

Optimización de la Resistencia a la Tracción de un Concreto Fibro-Reforzado con Contenidos de
Arena de Fundición por Medio del Método Estadístico de Superficie de Respuesta

Lady Diane Morantes Jaime

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magister en Ingeniería Estructural

Director

Luis Eduardo Zapata Orduz

PhD. En Ingeniería Civil

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas

Escuela de Ingeniería Civil

Maestría en Ingeniería Estructural

Bucaramanga

2021

Dedicatoria

*A mis padres por haberme formado como la persona que soy; la mayoría de mis logros
se los debo a ustedes, incluyendo este.*

A mi esposo, por su ayuda y paciencia las cuales han sido fundamental en este proceso.

*A mi hijo, quien me acompañó desde el vientre y no me hizo dar sueño ni náuseas porque
sabía lo que estaba logrando su mamá, y por supuesto a mi director de proyecto, quien confió en
mí y me ayudó desde el inicio.*

Gracias a todos por siempre motivarme para alcanzar mis anhelos.

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	9
1. Objetivos	11
1.1 Objetivo general	11
1.1 Objetivos específicos	11
2. Marco teórico	12
2.1 Concreto	12
2.2 Fibras sintéticas	12
2.3 Arena de fundición	12
2.4 Resistencia a la compresión	13
2.5 Resistencia a la tracción	14
2.6 Diseño de mezcla	14
2.7 Diseño estadístico experimental	15
2.8 Superficie de Respuesta	15
2.9 Distribución de probabilidad	16
2.10 Distribución de probabilidad de Weibull	17
2.11 Metodología para la estimación de parámetros	18
2.11.1 Método grafico (MG)	18
2.11.2 Método de los momentos (MM)	19
2.11.3 Método de máxima verosimilitud (MMV)	21
2.11.4 Método de los momentos ponderados de probabilidad (MPP)	23

2.12 Pruebas de bondad de ajuste	25
2.12.1 Coeficiente de determinación (R^2)	25
2.12.2 Razón de verosimilitud	26
2.12.3 Estadístico de Anderson-Darling (A^2).....	26
3. Marco Experimental.....	27
3.1 Caracterización de materiales	27
3.2 Diseño Experimental.....	31
3.3 Diseño de mezclas.....	32
3.4 Proceso de Mezclado	38
3.5 Elaboración de especímenes	38
3.6 Ensayo en estado endurecido	40
4. Análisis de Resultados	41
4.1 Resistencia a la compresión	41
4.2 Resistencia a la tracción.....	45
4.3 Parámetros de Weibull.....	48
4.4 Análisis estadístico.....	52
5. Conclusiones	56
Referencias Bibliográficas	59

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1 Número de muestras de especímenes requeridos para cada punto de enmallado.....	32
Tabla 2 Cantidades de materiales para el diseño de mezcla	36
Tabla 3 Cantidades de materiales para diseño de mezcla del punto (0,0)	37
Tabla 4 Proporciones de los diseños de mezcla.....	39
Tabla 5 Parámetros de Weibull para la resistencia a la tracción a 14 días	49
Tabla 6 Análisis ANOVA del modelo sin depurar	53
Tabla 7 Análisis ANOVA del modelo depurado	53
Tabla 8 Verificación de supuestos de ANOVA.....	54

Lista de Figuras

Figura 1 Arena de Fundición	13
Figura 2 Ensayo de tracción directa.....	14
Figura 3 Arena de fundición utilizada en fabrica Metalúrgica de Santander	30
Figura 4 Ensayos de caracterización en laboratorio (Prueba de granulometría)	30
Figura 5 Ensayos de Caracterización en laboratorio (Prueba de gravedad específica)	30
Figura 6 Diseño de experimentos de tipo central compuesto basado en un factorial 2k	31
Figura 7 Prueba de Asentamiento logrado (4mm) punto (0,0)	37
Figura 8 Mezcladora de concreto eléctrica de 120 Kg de capacidad.....	38
Figura 9 Proceso de fabricación de especímenes en el laboratorio	39
Figura 10 Ensayo de compresión simple para los especímenes	40
Figura 11 Ensayo de tracción indirecta de los especímenes	41
Figura 12 Resultados de resistencia a la compresión promedio a 7,14 y 28 días	42
Figura 13 Influencia de las fibras sobre la resistencia a la compresión promedio a 14 días	43
Figura 14 Influencia del remplazo de arena de fundición sobre la resistencia a la compresión promedio a 14 días	44
Figura 15 Resultados de resistencia a la tracción promedio a 7, 14, 28 días.....	45
Figura 16 Influencia de las fibras sobre la resistencia a la tracción promedio a 14 días	47
Figura 17 Influencia del remplazo de arena de fundición sobre la resistencia a la tracción promedio a 14 días	48
Figura 18 Parámetros de Weibull estimados para la resistencia a la tracción a 14 días	52
Figura 19 Superficie de respuesta del modelo depurado de resistencia a la tracción a 14 días...	54

Resumen

Título: Optimización de la resistencia a la tracción de un concreto fibro-reforzado con contenidos de arena de fundición por medio del método estadístico de superficie de respuesta.

Autor: Lady Diane Morantes Jaime**

Palabras Clave: Resistencia a la tracción, concreto fibro-reforzado, arena de fundición, superficie de respuesta, Weibull.

Descripción: Los concretos reforzados con fibras sintéticas han tenido un auge significativo en los últimos años en las investigaciones gracias a sus positivos resultados para mejorar las técnicas constructivas, económicas y ambientales. Por lo tanto, el presente proyecto de investigación plantea evaluar el comportamiento a tracción a la edad de 14 días del concreto reforzado con macro fibras sintéticas y remplazos de arena de fundición por agregado fino en los dominios de remplazo de 0.00% a 100.00% y en las fibras del 0.00% al 0.80% (volumen). Se realizaron dos tipos de ensayo en estado endurecido para caracterizar el material en estudio: (i) ensayo a compresión simple y (ii) ensayo brasileño a tracción indirecta, los cuales se ejecutaron mediante un diseño estadístico de experimentos del tipo central compuesto desde puntos axiales basado en un factorial 2^k con puntos al centro junto con la metodología de superficie de respuesta y análisis de varianza (ANOVA). Para los resultados, se realizó un análisis estadístico donde se evidenció que el uso de la función de densidad de probabilidad de Weibull es acertado para describir el comportamiento del concreto reforzado con macro fibras sintéticas y remplazos de arena de fundición. Adicionalmente, se puede concluir que la adición de macro fibras sintéticas al concreto hace que su resistencia a la tracción y a la propagación de grietas aumente en un 28.9% en comparación con un concreto sin fibras, contrario al comportamiento del concreto con remplazo de agregado fino por arena de fundición, ya que este material hace que se formen poros en el concreto los cuales reducen la pasta aglutinante para la unión de los agregados, reduciendo así su resistencia tanto a la tracción como a la compresión.

*Trabajo de grado

**Facultad Ingenierías Físico-Mecánicas-Escuela de Ingeniería Civil. Director Luis Eduardo Zapata Orduz. PhD en Ingeniería Civil

Abstract

Title: Optimization of the tensile strength of a fiber-reinforced concrete with cast sand contents by means of the response surface statistical method.

Author(s): Lady Diane Morantes Jaime

Key Words: Traction strength, fiber-reinforced concrete, cast sand, response surface, Weibull.

Description: Concrete reinforced with synthetic fibers have had a significant boom in recent years in research thanks to their positive results to improve construction, economic and environmental techniques. Therefore, the present research project proposes to evaluate the tensile behavior at the age of 14 days of concrete reinforced with synthetic macro fibers and replacements of foundry sand by fine aggregate in the replacement domains of 0.00% to 100.00% and in fibers from 0.00% to 0.80% (volume). Two types of tests were carried out in the hardened state to characterize the material under study: (i) simple compression test and (ii) Brazilian indirect tensile test, which were executed by means of a statistical design of experiments of the central type composed from axial points. based on a 2k factorial with points in the center together with the response surface methodology and analysis of variance (ANOVA). For the results, a statistical analysis was performed where it was evidenced that the use of the Weibull probability density function is correct to describe the behavior of reinforced concrete with synthetic macro fibers and foundry sand replacements. Additionally, it can be concluded that the addition of synthetic macro fibers to concrete increases its resistance to traction and crack propagation by 28.9% compared to concrete without fibers, contrary to the behavior of concrete with replacement of fine aggregate by foundry sand, since this material causes pores to form in the concrete which reduce the binder paste for the union of the aggregates, thus reducing its resistance to both traction and compression.

*Degree work

** Faculty of Physical-Mechanical Engineering-School of Civil Engineering. Director Luis Eduardo Zapata Orduz. PhD in Civil Engineering

Introducción

La industria de construcción ha generado un impacto ambiental severo en las últimas décadas, debido a la explotación de materia prima, utilización de energía y generación de residuos; para mitigar este problema ambiental, hace ya varios años se ha investigado e implementado el uso de agregados que ayuden al concreto a ser más amigable con el medio ambiente. La presente investigación utiliza un concreto fibro-reforzado con remplazo en porcentaje de volumen de la arena fina, por la arena de fundición, la cual es un desecho de la industria metalúrgica.

Se realizó un diseño de experimentos tipo central compuesto basado en una factorial 2^k con puntos al centro. El diseño de experimentos se realizó usando el software de donde se obtuvieron 9 puntos experimentales de distribución con 2 réplicas cada uno y 10 en el punto del centro. Cada punto tiene un diseño de mezcla diferente, variando el porcentaje en volumen de las fibras vs porcentaje en volumen del remplazo de la arena de fundición. Las fibras incorporadas van en un porcentaje desde 0% hasta 0.8% en volumen, y el remplazo de la arena de fundición va desde 0% hasta el 100%, la idea de llevarlo al 100% es buscar que en la superficie de respuesta se muestre claramente hasta donde sube la curva de la resistencia.

Todos los materiales usados en el gremio de la construcción exigen ser analizados en su comportamiento mecánico es por ello que antes de realizar los ensayos en el laboratorio fue necesario hacer una adecuada caracterización de los materiales, todos los ensayos fueron guiados bajo la norma ASTM.

Para los diseños de mezcla de todos los puntos experimentales, se tomó como punto de partida el método volumétrico propuesto por el ACI, manteniendo la relación agua cemento igual para todos los diferentes puntos del diseño.

Luego de hacer el diseño de todos los puntos del enmallado se procede a realizar los especímenes siguiendo la norma ASTM, continuo a esto, se procede a desencofrar, curar y fallar los especímenes utilizando ensayos de tracción indirecta, mas conocida como ensayo brasileño y adicionalmente como punto de control se realizaron ensayos de compresión simple.

Finalmente, ya teniendo los resultados de la resistencia a la tracción, se procede a hacer el análisis de los datos, empleando enfoques probabilísticos los cuales aplican funciones de probabilidad que implícitamente tienen en cuenta muchas variables aleatorias que hay en el entorno. Adicionalmente, usamos la función de Weibull la cual está comprobada en otras investigaciones que tiene una aplicación acertada con materiales como el concreto, sin embargo, para verificar que los datos obtenidos por el método de Weibull estén bien, se utiliza la prueba de bondad de ajuste.

Finalmente se hace el análisis estadístico ANOVA, que es obtener una superficie de respuesta a partir de los datos de laboratorio. Los datos de laboratorio fueron obtenidos a partir de un análisis de un diseño experimental que nos hace una malla y luego con esa malla sacamos la superficie de respuesta.

1. Objetivos

Determinar la resistencia a la tracción de un concreto reforzado con fibras sintéticas y contenido de arena de fundición como reemplazo del agregado fino, empleando la metodología estadística de superficie de respuesta, usando parámetro de resistencia de Weibull.

1.1 Objetivo general

Determinar la resistencia a la tracción de un concreto reforzado con fibras sintéticas y contenido de arena de fundición como reemplazo del agregado fino, empleando la metodología estadística de superficie de respuesta, usando parámetro de resistencia de Weibull.

1.1 Objetivos específicos

- Obtener diseños de mezcla que incorporen la variación del porcentaje de volumen de los agregados (arena de fundición y fibra sintética), siendo óptimos por medio del modelo de Weibull como medida de la resistencia a la tracción a una edad de maduración de siete días.
- Ejecutar un estudio matemático-estadístico tipo superficie de respuesta que incluya todos los diseños de mezcla, estudiando la influencia de los parámetros (arena de fundición y fibra sintética) en el diseño, determinando un punto óptimo por medio de un análisis de varianza multivariable tipo (ANOVA) optimizando respecto al módulo de Weibull.

