ESTUDIO Y DESARROLLO DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL PROBLEMA DE RUTAS ESCOLARES (SBRP)

MARIBEL BUSTOS GUTIÉRREZ

ASTRID CAROLINA PINILLA CIFUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS

ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES

BUCARAMANGA

2016

ESTUDIO Y DESARROLLO DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA EL PROBLEMA DE RUTAS ESCOLARES (SBRP)

MARIBEL BUSTOS GUTIÉRREZ

ASTRID CAROLINA PINILLA CIFUENTES

Trabajo de grado para optar el título de Ingeniera Industrial

Director:

JAVIER EDUARDO ARIAS OSORIO

MSc. En Administración

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS

ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES

BUCARAMANGA

2016

DEDICATORIA

Primero que todo este trabajo está dedicado a Dios, quien ha sido mi guía y fortaleza en cada paso dado en esta etapa de mi vida, por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, y con quien estoy inmensamente agradecida por todas las bendiciones brindadas.

A mis padres Orlando Bustos y Lina María Gutiérrez, por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, quienes siempre han estado ahí ofreciéndome su amor y apoyo incondicional en esos momentos de duda, desesperación y felicidad; quienes son mi inspiración diaria para seguir adelante.

A mi hermana Gabriela, que con su presencia en mi vida me hace inmensamente feliz.

A Sebastián Porras, quien con su voz de aliento aumentaba mi fe, ante los momentos de debilidad.

Maribel Bustos.

En primer lugar, a Dios por ser la luz en mi camino, por todas sus bendiciones y por brindarme la oportunidad de estar aquí y ahora cumpliendo esta gran meta, porque cada día me demuestras que tus planes son mucho mejores que los míos y que a tu lado suceden las mejores cosas.

A mi hermosa madre Luz Marina Cifuentes, mi mayor ejemplo de perseverancia y mi fuente de inspiración; tu apoyo y comprensión incondicional es mi fortaleza, este logro más que mío es tuyo.

A mis hermanos Daniel y Valentina, son mi motivación de llegar tan alto como quiera; su amor y compañía me generan paz y felicidad.

A Francisco León, por estar en cada momento de felicidad y dificultad, por ser esa voz y ese hombro que nunca me falto y por su amor incondicional.

Astrid Carolina

AGRADECIMIENTOS

A nuestro Director, MSc. Javier Eduardo Arias por guiarnos y apoyarnos en el presente proyecto; por su comprensión y confianza ante las distintas situaciones presentadas.

A la Universidad Industrial de Santander, Escuela de Estudios Industriales y Empresariales y al Grupo ÓPALO por su aporte a nuestra formación personal y profesional.

A nuestros amigos y demás familiares quienes nos acompañaron durante esta trascendental etapa y de quienes tendremos los mejores recuerdos.

Mil gracias a todos.

CONTENIDO

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO Y DESARROLLO DE UN MODELO MATÉMATICO PARA EL PROBLEMA DE RUTAS ESCOLARES (SBRP).*

AUTORES: BUSTOS GUTIÉRREZ, Maribel; PINILLA CIFUENTES, Astrid Carolina.**

PALABRAS CLAVES: Problema de rutas escolares (SBRP), Selección de paradas, Problema de Ruteo de Vehículos (VRP), Ramificación y Acotamiento, Metaheurística, Búsqueda Tabú.

DESCRIPCIÓN:

El Problema de Rutas Escolares (SBRP) consiste en encontrar una o varias rutas sobre una red de paraderos, con origen conocido y destino común, en donde cada estudiante debe ser asignado a uno de éstos. Posteriormente cada autobús visita dichas paradas según la ruta trazada en la red y traslada los estudiantes a la escuela.

El objetivo de este trabajo de investigación es resolver el problema de rutas escolares utilizando un modelo de programación lineal entera binaria, en el que se busca minimizar el subconjunto de paradas seleccionadas, a las cuales se asignaran los estudiantes, siempre y cuando se cumpla con la distancia permitida de caminar hacia una parada, para posteriormente generar una serie de rutas que minimizan la distancia total recorrida por todos los autobuses.

La solución del SBRP se dará por medio de métodos exactos con el algoritmo de Ramificación y Acotamiento, y mediante métodos aproximados con el desarrollo de un algoritmo basado en la metaheurística Búsqueda Tabú, cuya solución inicial es brindada a través del algoritmo de ahorros de Clarke and Wright. Los resultados obtenidos por el algoritmo, finalmente fueron comparados con los arrojados por el método exacto, con el objetivo de probar la eficiencia y eficacia del algoritmo desarrollado. En esta comparación se evidenció que, para las instancias evaluadas, el algoritmo presentó una diferencia máxima del 10,5% respecto a la solución óptima, pero que se ve compensada con un tiempo computacional 99,7% más rápido.

---

* Trabajo de Grado

** Facultad de ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Director: MSc. Javier Eduardo Arias Osorio.

* Degree Work.

** Faculty of Physical-Mechanical Engineering. School of Industrial and Business Studies. Director: MSc. Javier Eduardo Arias Osorio.

** Facultad de ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Director: MSc. Javier Eduardo Arias Osorio.

ABSTRACT

TITLE: STUDY AND DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR SCHOOL BUS ROUTING PROBLEM (SBRP).[*]

AUTHORS: BUSTOS GUTIÉRREZ, Maribel; PINILLA CIFUENTES, Astrid Carolina.[**]

KEYWORDS: School bus routing problem (SBRP), Stop selection, Vehicle routing problem (VRP), Branch and Bound, Metaheuristics, Tabu Search (TS).

DESCRIPTION:

School bus routing problem (SBRP), consists in finding one or more routes on a network of bus stops, with known origin and common destiny, where every student must be assigned to one of these, later each bus to visit those stops according to the route drawn on the network and transfer the students to school.

The objective of this research is to solve the problem of school routes using a model of binary integer linear programming, in which seeks to minimize the subset of selected stops, to which students are assigned, as long as they comply with the allowed distance to walk to a stop, and then develop a series of routes that minimize the total distance traveled by all buses.

The solution SBRP will through exact methods with the algorithm branch and bound, and by methods approximate the development of a system based on metaheuristic Tabu Search algorithm whose initial solution is provided through the algorithm savings Clarke and Wright. The results obtained by the algorithm, finally were compared with those calculated by the exact method, in order to test the efficiency and effectiveness of the algorithm developed. This comparison showed that, for instances evaluated, the algorithm presented a maximum difference of 10,5% compared to the optimal solution, but that is offset by a faster computational time 99,7%.

[*] Degree Work.
[**] Faculty of Physical-Mechanical Engineering. School of Industrial and Business Studies. Director: MSc. Javier Eduardo Arias Osorio.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, la investigación consiste en desarrollar un modelo de optimización para la solución del problema de rutas escolares mediante métodos exactos y/o Heurísticos. El SBRP (School Bus Routing Problem) por sus siglas en inglés, se ha venido estudiando desde la primera publicación realizada por Newton y Thomas (1969). Años más tarde, Desrosiers *et al*. (1981), realizan una descomposición del SBRP, en la que describen que el problema de rutas escolares consiste en pequeños sub-problemas y puede ser resuelto por cinco etapas: preparación de datos, selección de parada de autobús (la asignación de cada estudiante a las paradas), la generación de la ruta del autobús, ajuste a la venta de tiempo de la escuela, y la programación de la ruta. En la etapa de preparación de datos, la red de carreteras debe ser estudiada (del hogar, la escuela, estación de autobuses) y especificada en la matriz origen-destino (OD) entre ellos. Al tener una red determinada, se establece la ubicación de las paradas, y los estudiantes son asignados a estas. A partir de entonces, las rutas del autobús escolar para una sola escuela son generadas en la etapa de generación de rutas de autobuses. Por otro lado, los pasos en el ajuste de tiempo campana de la escuela, y la programación de la ruta son necesarios para la configuración multi-escuela, esto ocurre cuando el sistema de transporte escolar es operado por alguna organización regional de la educación y no por las escuelas individuales[1].

En estudios más actuales, como es el presentado por Park y Kim (2010), el SBRP en general se radica en planificar un horario eficiente para una flota de autobuses escolares donde cada autobús recoge a los estudiantes de diversas paradas de autobús y luego los entrega a la escuela, teniendo en cuenta que varias

[1] PARK, Junhyuk y KIM, Byung-in. “The school bus routing problem: A review”. En: European Journal of Operational Research. Vol. 202. (2010); p. 311–319

limitaciones deben ser satisfechas: la capacidad máxima de los autobuses, el tiempo máximo de un estudiante en el autobús, y el plazo de entrega o ventana de tiempo para llegar a la escuela[2].

Las características principales del problema de rutas escolares suelen ser las siguientes: número de escuelas (única o múltiple), entorno de servicio (urbano o rural), alcance del problema (mañana, tarde, ambos), carga mixta (permitido o no permitido), estudiantes de educaciones especiales (considerados o no considerados), capacidad de la flota (homogénea o heterogénea), objetivos (número de autobuses a utilizar, distancia y/o tiempo de viaje de cada autobús, distancia que debe caminar cada estudiante a la parada, equilibrio de carga, máxima longitud de la ruta), restricciones (capacidad del vehículo, el máximo de tiempo de los estudiantes en la ruta, ventanas de tiempo de la escuela, el máximo de tiempo a pie o en distancia, tiempo más temprano de recogida, número mínimo de estudiantes para crear una ruta)[3].

La variación de cada una de estas características conforma un modelo diferente del SBRP; es así como cada situación y necesidad de la vida real conlleva al estudio e investigación de cada problema en específico.

Aunque el SBRP sea un problema único e independiente, un solo sub-problema o la combinación de sus sub-problemas pueden ser clasificados como una variante de los problemas de optimización existentes. El sub-problema de generación de rutas escolares es muy similar al tradicional problema de ruteo de vehículos (VRP), que es una aplicación ampliamente estudiada en investigación de operaciones. El VRP busca generar rutas eficientes para una flota de vehículos con el fin de entregar los productos de los depósitos a un conjunto de clientes (Toth y Vigo, 2002). Así mismo el problema combinado de la selección parada de

---

[2] ARIAS ROJAS, Juan; JIMÉNEZ, José F. y MONTOYA TORRES, Jairo R. “Solving of School Bus Routing Problem by Ant Colony Optimization”. En: Revista EIA. No. 17. (Julio, 2012); p. 193-208.

[3] DÍAZ PARRA, Ocotlán, *et al.* “A Vertical Transfer Algorithm for the School Bus Routing Problem”. En: IEEE. (2012); p. 66 – 71

autobús y la generación de ruta de autobús cae en la clase de problemas de localización de ruta (PRLs)[4].

Hoy en día las aplicaciones del SBRP se han venido ampliando no solo en el ámbito escolar sino también en el empresarial y logístico, dado a la planeación de tipo táctico y estratégico que este genera en sus estudios. La principal aplicación del SBRP radica en el transporte de estudiantes a sus escuelas; bien sea en el sector público o privado, rural o urbano, la gran mayoría de instituciones escolares proveen el transporte a sus estudiantes; de la misma forma existen empresas que proveen el transporte a sus empleados, bien sea por el difícil acceso a las instalaciones de las compañías, por aliviar el tráfico, por Responsabilidad Social o por el bienestar de sus empleados; y es que si bien ésta es una gran alternativa en ciudades con tan altos índices de tráfico, ya que si una ruta de una empresa recoge alrededor de 30 pasajeros, está evitando como máximo que 29 vehículos circulen en esa misma ruta con el fin de llegar a su locación trabajo, ayudando de esta manera a minimizar el tráfico, disminuir la contaminación y por qué no, reducir los costos en el transporte.

Otra aplicación importante del SBRP en el ámbito logístico de las empresas de transporte urbano es la localización de paradas de autobús, ya que no es una localización que se realice con frecuencia, pero al momento de realizarla debería hacerse bajo un estudio con el fin de ubicar dichas paradas en puntos estratégicos.

Con la realización de este trabajo pretendemos obtener una revisión de la literatura sobre el SBRP, la formulación y evaluación de un modelo de SBRP con técnicas definidas y con instancias recopiladas en la literatura; y con el resultado final de nuestro estudio realizaremos un artículo publicable con las respectivas normas solicitadas por la universidad.

[4] PARK, Op. cit., p. 317.

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Basados en la revisión previa de la literatura, las investigaciones existentes para el problema de ruteo escolar se han realizado de manera independiente; es decir se han encargado de resolver este problema con la solución de todos o algunos de los cinco sub-problemas (la preparación de datos, la selección de la parada de autobús, la generación de rutas para los autobuses, el ajuste de la ventana de tiempo y la programación de la ruta) que se derivan de él[5].

Por lo anterior es claro mencionar que el SBRP concebido mediante los 5 subproblemas, no es una variación del VRP, dado que la programación de rutas es uno de los cinco sub-problemas del primero. Así mismo, el SBRP, al incluir la localización de paradas y programación de rutas, tiene elementos similares al problema del LRP (Location routing problem).

Por otra parte, se ha encontrado que existen dos grandes ramas de investigación de amplia cabida para los estudios del SBRP: la primera, es la realización de esfuerzos en enfoques exactos para el problema de rutas escolares. La segunda, es la implementación de algunas metaheurísticas como Tabu Search, Variable Neighborhood Search (VNS), entre otras, que han sido exitosas en la implementación del VRP y se pueden aprovechar en estudios del SBRP.[6]

Por esta razón nuestro trabajo estará enfocado en identificar los modelos y las técnicas de solución que permitan abordar el problema de rutas escolares en su integralidad, teniendo en cuenta los diferentes parámetros que lo definen, y que a diferencia del problema de ruteo de vehículos tradicional que se ocupa principalmente del transporte de cargas, el SBRP está relacionado exclusivamente con transporte de pasajeros, donde conceptos como satisfacción del cliente y eficacia durante el viaje (lo cual en los casos de transporte de escolares ya está normalizado en Colombia) son importantes.

---

[5] PARK; “The school…”, Op. cit. p. 318
[6] Ibid.

2 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Hoy en día los problemas de movilidad y transporte dentro de las grandes ciudades afectan en su gran mayoría a toda la población que cuenta con la necesidad de transportarse de un lugar a otro; donde las restricciones de tiempo y capacidad juegan un papel importante a la hora de solucionar este tipo de problemas. El diseño de rutas escolares SBRP, ha logrado responder a problemas logísticos de distribución física que presentan una diversidad de elementos que lo hacen diferente de las variaciones propias del ruteo de vehículos tradicional (VRP), debido a que puede considerar que cada autobús recoge a los estudiantes de varias paradas (puntos de acopio o nodos de la red) y los entrega a sus escuelas designadas, mientras que se satisfacen diversas limitaciones, tales como la capacidad máxima de un autobús, el máximo tiempo de un estudiante en ruta y la ventana de tiempo para llegar a una escuela definida, entre otros.

Mediante una amplia revisión en la literatura acerca del problema de rutas escolares (SBRP) y los métodos de solución de éste, se recopilará la información necesaria para el establecimiento de las características a evaluar en la formulación del modelo y la selección de los métodos y técnicas que se implementarán sobre el mismo, además del desarrollo de los algoritmos mediante herramientas computacionales que arrojen la solución al problema estudiado y poder así evaluar los resultados con otros estudios ya realizados.

3 OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un modelo de optimización para la solución del problema de rutas escolares mediante métodos exactos y heurísticos.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar una revisión de la literatura sobre el problema de rutas escolares (SBRP) y los métodos de solución existentes sobre el mismo.
- Analizar la información recopilada y de esta manera establecer las características a considerar, en la formulación del modelo.
- Seleccionar los métodos o técnicas a implementar sobre el modelo establecido.
- Desarrollar los algoritmos apropiados para probar el modelo y las técnicas en herramientas computacionales como GAMS y MATLAB.
- Evaluar los resultados obtenidos del modelo desarrollado con instancias disponibles en la literatura.
- Elaborar un artículo publicable en base al trabajo de investigación realizado.

4 MARCO CONCEPTUAL

4.1 PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar una determinada función, $f(\underline{x})$ sujeta a un conjunto de restricciones que acota el espacio posible de soluciones $\underline{x} \in A$.

$f(x)$ se denomina **función objetivo** o función de costo. **El espacio de soluciones**, A, contiene todas las combinaciones de las **variables de decisión**, $\underline{x}$, que satisfacen las restricciones del problema. Es decir, si se corre el modelo y una de las variables de decisión $\underline{x}$ está en A, se dice que $\underline{x}$ es factible. [7]

4.2 OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA

La optimización combinatoria se puede definir como la rama de la optimización encargada de tratar con los problemas en los que las variables de decisión son discretas.[8] Es decir, un problema de optimización combinatoria $P = (S, \Omega, f)$[9], para ser considerado como tal, contiene las siguientes condiciones:

- Un conjunto de variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$;
- Un dominio de variables $D_1, \dots, D_n$;
- Un conjunto de restricciones Ω entre las variables;
- Una función objetivo $f: D_1 \times \dots \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a ser minimizada (o maximizada).

[7] GALLEGO, Olatz. "Soluciones basada en Simulated Annealing para VRPWT". España, Mayo de 2002. Tesis Doctoral (Doctor en informática). Universidad del País Vasco. Facultad de informática, p.10.

[8] DOMÍNGUEZ JIMÉNEZ, Juan José. "Búsquedas Genéticas: Métodos de optimización global y optimización combinatoria". Diciembre, 2008. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz. Departamento de lenguajes y sistemas informáticos, p.36.

[9] ARITO, Franco Luis. "Algoritmos de Optimización basados en Colonias de Hormigas aplicados al Problema de Asignación Cuadrática y otros problemas relacionados". Argentina, Abril de 2010. Tesis de Grado (Licenciado en Ciencias de la Computación). Universidad Nacional de San Luis. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales, p. 1.

Y el conjunto de todas las posibles asignaciones se le denomina *espacio de búsqueda, S,* ya que cada elemento del conjunto puede ser visto como una solución factible.

Adicionalmente, un problema es de optimización combinatoria, si X y S son combinatorios o discretos, es decir, si son conjuntos de un número finito de elementos o de infinitos elementos numerables. Por tanto, se puede decir que un procedimiento de resolución de problemas de optimización combinatoria trata de encontrar una solución $s^* \in S$ en la que $f(s^*) \leq f(s)\ \forall_s \in S$, si se desea minimizar la función objetivo, por el contrario, si se busca maximizar la función objetivo entonces $f(s^*) \geq f(s)$.[10]

Los problemas de optimización combinatoria están presentes en diversos campos como la economía, el comercio, la ingeniería, la industria o la medicina[11]. Sin embargo, a menudo estos problemas son muy difíciles de resolver en la práctica y pueden clasificarse de acuerdo a la complejidad computacional que presenten.

- **Teoría de grafos**

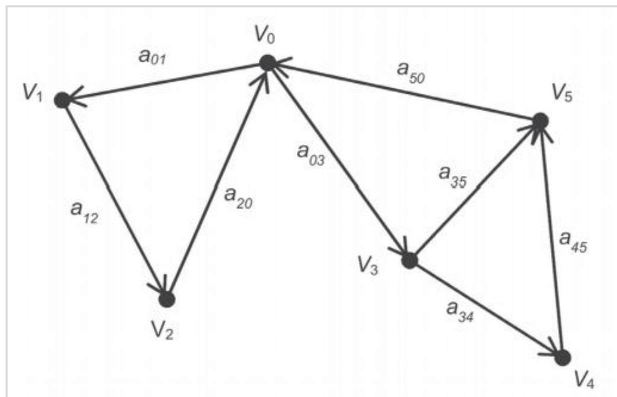
Al igual que las rutas de distribución, los grafos son estructuras discretas que constan de vértices conectados mediante arcos, es decir, un grafo es un conjunto de vértices unidos por un conjunto de líneas o flechas dependiendo de si el grafo es dirigido o no dirigido. Gráficamente los vértices se representan por círculos, las líneas (o aristas) pertenecen a los grafos no dirigidos y las flechas (o arcos) a los grafos dirigidos.

Un G*rafo Dirigido* (Figura 1) se denota por $G = (V, A)$ donde V es un conjunto vacío de elementos denominados vértices y A es un conjunto de arcos. Cada $a \in A$ tiene asociado un par ordenado de vértices de V, $i\ y\ j$, $i \neq j$; a_i se le

[10] PASTOR MORENO, Rafael. "Metalgoritmo de optimización combinatoria mediante la exploración de grafos". Junio, 1999. Tesis doctoral (Ingeniería Industrial). Universitat Politècnica de Catalunya, p. 15.
[11] ARITO; Op. Cit., p.2.

denomina origen del arco y a_j, destino del arco[12], y un *Grafo no Dirigido* consta de un conjunto de aristas a, en el que cada arista es un conjunto de exactamente un par no ordenado de vértices.

Figura 1 Representación de un grafo dirigido



Fuente: Correa (2011)

4.3 COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

Para que la resolución de un problema pueda ser abordada por un ordenador, es fundamental que tanto los datos de entrada como los datos de salida puedan ser codificados a través de cadenas o palabras sobre un alfabeto finito. Es decir, un problema, X, desde el punto de vista de la complejidad computacional es una terna (E_x, S_x, f_x), en donde E_x es un conjunto de datos de entrada, S_x un conjunto de datos de salida y f_x es una función que asigna a cada dato de entrada del problema, una salida correcta del mismo.[13]

La complejidad computacional estudia la eficiencia de los algoritmos en función de los recursos requeridos durante el cálculo para resolver un problema, los cuales

[12] CORREA, Alexander, *et al.* "Solución de problemas de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad usando la teoría de grafos". En: Revista Avances en Sistemas e Informática – UNAL. Vol. 8, No. 3. Diciembre de 2011, p.27-32.

