, inyectiva y abierta definida en el Lema 10. Note que $\beta_{G/H}$ induce vía restricción una acción parcial continua y fiel $\alpha'_{G/H} = (\{X_{gH}\}_{gH \in G/H}, \{\alpha'_{gH}\}_{gH \in G/H})$ de G/H sobre $\varphi(X/\sim_H)$, donde para cada $gH \in G/H$ se establece $X_{gH} := \varphi(X/\sim_H) \cap \beta_{gH}(\varphi(X/\sim_H))$ y $\alpha'_{gH} := \beta_{gH}|_{X_{gH}^{-1}}$. Observe que $\varphi^{-1}(X_{gH}) \subseteq X/\sim_H$ para todo X_{gH} , de ello se define para cada $gH \in G/H$

$$\alpha_{gH} : (X/\sim_H)_{g^{-1}H} \longrightarrow (X/\sim_H)_{gH}$$

$$H^v \cdot v \longmapsto \alpha_{gH}(H^v \cdot v) := \varphi^{-1}(\alpha'_{gH}(\varphi(H^v \cdot v))),$$

donde $(X/\sim_H)_{gH} := \varphi^{-1}(X_{gH})$. Se sigue por construcción y por la buena definición de φ y cada β_{gH} que α_{gH} es una función bien definida para todo $gH \in G/H$. Se afirma que la colección de subconjuntos $\{(X/\sim_H)_{gH}\}_{gH \in G/H}$ junto con la familia de funciones $\{\alpha_{gH}\}_{gH \in G/H}$ establecen una acción parcial continua y fiel $\alpha_{G/H}$, de G/H sobre $X/\sim_H$; en efecto, pues si $H^v \cdot v \in (X/\sim_H)_H$ por un lado se obtiene $\alpha_H(H^v \cdot v) = \varphi^{-1}(\alpha'_H(\varphi(H^v \cdot v))) = \varphi^{-1}(\varphi(H^v \cdot v)) = H^v \cdot v$, además

$$(X/\sim_H)_H = \varphi^{-1}(X_H) = \varphi^{-1}(\varphi(X/\sim_H)) = X/\sim_H,$$

luego $\alpha_H = id_{X/\sim_H}$; por otro lado, dados $gH, tH \in G/H$ y $H^v \cdot v \in (X/\sim_H)_{t^{-1}H} \cap (X/\sim_H)_{(gt)^{-1}H}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_{gH}(\alpha_{tH}(H^v \cdot v)) &= \alpha_{gH}(\varphi^{-1}(\alpha'_{tH}(\varphi(H^v \cdot v)))) \\ &= \varphi^{-1}(\alpha'_{gH}(\varphi(\varphi^{-1}(\alpha'_{tH}(\varphi(H^v \cdot v)))))) \\ &= \varphi^{-1}(\alpha'_{gtH}(\varphi(H^v \cdot v))) \\ &= \alpha_{gtH}(H^v \cdot v), \end{aligned}$$

en consecuencia $\alpha_{G/H} := (\{(X/\sim_H)_{gH}\}_{gH \in G/H}, \{\alpha_{gH}\}_{gH \in G/H})$ es una acción parcial de G/H sobre $X/\sim_H$. La fidelidad de $\alpha_{G/H}$ se hereda de $\alpha'_{G/H}$, por tanto resta ver que $\alpha_{G/H}$ es continua. Sean $(gH, H^x \cdot x) \in (G/H) * (X/\sim_H)$ y $A \subseteq X/\sim_H$ un abierto tal que $\alpha_{G/H}(gH, H^x \cdot x) \in A$, es decir, $\varphi^{-1}(\alpha'_{gH}(\varphi(H^x \cdot x))) \in A \subseteq X/\sim_H$, de ello que $\alpha'_{gH}(\varphi(H^x \cdot x)) \in \varphi(A) \subseteq \varphi(X/\sim_H)$. Como α'_{gH} es continua existen abiertos $D \subseteq G/H$ y $C \subseteq \varphi(X/\sim_H)$ tales que $(gH, \varphi(H^x \cdot x)) \in D * C$ y $\alpha'_{gH}(D * C) \subseteq \varphi(A)$. Defina $W := D * (\varphi^{-1}(C))$ y note que además de ser W un abierto

de $(G/H) * (X/\sim_H)$, también vale que $(gH, H^x \cdot x) \in W$. El siguiente paso es demostrar que $\alpha_{G/H}(W) = \varphi^{-1}(\alpha'_{G/H}(D * C))$, para esto tome $H^x \cdot x \in \alpha_{G/H}(W)$, en virtud de ello existe $(gH, H^w \cdot w) \in W$ tal que $H^x \cdot x = \varphi^{-1}(\alpha'_{gH}(\varphi(H^w \cdot w)))$ de donde se sigue inmediatamente que $(gH, \varphi(H^w \cdot w)) \in D * C$, por lo tanto

$$\alpha'_{G/H}(gH, \varphi(H^w \cdot w)) = \alpha'_{gH}(\varphi(H^w \cdot w)) \in \alpha'_{G/H}(D * C),$$

luego $H^x \cdot x = \varphi^{-1}(\alpha'_{gH}(\varphi(H^w \cdot w))) \in \varphi^{-1}(\alpha'_{G/H}(D * C))$. Recíprocamente, dado un punto $H^x \cdot x \in \varphi^{-1}(\alpha'_{G/H}(D * C))$ sucede que $\varphi(H^x \cdot x) \in \alpha'_{gH}(D * C)$, en consecuencia existe un elemento $(gH, \varphi(H^w \cdot w)) \in D * C$ tal que $\varphi(H^x \cdot x) = \alpha'_{gH}(\varphi(H^w \cdot w))$; aplicando φ^{-1} a $\varphi(H^x \cdot x)$ obtendrá como resultado $H^x \cdot x = \varphi^{-1}(\alpha'_{gH}(\varphi(H^w \cdot w))) = \alpha_{gH}(H^w \cdot w) \in \alpha_{G/H}(W)$, por consiguiente $\alpha_{G/H}(W) = \varphi^{-1}(\alpha'_{G/H}(D * C))$. En resumen se encontró un abierto $W \subseteq (G/H) * (X/\sim_H)$ de modo que $(gH, H^x \cdot x) \in W$ y $\alpha_{G/H}(W) = \varphi^{-1}(\alpha'_{G/H}(D * C))$, además percate que

$$\varphi^{-1}(\alpha'_{G/H}(D * C)) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A)) = A;$$

en conclusión $\alpha_{G/H}(W) = \varphi^{-1}(\alpha'_{G/H}(D * C)) \subseteq A$ y de esta manera $\alpha_{G/H}$ es en efecto una acción parcial continua y fiel de G/H sobre $X/\sim_H$.

