

Escenario Viable de Energía Oscura
en el Marco de la Teoría Más Allá de Horndeski

Rafael Esteban Chona Perea

Trabajo de Grado para optar al título de Física

Director

Yeinzon Rodríguez García

Doctor en Física.

Codirector

Alexander Gallego Cadavid

Doctor en Física.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2019

Dedicatoria

A mi familia, especialmente a mi madre Sofía, mi tía Aide y mi abuelo Rafael, porque sin su apoyo incondicional no hubiera podido llegar al punto en el que me encuentro hoy. A mi director y co-director Yeinzon Rodriguez y Alexander Gallego por su indispensable y paciente orientación a lo largo de este trabajo de grado. Por último, a mis amigos y compañeros de universidad, especialmente a Miguel, David, Nicole, Daniel, Juan, Stefania y Yazmin, por su compañía y apoyo a lo largo de los años.

Tabla de Contenido

Introducción	14
1. Teoría de Horndeski y más allá	15
1.1. Historia térmica del universo y expansión actual	15
1.2. El problema de la constante cosmológica	18
1.3. Inestabilidad de Ostrogradski	19
1.4. Teoría de Horndeski	23
1.5. Rapidez de una onda gravitacional	26
1.6. Teoría más allá de Horndeski	27
2. Sistemas dinámicos	28
3. Análisis Teórico	32
3.1. Modelo concreto de energía oscura	32
3.1.1. Parámetros adimensionales	33
3.1.2. Ecuaciones de campo	34
3.1.3. Variables adimensionales	35
3.2. Puntos críticos	38
3.3. Análisis de los puntos críticos	40
3.3.1. Variedades críticas:	40
3.3.2. Subvariedades críticas:	45
3.3.3. Puntos críticos:	45
4. Análisis numérico	47
4.1. Condiciones Iniciales	47
4.2. Solución numérica	47

4.3. Variando las condiciones iniciales	50
4.3.1. Variando x_4	50
4.3.2. Variando $ x_1 $ y x_2	51
4.3.3. Variando x_3	52
4.3.4. Parámetro de estado asociado al fluido más allá de Horndeski	53
4.3.5. Espacio de parámetros disponible	56
5. Conclusiones	56
Referencias Bibliográficas	57
Apéndices	62

Lista de Figuras

- Figura 1.1. Dependencia del logaritmo de la densidad de energía con respecto al factor de escala, para la densidad de materia, radiación y energía oscura. Como se puede ver, a medida que el universo evoluciona, la densidad de radiación disminuye hasta el punto en que la densidad de materia es dominante. Eventualmente, ambas densidades disminuyen lo suficiente para que la densidad de energía oscura, que es constante, domine. 18
- Figura 1.2. En esta imagen se presentan dos Hamiltonianos versus una de sus variables canónicas, P_1 , el primero (azul) es viable ya que el sistema está acotado mientras que el segundo (amarillo) corresponde a un modelo no viable ya que no existe estado base. 23
- Figura 4.1. En esta imagen se presenta la evolución para las densidades de energía adimensionales del sistema, con las condiciones iniciales presentadas en la Ec.(114), en donde el sistema empieza en una época dominada por la radiación, transita por una dominada por la materia y finalmente se estabiliza en una época dominada por la energía oscura. 48
- Figura 4.2. Evolución de las variables adimensionales x_i para las condiciones iniciales presentadas en la Ec.(114), donde se observa como estas aumentan hasta ser constantes cuando el sistema entra en la primera variedad. 48
- Figura 4.3. Evolución de los parámetros de estado efectivo y más allá de Horndeski para las condiciones iniciales presentadas en la Ec. (114), donde se observa cómo w_{ef} pasa de 0.33 a 0 para finalmente estabilizarse en -1. Por otro lado, w_{MH} empieza con un valor negativo de aproximadamente -0.2 para luego pasar a ser 0 y finalmente -1. 50

- Figura 4.4. Evolución de las densidades de energía adimensionales, Ω_r, Ω_m y Ω_{MH} con las condiciones iniciales: $x_1 = -1.35, x_2 = 1.99, x_3 = 0.03$ y $x_4 = 4 \times 10^{-2}$ para un $z = 0.0001$, que representan una pequeña desviación de las condiciones iniciales presentadas en 114, donde la época dominada por el fluido de materia observada en la figura 4.2 pasa a ser una co-dominación entre este último y el fluido más allá de Horndeski. 51
- Figura 4.5. Evolución de las densidades de energía adimensionales con las condiciones iniciales: $x_1 = -0.2, x_2 = 0.8, x_3 = 0.08, 4$ y $x_4 = 2.8 \times 10^{-7}$ para un $z = 0.0001$. Para este caso, el sistema se mantiene dominado por el fluido más allá de Horndeski. 51
- Figura 4.6. Evolución de las densidades de energía adimensionales, con las condiciones iniciales: $x_1 = -1.34, x_2 = 2, x_3 = 0.03$ y $x_4 = 2.5 \times 10^{-4}$ para un $z = 0.0001$, en donde se observa una co-dominancia entre la materia y el fluido más allá de Horndeski, antes de que el sistema entre en la época dominada por la materia. 52
- Figura 4.7. Evolución de las densidades de energía adimensionales, con las condiciones iniciales: $x_1 = -1.35, x_2 = 1.99, x_3 = 0.057$ y $x_4 = 1 \times 10^{-3}$ para un $z = 0.0001$, en donde se observa una co-dominancia entre la materia y el fluido más allá de Horndeski, antes de que el sistema entre en la época dominada por la energía oscura. 53
- Figura 4.8. Evolución del parámetro de estado efectivo y más allá de Horndeski con las condiciones iniciales: $x_1 = -1.35, x_2 = 1.99, x_3 = 0.057$ y $x_4 = 1 \times 10^{-3}$ para un $z = 0.0001$, en donde el parámetro de estado más allá de Horndeski experimenta una fase en donde es mayor que cero, durante la época dominada por la materia. 54
- Figura 4.9. Evolución del parámetro de estado efectivo y de aquél asociado al Lagrangiano más allá de Horndeski con las condiciones iniciales: $x_1 = -1.3579, x_2 = 1.9942, x_3 = 0.05706$ y $x_4 = 2.4025 \times 10^{-7}$ para un $z = 0.0001$. Se aprecia que el parámetro de estado más allá de Horndeski atraviesa una fase donde es superior a cero, entre la época dominada por la radiación y la materia y una donde es inferior a -1, justo antes de entrar en el futuro atractor de energía oscura. 55

Lista de Tablas

Tabla 1.	Unidades para las funciones y constantes de acople para el sistema presentado en la Ec.56	33
Tabla 2.	Variedades, sub-variedades, y puntos críticos asociados al sistema	39

Lista de Apéndices

Apéndice A. Ecuaciones de campo	62
Apéndice B. Autovalores y autovectores del sistema	66
Apéndice C. Encontrando $\delta\varepsilon'_\phi, \delta h'$	69
Apéndice D. Evolución de w_{MH}	72

Resumen

Título: Escenario Viable de Energía Oscura
en el Marco de la Teoría Más Allá de Horndeski *

Autor: Rafael Esteban Chona Perea **

Palabras Clave: Teorías degeneradas, Teoría más allá de Horndeski, Energía Oscura, Historia térmica del universo.

Descripción: El descubrimiento de la expansión acelerada del universo marcó el comienzo de un nuevo misterio para la comunidad científica. A partir de este momento y, de manera paulatina, se propusieron tres diferentes mecanismos para explicar este fenómeno: la constante cosmológica, modificaciones a la gravedad de Einstein, también conocida como relatividad general (RG), y por último, la posible existencia de una nueva forma de materia con características exóticas denominada energía oscura o quintaesencia. En este trabajo se estudia un modelo enmarcado en el segundo de los mecanismos mencionados, que hace uso de la teoría más allá de Horndeski para asegurar que las ondas gravitacionales se propaguen a la rapidez de la luz. La técnica de los sistemas dinámicos permite analizar el comportamiento general de dicho modelo y utilizando las restricciones observacionales para la densidad de radiación y energía oscura se determinó su viabilidad.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física.
Director: Yeinzon Rodríguez, Doctor en Física.
Codirector: Alexander Gallego Cadavid, Doctor en Física.

Abstract

Title: A Viable Dark Energy Scenario For Beyond Horndeski Theories *

Author: Rafael Esteban Chona Perea **

Keywords: Degenerative theories, Beyond Horndeski Theories, Dark Energy, Thermic History of the Universe.

Description: The discovery of the accelerated expansion of the universe marks the beginning of a new mystery for the scientific community. Three distinct mechanisms were proposed as a solution to this phenomenon: the cosmological constant, modifications of general relativity and the proposed existence of a new type of energy with exotic properties called dark energy or quintaescense. This paper will focus on the second type of mechanism, using the beyond Horndeski theories to guarantee that the gravitational wave speed is equal to the speed of light. The dynamical system technique will be used to analyze the general behavior of said model and using the observational restriction for the radiation and dark energy density it's viability was found.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física.
Director: Yeinzon Rodriguez, Doctor en Física.
Codirector: Alexander Gallego Cadavid, Doctor en Física.

Introducción

A finales del siglo pasado, mediante las observaciones de supernovas del tipo Ia realizadas por el telescopio espacial Hubble (Riess et al.; 34; 36), la comunidad científica llegó a la conclusión de que el universo se está expandiendo aceleradamente. Esto provocó una revolución en el campo de la cosmología y dio mérito para el premio Nobel otorgado en 2011, a los responsables de tan importante descubrimiento.

Los cosmólogos no tardaron en proponer tres alternativas para la explicación de la expansión acelerada tardía. La primera fue la reintroducción de la constante cosmológica en la acción, la cual representaría la energía del vacío y generaría naturalmente la expansión acelerada del universo (33; 40). Sin embargo, al hacer las respectivas correcciones cuánticas, se encuentra que se requiere un ajuste fino de una parte en 10^{120} para que el valor teórico concuerde con el experimental (40). La segunda alternativa propone la existencia de una nueva y exótica clase de materia en forma de fluido que permea todo el universo y genera la expansión acelerada de este último (14). Se le dio el nombre de quintaesencia en honor a la cultura griega. Esta nueva forma de materia tendría que violar algunas condiciones de energía¹. La tercera alternativa consiste en que la RG no funcione a escalas cosmológicas y, por ende, se necesite una nueva teoría que la reproduzca a escalas del Sistema Solar² explicando simultáneamente la expansión acelerada del universo. Estas teorías generalmente funcionan agregando o modificando términos en la acción (30) y deben ser coherentes no solo con la expansión acelerada del universo sino con todas las características de la cosmología estándar, como la historia térmica del universo, el contenido energético del mismo y las detecciones cosmológicas como las encontradas en 2017 por LIGO y Fermi (22; 2), entre otros.

¹ Se debe aclarar que aunque no se haya observado a escalas humanas o cotidianas, dicha alternativa no necesariamente debe ser inviable; después de todo, el universo no tiene por qué seguir nuestro concepto de racionalidad.

² Esto se logra utilizando un método de apantallamiento (5).

Lo que permite que puedan ser sometidas a la prueba experimental.