[13] PÉREZ JIMÉNEZ, Mario y SANCHO CAPARRINI, Fernando. "Teoría de la Complejidad Computacional". En: Máquinas Moleculares Basada en ADN. Universidad de Sevilla: Secretariado de Publicaciones, 2003. [En Línea]. Disponible en: <http://www.cs.us.es/~marper/docencia/bioinspirada-2014/material/cap-2.pdf>. [Citado el 11 de Agosto de 2015].

usualmente son: el tiempo (número de pasos de ejecución de un algoritmo) y el espacio (cantidad de memoria utilizada).[14]

Existen algunos problemas de optimización combinatoria que disponen de algoritmos eficientes que los resuelven, pero en cambio otros no, debido a que son de complejidad diferente.

Hall (1996) menciona que la teoría de la complejidad computacional clasifica los problemas de acuerdo a si son tratables o intratables, es decir si son fáciles o difíciles de resolver; además este esquema de clasificación incluye las clases P, NP, NP-complete y NP-Hard. [15]

- **Problemas P**

Un problema de decisión pertenece a la clase P (Polinomial) si existe un algoritmo polinomial para resolverlo. Los problemas de complejidad polinómica son tratables, es decir que se pueden resolver en un tiempo razonable.

- **Problemas NP**

La clase NP *(Non Deterministic Polynomial time)* está formada por todos aquellos problemas que se pueden resolver por algoritmos no deterministas cuyo tiempo de ejecución está acotado por un polinomio; es decir, problemas cuyas posibles soluciones pueden ser observadas en tiempo polinomial a fin de decidir si realmente son o no soluciones correctas.[16] Los problemas NP pueden dividirse en problemas *NP-Complete* y *NP-Hard*.

---

[14] CORTÉZ, Augusto. “Teoría de la Complejidad Computacional y Teoría de la Computabilidad”. Ensayo. Lima, 2004. [En línea]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática. Disponible en:< http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/publicaciones/risi/n1_2004/a14.pdf.>. [Citado el 11 de Agosto de 2015]

[15] PASTOR MORENO; Op. Cit., p.21.

[16] PÉREZ JIMÉNEZ y SANCHO CAPARRINI; Op. Cit.

- **Problemas NP- Complete**

Los problemas NP-Completo (*en inglés NP-Complete)*, son los problemas NP más difíciles, en el sentido de que es menos probable que pertenezcan a la clase P, ya que si se pudiera encontrar la forma de resolver cualquier problema NP-Complete rápidamente (en un tiempo polinómico), entonces será posible usar ese algoritmo para resolver todos los problemas NP rápidamente. [17]

La complejidad de estos problemas depende de los parámetros de entrada, usualmente del tamaño del problema a resolver, por lo que cuando dicho tamaño aumenta, el problema se vuelve rápidamente inabordable. Esto provoca que la aplicación de técnicas determinísticas no sea eficiente para instancias de problemas de tamaño elevado.

- **Problemas NP – Hard**

Un problema es NP-duro (*en inglés Non Deterministic Polynomial Time Hard, NP-Hard*), si al resolverlo en un tiempo polinómico permitiera resolver todos los problemas de la clase NP en un tiempo polinómico.

Para los problemas de optimización NP-duros no existe ningún algoritmo en tiempo polinomial que permita determinar la solución óptima al problema[18]. Por ello se utilizan métodos aproximados mediante heurísticas y metaheurísticas que permiten aproximarse a una solución óptima, generando soluciones factibles al problema que resulten de utilidad práctica.

[17] BAÑOS NAVARRO, Raúl. "Metaheurísticas híbridas para optimización mono-objetivo y multi-objetivo. Paralelización y aplicaciones". Almería, Diciembre de 2006. Tesis Doctoral (Doctor en Informática). Universidad de Almería, p.3.

[18] MORENO DÍAZ, Pilar, *et al.* "Metaheurísticas de optimización combinatoria: Uso de Simulated Annealing para un problema de calendarización". En: Tecnologí@ y desarrollo. Universidad Alfonso X El Sabio. ISSN 1696-8085.Vol.5, Septiembre, 2007.

4.4 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Debido a la importancia de los problemas de optimización combinatoria en aplicaciones prácticas, científicas e industriales, se han desarrollado múltiples métodos para resolverlos. Las técnicas desarrolladas se pueden clasificar *Métodos exactos* y *Métodos aproximados*.

4.4.1 Métodos Exactos. Son aquellos que parten de una formulación como modelos de programación lineal (enteros) o similares, y llegan a una solución factible gracias a algoritmos de acotamiento del conjunto de soluciones.

Dentro de la categoría de métodos exactos se agrupan los algoritmos que tienen como característica el uso de técnicas analíticas o matemáticas, que aseguran la convergencia a una solución óptima, si ésta existe[19]. Algunos de los métodos exactos son mencionados a continuación.

- **Búsqueda Exhaustiva (Exhaustive Search)**

  La búsqueda exhaustiva es tal vez uno de los enfoques más antiguos para solucionar un problema y al mismo tiempo el más robusto de los métodos exactos, ya que tiene la ventaja de poderse aplicar a muchos problemas. Sin embargo, tiene la desventaja de consumir excesivo tiempo de cómputo. Este método requiere generar y evaluar todas las posibles soluciones dentro del espacio de búsqueda factible. Es una técnica simple y eficiente en algunos problemas pequeños. Se considera útil para los denominados problemas ***P***, cuyo tiempo de cómputo crece de manera polinomial.

- **Ramificación y Acotamiento (Branch and Bound)**

  El Branch and Bound se considera un método tan robusto como la búsqueda exhaustiva, pero más eficiente. La idea principal es dividir el espacio factible y buscar sólo en donde se sabe que puede estar el óptimo,

[19] MORILLO, Daniel; MORENO, Luis y DÍAZ, Javier. "Metodologías Analíticas y Heurísticas para la Solución del Problema de Programación de Tareas con Recursos Restringidos (RCPSP): una revisión". En: Revista Ingeniería y Ciencia. Vol.10, N° 19. Enero – Junio, 2014; p. 247 – 271.

descartando los espacios de soluciones factibles que no mejoran la solución actual. Este método funciona a través de un árbol de búsqueda que comienza con un nodo denominado nodo raíz y es quien está directamente relacionado con el problema a resolver. A partir de éste, surgen nuevos nodos correspondientes a sub-problemas que se van optimizando de forma individual y se van ramificando hasta llegar a la solución óptima del problema en cuestión[20].

4.4.2 Métodos Aproximados. Los problemas VRP y sus variantes son computacionalmente complejos. Esto significa que resolverlos mediante el uso de algoritmos exactos puede ser muy complicado debido a la cantidad de tiempo y recursos que necesitarían. Por lo tanto, una mejor alternativa es la utilización de *métodos aproximados*.[21] Dichos métodos aproximados probablemente no lleguen a la solución óptima, pero estarán muy próximos a ella empleando menos recursos y tiempo, permitiendo así resolver problemas con gran cantidad de variables y datos. Los métodos aproximados pueden dividirse en dos grandes grupos que son las *heurísticas* y las *metaheurísticas*.

4.4.2.1 Métodos Heurísticos. Los métodos heurísticos son utilizados cuando los problemas son tan grandes que no se conoce su solución óptima, y en caso de existir, su procesamiento computacional es excesivamente costoso o toma demasiado tiempo. Además, el uso de un método heurístico es más flexible que un método exacto, dado que permite la incorporación de condiciones de difícil modelización[22]. También pueden ser utilizados como parte de un proceso global de solución óptima, en etapas iniciales o intermedias, para después buscar mejores soluciones con otros métodos de optimización combinatoria.

[20] LI; Hong-Gui; LI, Xing-Guo."Image segmentation with pseudo branch and bound algorithm". En: Proceedings of the Eighth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Baoding. Julio, 2009, p.5.

[21] PINO, Raúl *et al.* Estado del arte para la resolución de enrutamiento de vehículos con restricciones de capacidad. En: 5th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management. Cartagena, Septiembre 2011.

[22] MARTÍ, Rafael. "Procedimientos metaheurísticos en optimización combinatoria". Universidad de Valencia. Facultad de Matemáticas. Departamento de estadísticas e investigación operativa. 2003. p. 2

Se han desarrollado muchos métodos heurísticos de naturaleza muy diferente, en su gran mayoría diseñados para problemas específicos sin posibilidad de generalización o aplicación a otros problemas similares[23], por ello los métodos heurísticos se clasifican en las siguientes categorías:

- *Métodos Constructivos:* Consisten en construir literalmente paso a paso una solución del problema. Usualmente son métodos deterministas y suelen estar basados en la mejor elección en cada iteración. Estos métodos principalmente han sido muy utilizados en problemas como el del agente viajero.
- *Métodos de Búsqueda Local:* los procedimientos de búsqueda o mejora local comienzan con una solución del problema y la mejoran progresivamente. El procedimiento realiza en cada paso un movimiento de una solución a otra con mejor valor. El método finaliza cuando, para una solución, no existe ninguna solución accesible que la mejore.
- *Métodos de Descomposición:* El problema original se descompone en sub-problemas más sencillos de resolver, teniendo en cuenta, aunque sea de manera general que todo pertenece al mismo problema.
- *Métodos de Reducción:* Consiste en identificar propiedades que se cumplen mayoritariamente por las buenas soluciones e introducirlas como restricciones del problema. El objeto es restringir el espacio de soluciones simplificando el problema.

[23] SUAREZ, Orlando. "Una aproximación a la heurística y metaheurísticas". En: Revista Inge@UAN. [En línea]. Junio, 2011. Disponible en:< http://csifesvr.uan.edu.co/index.php/ingeuan/article/view/198/170>. [Citado el 17 de Agosto de 2015].

4.4.2.2 Métodos Metaheurísticos. Las metaheurísticas son técnicas que consisten en procedimientos sistemáticos de prueba que ofrecen soluciones aceptables, no necesariamente óptimos absolutos, para problemas donde el espacio de soluciones es indeterminado o lo suficientemente amplio como para que no pueda ser evaluado en un tiempo aceptable.[24]

Las metaheurísticas facilitan una interacción entre procedimientos de mejora locales y estrategias de más alto nivel, para crear un proceso capaz de evitar estancamientos en óptimos locales y así realizar una búsqueda robusta dentro espacio de solución.

Según la descripción ofrecida por Blum y Roli[25] (2003), las características básicas de una metaheurística son:

- Son estrategias que guían el proceso de búsqueda.
- Exploran eficientemente el espacio de búsqueda con el objetivo de encontrar soluciones próximas al óptimo local.
- Las técnicas que constituyen las metaheurísticas varían entre métodos de búsqueda local simple a complejos métodos de aprendizaje.
- Pueden incorporar mecanismos para evitar quedar atrapados en óptimos locales del espacio de búsqueda.
- Permiten un nivel de descripción abstracto, no especifico del problema.
- Las metaheurísticas avanzadas utilizan la experiencia de búsqueda (haciendo uso de alguna forma de memoria) para guiar la búsqueda.

Entre las principales técnicas metaheurísticas de optimización podemos encontrar el Recocido Simulado (*Simulated Annealing*, SA), la búsqueda tabú (*Tabu Search*, TS), los algoritmos genéticos (*Genetics Algorithms,* GA), la búsqueda en vecindario variable (*Variable Neighborhoord Search,* VNS), los procedimientos de

---

[24] Ibid, p.5.

[25] BLUM, Christian y ROLI, Andrea. "Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison". En: Journal ACM Computing Surveys. Vol. 35. Septiembre, 2003; p. 268-308.

búsqueda basados en procedimientos adaptativos aleatorizadaos avaros (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedures,* GRASP), la optimización mediante colonia de hormigas (*Ant Colony Optimization,* ACO), entre otros.

En función de las características propias de cada metaheurística se pueden establecer diferentes clasificaciones[26], tales como:

- Técnicas *inspiradas vs no inspiradas en la naturaleza:* Muchas metaheurísticas, como por ejemplo los algoritmos genéticos, el recocido simulado y optimización mediante colonia de hormigas, basan su funcionamiento en aspectos inspirados de la naturaleza.
- Técnicas basadas en *Trayectorias vs Poblaciones:* un aspecto diferenciador entre las metaheurísticas radica en el número de soluciones que se utilizan en el proceso de optimización. Metaheurísticas como búsqueda tabú o recocido simulado utilizan una sola solución durante el proceso de búsqueda, por lo que se le suelen denominar *Métodos de Trayectoria,* ya que la solución describe una trayectoria desde la solución de partida hasta encontrar una solución final. Por otro lado, técnicas como los algoritmos genéticos hacen uso de un conjunto de soluciones (poblaciones) que son optimizadas de forma simultánea durante la búsqueda.
- Técnicas *estáticas vs dinámicas:* Mientras que la mayoría de heurísticas utilizan la misma función objetivo durante todo el proceso de búsquedas, otras como la búsqueda local guiada, modifican dicha función en el tiempo de ejecución, lo que ayuda a escapar de mínimos locales.
- Técnicas basadas en estructuras de *vecindario único vs vecindarios múltiples:* la mayoría de los algoritmos trabajan con una estructura de vecindario simple, es decir, el estudio del espacio objetivo no cambia durante la búsqueda. Sin embargo, existen metaheurísticas como la búsqueda en vecindario variable que diversifican la búsqueda mediante el uso de diferentes espacios de soluciones.

[26] BAÑOS NAVARRO; Op.Cit, p.6.

- Metaheurísticas con *memoria vs sin memoria:* Uno de los criterios más utilizados para clasificar las metaheurísticas es el uso que hacen de su historia de búsqueda, es decir, si utilizan memoria o no. El recocido simulado utiliza exclusivamente el estado actual del proceso de búsqueda a la hora de determinar la próxima forma de actuación. Otras técnicas como la búsqueda tabú, utilizan información previa (memoria) del proceso de búsqueda a la hora de tomar nuevas decisiones.

4.5 RUTEO DE VEHÍCULOS

El VRP es un problema de optimización combinatoria en el cual se tiene un conjunto de clientes y depósitos dispersos geográficamente y una flota de vehículos, cuyo objetivo es determinar un conjunto de rutas de costo mínimo que comiencen y terminen en los depósitos, para que los vehículos visiten a los clientes.

El primer problema planteado tipo VRP fue el del **Agente Viajero o TSP *(Travelling Salesman Problem*)** introducido por Flood en 1956. El problema recibe éste nombre porque puede describirse en términos de un agente vendedor que debe visitar cierta cantidad de ciudades en un solo viaje, de tal manera que inicie y termine su recorrido en la ciudad "origen"; el agente debe determinar cuál ruta debe seguir para visitar cada ciudad una sola vez y regresar de tal manera que la distancia total recorrida sea mínima[27].

Años más tarde de la formulación propuesta por Flood, nacen variaciones como el TSP generalizado, introducidas por Dantzig y Ramser (1959), quienes describieron una aplicación real acerca de la entrega de gasolina a las estaciones de servicio y propusieron la formulación matemática a dicho problema[28].

---

[27] ROCHA, Linda; GONZÁLEZ, Elsa y ORJUELA, Javier. "Una revisión del estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución". En: Ingeniería. Vol. 16, No. 2. Octubre, 2011, p. 37.

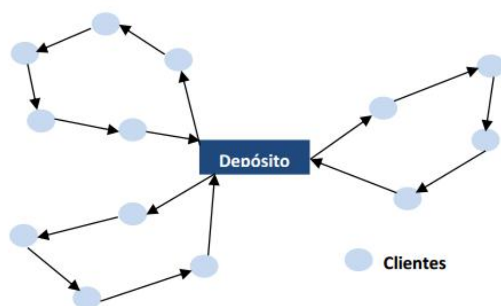
[28] RODRIGUEZ PÉREZ, Jorge. Caracterización, modelado y determinación de las rutas de la flota en una empresa de Rendering. En: E-Reding. Trabajos y proyectos fin de estudios de la E.T.S.I. Máster en Organización Industrial y Gestión de Empresas. 2012, 700 p.

La mayor parte de los problemas de ruteo de vehículos son generalizaciones del TSP. En ese sentido, éste puede considerarse como el problema de ruteo de vehículos más simple. No obstante, pertenece a la clase de problemas NP-Hard y es uno de los Problemas de Optimización Combinatoria más clásico y difundido.

Representación gráfica de un VRP

Un problema de ruteo de vehículos y su funcionamiento se puede observar de manera sencilla en la Figura 2, las características de los clientes, depósitos, vehículos y las diferentes restricciones operativas sobre las rutas, dan origen a las diferentes variaciones del problema.

Figura 2 Representación genérica del problema de ruteo de vehículos (VRP)



Fuente: Schulze & Torsten (1997)

Los principales objetivos del VRP, son obtener el menor costo total asociado a transporte, menor distancia recorrida, menor tiempo de distribución, entre otras variables, sujetas a los requerimientos de las organizaciones o casos de estudio. De acuerdo a la capacidad de la flota de vehículos, el VRP se clasifica en dos grandes categorías: El VRP homogéneo y el VRP heterogéneo[29]. El ***VRP homogéneo*** se refiere a características comunes en las que todos los nodos manejan el mismo recurso como distancia, ventanas de tiempo, retornos y entregas fraccionadas. Por su parte, el ***VRP heterogéneo*** se refiere a

[29] ROCHA, *et al.*; Op.Cit, p.38.

componentes desiguales en las que cada nodo maneja recursos distintos bien sea flota de vehículos, depósitos, viajes y componentes estocásticos en algunos casos.

Los componentes generales que se establecen para el estudio de un problema de ruteo, son: los clientes, los vehículos, los depósitos, las restricciones y los objetivos. El cliente, cuenta con una demanda establecida que necesita ser satisfecha por la flota de vehículos; la cual parte y debe regresar al depósito. En relación a este último parámetro, es necesario resaltar que debe someterse a consideración el regreso al depósito de todos los vehículos, asumiendo que estos pueden ser propiedad del conductor. Las restricciones y los objetivos, por su parte, se establecen en relación a la situación objeto de estudio.[30] Las características de los clientes, depósitos y vehículos, así como diferentes restricciones operativas sobre las rutas, dan lugar a diferentes variantes del problema[31], las cuales se mencionan a continuación:

- **Problema de Ruteo de Vehículos Capacitado (*Capacitated VRP,* CVRP):** Es considerado como la variación básica del VRP y se caracteriza porque tiene un grupo de clientes distribuidos geográficamente en una zona definida. Además, tiene un depósito que abastecerá de un único producto a todos los clientes, los cuales están separados, entre sí y con el depósito, por una distancia conocida. Cada cliente tiene una demanda constante de producto conocida, y deben ser visitados por una flota de vehículos idénticos con una capacidad limitada, es decir, que la suma de las demandas de los clientes que visita un vehículo debe ser igual o menor a la capacidad de dicho vehículo.[32]

[30] PINO; Op.cit.
[31] DAZA, Julio; MONTOYA, Jairo y NARDUCCI, Francesco. Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases. En: Revista EIA. ISSN 1794-1237. No. 12. Diciembre, 2009; p. 23-38.
[32] ARIAS ROJAS; Op. Cit, p.11

- **Problema de Ruteo de Vehículos Abierto (*Open VRP,* OVRP):** esta variación consiste en que los vehículos salen del depósito, recorren los puntos de los diferentes clientes asignados, pero no retornan al depósito, por lo que el recorrido puede terminar en cualquiera de las ubicaciones de los clientes.[33]

- **Problema de Ruteo de Vehículos con Ventanas de Tiempo (*VRP with Time Windows*, VRPTW)**: este problema establece un intervalo de tiempo en el cual el cliente está dispuesto a recibir el pedido, si la entrega se realiza fuera de dicho período, se genera un costo adicional por espera o retraso. Las ventanas de tiempo, por su parte, pueden ser de carácter blando o duro. En la primera situación, se permite alterar los límites de entrega de la mercancía, sin embargo, como consecuencia se genera una penalización que ocasiona un aumento en el costo total, y en la segunda situación no se presenta la opción de entrega fuera del intervalo establecido[34].

- **El Problema de Ruteo de Vehículos de Entregas Divididas (*Split Delivery VRP*, SDVRP)**, permite que un cliente pueda ser atendido por varios vehículos si el costo total se reduce, lo cual es importante cuando el tamaño de los pedidos excede la capacidad de un vehículo.[35]

- **Problema de Ruteo de Vehículos con Entregas y Devoluciones (*VRP with Pickup and Delivery,* VRPPD):** En estos problemas cabe la posibilidad de que los clientes pueden devolver determinados bienes, por lo

[33] BARAJAS, Wilson. "Desarrollo de un algoritmo heurístico para establecer las rutas de transporte escolar de la secretaría de educación de Bogotá". Tesis de Maestría. Bogotá, 2009. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingenierías.
[34] Ma, X. "Vehicle routing problem with time windows based on improved ant colony algorithm. En: Information Technology and Computer Science. 2010, p. 94-97.
[35] LEE, Chi-Guhn, *et al.* "A Shortest Path Approach to the Multiple-Vehicle Routing Problem with Split Pick-Ups". En: Transportation Research Part B: Methodological. Vol. 40. Mayo de 2006, p.265–284.

tanto, se debe tener en cuenta que los productos que los clientes introducen en el vehículo no deben nunca exceder la capacidad del vehículo. Esta restricción hace más difícil el problema de planificación y puede causar una mala utilización de las capacidades de los vehículos, un aumento de las distancias recorridas o a un mayor número de vehículos.[36]

- **Problema de Ruteo de Vehículos con Flota Heterogénea (*VRP Heterogeneous Fleet,* VRPHF):** Este problema se caracteriza porque los vehículos utilizados difieren en diversos atributos como la capacidad, velocidad, costos, entre otros[37] y además existe un número limitado de vehículos de cada tipo.