2. Marco teórico

2.1 Concreto

El concreto es un material compuesto por arena, grava, cemento, agua y en ocasiones aditivos (McCormac & Brown, 2011), el cual es muy importante y ampliamente utilizado en la industria de la construcción (Ghasemi, Ghasemi, & Mousavi, 2018), ya que brinda altas resistencias a la compresión, sin embargo, es un material frágil con baja capacidad de deformación a tracción y por lo tanto baja tenacidad (Merta & Tschegg, 2013). Recientemente, se han realizado esfuerzos para mejorar el desempeño mecánico del concreto, especialmente su desempeño a la tracción, siendo la adición de fibras sintéticas un método efectivo (Hongbo, Haiyun, & Hongxiang, 2020).

2.2 Fibras sintéticas

Dentro de los tipos de fibras existentes se encuentran las fibras sintéticas, las cuales se fabrican con materiales como nylon, poliéster, polietileno y polipropileno. Investigaciones recientes han demostrado que la adición de fibras sintéticas confiere mejoras a las propiedades del concreto como la resistencia al impacto, ductilidad, tenacidad y la capacidad de absorción de energía (Hongbo et al., 2020), (Kazmi, Munir, Wu, & Patnaikuni, 2018).

2.3 Arena de fundición

La arena de fundición es aquella utilizada en operaciones de moldeo y fundición de metales. Las arenas de moldeo se reciclan y reutilizan varias veces durante el proceso de fundición. A su debido tiempo, la arena reciclada se desgasta al estado de que ya no se puede reutilizar en el proceso de fundición (Bhardwaj & Kumar, 2017). El concreto al ser un

material ampliamente utilizado en la construcción, conlleva para su fabricación a una alta explotación de recursos naturales (Kazmi et al., 2018), como lo es la arena de río. En búsqueda de reducir el impacto ambiental de la producción del concreto, la arena de fundición desechada es un material que ha sido utilizado como sustituto del agregado fino (Bhardwaj & Kumar, 2017). A continuación, la Figura 1 muestra el material resultante desgastado tras los procesos de fundición.

Figura 1 Arena de Fundición



Fuente. (Matos, Marcon, Schankoski, & Prudêncio, 2019)

2.4 Resistencia a la compresión

La resistencia a compresión de un material depende de su capacidad para soportar una carga excesiva, que tiende a comprimirlo, sin presentar falla (Hibbeler, 2011). Esta propiedad es inherente al propio material y debe determinarse mediante ensayos de compresión simple (ASTM C39, 2015).

2.5 Resistencia a la tracción

La resistencia a tracción de un material depende de su capacidad para soportar una carga excesiva, que tiende a estirarlo, sin presentar falla (Hibbeler, 2011). Esta propiedad puede determinarse mediante ensayos de tracción directa y ensayos de tracción indirecta (ASTM C496, 2011), estos últimos preferidos debido a la facilidad del montaje del ensayo (Alhussainy, Hasan, Rogic, Sheikh, & Hadi, 2016). La Figura 2 muestra el montaje para el ensayo de tracción indirecta.

Figura 2 Ensayo de tracción directa



2.6 Diseño de mezcla

Actualmente, los diseños de mezcla son obtenidos a través de metodologías basadas en el uso de diferentes correlaciones entre los parámetros de diseño y que a su vez son orientadas a la trabajabilidad, durabilidad y resistencia de la mezcla de concreto, dando como resultado las proporciones de cada uno de los materiales que la conforman (Rumman, Bari, Manzur, Kamal, & Noor, 2020).

2.7 Diseño estadístico experimental

Al momento de estudiar la influencia de los parámetros medidos en los ensayos de laboratorio (normalmente llamados factores), sobre las variables de respuesta estudiadas, es necesario desarrollar un diseño estadístico de experimentos, ya que brindan eficiencia y economía en el proceso experimental, gracias a que determinan la cantidad y secuencia de experimentos necesarios. Además, la aplicación de métodos estadísticos para examinar los datos resulta en objetividad científica al llegar a conclusiones (Montgomery & Runger, 2002).

El diseño de experimentos de tipo central compuesto basado en una factorial 2^k es una técnica poderosa para el análisis de problemas donde dos o más factores influyen sobre la variable de respuesta, ya sea cada factor por independiente o la interacción entre ellos. Este tipo de diseño de experimentos contempla puntos centrales en el centro del diseño experimental y puntos axiales sobre los ejes principales, los cuales permiten estimar y ampliar el criterio de curvatura sobre la variable de respuesta (Montgomery & Runger, 2002).

2.8 Superficie de Respuesta

El diseño de experimentos de tipo central compuesto trabaja en conjunto con la metodología de superficie de respuesta (RSM, por sus siglas en inglés), la cual es una serie de técnicas matemáticas y estadísticas útiles para modelar y analizar problemas en donde las variables de respuesta en interés están influenciadas por varios factores y el objetivo es optimizar estas variables de respuesta (Montgomery & Runger, 2002).

En general, la metodología de superficie de respuesta considera los efectos lineales, cuadráticos y la interacción existente entre factores para determinar la respuesta de las variables, en el lenguaje estadístico estos efectos se denominan términos. Existen problemas dónde no todos los términos considerados en esta metodología son estadísticamente significativos, por lo cual para determinar los efectos que inciden significativamente sobre la respuesta se aplica el análisis de varianza (ANOVA, por sus siglas en inglés) a cada uno de los términos. La superficie de respuesta que contiene únicamente los términos significativos se denomina superficie de respuesta depurada (Montgomery & Runger, 2002).

Para validar la aplicación de ANOVA en el conjunto de datos obtenidos, se debe realizar la revisión del cumplimiento de los supuestos o hipótesis en los que se basa este análisis (Montgomery, 2004), las cuales son:

- i) Los datos se ajustan a una distribución normal.
- ii) Los datos presentan varianzas homogéneas.
- iii) Los datos son independientes.

2.9 Distribución de probabilidad

Muchos problemas físicos pueden ser modelados por experimentos de laboratorio en los cuales los resultados numéricos poseen un grado de incertidumbre que pueden atribuirse a fenómenos aleatorios (Frangopol, 2008). Por ejemplo, las mediciones de volumen y peso de una probeta, poseen incertidumbre asociada a la irregularidad geométrica, los instrumentos de medición, la temperatura en el momento de la medición, entre otros. Por lo tanto, aquellas respuestas influenciadas por fenómenos aleatorios son llamadas variables aleatorias.

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria X es una descripción de las probabilidades asociadas con los posibles valores que la variable aleatoria X puede adoptar. En algunos casos, es conveniente expresar la distribución de probabilidad en términos de una función, así como la distribución de probabilidad de Weibull, cuya función se muestra en la siguiente sección (Montgomery & Runger, 2002)

2.10 Distribución de probabilidad de Weibull

Materiales frágiles como el concreto, presentan variaciones considerables en mediciones de muestras macroscópicamente similares debido a distribuciones desiguales de defectos, por lo tanto, sus propiedades mecánicas tienen una dispersión estadística significativa. En 1939, el ingeniero sueco Waldoddi Weibull introdujo su función de distribución empírica basada en pruebas de tracción, flexión y torsión, principalmente realizadas con materiales frágiles (Zapata Ordúz, Portela, & Suárez, 2014). La ecuación (1) muestra la función de densidad de probabilidad (FDP) de Weibull, también conocida como distribución de Weibull tres parámetros (W3)

$$f(x|\varphi, \beta, \lambda) = \frac{\lambda}{\beta} \left(\frac{x - \varphi}{\beta} \right)^{\lambda-1} \cdot e^{-\left(\frac{x - \varphi}{\beta} \right)^{\lambda}} \quad (1)$$

Adicionalmente, la función de distribución acumulada (FDA) de Weibull está dada por la Ecuación (2)

$$F_{(x|\varphi, \beta, \lambda)} = 1 - e^{-\left(\frac{x - \varphi}{\beta} \right)^{\lambda}} \quad (2)$$

Donde $x \geq \varphi$; $\varphi \in \mathbb{R}$; β y $\lambda \in \mathbb{R}^+$ φ, β y λ representan los parámetros de ubicación, escala y forma, respectivamente. La variable x representa la resistencia del material medida en

MPa, el parámetro de ubicación (ϕ) representa la resistencia mínima (MPa), el parámetro de escala (β) representa la resistencia característica (MPa) y el parámetro (λ) representa el módulo de Weibull, el cual es adimensional y cuantifica la dispersión de los valores de resistencia en las muestras de estudio (Zapata Ordúz et al., 2014).

Usualmente, para simplificar la estimación de los parámetros se adopta una distribución de Weibull dos parámetros (W2), la cual consiste en fijar el parámetro de ubicación (ϕ) en cero o una constante previamente determinada desde estudios de laboratorio o literatura. Sin embargo, W3 es matemáticamente más robusta y provee una mejor caracterización del material (Zapata Ordúz et al., 2014).

2.11 Metodología para la estimación de parámetros

Existen varias metodologías utilizadas para la obtención de los parámetros que componen la distribución de Weibull. Los métodos comúnmente utilizados son métodos gráficos, métodos de momentos y métodos de máxima verosimilitud. A continuación, se describen las metodologías utilizadas.

2.11.1 Método gráfico (MG)

El método gráfico es comúnmente utilizado para la obtención de los parámetros λ y β en W2 debido a su simplicidad matemática (Usta, Arik, Yenilmez, & Mert, 2018). En este método la FDA de Weibull, dada por la Ecuación (2), es transformada en una función lineal aplicando logaritmo natural dos veces, obteniendo como resultado la Ecuación (3) (Chaurasiya, Ahmed, & Warudkar, 2018).

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1 - F_{(x|\varphi, \beta, \lambda)}} \right) \right] = \lambda \ln x - \lambda \ln \beta \quad (3)$$

La representación gráfica de la Ecuación (3) demuestra una línea recta con pendiente λ y una intersección con el eje x de $\lambda \ln \beta$, donde los parámetros λ y β pueden ser obtenidos bajo el concepto de regresión de mínimos cuadrados, dado por las Ecuaciones (4) y (5) para este caso en particular (Chaurasiya et al., 2018).

$$\lambda = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^n \ln x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 - [\sum_{i=1}^n \ln x_i]^2} \quad (4)$$

$$-\lambda \ln \beta = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} \quad (5)$$

2.11.2 Método de los momentos (MM)

Desde el punto de vista de la estadística, los momentos son características que permiten describir una distribución de probabilidad, tales como la media, la varianza, el coeficiente de asimetría y de curtosis (Datsiou & Overend, 2018); en la presente investigación se hace uso de dos y tres momentos. El principio de este método es la igualación de los momentos muestrales con los momentos poblacionales (Usta et al., 2018).

Los momentos muestrales se describen en las Ecuaciones (6) - (8) (Prabhakar M., Xie, & Jiang, 2003),

$$\mu_1 = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (6)$$

$$\mu_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (7)$$

$$\mu_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n - 1} \quad (8)$$

Adicionalmente, los momentos poblacionales se muestran en las Ecuaciones (9) – (12) (Prabhakar M. et al., 2003)

$$M_1 = \varphi + \beta * \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (9)$$

$$M_{1'} = \beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (10)$$

$$M_3 = \beta^3 \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{3}{\lambda}\right) - 3 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) - 2 \cdot \Gamma^3\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \right] \quad (12) M_2$$

$$= \beta^2 \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \right] \quad (11)$$

Donde, n corresponde al número de datos y Γ es la función Gamma definida en la Ecuación (13) (Montgomery & Runger, 2002)

$$\Gamma_{(z)} = \int_0^{\infty} x^{z-1} \cdot e^{-x} dx \quad (13)$$

Para la obtención de los parámetros λ , β y φ en W3, se igualan los momentos muestrales [Ecuaciones (6), (7), (8)] con sus respectivos momentos poblacionales [Ecuaciones (9), (11), (12)]; de igual forma para el cálculo de los parámetros λ y β en W2 se igualan los momentos muestrales [Ecuaciones (6) y (7)] con sus respectivos momentos poblacionales [Ecuaciones (10) y (11)], los sistemas de ecuaciones obtenidos tras la igualación de momentos son resueltos con métodos numéricos.

2.11.3 Método de máxima verosimilitud (MMV)

Este método se basa en el uso de la función de verosimilitud, la cual es una función de parámetros desconocidos y describe, para cada conjunto de parámetros, la posibilidad de que la distribución verdadera tenga esos parámetros, con base en los datos de la muestra (Zapata Ordúz et al., 2014).