Una de las teorías de gravedad modificada más prometedoras fue desarrollada en 1974 por Gregory Horndeski (23), quien buscó plantear la teoría más general escalar-tensor que conllevara a ecuaciones de campo con derivadas de orden no mayor a dos. El trabajo de Horndeski fue redescubierto en 2009 y posteriormente se encontró que la existencia de dicho campo escalar podría generar la expansión acelerada que es observada actualmente en el universo (véase la Ref. (13) y las referencias incluidas). Sin embargo, algunos de los Lagrangianos que componen la teoría de Horndeski predicen una rapidez anómala (es decir, distinta a la de la luz) para las ondas gravitacionales, lo cual es inconsistente con los resultados experimentales de GW170817 y GRB170817A para corrimientos al rojo pequeños (7; 9; 38; 15; 39; 8). Una posible solución a este problema se encuentra violando la hipótesis de Ostrogradsky (31) sobre la que se basa la teoría de Horndeski, es decir, considerando una teoría degenerada, como la teoría más allá de Horndeski (21; 26) y, escogiendo el valor de las constantes de acoplamiento de los nuevos términos en el Lagrangiano de tal manera que garanticen la normalidad de la rapidez para las ondas gravitacionales.

En este trabajo se estudia la forma en la que la teoría más allá de Horndeski genera la expansión acelerada del universo, concretamente, analizando las piezas de Lagrangiano de Horndeski: \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_4 en conjunto con el término más allá de Horndeski F_4 . Además se encuentran las ecuaciones de campo, se emplea la herramienta de sistemas dinámicos para encontrar los puntos críticos, se analiza la estabilidad de estos puntos (19) y se comparan con la solución numérica adimensional del sistema. Este trabajo corresponde a una reproducción del trabajo realizado por Kase y Tsujikawa (26).

1. Teoría de Horndeski y más allá

1.1. Historia térmica del universo y expansión actual

De la primera ley de la termodinámica se deduce que, para un universo homogéneo e isótropo, i.e. uno en donde la transferencia de calor entre diferentes regiones es cero ($dQ = 0$), el único

responsable de la disminución de la energía interna es el trabajo realizado por el sistema sobre su entorno

$$dU = -dW = -pdV, \quad (1)$$

donde dU es el diferencial de energía interna, dW es el diferencial de trabajo, p es la presión y V el volumen.

Ahora bien, para un universo en expansión, la distancia física entre observadores fundamentales dependerá de un factor de escala de la siguiente forma:

$$d(t) = a(t)d_0, \quad (2)$$

donde d es la distancia física, $a(t)$ el factor de escala y d_0 la distancia comóvil. La Ec.(2) indica que todo volumen en un universo en expansión se puede escribir como:

$$V(t) = V_0 a(t)^3, \quad (3)$$

por lo que la energía interna será igual a:

$$U = \rho V_0 a(t)^3, \quad (4)$$

siendo ρ la densidad de energía. Reemplazando las Ec.s (3-4) en Ec.(1), se obtiene:

$$d(\rho a(t)^3) = p d(a(t)^3), \quad (5)$$

de donde se deduce

$$a^3 \dot{\rho} + 3a^2 \rho \dot{a} = -3a^2 p \dot{a}, \quad (6)$$

donde el punto significa la derivada con respecto al tiempo cósmico. La Ec. (6) se puede reorganizar de la siguiente manera:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (7)$$

la cual se denomina la ecuación de continuidad. Para resolverla, se requiere una ecuación de estado que relacione la presión con la densidad de energía. Si se toma dicha relación como:

$$p = w\rho, \quad (8)$$

en donde w es una constante, se puede resolver la ecuación de continuidad para encontrar que

$$\rho = ca^{-3(w+1)}, \quad (9)$$

siendo c la constante de integración.

La teoría cinética enseña que (24):

$$p = \frac{\rho}{3}\bar{v}^2, \quad (10)$$

donde \bar{v} es la velocidad promedio de las partículas dentro de un fluido en unidades naturales. Para materia no relativista se tiene que $1 \gg \bar{v}$ y por ende $w_m = 0$, para radiación $1 = \bar{v}$ y $w_r = 1/3$.

El modelo estándar cosmológico requiere de un tercer parámetro $w_{DE} = -1$ asociado a un fluido, que es responsable de cerca del 70% por ciento del contenido energético del universo (14; 3).

Remplazando lo anterior en la Ec.(9) se encuentra que la dependencia entre la densidad y el factor de escala en cada caso es,

$$\rho_m \propto a(t)^{-3}, \quad \rho_r \propto a(t)^{-4}, \quad \rho_{DE} = cte, \quad (11)$$

donde ρ_m, ρ_r y ρ_{DE} son las densidades de energía de materia, radiación y energía oscura.

Una consecuencia de la Ec.(11) es que a medida que pasa el tiempo en el universo, un tipo de energía dominará sobre las demás, dividiendo la historia de éste en tres épocas (14), tal y como se presenta en la figura 1.1.

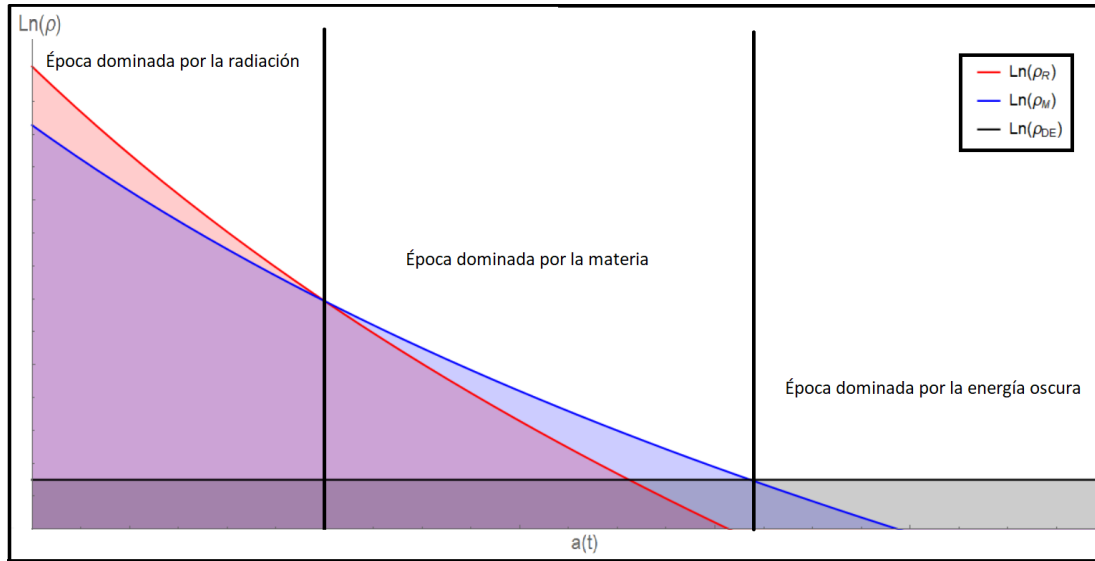


Figura 1.1. Dependencia del logaritmo de la densidad de energía con respecto al factor de escala, para la densidad de materia, radiación y energía oscura. Como se puede ver, a medida que el universo evoluciona, la densidad de radiación disminuye hasta el punto en que la densidad de materia es dominante. Eventualmente, ambas densidades disminuyen lo suficiente para que la densidad de energía oscura, que es constante, domine.

1.2. El problema de la constante cosmológica

El problema principal de la constante cosmológica Λ aparece de una discrepancia entre la cosmología y la física de partículas en donde Λ representaría la energía que está cuanticamente asociada al vacío y que también debe aportar al contenido energético del universo. El modelo estándar de partículas fundamentales predice un valor para ésta del orden de la escala de Planck,

$$\Lambda \sim M_p^4 \sim (10^{18} \text{GeV})^4. \quad (12)$$

Sin embargo, la cota encontrada observacionalmente es de $\Lambda \leq (10^{-12} \text{GeV})^4$ lo que es 120

ordenes de magnitud menor que el resultado predicho por el modelo estándar (40).

1.3. Inestabilidad de Ostrogradski

Mijaíl Ostrogradski fue un matemático Ucraniano nacido a inicios del siglo XIX. Entre sus muchos aportes se destaca el teorema que lleva su nombre, ya que es una poderosa herramienta para identificar posibles inestabilidades en una acción (31), cosa que resulta muy útil ya que se convierte en un criterio de viabilidad para una teoría. Ostrogradski se preguntó qué propiedades tiene el Hamiltoniano asociado a un Lagrangiano no degenerado, es decir, uno en donde se cumple,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^{(n)2}} \neq 0, \quad (13)$$

donde q son las coordenadas generalizadas y n es el orden de la derivada de más alto orden de q que aun tenga dependencia de \mathcal{L} . Y qué tipo de dependencia tiene respecto a sus variables canónicas. Él empezó tomando un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}), \quad (14)$$

con

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^2} \neq 0. \quad (15)$$

Este Lagrangiano tiene asociada la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \dot{q} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot{q}} - \ddot{q} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^2} = 0, \quad (16)$$

de donde se puede obtener que:

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}). \quad (17)$$

La solución de la Ec. (17) queda en términos de t y las condiciones iniciales de las variables

q_0 y \dot{q}_0 :

$$q = F(t, q_0, \dot{q}_0). \quad (18)$$

De otra parte, partiendo de la condición de no degeneración, se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = g(q, \dot{q}). \quad (19)$$

El siguiente paso es encontrar el Hamiltoniano asociado a este sistema. Para esto, primero se debe definir un conjunto de variables canónicas de la forma:

$$Q \equiv q, \quad (20)$$

$$P \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (21)$$

Aplicando transformada de Legendre se obtiene:

$$\mathcal{H} = P\dot{q} - \mathcal{L}. \quad (22)$$

De la Ec.(19) y, haciendo una transformación inversa de fase, se puede ver que $\dot{q} = v(Q, P)$ y por lo tanto la Ec. (14) se transforma en $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, v(Q, P))$, lo que a su vez transforma la Ec. (22) en:

$$\mathcal{H} = Pv(Q, P) - \mathcal{L}(Q, v(Q, P)), \quad (23)$$

lo que representa la energía del sistema. Sin embargo, debido a la presencia del Lagrangiano (que en esencia puede ser cualquier función de Q y P), no se puede asegurar si ésta presenta alguna inestabilidad.

Cuando el Lagrangiano depende de q , \dot{q} y de \ddot{q} y haciendo un procedimiento análogo al caso

anterior, teniendo en cuenta que la condición de no degeneración y la ecuación de Euler-Lagrange son respectivamente:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}^2} \neq 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}} = 0, \quad (25)$$

se encuentra que:

$$q^{(4)} = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, q^{(3)}), \quad (26)$$

y por ende

$$q = F(t, q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0, q_0^{(3)}), \quad (27)$$

en donde q depende del tiempo y de las condiciones iniciales de las coordenadas generalizadas. Se tiene que debido a la existencia de cuatro condiciones iniciales, se necesitan cuatro variables canónicas, que para Ostrogradsky son las siguientes:

$$Q_1 \equiv q, \quad Q_2 \equiv \dot{q},$$

$$P_1 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}}, \quad P_2 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}}. \quad (28)$$

De la condición de no degeneración escrita en variables canónicas se puede hacer una transformación inversa de fase y obtener así la siguiente expresión:

$$\ddot{q} = x(Q_1, Q_2, P_2), \quad (29)$$

y finalmente, el Hamiltoniano escrito en términos de las variables canónicas corresponde a:

$$\mathcal{H} = P_1 Q_1 + P_2 x(Q_1, Q_2, P_2) - \mathcal{L}(Q_1, Q_2, x(Q_1, Q_2, P_2)). \quad (30)$$

El primer término de la expresión anterior muestra que existe una relación lineal entre \mathcal{H} y P_1 , lo que lleva inevitablemente a que el Hamiltoniano NO este acotado por debajo sin importar el tipo de Lagrangiano que se escoja. También lleva a que el sistema produzca energías negativas, lo cual es desastroso a nivel clásico y más aún a nivel cuántico (41; 42).