- **Problema de Ruteo de Vehículos Periódico (*Periodic VRP*, PVRP):** En esta variación del VRP los vehículos no deben visitar todos los clientes el mismo día, por lo que los vehículos pueden visitar solo algunos de los clientes asignados y luego regresar al depósito para visitar los demás clientes otro día. En este problema se tiene en cuenta que se debe asignar un día para visitar determinado cliente.[38]

- **Problema de Ruteo de Vehículos con Múltiples Depósitos (*Multi-Deposit VRP*, MDVRP):** En este problema existen varios depósitos y cada cliente está asignado a uno de estos, teniendo cada depósito una flota de vehículos disponibles y los vehículos deben partir del respectivo depósito visitando clientes asociados a éste y llegando de nuevo al mismo depósito.[39]

---

[36] VOLKAN, Arif. “A GA Based Metaheuristic for the Capacitated Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-up and Deliveries”. Tesis de Maestría. Estambul, 2003. Universidad Sabanci. Facultad de Ingeniería y Ciencias Naturales.
[37] CERANOGLU, Ahmet; DUMAN, Ekrem. VRP12 (vehicle routing problem with distances one and two) with side constraints.En: International Journal of Production Economics.Agosto 2013.Vol. 144.pp 461-467.
[38] BARAJAS; Op. Cit.
[39] Ibid.

- **Problema de Ruteo de Vehículos con Múltiples Viajes (*Multi-Trip VRP*, MTVRP):** Consiste en que cada vehículo puede llevar a cabo varias rutas en el mismo periodo de planeación[40]. Resolver este tipo de problema no sólo implica el diseño de un conjunto de rutas, sino también la asignación de esas rutas a los vehículos disponibles.

- **Problema de Ruteo de Vehículos con Múltiples Capacidades (*Multi Capacity VRP,* MCVRP):** En este problema se realiza el transporte y entrega de múltiples productos gracias a que los vehículos presentan varios compartimientos dentro de los cuales se pueden almacenar las diversas mercancías, las cuales deben permanecer separadas durante el viaje.[41]

- **Problema de Ruteo de Vehículos con Múltiples Objetivos (*Multi Objective VRP,* MOVRP):** Consiste en utilizar varios objetivos que pueden relatar diferentes aspectos del VRP como ruta (costo, beneficio, etc.), nodos y arcos (ventanas de tiempo, satisfacción del cliente, etc.) y recursos (mantenimiento de flota de vehículos, especificaciones de producto, etc.)[42]

- **Problema de Ruteo de Vehículos Estocástico (*Stochastics VRP*, SVRP):** El SVRP se refiere a una familia de problemas, que combinan las características de los programas estocásticos y enteros, y son a menudo considerados como computacionalmente intratables (Gendreau et al., 1996). Los parámetros aleatorios pueden ser la presencia de clientes, la naturaleza de la demanda de los clientes en un lugar determinado, el

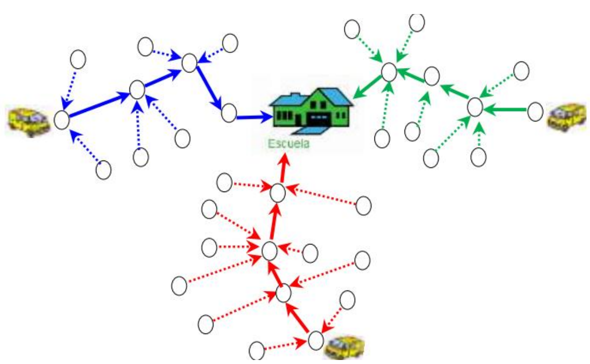
[40] BATTARRA, María; MONACI, Michele y VIGO, Daniele. "An adaptive guidance approach for the heuristic solution of a minimum multiple trip vehicle routing problem". En: Computers & Operations Research, Vol. 36. 2009, p. 3041-3050.
[41] RODRIGUEZ, Op. Cit.
[42] ROCHA, *et al.*; Op. Cit, p.41

tiempo como tiempo de servicio, o tiempo de viaje o las ventanas de tiempo[43].

4.5.1 Problema de Rutas Escolares (SBRP). Éste consiste en localizar una o varias rutas sobre una red, con origen conocido y destino común, en donde se establecen paraderos por los cuales los buses deben recoger a los estudiantes que ahí se encuentren para trasladarlos al establecimiento educacional. Todos los estudiantes deben ser trasladados a la escuela y aquellos que no se encuentren en un paradero deben ser asignados a uno de ellos.

El objetivo principal del problema de rutas escolares es minimizar los costos del recorrido de cada bus y los costos de asignación de los estudiantes a sus respectivos paraderos. El costo de asignación se considera proporcional a la distancia total que deben caminar los estudiantes a sus correspondientes paraderos asignados. Los buses tienen una capacidad limitada de pasajeros que se tiene que respetar.

Figura 3 Problema de Rutas Escolares



Fuente: Araya; Obreque & Paredes (2012)

[43] BERHAN, Eshetie; BESHAH, Birhanu y KITAW, Daniel. “Stochastic Vehicle Routing Problem: A Literature Survey”. En: Journal of Information & Knowledge Management. Vol. 13, No. 3. Septiembre,2014; p.1-12.

En la Figura 3 se muestra un esquema del problema con tres rutas. Las flechas continuas corresponden a las rutas principales por donde pasa el bus y las flechas segmentadas corresponden a las asignaciones de los clientes hacia los paraderos.

El problema de rutas escolares, es una variación del problema de ruteo de vehículos (VRP), y por lo tanto tiene características muy similares; sin embargo, el SBRP es diferente del VRP a causa de algunas propiedades. Mientras que un problema de ruteo de vehículos tradicional se ocupa principalmente del transporte de cargas, el problema de rutas escolares está relacionado con el transporte de estudiantes, por lo cual se debe proporcionar satisfacción humana y eficacia durante el viaje. Debido a estas razones, SBRP es más complicado que el VRP[44].

Características del SBRP

Existen tres factores que hacen del problema de rutas escolares único: la eficiencia (costo total para ejecutar un autobús escolar), efectividad (qué tan bien se satisface la demanda de servicio) y equidad (justicia del autobús escolar para cada alumno)[45]. Además, el SBRP en la realidad implica dos problemas interrelacionados. Uno de los problemas es la asignación de los estudiantes a sus respectivas paradas de autobús y el segundo problema es la programación de la ruta del autobús a las paradas de autobús (Spasovic *et al*, 2001).

Adicionalmente la adecuación de un sitio para ser una parada de autobús escolar se ve influenciada por características tales como la densidad del tráfico, la proximidad a las esquinas, y adyacencia a la propiedad pública. Debido a la complicada naturaleza de estos criterios se supone que los posibles sitios de

[44] DEMIRAL, Fatih; GÜNGÖR, Íbrahim y ORUC, Kenan. "Optimization at Service Vehicle Routing and a Case Study of Isparta, Turkey". En: First Inernational Conference on Management and Economic (ICME). Tirana, Albania. 2008, p. 374 – 387.
[45] Ibid.

parada de autobús se han seleccionado por un analista del transporte escolar (Bowerman *et al*, 1995) [46].

Desrosiers *et al*. (1981) establece que el problema de rutas escolares está compuesto por un conjunto de pequeños sub-problemas. Los autores proponen la siguiente descomposición[47] (como se menciona en el planteamiento del problema):

- *Preparación de datos:* especifica la red de carreteras, y se preparan cuatro tipos de datos para SBRP: estudiantes, escuelas, vehículos y matriz origen-destino[48].
    - Los datos de los estudiantes incluyen la ubicación (dirección) de sus hogares, la escuela de destino de un estudiante, y el tipo de estudiante (general o discapacitados).
    - Datos de la escuela contienen información acerca de la ubicación de la escuela, el inicio y el tiempo final de las escuelas para que lleguen los autobuses, y el tiempo máximo de viaje de un estudiante en un autobús.
    - Los datos de los vehículos incluyen la ubicación origen, tipos de autobuses escolares y disponibilidad.
    - La matriz origen-destino almacena los tiempos de viaje más cortos o distancias entre pares de nodos (la escuela, la ubicación del estudiante, y la ubicación de origen de autobuses).
- *Selección de Paraderos:* busca seleccionar un conjunto de paradas de autobús y asignar estudiantes a estas paradas. Para las escuelas en un entorno rural, a los estudiantes se supone son recogidos en sus casas. Sin embargo, en las zonas urbanas, se supone que los estudiantes deben

---

[46] BOWERMAN, Robert; HALL, Brent y CALAMAI, Paul. "A multi-objective optimization approach to urban school bus routing: Formulation and solution method". En: Transportation Research. Part A: Policy and Practice. Vol. 29, No. 2. 1995; p. 107–123.
[47] ARAYA, Nicole; OBREQUE, Carlos y PAREDES, Gérman. "Un Modelo de Programación Lineal Entera Mixta para el Problema de Ruteo de Vehículos en el Transporte Escolar". En: Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación operativa. Rio de Janeiro, Brasil. Septiembre 24 – 28, 2012; p. 2293- 2302.
[48] PARK; "The school…", Op.cit.

caminar a una parada de autobús desde sus hogares y allí tomar el autobús, esta selección de las paradas se omite a menudo en la literatura, dado que muchos estudios asumen que la ubicación de las paradas de autobús se les da. Sólo algunos consideran la parada de autobús utilizando algoritmos heurísticos[49].

- *Generación de la ruta:* En la generación de ruta de autobús, las rutas escolares se construyen. Estas se pueden construir por medio de dos enfoques. El primer enfoque consiste en construir una ruta grande por medio del algoritmo del problema del vendedor viajero; que considera todas las paradas y particiones en rutas de menor tamaño, considerando las limitaciones. El segundo enfoque es separar a los estudiantes en grupos para que cada grupo se pueda servir como una ruta satisfaciendo las restricciones que existen. Después de que las rutas escolares se generan, la heurística de mejora se puede aplicar en las rutas[50].
- *Ajuste a los horarios de la escuela:* En la mayoría de los estudios, el tiempo de inicio y finalización de las escuelas son las limitaciones. Sin embargo, hay una serie de obras que las consideran como variables de decisión y los intentos de encontrar el punto óptimo de inicio y final para maximizar el número de rutas que pueden ser servidas secuencialmente por el mismo bus, para reducir el número de autobuses usados[51].
- *Programación de la ruta:* en esta se especifica la partida exacta y hora de finalización de cada ruta y forma una cadena de rutas que se puede ejecutar sucesivamente por el mismo bus[52].

Dentro de los distintos trabajos relacionados con el problema de rutas escolares, es posible distinguir distintas variantes. Algunas de ellas se enfocan en: el área urbana/rural; problemas de horario mañana/tarde; traslado de estudiantes de

[49] Ibid.
[50] Ibid.
[51] Ibid.
[52] Ibid.

educación especial; múltiples escuelas; flota de vehículos homogénea/heterogénea; múltiples objetivos, etc. Esta clasificación se expande aún más si se considera, también, el tipo de restricciones utilizadas, por ejemplo:

- Tiempo máximo que un pasajero viaja en el bus
- Distancia máxima que un usuario camina hacia un paradero
- Capacidad del bus
- Ventanas de tiempo de las escuelas y de los usuarios
- Cantidad máxima de alumnos que esperan en un paradero
- Número mínimo de alumnos necesarios para generar una ruta

5 REVISIÓN DE LITERATURA

Formalmente, los inicios del problema de rutas escolares se remontan a 1969 cuando Newton y Thomas[53] resolvieron el problema para un solo colegio utilizando el modelo del agente viajero. Una vez obtuvieron la ruta de menor distancia, la dividieron en rutas individuales para cada bus de acuerdo a su capacidad. En el transcurso del tiempo se han realizado diversos estudios con el fin de resolverlo; así mismo han sido variados los modelos planteados y las técnicas de solución propuestas en las investigaciones y casos de estudios planteados a lo largo de estos años. Por esta razón y para el estudio en cuestión se definirá una ventana de tiempo para la realización de la presente revisión de la literatura en la cual se considerarán investigaciones realizadas desde el año 2000 hasta ahora, con el fin de obtener información valiosa de la evolución y actualización del SBRP en los últimos quince años.

Spasovic, Lazar[54] ***et al.*** en **2001** en su trabajo evaluaron y compararon los resultados de tres técnicas utilizadas en el problema de rutas escolares: una heurística de ahorro de tiempo**,** el programa informático "Router" y el método de barrido, para un caso estudio en una escuela primaria del municipio de Riverdale, New Jersey, cuyo objetivo principal se enfocaba en minimizar los costos de operación, los cuales estaban en función de la velocidad del vehículo, la distancia entre las paradas, el número de paradas, el tiempo de permanencia del pasajero y el tamaño bus, a su vez que cumplían con los requisitos de servicio y ventanas de tiempo de la escuela. Al finalizar el estudio los autores observan que el método Router generó los menores costos de operación, sin embargo, resaltan que el método heurístico de ahorro de tiempo es el más exacto ya que representa todas

[53] NEWTON, Rita y THOMAS, Warren. "Design of school bus routes by computer". En: Socio-Economic Planning Sciences. Vol. 3, No. 1, (1969); p. 75–85.

[54] SPASOVIC, Lazar *et al.* "A Methodology for Evaluating of School Bus Routing - A Case Study of Riverdale, New Jersey". En: Transportation Research Board, 80th Annual Meeting. 2001. Washington, D.C.

las diversas limitaciones, así como múltiples depósitos, mientras que los múltiples depósitos con el método ROUTER se requeriría reprogramación y con el método de barrido numerosas iteraciones.

Lyo, Li y **Z, Fu**[55] en **2002** realizan un caso estudio en el que abordan el SBRP como un problema de optimización combinatoria multi-objetivo, y proponen un algoritmo heurístico para su solución, el cual desarrolla una combinación de métodos heurísticos y de optimización (algoritmo húngaro, el algoritmo de ruta más corta de Dijkstra y el algoritmo de ruta más corta de Lawler). Dentro de los objetivos propuestos se incluye el minimizar el número total de autobuses utilizados, el tiempo total del estudiante en el autobús, el tiempo total de viaje del autobús, además de conseguir un balance de carga entre los autobuses.

En este mismo año **Corberán, Angel; Fernández, Elena; Laguna, Manuel y Martí, Rafael**[56] abordaron el problema de rutas escolares en una zona rural, mediante un modelo de ruteo de nodos con múltiples objetivos, donde la naturaleza del problema de optimización era bi-objetivo, es decir, buscaban la minimización del costo y del tiempo del transporte. Para este modelo trabajaron un procedimiento de solución que se basa en la construcción, mejora y combinación de soluciones en el marco del enfoque evolutivo conocido como "Búsqueda de dispersión", además de la utilización de dos heurísticas constructivas: la primera basada en un mecanismo de agrupamiento, y la segunda, basada en la creación de sectores en torno a lugares que son elegidos de forma secuencial.

De igual manera **Ripplinger, David**[57] en **2005** ha enfocado su investigación en el problema de rutas escolares en zonas rurales, cuyo objetivo ha estado centrado en minimizar el costo financiero de transporte de los estudiantes hacia y desde su

[55] LYO, Li and Z, Fu. "The School Bus Routing Problem: A case study". En: Journal of the Operational Research Society. Vol. 53, 2002, p. 552-558.
[56] CORBERÁN, Angel; FERNÁNDEZ, Elena; LAGUNA, Manuel y MARTÍ, Rafael. "Heuristic solutions to the problem of routing school buses with multiple objectives". En: Journal of the Operational Research Society. Vol. 53. 2002; p. 427-435.
[57] RIPPLINGER, David. "Rural School Vehicle Routing Problem". En: Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board. 2005, p. 105 -110.

escuela en un tiempo oportuno. En su trabajo resalta que, debido a las características únicas del problema en las zonas rurales, los métodos heurísticos tradicionales para su solución pueden producir resultados poco prácticos, y es por eso que Ripplinger desarrolló una nueva heurística denominada Heurística de Ruteo Rural (*Rural Routing Heuristic*, RRH), la cual consta de dos fases: una primera fase para construir una ruta inicial, y posteriormente en la segunda fase mejorarla utilizando el algoritmo de búsqueda tabú.

Para probar la eficacia de la heurística el autor ejecutó una simulación con un conjunto de datos, aplicados a tres algoritmos más (2-opt, el método de Clarke & Wright modificado y el método rLBH) para generar una comparación de resultados, en los cuales se obtuvo que la heurística de ruteo rural es el algoritmo más eficaz de los considerados para el cumplimiento del objetivo previsto.

Schittekat, Patrick; Sevaux, Marc y Sorensen, Kenneth[58] en **2006** adoptaron un enfoque en el que la escuela es idéntica a un depósito, y una ruta empieza y termina en la escuela. Ellos desarrollaron un modelo matemático para un SBRP con escuela única, a través de una formulación de programación entera, en la que se supone que todos los estudiantes representan una unidad para ser transportados y que la capacidad de los autobuses se puede expresar como un número entero de unidades.

Iskander, Wafik; Jaraiedi, Majid y Emami, Flora[59] en **2006** enfocan el problema de rutas escolares dirigido a un distrito multi-escuela. Usando un nuevo algoritmo, en el que varias rutas pueden ser asignadas al mismo bus, por lo cual es un algoritmo que está desarrollado para minimizar el costo total de transporte. El algoritmo agrupa las paradas, el desarrollo de las rutas lo realiza mediante la resolución modificada "Problema del vendedor viajero", en la que se investigan

[58] SCHITTEKAT, Patrick; SEVAUX, Marc y SORENSEN, Kenneth. “A mathematical formulation for a school bus routing problem”. En: Service Systems and Service Management. Vol, 2. 2006; p. 1552–1557.
[59] ISKANDER, Wakif; JARAIEDI, Majid y EMAMI, Flora. “A Practical Approach for School Bus Routing and Scheduling”. En: Annual conference and exposition, IIE. Orlando, FL. 2006.

todos los subconjuntos de los intercambios de tres enlaces, y asigna rutas de autobuses para producir las listas finales. Este algoritmo se aplicó a un distrito escolar que tiene 27 escuelas, y mostró una mejora significativa con respecto a las listas existentes y horarios producidos.

De igual manera **Bektas, Tolga y Elmastas, Seda**[60] en el **2007** estudiaron y modelaron el problema de rutas escolares como un problema de ruteo de vehículos abierto (*Open Vehicle Routing Problem,* OVRP) con una capacidad y distancia limitada. Para la solución de este problema presentaron una formulación de programación lineal entera, resuelta a través de un optimizador de programación entera comercial, que dentro de los resultados obtenidos se destaca el 28,6% de ahorro en el costo total de viaje, en comparación con la implementación del esquema de ruteo que se estaba manejando.

Fügenschuh, Armin[61] en ese mismo año **2007** presenta un modelo de programación entera para la coordinación integrada de los horarios de inicio de la escuela, y de los servicios de los autobuses públicos para los alumnos de las zonas rurales en Alemania. Fügenschuh discute en su estudio, el pre-procesamiento de técnicas, reformulaciones del modelo y planos de corte que se puedan incorporar en un algoritmo de rama y corte. Los resultados obtenidos muestran que en las zonas de ensayo un número mucho menor de autobuses sería suficiente; si las escuelas inician sus actividades en momentos diferentes. Este problema fue formulado como un problema de programación entera basado en el problema de rutas para vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW).

---

[60] BEKTAS, Tolga y ELMASTAS, Seda. “Solving school bus routing problems through integer programming”. En: Journal of the Operational Research Society. Vol. 58. 2007; p. 1599 -1604.
[61] FÜGENSCHUH, Armi. “Solving a school bus scheduling problem with integer programming”. En: European Journal of Operational Research. Vol. 193. 2009; p. 867–884.

Moura, José Luis; Ibeas, Ángel y Dell'Olio, Luigi[62] en **2007** plantean una metodología fundamentada en dos fases: en la primera fase plantean un problema clásico de ruteo a través de Programación Lineal Entera Mixta y una segunda fase con un enfoque de programación bi-nivel, el cual trata de encontrar el vector de horas de entrada en los colegios, intentando que un mismo autobús realice más de una ruta; de esta manera la función objetivo de dicho problema fue minimizar los costos totales de viaje del sistema de rutas para atender la demanda del colegio. Dentro de los métodos de solución se encuentra el algoritmo de Hooke-Jeeves. Es así como la principal aportación de este trabajo es la posibilidad de modificar horas de entrada en los colegios, con lo que además de optimizar los recorridos de los autobuses para cada colegio se minimiza el número de éstos.

Dos años más tarde **Park, Junhyuk, y Kim, Byung-In**[63] en **2009** publican en su artículo "*The school bus routing problem: A review*", con la intención de proporcionar una revisión global del problema de rutas escolares; en el cual describen los cinco sub-problemas que componen el SBRP, al igual que intentan clasificar el problema del SBRP de acuerdo a algunos criterios y características definidos del mismo. Adicional a esto realizan una clasificación basada en los métodos de solución utilizados para la solución del SBRP a través del tiempo.

Schittekat, Patrick, *et al.* [64] en **2011** tuvieron como objetivo la comprensión de dos importantes sub-problemas del SBRP: la generación de la ruta del autobús y la selección de paradas del autobús en su forma más básica. Con este fin, se precisa el papel del problema de rutas escolares (SBRP) como una variante del problema de ruteo de vehículos en el que tres decisiones simultáneas tienen que hacerse: (1) determinar el conjunto de paradas a visitar, (2) determinar para cada estudiante su parada, y (3) determinar las rutas que se encuentran a lo largo de

[62] MOURA, José Luis; IBEAS, Ángel y DELL'OLIO, Luigi. "Diseño de rutas de transporte escolar con ventanas temporales móviles". En: XIII Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, Santiago. Octubre, 2007. 14 p.
[63] PARK; "The school…". Op.cit, p. 311–319.
[64] SCHITTEKAT, Patrick, *et al.* "A metaheuristic for the school bus routing problem with bus stop selection". En: European Journal of Operational Research. Vol. 229. 2013. p.518–528.

las paradas elegidas. La solución del problema fue realizada a través de una *Metaheurística GRASP + VND***.** Esta metaheurística utiliza una fase de construcción GRASP, seguida de una fase de mejora (VND) Variable descendente de Barrio.