El logaritmo de la función de verosimilitud es comúnmente usado ya que reduce la complejidad de los cálculos. Para maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud (L) se realizan las derivadas parciales respecto a cada uno de los parámetros desconocidos y se igualan a cero. Para el caso particular de W2, el logaritmo de la función de verosimilitud y sus respectivas derivadas están dadas por las Ecuaciones (14) – (16) (Zapata Ordúz et al., 2014)

$$\mathcal{L}(\varphi, \beta, \lambda|x) = n(\ln \lambda - \lambda \ln \beta) + (\lambda - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\lambda} \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \beta, \lambda | x)}{\partial \beta}, \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \beta, \lambda | x)}{\partial \lambda} \right]^T = 0 \quad (15)$$

$$\left[-\frac{n\lambda}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta} \right)^\lambda, \frac{n}{\lambda} - n \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta} \right)^\lambda \cdot \ln \left(\frac{x_i}{\beta} \right) \right]^T = 0 \quad (16)$$

La estimación de los parámetros λ y β se realiza tras resolver la Ecuación (16) mediante métodos numéricos.

De forma similar, para W3, el logaritmo de la función de verosimilitud y sus respectivas derivadas están dadas por las Ecuaciones (17) - (19) (Zapata Ordúz et al., 2014)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\varphi, \beta, \lambda | x)} &= n(\ln \lambda - \lambda \ln \beta) + (\lambda - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \varphi) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \varphi}{\beta} \right)^\lambda \end{aligned} \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{(\varphi, \beta, \lambda | x)}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathcal{L}_{(\varphi, \beta, \lambda | x)}}{\partial \beta}, \frac{\partial \mathcal{L}_{(\varphi, \beta, \lambda | x)}}{\partial \lambda} \right]^T = 0 \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} -(\lambda - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - \varphi} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \varphi}{\beta} \right)^{\lambda-1}, \\ -\frac{n\lambda}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \varphi}{\beta} \right)^{\lambda}, \\ \frac{n}{\lambda} - n \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \varphi) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \varphi}{\beta} \right)^{\lambda} \cdot \ln \left(\frac{x_i - \varphi}{\beta} \right) \end{bmatrix}^T = 0 \quad (19)$$

Para la estimación de los parámetros se realizan arreglos matemáticos en la ecuación (19):

(i) resolviendo la expresión relacionada con la derivada parcial de β , este parámetro se puede expresar en términos de los otros parámetros, (ii) sustituyendo este último término en las expresiones de las derivadas parciales de λ y φ es posible obtener un par de ecuaciones que no involucran el parámetro β . Posteriormente este sistema de ecuaciones no lineales se resuelve a través de métodos numéricos.

2.11.4 Método de los momentos ponderados de probabilidad (MPP)

Los momentos ponderados de probabilidad (MPP) de una variable aleatoria x con una FDA, son cantidades representadas en la Ecuación (20) (Toasa Caiza & Ummenhofer, 2011)

$$M_{p,r,s} = \int_0^1 [x(F)]^p \cdot F^r \cdot (1 - F)^s dF \quad (20)$$

Donde $\in \mathbb{N}$. Remplazando $p=1$, $r=0$ y F como la FDA de $W3$ en la Ecuación (20) se obtienen los MPP mostrados en la Ecuación (21) (Toasa Caiza & Ummenhofer, 2011)

$$M_{1,0,s} = \frac{\varphi}{s+1} + \frac{\beta}{(s+1)^{1+(1/\lambda)}} \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \quad (21)$$

Donde $\lambda > 0$ y Γ es la función Gamma definida en la Ecuación (13). Para el cálculo de los parámetros λ , β y φ es necesario hacer uso de los primeros tres MPP mostrados en las Ecuaciones (22) - (24), donde $\llbracket M_s = M \rrbracket_{(1,0,s)}$, $s=0,1,2$. (Toasa Caiza & Ummenhofer, 2011)

$$M_0 = \varphi + \beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (22)$$

$$M_1 = \frac{\varphi}{2} + \frac{\beta}{2^{1+(1/\lambda)}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (23)$$

$$M_2 = \frac{\varphi}{3} + \frac{\beta}{3^{1+(1/\lambda)}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (24)$$

Sin embargo, es necesario conocer los valores de los MPP M_0 , M_1 y M_2 , para resolver las Ecuaciones (22) – (24) y obtener los parámetros de Weibull. Por lo tanto, a partir de estimadores denotados con el símbolo circunflejo y una serie de arreglos matemáticos se obtienen las Ecuaciones (25) - (27), de las cuales los parámetros de Weibull pueden ser estimados a través de métodos numéricos.

$$\beta = \frac{\widehat{M}_0 - \varphi}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)} \quad (25)$$

$$\widehat{M}_1 = \frac{\varphi}{2} + \frac{\beta}{2^{1+(1/\lambda)}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (26)$$

$$\widehat{M}_2 = \frac{\varphi}{3} + \frac{\beta}{3^{1+(1/\lambda)}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (27)$$

2.12 Pruebas de bondad de ajuste

Las pruebas de bondad de ajuste son una serie de metodologías estadísticas que definen qué tan bien se ajusta una serie de datos muestrales a una distribución de probabilidad. Estas metodologías formulan hipótesis acerca de si los datos en estudio se ajustan o discrepan de una distribución de probabilidad dada y evalúan los criterios estadísticos que miden dicha similitud o discrepancia (D'Agostino & Stephens, 1986). A continuación, se describen las pruebas de bondad de ajuste utilizadas en la presente investigación.

2.12.1 Coeficiente de determinación (R^2)

Esta prueba es comúnmente usada para juzgar el ajuste de los datos muestrales a la distribución de probabilidad estudiada (Montgomery & Runger, 2002), en este caso particular, FDP de Weibull. El coeficiente de determinación se calcula de acuerdo a la Ecuación (28)

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (28)$$

donde n es el número total de observaciones, y_i es la frecuencia de las observaciones, donde n es el número total de observaciones, y_i es la frecuencia de las observaciones, $\bar{y}_i$ es el valor promedio de las frecuencias de los datos observados y $\hat{y}_i$ es el i -ésimo valor estimado usando la distribución de Weibull (Chaurasiya et al., 2018), (Montgomery & Runger, 2002). El valor de R^2 varía de 0 a 1, en este sentido, el valor más alto de R^2 indica un mejor ajuste de los datos observados y los resultados calculados (Usta et al., 2018).

2.12.2 Razón de verosimilitud

La prueba G^2 es una prueba estadística usada como criterio para determinar si es apropiado describir los datos obtenidos con la FDP teórica, en este caso, la FDP de Weibull. Esta prueba se encuentra definida por la Ecuación (29)

$$G^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^k X \cdot \ln\left(\frac{X}{E(X)}\right) \quad (29)$$

donde $X = [X_1, X_2, \dots, X_k]$ es el vector de frecuencias de los datos observados x_i y $E(X) = [E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_k)]$ es el vector de esperanzas de los datos ajustados a la distribución F , siendo k el número de intervalos (Cressie & Read, 1989). La hipótesis nula de esta prueba es que la variable aleatoria x_i se comporta de acuerdo a la distribución F y se rechaza a un nivel de significancia $\alpha=0.10$ si G^2 excede el valor del estadístico $X_{\text{teo}}^2=7.78$ (Montgomery & Runger, 2002). Cabe resaltar que el nivel de significancia es una medida de fiabilidad en los resultados de los análisis y en la presente investigación se optó por un valor de 0.10 debido a la incertidumbre generada por la falta de control de las múltiples variables que influyen en los trabajos de laboratorio.

2.12.3 Estadístico de Anderson-Darling (A2)

Es una prueba estadística poderosa ya que es altamente sensible al comportamiento de la cola de la distribución, además, como el concreto reforzado con fibras, es altamente recomendada para análisis estadístico de materiales compuestos (Zapata Ordúz et al., 2014). Esta prueba está definida por las Ecuaciones (30) y (31)

$$AD^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) \cdot [\ln F_{(i)} + \ln(1 - F_{(n+1-i)})] \quad (30)$$

$$A^2 = AD^2 * \left(1.0 + \frac{0.2}{\sqrt{n}}\right) \quad (31)$$

donde n es el número total de datos observados, i es el i -ésimo dato ordenado de forma ascendente y F es la FDA de Weibull evaluada en el i -ésimo dato. La hipótesis nula de esta prueba es que la variable aleatoria x_i se comporta de acuerdo a la distribución F y se rechaza con un nivel de significancia $\alpha=0.10$ si A^2 excede el valor del estadístico $A_{teo}=0.63$ (D'Agostino & Stephens, 1986).

3. Marco Experimental

3.1 Caracterización de materiales

Todos los materiales usados en el gremio de la construcción exigen ser analizados en su comportamiento mecánico ya sea en estado fresco como endurecido, adicionalmente sus propiedades químicas también son importantes de analizar, es por ello que antes de realizar los ensayos en el laboratorio fue necesario hacer una adecuada caracterización de los materiales, donde se analizaron ensayos de gravedad específica, peso unitario, análisis granulométrico, análisis de materia orgánica, contenido de humedad y módulo de finura. Estos resultados fueron esenciales para el diseño de mezcla base y para todos los diseños siguientes, ya que el contenido de humedad de la arena y agregado grueso cambiaba por las condiciones ambientales del lugar donde eran almacenados, debido a esto, previamente a cada ensayo en el laboratorio, se debía hacer una prueba

de contenido de humedad de los materiales mencionados para no alterar los valores de los resultados del diseño de mezcla.

El tipo de cemento utilizado fue Portland tipo I, con una gravedad específica de 3.02, siguiendo los lineamientos de ensayos según la norma ASTM C188. El agregado fino utilizado fue arena fina y presentó una gravedad específica de 2.7, con capacidad de absorción de 2.6%, módulo de finura de 3 m³/m³, su contenido de humedad fue variable por las razones ya mencionadas anteriormente, sus respectivos ensayos fueron realizados según las normas ASTM C128 y ASTM C136.

El agregado grueso utilizado fue grava de río, y presentó una gravedad específica de 2.66, peso unitario de 1550 kg/m³, estos resultados se lograron siguiendo los parámetros de la norma ASTM C127; su tamaño nominal fue de ¾ de pulgadas (in) el cual fue obtenido con base en la norma ASTM C136, su porcentaje de absorción fue de 2.3% y su contenido de humedad fue variable como el de la arena (ASTM C-535).

Las fibras utilizadas fueron TUF-SRAND MAXTEN (tuf-strand maxten, toxement 2016), las cuales son una mezcla 100% virgen de copolímeros de macro fibra sintética usada como alternativa de fibras metálicas, malla electro soldada y barras de refuerzo convencional y una gama de aplicaciones de refuerzo secundario en el concreto (tuf-strand maxten, toxement 2016); además cumplen con la normal ASTM C-1116. Su gravedad específica fue de 0.91, con una longitud de 38 mm (ASTM C128).

El plastificante utilizado fue un aditivo liquido llamado SikaPlast RM-100, el cual está compuesto por resinas sintéticas y polímeros de última generación. ``Es un reductor de agua que puede emplearse como reductor de agua de mediano rango, es decir como plastificante y

superplastificante dependiendo la dosis empleada''. (hoja de datos del producto, Sikaplast RM-100, diciembre 2017, v01.01, recuperado de: col.sika.com). El aditivo presentó una gravedad específica de 1.26 obtenida desde la ficha técnica del material proporcionada por el proveedor y cumple con las especificaciones de las normas ASTM C-949, ASTM C-1017 y NTC 1299.

Como reemplazo del contenido de agregado fino se usó la arena de fundición, principal material residual generado por la industria de fundición de metales tanto ferrosos como no ferrosos. En dicha industria, se utiliza un tipo de arena blanca que se mezcla con diferentes tipos de aglomerantes (químicos y sintéticos) para lograr la cohesión necesaria para crear los moldes óptimos que se fabrican en las empresas de fundición; al quemarse esta arena por las altas temperaturas de la fundición, queda una arena de color negro la cual llaman arena de fundición (Figura 3); esta arena puede ser reutilizada varias veces en la misma función, pero cuando ya no se puede usar más, queda como residuo, generando contaminación en el medio ambiente, ya que su disposición final dependiendo de la zona donde se use serán canteras abandonadas, ríos, disposición de basuras, entre otros. La arena de fundición utilizada en este proyecto y la información referente a la misma, fue suministrada por la empresa METALÚRGICAS DE SANTANDER y sus funcionarios (Metalúrgica de Santander, 2019, kilómetro 7 autopista Girón, Santander, Colombia, recuperado de: <https://metsa.co/>).