Si se repite el proceso y se toma un Lagrangiano que posea una dependencia hasta la $q^{(n)}$ coordenada generalizada, se produce una linealidad entre el Hamiltoniano asociado y n-1 variables canónicas de éste empeorando aún más la inestabilidad.

Haciendo un resumen de lo discutido anteriormente se tiene que:

- Para Hamiltonianos asociados a Lagrangianos *no* degenerados que producen derivadas de orden menor o igual a dos en las ecuaciones de Euler-Lagrange, que exista o no una inestabilidad en el Hamiltoniano dependerá de la forma específica del Lagrangiano, como se puede ver en la Figura 2.

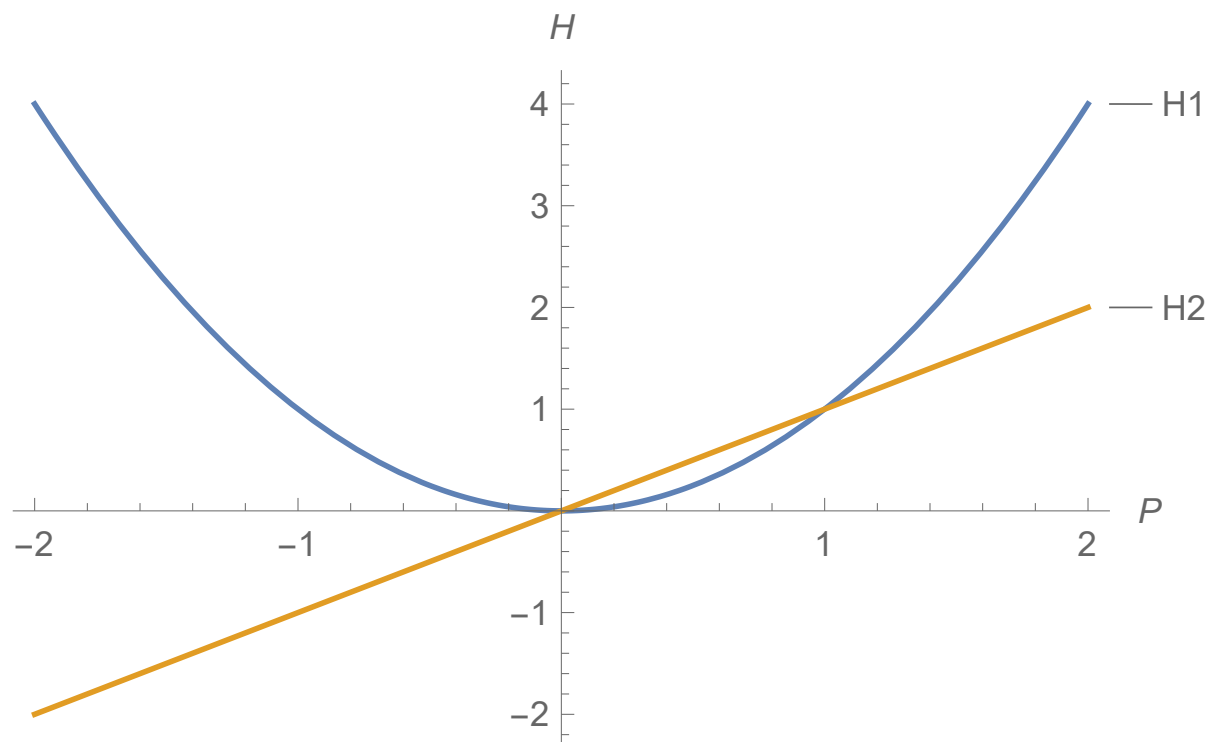


Figura 1.2. En esta imagen se presentan dos Hamiltonianos versus una de sus variables canónicas, P_1 , el primero (azul) es viable ya que el sistema está acotado mientras que el segundo (amarillo) corresponde a un modelo no viable ya que no existe estado base.

- Cuando las ecuaciones de movimiento o de Euler-Lagrange presentan derivadas de orden superior a dos, se presenta una inestabilidad inherente al sistema que se mantiene independientemente de la forma del Lagrangiano. Este problema se hace mayor a medida que el orden de las derivadas aumente (siempre que éste sea NO degenerado).

La discusión presentada lleva a la inevitable conclusión de que, para que exista una cota inferior en la energía, es necesario mas no suficiente que las ecuaciones de Euler-Lagrange presenten derivadas de orden igual o menor a dos.

1.4. Teoría de Horndeski

En la búsqueda de una teoría fundamental generalmente se plantea una hipótesis que funciona a cierta escala de energía y luego se observa el comportamiento de esta a escalas más bajas. Sin embargo, éste no es el único modo de desarrollar una teoría física efectiva, pues se puede tener en

cuenta restricciones a la acción para prevenir patologías en la teoría. Un ejemplo de estas restricciones es la inestabilidad de Ostrogradski que exige como condición necesaria, mas no suficiente, unas ecuaciones de movimiento asociadas a un sistema no degenerado de un orden menor o igual a dos.

Aplicando esta metodología a las modificaciones de la RG se tiene que en el caso más simple, es decir, un campo escalar en espaciotiempo plano y con ecuaciones que son estrictamente de orden dos, ha dado buenos resultados (29). Este tipo de campos escalares fueron bautizados como Galileones (ϕ), ya que gozan de una simetría que es, en forma, igual a las transformaciones de Galileo:

$$\phi \rightarrow \phi + b_\mu x^\mu + c, \quad (31)$$

donde b_μ es un cuadvivector constante y c es una constante.

Generalizando esta primera aproximación se encuentra que las ecuaciones de campo de los “Galileones” no tienen que ser estrictamente de orden dos o asociados a un espaciotiempo plano, dando paso en primer lugar a los “Galileones generalizados” (12), y posteriormente, a los “Galileones generalizados y covariantizados” (10; 11) como se demostrará más adelante. Un resultado idéntico fue encontrado en 1974 por Gregory Horndeski cuando se propuso encontrar la teoría de la gravedad más general compuesta por un tensor métrico y combinaciones lineales de campos escalares y sus primeras dos derivadas para Lagrangianos no degenerados (23).

El proceso para llegar a los Galileones generalizados empieza definiendo una acción en términos de un Lagrangiano que depende de un campo escalar ϕ , su primera y segunda derivada,

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\nu \phi) d^4x, \quad (32)$$

de donde se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \phi)} = 0. \quad (33)$$

Ahora bien, debido a que la anterior ecuación tiene segundas derivadas se debe tener especial cuidado para evitar una posible inestabilidad. Una forma sencilla de cumplir este objetivo es (37):

- Identificar todas las posibles contracciones entre el tensor métrico y derivadas de primer o segundo orden de ϕ de tal manera que se construyan invariantes de Lorentz.
- Agrupar los términos encontrados en combinaciones lineales.
- Desarrollar las ecuaciones de Euler-Lagrange y encontrar relaciones entre los coeficientes de la combinación lineal de tal manera que todos los términos con derivadas de orden superiores a dos se cancelen.

De esta forma se encuentra que para espaciotiempo plano, el Lagrangiano total se puede separar en cuatro piezas, cada una conteniendo combinaciones lineales de los invariantes anteriormente mencionados. Tales piezas se describen a continuación, (13)

$$\mathcal{L}_{2,\phi}^{Gal} = f_2(\phi, X), \quad (34)$$

$$\mathcal{L}_{3,\phi}^{Gal} = f_3(\phi, X)(\square\phi), \quad (35)$$

$$\mathcal{L}_{4,\phi}^{Gal} = f_4(\phi, X) [(\square\phi)^2 - (\partial_\mu \partial_\nu \phi)(\partial^\mu \partial^\nu \phi)], \quad (36)$$

$$\mathcal{L}_{5,\phi}^{Gal} = f_5(\phi, X) [(\square\phi)^3 - 3(\partial_\mu \partial_\nu \phi)(\partial^\mu \partial^\nu \phi) + 2(\partial_\mu \partial^\nu \phi \partial_\nu \partial^\rho \phi \partial_\rho \partial^\mu \phi)], \quad (37)$$

en donde $X = \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi$ y las f 's son funciones arbitrarias de ϕ y X .

La acción corresponde entonces a:

$$S = \int \sum_{N=2}^5 \mathcal{L}_{N,\phi}^{Gal} d^4x. \quad (38)$$

La generalización de estos resultados a espaciotiempo curvo se realiza reemplazando las derivadas parciales por derivadas covariantes. Debido a la naturaleza de las mismas, se generarán términos en las ecuaciones de campo de orden superior a dos (10; 11). Para contrarrestar esto, se agregan contratérminos que cancelan aquellas nuevas contribuciones generadoras de inestabilidad. El resultado final, una vez añadidos estos contratérminos, es el siguiente: (13):

$$\mathcal{L}_{2,\phi}^{Gal} = G_2(\phi, X), \quad (39)$$

$$\mathcal{L}_{3,\phi}^{Gal} = G_3(\phi, X)\square\phi, \quad (40)$$

$$\mathcal{L}_{4,\phi}^{Gal} = G_4(\phi, X)R + G_{4,X} [(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi)], \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{5,\phi}^{Gal} = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) - \frac{1}{6}G_{5,X} [(\square\phi)^3 - 3(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) + \\ 2(\nabla_\mu\nabla^\nu\phi\nabla_\nu\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\nabla^\mu\phi)], \end{aligned} \quad (42)$$

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, R es el escalar de Ricci y $G_{N,X} = \frac{\partial G_N}{\partial X}$.

1.5. Rapidez de una onda gravitacional

El 17 de agosto de 2017 el observatorio de ondas gravitacionales por interferómetro de láser, LIGO, detectó por primera vez en la historia ondas gravitacionales producidas por un sistema binario de estrellas de neutrones. A este evento se le denominó GW170817 (2). Poco tiempo después el telescopio espacial Fermi y el Laboratorio Internacional de Astrofísica de rayos gamma detectaron una emisión de rayos gamma llamada GRB170817A con un retardo de 1.74 ± 0.05 [s] con respecto a la detección de GW170817 (1).

Con detecciones subsecuentes se fue revelando más información respecto al evento, estimándose que la fusión ocurrió en la galaxia NGC4993 a una distancia de 40_{-14}^{+8} [Mpc] (32).

Tomando el límite inferior para la distancia y , teniendo en cuenta el retraso entre las ondas gravitacionales y la emisión de rayos gamma, se encontró la siguiente cota inferior y superior para la rapidez de las ondas gravitacionales:

$$-3 \times 10^{-15} \leq c_g - 1 \leq 7 \times 10^{-16}, \quad (43)$$

donde c_g es la rapidez de las ondas gravitacionales.

Para que las teorías de Hordenski reproduzcan este comportamiento experimental, se necesita de un ajuste fino dinámico. Por esta razón, las piezas de la acción de Galileones que son responsables de la rapidez anómala son descartadas (7; 9; 38; 15; 39).