Sean $\tilde{G} := (G/H)$, $\tilde{T} := (X/\sim_H)$ y $\varphi_H : X \longrightarrow \tilde{T}$ la proyección canónica. A partir de ahora serán tomadas como referencia las ideas aplicadas en el Teorema 2.2.13 para construir un homeomorfismo entre $\tilde{T}/\sim_{\tilde{G}}$ y $X/\sim_G$, donde “ $\sim_{\tilde{G}}$ ” representa la relación de órbita generada por la acción $\alpha_{G/H}$ sobre $\tilde{T}$, $\tilde{T}/\sim_{\tilde{G}}$ es el espacio de órbitas asociado y $\varphi_{\tilde{G}}$ la proyección canónica que relaciona cada $H^x \cdot x = \varphi_H(x) \in \tilde{T}$ con su respectiva órbita $\varphi_{\tilde{G}}(\varphi_H(x)) \in \tilde{T}/\sim_{\tilde{G}}$. Defina

$\Psi : \tilde{T} / \sim_{\tilde{G}} \longrightarrow X / \sim_G$ de tal manera que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_H} & \tilde{T} \\ \varphi_G \downarrow & & \downarrow \varphi_{\tilde{G}} \\ (X / \sim_G) & \xleftarrow{\Psi} & (\tilde{T} / \sim_{\tilde{G}}), \end{array}$$

es decir, si $\varphi_H(x) \in \tilde{T}$, para algún $x \in X$, entonces $\Psi(\varphi_{\tilde{G}}(\varphi_H(x))) = \varphi_G(x)$. Suponga ahora que $x, y \in X$ tales que $\varphi_{\tilde{G}}(\varphi_H(x)) = \varphi_{\tilde{G}}(\varphi_H(y))$, esto es, existe $gH \in \tilde{G}$ que verifica la igualdad

$$\varphi^{-1}(\alpha'_{gH}(\varphi(\varphi_H(x)))) = \alpha_{gH}(\varphi_H(x)) = \varphi_H(y),$$

o de manera equivalente $H \cdot [g, x] = \alpha'_{gH}(H \cdot [1, x]) = H \cdot [1, y]$, de ello que exista $h \in H$ que satisface $[hg, x] = [1, y]$ y esta última igualdad se traduce en que $\alpha_{hg}(x) = y$, es decir, $x \sim_G y$, de donde se concluye que $\varphi_G(x) = \varphi_G(y)$ y con esto Ψ define una función, que entre otras cosas, si observa el anterior diagrama y recuerda que las funciones φ_H, φ_G y $\varphi_{\tilde{G}}$ son continuas y abiertas, se percibirá al instante que Ψ es sobreyectiva y continua; de hecho, si $W \subseteq \tilde{T} / \sim_{\tilde{G}}$ es abierto, entonces $U := \varphi_H^{-1}(\varphi_{\tilde{G}}^{-1}(W))$ es un abierto de X que verifica $W = \varphi_{\tilde{G}}(\varphi_H(U))$, de ello que $\Psi(W) = \Psi(\varphi_{\tilde{G}}(\varphi_H(U))) = \varphi_G(U)$, en consecuencia Ψ es una función abierta. Para finalizar tome $x, y \in X$ tales que $\varphi_G(x) = \varphi_G(y)$, es decir, existe $g \in G^x$ que satisface la igualdad $\alpha_g(x) = y$, lo que indica que $(g, x)R(1, y)$, donde “ R ” es la relación definida en (21), por tanto $[g, x] = [1, y]$, de ello se da

la igualdad $H \cdot [g, x] = H \cdot [1, y]$, además

$$\begin{aligned} \alpha'_{gH}(\varphi(H^x \cdot x)) &= \alpha'_{gH}(H \cdot [1, x]) \\ &= H \cdot [g, x] \\ &= H \cdot [1, y] \\ &= \varphi(\varphi_H(y)). \end{aligned}$$

Aplicando φ^{-1} en la anterior igualdad se concluye que $\alpha_{gH}(\varphi_H(x)) = \varphi_H(y)$, en consecuencia $\varphi_{\tilde{G}}(\varphi_H(x)) = \varphi_{\tilde{G}}(\varphi_H(y))$ y con esto Ψ es una biyección continua y abierta, por consiguiente $\tilde{T}/\sim_{\tilde{G}}$ y $X/\sim_G$ son homeomorfos como se buscaba.

□

La siguiente observación servirá de apoyo para demostrar el Teorema 3.3.7.

Observación 16. Sean G un grupo topológico y $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ una acción parcial de G sobre un espacio topológico X , entonces:

i) Suponga que α es continua y fiel. Si $H \leq G$, entonces la restricción de α a H hereda la continuidad y fidelidad de α .

ii) Análogamente al ítem ii) de la Observación 10, si H_1 y H_2 son subgrupos de G tales que $H_1 \leq H_2$, se define la función $\varphi_{H_1, H_2} : X/\sim_{H_1} \longrightarrow X/\sim_{H_2}$ de manera que

$$\varphi_{H_1, H_2} \circ \varphi_{H_1} = \varphi_{H_2},$$

donde φ_{H_1} y φ_{H_2} son, respectivamente, las proyecciones de X a los espacios $X/\sim_{H_1}$ y $X/\sim_{H_2}$. Se sigue de la Proposición 1.1.56 que φ_{H_1, H_2} es continua. Por otro lado, si H_1 es igual a H_2 , entonces $\varphi_{H_1, H_1} = id_{X/\sim_{H_1}}$. Cuando H_1 es trivial se obtiene $\varphi_{H_1, H_2} = \varphi_{H_2}$; más aún, dado un subgrupo H_0 de G que satisface $H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2$, percate que para cada $\varphi_{H_0}(x) \in X/\sim_{H_0}$ se verifica

$$\begin{aligned} \varphi_{H_1, H_2}(\varphi_{H_0, H_1}(\varphi_{H_0}(x))) &= \varphi_{H_1, H_2}(\varphi_{H_1}(x)) \\ &= \varphi_{H_2}(x) \\ &= \varphi_{H_0, H_2}(\varphi_{H_0}(x)), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\varphi_{H_0, H_2} = \varphi_{H_1, H_2} \circ \varphi_{H_0, H_1}. \quad (28)$$

iii) Considere el conjunto

$$\tilde{\Gamma} := \{(N, s) : N \trianglelefteq_c G \text{ y } s : X/\sim_G \longrightarrow X/\sim_N \text{ es una sección continua de } \varphi_{N, G}\}.$$

Si define sobre $\tilde{\Gamma}$ la relación “ $\leq$ ” establecida en (10), percate que una adecuada adaptación del argumento planteado en el numeral iv), de la Observación 10 permite deducir que $(\tilde{\Gamma}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

iv) Dado $N \trianglelefteq G$ defina $\tilde{G} := G/N$ y $\tilde{T} := X/\sim_N$. Suponga además que α es continua y que la función $t : \tilde{T}/\sim_{\tilde{G}} \longrightarrow \tilde{T}$ es una sección continua de la proyección $\varphi_{\tilde{G}} : \tilde{T} \longrightarrow \tilde{T}/\sim_{\tilde{G}}$

, donde el espacio $\tilde{T}/\sim_{\tilde{G}}$ es generado por la acción $\alpha_{\tilde{G}}$ construida en el Teorema 3.3.6.

Adicionalmente tenga en cuenta el homeomorfismo $\Psi : \tilde{T}/\sim_{\tilde{G}} \longrightarrow X/\sim_G$ construido en

dicho teorema, que asigna a cada $\varphi_{\tilde{G}}(\varphi_N(x)) \in \tilde{T}/\sim_{\tilde{G}}$ su respectivo elemento

$$\Psi(\varphi_{\tilde{G}}(\varphi_N(x))) := \varphi_G(x). \quad (29)$$

La función $\beta := t \circ \Psi^{-1}$ es continua por construcción. Se afirma que β es una sección de $\varphi_{N,G}$

pues, para cualquier $\varphi_G(x) \in X/\sim_G$ note primero que $t \circ \Psi^{-1}(\varphi_G(x)) \stackrel{(29)}{=} t \circ \varphi_{\tilde{G}}(\varphi_N(x))$.

Defina ahora para $x_1 \in X$

$$t \circ \varphi_{\tilde{G}}(\varphi_N(x)) := \varphi_N(x_1), \quad (30)$$

luego $\varphi_{\tilde{G}}(\varphi_N(x)) = \varphi_{\tilde{G}}(\varphi_N(x_1))$. Como Ψ está bien definida, entonces

$$\varphi_G(x) = \varphi_G(x_1). \quad (31)$$

Todo lo anterior permite afirmar que

$$(\varphi_{N,G} \circ \beta)(\varphi_G(x)) = \varphi_{N,G}(t \circ \Psi^{-1}(\varphi_G(x))) \stackrel{(30)}{=} \varphi_{N,G}(\varphi_N(x_1)) = \varphi_G(x_1) \stackrel{(31)}{=} \varphi_G(x),$$

de modo que β es una sección continua de $\varphi_{N,G}$.