De igual manera **Ledesma, Jorge y Salazar, Juan José**[65] en **2011** presentan una generalización del problema de ruteo de vehículos, conocido como el problema del vendedor viajero multi-vehículo, modelando una familia de problemas de enrutamiento que combinan la selección de parada y la generación de ruta de autobús. El modelo propuesto se basa en la formulación del flujo de mercancías que combina variables continuas con variables binarias por medio de restricciones de acoplamiento. De esta manera desarrollaron un algoritmo de ramificación y corte que es implementado y probado en una gran familia de casos simétricos y asimétricos derivados de los problemas generados al azar, que muestra la utilidad de las desigualdades válidas propuestas en su estudio.

Martínez, Luis y Viega, José[66] en **2011** presentaron el diseño y la implementación de un servicio de autobús escolar innovador y de alto estándar, que introduce un procedimiento integrado basado en las formulaciones tradicionales del problema de rutas escolares: la programación lineal entera mixta (*Mixed Integer Linear Programming*, MILP). Para la solución los autores adoptaron por dividir el problema en dos etapas: una primera etapa que identifica los puntos de concentración más adecuados de los estudiantes, y una segunda etapa, que calcula las rutas óptimas que sirven a esas paradas.

[65] LEDESMA, Jorge y SALAZAR, Juan. “Solving school bus routing using the multiple vehicle traveling purchaser problem: A branch-and-cut approach”. En: Computers & Operations Research. Vol. 39. 2012; p. 391 - 404.

[66] MARTÍNEZ, Luis y VIEGA, José. “Design and Deployment of an Innovative School Bus Service in Lisbon”. En: Procedia - Social and Behavioral Sciences. Vol. 20. 2011, p. 120-130.

Kim, Byung-In; Kim, Seongbae y Park, Junhyuk[67] en **2012** estudiaron y modelaron el problema de rutas escolares como un problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (*Vehicle Routing Problem with Time Windows,* VRPTW). Adicionalmente, proponen dos problemas de asignación basados en métodos exactos para los casos especiales y un algoritmo heurístico para los casos más generales.

Euchi, Jalel y Mraihi, Rafaa[68] en **2012** presentaron e implementaron una metaheurística híbrida basada en una colonia de hormigas artificial (*Hibryd Artificial Ant Colony,* HAAC) con un algoritmo de búsqueda local de vecindad variable (*Variable Neighborhood Search*, VNS) para resolver el problema de rutas escolares en la zona urbana. Los autores describen la HAAC en 4 pasos que son: la representación de soluciones, la construcción de soluciones, la actualización de la feromona y la búsqueda local de vecindad variable. Así mismo, realizan la comparación de los algoritmos de la colonia de hormigas artificial y el del híbrido AAC (AAC+VNS), siendo este último el que arroja mejores resultados, evidenciando que la búsqueda local de vecindad variable mejora el rendimiento de la colonia de hormigas artificial.

Araya, Nicole; Obreque, Carlos Enrique y Paredes Germán[69] al igual en **2012** en su trabajo presentan un modelo de Programación Lineal Entera Mixta basado en Flujo Multicommodity. Al igual que consideran El problema de Ruteo de Vehículos para el Transporte Escolar (RVTE) como un caso particular del problema de Localización de Instalaciones Extensas con Restricciones de Capacidad (LIERC). El modelo propuesto en su estudio considera un destino común (una escuela), con capacidad homogénea en la flota de buses y que

---

[67] KIM, Byung-In; KIM, Seongbae y PARK, Junhyuk. "A school bus scheduling problem". En: European Journal of Operational Research. Vol. 218. 2012, p. 577-585.

[68] EUCHI, Jalel y MRAIHI, Rafaa. "The urban bus routing problem in the Tunisian case by the hybrid artificial ant colony algorithm". En: Swarm and Evolutionary Computation. Vol. 2. 2012, p. 15-24.

[69] ARAYA, Nicole; OBREQUE, Carlos y PAREDES, Gérman. "Un Modelo de Programación Lineal Entera Mixta para el Problema de Ruteo de Vehículos en el Transporte Escolar". En: Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación operativa. Rio de Janeiro, Brasil. Septiembre 24 – 28, 2012; p. 2293- 2302.

minimiza los costos de la ruta y la asignación a los paraderos. Para la solución del modelo, se utiliza el Solver Cplex, con AMPL, para encontrar soluciones óptimas en instancias pequeñas que muestren la efectividad del modelo. Según los resultados mostrados observaron que los tiempos CPU crecen rápidamente a medida que se incrementa el tamaño de la red. Esto se explica, básicamente, porque se trata de un método exacto para resolver un problema NP-Hard. Sin embargo, en todas las instancias de prueba se obtuvo la solución óptima. Así mismo el principal objetivo de esta investigación fue resolver el problema RVTE minimizando el costo de las rutas y la distancia total que deben caminar los clientes (Estudiantes) asignados al paradero.

Park, Junhyuk; Tae, Hyunchul y Kim, Byung-In[70] en **2012** desarrollaron un algoritmo de mejora de carga mixta para el problema de rutas escolares, que busca encontrar un conjunto óptimo de rutas para una flota de vehículos, y lo comparan con el algoritmo de carga mixta propuesto por Braca et al. (1997). Adicionalmente proporcionaron un análisis cuantitativo para medir los efectos de permitir la carga mixta, es decir, llevar en un mismo autobús estudiantes de diferentes escuelas.

Bock, Adrian, *et al.*[71] en **2012** trabajan en el problema de rutas escolares, mediante ramificación de árboles, formando un conjunto de nodos que a su vez forman subconjuntos, con los cuales es posible generar rutas que cubran determinados nodos del árbol general. Así mismo, los arboles generales se pueden dividir en partes más pequeñas (sub-árboles) de tal manera que se requiere al menos un bus para cada pieza, de esta manera cada pieza se puede resolver casi de manera óptima a través de un método de Euler de recorrido similar. En este trabajo, se da un tiempo de cuatro algoritmos de aproximación polinómica, cuando los niños y la escuela se encuentran en los vértices de un árbol fijo, también se presenta un factor de aproximación constante para la

[70] PARK, Junhyuk; TAE, Hyunchul y KIM, Byung-In. “A post-improvement procedure for the mixed load school bus routing problem”. En: European Journal of Operational Research. Vol.204. 2012, p. 204-213.
[71] BOCK, Adrian, *et al*. “The School Bus Problem on Trees”. En: Algorithmica. Vol.67. 2013, p. 49 - 64.

variante en el que se tiene un número fijo de autobuses a usar, y el objetivo es reducirlos al mínimo.

Así mismo **Díaz Parra, Ocotlán, *et al.***[72] en **2012** desarrollan una solución para el problema de rutas escolares mediante la aplicación de un algoritmo bio-inspirado en la transferencia vertical o algoritmo genético. Los autores proponen este algoritmo para resolver el SBRP con las características de la escuela individual, servicio urbano, el alcance del problema (de la mañana), carga mixta (no permitido), los estudiantes-educaciones especiales (no se considera), Homogénea flota, y los Objetivos (Minimizar el número de autobuses utilizados y la distancia total de viaje en autobús). El uso de este algoritmo para resolver casos SBRP muestra buenos resultados acerca de los viajes totales del autobús, la distancia y el número de autobuses con las Rutas.

Arias Rojas, Juan; Jiménez, José Fernando y Montoya, Jairo[73] en **2012** consideran un estudio de caso de SBRP para una escuela en Bogotá, Colombia. El problema se resuelve mediante la optimización de colonia de hormigas (ACO). Se realizaron experimentos computacionales se con datos reales, los resultados condujeron a una mayor utilización de autobuses y la reducción en los tiempos de transporte con la entrega a tiempo a la escuela. La herramienta propuesta demostró su utilidad para la toma de decisiones en un caso de escuela real así: se supera el actual recorrido por la reducción de la distancia total recorrida por el 8,3% y 21,4%, respectivamente, en las jornadas de la mañana y de la tarde.

Ben Sghaier, Sayda; Ben Guedria, Najeh y Mraihi, Rafaa[74] en **2013** desarrollaron un plan de transporte para reducir al mínimo los costos de funcionamiento de toda la red, mientras se cumplía con un conjunto de restricciones tales como la capacidad de los autobuses y la distancia máxima

[72] DÍAZ PARRA, Ocotlán, *et al.* "A Vertical Transfer Algorithm for the School Bus Routing Problem". En: IEEE. 2012, p. 66 – 71.

[73] ARIAS ROJAS; Op.cit, p. 193-208.

[74] BEN SGHAIER, Sayda; BEN GUEDRIA, Najeh y MRAIHI, Rafaa. "Solving School Bus Routing Problem with Genetic Algorithm". En: International Conference on Advanced Logistics and Transport (ICALT). 2013, p. 7-12.

recorrida por cada autobús. Además, consideraron que cada autobús tiene que utilizar la misma ruta para recoger y dejar a los estudiantes de una misma escuela. Este plan lo ejecutaron con la implementación de algoritmos genéticos (*Algorithm Genetics*, AG) con nuevos operadores, entre ellos: operador de tirón, de intercambio, de deslizamiento, organizador y de permutación.

Kim, Taehyeong, y Park, Bum-Jin[75] nuevamente en **2013** realizan un estudio considerando un solo depósito y una sola escuela; la escuela tiene una ventana de tiempo de llegada, es decir, el bus no debe llegar a la escuela antes de la hora más temprana de llegada y más tarde de la hora límite de llegada, al igual que consideran, los vehículos de tipo homogéneo, lo que significa que todos estos tienen la misma capacidad. La formulación matemática para el problema de rutas escolares la proporcionan como un problema de programación entera mixta; en el cual tienen como objetivo minimizar el costo total incurrido en el servicio a todos los estudiantes. La resolución del problema se realizó mediante un método exacto (Branch & Bound) y mediante una heurística (Harmony Search), realizando la comparación de estas dos técnicas de solución para validar y evaluar el algoritmo heurístico. Como resultado, la solución de la función objetivo por HS era exactamente la misma que la de método exacto; Solo que, HS produce los mismos resultados en un tiempo muy corto. Sin embargo, no se garantiza que la solución de HS sea el óptimo global si el tamaño de red aumenta.

Lingmei, Huo; Guifeng, Yan; Bowen, Fan; Hongzhou, Wang y Weitao, Gao[76] en **2014** construyeron un modelo matemático para el problema de rutas escolares, que lo resolvieron mediante el algoritmo de optimización basado en la colonia de hormigas (*Ant Colony Optimization,* ACO), en el que consideraron limitaciones en el diseño de la ruta de autobús tales como: la distancia máxima recorrida por el estudiante entre el hogar y la parada, excluir a los estudiantes que viven a menos

[75] KIM, Taehyeong, y PARK, Bum-Jin. “Model and Algorithm for Solving School Bus Problem”. En: Journal of Emerging Trends in Computing and Information Sciences. Vol. 4. No. 8. 2013, p. 596 -600.
[76] LINGMEI, Huo, *et al.* “School Bus Routing Problem Based on Ant Colony Optimization Algorithm”. En: IEEE, Transportation Electrification Conference (ITEC Asia-Pacific). 2014, p. 1-5.

de un kilómetro de la escuela y cada para se asigna a un solo autobús. Además, para abordar el análisis de la distribución, seleccionar las paradas autobús y generar la ruta, emplearon la estrategia de ubicación – asignación – ruteo (*Location - Allocation – Routing*, LAR Strategy), que permite asignar a los estudiantes a unos sitios seleccionados y posteriormente generar la ruta.

Fonseca, Marcelo; Machry, Jose Fernando; Silva, Cristiano; Franco, Marcelo y Ramos, Nilson[77] en **2014** presentaron una investigación del problema de rutas escolares en una zona rural, en la que utilizaron un conjunto completo de datos georreferenciados reales, con el objetivo de optimizar el transporte diario de los estudiantes a través de vehículos con capacidades heterogéneas. Para ello los autores plantearon un modelo de programación lineal entera mixta y un algoritmo basado en GRASP, que arrojaron resultados idénticos, con la diferencia que el algoritmo basado en GRASP ofrece un rendimiento de proximidad al óptimo en un tiempo computacional extremadamente competitivo.

[77] FONSECA, Marcelo, *et al.* "A Real Geographical Application for the School Bus Routing Problem". En: Intelligent Transportation Systems Conference (ITSC). 2014, p. 2762 – 2767.

6 FORMULACIÓN DEL MODELO

Con el fin de integrar los modelos de asignación y ruteo, planteados en el capítulo anterior y tomando como base la revisión de la literatura; en esta sección se describe como fue el proceso de formulación del modelo matemático para el problema de Rutas Escolares, objeto de esta investigación.

6.1 CARACTERÍSTICAS DEL MODELO

De acuerdo a la clasificación basada en las características del SBRP, nuestro modelo a estudiar consta de las siguientes características:

Tabla 1. Características del modelo SBRP

CRITERIO	CONSIDERACIÓN
Número de escuelas:	Una sola escuela.
Lugar de Servicio:	Urbano
Alcance del problema:	Problema de la Mañana; es decir la recolección de los estudiantes en cada una de las paradas para ser llevados a la escuela.
Carga:	Única, Estudiantes de una sola Escuela.
Flota:	Homogénea
Origen y destino:	Son iguales, Todos los vehículos salen y llegan al origen o escuela.
Paradas:	Se ingresa la una lista de paradas potenciales, establecidas en cada instancia.
Objetivo:	Minimización de los costos del trasporte, teniendo en cuenta, la distancia total recorrida por los autobuses y la cantidad de paradas a visitar.
Restricciones:	▪ Capacidad del Vehículo ▪ Distancia o tiempo Máximo viajada por cada ruta. ▪ Máxima distancia que pueden caminar los estudiantes.

6.2 MODELO MATÉMATICO BÁSICO

En la etapa de formulación del modelo matemático partimos de un modelo base, el cual se tomó del mostrado en el artículo “A mathematical formulation for a school bus routing problema” escrito por Schittekat, Patrick; Sevaux, Marc y Sorensen, Kenneth[78]; ya que contiene la gran mayoría de características descritas anteriormente.

Tenemos:

<u>ÍNDICES</u>

$i, j: Nodos/paradas$

$k: Autobuses$

$l: Nodo\ Estudiante/Ubicacion\ casa\ estudiante$

<u>CONJUNTOS</u>

$V: Conjunto\ de\ paradas\ potenciales$

$E: Conjunto\ de\ todos\ los\ arcos\ entre\ las\ paradas$

$S: Conjunto\ de\ todos\ los\ estudiantes$

$k: Número\ de\ autobuses$

<u>PARÁMETROS</u>

$Cij: Costos\ de\ atravesar\ el\ arco\ ij$

$C: Capacidad\ de\ los\ autobuses$

$i = 0, índice\ para\ la\ escuela$

$$Sli: \begin{Bmatrix} 1 & Indica\ si\ el\ estudiante\ l\ puede\ caminar\ hasta\ la\ parada\ i \\ 0 & En\ caso\ contrario \end{Bmatrix}$$

[78] SCHITTEKAT, Patrick; SEVAUX, Marc y SORENSEN, Kenneth. “A mathematical formulation for a school bus routing problem”. <u>En</u>: Service Systems and Service Management. Vol, 2. 2006; p. 1552–1557.

VARIABLES DE DECISIÓN

$$Xijk: \left\{\begin{matrix} 1 & Si\ el\ autobús\ k\ atraviesa\ el\ arco\ i\ a\ j \\ 0 & En\ caso\ contrario \end{matrix}\right\}$$

$$Yik: \left\{\begin{matrix} 1 & Si\ el\ autobús\ k\ visita\ la\ parada\ i \\ 0 & En\ caso\ contrario \end{matrix}\right\}$$

$$Zilk: \left\{\begin{matrix} 1 & Si\ el\ estudiante\ l\ es\ recogido\ por\ el\ vehiculo\ k\ en\ la\ parada\ i \\ 0 & En\ caso\ contrario \end{matrix}\right\}$$

FUNCIÓN OBJETIVO:

$$Min \sum_{i\in V} \sum_{j\in V} Cij \sum_{k=1}^{K} Xijk \qquad (20)$$

SUJETO A:

$$\sum_{j\in V} Xijk = \sum_{j\in V} Xjik = Yik \quad \forall\, i \in V, \qquad k = 1, \dots, K \qquad (21)$$

$$\sum_{k=1}^{K} Y0k \le K, \quad k = 1, \dots, K \qquad (22)$$

$$\sum_{i\in S} \sum_{j\notin S} Xijk \ge Yhk, \quad \forall\, S \subseteq V \setminus \{0\},\ \ h \in S, k = 1, \dots, K \qquad (23)$$

$$\sum_{k=1}^{K} Yik \le 1, \quad \forall\, i \in V \setminus \{0\} \qquad (24)$$

$$\sum_{k=1}^{K} Zilk \le Sli, \ \forall\, l \in S, \forall\, i \in V \qquad (25)$$

$$\sum_{i\in V} \sum_{l\in S} Zilk \le C, \ \forall\, k = 1, \dots, K \qquad (26)$$

$$Zilk \le Yik \quad \forall\, i, l, k \qquad (27)$$

$$\sum_{i\in V} \sum_{k=1}^{K} Zilk = 1 \quad \forall\, l \in S \qquad (28)$$

$$Yik \in \{0,1\}, \qquad \forall\, i \in V, k = 1, \dots, K \tag{29}$$

$$Xijk \in \{0,1\}, \qquad \forall i, j \in V \mid i \neq j \tag{30}$$

$$Zilk \in \{0,1] \quad \forall i, j \in V \mid i \neq j \tag{31}$$

La función objetivo (20) minimiza costos que están representados por distancia total recorrida de todos los vehículos. Las restricciones: (21) asegura que si la parada i es visitada por el vehículo k entonces un arco debe ser atravesado por el vehículo k entrar a la parada i y dejar la parada i. (22) asegura que todos los vehículos parten de la estación. (23) asegura que cada corte *(V/s, S)* definido por un conjunto de clientes S está atravesado por una serie de arcos no menores *r(S),* el número de vehículos necesarios para servir el set *s*. Como de costumbre el modelo IP se resolvió por primera vez ignorando la limitación (23); una vez se obtiene la solución óptima del problema, esta se añade. (24) Asegura que cada parada no sea visitada más de una vez a excepción del depósito. (25) asegura que cada Estudiante camina a una sola parada. (26) asegura que no se supere la capacidad de los autobuses. (27) asegura que los estudiantes que no se recogen en la parada i por el autobús k si k no visita i. (28) garantiza que todos los estudiantes sean recogidos una vez. (29-31) asegura que las variables de decisión son binarias.

Al estudiar el modelo se encontró que es necesario hacerle algunas modificaciones con el fin de acercarnos a las características mencionadas anteriormente y que son objeto de nuestro estudio. Cabe resaltar que cada modificación realizada fue validada al mismo tiempo con ayuda de la herramienta GAMS y una pequeña instancia. Es así como al modelo se le realizan las siguientes variaciones:

- En primer lugar, ampliamos la función objetivo (20) con un nuevo termino que penaliza el número de paraderos a abrir de la lista de paraderos potenciales; es decir: le pusimos un costo al hecho de abrir cada paradero el parámetro Q, lo cual hará que la función objetivo minimice el número de paraderos a visitar, además de la distancia total recorrida por las rutas.

- El parámetro S_{li} y la restricción (25) son eliminados del modelo, ya que este me exigía hacer un procedimiento a priori que consistía en crear la matriz de distancias entre Estudiantes-Paradas y convertirla en una matriz binaria aplicando la restricción de máxima distancia que un estudiante puede caminar y esta matriz era la que se ingresaba en el parámetro. Como uno de los principales objetivos es trabajar el modelo integrado decidimos que ese procedimiento debe ser calculado a la vez en el modelo matemático propuesto y por tanto esto me implica cambiar el parámetro por M_{il} el cual contiene las distancias entre Estudiantes-Paradas, y de igual forma se añade una nueva restricción la cual limita la distancia máxima que puede caminar un estudiante a una parada, debe ser menor al parámetro W.
- La restricción (22) la cual asegura que todos los vehículos parten de la estación fue modificada ya que esta asegura una cantidad máxima de vehículos que parten de la estación y no todos.
- La restricción (23) de subtour de igual forma fue modificada.
- Se agrega una nueva restricción (41) la cual asegura que el recorrido de cada ruta o vehículo no exceda cierta distancia R; esto con el fin de asegurar de que tanto la distancia de cada vehículo en su recorrido no exceda los límites establecidos dependiendo las aplicaciones. Además, de esta manera se puede controlar el tiempo máximo de un vehículo en una ruta, aplicando una relación directa entre distancia y tiempo si se tiene una velocidad promedio de recorrido

Cabe mencionar que con las características del problema, no solo se busca una mayor aplicabilidad en el transporte escolar sino también en el ámbito empresarial; ya que muchas empresas hoy día proveen el transporte a sus empleados con características muy similares a las del SBRP, es por esto que el modelo contiene un listado del paraderos potenciales y de los cuales se seleccionan las paradas a abrir, lo cual quiere decir que las ubicaciones de estas paradas ya han sido evaluadas según las condiciones del problema y cumplen bien sea con normas de tránsito o de seguridad para el estudiante o empleado. De igual forma se ve la aplicabilidad de que el origen sea igual al destino ya que en muchas ocasiones las empresas o colegios son propietarias de los vehículos y estos tienen sus estacionamientos en dicho lugar; así mismo existen casos en los que se laboran por turnos y es necesario que la ruta siempre vuelva al lugar de origen bien sea a llevar o a recoger los empleados.