1.6. Teoría más allá de Horndeski

La detección de una onda gravitacional producida por la fusión de dos estrellas de neutrones realizada en 2017, descartó la posibilidad de que ésta tenga una rapidez distinta a la de la luz (2; 1; 7; 9; 38; 15; 39). Tal detección puso bajo presión a los modelos de Horndeski ya que, de forma genérica, éstos predicen una rapidez anómala para las ondas gravitacionales (7). Particularmente, para la pieza de Galileón $\mathcal{L}_{4,\phi}^{Gal}$ se tiene que, debido a la formulación en su construcción, no hay forma de que la rapidez de las ondas gravitacionales sea igual a la de la luz.

Existe una manera de sobrepasar el problema anterior, ya que un teorema solo es válido si se cumplen las hipótesis bajo las cuales éste se formuló. En el caso de Ostrogradski, la hipótesis principal es que se está trabajando con Lagrangianos NO degenerados, por lo que, si se trabaja con un Lagrangiano degenerado, el hecho de que se tenga derivadas de orden superior a dos no llevará inmediatamente a que se presenten inestabilidades en la energía del sistema.

Al romper la condición de no degeneración se encuentra que las nuevas piezas de Lagrangiano permanecen iguales, excepto para $\mathcal{L}_{4,\phi}^{Gal}$ y $\mathcal{L}_{5,\phi}^{Gal}$ que se transforman en (28; 21):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,\phi}^{Gal} = & G_4(\phi, X)R + G_{4,X} [(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)] \\ & + F_4 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \nabla_\mu \nabla^{\mu'} \phi \nabla_\nu \nabla^{\nu'} \phi \nabla_\rho \nabla^{\rho'} \phi, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{5,\phi}^{Gal} = & G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) - \frac{1}{6}G_{5,X} [(\square\phi)^3 - 3(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) + \\ & 2(\nabla_\mu \nabla^\nu \phi \nabla_\nu \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \nabla^\mu \phi) + F_5 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \nabla_\mu \nabla^{\mu'} \phi \nabla_\nu \nabla^{\nu'} \phi \nabla_\rho \nabla^{\rho'} \phi \nabla_\sigma \nabla^{\sigma'} \phi, \end{aligned} \quad (45)$$

donde F_4 y F_5 son funciones del campo escalar ϕ y de X . Las funciones F_4 y F_5 aparecen precisamente por la degeneración del Lagrangiano propia de las teorías más allá de Horndeski (MH). Cuando se deducen las respectivas ecuaciones de campo, se observa que la rapidez de las ondas gravitacionales no es anómala, siempre y cuando:

$$F_4 = \frac{2G_{4,X}}{X}, \quad (46)$$

en la medida en que $X \neq 0$ y tomando $F_5 = 0$ (26).

2. Sistemas dinámicos

La técnica de sistemas dinámicos es una herramienta que permite analizar el comportamiento de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de manera cualitativa, para un conjunto de condiciones iniciales muy amplia (25; 6). Por esto, adquiere una gran importancia en cosmología ya que a partir de ella es posible estudiar si un modelo tiene un comportamiento general o depende fuertemente de las condiciones iniciales a partir de las ecuaciones de Friedmann.

Supóngase que se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), acopladas, y de primer orden para las variables, H , ρ_a y ρ_b . Es posible realizar un cambio de variables tal que:

$$x = x(H, \rho_a, \rho_b), y = (H, \rho_a, \rho_b), \quad (47)$$

donde x y y son variables adimensionales que representan puntos en el espacio de fase. Al realizar este cambio de variable se está intercambiado el conjunto original de ecuaciones no lineales derivadas respecto al tiempo cósmico por uno definido como:

$$x' = f(x, y), y' = g(x, y), \quad (48)$$

donde el prima significa una derivada respecto a un parámetro temporal adimensional τ , que para cosmología corresponde a:

$$\tau = \int \frac{da(t)}{a(t)} \rightarrow d\tau = d\ln[a(t)] = Hdt, \quad (49)$$

siendo H el parámetro de Hubble y definido como $\dot{a}(t)/a(t)$. La inclusión del parámetro τ cumple el propósito de mantener cerrado y adimensional el sistema.

La cualidad más importante del sistema presentado en la Ec. (48) es que no depende explícitamente del tiempo adimensional, por lo que corresponde a un sistema autónomo de EDO. Los puntos x y y representarán las posibles soluciones que el sistema de EDO de ρ_a y ρ_b puede tomar. Para estudiar el comportamiento de dichas soluciones se debe encontrar los puntos críticos del sistema (48), es decir la pareja de puntos (x_c, y_c) que cumplan:

$$f(x_c, y_c) = g(x_c, y_c) = 0. \quad (50)$$

Para encontrar la estabilidad de los puntos críticos se debe realizar una perturbación lineal alrede-

dor de (x_c, y_c) y analizar su dependencia con respecto al tiempo:

$$x \rightarrow x + \delta x(\tau),$$

$$y \rightarrow y + \delta y_c(\tau).$$

Tomando $\delta x'$ y $\delta y'$ de la Ec.(48) se encuentra que:

$$\delta x' = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y, \quad (51)$$

$$\delta y' = \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y, \quad (52)$$

o lo que es lo mismo

$$\delta \mathbf{X}' = \mathbf{J}(x_c, y_c) \cdot \delta \mathbf{X}, \quad (53)$$

con:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Encontrando los autovalores λ_1 y λ_2 de la matriz \mathbf{J} y resolviendo las ecuaciones diferenciales para δx y δy se encuentra que:

$$\begin{aligned} \delta x(\tau) &= A_1 e^{\lambda_1 \tau} + A_2 e^{\lambda_2 \tau}, \\ \delta y(\tau) &= B_1 e^{\lambda_1 \tau} + B_2 e^{\lambda_2 \tau}, \end{aligned} \quad (55)$$

donde $A_{1,2}$ y $B_{1,2}$ son constantes.

La estabilidad del punto crítico dependerá de la naturaleza de λ_i :

- Autovalores reales:

1. Si los autovalores son positivos, la dependencia de $\delta\mathbf{X}$ respecto a τ será la suma de dos exponenciales positivas, que tenderán a infinito a medida que el tiempo adimensional aumente, por lo que la solución no será estable y el sistema se alejará de ese punto crítico. Esto se conoce como un repelente.
2. Si son negativos, la perturbación tenderá a hacerse más pequeña a medida que el tiempo adimensional aumente, siendo aproximadamente cero para valores muy grandes de τ , por lo que representará un punto crítico estable. Este caso recibe el nombre de futuro atractor.
3. Si se encuentran autovalores negativos y positivos la solución corresponderá a un futuro atractor para algunas direcciones y a un repelente para otras, por lo que será un punto crítico transitorio. Este caso recibe el nombre de punto de silla.

- Autovalores complejos

Si los autovalores $\lambda_{1,2}$ son complejos, se pueden separar en su parte real e imaginaria, $\lambda_j = a \pm bi$ con $b \neq 0$, por lo que la Ec.(55) se transforma en oscilador armónico con una amplitud modulada por e^a . Las posibilidades son las siguientes:

1. $a > 0$. El punto crítico se comportara como una espiral inestable, el termino $e^a \rightarrow \infty$ con $\tau \rightarrow \infty$. Este caso recibe el nombre de repelente.
2. $a = 0$. El sistema orbitará la solución siguiendo trayectorias circulares, pero nunca entrara en ella. Esta solución es estable, aunque poco común y está asociada con osciladores armónicos libres.
3. $a < 0$. El punto crítico se comportara como una espiral atractora estable, donde $e^a \rightarrow 0$ con $\tau \rightarrow \infty$, es decir, como un futuro atractor.

3. Análisis Teórico

3.1. Modelo concreto de energía oscura

En éste trabajo se estudia el comportamiento de las piezas de Lagrangiano $\mathcal{L}_{2,\phi}^{Gal}$, $\mathcal{L}_{3,\phi}^{Gal}$ de la teoría de Horndeski y $\mathcal{L}_{4,\phi}^{Gal}$ con el termino más allá de Horndeski, por lo que la acción corresponde a:

$$S = \int \sqrt{-g} \sum_{N=2}^4 \mathcal{L}_N d^4x + S_m, \quad (56)$$

donde S_m es la acción asociada a la materia y

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\phi, X), \quad (57)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(\phi, X) \square \phi, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R - 2G_{4,X} [(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)] \\ + F_4 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \nabla_\mu \nabla^{\mu'} \phi \nabla_\nu \nabla^{\nu'} \phi \nabla_\rho \nabla^{\rho'} \phi. \end{aligned} \quad (59)$$

Se escoge una dependencia para $G_{2,3,4}$ que ha sido previamente estudiada en la literatura (4):

$$G_2 = a_1X + a_2X^2, \quad (60)$$

$$G_3 = 3a_3X, \quad (61)$$

$$G_4 = \frac{m_p^2}{2} - a_4X^2, \quad (62)$$

donde m_p es la masa de Planck reducida y $a_{1,2,3,4}$ son constantes. Utilizando la relación mostrada en la Ec.(46), se encontró que la función acoplada al termino MH, corresponde a:

$$F_4 = -4a_4. \quad (63)$$

3.1.1. Parámetros adimensionales. En unidades naturales se tiene que $[\mathcal{L}] = E^4$. Analizando cada pieza de Lagrangiano y, teniendo en cuenta que $[\phi] = E$, se encontró que las unidades de cada función de acoplamiento y sus respectivas constantes están dadas de acuerdo al Cuadro 1:

Función	Unidades	Constante	Unidades
G_2	E^4	a_1	–
G_3	E	a_2	E^{-4}
G_4	E^2	a_3	E^{-3}
F_4	E^{-6}	a_4	E^{-6}

Tabla 1

Unidades para las funciones y constantes de acople para el sistema presentado en la Ec.56

Por conveniencia se redefinió las constantes a_i en términos de parámetros adimensionales \bar{a}_i , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= a_1, \bar{a}_2 = m_p^4 a_2, \\ \bar{a}_3 &= m_p^3 a_3, \bar{a}_4 = m_p^6 a_4.\end{aligned}\tag{64}$$

3.1.2. Ecuaciones de campo. Para encontrar las ecuaciones de campo se varía la acción (Ec. 56), con respecto a una métrica del tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, manualmente y con EL paquete de cálculo tensorial **xAct** (18) de **Mathematica**. En el caso de $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ y \mathcal{L}_4 , se encuentra que su variación no conlleva a derivadas del campo escalar de orden superior a dos, a diferencia de \mathcal{L}_4 , donde debido a la presencia del escalar de Ricci y el término más allá de Horndeski las ecuaciones de movimiento presentan, aparentemente, derivadas de tercer y cuarto orden.

Para las derivadas asociadas a los términos más allá de Horndeski, se encuentra que la suma total de los términos de tercer y cuarto orden es igual a cero, por lo que no contribuyen a las ecuaciones de campo. Lo anterior concuerda con lo encontrado por J. Gleyzes et al. en (20). La variación de la acción se presenta de manera más detallada en el anexo 5.