Teorema 3.3.7. Dados un grupo profinito G y una acción parcial $\alpha = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$, de G sobre un espacio profinito X de manera que α es continua, fiel y $G * X$ es clopen, entonces $\varphi_G : X \longrightarrow X/\sim_G$ admite por lo menos una sección continua.

Demostración. Para demostrar la existencia de una sección continua para φ_G se procederá de forma análoga a la prueba del Teorema 2.2.14, para ello considere el conjunto ordenado $(\tilde{\Gamma}, \leq)$ definido en el numeral *iii*) de la Observación 16 y tome un subconjunto totalmente ordenado de $\tilde{\Gamma}$, por ejemplo $\mathcal{A} = \{(T_i, s_i) : i \in I\}$. Se construirá una cota superior para $\mathcal{A}$ por medio de un límite inverso, en ese sentido, el apartado *ii*) de la Observación 16 garantiza que la colección de espacios topológicos $\{X/\sim_{T_i} : (T_i, s_i) \in \mathcal{A}\}$ acompañado de la familia de funciones continuas $\{\varphi_{T_i, T_j} : (T_i, s_i), (T_j, s_j) \in \mathcal{A} \text{ y } (T_j, s_j) \leq (T_i, s_i)\}$ conforman un sistema inverso que será denotado por $\mathcal{W}$. Sea $\varprojlim X/\sim_{T_i}$ el límite inverso de $\mathcal{W}$ y $\{\pi_i : \varprojlim X/\sim_{T_i} \longrightarrow X/\sim_{T_i}\}_{(T_i, s_i) \in \mathcal{A}}$ el conjunto de proyecciones. Defina el cerrado $T := \bigcap_{i \in I} T_i$ y note que $\varprojlim X/\sim_{T_i}$ es homeomorfo a $X/\sim_T$ ya que si considera la colección $\{\varphi_{T_i} : X \longrightarrow X/\sim_{T_i}\}_{(T_i, s_i) \in \mathcal{A}}$, automáticamente ella es compatible con $\mathcal{W}$, entonces, por la Propiedad Universal del Límite Inverso existe una única función continua $\hat{q} : X \longrightarrow \varprojlim X/\sim_{T_i}$ de modo que $\pi_i \circ \hat{q} = \varphi_{T_i}$, para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$; más aún, se sigue de la Proposición 1.3.18 que $\hat{q}(X)$ es denso en $\varprojlim X/\sim_{T_i}$. Por otro lado el subgrupo T y el espacio $X/\sim_T$ son profinitos debido a la Proposición 2.1.14 y el Teorema 2.2.6, respectivamente. Del mismo modo ocurre con cada T_i y $X/\sim_{T_i}$, en consecuencia $\varprojlim X/\sim_{T_i}$ es Hausdorff. Observe que $\hat{q}(X)$ es cerrado en $\varprojlim X/\sim_{T_i}$, luego $\hat{q}(X) = \varprojlim X/\sim_{T_i}$, es decir, $\hat{q}$ es sobreyectiva. Por otra parte note que $\hat{q}$ induce la función continua, sobreyectiva y cerrada

$$\begin{aligned} \hat{q} : X/\sim_T &\longrightarrow \varprojlim X/\sim_{T_i} \\ \varphi_T(x) &\longmapsto \hat{q}(\varphi_T(x)) := \hat{q}(x). \end{aligned}$$

Ahora, si $\varphi_T(x_1), \varphi_T(x_2) \in X/\sim_T$ tales que $\hat{q}(x_1) = \hat{q}(x_2)$, observe que para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$ vale la igualdad $\varphi_{T_i}(x_1) = \varphi_{T_i}(x_2)$, luego, para todo par $(T_i, s_i), (T_j, s_j) \in \mathcal{A}$, existen $t_i \in T_i^{x_1}$ y $t_j \in T_j^{x_1}$ que satisfacen $\alpha_{t_i}(x_1) = x_2 = \alpha_{t_j}(x_1)$ y debido a la fidelidad de α se obtiene que $t_i = t_j$, en conclusión, el conjunto

$$\{t_i : t_i \in T_i^{x_1} \text{ y } \alpha_{t_i}(x_1) = x_2, \text{ para algún } (T_i, s_i) \in \mathcal{A}\},$$

contiene un único elemento, esto es, existe $t \in G$ de manera que $t = t_i$, para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$, de ello que $t \in T^{x_1}$ y $\alpha_t(x_1) = x_2$, por lo tanto $\varphi_T(x_1) = \varphi_T(x_2)$ y así $\hat{q}$ es inyectiva, en suma un homeomorfismo como se quería probar.

Con el objetivo de construir una función continua $r : X/\sim_G \longrightarrow X/\sim_T$ de modo que $(T, r) \in \tilde{\Gamma}$, considere la familia $\mathcal{S} := \{s_i : X/\sim_G \longrightarrow X/\sim_{T_i}\}_{(T_i, s_i) \in \mathcal{A}}$. Recuerde que para cada par $(T_i, s_i), (T_j, s_j) \in \mathcal{A}$ tales que $(T_i, s_i) \leq (T_j, s_j)$, entonces $s_i = \varphi_{T_j, T_i} \circ s_j$, en consecuencia $\mathcal{S}$ es compatible con $\mathcal{W}$, más aún, para todo $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$, s_i es por definición una sección continua de $\varphi_{T_i, G}$, es decir,

$$\varphi_{T_i, G} \circ s_i = id_{X/\sim_G}. \quad (32)$$

Aplicando nuevamente la Propiedad Universal del Límite Inverso se obtiene una única función continua $s : X/\sim_G \longrightarrow \varprojlim X/\sim_{T_i}$ que satisface para cada $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$ la igualdad $\pi_i \circ s = s_i$. Por definición, la función $r := \hat{q}^{-1} \circ s$ es continua. Para demostrar que $\varphi_{T, G} \circ r = id_{X/\sim_G}$ tome $\varphi_G(x) \in X/\sim_G$ y defina $r(\varphi_G(x)) := \varphi_T(\hat{x})$, para algún $\hat{x} \in X$, es decir, $\hat{q}^{-1} \circ s(\varphi_G(x)) = \varphi_T(\hat{x})$, luego

$$s(\varphi_G(x)) = \hat{q}(\varphi_T(\hat{x})) = \hat{q}(\hat{x}), \quad (33)$$

por lo tanto, si $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$, entonces

$$s_i(\varphi_G(x)) = \pi_i \circ s(\varphi_G(x)) \stackrel{(33)}{=} \pi_i \circ \hat{q}(\hat{x}) = \varphi_{T_i}(\hat{x}). \quad (34)$$

Aplicando $\varphi_{T_i, G}$ en (34) se concluye

$$\varphi_G(x) \stackrel{(32)}{=} \varphi_{T_i, G} \circ (s_i(\varphi_G(x))) \stackrel{(34)}{=} \varphi_{T_i, G} \circ \varphi_{T_i}(\hat{x}) = \varphi_G(\hat{x}). \quad (35)$$

Se sigue de lo anterior que

$$\begin{aligned} (\varphi_{T, G} \circ r)(\varphi_G(x)) &= (\varphi_{T, G} \circ (\hat{q}^{-1} \circ s))(\varphi_G(x)) \\ &= \varphi_{T, G}(\hat{q}^{-1}(s(\varphi_G(x)))) \\ &\stackrel{(33)}{=} \varphi_{T, G}(\hat{q}^{-1}(\hat{q}(\varphi_T(\hat{x})))) \\ &= \varphi_{T, G}(\varphi_T(\hat{x})) \\ &= \varphi_G(\hat{x}) \\ &\stackrel{(35)}{=} \varphi_G(x), \end{aligned}$$

de manera que $\varphi_{T, G} \circ r = id_{X/\sim_G}$, por consiguiente r es una sección continua de $\varphi_{T, G}$ y con ello