6.3 FORMULACIÓN DEL MODELO

ÍNDICES

$i, j: Nodos/paradas$

$k: Autobuses$

$l: Nodo\ Estudiante/Ubicacion\ casa\ estudiante$

CONJUNTOS

$V: Conjunto\ de\ paradas\ potenciales$

$E: Conjunto\ de\ todos\ los\ arcos\ entre\ las\ paradas$

$S: Conjunto\ de\ todos\ los\ estudiantes$

$K: Número\ de\ autobuses$

PARÁMETROS

$Cij: Costos\ de\ atravesar\ el\ arco\ ij$

$C: Capacidad\ de\ los\ autobuses$

$Mil: Distancia\ que\ debe\ caminar\ el\ estudiante\ l\ \ para\ llegar\ a\ la\ parada\ i$

$i = 0, \text{índice para la escuela}$

$Q = \text{ Costo que representa abrir cada parada.}$

$W: \text{Escalar, define la máxima distancia que puede caminar un estudiante.}$

$R: \text{Escalar, define la máxima distancia que puede recorrer un autobús en cada ruta}$

VARIABLES DE DECISIÓN

$$Xijk: \begin{Bmatrix} 1 & \text{Si el autobús } k \text{ atraviesa el arco } i \text{ a } j \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{Bmatrix}$$

$$Yik: \begin{Bmatrix} 1 & \text{Si el autobús } k \text{ visita la parada } i \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{Bmatrix}$$

$$Zilk: \begin{Bmatrix} 1 & \text{Si el estudiante } l \text{ es recogido por el vehículo } k \text{ en la parada } i \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{Bmatrix}$$

FUNCIÓN OBJETIVO

$$Min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} Cij \sum_{k=1}^{K} Xijk + \sum_{i \neq 0} \sum_{k} Q * Yik \quad (32)$$

SUJETO A:

$$\sum_{j \in V} Xijk - \sum_{j \in V} Xjik = 0 \quad \forall\, i \in V, \qquad \forall\, k \quad (33)$$

$$\sum_{j \in V} Xjik - Yik = 0 \quad \forall\, i \in V, \qquad \forall k \quad (34)$$

$$VY_{0k} - \sum_{i \neq 0}^{K} Y_{ik} \geq 0, \quad \forall\, k \quad (35)$$

$$\sum_{k=1}^{K} Yik \leq 1, \quad \forall\, i \in V \setminus \{0\} \quad (36)$$

$$\sum_{i\neq 0}\sum_{k=1}^{K} Zilk = 1 \quad \forall\, l \in S \tag{37}$$

$$Zilk \leq Yik \quad \forall\, i, l, k \tag{38}$$

$$\sum_{i\in V}\sum_{l\in S} Zilk \leq C, \quad \forall\, k = 1, \dots, K \tag{39}$$

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} Xijk \leq [S] - \sum_{i\neq 0}\sum_{l} \frac{Z_{ilk}}{C} \quad \forall k \;\; \forall S \tag{40}$$

$$M_{il} * Z_{ilk} \leq W \quad \forall i, \forall l, \forall k \tag{41}$$

$$\sum_{i}\sum_{j} C_{ij} * X_{ijk} \leq R \quad \forall k \tag{42}$$

$$Yik \;\in \{0,1\}, \qquad \forall\, i \in V, k = 1, \dots, K \tag{43}$$

$$Xijk \;\in \{0,1\}, \qquad \forall i, j \in V \mid i \neq j \tag{44}$$

$$Zilk \;\in [0,1] \quad \forall i, j \in V \mid i \neq j \tag{45}$$

Función objetivo (32) minimiza los costos representados en la distancia total recorrida por todos los vehículos y el número de paradas a visitar. Las restricciones: (33) garantiza que si un vehículo k entra al nodo i salga del nodo i. (34) asegura que la sumatoria de todas las aristas que llegan al nodo i por el vehículo k sea igual a uno si el vehículo k visita la parada i. (35) asegura que todos los vehículos parten de la estación. (36) asegura que cada parada no sea visitada más de una vez a excepción del depósito. (37) garantiza que todos los estudiantes sean recogidos una vez. (38) asegura que todos los estudiantes son recogidos por un vehículo k en una parada i. (39) asegura que no se supere la capacidad de los autobuses. (40) restricción para la eliminación de subtour. (41) asegura que cada estudiante no camine más de la máxima distancia permitida W para llegar a la parada que se le es asignada. (42) asegura que el recorrido de cada bus no exceda la máxima distancia R que puede recorrer. (43-45) aseguran que las variables de decisión son binarias.

6.4 VERIFICACIÓN DEL MODELO

Para la verificación del modelo en el software GAMS, se utilizó la Instancia de prueba 00. El equipo de cómputo utilizado para la experimentación cuenta con las características descritas en la tabla 2.

Tabla 2. Características del equipo utilizado

Fabricante:	Hewlett-Packard Company
Modelo:	HP ProDesk 600 G1 SFF
Procesador:	Intel ® Core ™ i5-4570 CPU @ 3.20GHz
Memoria RAM:	8,00 GB
Tipo de Sistema:	Sistema operativo de 64 bits

Una vez ejecutada la instancia 00 en el software Gams los resultados obtenidos se representan en la tabla 3.

Tabla 3. Solución GAMS consideraciones iniciales instancia 00

	RESULTADO
Valor Función Objetivo:	527,96
Número de Iteraciones:	774
Tiempo computacional [s]:	0,356

6.4.1 Análisis de la solución de las variables de decisión.

Siendo:

$$Xijk: \begin{Bmatrix} 1 & Si\ el\ Autobus\ k\ atraviesa\ el\ arco\ i\ a\ j \\ 0 & En\ caso\ contrario \end{Bmatrix}$$

Las variables $X_{ijk} = 1$, fueron las siguientes:

Tabla 4. Resultados Variables $\boldsymbol{Xijk}$ Instancia 00

$\boldsymbol{X_{ijk}}$	
1. 8. 1	1. 9. 2
8. 6. 1	9. 3. 2
6. 1. 1	3. 1. 2

Esta variable es la que nos indica el orden a visitar de los paraderos por cada bus. Por lo tanto, las rutas generadas para los dos buses son:

Ruta Bus 1: *1-8-6-1 (ORIGEN-107-105-ORIGEN).*

Ruta Bus 2: *1-9-3-1 (ORIGEN-108-102-ORIGEN)*

Siendo:

$$Yik\colon \left\{\begin{matrix} 1 & Si\ el\ autobús\ k\ visita\ la\ \ parada\ i \\ 0 & En\ caso\ contrario \end{matrix}\right\}$$

Las variables $Y_{ik} = 1$, fueron las siguientes:

Tabla 5. Resultados variables $\boldsymbol{Yik}$ Ins00

$\boldsymbol{Y_{ik}}$	
1. 1	1. 2
6. 1	3. 2
8. 1	9. 2

Esta variable nos indica que bus visita cada parada; Por tanto: el Bus 1, visita las paradas 1, 6 y 8; y el Bus 2, visita las paradas 1, 3 y 9.

Siendo:

$$Zilk: \begin{cases} 1 & Si\ el\ estudiante\ l\ es\ recogido\ por\ el\ vehículo\ k\ en\ la\ parada\ i \\ 0 & En\ caso\ contrario \end{cases}$$

Las variables $Z_{ilk} = 1$, fueron las siguientes:

Tabla 6. Resultados variables $Zilk$ Ins00

$Zilk$	
6. 7. 1	3. 14. 2
6. 10. 1	3. 15. 2
6. 11. 1	3. 16. 2
6. 12. 1	3. 17. 2
6. 13. 1	3. 18. 2
8. 19. 1	9. 1. 2
8. 20. 1	9. 2. 2
8. 21. 1	9. 3. 2
8. 22. 1	9. 4. 2
8. 23. 1	9. 5. 2
-	9. 6. 2
-	9. 8. 2
-	9. 9. 2

La tabla 6 nos indica que:

- Los estudiantes asignados a la parada 6 y que serán recogidos por el bus 1 son: 7,10,11,12,13.

- Los estudiantes asignados a la parada 8 y que serán recogidos por el bus 1 son: 19,20,21,22,23.
- Los estudiantes asignados a la parada 3 y que serán recogidos por el bus 2 son: 14,15,16,17,18.
- Los estudiantes asignados a la parada 9 y que serán recogidos por el bus 2 son: 1, 2,3,4,5,6,8,9.

6.4.2 Análisis de la solución de las restricciones.

➢ Restricción de capacidad (39), la cual nos asegura el cumplimiento de la capacidad, para cada bus. De la solución tenemos:

Tabla 7. Análisis Restricción de Capacidad

RUTA	CAPACIDAD OCUPADA	CAPACIDAD MÁXIMA	CAPACIDAD DISPONIBLE
BUS 1	10 Estudiantes	15 Estudiantes	5 Estudiantes
BUS 2	13 Estudiantes	15 Estudiantes	2 Estudiantes
TOTAL	23 Estudiantes	30 Estudiantes	7 Estudiantes

Como se muestra en la tabla 7, ningún bus incumplió la restricción de capacidad máxima permitida.

➢ Restricción (41), la cual nos indica la distancia que camina cada estudiante, sin que supere el máximo permitido

Tabla 8. Distancia recorrida por el estudiante a la parada

DISTANCIA QUE CAMINA CADA ESTUDIANTE A LA PARADA ASIGNADA			
6 7 1	6,403	3 14 2	5
6 10 1	2,828	3 15 2	2,236
6 11 1	5,099	3 16 2	4,123
6 12 1	2,236	3 17 2	2,828
6 13 1	4,243	3 18 2	5,099
8 19 1	5,385	9 1 2	6,325
8 20 1	3,162	9 2 2	7,071
8 21 1	3	9 3 2	5
8 22 1	2,828	9 4 2	5,831
8 23 1	5,385	9 5 2	3,162
-	-	9 6 2	2,236
-	-	9 8 2	6,708
-	-	9 9 2	8,062

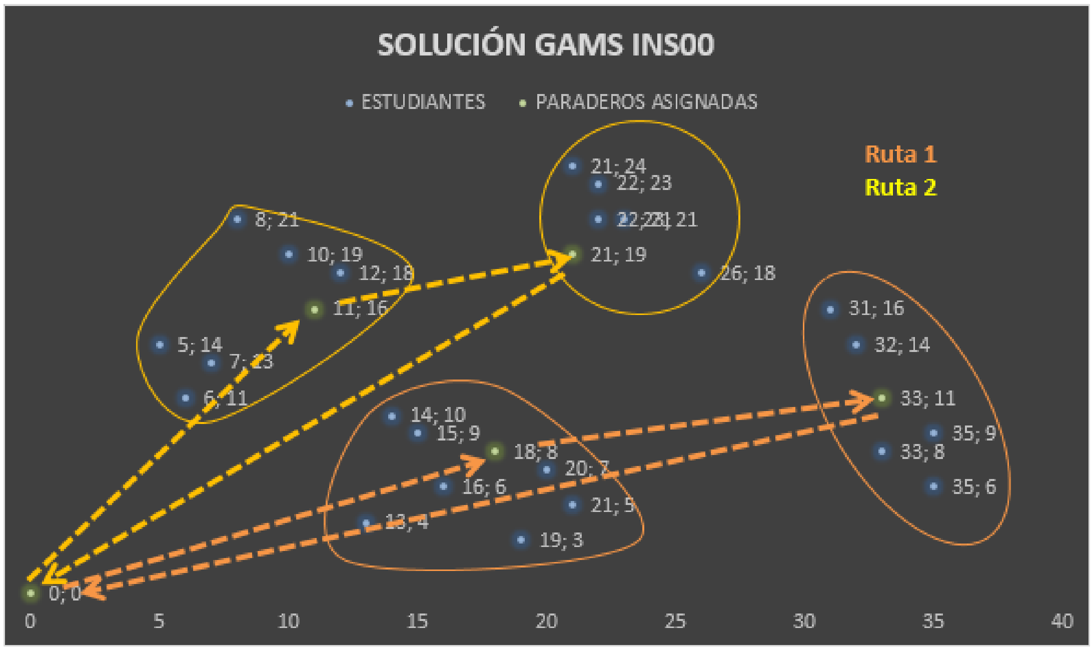
- Restricción (42), la cual nos indica la distancia máxima que recorre, cada bus, sin que supere el máximo permitido, como se muestra en la Tabla 8.

Tabla 9. Análisis restricción máxima distancia recorrida por autobús

BUS	RUTA	DISTANCIA RECORRIDA	MÁXIMA DISTANCIA PERMITIDA
1	1-8-6-1	69.780	70
2	1-9-3-1	58.176	70

En la Figura 4 se ilustra la asignación de los estudiantes a su parada correspondiente, y el ruteo realizado por cada uno de los autobuses para recoger a los estudiantes y trasladarlos a su escuela.

Figura 4 Solución GAMS Ins00



7 TÉCNICAS HEURÍSTICAS Y METAHEURÍSTICAS IMPLEMENTADAS EN LA SOLUCIÓN DEL SBRP

Para la solución del Problema de Rutas Escolares se utilizó el *Algoritmo de Ahorros de Clarke and Wright,* el cual será abordado en el presente trabajo, como medio para obtener la solución inicial de ruteo, para que posteriormente sea usada para implementar el *Algoritmo de Búsqueda Tabú*. A continuación, se describe cada una de estas técnicas.

7.1 ALGORITMO DE AHORROS DE CLARKE & WRIGHT

El algoritmo de Clarke and Wright también es llamado “Clarke - Wright Savings”, dado que se fundamenta en los ahorros entre las distancias de los clientes y el depósito[79]. A continuación, se explican los pasos para su desarrollo.

1. Se calculan los ahorros para cada par de puntos (clientes); este cálculo se hace de la siguiente forma: $s(i,j) = d(D,i) + d(D,j) - d(i,j),$ donde $d(D,i)$ corresponde a la distancia entre el depósito y el cliente *i*, $d(D,j)$ corresponde a la distancia entre el depósito y el cliente *j*, y finalmente $d(i,j)$ corresponde a la distancia entre el cliente *i* y el cliente *j*.

2. Se elabora una lista en orden descendente de todos los ahorros calculados en el paso anterior.

3. Para los ahorros en consideración, se incluye la pareja en una ruta (i,j), si ninguna restricción será violada en esta inclusión y si:
   i. Ni i ni j han sido asignados a otra ruta previamente, en cuyo caso una nueva ruta será iniciada, donde se incluye a ambos i y j.

[79] PERTUZ, Alfredo y ROJAS, Kimberly. “Formulación y evaluación de un algoritmo, basado en la meta-heurística búsqueda tabú para la optimización del ruteo de vehículos con capacidad”. 2007. Tesis de pregrado. Universidad Industrial de Santander. Pág.13.

ii. O si uno de los dos puntos (i o j) han sido incluidos en una ruta ya existente, y ese punto no es interior[*] a la misma, se agrega el "link" (i, j) a la ruta existente.

iii. Si los dos puntos i y j han sido agregados a dos rutas diferentes, y ninguno es un punto interior, las dos rutas se unen en una sola, Siempre y cuando no se viole ninguna restricción del problema original.

4. Si las parejas de la lista de ahorros no han sido procesadas, se repite el paso 3 hasta que todas las parejas sean verificadas. De lo contrario se para el proceso, y la solución consiste en las diferentes rutas que han sido formadas.

5. Si todavía existen puntos que no han sido asignados en el paso 3, cada uno se asigna a una ruta diferente, donde el vehículo parte del depósito atiende al cliente y regresa al depósito.

7.2 METAHEURÍSTICA BÚSQUEDA TABÚ (TABU SEARCH, TS)

La búsqueda tabú es una metaheurística que usa un procedimiento de tipo iterativo para resolver problemas de optimización combinatoria discretos. Fue propuesta inicialmente por Fred Glover.

El principal objetivo de la búsqueda tabú es escapar de óptimos locales, para ello emplea algunas metodologías como el uso de memorias flexibles o cambio de la estructura del problema creando o relajando las restricciones con la finalidad de realizar la búsqueda en áreas no factibles pero que de alguna manera nos puede llevar a una solución de buena calidad.

[*] Un punto es INTERIOR a una ruta cuando NO es adyacente al depósito D. {1, 2,3,4,5,1} 1 representa al depósito, 2 y 5 son los puntos exteriores de la ruta y 3 y 4 son los puntos interiores de la ruta.

La búsqueda tabú se basa en tres principios:

1. Uso de estructuras de memoria basadas en atributos diseñados para permitir criterios de evaluación e información de búsqueda histórica, la cual se explota más a fondo que las estructuras de memoria rígida (como en ramificación y acotamiento) o por sistemas de pérdida de memoria (como recocido simulado y otros métodos aleatorizados).

2. Un mecanismo asociado de control, mediante el empleo de estructuras de memoria, basado en el inter- juego entre las condiciones que restringen y liberan al proceso de búsqueda (envuelto en las restricciones tabú y el criterio de aspiración).

3. La incorporación de funciones de memoria de diferentes lapsos de tiempo, desde término corto hasta de término largo.[80]

El tipo de memorias que se usan en TS se clasifican en:

a) Memoria a corto plazo: También llamada lista tabú; en esta memoria se almacena el historial de los últimos movimientos realizados (movimientos tabú) a través de una lista FIFO (First Int First Out), prohibiendo que los movimientos se repitan en las próximas iteraciones, así evita ciclos y escapa de mínimos locales.
b) Memoria a medio plazo: en ella se registran los atributos más comunes de un conjunto de soluciones.
c) Memoria de largo plazo: La memoria guarda un registro de las zonas que no han sido exploradas aún, diversificando de esta manera la búsqueda.

[80] GÓMEZ, Fernando y RANGEL, Carlos. “Formular las metaheurísticas búsqueda tabú y recocido simulado para la solución del CVRP. Bucaramanga, 2011. Trabajo de grado (Ingeniera Industrial). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Pág. 33 – 35.

Las memorias a mediano plazo y largo plazo usan como base las estrategias de intensificación y diversificación. La *estrategia de intensificación* modifica los parámetros usados en la búsqueda para mejorar la elección de combinaciones de movimientos y características de las soluciones encontradas. Es necesario encontrar e identificar un conjunto de soluciones con características especiales y cuyas características puedan ser incorporadas a las nuevas soluciones.

La *estrategia de diversificación* trata de llevar la búsqueda a zonas del espacio de soluciones no visitadas antes, generando de esta manera soluciones que difieren significativamente de las ya encontradas.

7.2.1 Definiciones del algoritmo TS. A continuación, se describen algunos términos usados en el algoritmo desarrollado.

7.2.1.1 Secuencias o tours. La representación de las soluciones se da a través una secuencia creada por el vector solución. Este incluye el orden en que los clientes son visitados por cada vehículo. En el tour se pueden identificar las rutas, por ejemplo, para una instancia con 4 clientes un tour se representa mediante la secuencia:

1	**4**	**2**	**1**	**5**	**3**	**1**

Aquí el número 1 representa el depósito y el número de vehículos es igual a 2. Al dividir el tour en rutas tenemos:

Ruta 1

1	**4**	**2**	**1**

Ruta 2

1	**5**	**3**	**1**

7.2.1.2 Solución Factible. Una solución factible, es aquella solución que cumple a cabalidad con las restricciones del problema (capacidad de los vehículos, distancia recorrida por vehículo, etc…)

7.2.1.3 Solución inicial. Es la solución de partida, con la que se inicia el funcionamiento del algoritmo, la cual puede hallarse por un procedimiento de arranque aleatorio o por medio de una heurística; para el desarrollo del algoritmo se usó la técnica de “Clarke and Wright”.

7.2.1.4 Definición de Vecindad. La vecindad de una solución se puede definir como el conjunto de todas las soluciones que se pueden encontrar a partir de una solución s^* por medio de un movimiento $\boldsymbol{\sigma}$ [81]; que puede ser una inserción, un intercambio o una eliminación de componentes en una solución s.

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{s}^* \in \boldsymbol{S} : \boldsymbol{s} \xrightarrow{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{s}^*\}$$

Donde,

$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{s})$ Representa la vecindad con respecto a s.

$\boldsymbol{s}$ Representa una solución tomada del espacio de soluciones S.

$\boldsymbol{s}^*$ Es el vecino de s generado a partir del movimiento $\boldsymbol{\sigma}$**.**

Un movimiento por inserción *(“insert”),* se da cuando un determinado elemento (componente de un vector, columna en una matriz, etc.) de la solución, *x(i),* pasa a ocupar otra posición, *j*. El resto de los elementos de la solución quedan desplazados, como se puede apreciar en la figura 5.

[81] GARCÍA SÁNCHEZ, Álvaro. “Técnicas Metaheurísticas”. [Online]. Disponible en: <<http://www.iol.etsii.upm.es/arch/metaheuristicas.pdf>>. [Citado el 17 de Junio de 2016].

Figura 5 Movimiento de Inserción

Solución de partida	2	3	5	7	6	8	4	9	1	10
Solución vecina	2	3	7	6	8	5	4	9	1	10

Fuente: García Sánchez

Cuando el movimiento se realiza a través de un intercambio (“*swap*”), simplemente dos elementos de la solución intercambian su posición (figura 6).

Figura 6 Movimiento de Intercambio

Solución de partida	2	3	5	7	6	8	4	9	7	10
Solución vecina	2	3	7	6	8	5	4	9	5	10

Fuente: García Sánchez

Entre todas las soluciones que componen el vecindario, existe un conjunto de ellas que están prohibidas (bien por sus características o bien por el movimiento elemental que condujo a las mismas): son las soluciones tabú y durante un determinado número de iteraciones están vetadas en la lista tabú.

7.2.1.5 Lista Tabú. Es una lista (*linked list*) en el contexto computacional[82], donde se registran aquellas soluciones o atributos de soluciones que no deben ser elegidas. Una forma sencilla de construir una lista tabú consiste en que cada vez que se realiza un movimiento, se introduce su inverso (si se pasó de $x_0\ a\ x_1$, el inverso es $x_1\ a\ x_0$) en una lista circular, de forma que los elementos de dicha lista

[82] CORMEN, Thomas H., *et al.* “Introduction to Algorithms”. Massachusetts, Mc Graw Hill Book Company, (1999) página 204.

están penalizados durante un cierto tiempo. Por tanto, si un movimiento está en la lista tabú no será aceptado, aunque aparentemente sea mejor solución que la solución actual.