Las ecuaciones de campo encontradas son las siguientes:

$$3H^2 = m_p^{-2}(\rho_{MH} + \rho_r + \rho_m),\tag{65}$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -m_p^{-2}(p_{MH} + p_r),\tag{66}$$

con

$$\rho_{MH} = -\bar{a}_1 \dot{\phi}^2 + 3 \frac{\bar{a}_2}{m_p^4} \dot{\phi}^4 + 18 \frac{\bar{a}_3}{m_p^3} H \dot{\phi}^3 + 30 \frac{\bar{a}_4}{m_p^6} H^2 \dot{\phi}^4,\tag{67}$$

$$p_{MH} = -\bar{a}_1 \dot{\phi}^2 + \frac{\bar{a}_2}{m_p^4} \dot{\phi}^4 - 6 \frac{\bar{a}_3}{m_p^3} \dot{\phi}^2 \ddot{\phi} - 2 \frac{\bar{a}_4}{m_p^6} \dot{\phi}^3 [8H\ddot{\phi} + \dot{\phi}(2\dot{H} + 3H^2)],\tag{68}$$

donde p_{MH} y ρ_{MH} representan la densidad y presión asociadas al fluido más allá de Horndeski, respectivamente.

Adicionalmente, variando la acción con respecto al campo escalar ϕ se encuentra una tercera ecuación para los parámetros \bar{a}_i . Pese a que esta expresión no representa nueva información del sistema, es conveniente presentarla ya que facilita algunos cálculos posteriores:

$$0 = 6(H\dot{\phi}\bar{a}_1 - 3\frac{\bar{a}_2}{m_p^4}\dot{\phi}^3H) + \bar{a}_1\ddot{\phi} - 6\frac{\bar{a}_2}{m_p^4}\dot{\phi}^2\ddot{\phi} - 18\frac{\bar{a}_3}{m_p^3}\dot{\phi}(3H^2\dot{\phi} + \dot{H}\dot{\phi} + 2H\ddot{\phi}) - 24\frac{\bar{a}_4}{m_p^6}(3H^3\dot{\phi}^3 + 2H\dot{H}\dot{\phi}^3 + 3H^2\ddot{\phi}\dot{\phi}^2). \quad (69)$$

3.1.3. Variables adimensionales. Debido a su no linealidad, las ecuaciones de campo encontradas son bastante complejas. Para facilitar su análisis se reescribe el sistema en términos de variables adimensionales y se utiliza la herramienta de sistemas dinámicos, discutida anteriormente. Las variables adimensionales escogidas son:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv -\frac{\bar{a}_1\dot{\phi}^2}{3m_p^2H^2}, & x_2 &\equiv \frac{\bar{a}_2\dot{\phi}^4}{m_p^6H^2}, & x_3 &\equiv \frac{6\bar{a}_3\dot{\phi}^3}{Hm_p^5}, \\ x_4 &\equiv \frac{10\bar{a}_4\dot{\phi}^4}{m_p^8}, & \Omega_r &\equiv \frac{\rho_r}{3m_p^2H^2}. \end{aligned} \quad (70)$$

Definiendo:

$$\Omega_{MH} \equiv \frac{\rho_{MH}}{3m_p^2H^2}, \quad \Omega_m \equiv \frac{\rho_m}{3m_p^2H^2}, \quad (71)$$

y reemplazando las Ecs. (70) y (71) en (66) y (65) se encuentran las ligaduras para las densidades de energía adimensionales:

$$1 = \Omega_{MH} + \Omega_r + \Omega_m, \quad (72)$$

$$\Omega_{MH} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4. \quad (73)$$

Para encontrar las ecuaciones diferenciales asociadas a las variables x_i se toma su derivada con respecto al monto de expansion o numero de e-folds, N , definidos como $dN = Hdt$. Para x_1 se obtiene que:

$$x'_1 = \frac{dx_1}{dN} = \frac{dx_1}{Hdt} = \frac{-\bar{a}_1}{3m_p^2} \frac{1}{H} \left[\frac{2\dot{\phi}\ddot{\phi}}{H^2} - \frac{2\dot{\phi}^2}{H^3} \dot{H} \right] = 2x_1 \left[\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - \frac{\dot{H}}{H^2} \right],$$

donde el símbolo prima representa una derivada respecto a N . Definiendo:

$$\varepsilon_\phi \equiv \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \quad h \equiv \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (74)$$

x'_1 se transforma en:

$$x'_1 = 2x_1(\varepsilon_\phi - h), \quad (75)$$

y análogamente,

$$x'_2 = 2x_2(2\varepsilon_\phi - h), \quad (76)$$

$$x'_3 = x_3(3\varepsilon_\phi - h), \quad (77)$$

$$x'_4 = 4x_4\varepsilon_\phi. \quad (78)$$

Para encontrar la ecuación diferencial de Ω_r se tomó $\rho_r = \rho_{r0}a(t)^{-4}$ y por ende, $\rho'_r = -4\rho_r H$, por lo que Ω'_r es igual a:

$$\Omega'_r = \frac{m_p^{-2}}{3H} \left[\frac{\dot{\rho}_r}{H^2} - \frac{2\rho_r}{H^3} \dot{H} \right] = -2\Omega_r[2 + h]. \quad (79)$$

Con el fin de expresar ε_ϕ y h en términos de las variables adimensionales se hace uso de las Ecs. (69) y (66), que escritas de manera adimensional, adoptan la siguiente forma:

$$2h + 3 = x_1 + x_2 - x_3 \varepsilon_\phi - \frac{8}{5} x_4 \varepsilon_\phi - \frac{2}{5} x_4 h - \frac{3}{5} x_4 + \Omega_r, \quad (80)$$

$$0 = x_1(6 + \varepsilon_\phi) + 2x_2(2 + \varepsilon_\phi) + x_3(3(1 + \varepsilon_\phi) + h) + \frac{8x_4}{10}(3(1 + \varepsilon_\phi) + 2h). \quad (81)$$

Despejando para ε_ϕ y h se encuentra que:

$$\varepsilon_\phi = \frac{-1}{q_s} [20(3x_1 + 2x_2) - 5x_3(3x_1 + x_2 + \Omega_r - 3) - x_4(36x_1 + 16x_2 + 3x_3 + 8\Omega_r)], \quad (82)$$

$$h = \frac{-1}{q_s} [10(3x_1 + x_2 + \Omega_r + 3)(x_1 + 2x_2) + 10x_3(6x_1 + 3x_2 + \Omega_r + 3) + 15x_3^2 + x_4(78x_1 + 32x_2 + 30x_3 + 12\Omega_r + 36) + 12x_4^2], \quad (83)$$

con:

$$q_s = 20(x_1 + 2x_2 + x_3) + 4x_4(6 - x_1 - 2x_2 + 3x_3) + 5x_3^2 + 8x_4^2, \quad (84)$$

h está relacionada con el parámetro de desaceleración q , definido como:

$$q = - \left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) = -(1 + h). \quad (85)$$

Por último, se encuentran las expresiones para el parámetro de estado efectivo y más allá de Horndeski:

$$w_{ef} = \frac{p_T}{\rho_T} = 1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} = 1 - \frac{2h}{3}, \quad (86)$$

$$w_{MH} = \frac{p_{MH}}{\rho_{MH}} = \frac{5(3x_1 + x_2 - \varepsilon_\phi x_3) - x_4(3 + 8\varepsilon_\phi + 2h)}{15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}, \quad (87)$$

donde p_T y ρ_T corresponden a la suma de las presiones y densidades del sistema y pueden ser encontradas de las ecs.(66) y (65).

3.2. Puntos críticos

Se analiza el sistema de ecuaciones diferenciales asociado a las variables $x_{1,2,3,4}$ y Ω_r presentado en las Ecs. (75-79) y se encuentra un total de 3 variedades críticas, 4 sub-variedades críticas y nueve puntos críticos, tal como se muestra en la tabla 2.

x_1	x_2	x_3	x_4	Ω_r
Variedades Críticas				
$\frac{1}{10}(-20 + 5x_3 + 8x_4)$	$\frac{-3}{10}(-10 + 5x_3 + 6x_4)$	-	-	0
0	-	0	0	$1 - x_2$
0	0	0	-	0
Subvariedades Críticas				
0	$\frac{-3}{8}(4 + x_3)$	-	$\frac{-5}{8}(x_3 - 4)$	0
$\frac{-1}{6}(4 + x_3)$	0	-	$\frac{5}{6}(2 + x_3)$	0
$\frac{2}{5}(-5 + 2x_4)$	$\frac{-3}{5}(-5 + 3x_4)$	0	-	0
-	$-3(1 + x_1)$	$2(2 + x_1)$	0	0
Puntos Críticos				
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	-3	4	0	0
-1	0	2	0	0
0	0	-4	5	0
$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$	0
0	$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0
-2	3	0	0	0

Tabla 2

Variedades, sub-variedades, y puntos críticos asociados al sistema

3.3. Análisis de los puntos críticos

A continuación se analizan los resultados presentados en la tabla 2. Los autovalores y autovectores de cada punto crítico se encuentran en el anexo 5.

3.3.1. Variedades críticas:

- **Primera variedad crítica:** Corresponde a dos ligaduras entre las variables $x_{1,2,3,4}$

$$x_1 = \frac{1}{10}(-20 + 5x_3 + 8x_4) \quad (88)$$

$$x_2 = \frac{-3}{10}(-10 + 5x_3 + 6x_4) \quad (89)$$

con $\Omega_r = 0$. Reemplazando estas relaciones en las Ecs.(82) y (83) se encuentra que en esta variedad crítica tanto ε_ϕ como h son iguales a cero, es decir:

$$\ddot{\phi} = 0, \wedge \dot{H} = 0. \quad (90)$$

La condición $\dot{H} = 0$ lleva a un parámetro de desaceleración de -1, lo que sugiere que el universo está experimentando una expansión acelerada.

Estabilidad

Dado que dos de los autovalores del sistema son nulos, no es posible obtener información sobre la estabilidad del punto crítico respecto a las variables $x_{1,2,3,4}$. Para sobrepassar este inconveniente, se estudia la estabilidad de la condición $\varepsilon_\phi = h = 0$, utilizando las dos ligaduras presentadas en la tabla 2, para pasar de un sistema de cinco variables ($x_{1,2,3,4}$ y Ω_r) a uno de tres, ε_ϕ, h y Ω_r .

Las perturbaciones alrededor del punto crítico se obtiene construyendo una matriz A que relacione $(\delta\varepsilon'_\phi, \delta h', \delta\Omega'_r)$ con $(\delta\varepsilon_\phi, \delta h, \delta\Omega_r)$ y encontrándose posteriormente los autovalores y autovectores de dicha matriz.