El peso unitario de la arena de fundición fue de 1189.67 Kg/m³ y su gravedad específica de 2.2. (ASTM C-138 y ASTM C128). Para ello, se realizaron todas las pruebas necesarias para obtener la caracterización de los materiales y sus componentes para los diseños de mezcla (Figuras 4a, 4b, 4c)

Figura 3 Arena de fundición utilizada en fabrica Metalúrgica de Santander



Figura 4 Ensayos de caracterización en laboratorio (Prueba de granulometría)



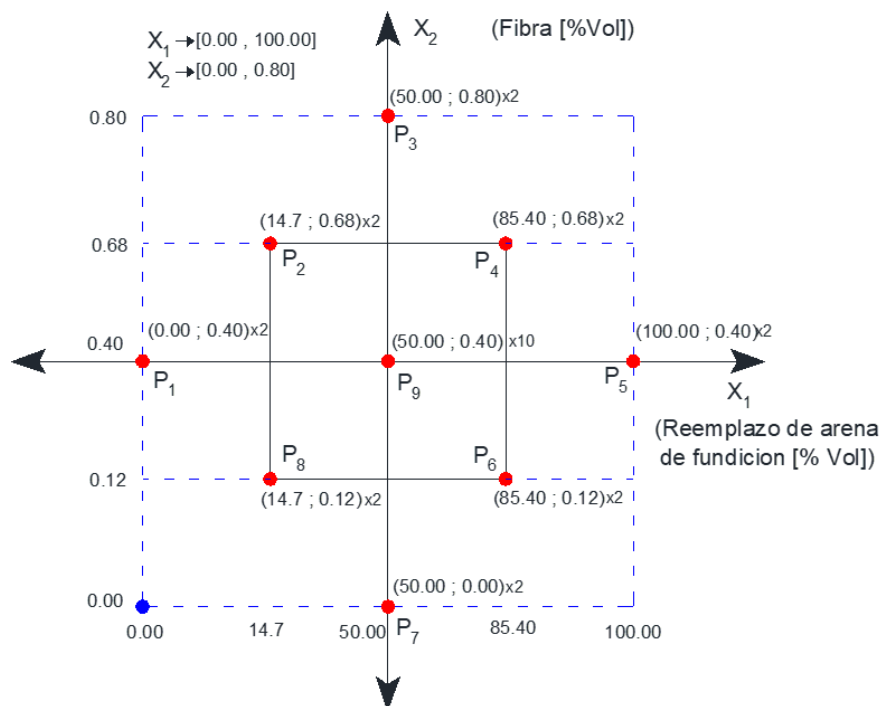
Figura 5 Ensayos de Caracterización en laboratorio (Prueba de gravedad específica)



3.2 Diseño Experimental

Se realizó un diseño de experimentos tipo central compuesto basado en un factorial 2^k con puntos al centro. El diseño de experimentos se realizó usando el software *Minitab v. 17*[®] de donde se obtuvo la distribución de puntos experimentales o tratamientos presentada en la Figura 6.

Figura 6 Diseño de experimentos de tipo central compuesto basado en un factorial 2^k



A partir del diseño de mezcla modificado con fibras, se incorporaron fibras sintéticas, con una dosificación en porcentaje desde 0% y 0.8% en volumen, manteniendo constante la relación agua/cemento en 0.7. Los porcentajes de variación de la fibra se tomaron en concordancia con los límites sugeridos por el fabricante. Adicionalmente se varió el reemplazo del agregado fino por la arena de fundición en porcentajes de volumen desde 0% al 100%. Los porcentajes de este material se tomaron con base a la literatura y se decidió emplear un amplio rango hasta 100% con fines de

investigación (Figura 5). Se realizaron al menos dos (2) muestras para cada combinación respecto al diseño estadístico de experimentos y diez (10) para un diseño punto al centro (Figura 5). Para monitorear la resistencia a la compresión del diseño de mezcla, se trabajó con resistencia a los siete (7), catorce (14) y veintiocho (28) días, mediante un ensayo de compresión simple (ASTM C39/C39M), pero cabe resaltar que el enfoque esencial de este proyecto se hará a la edad de maduración del concreto de catorce días y con optimización únicamente en tracción por medio de módulos de Weibull.

Simultáneamente al control por compresión, se llevó a cabo el ensayo de resistencia a tracción a siete (7), catorce (14) y veintiocho (28) días, según la norma ASTM C496 de los cuales se determinó la mezcla óptima de mayor resistencia a tracción. Los controles a siete (7) y veintiocho (28) días únicamente se usaron como testigos para analizar la maduración y resistencia obtenida del concreto como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1 Número de muestras de especímenes requeridos para cada punto de enmallado

7 días		14 días		28 días	
Compresión	Tracción	Compresión	Tracción	Compresión	Tracción
3	3	3	5	3	3

3.3 Diseño de mezclas

Para los diseños de mezcla de todos los puntos experimentales, se tomó como punto de partida el método volumétrico propuesto por el American Concrete Institute (ACI) expuesto en el

documento ACI.C.211, “Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete,” no. Reapproved, pp. 1–38, 1991. Para las proporciones se ejecutó un diseño estadístico tipo central compuesto (Figura 3). Las siguientes condiciones de trabajo rigen el proceso:

Para la relación agua cemento, se logró por medio de ensayos un contenido de agua/cementante por sus siglas en inglés (w/b) de 0.65, esperando lograr una resistencia del concreto de 3000 psi a los 28 días, el cual se encuentra en el rango de la normatividad (ACI.C.211, “Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete,” no. Reapproved, pp. 1–38, 1991).

El contenido de aire fue seleccionado según la literatura (ACI.C.211, “Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete,” no. Reapproved, pp. 1–38, 1991), indicando el valor de 2% teniendo en cuenta los valores de tamaño nominal de los agregados obtenidos en la caracterización de materiales.

Para seleccionar la trabajabilidad del concreto, se tomaron los rangos de los parámetros expuestos en la literatura (ACI.C.211, “Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete,” no. Reapproved, pp. 1–38, 1991), y se realizaron experimentos para determinar cuál era el rango más óptimo teniendo en cuenta que el concreto tiene fibras incorporadas y una relación agua cemento de 0.65. El rango ideal seleccionado fue entre 50 – 75 mm (ACI.C.211).

Para el contenido de agua, según sus siglas en inglés (w), teniendo en cuenta los agregados angulares, con un tamaño nominal del agregado de $\frac{3}{4}$ (in) y asentamiento de 50-75 mm (sin aire), se ensayó un w de 190-205 kg/m³.

Todos los ensayos probados con este contenido de agua fueron fallidos, los contenidos de agua en las mezclas hechas en laboratorio siempre varían dependiendo si los materiales están muy secos, si la mezcladora está seca, si la temperatura ambiente es demasiado cálida, entre otras; por esta razón, el contenido de agua que se seleccionó y se mantuvo igual para todos los diseños de mezcla fue de 250 kg/m³.

El contenido de material cementante por sus siglas en inglés (Wbinder) es la relación entre el contenido de agua y la relación agua cemento, arrojando un resultado de Wbinder = 384.61 Kg/m³.

El siguiente paso fue hacer el cálculo de los volúmenes, como se muestra en la ecuación (32).

$$MCAg(SSS) = MCAg(dry) * \left(1 + \left(\frac{Abs}{100}\right)\right)$$

$$MCAg(SSS) = 930.2139 \text{ Kg/m}^3$$

$$\frac{W_{cement}}{\rho_{cement}} + \frac{W_{water}}{\rho_{water}} + \frac{W_{aggregate}}{\rho_{aggregate}} + \frac{W_{sand}}{\rho_{sand}} + \frac{W_{admixture}}{\rho_{admixture}} + Volume\%(air) = 1$$

(Cálculos para 1m³ de mezcla)

$$Vol. \text{ fino } (V_f) = 0.2529 \text{ m}^3/\text{m}^3$$

Ahora se lleva el valor a masa, como se muestra en la ecuación (34):

$$\text{Masa Fino} \rightarrow W_{Fg}(SSS) = (V_f)(SG_f)(\gamma_w) \quad (34)$$

$$\text{Masa Fino} = 682.93 \text{ Kg/m}^3$$

Luego se hace la corrección de humedad (ecuación 35):

$$W_{free} = \text{Cont agua} - (W_{grava\ seco} * (\text{Cont hum} - \text{Abs})) - (\text{Masa fino} * (\text{Cont hum} - \text{Abs}))$$

$$W_{free} = 200.13 \text{ Kg/m}^3$$

Finalmente se calcula las cantidades en campo haciendo uso de las ecuaciones (35-39):

$$\text{Cemento} = W_{binder} \quad (36)$$

$$\text{Grueso} = W_{grava\ seco} * (1 + \text{cont humedad}) \quad (37)$$

$$\text{Fino} = \text{Masa fino} * (1 + \text{cont humedad}) \quad (38)$$

$$\text{Agua} = W_{free} \quad (39)$$

$$\text{Plastificante al 1\%} = \left(\frac{1}{100}\right) * \left(\frac{1}{\text{solidos}}\right) * W_{binder} \quad (40)$$

A continuación, se muestran las cantidades calculadas para trabajar el diseño de mezcla en campo (Tabla 2.)

Tabla 2 Cantidades de materiales para el diseño de mezcla

CEMENTO	384.62	kg/m ³
GRUESO	984.87	kg/m ³
FINO	717.08	kg/m ³
AGUA	200.13	kg/m ³
PLASTIFICANTE al 1%	9.20	kg/m ³

Teniendo estos valores del diseño de mezcla calculados, se procede a realizar el ensayo de asentamiento (ASTM C143). Con los valores obtenidos de los materiales para hacer el diseño de mezcla de 1 m³, se hicieron los respectivos cálculos para obtener solo la cantidad del volumen del cono y así no desperdiciar material, teniendo en cuenta que conseguir el asentamiento solicitado, requería de varios intentos.

Para lograr el asentamiento de 50-75 mm, se hicieron varias pruebas, el único componente que variaba en cada prueba fue el contenido de plastificante.

La cantidad de material requerido para hacer la prueba de asentamiento se calculó hallando el volumen del cono de Abrams más un porcentaje de desperdicio, el cual fue de 0.0078 m³; éstos valores se calcularon con la medida exacta para no desperdiciar material, ya que dicha prueba necesita de varias repeticiones para lograr el asentamiento solicitado (Figura 7). Las dimensiones de cono de Abrams usado son 0.20 m de diámetro y 0.30 m de altura (ASTM C143/C143M).

Figura 7 Prueba de Asentamiento logrado (4mm) punto (0,0)**Tabla 3** Cantidades de materiales para diseño de mezcla del punto (0,0)

CEMENTO	2.96	kg/m ³
GRUESO	7.58	kg/m ³
FINO	5.52	kg/m ³
AGUA	1.89	kg/m ³
PLASTIFICANTE	0.07	kg/m ³

Teniendo ya los valores de los materiales con el asentamiento correcto, se procede a hacer el cálculo de la cantidad de concreto que se debe mezclar para realizar 22 cilindros, cantidad requerida para los tiempos de falla de 7, 14 y 28 días.

Las dimensiones de los moldes para realizar los especímenes utilizados son de 50 mm de radio y 200 mm de altura, todos los moldes usados en los ensayos tenían las mismas medidas (NTC 1377).

La cantidad de concreto requerido para realizar los 22 especímenes de cada punto del enmallado de la Figura 5, es de 38013.4 cm³.

3.4 Proceso de Mezclado

Para realizar la mezcla de concreto requerida, se utilizó una mezcladora eléctrica de 120 Kg de capacidad (Figura 7). Inicialmente se mezcló el agregado fino con el agregado grueso durante 1 minuto, después se agregó el cemento y se dejó mezclar por 1 minuto más. Posteriormente se incorporaron las fibras sintéticas junto con la mitad del plastificante diluido en el 50% del agua, dejando mezclar por un tiempo de 2 minutos, y finalmente se agregó el restante del plastificante diluido en el restante de agua; todo el proceso de mezclado duró aproximadamente 5 minutos.

Figura 8 Mezcladora de concreto eléctrica de 120 Kg de capacidad



3.5 Elaboración de especímenes

Para cada uno de los puntos experimentales del diseño se elaboraron 22 cilindros de 200 mm de altura y 100 mm de diámetro. (NTC 1377). Una vez finalizado el proceso de mezclado, se procedió a realizar el llenado de los especímenes, proceso el cual fue guiado por la norma ASTM C-31. Después de elaborar los especímenes, se dejaron reposar durante 24 horas para proceder al

desencofrado, el cual fue muy sencillo y efectivo, ya que se hizo con ayuda de una manguera de presión de aire.