La lista tabú puede contener:

- Soluciones visitadas recientemente
- Movimientos realizados recientemente o
- Atributos o características que tenían las soluciones visitadas.

Un movimiento permanece como tabú solo durante un cierto número de iteraciones. Pasadas estas iteraciones, la búsqueda puede estar en una región diferente y los movimientos guardados en la lista se pueden liberar del status tabú.

El tiempo de permanencia (tabu tenure) en la lista tabú de una solución es un parámetro importante del algoritmo. Habitualmente, este tiempo se fija definiendo un tamaño máximo para la lista tabú. Una vez la lista está llena, en cada iteración la solución vecina a la que se salta (o un atributo de ella), se introduce en la lista tabú, y la solución (atributo) más antigua se borra. En nuestro algoritmo el Tenure de la lista tabú es de 5.

Tamaño de la lista tabú: El tamaño de la lista tabú afecta de manera significativa el funcionamiento del algoritmo. Un tamaño de lista pequeño, hará que el algoritmo se comporte de manera similar al local search, por lo que puede suceder que el algoritmo termine probando cíclicamente una serie de soluciones poco diversas. Por otro lado, un tamaño de lista tabú muy grande, además de poder crear problemas de memoria y tiempo de cómputo, puede prohibir arbitrariamente el probar soluciones de calidad.

7.2.1.6 Criterio de Aspiración. El criterio de aspiración es un elemento indispensable al aplicar el algoritmo de búsqueda tabú ya que permite omitir las restricciones tabú, con el fin de eliminar la clasificación tabú a un movimiento, cuando la solución de éste es mejor que la solución obtenida hasta el momento.

Se pueden tener los siguientes criterios de aspiración:

- *Aspiración por Default:* Si todos los movimientos posibles son clasificados como tabú, entonces se selecciona el movimiento "menos tabú", es decir, si el movimiento *m1* está penalizado en la lista tabú durante 2 iteraciones más y *m2* está penalizado durante 1, *m2* es menos tabú que *m1*
- *Aspiración por Objetivo:* Una aspiración de movimiento se satisface, permitiendo que un movimiento *x* sea un candidato para seleccionarse si, por ejemplo, $F(x)$ < *mejor costo*. (en un problema de minimización).
- *Aspiración por Dirección de Búsqueda:* Un atributo de aspiración para la solución "s" se satisface si la dirección en "s" proporciona un mejoramiento y el actual movimiento es un movimiento de mejora. Entonces "s" se considera un candidato.

7.2.1.7 Criterio de Parada. El criterio de parada se establece al inicio del problema y se pueden usar los siguientes supuestos:

- Establecer un número fijo de iteraciones sin que se mejore la última solución encontrada.
- Estipular un tiempo límite de procesamiento del algoritmo.
- Fijar un número determinado de iteraciones.

Para el algoritmo desarrollado se fijó 1000 iteraciones para el criterio de parada.

7.2.1 Pasos para la implementación del TS. A continuación, se presentan los pasos más relevantes en la implementación del algoritmo de TS de forma general[83]:

- **Paso 1** Generar una solución inicial, puede ser de manera aleatoria o a través de algoritmos heurísticos. Generar una solución de manera aleatoria puede traer grandes desventajas debido a que la solución encontrada

[83] PERTUZ. Opt.Cit. Pág.12.

puede ser de mala calidad; en el presente algoritmo las soluciones iniciales se generaron con la heurística "Clarke and Wright".

- **Paso 2** Elegir el entorno o vecindario de la solución inicial, con el fin de generar nuevas soluciones a partir de esta. Para generar el vecindario se aplican movimientos de inserción e intercambio 2-opt.

- **Paso 3** Evaluar la función objetivo. Si la solución es factible y mejor que la anterior (criterio de aspiración) se toma como nueva solución, si no se pasa al paso 4.

- **Paso 4** Se revisa que la nueva solución no esté restringida por un movimiento tabú, y se toma como nueva solución, si está restringida se toma la siguiente mejor solución factible y no restringida por la lista tabú.

- **Paso 5** Se actualiza la lista tabú reemplazando el valor más antiguo de la lista por el nuevo movimiento tabú.

- **Paso 6** Se ejecuta el algoritmo hasta que se cumpla el criterio de parada. Este criterio puede ser definido por la cantidad de iteraciones, la cantidad de iteraciones sin mejora, el tiempo de ejecución entre otros.

8 DESARROLLO DEL ALGORITMO

La codificación del algoritmo de Asignación y Ruteo para el Problema de Rutas Escolares (ARPRE), está diseñado para la solución del problema de asignación y ruteo escolar y/o empresarial, y está basado principalmente bajo técnicas heurísticas y metaheurísticas tales como: el algoritmo de ahorros de Clarke and Wright y el algoritmo Búsqueda Tabú (*Tabu Search*, TS).

Las etapas del algoritmo ARPRE para dar solución al problema SBRP se detallan a continuación:

ETAPA I: SELECCIÓN DE LAS PARADAS Y ASIGNACIÓN DE LOS ESTUDIANTES A CADA UNA DE ELLAS

1. Lectura de los datos de la instancia y coordenadas de ubicación de estudiantes y paradas.
2. Calcula la matriz de distancias entre cada una de las paradas nxn, tomando la escuela como la primera parada de la matriz.
3. Verifica que ninguna de las distancias entre las paradas y la escuela, superen el máximo recorrido de una ruta establecido.
4. Calcula la matriz de distancias entre los estudiantes y las paradas.
5. Verifica la máxima distancia que puede caminar un estudiante, y genera una matriz indicadora; siendo 1, si el estudiante puede visitar la parada y 0, si lo contrario.
6. Verifica que a cada estudiante le sirva al menos 1 parada, de lo contrario modifica una(s) de las paradas existentes con menor probabilidad de ser visitada (esta modificación se realiza por el método de gradiente descendiente, para que quede proporcionalmente cerca a el estudiante en cuestión, a otros más y a la escuela), y comprobando que cada estudiante pueda visitar al menos una parada.
7. Selección de las paradas más adecuadas según la ubicación de los estudiantes; Función Generar Paradas:

- Calcula de acuerdo a la cantidad de estudiantes y la capacidad de los autobuses a trabajar la mínima cantidad de rutas a crear y por tanto la mínima cantidad de paraderos *p* a visitar.
- Parte de ese mínimo teórico de paradas *p* seleccionadas aleatoriamente e intenta hacer la asignación de cada estudiante a estas paradas. Con un conjunto de paradas de tamaño *p* el algoritmo realiza máximo 100 tipos de asignaciones diferentes; si no logro hacer una asignación para todos los estudiantes, hace intercambios aleatorios en el conjunto de paradas hasta 1000 veces (para instancias pequeñas en las que la combinatoria es menor que 1000 buscará de manera exhaustiva una por una cada combinación de paradas), ayudándose a restringir las combinaciones de las paradas con una lista tabú igual al 60% de la cantidad total de paradas para que pueda realizar los intercambios con el 40% restante (el criterio de salida de la lista tabú es la parada que le sirva a menor cantidad de estudiantes); y posteriormente repite el proceso de asignación hasta encontrar una solución factible.
- Si después de realizar el proceso anterior, no se ha logrado que el conjunto de paradas satisfaga a todos los estudiantes se aumenta el tamaño *p* del conjunto de paradas a visitar según el porcentaje de exhaustividad de la búsqueda que se hubiese ingresado, y repite el procedimiento anterior hasta encontrar una asignación factible que satisfaga las restricciones de distancia y capacidad.

8. Asignación de los estudiantes a las paradas seleccionadas.
   - Posteriormente de haber encontrado el conjunto de paradas que satisfacen a todos los estudiantes, el algoritmo construye la matriz de distancias entre los estudiantes a las paradas elegidas.
   - Se realiza el proceso de asignación del estudiante a la parada, empezando por aquellos a los cuales solo les sirve una parada del conjunto escogido y posteriormente los que tienen más de una opción se verificara la capacidad disponible, (ya que en una parada no puede superar la capacidad de un

bus) y de igual forma ubicándolo en la parada más cercana posible; y va almacenando en vectores la cantidad de estudiantes que se asignan a cada parada y la distancia que camina cada uno de ellos; estos hasta que se asignen todos los estudiantes.

Cada vez que se llegue al límite de la capacidad de una parada, la matriz indicadora cambiará a ceros para esa determinada parada, no obstante, si encuentra que un estudiante no puede llegar a ninguna parada tiene que volver a la función Generar paradas y repetir el proceso.

ETAPA II: CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN INICIAL BASADA EN EL MÉTODO DE AHORROS DE CLARKE AND WRIGHT

9. Toma la información proveniente de la etapa anterior en cuanto a las paradas selectas y los estudiantes que pertenecen a éstas, la matriz de distancias entre dichas paradas, la capacidad de los vehículos y la máxima distancia de recorrido.
10. Función Ahorros, va a arrojar la solución inicial.
    - Primero se generan tantas rutas como paradas elegidas.
    - Se guarda para cada ruta la información de capacidad asignada, distancia recorrida y costo.
    - Genera la matriz de ahorros y elige el máximo ahorro.
    - Identifica la posición que generó ese máximo ahorro, lo elige y lo agrega a la ruta para verificar si cumple la restricción de capacidad y máximo recorrido, de ser así hace la unión de las rutas y cambia a ceros los ahorros de estas paradas en la matriz, inmediatamente continúa buscando el máximo ahorro siguiente y así sucesivamente; de lo contrario prueba con el segundo mayor ahorro, verifica las restricciones y continua el proceso; si se encuentra con que las restricciones no se cumplen, se descarta la unión y la ruta queda hasta la última unión en que las restricciones si fueron satisfechas.

- Se repite el proceso anterior hasta que la matriz cambie completamente a ceros.
- Posteriormente organiza las rutas que encontró en vectores y con la información de capacidad y recorrido total.
- Calcula el costo y el tiempo de la solución inicial.

ETAPA III: FASE DE MEJORA BASADA EN BÚSQUEDA TABÚ

11. Lee todos los datos de entrada de la solución inicial arrojada en la etapa anterior.
12. Función Tabú:
    - Toma los vectores con las rutas iniciales halladas en el paso anterior y según el Tenure (tamaño de la lista tabú) ingresado. Teniendo en cuenta que el criterio de aspiración es el menor costo.
    - En primer lugar, se empiezan a aplicar movimientos de inserción entre las rutas, al tiempo que verifica restricciones de capacidad y de máximo recorrido para cada movimiento realizado; si se cumplen dichas restricciones, actualiza el cambio; de lo contrario, se desecha la inserción.
    - Seguidamente toma las rutas independientes y realiza movimientos de intercambio para cada una de las rutas, e inmediatamente verifica las restricciones y con criterio de aspiración de menor costo.
    - Por último, organiza las rutas finales en vectores y arroja las soluciones mejoradas, si fue posible hacerlo.

9 EXPERIMENTACIÓN

En este capítulo se presenta la experimentación para el problema SBRP, a través de Gams con el método de Ramificación y Acotamiento el cual brindará resultados óptimos, y mediante el Algoritmo ARPRE ejecutado en Matlab para cada una de las instancias construidas.

En primer lugar se explicará cómo están compuestas las instancias evaluadas en esta investigación, seguidamente se encuentran los resultados obtenidos de la evaluación de dichas instancias de acuerdo a diferentes análisis, tales como: Resultados obtenidos a través del Método Exacto de Ramificación y Acotamiento, Resultados de la Metaheurística basada en Búsqueda Tabú, la comparación de los dos métodos anteriores y finalmente algunas variaciones en los parámetros al de las instancias en el algoritmo construido.

9.1 INSTANCIAS

Cada uno de los valores determinados que toman los parámetros del problema y que pueden ser evaluados por diferentes métodos de solución con el fin de evaluar la calidad de los mismos, en diferentes aspectos, se le denomina instancia.

Las instancias a evaluar en esta investigación fueron construidas a partir de instancias reales de la ciudad de Bogotá, encontradas en el trabajo "Aplicación de un modelo de optimización en la planeación de rutas de buses escolares del colegio Liceo de Cervantes Norte" realizado por Juan Sebastián Arias Rojas[84], estas instancias fueron modificadas debido a que no contaban con las mismas características, que el problema en estudio por tanto se determinó conservar las coordenadas X Y de las ubicaciones de los estudiantes y a partir de esto construir

[84] ARIAS ROJAS, Juan Sebastián. Aplicación de un Modelo de Optimización en la Planeación de Rutas de los Autobuses Escolares del Colegio Liceo Cervantes Norte. Bogotá, 2010, 103 h. Trabajo de grado (Ingeniero Industrial). Universidad Pontificia Javeriana. Facultad de Ingeniería. Departamento de Procesos Productivos.

los valores de los demás parámetros de acuerdo a las características de nuestro problema.

Los parámetros asociados al problema SBRP en estudio son:

- Número de Estudiante
- Número de Paradas
- Coordenadas Estudiantes
- Coordenadas Paradas
- Número de Vehículos
- Capacidad del Vehículo
- Máxima Distancia que puede Caminar un Estudiante.
- Máxima Distancia que puede recorrer una Ruta.

Las instancias construidas se denominaron de la siguiente manera:

Ins00s23p9c15

Donde:

- Ins00: Representa el número de la instancia, para identificación rápida de la misma; en este caso es la instancia 00 la cual fue la Instancia de prueba.
- S23: Simboliza la cantidad de estudiantes que contiene la instancia para este caso son 23 estudiantes.
- P9: Es la cantidad de paradas potenciales que contiene la instancia, que en este caso es 9.
- C15: Indica la capacidad del vehículo, para el ejemplo es de 15 estudiantes.

A continuación, se muestran las instancias con las cuales se llevará a cabo la experimentación, en donde se resaltará el costo total obtenido y el tiempo de solución en Gams y Matlab para cada una de ellas.

Tabla 10. Instancias

INSTANCIA	N°. Paradas Potenciales	N°. Estudiantes
Ins1s50p7c40	7	50
Ins2s50p9c40	9	50
Ins3s80p7c40	7	80
Ins4s80p9c40	9	80
Ins5s100p12c40	12	100
Ins6s100p14c40	14	100
Ins7s130p12c40	12	130
Ins8s130p14c40	14	130
Ins9s150p15c40	15	150
Ins10s150p17c40	17	150
Ins11s170p15c40	15	170
Ins12s170p17c40	17	170
Ins13s210p20c40	20	210
Ins14s210p22c40	22	210
Ins15s250p30c40	30	250
Ins16s300p30c40	30	300

En la experimentación realizada tanto para el Método Exacto como para el Algoritmo ARPRE se establecieron los siguientes parámetros de entrada:

PARÁMETRO	VALOR
Capacidad del Autobús	40
Distancia máxima de caminar [m]	750*
Distancia máxima de recorrido [m]	30000**
Costo crear parada	1500

* Valor tomado del artículo "A mathematical formulation for a school bus routing problema" escrito por Schittekat, Patrick; Sevaux, Marc y Sorensen, Kenneth.

** Los valores de distancia máxima de recorrido y capacidad del autobús fueron tomados del artículo: "Un algoritmo GRASP para un problema de rutas de vehículos escolares aplicado al transporte de personal de una empresa de manufactura" realizado por Eduardo Aguirre y Luis Carlos González.

9.2 RESULTADOS OBTENIDOS

Como se mencionó anteriormente, las instancias se componen principalmente de la cantidad de estudiantes, paradas potenciales y capacidad del vehículo, para la experimentación se mantiene fija la capacidad del autobús, la cual será de 40 estudiantes. Además, para identificar el comportamiento de las soluciones obtenidas por el modelo matemático, existen instancias con igual cantidad de estudiantes a las cuales se les varía la cantidad de paradas potenciales (añadiendo nuevas opciones) y así analizar que ocurre en cada solución.

9.2.1 Método exacto: Ramificación y acotamiento. La ejecución del SBRP se lleva a cabo por el software Gams y el solucionador Cplex, lo que permite verificar y evaluar el modelo con sus diferentes instancias, cabe resaltar que este método es exacto, por lo que los resultados que se obtengan serán los óptimos.

Tabla 11. Resultados instancias 1 y 2

Instancia	F.O.	t(s)	Ruta	Capacidad Utilizada	Distancia Recorrida
Ins1s50p7c40	7953,6	0,364	1-5-2-1	27	1841,1
			1-6-1	23	1612,5
Ins2s50p9c40	7528,4	0,4234	1-11-1	23	1187,3
			1-2-5-1	27	1841,1

En la tabla 11 se observa que a la ins2 se añadieron 3 paradas potenciales más que la Ins1 para los 50 estudiantes, dentro de las cuales se encontró una nueva parada que minimizó la función objetivo en un 5,34%.

De lo anterior se puede inferir que al existir más opciones de elección de paradas potenciales se puede obtener un mejor resultado, pero a su vez implica mayor tiempo computacional para obtener la respuesta.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para cada una de las instancias.

Tabla 12. Resultados Método Exacto: Ramificación y Acotamiento

Instancia	F.O.	t(s)	Ruta	Capacidad Utilizada	Distancia Recorrida
Ins1s50p7c40	7953,6	0,364	1-5-2-1	27	1841,1
			1-6-1	23	1612,5
Ins2s50p9c40	7528,4	0,4234	1-11-1	23	1187,3
			1-2-5-1	27	1841,1
Ins3s80p7c40	9388,5	6,621	1-6-1	28	1640,0
			1-2-1	29	1522,7
			1-4-1	23	1725,8
Ins4s80p9c40	9388,5	7,098	1-2-1	27	1522,7
			1-6-1	28	1640,0
			1-4-1	25	1725,8
Ins5s100p1240	26268,9	139,199	1-9-10-1	30	3942,1
			1-2-4-3-1	37	5033,0
			1-5-6-7-1	33	5293,7
Ins6s100p14c40	26268,9	247,841	1-5-6-7-1	36	5293,7
			1-2-4-3-1	24	5033,0
			1-10-9-1	40	3942,1
Ins7s130p12c40	26618,6	569,465	1-7-1	18	2590,8
			1-2-12-1	32	3672,9
			1-3-5-8-1	40	4177,1
			1-9-10-1	40	4177,7
Ins8s130p14c40	26618,6	4705,634	1-9-10-1	37	4177,7
			1-7-1	20	2590,8
			1-3-5-8-1	40	4177,1
			1-2-12-1	33	3672,9
Ins9s150p15c40	19170,4	20850,725	1-4-1	36	2010,0
			1-7-1	37	2010,0
			1-11-14-1	40	3091,2
			1-2-3-1	37	3059,2
Ins10s150p17c40	18984,4	37289,841	1-7-1	37	2010,0
			1-4-1	38	2010,0
			1-14-16-1	40	2905,2
			1-2-3-1	35	3059,3
Ins11s170p15c40	28288,6	13383,547	1-4-1	40	2777,2
			1-10-1	24	2875,8
			1-13-1	30	1843,9
			1-2-3-1	38	4073,9
			1-5-6-8-1	38	4717,8
Ins12s170p17c40	28288,6	56959,261	1-4-1	38	2777,2
			1-13-1	31	1843,9
			1-2-3-1	38	4073,9
			1-8-6-5-1	40	4717,8
			1-10-1	23	2875,8

La tabla 12 evidencia los resultados obtenidos durante la ejecución de las primeras 12 instancias. Adicionalmente, se percibe que a medida que se aumentan el número de paradas potenciales el software demora un poco más en dar la solución, de ahí que a partir de la instancia ins13s210p20c40 el modelo en Gams no contó con la suficiente memoria para generar la respuesta óptima.

Se observa que en algunas instancias donde se cuenta con el mismo número de estudiantes y diferente cantidad de paradas potenciales, se obtiene igual valor en la función objetivo, esto significa que a pesar de tener más opciones de elección de paradas no encontró una nueva que ayudará a minimizar el recorrido de las rutas.

Por otra parte, a pesar de que en algunas instancias se genere las mismas rutas, existe variación en la asignación de los estudiantes a cada una de las paradas seleccionadas, por lo cual se evidencia que las capacidades utilizadas en los vehículos aún para las mismas rutas varia.

9.2.2 Metaheurística basada en Búsqueda Tabú. En la Tabla 13 se presenta el resumen de los resultados obtenidos a través del algoritmo desarrollado para cada una de las instancias. Estos resultados se componen de dos partes, en la primera se muestra el resultado obtenido con el Método de Ahorros, y en la segunda parte el resultado obtenido con el Método de Búsqueda Tabú, cuyos tiempos serán el tiempo total que el algoritmo ARPRE tarda en obtener la solución para cada instancia.