$(T, r) \in \tilde{\Gamma}$. Note que si $(T_i, s_i) \in \mathcal{A}$, entonces

$$\varphi_{T, T_i}(r(\varphi_G(x))) = \varphi_{T, T_i}(\varphi_T(\hat{x})) = \varphi_{T_i}(\hat{x}) \stackrel{(34)}{=} s_i(\varphi_G(x)),$$

luego $(T_i, s_i) \leq (T, r)$ y en consecuencia $\mathcal{A}$ es acotado superiormente. Del Lema de Zorn se sigue que $\tilde{\Gamma}$ admite elemento maximal, digamos $(M, g) \in \Gamma$. Para concluir la prueba se verificará que $M = \{1\}$ vía el Lema 7. Suponga que N es un subgrupo abierto de M tal que $N \trianglelefteq G$. Recuerde que M es profinito por ser cerrado en G , luego, la Proposición 1.2.7 asegura que N es cerrado en M y M/N es finito; de hecho M/N es profinito. Como la restricción de α a M es continua y fiel, entonces del Teorema 3.3.6 se obtiene que M/N actúa de manera continua y fiel sobre el espacio profinito $X/\sim_N$ y $\Psi : (X/\sim_N)/\sim_{M/N} \longrightarrow X/\sim_M$ es un homeomorfismo; más aún, como M/N es profinito y finito se obtiene del Teorema 3.3.5 una sección continua $t : (X/\sim_N)/\sim_{M/N} \longrightarrow X/\sim_N$ de la proyección $\psi_{(M/N)} : X/\sim_N \longrightarrow (X/\sim_N)/\sim_{M/N}$. Por otro lado, gracias a lo establecido en el apartado *iv*) de la Observación 16, la función $t \circ \Psi^{-1}$ es una sección continua de $\varphi_{N,M}$, además, $\beta := t \circ \Psi^{-1} \circ g$ es continua y satisface la equivalencia

$$\varphi_{N,G} \circ \beta \stackrel{(28)}{=} (\varphi_{M,G} \circ \varphi_{N,M}) \circ (t \circ \Psi^{-1} \circ g) = \varphi_{M,G} \circ (\varphi_{N,M} \circ t \circ \Psi^{-1}) \circ g = \varphi_{M,G} \circ g = id_{X/\sim_G},$$

en consecuencia β es una sección continua de $\varphi_{N,G}$, luego $(N, \beta) \in \tilde{\Gamma}$; adicionalmente observe que $\varphi_{N,M} \circ \beta = g$, de manera que $(M, g) \leq (N, \beta)$, pero esto contradice la maximalidad de (M, g) , por lo tanto M no contiene subgrupos abiertos que sean distinguidos en G . Aplicando el Lema 7 se concluye que $M = \{1\}$, de ello $X/\sim_M = X$ y $g : X/\sim_G \longrightarrow X$ es una sección continua de la función $\varphi_{\{1\},G} = \varphi_G$ como se quería probar. $\square$

Ejemplo 3.3.8. Sean G un grupo discreto, el producto $X = \{0, 1\}^G$ y $\Omega_1 = \{x \in X : x(1_G) = 1\}$. Se sabe de antemano que la acción parcial de Bernoulli β de G sobre Ω_1 es continua y $G * \Omega_1$

es cerrado. Sea $g \in G$ tal que $\beta(g, (x_h)_{h \in G}) = (x_h)_{h \in G}$, para todo $(x_h)_{h \in G} \in \Omega_1$, entonces, para cada $h \in G$, $x_h = x_{g^{-1}h}$, pero esto solo es posible si $g = 1$ pues, si $g \neq 1$ y $(x_h)_{h \in G} \in \Omega_1$ tal que $x_h = 1$ y $x_{g^{-1}h} = 0$, entonces $\beta(g, (x_h)_{h \in G}) \neq (x_h)_{h \in G}$. Se deduce del anterior análisis que β es una acción parcial fiel. Además, si $(g, (x_h)_{h \in G}) \in G * \Omega_1$, defina $W = \{g\} \times D_{g^{-1}}$, donde $D_{g^{-1}} = \{(x_h)_{h \in G} : x_1 = 1 = x_{g^{-1}}\}$. Se sigue que W es abierto y $(g, (x_h)_{h \in G}) \in W \subseteq G * \Omega_1$, de modo que $G * \Omega_1$ es abierto. Por el Teorema 3.3.7 ψ_G admite sección continua.

Martinez, Pinedo y Villamizar en (Martínez et al., 2021) desarrollan algunos resultados adicionales que no están presentes en esta disertación, relacionados con acciones parciales de grupos profinitos, así como una demostración alternativa del Teorema 3.3.7

4. Grupos profinitos y Teoría de Galois

En este último capítulo se pretende por un lado recopilar los conceptos que rodean la Teoría de Galois y por otro lado presentar la estrecha relación que existe entre grupos de Galois y grupos profinitos. Todos los detalles que escapan a este capítulo pueden ser consultados en diferentes libros que aborden el tema, sin embargo, para comodidad del lector, se sugiere examinar las obras de (Lang, 2002), (Morandi, 1996), (Ribes and Zalesskii, 2000) y (Zaldívar, 1996).

4.1. Preliminares

Dadon un anillo con uno R recuerde que él es llamado un *dominio* si no tiene divisores de cero, es decir, si $a, b \in R$ tales que $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. Un elemento $c \in R$ es llamado *unidad* si tiene inverso multiplicativo en R . En los dominios es posible extender el concepto de divisibilidad establecido en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Suponga que R es dominio. $c \in R$ será llamado *irreducible* si no es unidad y no tiene divisores propios, esto es, si $b \in R$ divide a c , entonces b es una unidad o c divide a b . Adicional a lo anterior, es pertinente recordar que el anillo de polinomios con coeficientes en un anillo R en la variable X suele denotarse por $R[X]$ y si $\alpha \in R$, el símbolo $R[\alpha]$ denotará al anillo cuyos elementos son de la forma $f(\alpha)$, para cada $f(X) \in R[X]$.

Definición 4.1.1. (Morandi, 1996, p, 2) Sean L y F cuerpos. Se dice que F es una **extensión** de L si $L \subseteq F$. En este caso se escribirá F/L para representar a la extensión F de L .

Dada una extensión F/L de un cuerpo L , si K es otro cuerpo de manera que $L \subseteq K \subseteq F$, entonces K es llamado un **cuerpo intermedio** de F/L ; además, recuerde que F puede ser visto

como un espacio vectorial sobre L o sobre K , al igual que K será un espacio vectorial sobre L . **El grado** de la extensión F/L se define como la dimensión del L —espacio vectorial F y se denotará por $[F : L]$. Se dirá que la extensión F/L es finita si $[F : L]$ es finito.

Ejemplo 4.1.2. El cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ es un cuerpo intermedio de la extensión $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, además $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ es finita mientras $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es infinita.

Proposición 4.1.3. (Lang, 2002, p. 224) Si F/L es una extensión de cuerpos y K es un cuerpo intermedio de F/L , entonces $[F : L] = [F : K][K : L]$.

Corolario 4.1.4. (Lang, 2002, p. 225) Considere una extensión F/L y un cuerpo intermedio de ella, por ejemplo K , entonces F/L es finita si y solo si F/K y K/L lo son.