Posteriormente, se procedió a marcarlos con el número del punto experimental, numero de muestra y fecha (por cada punto se realizaron dos (2) muestras en diferentes días, y en el punto nueve (9) se realizaron diez (10). Finalmente, se transportaron a un lugar de curado dispuesto por el laboratorio donde duraron los días necesarios para ser fallados (Figura 8 y Tabla 1). Las proporciones de los diseños de mezcla para los puntos obtenidos del diseño estadístico de la Figura 5 se muestran en la Tabla 4.

Figura 9 Proceso de fabricación de especímenes en el laboratorio



Tabla 4 Proporciones de los diseños de mezcla

Mezcla (a/c-%F)	Cemento (kg/m ³)	Fibras (kg/m ³)	Grueso (kg/m ³)	Fino (kg/m ³)	Agua (kg/m ³)	Arena de Fundición (kg/m ³)	Plastificante (kg/m ³)
P0 (0,00 - 0,00)	14,62	0,00	37,43	27,30	7,60	0,00	0,34
P1 (0,00 - 0,40)	15,28	0,14	39,14	27,90	7,96	0,00	0,07
P2 (14,7 - 0,68)	15,41	0,24	39,48	23,72	8,04	3,89	0,07
P3 (50 - 0,80)	15,28	0,28	39,14	13,70	7,97	13,04	0,09
P4 (85,4 - 0,68)	15,41	0,24	39,48	3,93	8,06	21,94	0,44
P5 (100 - 0,40)	15,28	0,14	39,14	0,00	7,99	25,30	0,65
P6 (85,40 - 0,12)	15,68	0,04	40,16	14,30	8,18	22,98	0,37
P7 (50 - 0,00)	15,68	0,00	40,16	14,50	8,16	13,80	0,11
P8 (14,7 - 0,12)	15,68	0,04	40,16	24,78	8,16	4,06	0,01
P9 (0,40 - 100)	15,68	0,14	40,16	14,30	8,17	13,62	0,07

3.6 Ensayo en estado endurecido

Los ensayos a compresión simple se llevaron a cabo de acuerdo a la norma ASTM C39. La velocidad implementada en el ensayo fue de 1.5 [mm/min] hasta obtener un desplazamiento del actuador de 6 mm (Figura 9). Este ensayo se realizó para 9 cilindros de cada uno de los puntos experimentales, para un total de 234 especímenes ensayados.

Figura 10 Ensayo de compresión simple para los especímenes



Para los ensayos a tracción indirecta, más conocido como ensayo brasileño, se llevaron a cabo según la norma ASTM C-496, donde la velocidad implementada en los ensayos fue de 3 [mm/min] hasta obtener un desplazamiento último de aproximadamente 8 [mm] (Figura 10). Este ensayo se realizó para 11 cilindros por cada uno de los puntos experimentales, para un total de 286 especímenes ensayados.

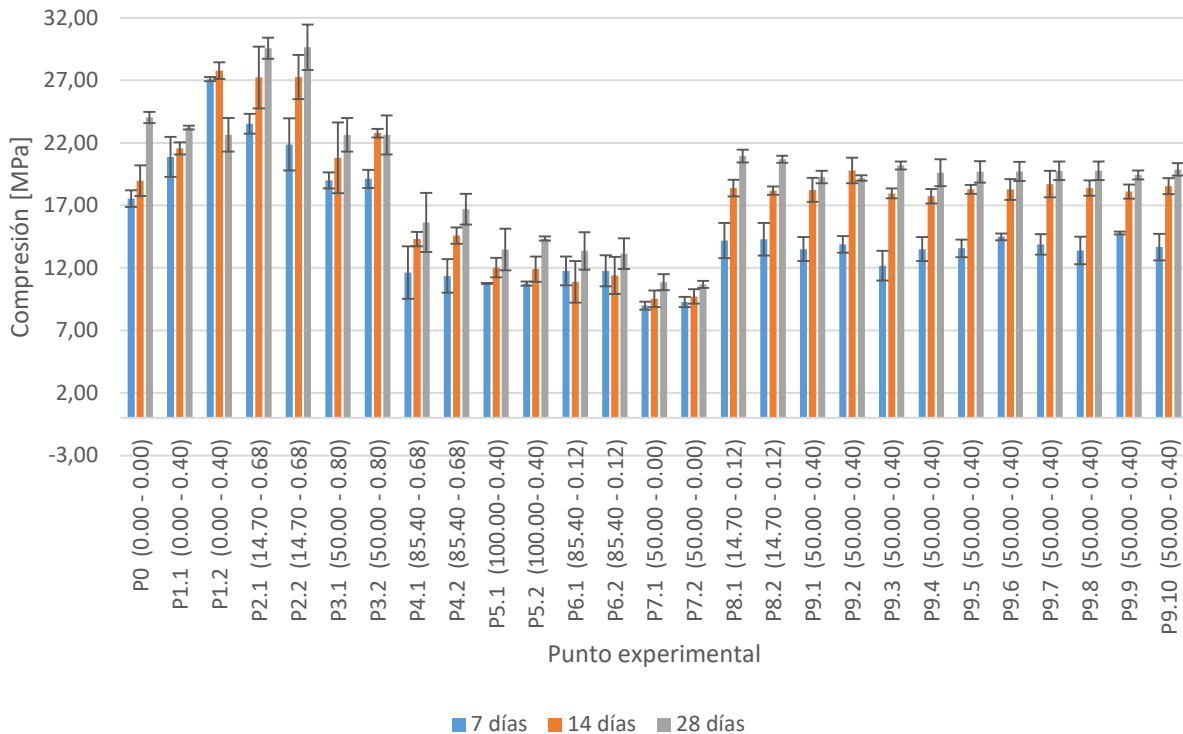
Figura 11 Ensayo de tracción indirecta de los especímenes



4. Análisis de Resultados

4.1 Resistencia a la compresión

Con el fin de monitorear la resistencia a la compresión, uno de las propiedades más importante del concreto, se realizaron ensayos de compresión simple (ASTM C39) a edades de 7, 14 y 28 días. La Figura 12 muestra las resistencias a compresión promedio a las diferentes edades mencionadas anteriormente, para todas las muestras en estudio, las cuales se pueden evidenciar en la Figura 5.

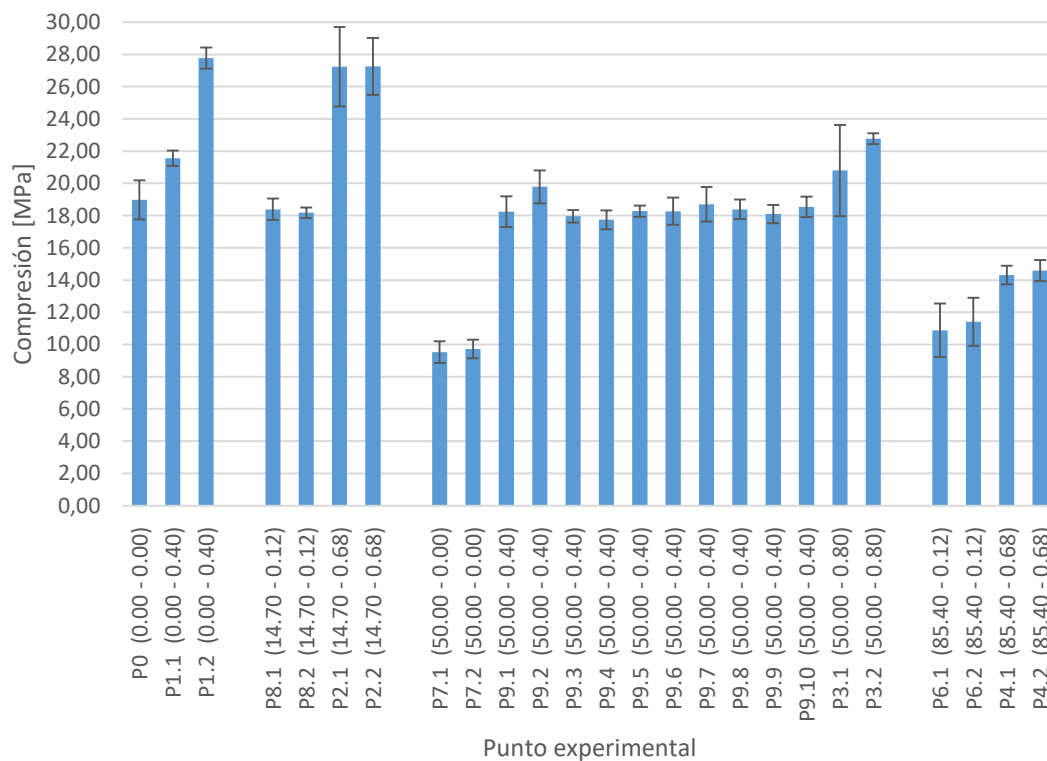
Figura 12 Resultados de resistencia a la compresión promedio a 7,14 y 28 días

De la figura anterior se puede observar como la resistencia a la compresión aumenta significativamente conforme la edad de maduración del concreto es mayor, lo cual concuerda con la teoría de maduración del concreto y expuesto en otras investigaciones (Hongbo et al., 2020).

A continuación, se muestran los resultados de la influencia de los materiales en estudio sobre la resistencia a la compresión para las muestras en estudio a una edad de 14 días. La Figura 12 muestra la influencia de las macro fibras sintéticas sobre la resistencia a la compresión promedio a una edad de 14 días, en la cual se puede observar que con una adición de fibras de 0.40% se pueden alcanzar aumentos en la resistencia de hasta 107.62%, como es el caso de la

mezcla P9.2 respecto a su mezcla control P7.1. De igual manera a una edad de 14 días, ante adiciones de fibras de 0.80%, se pueden alcanzar aumentos en la resistencia de hasta 139.02%, como es el caso de la mezcla P3.2 respecto a su mezcla control P7.1. Estos incrementos en la resistencia a la compresión de las muestras estudiadas pueden deberse a la capacidad de las fibras de reducir la formación y propagación de grietas (Larsen & Thorstensen, 2020).

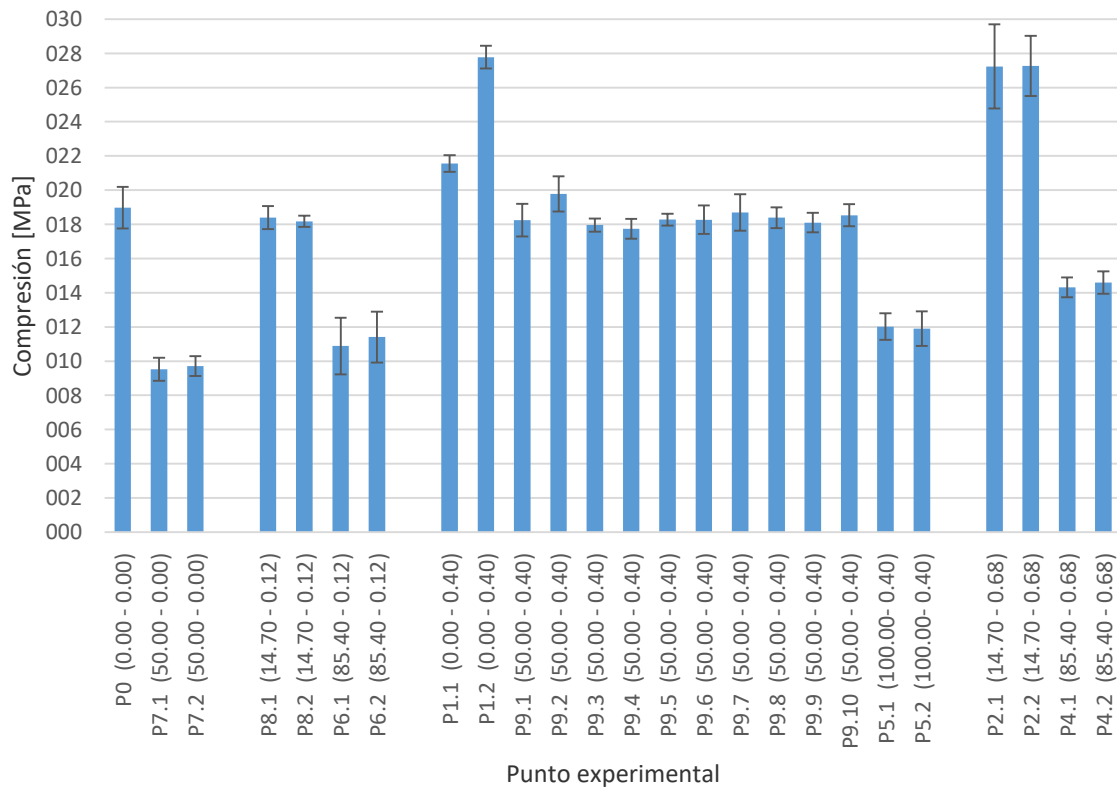
Figura 13 Influencia de las fibras sobre la resistencia a la compresión promedio a 14 días



La Figura 13 presenta la influencia del remplazo de arena de fundición sobre la resistencia a la compresión promedio, de la cual se puede destacar que, para todas mezclas en estudio, la resistencia a la compresión disminuyó conforme el remplazo de arena de fundición aumentó. Los

resultados demostraron que en mezclas con remplazos de arena de fundición del 50%, como lo es la mezcla P9.4, la resistencia a la compresión disminuyó en un 36.15% respecto a su mezcla de control P1.2. Del mismo modo, en mezclas con remplazos de arena de fundición de 100%, como lo es la mezcla P5.2, la resistencia a la compresión disminuyó en un 57.14% respecto a su mezcla de control P1.2. Esta reducción en la resistencia puede deberse a la mayor área superficial de partículas finas aportadas por la arena de fundición, lo cual condujo a una reducción de la pasta aglutinante en la matriz (Parashar, Aggarwal, Saini, Aggarwal, & Bishnoi, 2020).