Para construir la matriz A se parte de las perturbaciones de x'_i en las Ecs. (75-79):

$$\delta x'_1 = 2\delta x_1(\varepsilon_\phi - h) + 2x_2(\delta\varepsilon_\phi - \delta h), \quad (91)$$

$$\delta x'_2 = 2\delta x_2(2\varepsilon_\phi - h) + 2x_2(2\delta\varepsilon_\phi - h), \quad (92)$$

$$\delta x'_3 = \delta x_3(3\varepsilon_\phi - h) + x_3(3\delta\varepsilon_\phi - \delta h), \quad (93)$$

$$\delta x_4 = 4\delta x_4 + 4x_4\delta\varepsilon_\phi, \quad (94)$$

$$\Omega'_r = -2\delta\Omega_r(2+h) - 2\Omega_r\delta h, \quad (95)$$

dado que en el punto crítico, $h = \varepsilon_\phi = \Omega_r = 0$, el sistema $\delta x'_i$ se transforma en:

$$\delta x'_1 = 2x_2(\delta\varepsilon_\phi - \delta h), \quad (96)$$

$$\delta x'_2 = 2x_2(2\delta\varepsilon_\phi - \delta h), \quad (97)$$

$$\delta x'_3 = x_3(3\delta\varepsilon_\phi - \delta h), \quad (98)$$

$$\delta x'_4 = 4x_4\delta\varepsilon_\phi, \quad (99)$$

$$\delta\Omega'_r = -4\delta\Omega_r. \quad (100)$$

El siguiente paso es encontrar $\delta h'$ y $\delta\varepsilon'_\phi$. Con base en el cálculo presentado en el anexo 5, el resultado es:

$$\delta\varepsilon'_\phi = -3\delta\varepsilon_\phi + \frac{18(x_1 + 2)\delta\Omega_r}{4x_2^2 + 6x_2 + 3x_1(5x_2 - 6) - 36},$$

$$\delta h' = -3\delta h - \frac{6(3x_1 + 4x_2 + 6)\delta\Omega_r}{4x_2^2 + 6x_2 + 3x_1(5x_2 - 6) - 36},$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X},$$

con $\mathbf{X}^T = (\delta\varepsilon_\phi, \delta h, \delta\Omega_r)$ y

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \frac{18(x_1+2)}{4x_2^2+6x_2+3x_1(5x_2-6)-36} \\ 0 & -3 & -\frac{6(3x_1+4x_2+6)}{4x_2^2+6x_2+3x_1(5x_2-6)-36} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores y autovectores de la matriz \mathbf{A} corresponden a:

$$\begin{aligned} -4, & \quad \left(-\frac{18(x_1+2)}{4x_2^2+15x_1x_2+6x_2-18x_1-36}, \frac{6(3x_1+4x_2+6)}{4x_2^2+15x_1x_2+6x_2-18x_1-36}, 1 \right), \\ -3, & \quad (0, 1, 0), \\ -3, & \quad (1, 0, 0), \end{aligned}$$

por lo que la variedad crítica corresponde a un futuro atractor.

Combinando las ligaduras de x_1 y x_2 presentadas en la tabla 2 se encuentra que:

$$x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3, \quad (101)$$

lo que quiere decir que las Ecs.(72) y (73) son respectivamente iguales a:

$$\Omega_{MH} = 1, \quad (102)$$

$$\Omega_m = 1 - \Omega_{MH} = 0. \quad (103)$$

Esto indica que en esta variedad crítica el fluido más allá de Horndeski es dominante.

De otra parte, reemplazando la Ec.(101) en la ecuación del parámetro de estado más allá de Horndeski y teniendo en cuenta la relación $\varepsilon_\phi = h = 0$, valida en el punto crítico, se

encuentra que:

$$w_{MH} = -1, \quad (104)$$

por lo que el fluido más allá de Horndeski se comporta como energía oscura.

La **primera variedad crítica** corresponde entonces a un **futuro atractor**, donde el universo está experimentando una **época dominada por la energía oscura**.

■ **Segunda variedad crítica:**

En esta variedad la variable x_2 es la que caracteriza el sistema. Reemplazando las condiciones del punto crítico en las Ecs (82) y (83) se encuentra que $\varepsilon_\phi = -1$ y $h = -2$, esto último conlleva a $q = 1$, lo que indica un período inflacionario.

Por otro lado, de las ecuaciones (72) y (73) y de la relación de Ω_r en el punto crítico se encuentran que las densidades de energía corresponden a:

$$\Omega_r = 1 - x_2, \Omega_{MH} = x_2, \Omega_m = 0, \quad (105)$$

o lo que es lo mismo:

$$\Omega_r = 1 - \Omega_{MH}. \quad (106)$$

Además de esto, el parámetro de estado más allá de Horndeski se transforma en:

$$w_{MH} = \frac{1}{3}. \quad (107)$$

La relación entre Ω_r y Ω_{MH} indica que en esta variedad crítica hay una co-dominancia entre los fluidos de radiación y más allá de Horndeski, donde este último se comporta como radiación.

Estabilidad

Los autovalores para esta variedad crítica corresponden a un punto de silla. De los autovectores se encuentra que dicho punto de silla actúa como un repelente para Ω_r en el caso $x_2 \rightarrow 0$.

En síntesis, la **segunda variedad crítica** corresponde a un **punto de silla**, donde el contenido energético del universo es o se comporta como radiación, por lo que se habla de una **época dominada por la radiación**.

■ Tercera variedad crítica:

En esta variedad la variable adimensional dominante es x_4 . Reemplazando las condiciones del punto crítico en las Ecs.(72) y (73) se encuentra que $\varepsilon_\phi = 0$ y $h = -\frac{3}{2}$, por lo que $q = \frac{1}{2}$, lo cual indica una época dominada por la materia. Lo anterior se hace aun más evidente al estudiar el comportamiento de las densidades de energía y el parámetro de estado w_{MH} en la variedad crítica:

$$\Omega_r = 0, \Omega_{MH} = x_4, \Omega_m = 1 - x_4, \quad (108)$$

es decir:

$$\Omega_m = 1 - \Omega_{MH}, \quad (109)$$

y

$$w_{MH} = 0. \quad (110)$$

De manera similar a la segunda variedad crítica, para la tercera variedad crítica se observa una co-dominancia entre dos densidades de energía, producidas por el fluido de materia y más allá de Hordenski, donde este último se comporta como un fluido de materia.

Estabilidad

Los autovalores de esta variedad crítica corresponden a un punto de silla. Además, analizando los autovectores se encuentra que el punto de silla se comporta como un atractor para Ω_r con $x_4 \rightarrow 0$.

En síntesis, la **tercera variedad crítica** corresponde a un **punto de silla**, donde el contenido energético del universo se distribuye entre materia y el fluido que representa el término más allá de Horndeski, donde este último se comporta como materia. Se puede hablar entonces de una **época dominada por la materia**.

3.3.2. Subvariedades críticas:. Se encuentra que el sistema exhibe cuatro sub-variedades críticas, que corresponden a casos específicos de la primera variedad, en donde una de las variables x_i es igual a cero. En cada una de ellas se cumple que:

$$\Omega_r = 0, \quad \Omega_m = 0, \quad \Omega_{MH} = 1, \quad (111)$$

$$w_{MH} = -1, \quad (112)$$

Por lo que corresponden a un **futuros atractores**, en donde el universo experimenta una **época dominada por la energía oscura**.

3.3.3. Puntos críticos:.

- **Primer Punto Crítico:** Este punto crítico no está incluido dentro de ninguna variedad previamente mostrada, h y ε_ϕ corresponden a $-\frac{3}{5}$ y $-\frac{9}{5}$ y adicionalmente, $\Omega_r, \Omega_m, \Omega_{MH}$ y w_{MH}

vienen dados por:

$$\Omega_r = 0, \quad \Omega_m = 0, \quad \Omega_{MH} = 1,$$

$$w_{MH} = \frac{1}{3}.$$

Los autovalores del sistema revelan que este punto crítico corresponde a un punto de silla. En este punto crítico el universo experimenta una época dominada por el fluido más allá de Horndeski, donde éste se comporta como radiación; sin embargo, el valor del parámetro de desaceleración q encontrado en esta solución no es concordante con el modelo cosmológico estándar.

- **Segundo Punto Crítico:** Corresponde a un caso específico de la **segunda variedad crítica**, donde $\Omega_{MH} = 1$, por lo que el fluido más allá de Horndeski, con parámetro de estado de radiación, domina completamente el contenido energético del universo.
- **Tercer Punto Crítico:** Este punto crítico no está incluido en ninguna variedad presentada, ε_ϕ y h son iguales a -3, y las densidades energéticas y el parámetro de estado son:

$$\Omega_r = 0, \quad \Omega_m = 0, \quad \Omega_{MH} = 1,$$

$$w_{MH} = \frac{1}{3}.$$

Los autovalores del sistema corresponden a un punto de silla. De manera similar al primer punto crítico, el universo experimenta una época dominada por el fluido más allá de Horndeski, donde éste se comporta como radiación; sin embargo, de manera similar al primer punto crítico, el parámetro de desaceleración q asociado a esta solución no es concordante con el modelo cosmológico estándar.

- **Puntos Críticos pertenecientes a la Primera Variedad Crítica** Los puntos críticos restantes son casos particulares de la primera variedad, es decir, cumplen las dos ligaduras para

$x_1 - x_2$ y tienen $\Omega_r = 0$. En todos ellos se cumple que:

$$\begin{aligned}\Omega_r &= 0, & \Omega_m &= 0, & \Omega_{MH} &= 1, \\ w_{MH} &= -1,\end{aligned}$$

y corresponden a un **futuro atractor**, donde el universo está experimentando una **época dominada por la energía oscura**.

4. Análisis numérico

4.1. Condiciones Iniciales

En este capítulo se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales presentado en las Ecs.(75-79) utilizando el software de cálculo Mathematica, con el método de Runge-Kutta. Se escogen condiciones iniciales que cumplen con los valores actuales de las densidades de energía en el universo, $\Omega_r[0] \propto 10^{-4}$, $\Omega_{DE}[0] \simeq 0.68$ (3). Usando la Ec.(73) esta última condición se traduce en:

$$x_1[0] + x_2[0] + x_3[0] + x_4[0] \simeq 0.68. \quad (113)$$

Para reducir aún más el espacio de parámetros de x_i se toman valores que garantizaran la condición $1 \gg x_i$ en $z \simeq 10^5$, con el fin de garantizar que el sistema empiece en la segunda variedad, con $\Omega_r \simeq 1$ y $x_2 \rightarrow 0$, es decir, en una época dominada por la radiación.

4.2. Solución numérica

Las figuras 4.1 y 4.2 presentan la evolución del sistema para las variables x_i y las densidades de energía adimensionales, con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}x_1[0.0001] &= -1.35, & x_2[0.0001] &= 1.999, & x_3[0.0001] &= 0.03, \\ x_4[0.0001] &= 0.0006, & \Omega_r[0.0001] &= 1 \times 10^{-4}.\end{aligned} \quad (114)$$

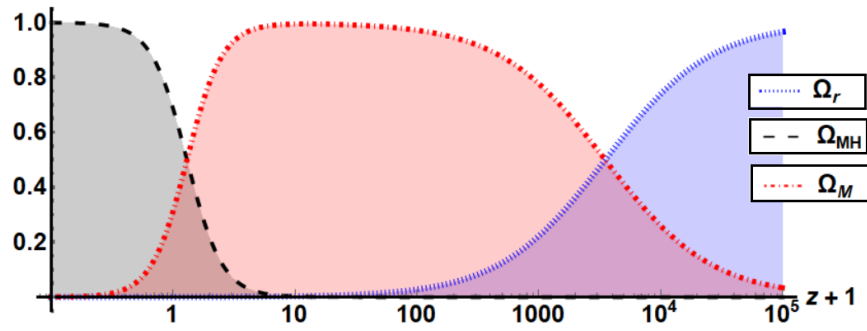


Figura 4.1. En esta imagen se presenta la evolución para las densidades de energía adimensionales del sistema, con las condiciones iniciales presentadas en la Ec.(114), en donde el sistema empieza en una época dominada por la radiación, transita por una dominada por la materia y finalmente se estabiliza en una época dominada por la energía oscura.