Definición 4.1.5. (Morandi, 1996, p. 4) Sean F/L una extensión de cuerpos y $A \subseteq F$. Se define el **subcuerpo generado** por F y A como el subcuerpo más pequeño de F que contiene tanto a L como a A , es decir, la intersección de todos los subcuerpos de F que contienen a L y A ; el cual es denotado por $L(A)$. Si $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, entonces se escribirá $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ en lugar de $L(A)$. Observe además que $L(A)$ es un cuerpo intermedio de F/L .

Para F/L y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$, una descripción conocida (ver (Morandi, 1996, p. 5) o (Lang, 2002, p. 226)) del subcuerpo $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ viene dada por el conjunto

$$\left\{ \frac{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} : f(X_1, \dots, X_n), g(X_1, \dots, X_n) \in L[X_1, X_2, \dots, X_n] \text{ y } g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 \right\},$$

en particular, $L(\alpha) = \left\{ \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} : f(X), g(X) \in L[X] \text{ y } g(\alpha) \neq 0 \right\}$, para cualquier $\alpha \in F$.

Ejemplo 4.1.6. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ y $\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$, donde i es la unidad imaginaria.

Definición 4.1.7. (Lezama, 2021a, p. 40) Considere una extensión F/L y $\alpha \in F$. La extensión $L(\alpha)/L$ es llamada *extensión simple* de L .

Ejemplo 4.1.8.

i) $\mathbb{C}$ es una extensión simple de $\mathbb{R}$ pues $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.

ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ es extensión simple de $\mathbb{Q}$ ya que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Definición 4.1.9. (Morandi, 1996, p. 6) Dada una extensión F/L se dice que $\alpha \in F$ es **algebraico** sobre F si existe $f(X) \in L[X]$ no nulo de manera que $f(\alpha) = 0$. Si α no es algebraico se referirá a él como un elemento **trascendente** sobre F . Se dirá que F/L es una **extensión algebraica** en el caso donde todo elemento de F es algebraico sobre L .

Los elementos algebraicos de una extensión F/L permiten expresar de manera sencilla el subcuerpo descrito en la Definición 4.1.5, para ello tome $\alpha \in F$ algebraico sobre L y considere la colección I de todos los polinomios $f(X) \in L[X]$ que son anulados por α y note que este conjunto es un ideal del dominio de ideales principales $L[X]$, es decir, existe un único $f_\alpha(X) \in L[X]$ tal que $I = \langle f_\alpha(X) \rangle$. El polinomio $f_\alpha(X)$ puede suponerse mónico y es conocido como el **polinomio minimal de** α . El siguiente lema proporciona algunas propiedades elementales de los polinomios minimales, (Lezama, 2021a, p. 40) y (Morandi, 1996, p. 7) ofrecen de manera independiente una demostración del lema señalado.

Lema 11. Las siguientes propiedades son satisfechas para una extensión F/L , un elemento $\alpha \in F$ algebraico sobre L y el polinomio minimal $f_\alpha(X)$:

- i) $f_\alpha(X)$ es el único polinomio en $\langle f_\alpha(X) \rangle$ que es irreducible y tiene grado mínimo en $\langle f_\alpha(X) \rangle$.
- ii) Si $h(X) \in L[X]$, entonces $h(\alpha) = 0$ si y solo si $f_\alpha(X)$ divide a $h(X)$.
- iii) $L(\alpha) = \{f(\alpha) : f(X) \in L[X]\}$, $L(\alpha)/L$ es una extensión finita y una base de $L(\alpha)$ sobre L es $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$, donde n es el grado de $f_\alpha(X)$.

Ejemplo 4.1.10.

- a) El polinomio minimal de la unidad imaginaria i sobre $\mathbb{R}$ es $X^2 + 1$.
- b) Para cada número primo p , el polinomio minimal de $\sqrt[n]{p}$ es $X^n - p \in \mathbb{Q}[X]$.
- c) El polinomio minimal de $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ es $X^4 - 2X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

Proposición 4.1.11. (Morandi, 1996, p. 10) Sea F/L una extensión.

- i) Si F/L es finita, entonces es algebraica.
- ii) Dado K un cuerpo intermedio de F/L , entonces F/L es algebraica si y solo si F/K y K/L son algebraicas.

No toda extensión algebraica es finita, por ejemplo, en (Morandi, 1996, p. 10) se afirma que el cuerpo $\mathbb{A}$ de todos los números complejos que son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$ con grado infinito.

Ejemplo 4.1.12. Considere el conjunto $X = \{\sqrt{p} : p \text{ es primo}\}$. En (Dellerlin, 2018, p. 20) se establece que la extensión $\mathbb{Q}(X)/\mathbb{Q}$ es algebraica y tiene grado infinito.

Definición 4.1.13. (Lang, 2002, p. 231) Un cuerpo F es llamado *algebraicamente cerrado* si para cada $f(X) \in F[X]$ no constante, existe $\alpha \in F$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Ejemplo 4.1.14. El cuerpo de números complejos $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, mientras que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ no lo son.

Definición 4.1.15. (Morandi, 1996, p. 31) La *clausura algebraica* de un cuerpo L se define como una extensión $\bar{L}$ de L que es algebraica y algebraicamente cerrada.

La clausura algebraica de un cuerpo L es aquella extensión donde se encuentran todas las raíces de todos los polinomios con coeficientes de L .

Proposición 4.1.16. (Morandi, 1996, p. 32) Todo cuerpo tiene clausura algebraica.

Definición 4.1.17. (Morandi, 1996, p. 28) Si F/L es una extensión y S una familia de polinomios no constantes sobre L , entonces F es llamado *cuerpo de descomposición* de S sobre L , si todo polinomio de S tiene todas su raíces en F y $F = L(X)$, donde X es el conjunto de todas las raíces de todos los polinomios en S .

Ejemplo 4.1.18.

i) El cuerpo de descomposición del polinomio $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ es $\mathbb{C}$. Si considera a $f(X)$ con coeficientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Q}(i)$ es el cuerpo de descomposición para $f(X)$.

ii) Sea $\mathcal{F} = \{X^2 - p : p \text{ es primo}\} \subseteq \mathbb{Q}[X]$, entonces $\mathbb{Q}(X)$ es cuerpo de descomposición de $\mathcal{F}$, donde $X = \{\sqrt{p} : p \text{ es primo}\}$.

iii) Si $f(X) = X^4 - 8X^2 + 15 \in \mathbb{Q}[X]$, entonces $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ es el cuerpo de descomposición asociado a $f(X)$.

Ahora se definen las extensiones normales.

Definición 4.1.19. (Morandi, 1996, p. 35) Se dice que una extensión algebraica F/L es **normal** sobre L , si F es el cuerpo de descomposición de alguna familia de polinomios no constantes con coeficientes en L .

Con respecto a la definición anterior cabe resaltar que en (Lezama, 2021a, p. 70), se define el concepto de extensión normal como aquella extensión algebraica F/L , tal que todo irreducible $p(X) \in L[X]$, que tiene al menos una raíz en F , cuenta con todas sus raíces en F , no obstante, en (Morandi, 1996, p. 36), se demuestra que la Definición 4.1.19 es equivalente a la definición de extensión normal dada en (Lezama, 2021a, p. 70).

Proposición 4.1.20. (Lezama, 2021a, p. 71-72) Sea F/L una extensión, entonces:

i) $\bar{L}/L$ es una extensión normal.

ii) Si F/L es normal y K es un cuerpo intermedio de F/L , entonces F/K es normal.

Dados una extensión normal F/L y K un cuerpo intermedio de F/L , note que no siempre la extensión K/L es normal pues si considera el polinomio $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, entonces su cuerpo de descomposición es $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \alpha)$, donde $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, por lo tanto $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \alpha)/\mathbb{Q}$ es normal, además $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \alpha)$, pero $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ no es normal pues si supone lo contrario, como $\sqrt[3]{2}$ es

raíz del irreducible $p(X) = X^3 - 2$, entonces todas las raíces de $p(X)$ necesariamente deberían estar en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$, sin embargo, $\alpha \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, por lo tanto $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ no puede ser normal.