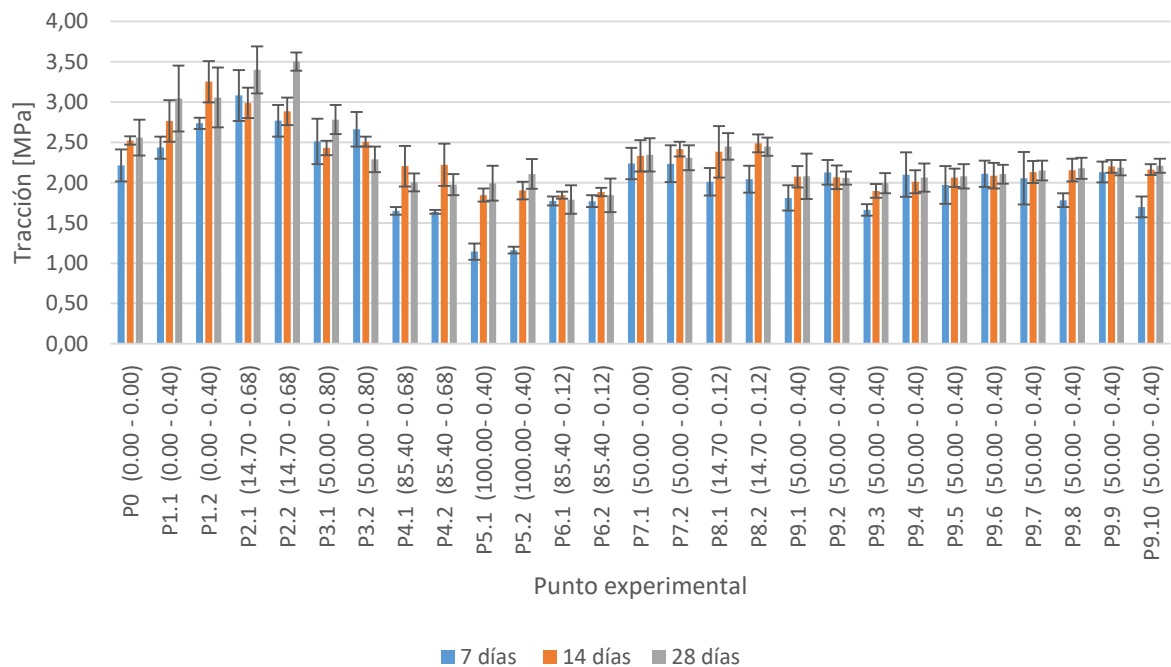
Figura 14 Influencia del remplazo de arena de fundición sobre la resistencia a la compresión promedio a 14 días



4.2 Resistencia a la tracción

Dada la simplicidad del experimento, se realizaron ensayos de tracción indirecta siguiendo los lineamientos de la normativa (ASTM C496, 2011) a las edades de 7, 14 y 28 días, con el fin de estimar la resistencia a tracción. La Figura 15 muestra la resistencia a la tracción promedio a las diferentes edades mencionadas anteriormente, para todas las muestras en estudio, las cuales se pueden evidenciar en la Figura 5.

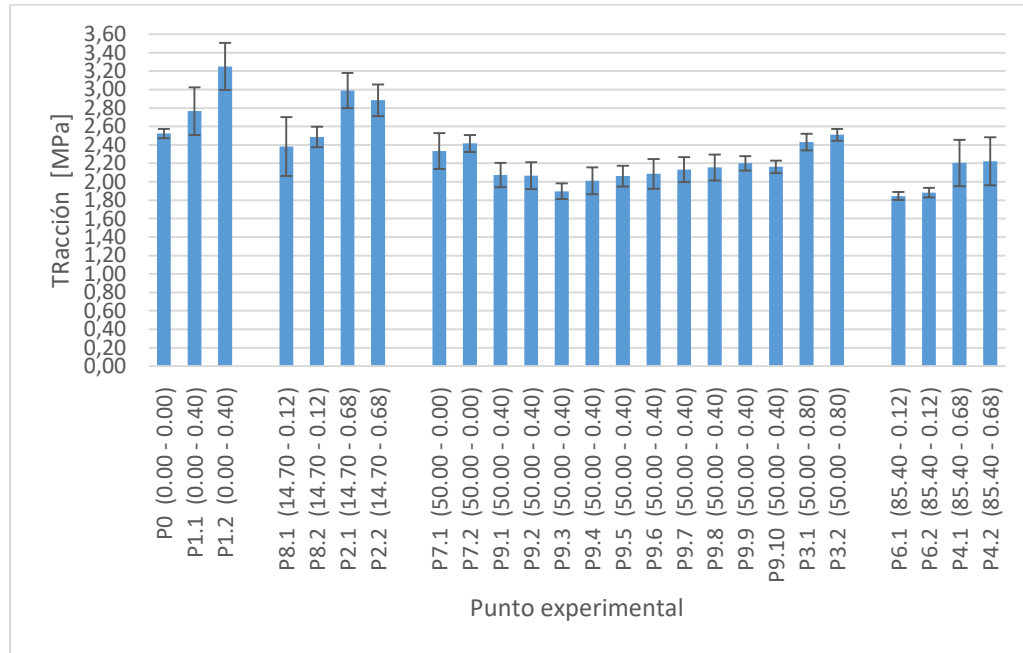
Figura 15 Resultados de resistencia a la tracción promedio a 7, 14, 28 días



De la figura anterior se evidencia que todos los puntos experimentales, a excepción del punto P3.2, aumentaron o mantuvieron su resistencia a la tracción promedio conforme la edad de

maduración aumentó. Se puede observar que el punto experimental P3.2 presentó una disminución en la resistencia a la tracción, lo cual pudo ser ocasionado por un montaje impreciso de los ensayos

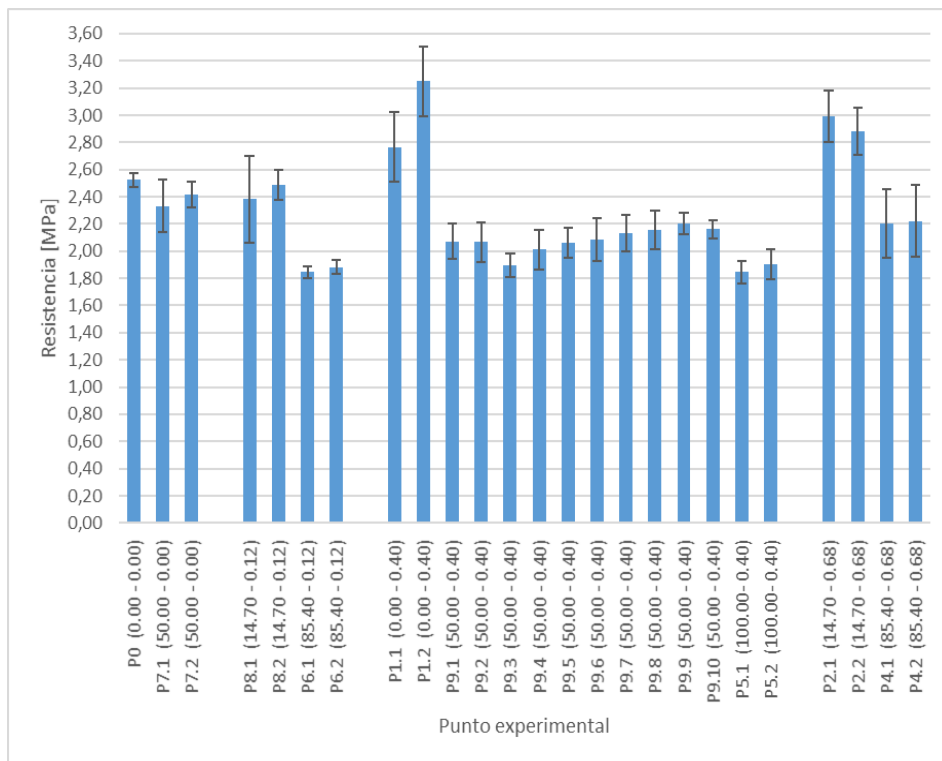
A continuación, se muestran los resultados de la influencia de los materiales en estudio sobre la resistencia a la tracción para las muestras en estudio a una edad de 14 días. La Figura 15 muestra la influencia de las macro fibras sintéticas sobre la resistencia a la tracción promedio a la edad de 14 días, en la cual se observa que, para todos los puntos experimentales en estudio, a excepción de los puntos P7.1 y P7.2, se presentó un incremento en la resistencia a la tracción conforme la adición de fibras aumentó. El mayor incremento en la resistencia se presentó en la mezcla P1.2, la cual superó su respectiva mezcla control (P0) en un 28.87%, cabe resaltar que dicho incremento se presentó bajo la adición de 0.40% de fibras y en mezclas sin presencia de arena de fundición. Estos incrementos en la resistencia se deben a que durante la etapa de fisuración del concreto, las fibras actúan como un enlace que permite la transferencia de esfuerzos entre las partes no fisuradas del material (Kazmi et al., 2018). Adicionalmente, se puede observar en gran parte de las mezclas en estudio, un aumento en la dispersión de los datos conforme a la adición de fibras, esto puede ser causado por la aleatoriedad de la distribución y orientación de las fibras, lo cual se ha evidenciado en investigaciones previas (Ponikiewski & Golaszewski, 2013).

Figura 16 Influencia de las fibras sobre la resistencia a la tracción promedio a 14 días

En la Figura 17 se encuentra representada la influencia de la arena de fundición sobre la resistencia a la tracción promedio a una edad de 14 días, en la cual se evidencia que el remplazo de arena de fundición por agregado fino conlleva a una disminución en la resistencia a la tracción para todas las mezclas en estudio. Dentro de los puntos experimentales destaca la mezcla P5.1, la cual obtuvo una disminución en su resistencia del 43.26% bajo el remplazo total de arena de fundición por agregado fino, respecto a su mezcla control P0. Cabe resaltar que la mezcla P7.1, la cual tiene un 50% de remplazo de arena de fundición y no contiene adición de fibras, presentó una disminución del 7.52% respecto a su mezcla de control P0. Sin embargo, la mezcla P9.6, constituida por un 50% de remplazo de arena de fundición y 0.40% de adición de fibras, presentó una disminución del 17.34% respecto a la mezcla control P0. Este fenómeno puede ser ocasionado

por la reducción de pasta aglutinante mencionado anteriormente, lo cual no permite una perfecta adherencia de las fibras a la matriz (Parashar et al., 2020).

Figura 17 Influencia del remplazo de arena de fundición sobre la resistencia a la tracción promedio a 14 días



4.3 Parámetros de Weibull

En la Tabla 5 se presenta el análisis estadístico de Weibull llevado a cabo sobre los resultados de resistencia a la tracción a 14 días, en la cual se muestran los parámetros estimados con mejor ajuste según las pruebas estadísticas R2, G2 y A2, además de su respectiva metodología de estimación y tipo de distribución.