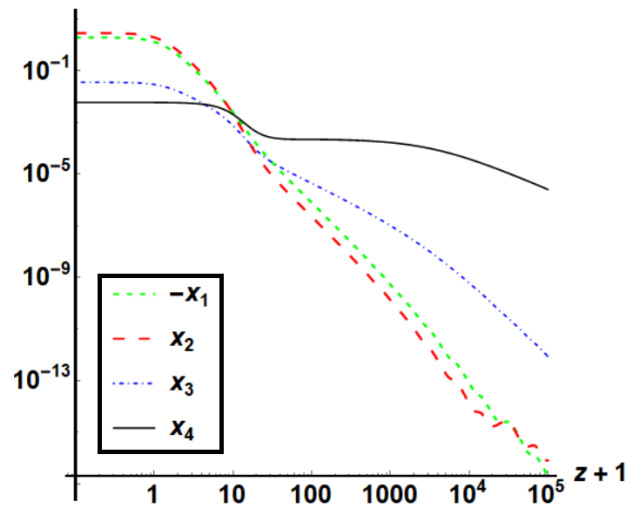


Figura 4.2. Evolución de las variables adimensionales x_i para las condiciones iniciales presentadas en la Ec.(114), donde se observa como estas aumentan hasta ser constantes cuando el sistema entra en la primera variedad.

- **Densidades de energía adimensionales**

Analizando el comportamiento de las densidades de energía, se tiene que el sistema empieza en la segunda variedad con $\Omega_{MH} \simeq 0$, es decir, en una época dominada completamente por el fluido de radiación. Dado que el sistema empieza con $x_2 \ll 1$, la época dominada por la radiación corresponderá a un repelente para la variable Ω_r , por lo que esta empezará a disminuir. Debido a que los valores de x_i no son considerables en este periodo y teniendo en cuenta la ligadura (72), dicha disminución en Ω_r genera un aumento para Ω_m , haciendo que el sistema entre en la tercera variedad, en el caso $1 \gg x_4$ lo que corresponde a un atractor para la densidad de energía de radiación.

Dado que la densidad del fluido más allá de Horndeski es muy pequeña durante $10 < z < 100$, se puede hablar de una época dominada por el fluido de materia, que se mantiene estable hasta que las variables $-x_1, x_2$ y x_3 se vuelven considerables respecto a 1 y el sistema entra a la primera variedad crítica, correspondiente a una época dominada por la energía oscura.

- **Parámetros de estado** El parámetro de estado efectivo presenta un comportamiento regular, empezando en 0.33 durante la época dominada por la radiación, avanzando hasta cero cuando el sistema es dominado por la materia y estabilizándose en -1 cuando la energía oscura es dominante. Por otro lado, w_{MH} presenta un comportamiento más exótico durante la época dominada por la radiación, ya que su valor es negativo, tal y como se puede ver en la figura 4.3. Esto se debe a que durante este periodo, $1 \gg x_4 \gg -x_1, x_2, x_3$, por lo que el parámetro de estado se reduce a:

$$w_{MH} = -\frac{1}{9}\Omega_r. \quad (115)$$

Este comportamiento se mantiene hasta que las variables x_i se vuelven comparables entre ellas para un z de aproximadamente 100, en donde w_{MH} pasa a ser cero en el punto de máximo dominio de materia para luego caer a -1 cuando Ω_{MH} se hace considerable respecto a Ω_m . El cálculo correspondiente a la Ec. (115) es presentado en el anexo 5.

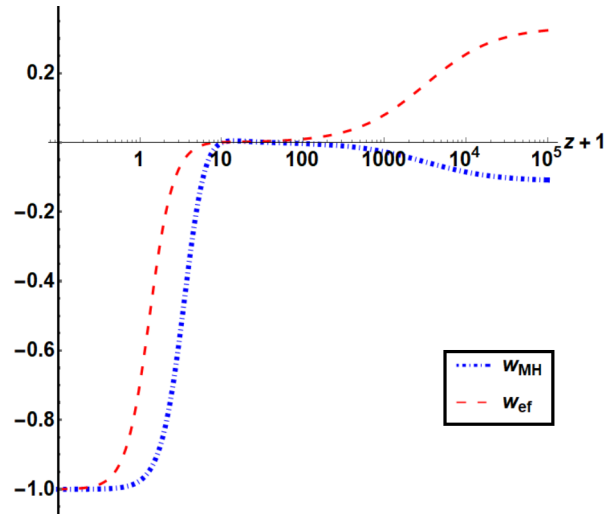


Figura 4.3. Evolución de los parámetros de estado efectivo y más allá de Horndeski para las condiciones iniciales presentadas en la Ec. (114), donde se observa cómo w_{ef} pasa de 0.33 a 0 para finalmente estabilizarse en -1. Por otro lado, w_{MH} empieza con un valor negativo de aproximadamente -0.2 para luego pasar a ser 0 y finalmente -1.

4.3. Variando las condiciones iniciales

Se encuentra que debido a la co-dominancia existente en la tercera variedad crítica, la existencia de una época dominada completamente por la materia depende considerablemente de las condiciones iniciales del sistema.

4.3.1. Variando x_4 . Dado que la tercera variedad crítica está directamente relacionada con x_4 , es conveniente que su valor hoy sea inferior a 1×10^{-2} para que el valor de Ω_{MH} después de la época dominada por la radiación sea menor a 0.1. Un ejemplo con $x_2[0]$ mayor a lo utilizado en 114 se presenta en la figura 4.4 .

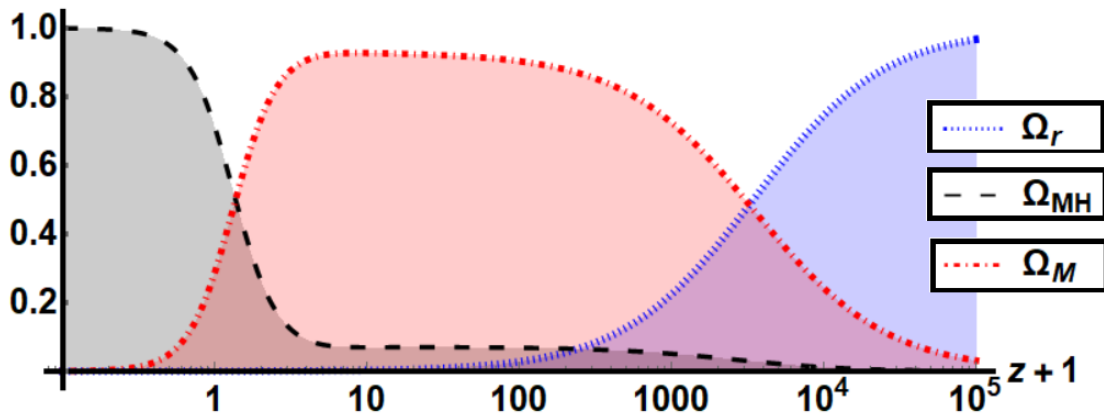


Figura 4.4. Evolución de las densidades de energía adimensionales, Ω_r , Ω_m y Ω_{MH} con las condiciones iniciales: $x_1 = -1.35$, $x_2 = 1.99$, $x_3 = 0.03$ y $x_4 = 4 \times 10^{-2}$ para un $z = 0.0001$, que representan una pequeña desviación de las condiciones iniciales presentadas en 114, donde la época dominada por el fluido de materia observada en la figura 4.2 pasa a ser una co-dominación entre este último y el fluido más allá de Horndeski.

4.3.2. Variando $|x_1|$ y x_2 . Se encuentra que si ambos valores disminuyen considerablemente respecto a lo presentado en la Ec.(114), el sistema entrará en una fase dominada por el fluido más allá de Horndeski, donde éste se comportará como radiación, luego, experimentará un pequeño periodo de co-dominancia con la materia, para finalmente entrar a la época dominada por la energía oscura, tal como se observa en la figura 4.5.

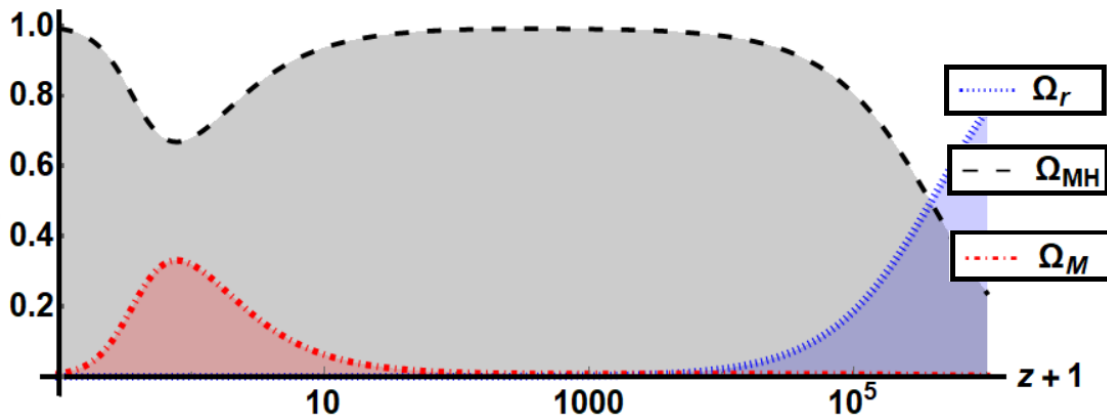


Figura 4.5. Evolución de las densidades de energía adimensionales con las condiciones iniciales: $x_1 = -0.2$, $x_2 = 0.8$, $x_3 = 0.08$, 4 y $x_4 = 2.8 \times 10^{-7}$ para un $z = 0.0001$. Para este caso, el sistema se mantiene dominado por el fluido más allá de Horndeski.

Por otro lado, tomando valores para $|x_1|$ y x_2 superiores a los presentados en la Ec.(114) el sistema pasará de una época dominada por la radiación a una co-dominada por el fluido de materia y más allá de Horndeski, donde este último tenderá a disminuir cuando se alcance el pico de dominio de materia, para luego crecer mientras el sistema entra en la primera variedad crítica. Esto se ilustra en la figura 4.6.

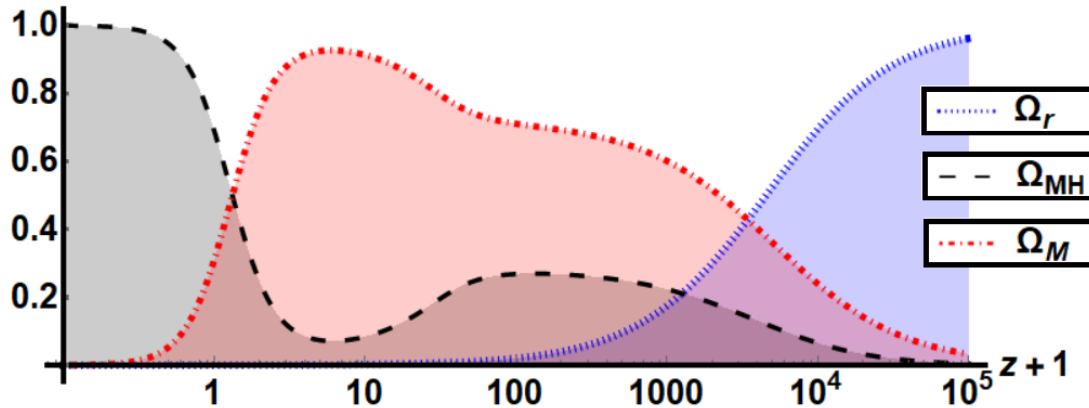


Figura 4.6. Evolución de las densidades de energía adimensionales, con las condiciones iniciales: $x_1 = -1.34, x_2 = 2, x_3 = 0.03$ y $x_4 = 2.5 \times 10^{-4}$ para un $z = 0.0001$, en donde se observa una co-dominancia entre la materia y el fluido más allá de Horndeski, antes de que el sistema entre en la época dominada por la materia.