Ejemplo 4.1.21. Existe al menos una extensión F/L , junto con un cuerpo intermedio K de F/L , tal que F/K y K/L son normales, pero F/L no lo es, pues $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ son normales, pero $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ no es normal, pues el polinomio minimal de $\sqrt[4]{2}$ es $f(X) = X^4 - 2$, o equivalentemente, $f(X) = (X^2 + \sqrt{2})(X - \sqrt[4]{2})(X + \sqrt[4]{2})$, sin embargo, las raíces $\pm\sqrt{-\sqrt{2}}$, de $f(X)$ no pertenecen a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$, por lo tanto $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ no es cuerpo de descomposición de ningún polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

Sean L un cuerpo y $f(X) \in L[X]$ no constante, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \bar{L}$ tales que $f(X) = (X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_n)^{m_n}$. Los exponentes m_i son conocidos como la **multiplicidad** de α_i , y se dice que α_i es **raíz múltiple** de $f(X)$ si $m_i > 1$. Cuando $m_i = 1$ la raíz α_i es llamada **raíz simple**.

Definición 4.1.22. (Lezama, 2021a, p. 77) Dado un cuerpo L se dice que:

- i) Un polinomio irreducible $f(X) \in L[X]$ es **separable** si todas sus raíces son simples en $\bar{L}$.
- ii) $g(X) \in L[X]$ es **separable** si todos sus factores irreducibles en $L[X]$ son separables.
- iii) Si F es una extensión de L , un elemento $\alpha \in F$ algebraico sobre L es llamado **separable** si su polinomio minimal es separable en L .
- iv) Una extensión algebraica F/L es separable si cada $\alpha \in F$ es separable sobre L .
- v) L es llamado **cuerpo perfecto** si cada extensión algebraica F/L es separable.

Ejemplo 4.1.23. El polinomio $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ y sus dos raíces son $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$. La extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ es separable.

Para comodidad del lector se recuerda que la característica de un anillo L se define como el menor entero positivo n tal que $n \cdot 1 = 0$. En el caso de los cuerpos la característica será 0 o un número primo p .

Proposición 4.1.24. (Lezama, 2021a, p. 78) Sea L un cuerpo.

- i)* Si la característica de L es cero, entonces L es perfecto.
- ii)* Todo cuerpo finito es perfecto.
- iii)* Si L es algebraicamente cerrado, entonces L es perfecto. En particular $\bar{L}$ es perfecto.
- iv)* Dada una extensión F/L y K un cuerpo intermedio, si F/L es separable, entonces F/K y K/L son separables.

4.2. Teorema Fundamental de la Teoría de Galois

Definición 4.2.1. (Lang, 2002, p. 262) Una extensión F/L es llamada *extensión de Galois* si es normal y separable.

Ejemplo 4.2.2.

- i)* Dado un cuerpo L y α algebraico sobre L , la extensión $L(\alpha)/L$ es finita, normal y separable.
- ii)* La extensión $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ es infinita y de Galois.

iii) Si p es un número primo y F_p el cuerpo finito con p elementos, entonces $\overline{F_p}/F_p$ es una extensión de Galois.

A continuación se establece un resultado que será de gran utilidad cuando se analicen las extensiones de Galois con grado infinito.

Proposición 4.2.3. (Morandi, 1996, p. 42) Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una extensión algebraica F/L :

i) F/L es una extensión de Galois.

ii) F es el cuerpo de descomposición de alguna familia de polinomios separables sobre L .

Sea F un cuerpo. Antes de definir el concepto de *subcuerpo fijo* se recuerda al lector que la colección de todos los automorfismos de F determinan un grupo con la composición usual de funciones, el cual se denota con el símbolo $Aut(F)$.

Definición 4.2.4. (Lang, 2002, p. 261) Sean F/L una extensión y $H \subseteq Aut(K)$ un subgrupo. El subcuerpo $F^H := \{a \in F : \sigma(a) = a, \forall \sigma \in H\} \subseteq F$ es llamado el **subcuerpo fijo de H** .

Para enunciar el *Teorema Fundamental de la Teoría de Galois* se define primero los **grupos de Galois**.

Definición 4.2.5. (Zaldívar, 1996, p. 105) Sea F/L una extensión de Galois. El grupo

$$Gal(F/L) := \{\varphi \in Aut(F) : \varphi(x) = x, \forall x \in L\},$$

se conoce como el **Grupo de Galois** de la extensión F/L .

Ejemplo 4.2.6. El polinomio minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sobre $\mathbb{Q}$ es $X^4 - 10X^2 + 1$, luego, el grado de $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ es cuatro y además es una extensión de Galois. El grupo $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q})$ está conformado, además de la identidad, por tres automorfismos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, los cuales son:

$$\begin{aligned}\sigma_1(\sqrt{2}) &= \sqrt{2}, \sigma_1(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \\ \sigma_2(\sqrt{2}) &= -\sqrt{2}, \sigma_2(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \\ \sigma_3(\sqrt{2}) &= -\sqrt{2}, \sigma_3(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}.\end{aligned}$$

El siguiente resultado se conoce en la literatura como el **Teorema Fundamental de la Teoría de Galois**. En (Lang, 2002, Chapter VI), (Lezama, 2021a, p. 87) o (Morandi, 1996, p. 51), así como en (Zaldívar, 1996, p. 106), se encuentran, según cada autor, demostraciones para dicho resultado.

Teorema 4.2.7. Suponga que F/L es una extensión de Galois finita y $G = \text{Gal}(F/L)$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre los cuerpos intermedios de F/L y los subgrupos de G , que revierte inclusiones y además valen las siguientes afirmaciones:

- i) $|G| = [F : L]$.
- ii) A cada subgrupo H de G le corresponde el cuerpo intermedio F^H y $\text{Gal}(F/F^H) = H$.
- iii) Cada cuerpo intermedio K de F/L le es asignado el subgrupo $\text{Gal}(F/K)$ y $F^{\text{Gal}(F/K)} = K$.
- iv) Si K es un cuerpo intermedio de F/L , entonces K/L es normal si y solo si $\text{Gal}(F/K) \trianglelefteq G$, en este caso $\text{Gal}(K/L)$ es isomorfo al cociente $G/\text{Gal}(F/K)$.
- v) Si $H \trianglelefteq G$, entonces F^H/L es normal.

4.3. Grupos de Galois en dimensión infinita

El *Teorema Fundamental de la teoría de Galois*, enunciado en la sección anterior, es válido únicamente para extensiones de Galois cuyo grado es finito. Con el objetivo de mostrar un ejemplo donde falla dicho Teorema se define el *automorfismo de Frobenius*.

Definición 4.3.1. (Morandi, 1996, p. 66) Sea K un cuerpo de característica $p \neq 0$. La función

$$\begin{aligned}\varphi : K &\rightarrow K \\ x &\mapsto x^p,\end{aligned}$$

es conocida como *endomorfismo de Frobenius sobre K* .

Dado un cuerpo K de característica $p \neq 0$, el endomorfismo de Frobenius sobre K siempre es inyectivo dado que es un homomorfismo entre cuerpos. Adicionalmente, debido a la inyectividad del siguiente homomorfismo de cuerpos

$$\begin{aligned}\chi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow K \\ n &\mapsto \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-\text{veces}},\end{aligned}$$

se deduce que todo cuerpo de característica $p \neq 0$, contiene un subcuerpo W , isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, de manera que para todo $x \in W$, vale la ecuación $x^p = x$, luego, los puntos fijos de φ son todos los puntos en W .

Lema 12. Un cuerpo de característica $p \neq 0$ es perfecto si y solo si el endomorfismo de Frobenius φ es sobreyectivo.