Tabla 5 Parámetros de Weibull para la resistencia a la tracción a 14 días

Mezcla (%AF-%F)	Mejor ajuste	Método	Pruebas de bondad de ajuste			Parámetros estimados		
			R ²	G ²	A ²	λ	β	ϕ
P1.1 (0.00 - 0.40)	W2	MM	0.74	0.08	0.49	13.13	2.88	0.00
P1.2 (0.00 - 0.40)	W3	MMV	0.72	0.12	0.32	1.50	0.40	2.89
P2.1 (14.70 - 0.68)	W3	MPP	0.86	1.48	0.79	0.68	0.15	2.79
P2.2 (14.70 - 0.68)	W2	MMV	0.86	0.07	0.24	23.75	2.95	0.00
P3.1 (50.00 - 0.80)	W3	MPP	0.49	2.60	0.38	1.11	0.12	2.32
P3.2 (50.00 - 0.80)	W2	MPP	0.97	0.04	0.32	46.91	2.54	0.00
P4.1 (85.40 - 0.68)	W3	MPP	0.60	0.10	0.27	3.62	1.00	1.31
P4.2 (85.40 - 0.68)	W3	MPP	0.65	0.10	0.28	2.59	0.78	1.53
P5.1 (100.00- 0.40)	W3	MPP	0.92	1.12	0.44	0.47	0.03	1.78
P5.2 (100.00- 0.40)	W2	MPP	0.87	0.04	0.19	18.48	1.96	0.00
P6.1 (85.40 - 0.12)	W3	MMV	0.09	0.87	0.47	3.58	0.13	1.72
P6.2 (85.40 - 0.12)	W3	MPP	0.61	0.11	0.30	4.69	0.25	1.65
P7.1 (50.00 - 0.00)	W2	MPP	0.82	0.16	0.26	13.69	2.42	0.00
P7.2 (50.00 - 0.00)	W3	MPP	0.59	0.44	0.26	1.47	0.17	2.26
P8.1 (14.70 - 0.12)	W2	MPP	0.82	0.17	0.37	8.58	2.52	0.00
P8.2 (14.70 - 0.12)	W2	MMV	0.74	0.08	0.19	29.30	2.53	0.00
P9.1 (50.00 - 0.40)	W3	MPP	0.86	1.46	0.96	0.69	0.12	1.92
P9.2 (50.00 - 0.40)	W3	MMV	0.05	0.97	0.28	2.72	0.36	1.74
P9.3 (50.00 - 0.40)	W2	MPP	0.90	0.12	0.33	26.83	1.94	0.00
P9.4 (50.00 - 0.40)	W3	MM	0.64	0.33	0.23	1.92	0.30	1.74
P9.5 (50.00 - 0.40)	W3	MM	0.63	0.21	0.20	2.09	0.25	1.84
P9.6 (50.00 - 0.40)	W3	MPP	0.67	0.15	0.32	2.06	0.39	1.74
P9.7 (50.00 - 0.40)	W3	MPP	0.39	2.70	0.24	1.36	0.23	1.92
P9.8 (50.00 - 0.40)	W3	MPP	0.99	0.03	0.38	0.81	0.13	2.01
P9.9 (50.00 - 0.40)	W2	MG	0.77	0.58	0.84	35.42	2.24	0.00
P9.10 (50.00 - 0.40)	W3	MPP	0.48	0.22	0.23	6.49	0.45	1.74
P0 (0.00 - 0.00)	W3	MPP	0.61	0.14	0.34	7.17	0.35	2.19

De la Tabla 5, se puede observar que el 66.67% de los puntos experimentales se ajustaron a una distribución W3, mientras que el 33.33% restante se ajustó a una distribución W2, lo cual evidencia que los datos en estudio tienden a tener mejor ajuste mediante la distribución W3. Por otra parte, la metodología que brinda parámetros con mayor ajuste, según las pruebas de bondad

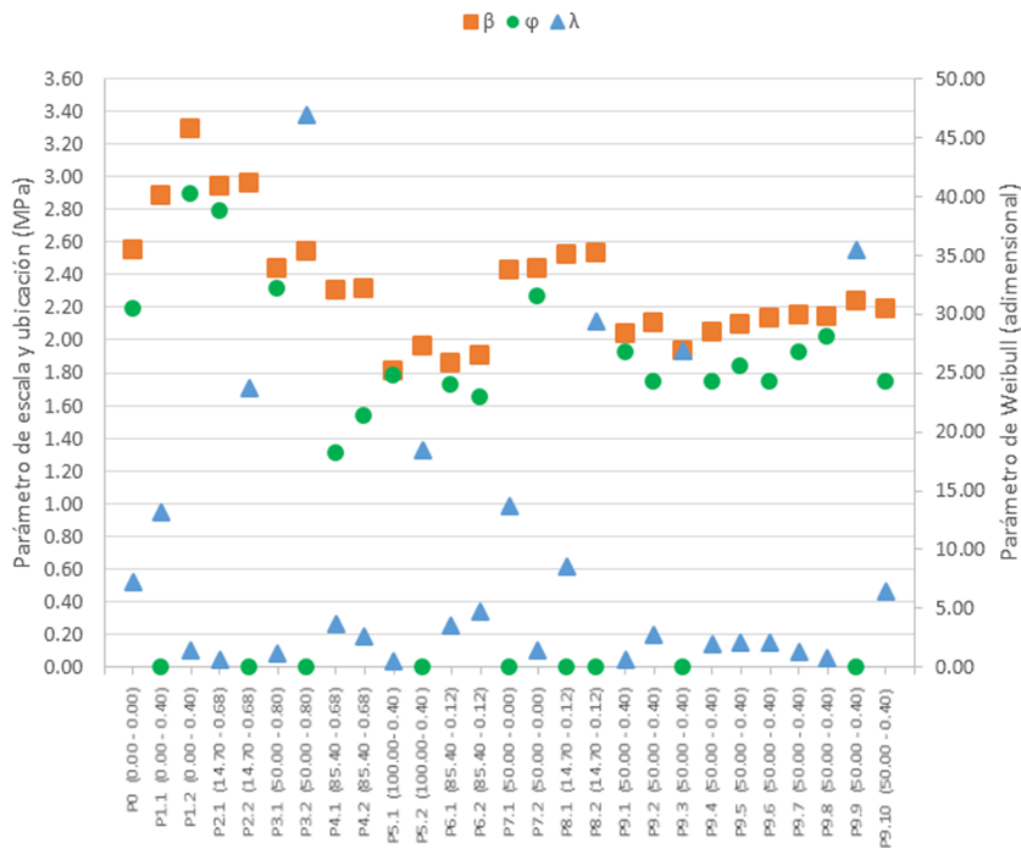
de ajuste realizadas, es el método MPP, ya que representa 66.67% de los puntos experimentales ajustados, seguido por el método MMV con el 18.52%, el método MM con el 11.11% y por último la metodología con solo un punto experimental ajustado, el método MG con 3.70%.

Adicionalmente, se puede apreciar que el módulo de Weibull en los puntos experimentales que se ajustaron a W2 presentó una variación entre 8.58 (mínimo) y 46.91 (máximo). Así mismo, en los puntos experimentales que se ajustaron a W3, el módulo de Weibull presentó una variación entre 0.47 (mínimo) y 7.17 (máximo). En cuanto a valores promedio, W2 obtuvo un promedio de 24.01 para el módulo de Weibull, mientras en W3 el promedio fue de 2.50. Se puede observar una variación considerable en las magnitudes de los mismos, como se ha expuesto en investigaciones previas (Zapata Ordúz et al., 2014). Esto demuestra el hecho de que los módulos de Weibull son sensibles a los diferentes tipos de metodología de estimación de parámetros que se implementen y al tipo de distribución de Weibull que se ajuste, por lo tanto, se debe tener especial atención al comparar valores ya que su diferencia es considerable (Zapata Ordúz et al., 2014).

A partir de la Tabla 5, se puede observar que el módulo de Weibull, el cual cuantifica la dispersión de los valores de resistencia en las muestras de estudio, presenta disminuciones en su magnitud ante a la adición de macro fibras sintéticas respecto a la mezcla control. Esta situación se evidencia en la mezcla P1.2, la cual contiene un 0.40% de adición de fibras y presenta un $\lambda=1.50$, mientras la mezcla P0 sin presencia de fibras presenta un $\lambda=7.17$. Esta disminución en el módulo de Weibull implica mayor dispersión de los valores de resistencia, lo cual puede ser ocasionado por la aleatoriedad de la distribución y orientación de las fibras, por lo tanto, ante el uso de altas cantidades de fibras es necesario el estudio del material mediante análisis probabilísticos

(Ponikiewski & Golaszewski, 2013). Por otra parte, los remplazos de arena de fundición en las mezclas presentan el mismo comportamiento, como es el caso de la mezcla P7.2, la cual contiene un remplazo del 50.00% por arena de fundición y presenta un $\lambda=1.47$, mientras la mezcla P0 sin remplazos por arena de fundición presenta un $\lambda=7.17$. El aumento en la dispersión de los valores de resistencia debido al remplazo de arena de fundición, puede ser causado por un aumento en la cantidad y el tamaño de discontinuidades presentes en el concreto. Dichas discontinuidades a su vez son ocasionadas por la reducción de la pasta aglutinante en la matriz, debido al remplazo de arena de fundición (Parashar et al., 2020).

La Figura 18, muestra gráficamente los parámetros de Weibull estimados para la resistencia a la tracción a 14 días, de la cual se puede observar que las tendencias de aumento ante la adición de fibras y disminución ante el remplazo de arena de fundición, descritas por el parámetro β que representa la resistencia característica, coinciden con los promedios de resistencia a tracción calculados y mostrados en la Figura 14. Por lo tanto, la implementación de la FDP de Weibull para describir el comportamiento del concreto reforzado con macro fibras sintéticas y remplazos de arena de fundición es acertado.

Figura 18 Parámetros de Weibull estimados para la resistencia a la tracción a 14 días

4.4 Análisis estadístico

Con el fin de cuantificar el nivel de incidencia de la adición de microfibras sintéticas y el remplazo de arena de fundición sobre la resistencia a la tracción a los 14 días, se realizó un análisis de superficie de respuesta a través de la metodología ANOVA, en la cual se estableció un nivel de significancia estadístico ($\alpha = 0.10$). La Tabla 6 muestra el análisis de varianza realizado inicialmente, en la cual se puede observar que el término de interacción entre factores no tiene significancia estadística sobre la variable de respuesta. Por lo tanto, se procedió a realizar el modelo depurado de los factores, del cual se eliminan aquellos términos en estudio que no

presentan significancia estadística. El modelo depurado para la resistencia a tracción a los 14 días se presenta en la Tabla 7. Los términos %AF y %F, en las Tablas 6 y 7 hacen referencia a los porcentajes de arena de fundición y porcentaje de fibras, respectivamente

Tabla 6 Análisis ANOVA del modelo sin depurar

Parámetro	Término		Valor P	Significancia
Resistencia a la tracción a 14 días	Lineal	%AF	0.000	Sí
		%F	0.002	Sí
	Cuadrado	%AF · %AF	0.000	Sí
		%F · %F	0.001	Sí
	Interacción de factores	%AF · %F	0.443	No
		Falta de ajuste	0.140	No
	R ²		88.65%	

Tabla 7 Análisis ANOVA del modelo depurado

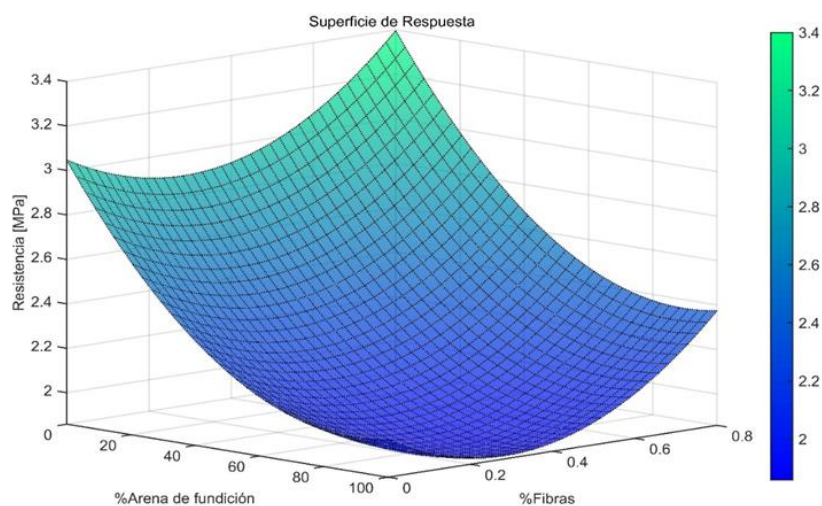
Parámetro	Término		Valor P	Significancia
Resistencia a la tracción a 14 días	Lineal	%AF	0.000	Sí
		%F	0.002	Sí
	Cuadrado	%AF · %AF	0.000	Sí
		%F · %F	0.000	Sí
	Falta de ajuste		0.220	No
		R ²	88.31%	

Con el fin de garantizar la validez del análisis presentado, se revisaron los supuestos de ANOVA sobre los residuales del modelo depurado, estos supuestos son: (i) los datos siguen una distribución normal, (ii) las varianzas son iguales y (iii) las observaciones son independientes. Los resultados de la verificación de los supuestos se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8 Verificación de supuestos de ANOVA

Parámetro	Test estadístico ($\alpha=0.10$)			
	Kolmogorov-Smirnov	Barlett		Durbin-Watson
Resistencia a la tracción a 14 días	P =0.15	Estadístico 11.50	7	Estadístico 2.08
		P = 0.17		dL = 1.22 dU = 1.55
	Se acepta Ho	Se acepta Ho		Se acepta Ho
	La distribución es normal	Las varianzas son iguales		Las observaciones son independientes

La Figura 19, presenta la superficie de respuesta para los factores en estudio en la presente investigación y sus respectivos dominios. A partir de la Figura 18 y la Tabla 7 se puede observar que tanto la adición de fibras como el remplazo de arena de fundición influyen de forma lineal y cuadrática sobre la resistencia a la tracción, con un nivel de significancia $\alpha=0.10$. La Ecuación 40, define matemáticamente la superficie de respuesta.