Tabla 13. Resultados Algoritmo ARPRE

Instancia	F.O. Algoritmo de ahorros	# Réplicas	t(s) promedio M. Ahorros	F.O. Algoritmo Búsqueda Tabú	# Réplicas	t(s) promedio Búsqueda Tabú	t(s) Total	N° Iteraciones	Ruta	Capacidad Utilizada	Distancia Recorrida
Ins1s50p7c40	7953,56	5	0,016	7953,56	100	0,034	0,050	1000	1-2-5-1	27	1841,11
									1-6-1	23	1612,45
Ins2s50p9c40	7528,38	5	0,017	7528,38	100	0,034	0,051	1000	1-9-1	23	1187,27
									1-2-5-1	27	1841,11
Ins3s80p7c40	9388,46	5	0,012	9388,46	100	0,038	0,050	1000	1-4-1	28	1725,80
									1-6-1	27	1640,00
									1-2-1	25	1522,66
Ins4s80p9c40	9388,46	5	0,022	9388,46	100	0,038	0,060	1000	1-4-1	28	1725,80
									1-6-1	27	1640,00
									1-2-1	25	1522,66
Ins5s100p1240	27995,1	5	65,963	26268,9	100	0,149	66,111	1000	1-9-6-1	29	5866,07
									1-3-4-5-7-1	37	6420,89
									1-2-10-1	34	3708,14
Ins6s100p14c40	27995,1	5	69,751	26268,9	100	0,155	69,906	1000	1-5-6-7-1	34	5293,74
									1-3-4-2-1	31	5033,03
									1-9-10-1	35	3942,12
Ins7s130p12c40	27845,6	5	88,683	27484	100	0,110	88,792	1000	1-3-4-5-1	40	4605,64
									1-7-6-1	28	3847,27
									1-10-9-1	39	4177,75
									1-12-1	23	2853,35

Ins8s130p14c40	27319,5	5	89,368	27313,4	100	0,069	89,437	1000	1-4-5-1	26	4604,63
									1-7-8-1	31	3280,45
									1-11-12-1	34	3250,54
									1-9-10-1	39	4177,75
Ins9s150p15c40	21188,8	5	47,275	21188,8	100	0,058	47,333	1000	1-8-1	16	2501,92
									1-10-1	32	2607,68
									1-4-1	40	2009,98
									1-7-1	29	2009,98
									1-3-2-1	33	3059,23
Ins10s150p17c40	20007	5	49,049	20007	100	0,051	49,100	1000	1-10-15-1	40	3016,15
									1-3-2-1	35	3059,23
									1-5-1	40	2416,61
									1-13-1	35	2514,97
Ins11s170p15c40	30570,6	5	122,104	29267,1	100	0,065	122,169	1000	1-2-10-1	35	4820,25
									1-5-6-1	36	4092,06
									1-4-1	32	2777,21
									1-13-8-1	32	3005,05
									1-3-1	35	2572,57
Ins12s170p17c40	31412,1	5	173,555	30892,3	100	0,117	173,672	1000	1-9-10-1	37	3516,80
									1-11-14-13-1	33	4702,98
									1-3-1	35	2572,57
									1-12-1	33	1612,45
									1-4-2-1	32	4987,47
Ins13s210p20c40	53300,1	5	596,878	53272,2	100	0,255	597,133	1000	1-8-9-1	40	3258,02
									1-5-17-7-1	39	5120,66
									1-16-1	17	1341,64
									1-15-18-1	37	5015,56
									1-3-19-13-1	40	7165,85
									1-2-20-4-10-1	37	8575,47
Ins14s210p22c40	55457,9	5	1000,490	55457,9	100	0,454	1000,944	1000	1-13-19-17-11-5-1	39	6407,16
									1-4-2-18-1	30	9007,86
									1-21-6-7-1	35	3418,41
									1-3-20-10-1	40	7870,96
									1-15-1	37	2517,46

									1-14-1	29	2236,07
Ins15s250p30c40	76623,7	5	2004,150	72092,3	100	0,450	2004,600	1000	1-4-15-28-21-8-1	39	7214,21
									1-10-5-1	33	3558,21
									1-19-30-20-16-1	38	8564,58
									1-25-24-29-26-14-1	40	8701,60
									1-9-7-1	33	4179,71
									1-23-12-1	33	5148,56
									1-11-1	34	3225,43
Ins16s300p30c40	95874,3	5	2657,570	94210,1	100	0,654	2658,224	1000	1-8-7-2-1	37	4215,79
									1-29-26-27-9-1	40	10159,00
									1-21-22-28-13-23-15-1	40	9700,29
									1-4-12-1	40	3880,65
									1-11-24-25-1	39	7250,44
									1-3-5-1	29	2855,93
									1-19-30-17-18-1	39	9148,87
									1-16-20-10-1	36	6499,12

Analizando los resultados obtenidos en la tabla 13, se puede afirmar el método de búsqueda tabú efectivamente mejora los resultados de la solución inicial obtenida mediante el algoritmo de Ahorros de Clarke & Wright. Cabe aclarar que entre los dos métodos se evidencia una diferencia grande entre su tiempo computacional, pero esto radica en que, para el algoritmo de ahorros, se realiza todo el proceso de selección de paradas y asignación de estudiantes lo que genera complejidad al problema trabajado, por lo que para una posterior comparación entre las soluciones obtenidas para cada instancia ejecutadas mediante Gams y Matlab, para Matlab se toma el tiempo total de la ejecución del algoritmo ARPRE.

9.2.3 Comparación de resultados entre los métodos de solución. A continuación, se muestra la comparación de los resultados obtenidos tanto en costo como en tiempo computacional para cada una de las instancias por los dos métodos usados en la solución del SBRP.

Tabla 14. Comparación de resultados métodos de solución

	Algoritmo Ramificación y Acotamiento (ARA)		Algoritmo ARPRE		Diferencia Métodos de Solución	
INSTANCIA	**F.O.**	**t(s)**	**F.O.**	**t(s)**	**Diferencia % F.O.** (ARA-ARPRE)	**Diferencia t(s)** (ARPRE-ARA)
Ins1s50p8c40	7953,6	0,36	7953,6	0,05	0%	0,31
Ins2s50p11c40	7528,4	0,42	7528,4	0,05	0%	0,37
Ins3s80p8c40	9388,5	6,62	9388,5	0,05	0%	6,57
Ins4s80p11c40	9388,5	7,10	9388,5	0,06	0%	7,04
Ins5s100p12c40	26268,9	139,20	26268,9	66,11	0%	73,09
Ins6s100p14c40	26268,9	247,84	26268,9	69,91	0%	177,94
Ins7s150p12c40	26618,6	569,47	27484,0	88,79	3,3%	480,67
Ins8s150p14c40	26618,6	4705,63	27313,4	89,44	2,6%	4616,20
Ins9s140p15c40	19170,4	20850,73	21188,8	47,33	10,5%	20803,39
Ins10s140p17c40	18984,4	37289,84	20007,0	49,10	5,4%	37240,74
Ins11s170p15c40	28288,6	13383,55	29267,1	122,17	3,5%	13261,38
Ins12s170p17c40	28288,6	56959,26	30892,3	173,67	9,2%	56785,59
Ins13s210p20c40	Out of Memory		53272,2	597,13	---	
Ins14s210p22c40	Out of Memory		55457,9	1000,94	---	
Ins15s250p30c40	Out of Memory		72092,3	2004,60	---	
Ins16s300p30c40	Out of Memory		94210,1	2658,22	---	

A partir de la comparación realizada en la tabla 14, se observa que los resultados obtenidos mediante el algoritmo desarrollado se acercan en gran proporción a la solución óptima, en donde de las doce instancias ejecutadas en Gams, el algoritmo logró encontrar la solución óptima para el 50% de éstas, en un tiempo computacional considerablemente menor. Por otra parte, se observa que la mayor diferencia porcentual respecto a la solución óptima de las instancias evaluadas es del 10,5%, por ende, se puede afirmar que en promedio el algoritmo ARPRE para las doce instancias evaluadas arroja soluciones con un 2,9% de varianza con respecto a las soluciones óptimas.

Además, se observa que mediante Gams los tiempos computacionales son elevadísimos cuando las instancias aumentan su cantidad de paradas, como se observa en la instancia 12 que duró alrededor de 16 horas en generar la solución, mientras que el algoritmo arrojó una solución factible con tan solo un 9,2% de diferencia respecto a la óptima y en tan solo 173,67 segundos lo que representa un 99,4% más rápido.

9.2.4 Variaciones en parámetros. Para este numeral se hará enfoque en observar el comportamiento del costo de la función objetivo y el tiempo computacional utilizando el algoritmo desarrollado, cuando se modifican dos parámetros del modelo matemático del SBRP, los cuales corresponden a la distancia máxima que puede caminar un estudiante y a la capacidad del autobús, respecto a los evaluados anteriormente para 3 de las instancias trabajadas.

Tabla 15 Resultados obtenidos al variar la distancia que camina el estudiante

	Recorrido Máximo de Estudiante=750				Recorrido Máximo de Estudiante=600			
Instancia	F.O.	t(s)	Paradas Creadas	Vehículos Utilizados	F.O.	t(s)	Paradas Creadas	Vehículos Utilizados
Ins7s130p12	27484,0	88,79	8	4	33315,3	80,46	11	4
Ins9s150p15	21188,8	47,33	6	5	25324,4	94,00	8	5
Ins12s170p17	30892,3	173,67	9	5	37204,9	253,91	12	5

En la tabla 15 se observa que cuando se disminuye la distancia recorrida por el estudiante hasta la parada, tanto el costo de la función objetivo como el tiempo computacional se incrementan; esto se ocasiona debido a que se utilizan nuevas paradas para lograr satisfacer esta restricción (ver figuras 7 y 8), aumentando de igual manera el recorrido realizado por cada autobús. Es importante resaltar que el algoritmo puede cambiar la ubicación de las paradas si éstas no logran satisfacer la restricción de máximo recorrido por parte del estudiante, como fue el caso de la instancia Ins12s170p17, a la cual el algoritmo modifico la ubicación de las paradas iniciales como se muestra en la tabla 16.

Tabla 16 Modificación de paradas Instancia 12

Parada	Ubicaciones Iniciales		Ubicaciones arrojadas por el algoritmo	
1	0	0	0	0
2	1300	600	1355	256
3	127	1280	769	1146
4	-800	1135	-375	1327
5	-1400	300	-1142	858
6	-1500	-700	-1500	-700
7	-1000	-375	-1000	-375
8	-900	-1200	-152	-1169
9	-258	-1073	492	-1331
10	700	-1256	806	-1062
11	-1700	0	-1581	6
12	-700	400	-680	818
13	-600	-700	449	-1330
14	-1200	-1200	-1200	-1200
15	200	-1100	780	-885
16	-380	1200	269	1234
17	-300	600	-24	1157

En la tabla 16 se observa que algunas de las paradas iniciales se mantienen, las cuales se encuentran resaltadas

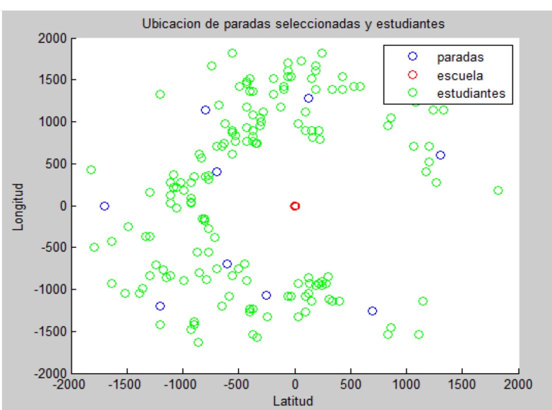


Figura 8 Paradas seleccionadas - Distancia 750m

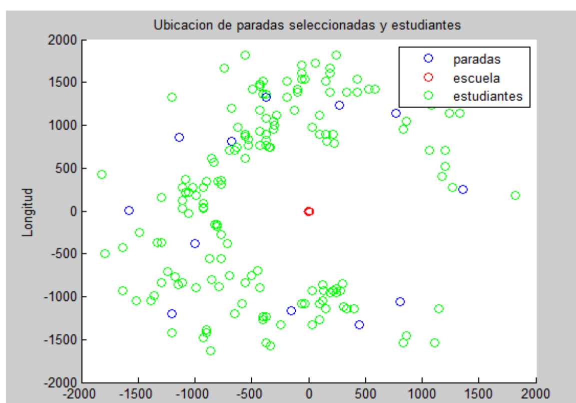


Figura 7 Paradas seleccionadas - Distancia 600m

Tabla 17 Resultados obtenidos variando capacidad del autobús

	Capacidad Autobús=40				Capacidad Autobús=50			
Instancia	**F.O.**	**t(s)**	**Paradas Creadas**	**Vehículos Utilizados**	**F.O.**	**t(s)**	**Paradas Creadas**	**Vehículos Utilizados**
Ins7s130p12	27484,0	88,79	8	4	25310,5	76,78	8	3
Ins9s150p15	21188,8	47,33	6	5	19772,2	57,21	6	4
Ins12s170p17	30892,3	173,67	9	5	28857,2	210,24	9	4

En la tabla 17 se observa que el costo de la función objetivo se minimiza cuando se aumenta la capacidad del autobús. Esto se debe a que, al existir más capacidad en los autobuses, la cantidad de rutas se disminuye, dado a que el autobús puede visitar más paradas si cuenta con espacio para recoger más estudiantes, lo cual se ve representado en una disminución del recorrido total. Por el contrario, el tiempo computacional para algunas instancias aumenta, debido a que se cuenta con menos vehículos (disminuye las rutas), entonces el algoritmo requiere más tiempo para enlazar las paradas que pueden ser visitadas por el autobús sin superar su capacidad.

10 DISEÑO EXPERIMENTAL

10.1 DEFINICIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN

Con motivo de analizar que parámetros tienen un efecto significativo en la respuesta de la función objetivo del problema SBRP se realiza un diseño de experimentos factorial 2^k, siendo 2 los factores seleccionados:

- Número de réplicas en la etapa de ahorros
- Exhaustividad de la Búsqueda (% aceleración)

En la tabla 18 se muestran la configuración de los valores que se manejaron para los niveles de cada factor:

Tabla 18 Niveles de los factores para el diseño factorial 2^2.

Factor	Nivel Bajo	Nivel Alto
A: Número de réplicas	1	5
B: Exhaustividad de la Búsqueda (%)	90%	100%

Con los parámetros definidos, se establece realizar un diseño de experimentos factorial 2^2, y todos los tratamientos posibles son los que se muestran en la tabla 19, los cuales fueron creados y analizados usando el software estadístico Statgraphics Centurion XVI.

Tabla 19 Tratamientos a utilizar en el Diseño Experimental

Tratamiento	A (Número de Réplicas)	B (Exhaustividad de la búsqueda)
1	-	-
2	+	-
3	-	+
4	+	+

10.2 RESULTADOS DEL DISEÑO EXPERIMENTAL

Los valores que se obtuvieron de la función de costo, son un promedio a partir de la experimentación con 5 réplicas.

Tabla 20 Resultados del Diseño Experimental

Corridas		VALOR PROMEDIO DE LA FUNCIÓN OBJETIVO					
A	B	INS2	INS3	INS7	INS8	INS10	INS12
-1	-1	8251,7	9449,5	29309,9	28683,3	23595,5	31453,8
1	-1	7764,4	9388,5	28875,7	28043,7	21075,7	32383,5
-1	1	8123,3	9449,5	27413,9	27559,2	21038,8	31279,4
1	1	7546,6	9388,5	27573,0	27165,5	19823,1	30414,9

En la tabla 20 se presentan los resultados obtenidos para cada una de las instancias seleccionadas con cada uno de los tratamientos planteados. Como se puede observar para cada instancia existe una combinación de parámetros que brinda un menor costo para la función objetivo, el cual se encuentra resaltado en azul. No obstante, en algunas instancias independientemente de la combinación de parámetros realizada se obtuvo un mismo costo.

De las seis instancias analizadas se observa que el tratamiento que a nivel general obtuvo un mejor resultado es dado por el nivel alto – alto, es decir, con un número de réplicas igual a 5 y una exhaustividad de búsqueda del 100%. Por otro lado, se detalla que para la instancia 3 la combinación de parámetros no es significativa, dado a que presenta el mismo costo en diferentes combinaciones.

10.3 ANÁLISIS DEL DISEÑO EXPERIMENTAL

El modelo de regresión correspondiente al diseño de experimentos se expresa a continuación:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon$$

Donde:

$\boldsymbol{y_{ij}}$: Es el costo total esperado

$\boldsymbol{\mu}$: Es el efecto medio global

$\boldsymbol{\alpha_i}$: Es el efecto producido por el parámetro A, es decir el Número de réplicas

$\boldsymbol{\beta_j}$: Es el efecto producido por el parámetro B, es decir la Exhaustividad de la Búsqueda.

$\boldsymbol{\varepsilon}$: Es el error aleatorio

Una vez realizado el diseño de experimentos de 4 tratamientos con 5 réplicas cada uno, se identifica los efectos estimados de cada uno de los parámetros sobre la función objetivo en cada una de las instancias evaluadas.

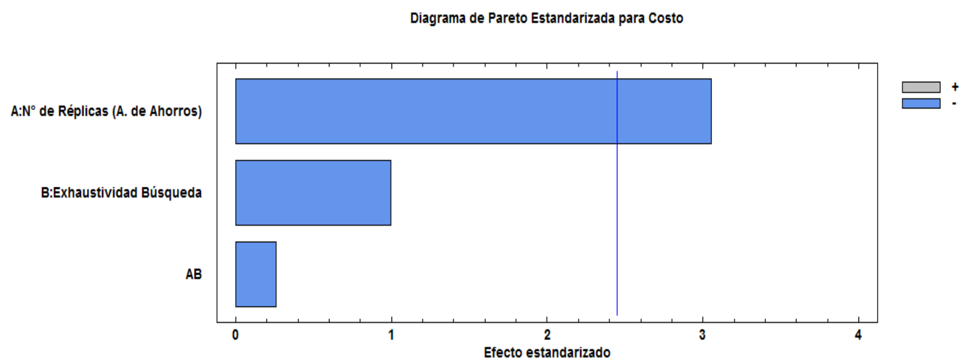
Tabla 21 Efectos Estimados sobre la Función Objetivo

Factores	**Efectos Estimados**					
	INS2	INS3	INS7	INS8	INS10	INS12
Números de Réplicas (Algoritmo Ahorros)	-532,05	-61,033	-137,5	-516,617	-1867,75	32,633
Exhaustividad de la Búsqueda (% Aceleración)	-173,1	0,0	-1599,3	-1001,2	-1904,7	-1071,5

Partiendo de que la estimación de los efectos principales es la diferencia entre la respuesta del nivel alto y el nivel bajo de un factor; por lo tanto, para los resultados mostrados en la tabla 21, si un valor es negativo significa que al pasar del nivel bajo al nivel alto la función objetivo disminuye.

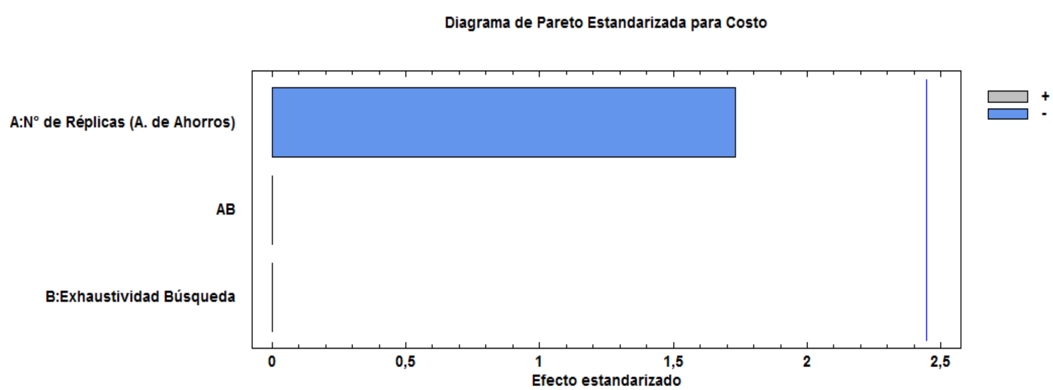
Para lograr una mayor identificación a cerca de los parámetros que representan mayor influencia sobre la función objetivo, a continuación, se presentan las gráficas de Pareto estandarizadas.

Figura 9 Diagrama de Pareto Instancia 2



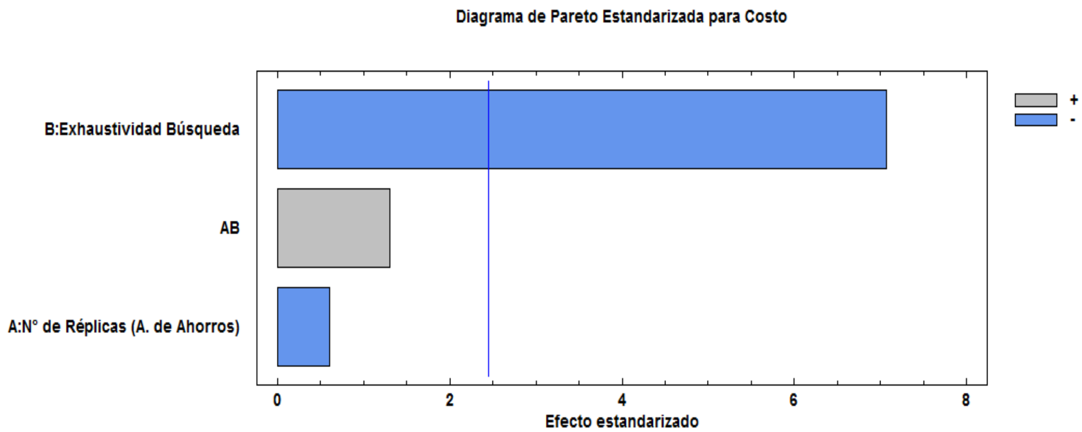
A partir de la Figura 9, se observa que el parámetro que representa un efecto significativo es el Número de Réplicas, y dado a que es negativo se debe asumir el valor de éste parámetro en un nivel alto.