Proposición 4.3.2. (Morandi, 1996, p. 67) Sea p un número primo. Si F_p es el cuerpo finito con p elementos, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un único subcuerpo de $\overline{F_p}$ con p^n elementos; más aún, si K, L son dos subcuerpos de $\overline{F_p}$ con orden p^m y p^n respectivamente, entonces $K \subseteq L$ si y solo si m divide a n .

El siguiente ejemplo es tomado de (Gallegos, 2017, p. 9), y muestra que en el contexto de extensiones con grado infinito, el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois falla.

Ejemplo 4.3.3. Sean p un número primo, F_p el cuerpo con p elementos cuya característica es p y $\overline{F_p}$ su clausura algebraica. $\overline{F_p}/F_p$ es normal y por ser F_p perfecto, también es separable. Considere el automorfismo de Frobenius $\varphi \in \text{Gal}(\overline{F_p}/F_p)$ y el subgrupo $\langle \varphi \rangle$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina E_n como el subcuerpo de $\overline{F_p}$ con cardinalidad p^{2^n} . Como 2^n divide a 2^{n+1} , se obtiene la cadena de subcuerpos $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$. Sea $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, entonces $E \subsetneq \overline{F_p}$ pues E no contiene un subcuerpo de orden p^5 pero $\overline{F_p}$ sí. Como $\overline{F_p}/F_p$ es de Galois, entonces $\overline{F_p}/E$ también es Galois y $\text{Gal}(\overline{F_p}/E)$ es no trivial. Dado $\sigma \in \text{Gal}(\overline{F_p}/E)$ diferente de la identidad, si existiera $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(a) = a^{p^m}$, para cada $a \in \overline{F_p}$, entonces todo elemento de E es raíz del polinomio $X^{p^m} - X$ y esto contradice el Teorema Fundamental del Álgebra, por lo tanto $\text{Gal}(\overline{F_p}/E) \not\subseteq \langle \varphi \rangle$, así $\langle \varphi \rangle$ es un subgrupo propio. El cuerpo intermedio F_p le corresponde tanto a $\langle \varphi \rangle$ como a $\text{Gal}(\overline{F_p}/F_p)$, pero esto contradice la correspondencia uno a uno entre subgrupos de $\text{Gal}(\overline{F_p}/F_p)$ y cuerpos intermedios de $\overline{F_p}/F_p$, por lo tanto $\overline{F_p}/F_p$ necesariamente es infinita.

Según mencionan Ribes y Zalesskii en (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 72), Wolfrang Krull aborda el problema de extender el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois para extensiones de Galois arbitrarias y en el año 1928 construye una topología que es conocida en la literatura como la *Topología de Krull*. A continuación se recuerda la construcción de dicha topología.

Sean F/L una extensión de Galois infinita, $G = \text{Gal}(F/L)$ su grupo de Galois asociado y considere

$$\mathcal{F} = \{L \subseteq K \subseteq F : K/L \text{ es extensión de Galois finita}\}. \quad (36)$$

Observe que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pues si $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n \in F$, entonces se considera el cuerpo de descomposición E de todos los polinomios minimales de los α_i . Como cada α_i es separable sobre L , entonces E es el cuerpo de descomposición de un conjunto de polinomios separables sobre L y de acuerdo a la Proposición 4.2.3 la extensión E/L es de Galois. La finitud de E/L se sigue de la construcción de E , luego $E \in \mathcal{F}$. Adicional a la construcción de $\mathcal{F}$ se establecen las siguientes afirmaciones:

- 1) Si $E \in \mathcal{F}$, por el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois $\text{Gal}(F/E) \trianglelefteq \text{Gal}(F/L)$ y $\text{Gal}(E/L) \cong \text{Gal}(F/L)/\text{Gal}(F/E)$.
- 2) Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $\text{Gal}(F/F_1) \cap \text{Gal}(F/F_2) = \text{Gal}(F/F_1 F_2)$, donde $F_1 F_2$ es el cuerpo más pequeño que contiene a F_1 y F_2 (Morandi, 1996, p. 156).
- 3) $\bigcap_{K \in \mathcal{F}} \text{Gal}(F/K) = \{id_F\}$ (Morandi, 1996, p. 156).

Defina $\mathcal{N} = \{\text{Gal}(F/K) : K \in \mathcal{F}\}$, luego, $\mathcal{N} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{N}$. Se sigue del ítem 2) que $\mathcal{N}$ es una base de filtro y por la Proposición 1.2.9 existe una única topología τ_G de manera que G es un

grupo topológico y $\mathcal{N}$ es una base de vecindades para la identidad.

Definición 4.3.4. (Morandi, 1996, p. 157) Si F/L es una extensión de Galois, la **topología de Krull** sobre $Gal(F/L)$ es aquella que tiene como base la colección $\{\sigma N : N \in \mathcal{N} \text{ y } \sigma \in Gal(F/L)\}$, es decir, un subconjunto X de $Gal(F/L)$ es abierto si $X = \emptyset$ o si $X = \bigcup_i \sigma_i N_i$, para algún $\sigma_i \in Gal(F/L)$ y $N_i \in \mathcal{N}$.

El siguiente teorema generaliza de cierto modo el *Teorema Fundamental de la Teoría de Galois*, ya que considera extensiones de Galois arbitrarias, además, en el caso de extensiones con grado finito se retoma la versión “clásica” del *Teorema Fundamental de la Teoría de Galois*. Una prueba de tal resultado aparece en (Morandi, 1996, p. 159) y (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 70).

Teorema 4.3.5. Sea K/F una extensión de Galois y $G = Gal(K/F)$ su grupo de Galois dotado con la topología de Krull. Denote por $\mathcal{F}(K/F)$ y $\mathcal{S}(G)$ el conjunto de cuerpos intermedios de K/F y la colección de subgrupos cerrados de G , respectivamente; entonces existe una biyección entre $\mathcal{F}(K/F)$ y $\mathcal{S}(G)$, además, $L \in \mathcal{F}(K/F)$ es una extensión normal de F si y solo si $Gal(K/L) \trianglelefteq G$ y $Gal(L/F) \cong G/Gal(K/L)$.

Observación 17. Con respecto al Ejemplo 4.3.3 note que $\langle \varphi \rangle \subsetneq Gal(\overline{F_p}/F_p)$ no es cerrado pues en caso contrario contradice el Teorema fundamental de la teoría de Galois para extensiones infinitas.

La topología de Krull además de extender el clásico Teorema Fundamental de la Teoría de Galois también torna cada grupo de Galois en un grupo profinito. En seguida se construirá a partir de un grupo de Galois un sistema inverso cuyo límite es precisamente el grupo de Galois dado.

Dada una extensión de Galois K/F (finita o infinita) considere: $G = \text{Gal}(K/F)$ dotado con la topología de Krull, la colección $\mathcal{F}$ construida en (36) y $\mathcal{N} = \{\text{Gal}(K/L) : L \in \mathcal{F}\}$. Note por un lado que $\text{Gal}(K/L) \trianglelefteq G$, para cada $L \in \mathcal{F}$; por otro lado defina sobre $\mathcal{N}$ el orden inclusión inversa: $N \preceq_1 M$ si y solo si $M \subseteq N$.

La relación $\preceq_1$ torna a $\mathcal{N}$ en conjunto dirigido: si $L_1, L_2 \in \mathcal{F}$, entonces $\text{Gal}(K/L_1 L_2) \in \mathcal{N}$, y $\text{Gal}(K/L_1) \preceq_1 \text{Gal}(K/L_1 L_2)$, $\text{Gal}(K/L_2) \preceq_1 \text{Gal}(K/L_1 L_2)$, donde $L_1 L_2$ denota el subcuerpo más pequeño de K que contiene tanto a L_1 como a L_2 . Ahora, si $N \preceq_1 M \in \mathcal{N}$, observe que la proyección natural

$$p_N^M : G/M \rightarrow G/N$$

$$\sigma M \mapsto \sigma N,$$

es un homomorfismo entre grupos finitos. Si se dota a cada G/N con la topología discreta, entonces la familia $\{G/N; p_N^M\}_{N \preceq_1 M \in \mathcal{N}}$ es un sistema inverso de grupos topológicos finitos y discretos.