Figura 19 Superficie de respuesta del modelo depurado de resistencia a la tracción a 14 días

$$f_{t \ 14 \ días} = 3.047 - 0.023 \cdot \%AF - 1.078 \cdot \%F + 0.000129 \cdot \%AF^2 + 1.892 \cdot \%F^2 \quad (40)$$

A partir de algunas operaciones y arreglos matemáticos sobre la Ecuación (40), se localizó un valor mínimo de resistencia de 1.87 (MPa) con una adición de fibras del 0.28% y un remplazo de arena de fundición de 89.6 %. Adicionalmente, se localizó un valor máximo de resistencia a la tracción de 3.4 (MPa) con una adición de fibras de 0.80% y sin remplazos de arena de fundición. Cabe aclarar que estos valores mínimos y máximos obtenidos son válidos para los dominios de estudio seleccionados en esta investigación.

5. Conclusiones

El presente proyecto de investigación estudió el comportamiento a tracción a la edad de 14 días del concreto reforzado con macro fibras sintéticas y remplazos de arena de fundición por agregado fino, con dominios de remplazo arena de fundición de 0.00% a 100.00% y porcentaje de fibras de 0.00% a 0.80% (fracción del volumen total de la mezcla). Se realizó un diseño estadístico de experimentos junto a la metodología de superficie de respuesta y un análisis ANOVA utilizando un nivel de significancia de 0.10. Adicionalmente, se realizó un análisis estadístico mediante la distribución de Weibull. Con base en los resultados obtenidos de ensayos realizados es posible concluir que:

- La adición de macro fibras sintéticas al concreto, mejora el comportamiento mecánico del material, permitiéndole tener control sobre la propagación de grietas y alcanzando hasta 28.9 % mayor resistencia a la tracción comparado con el concreto en ausencia de fibras.
- Los remplazos de arena de fundición por agregado fino conllevan a la disminución de la resistencia a la tracción del concreto. El aumento en la cantidad de finos que aporta la arena de fundición conduce a la formación de poros en el concreto y la reducción de la pasta aglutinante disponible para la unión de agregados.
- El método de estimación de parámetros Momentos Ponderados de Probabilidad destaca entre los cuatro métodos empleados en esta investigación, ya que es el que provee un mejor ajuste a la distribución de Weibull con un 66.67% de los puntos experimentales ajustados.

Por otra parte, el método gráfico obtuvo el menor número de puntos experimentales ajustados, lo que representa un 3.70%.

- Los resultados de resistencia a la tracción obtenidos a partir de los ensayos de tracción indirecta y los adquiridos a través de la distribución de Weibull, demostraron aumentos hasta del 378% en la dispersión estadística de acuerdo al aumento de la adición de macro fibras sintéticas, por lo cual, ante un posible uso estructural, en donde altas cantidades de fibras son requeridas, se hace necesario el estudio del material implementado distribuciones de probabilidad.
- Dado que los parámetros de escala (β) calculados, mostraron la misma tendencia que los resultados de la resistencia a la tracción promedio, se demostró que el uso de la función de densidad de probabilidad de Weibull es acertado para describir el comportamiento del concreto reforzado con macro fibras sintéticas y remplazos de arena de fundición.
- Dentro de los dominios planteados en esta investigación para los dos factores estudiados, remplazo de arena de fundición (0.00% a 100.00%) y adición de fibras (0.00% a 0.80%), se evidenció que son estadísticamente significativos e inciden de forma lineal y cuadrática en la magnitud de la resistencia a la tracción del concreto, ya que ante el aumento del remplazo de arena de fundición la resistencia a la tracción disminuye, efecto contrario al generado por el aumento de la adición de fibras.

- Con la superficie de respuesta generada en esta investigación fue posible calcular el valor de la pareja de puntos (%AF=89.57, %F=0.28) con la cual se obtiene el mínimo valor de resistencia a la tracción de 1.87 (MPa) y a su vez la pareja de puntos (%AF=0.00, %F=0.80) de forma que se obtiene el máximo valor de resistencia a la tracción, entre los dominios de estudio seleccionados para los factores en esta investigación.

Referencias Bibliográficas

- ACI.C.211, “Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete,” no. Reapproved, pp. 1–38, 1991.
- Alhussainy, F., Hasan, H. A., Rogic, S., Sheikh, M. N., & Hadi, M. N. S. (2016). Direct tensile testing of self-compacting concrete. *Construction and Building Materials*, 112, 903–906. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.02.215>
- ASTM C 138-00 Método estándar para peso unitario y contenido de aire (gravimétrico) del concreto.
- ASTM C1116 / C1116M-10a (2015), Standard Specification for Fiber-Reinforced Concrete.
- ASTM C127-04 Método de ensayo normalizado para determinar la densidad, la densidad relativa (gravedad específica), y la absorción de agregados gruesos.
- ASTM C143/C143M – 20, Método de prueba estándar para el asentamiento del hormigón de cemento hidráulico.
- ASTM C31/C31M-2017, Historical Standard: Práctica Normalizada para Preparación y Curado de Especímenes de Ensayo de Concreto en la Obra.

- ASTM C39. (2015). Standard Test Method for Compressive Strength of Cylindrical Concrete Specimens. American Society for Testing and Materials, 1–7. <https://doi.org/10.1520/C0039>
- ASTM C496. (2011). Standard Test Method for Splitting Tensile Strength of Cylindrical Concrete Specimens. ASTM International, i, 5. <https://doi.org/10.1520/C0496>
- ASTM C535 – 16, Standard Test Method for Resistance to Degradation of Large-Size Coarse Aggregate by Abrasion and Impact in the Los Angeles Machine.
- ASTM, “ASTM C128- Standard Test Method for Relative Density (Specific Gravity) and Absorption of Coarse Aggregate,” ASTM Int., p. 5, 2015.
- ASTM, “ASTM C136 - Standard Test Method for Sieve Analysis of Fine and Coarse Aggregates,” Annu. B. ASTM Stand., pp. 1–5, 2014.
- ASTM, “ASTM C188-17, - Standard test method for density of hydraulic cement” Annu. B. ASTM Stand., pp. 1–3, 2017.
- Bhardwaj, B., & Kumar, P. (2017). Waste foundry sand in concrete: A review. *Construction and Building Materials*, 156, 661–674. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.09.010>
- Chaurasiya, P. K., Ahmed, S., & Warudkar, V. (2018). Study of different parameters estimation methods of Weibull distribution to determine wind power density using ground based Doppler

SODAR instrument. Alexandria Engineering Journal, 57(4), 2299–2311.
<https://doi.org/10.1016/j.aej.2017.08.008>

• Cressie, N., & Read, T. R. C. (1989). Pearson's X^2 and the Loglikelihood Ratio Statistic G^2 : A Comparative Review. International Statistical Review, 57(1), 19–43.
<https://doi.org/10.2307/1403582>

• D'Agostino, R. B., & Stephens, M. A. (1986). Goodness-of-Fit Techniques. New York: Marcel Dekker.

• Datsiou, K. C., & Overend, M. (2018). Weibull parameter estimation and goodness-of-fit for glass strength data. Structural Safety, 73, 29–41. <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2018.02.002>

• Frangopol, D. M. (2008). Probability concepts in engineering: emphasis on applications to civil and environmental engineering. Structure and Infrastructure Engineering, 4(5), 413–414.
<https://doi.org/10.1080/15732470802027894>

• Freeman, M. H.. Manual de Prevención de la Contaminación Industrial. Cap. 41. Leidel, D.S. Prevención de la contaminación en los talleres de fundición. Ed. Mc Graw-Hill. 1998.

• Ghasemi, M., Ghasemi, M. R., & Mousavi, S. R. (2018). Investigating the effects of maximum aggregate size on self-compacting steel fiber reinforced concrete fracture parameters. Construction and Building Materials, 162, 674–682. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.11.141>

- Hibbeler, R. C. (2011). *Mecánica de Materiales* (8th ed.). Upper Saddle River, N.J: Pearson Education, Inc.
- Hongbo, Z., Haiyun, Z., & Hongxiang, G. (2020). Characteristics of ductility enhancement of concrete by a macro polypropylene fiber. *Results in Materials*, 100087. <https://doi.org/10.1016/j.rinma.2020.100087>
- Kazmi, S. M. S., Munir, M. J., Wu, Y. F., & Patnaikuni, I. (2018). Effect of macro-synthetic fibers on the fracture energy and mechanical behavior of recycled aggregate concrete. *Construction and Building Materials*, 189, 857–868. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.08.161>
- Larsen, I. L., & Thorsten Sen, R. T. (2020). The influence of steel fibres on compressive and tensile strength of ultra-high performance concrete: A review. *Construction and Building Materials*, 256, 119459. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.119459>
- McCormac, J., & Brown, R. (2011). *Diseño de concreto reforzado* (8th ed.). New Jersey, USA: Alfaomega.
- Merta, I., & Tschegg, E. K. (2013). Fracture energy of natural fibre reinforced concrete. *Construction and Building Materials*, 40, 991–997.
- Montgomery, D. C. (2004). *Diseño y análisis de experimentos*. In Limusa Wiley.

- Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2002). *Applied statistics and probability for engineers* (3rd ed.). Hoboken, NJ: Wiley.
- Parashar, A., Aggarwal, P., Saini, B., Aggarwal, Y., & Bishnoi, S. (2020). Study on performance enhancement of self-compacting concrete incorporating waste foundry sand. *Construction and Building Materials*, 251. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.118875>
- Ponikiewski, T., & Golaszewski, J. (2013). Properties of steel fibre reinforced self-compacting concrete for optimal rheological and mechanical properties in precast beams. *Procedia Engineering*, 65, 290–295.
- Prabhakar M., D. N., Xie, M., & Jiang, R. (2003). *Weibull Models*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Rumman, R., Bari, M. S., Manzur, T., Kamal, M. R., & Noor, M. A. (2020). A Durable Concrete Mix Design Approach using Combined Aggregate Gradation Bands and Rice Husk Ash Based Blended Cement. *Journal of Building Engineering*, 30(February), 101303. <https://doi.org/10.1016/j.job.2020.101303>
- Toasa Caiza, P. D., & Ummenhofer, T. (2011). General probability weighted moments for the three-parameter Weibull distribution and their application in S – N curves modelling. *International Journal of Fatigue*, 33(12), 1533–1538. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.06.009>

- Usta, I., Arik I., Yenilmez, I., & Mert, Y. (2018). A new estimation approach based on moments for estimating Weibull parameters in wind power applications. *Energy Conversion and Management*, 164(January), 570–578. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2018.03.033>
- Zapata Ordúz, L. E., Portela, G., & Suárez, O. M. (2014). Weibull statistical analysis of splitting tensile strength of concretes containing class F fly ash, micro/nano-SiO₂. *Ceramics International*, 40(5), 7373–7388. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2013.12.083>
- NTC 1377, Elaboración y Curados de Especímenes de Concreto Para Ensayos de Laboratorio.