Figura 10 Diagrama de Pareto Instancia 3



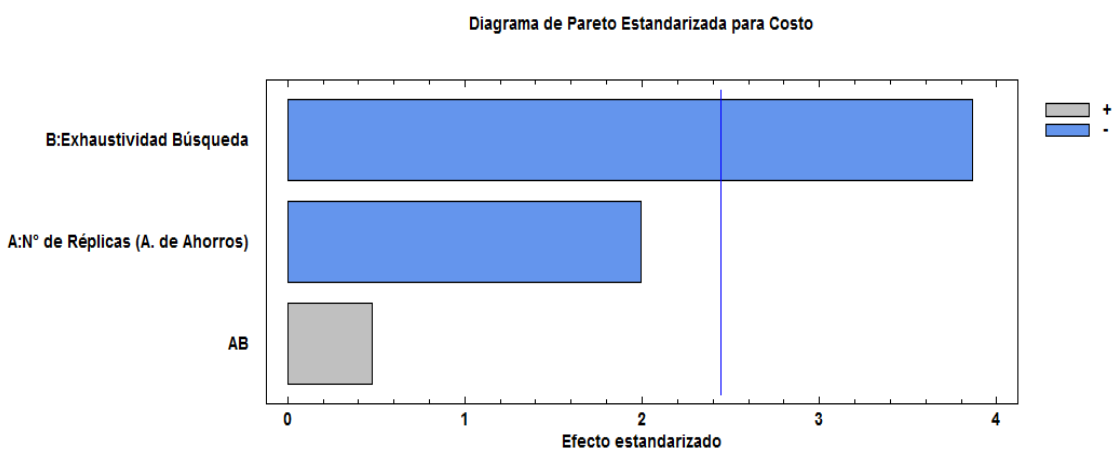
En la figura 10, para la instancia 3, se observa que ningún parámetro ejerce un efecto significativo sobre la función objetivo.

Figura 11 Diagrama de Pareto Instancia 7



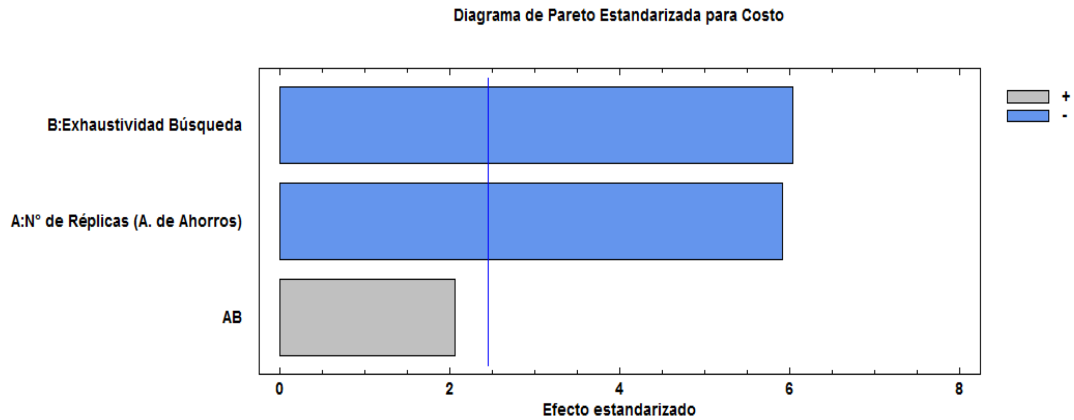
Como se puede observar en la figura 11, para la instancia 7 el parámetro Exhaustividad de la Búsqueda ejerce un efecto significativo en la función objetivo, el cual se debe considerar en un nivel alto dado a que es negativo.

Figura 12 Diagrama de Pareto Instancia 8



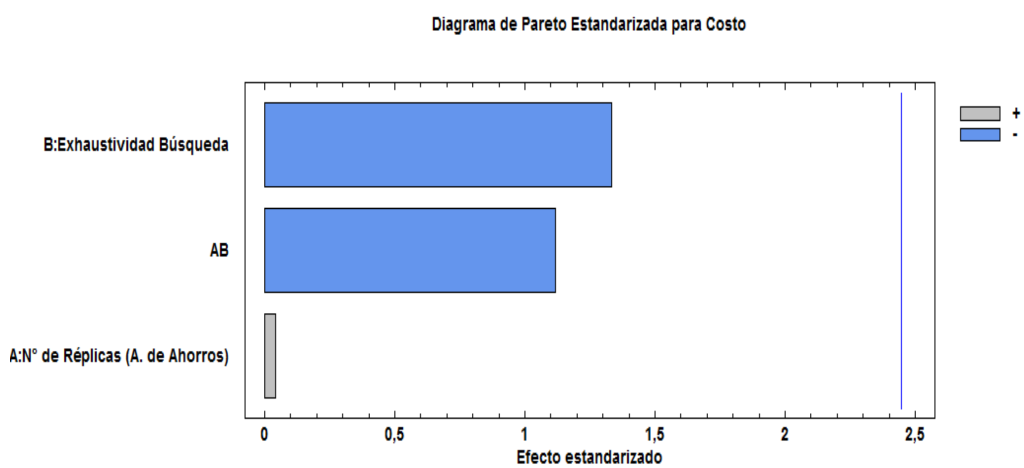
Al igual que para la instancia 7, en la figura 12 se observa que el parámetro que ejerce un efecto significativo sobre la función objetivo en la instancia 8 es el de Exhaustividad en la Búsqueda, el cual se debe trabajar en un nivel alto por su efecto negativo.

Figura 13 Diagrama de Pareto Instancia 10



Por medio de la figura 13, se logra determinar que para la instancia 10 los dos factores generan una influencia significativa sobre la función objetivo. Para este caso, ambos efectos son negativos lo que indica que deben ser ubicados en el nivel alto.

Figura 14 Diagrama de Pareto Instancia 12



Para la instancia 12, mediante la figura 14 se puede observar que no existe ningún parámetro que genere un efecto significativo sobre la función objetivo.

11 CONCLUSIONES

- De acuerdo a los resultados obtenidos por el algoritmo ARPRE en las diferentes instancias y su comparación con el método exacto Ramificación y Acotamiento, se prueba que este algoritmo basado principalmente en la metaheurística de Búsqueda Tabú, es un buen algoritmo para la solución del problema de rutas escolares, el cual arrojó un 2,9% en promedio de variación con respecto a la solución óptima de las 12 instancias comprobadas.

- Los experimentos ejecutados, muestran que el algoritmo desarrollado, logra encontrar soluciones factibles en un tiempo computacional bastante menor que el procedimiento exacto, siendo el algoritmo un 99,4% más rápido en la una instancia con 170 estudiantes y 17 paradas; siendo esta instancia la más grande que logro correr el software Gams y en la que duro alrededor de 16 horas en generar la solución óptima.

- Realizar algunas variaciones en los parámetros del problema puede repercutir en la función objetivo del mismo, tales como disminuir la distancia recorrida por el estudiante hasta la parada, como es de esperarse, el costo de la función objetivo incrementa; esto se debe a que se utilizan nuevas paradas para lograr satisfacer la restricción de máxima distancia que puede caminar un estudiante, aumentando de igual manera el recorrido realizado por cada autobús. Por el contrario, se observa que el costo se minimiza cuando se aumenta la capacidad del autobús; ya que, al existir más capacidad en los autobuses, la cantidad de rutas disminuye. Por tanto, es importante analizar cuáles son las prioridades del problema y jugar en la variación de los parámetros a favor de éstas.

- De acuerdo al diseño experimental se observa que no existe una combinación óptima para todas las instancias; sin embargo, el tratamiento que a nivel general obtuvo un mejor resultado es dado por el nivel alto – alto, es decir, con un número de réplicas igual a 5 y una exhaustividad de búsqueda del 100%.

12 RECOMENDACIONES

Para próximas investigaciones se recomienda:

- Solucionar problemas con instancias reales escolares y/o empresariales, a través del algoritmo desarrollado en la presente investigación; esto con el fin de evaluar y comparar la disminución en los costos de las soluciones arrojadas por el algoritmo ARPRE con respecto a las soluciones manejadas previas a este.

- Ahondar en el estudio de otras técnicas de optimización heurísticas y metaheurísticas, que han sido ampliamente utilizadas para la solución de problemas como el LRP y el VRP, esto con el objetivo de solucionar el SBRP integrando sus cinco subproblemas, e identificar aquellas que conlleven a soluciones bastante próximas a las óptimas en el menor tiempo posible.

- Diseñar y desarrollar otros modelos matemáticos, considerando características diferentes del problema SBRP; ya que dada la amplitud que encierra este problema existen otro tipo de prioridades y necesidades que optimizar como: el problema de asignación de los estudiantes, la restricción del número de vehículos a usar, cargas balanceadas, pérdida de tiempo del niño, el problema multiescuela, entre otras según sea el caso.

BIBLIOGRAFÍA

ARAYA, Nicole; OBREQUE, Carlos y PAREDES, Gérman. "Un Modelo de Programación Lineal Entera Mixta para el Problema de Ruteo de Vehículos en el Transporte Escolar". En: Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación operativa. Rio de Janeiro, Brasil. Septiembre 24 – 28, 2012; pp. 2293- 2302.

ARIAS ROJAS, Juan Sebastián. Aplicación de un Modelo de Optimización en la Planeación de Rutas de los Autobuses Escolares del Colegio Liceo Cervantes Norte. Bogotá, 2010, p.103. Trabajo de grado (Ingeniero Industrial). Universidad Pontificia Javeriana. Facultad de Ingeniería. Departamento de Procesos Productivos.

ARIAS ROJAS, Juan Sebastián; JIMÉNEZ, José F. y MONTOYA TORRES, Jairo R. "Solving of School Bus Routing Problem by Ant Colony Optimization". En: Revista EIA. No. 17. (Julio, 2012); pp. 193-208.

ARITO, Franco Luis. "Algoritmos de Optimización basados en Colonias de Hormigas aplicados al Problema de Asignación Cuadrática y otros problemas relacionados". Argentina, Abril de 2010. Tesis de Grado (Licenciado en Ciencias de la Computación). Universidad Nacional de San Luis. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales.

BAÑOS NAVARRO, Raúl. "Metaheurísticas híbridas para optimización mono-objetivo y multi-objetivo. Paralelización y aplicaciones". Almería, Diciembre de 2006. Tesis Doctoral (Doctor en Informática). Universidad de Almería, p.3.

BARAJAS, Wilson. "Desarrollo de un algoritmo heurístico para establecer las rutas de transporte escolar de la secretaría de educación de Bogotá". Tesis de Maestría. Bogotá, 2009. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingenierías.

BATTARRA, María; MONACI, Michele y VIGO, Daniele. “An adaptive guidance approach for the heuristic solution of a minimum multiple trip vehicle routing problem”. En: Computers & Operations Research, Vol. 36. 2009, pp. 3041-3050.

BEKTAS, Tolga y ELMASTAS, Seda. “Solving school bus routing problems through integer programming”. En: Journal of the Operational Research Society. Vol. 58. 2007; pp. 1599 -1604.

BEN SGHAIER, Sayda; BEN GUEDRIA, Najeh y MRAIHI, Rafaa. “Solving School Bus Routing Problem with Genetic Algorithm”. En: International Conference on Advanced Logistics and Transport (ICALT). 2013, pp. 7-12.

BERHAN, Eshetie; BESHAH, Birhanu y KITAW, Daniel. “Stochastic Vehicle Routing Problem: A Literature Survey”. En: Journal of Information & Knowledge Management. Vol. 13, No. 3. Septiembre, 2014; pp.1-12.

BLECHA, Charlotte. “The Vehicle Routing Problem with Backhauls: Properties and Solution Algorithms”. En: Georgia Tech Research Corporation. 1992., pp. 26.

BLUM, Christian y ROLI, Andrea. “Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison”. En: Journal ACM Computing Surveys. Vol. 35. Septiembre, 2003; pp. 268-308.

BOCK, Adrian, et al. “The School Bus Problem on Trees”. En: Algorithmica. Vol.67. 2013, pp. 49 - 64.

BOWERMAN, Robert; HALL, Brent y CALAMAI, Paul. “A multi-objective optimization approach to urban school bus routing: Formulation and solution method”. En: Transportation Research. Part A: Policy and Practice. Vol. 29, No. 2. 1995; pp. 107–123.

CANTILLO CALDERON, Deisy Carolina, et al. “Seminario de Investigación: Algunos Métodos de Solución para el CVRP”. Bucaramanga, 2010, pp. 87. Trabajo de grado (Ingenieras Industriales). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales.

CANTILLO CALDERON, Deisy Carolina. “Algoritmo híbrido combinando un sistema evolutivo colonia de hormigas con búsqueda tabú, para la solución de problemas de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo duras”. Bucaramanga, 2014, pp. 50. Trabajo de Maestría (Master en Ingeniería Industrial). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales.

CERANOGLU, Ahmet; DUMAN, Ekrem. VRP12 (vehicle routing problem with distances one and two) with side constraints. En: International Journal of Production Economics.Agosto 2013.Vol. 144.pp 461-467.

CONTRERAS PINTO, Claudia Marcela y DÍAZ DELGADO, María Fernanda. “Métodos Heurísticos para la Solución de Problemas de Ruteo de Vehículos con Capacidad (CVRP)”. Bucaramanga, 2010, 211 h. Trabajo de grado (Ingenieras Industriales). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales.

CORBERÁN, Angel; FERNÁNDEZ, Elena; LAGUNA, Manuel y MARTÍ, Rafael. “Heuristic solutions to the problem of routing school buses with multiple objectives”. En: Journal of the Operational Research Society. Vol. 53. 2002; pp. 427-435.

CORREA, Alexander, et al. “Solución de problemas de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad usando la teoría de grafos”. En: Revista Avances en Sistemas e Informática – UNAL. Vol. 8, No. 3. Diciembre de 2011,p p.27-32.

CORTÉZ, Augusto. “Teoría de la Complejidad Computacional y Teoría de la Computabilidad”. Ensayo. Lima, 2004. [En línea]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática. Disponible en:< http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtualdata/publicaciones/risi/n1_2004/a14.pdf.>. [Citado el 11 de Agosto de 2015]

DAZA, Julio; MONTOYA, Jairo y NARDUCCI, Francesco. Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases. En: Revista EIA. ISSN 1794-1237. No. 12. Diciembre, 2009; pp. 23-38.

DEMIRAL, Fatih; GÜNGÖR, Íbrahim y ORUC, Kenan. “Optimization at Service Vehicle Routing and a Case Study of Isparta, Turkey”. En: First Inernational Conference on Management and Economic (ICME). Tirana, Albania. 2008, pp. 374 – 387.

DÍAZ PARRA, Ocotlán, et al. “A Vertical Transfer Algorithm for the School Bus Routing Problem”. En: IEEE. (2012); pp. 66 – 71

DOMÍNGUEZ JIMÉNEZ, Juan José. “Búsquedas Genéticas: Métodos de optimización global y optimización combinatoria”. Tesis Doctoral. Diciembre, 2008. Universidad de Cádiz. Departamento de lenguajes y sistemas informáticos, p.36.

EUCHI, Jalel y MRAIHI, Rafaa. “The urban bus routing problem in the Tunisian case by the hybrid artificial ant colony algorithm”. En: Swarm and Evolutionary Computation. Vol. 2. 2012, pp. 15-24.

FONSECA, Marcelo, et al. “A Real Geographical Application for the School Bus Routing Problem”. En: Intelligent Transportation Systems Conference (ITSC). 2014, pp. 2762 – 2767.

FÜGENSCHUH, Armi. “Solving a school bus scheduling problem with integer programming”. En: European Journal of Operational Research. Vol. 193. 2009; pp. 867–884.

GALLEGO, Olatz. “Soluciones basada en Simulated Annealing para VRPWT”. España, Mayo de 2002. Tesis Doctoral (Doctor en informática). Universidad del País Vasco. Facultad de informática, p.10.

GRANADOS FORERO, Diana Alexandra. Diseño e Implementación de un Modelo para la Asignación de Rutas Escolares en Cooperativa Multiactiva Claveriana Ltda "Comuclaver". Bucaramanga, 2011, 122 h. Trabajo de grado (Ingeniera Industrial). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales.

HILLIER, Frederick S. y LIEBERMAN, Gerald J. "Introducción a la investigación de operaciones". 9° Ed. Mc Graw Hill. 2010, p. 978.

ISKANDER, Wakif; JARAIEDI, Majid y EMAMI, Flora. "A Practical Approach for School Bus Routing and Scheduling". En: Annual conference and exposition, IIE. Orlando, FL. 2006.

KIM, Byung-In; KIM, Seongbae y PARK, Junhyuk. "A school bus scheduling problem". En: European Journal of Operational Research. Vol. 218. 2012, pp. 577-585.

KIM, Taehyeong, y PARK, Bum-Jin. "Model and Algorithm for Solving School Bus Problem". En: Journal of Emerging Trends in Computing and Information Sciences. Vol. 4. No. 8. 2013, pp. 596 -600.

LEDESMA, Jorge y SALAZAR, Juan. "Solving school bus routing using the multiple vehicle traveling purchaser problem: A branch-and-cut approach". En: Computers & Operations Research. Vol. 39. 2012; pp. 391 - 404.

LEE, Chi-Guhn, et al. "A Shortest Path Approach to the Multiple-Vehicle Routing Problem with Split Pick-Ups". En: Transportation Research Part B: Methodological. Vol. 40. Mayo de 2006, pp.265–284.

LI; Hong-Gui; LI, Xing-Guo."Image segmentation with pseudo branch and bound algorithm". En: Proceedings of the Eighth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Baoding. Julio, 2009, p.5.

LINGMEI, Huo, et al. “School Bus Routing Problem Based on Ant Colony Optimization Algorithm”. En: IEEE, Transportation Electrification Conference (ITEC Asia-Pacific). 2014, pp. 1-5.

Ma, X. “Vehicle routing problem with time windows based on improved ant colony algorithm. En: Information Technology and Computer Science. 2010, p. 94-97.

MARTÍ, Rafael. “Procedimientos metaheurísticos en optimización combinatoria”. Universidad de Valencia. Facultad de Matemáticas. Departamento de estadísticas e investigación operativa. 2003. p. 2

MARTÍNEZ, Luis y VIEGA, José. “Design and Deployment of an Innovative School Bus Service in Lisbon”. En: Procedia - Social and Behavioral Sciences. Vol. 20. 2011, pp. 120-130.

MORENO DÍAZ, Pilar, et al. “Metaheurísticas de optimización combinatoria: Uso de Simulated Annealing para un problema de calendarización”. En: Tecnologí@ y desarrollo. Universidad Alfonso X El Sabio. ISSN 1696-8085. Vol.5, Septiembre, 2007.

MORILLO, Daniel; MORENO, Luis y DÍAZ, Javier. “Metodologías Analíticas y Heurísticas para la Solución del Problema de Programación de Tareas con Recursos Restringidos (RCPSP): una revisión”. En: Revista Ingeniería y Ciencia. Vol.10, N° 19. Enero – Junio, 2014; pp. 247 – 271.

MOURA, José Luis; IBEAS, Ángel y DELL’OLIO, Luigi. “Diseño de rutas de transporte escolar con ventanas temporales móviles”. En: XIII Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, Santiago. Octubre, 2007, p. 4.

NEWTON, Rita y THOMAS, Warren. “Design of school bus routes by computer”. En: Socio-Economic Planning Sciences. Vol. 3, No. 1, (1969); pp. 75–85.

PARK, Junhyuk y KIM, Byung-in. “The school bus routing problem: A review”. En: European Journal of Operational Research. Vol. 202. 2010, pp. 311–319.

PARK, Junhyuk; TAE, Hyunchul y KIM, Byung-In. “A post-improvement procedure for the mixed load school bus routing problem”. En: European Journal of Operational Research. Vol.204. 2012, pp. 204-213.

PASTOR MORENO, Rafael. “Metalgoritmo de optimización combinatoria mediante la exploración de grafos”. Junio, 1999. Tesis doctoral (Ingeniería Industrial). Universitat Politècnica de Catalunya, p. 15.

PÉREZ JIMÉNEZ, Mario y SANCHO CAPARRINI, Fernando. “Teoría de la Complejidad Computacional”. En: Máquinas Moleculares Basada en ADN. Universidad de Sevilla: Secretariado de Publicaciones, 2003. [En Línea]. Disponible en: <http://www.cs.us.es/~marper/docencia/bioinspirada-2014/material/cap-2.pdf>. [Citado el 11 de Agosto de 2015].

PINO, Raúl et al. Estado del arte para la resolución de enrutamiento de vehículos con restricciones de capacidad. En: 5th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management. Cartagena, Septiembre 2011.

RIPPLINGER, David. “Rural School Vehicle Routing Problem”. En: Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board. 2005, pp. 105 - 110.

ROCHA, Linda; GONZÁLEZ, Elsa y ORJUELA, Javier. “Una revisión del estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución”. En: Ingeniería. Vol. 16, No. 2. Octubre, 2011, p. 37.

RODRIGUEZ PÉREZ, Jorge. Caracterización, modelado y determinación de las rutas de la flota en una empresa de Rendering. En: E-Reding. Trabajos y proyectos fin de estudios de la E.T.S.I. Máster en Organización Industrial y Gestión de Empresas. 2012, pp.700.

SCHITTEKAT, Patrick, et al. “A metaheuristic for the school bus routing problem with bus stop selection”. En: European Journal of Operational Research. Vol. 229. 2013. pp.518–528.

SCHITTEKAT, Patrick; SEVAUX, Marc y SORENSEN, Kenneth. “A mathematical formulation for a school bus routing problem”. En: Service Systems and Service Management. Vol, 2. 2006; pp. 1552–1557

SPASOVIC, Lazar et al. “A Methodology for Evaluating of School Bus Routing - A Case Study of Riverdale, New Jersey”. En: Transportation Research Board, 80th Annual Meeting. 2001. Washington, D.C.

SUAREZ, Orlando. “Una aproximación a la heurística y metaheurísticas”. En: Revista Inge@UAN. [En línea]. Junio, 2011. Disponible en:< http://csifesvr.uan.edu.co/index.php/ingeuan/article/view/198/170>. [Citado el 17 de Agosto de 2015].

VOLKAN, Arif. “A GA Based Metaheuristic for the Capacitated Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-up and Deliveries”. Tesis de Maestría. Estambul, 2003. Universidad Sabanci. Facultad de Ingeniería y Ciencias Naturales.