Observe que para cada $L \in \mathcal{F}$, debido al isomorfismo entre $G/\text{Gal}(K/L)$ y $\text{Gal}(L/F)$ se tiene la proyección continua

$$p_N : G \rightarrow G/\text{Gal}(K/L)$$

$$\sigma \mapsto \sigma|_{K^{\text{Gal}(K/L)}},$$

donde $\sigma|_{K^{\text{Gal}(K/L)}}$ indica la restricción de σ al subcuerpo $K^{\text{Gal}(K/L)}$ de K ; adicional a esto, si

$N \preceq_1 M \in \mathcal{N}$, entonces $p_N = p_N^M \circ p_M$, pues para todo $\sigma \in G$ vale

$$\begin{aligned} p_N^M \circ p_M(\sigma) &= p_N^M(p_M(\sigma)) \\ &= p_N^M(\sigma|_{K^M}) \\ &= \sigma|_{K^N} \\ &= p_N(\sigma), \end{aligned}$$

luego $\{p_N\}_{N \in \mathcal{N}}$ es una familia de funciones continuas compatible con $\{G/N; p_N^M\}_{N \preceq_1 M \in \mathcal{N}}$; de hecho, el límite inverso del sistema es G junto con la familia de proyecciones $\{p_N\}_{N \in \mathcal{N}}$, por lo tanto G es un grupo profinito. Esta última afirmación se concluye del siguiente teorema, cuya prueba puede ser consultada en (Morandi, 1996, p. 157), (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 68) o (Vinroot, 2008, p. 8).

Teorema 4.3.6. Sea K/F una extensión de Galois (no necesariamente finita), $G = \text{Gal}(K/F)$ el grupo de Galois asociado a K/F dotado con la topología de Krull y $\{G/N; p_N^M\}_{N \preceq_1 M \in \mathcal{N}}$ el sistema inverso construido anteriormente, entonces $G \cong \varprojlim_{\mathcal{N}} G/N$.

El siguiente resultado, junto con el Teorema 4.3.6, brindan otra manera de caracterizar grupos profinitos. En (Ribes and Zalesskii, 2000, p. 71) y (Waterhouse, 1974, p. 639), se encuentra una demostración de dicho resultado.

Teorema 4.3.7. Todo grupo profinito es isomorfo a un grupo de Galois asociado a una extensión de Galois adecuada.

Referencias Bibliográficas

- Abadie, F. (2003). Enveloping actions and takai duality for partial actions. *Journal of Functional Analysis*, 197(1):14–67.
- Atiyah, M. (2018). *Introduction to commutative algebra*. CRC Press.
- Batista, E. (2017). Partial actions: what they are and why we care. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 24(1):35–71.
- Bourbaki, N. (1995). *General Topology: Chapters 1–4*, volume 18. Springer Science & Business Media.
- Camargo, J. and Villamizar, E. (2019). *Topología general*. Ediciones UIS.
- Dellerlin, A. C. (2018). *Teoría de Galois y el Teorema Fundamental del Álgebra*. PhD thesis, Universidad Industrial de Santander. (Tesis de pregrado). <http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/tesis/2018/172708.pdf>.
- Dokuchaev, M. (2019). Recent developments around partial actions. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, 13(1):195–247.
- Dokuchaev, M. and Khrypchenko, M. (2015). Partial cohomology of groups. *Journal of Algebra*, 427:142–182.
- Engelking, R. (1989). *General Topology*, volume 6. Heldermann Verlag.

- Exel, R. (1994). Circle actions on c^* -algebras, partial automorphisms, and a generalized pimsner-voiculescu exact sequence. *Journal of functional analysis*, 122(2):361–401.
- Exel, R. (1997). Twisted partial actions: a classification of regular c^* -algebraic bundles. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 74(2):417–443.
- Exel, R. (1998). Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(12):3481–3494.
- Exel, R. (2017). *Partial dynamical systems, Fell bundles and applications*. American Mathematical Soc.
- Exel, R., Giordano, T., and Gonçalves, D. (2011). Enveloping algebras of partial actions as groupoid c^* -algebras. *Journal of Operator Theory*, pages 197–210.
- Fell, J. M. G. and Doran, R. S. (1988). *Representations of $*$ -algebras, Locally Compact Groups, and Banach $*$ -algebraic Bundles: Basic representation theory of groups and algebras*. Academic press.
- Gallegos, J. (2017). *Teoría de Iwasawa*. PhD thesis, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Gao, S. (2009). *Invariant descriptive set theory*. Chapman and Hall/CRC.
- Gómez, J. (2017). *Acciones Parciales y el Problema de Globalización*. PhD thesis, Universidad Industrial de Santander.

- Gómez, J., Pinedo, H., and Uzcátegui, C. (2018). On the continuity of partial actions of polish groups on metric spaces. *Revista Colombiana De Matemáticas*, 52(1):1–7.
- Husain, T. (1966). *Introduction to topological groups*. W. B. Saunders Company.
- Jacobson, N. (1989). *Basic algebra II (2nd ed.)*. W. H. Freeman and Company.
- Joshi, K. D. (1983). *Introduction to general topology*. Wiley Eastern Limited.
- Kellendonk, J. and Lawson, M. V. (2004). Partial actions of groups. *International Journal of Algebra and Computation*, 14(01):87–114.
- Lang, S. (2002). *Algebra*, volume 211. Springer Science & Business Media.
- Lezama, O. (2021a). *Cuadernos de Álgebra No. 5 Cuerpos*. Universidad Nacional de Colombia.
- Lezama, O. (2021b). *Cuadernos de Álgebra No. 7 Categorías*. Universidad Nacional de Colombia.
- Mac Lane, S. (1998). *Categories for the working mathematician (2nd ed.)*. Springer Science & Business Media.
- Magid, A. R. (2014). *The separable Galois theory of commutative rings*. CRC Press.
- Martínez, L., Villamizar, A., and Pinedo, H. (2021). Partial actions of groups on profinite spaces. *arXiv preprint arXiv:2101.04779*.
- Morandi, P. (1996). *Field and Galois theory*, volume 167. Springer- Verlag.
- Munkres, J. R. (2002). *Topología*, 2. a edición.

- Pinedo, H. and Uzcátegui, C. (2017). Polish globalization of polish group partial actions. *Mathematical Logic Quarterly*, 63(6):481–490.
- Ramírez, E. (2017). *Cuatro extensiones de la dualidad de Stone*. PhD thesis, Universidad Industrial de Santander.
- Ribes, L. and Zalesskii, P. (2000). Profinite groups (2nd. ed.). Springer- Verlag.
- Rotman, J. J. (2009). *An introduction to homological algebra*, volume 2. Springer.
- Rotman, J. J. (2010). *Advanced modern algebra*. American Mathematical Soc.
- Tarizadeh, A. (2013). On the category of profinite spaces as a reflective subcategory. *Applied General Topology*, 14(2):147–157.
- Tate, J. (1962). Duality theorems in galois cohomology over number fields. In *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, pages 288–295.
- Vinroot, R. (2008). Direct limits, inverse limits, and profinite groups.
- Waterhouse, W. C. (1974). Profinite groups are galois groups. In *Proc. Am. Math. Soc*, volume 42, pages 639–640.
- Willard, S. (1970). *General topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Wilson, J. S. (1998). *Profinite groups*. Clarendon Press Oxford.
- Zaldívar, F. (1996). *Teoría de Galois*. Anthropos Editorial.