4.3.3. Variando x_3 . Se encuentra que si el valor de x_3 es superior a 0.06 se genera una época de coexistencia entre el fluido más allá de Horndeski y materia, donde éste último es el dominante para $0.7 > x_3$. Mientras que si $x_3 > 0.7$ ocurre el efecto contrario. En cada caso el sistema entra en el futuro atractor de energía oscura. Este comportamiento queda evidenciado en la figura 4.7.

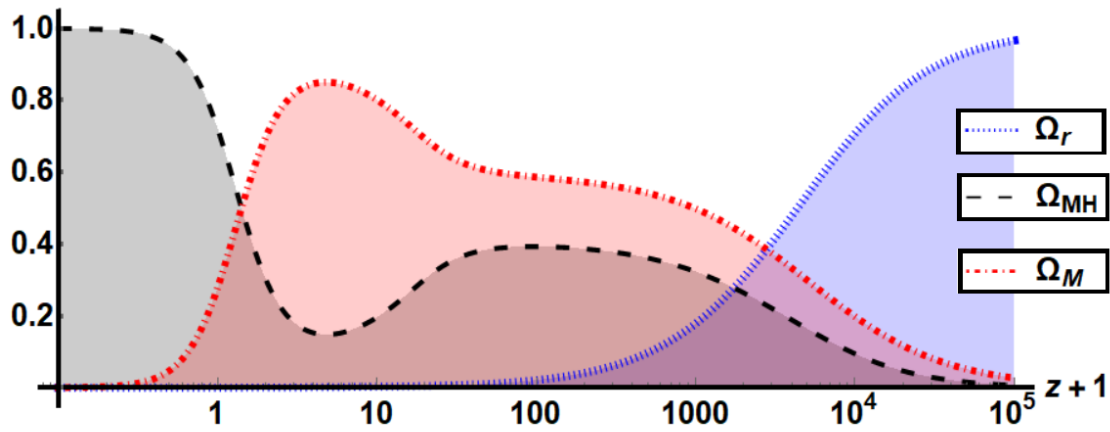


Figura 4.7. Evolución de las densidades de energía adimensionales, con las condiciones iniciales: $x_1 = -1.35, x_2 = 1.99, x_3 = 0.057$ y $x_4 = 1 \times 10^{-3}$ para un $z = 0.0001$, en donde se observa una co-dominancia entre la materia y el fluido más allá de Horndeski, antes de que el sistema entre en la época dominada por la energía oscura.

4.3.4. Parámetro de estado asociado al fluido más allá de Horndeski. Se observa una relación directa entre w_{MH} y la evolución de las variables adimensionales. Se encuentra que si existe un periodo de tiempo donde se cumpla $x_3 \gg x_1, x_2, x_4$, el parámetro de estado del fluido asociado al Lagrangiano más allá de Horndeski experimenta brevemente un periodo en el que tiende a 0.25, como se puede ver en la figura 4.8.

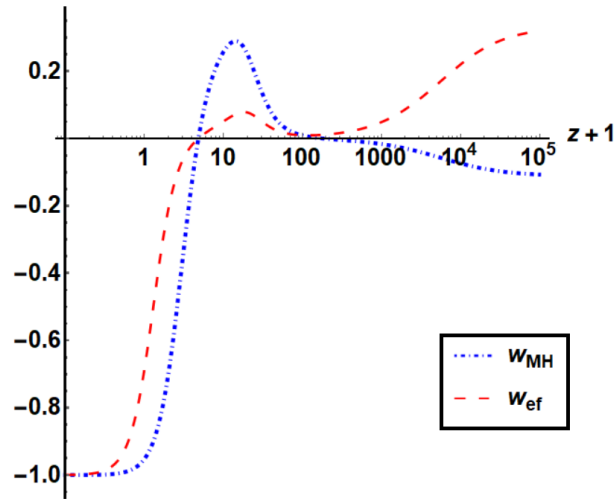


Figura 4.8. Evolución del parámetro de estado efectivo y más allá de Horndeski con las condiciones iniciales: $x_1 = -1.35, x_2 = 1.99, x_3 = 0.057$ y $x_4 = 1 \times 10^{-3}$ para un $z = 0.0001$, en donde el parámetro de estado más allá de Horndeski experimenta una fase en donde es mayor que cero, durante la época dominada por la materia.

Para explicar este comportamiento se debe remplazar la condición para x_3 discutida anteriormente, en la Ec.(87) (este cálculo se presenta en el anexo 5), para encontrar:

$$w_{MH} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\Omega_r. \quad (116)$$

Adicionalmente, se encuentra que si el sistema entra en una fase donde $x_3 \gg x_2, x_1$, el parámetro de estado pasará a ser menor que -1 antes de entrar en el futuro atractor de energía oscura, tal como se ilustra en la figura 4.9.

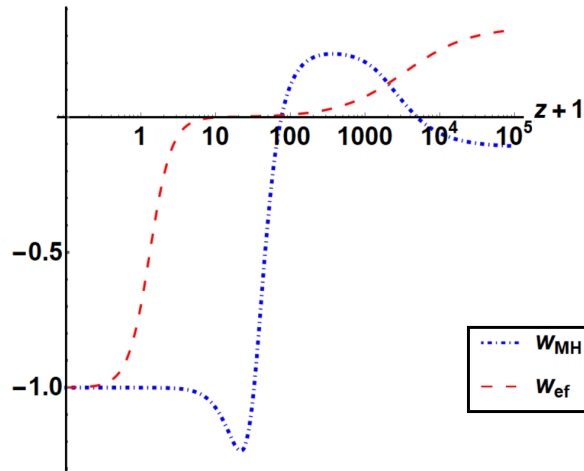


Figura 4.9. Evolución del parámetro de estado efectivo y de aquél asociado al Lagrangiano más allá de Horndeski con las condiciones iniciales: $x_1 = -1.3579, x_2 = 1.9942, x_3 = 0.05706$ y $x_4 = 2.4025 \times 10^{-7}$ para un $z = 0.0001$. Se aprecia que el parámetro de estado más allá de Horndeski atraviesa una fase donde es superior a cero, entre la época dominada por la radiación y la materia y una donde es inferior a -1, justo antes de entrar en el futuro atractor de energía oscura.

Para explicar este comportamiento se deben analizar las soluciones encontradas por De Felice y Tsujikawa en (16; 17), donde se estudia un sistema similar al presentado en las Ecs.(60-62), con $a_2 = 0$. En dicho sistema existe un punto crítico que cumple:

$$\dot{\phi}H = cte, \quad (117)$$

lo que quiere decir:

$$h = -\varepsilon_\phi. \quad (118)$$

De la ecuación anterior, tomando $1 \gg x_1, x_4, x_3$ y $x_2 = 0$ se obtiene la siguiente relación:

$$10x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \quad (119)$$

por lo que el parámetro de estado asociado al Lagrangiano más allá de Horndeski tiende a:

$$w_{MH} = -1 + \frac{2}{3}h. \quad (120)$$

En puntos cercanos a la tercera variedad crítica, donde h tiende a $-3/2$, w_{MH} tiende a -2 , en la medida que $x_2 \rightarrow 0$.

4.3.5. Espacio de parámetros disponible. En síntesis, las restricciones encontradas a las condiciones iniciales presentadas en la subsección 4.2 para las cuales el sistema replica adecuadamente la historia térmica del universo son:

$$-1 > x_1 > -1.35, \quad (121)$$

$$1.999 > x_2 > 1.8, \quad (122)$$

$$0.5 > x_3 > 0.3, \quad (123)$$

$$10^{-2} > x_4. \quad (124)$$

5. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se estudió una aplicación de la teoría más allá de Horndeski, replicando lo encontrado por Kase et al. en (26), en donde se estudia cómo una modificación al contenido energético del universo, en la forma de un campo escalar, puede replicar una época dominada por la energía oscura. Se tomó la acción más general que lleva a ecuaciones de campo con derivadas de orden inferior o igual a dos, desarrollada por Horndeski, particularmente las piezas \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_4 con la modificación encontrada en la Ref. (21), en donde se utiliza un Lagrangiano degenerado que lleva a la aparición de un término en esta última pieza de galileon que mantiene el orden de las derivadas del campo escalar presentes en las ecuaciones de campo, menor o igual dos y garantiza una rapidez para las ondas gravitacionales igual a la rapidez de la luz.

Se utilizó la relación presentada en Ec.(46) encontrada por (26), para garantizar que la

rapidez de las ondas gravitacionales del modelo fuese igual a 1, de manera consistente con las observaciones realizadas en 2016 por LIGO y VIRGO (1; 2), entre otros. Esto último permitió mantener la robustez y validez de la teoría de Horndeski en un mundo post GW170817.

Se trabajó con un modelo concreto, previamente estudiado para la teoría de Horndeski, presentado en las Ec.(60-62). Se dedujeron las ecuaciones de campo asociadas al sistema usando el paquete de calculo tensorial **xAct** de Mathematica, y se utilizó la herramienta de sistemas dinámicos para encontrar el comportamiento general del sistema. Se encontró que tomando condiciones iniciales que coincidan con los valores actuales para Ω_r, Ω_m y Ω_{DE} y dentro de un espacio de parámetros definido (ver la subsección 124), el sistema reproduce la historia térmica del universo, generando un periodo dominado por la energía oscura eterno. Sin embargo, debido a la coexistencia entre densidades de energía encontrada en la tercera variedad crítica, la solución que replica el modelo cosmológico estándar es altamente dependiente de las condiciones iniciales, tal y como se pudo ver en la sub sección 6.2.

De lo anterior se concluye que el modelo presentado en este trabajo de grado requiere un ajuste fino en sus condiciones iniciales para replicar la historia térmica del universo.

Trabajo futuro

La teoría más allá de Horndeski estudiada en este trabajo de grado hace parte de un conjunto de teorías degeneradas, llamadas teorías escalar-tensor degeneradas de orden superior (Degenerate Higher Order Scalar-Tensor theories-DHOST) (27), las cuales pueden ser estudiadas usando un tratamiento análogo al discutido en este documento, aplicando las habilidades en manejo de **xAct** (18) y sistemas dinámicos aprendidas a lo largo del trabajo, para encontrar bajo qué condiciones éstas son capaces de generar energía oscura y consistencia con la historia térmica del universo..

Referencias Bibliográficas

- Abbott, B. et al. (2017a). Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: Gw170817 and grb 170817a. *The Astrophysical Journal Letters*, 848(2):L13.
- Abbott, B. et al. (2017b). Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, 119(16):161101.
- Aghanim, N. et al. (2018). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters.
- Arkani-Hamed, N., Cheng, H., M. Luty, A., and Mukohyama, S. (2004). Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity. *Journal of High Energy Physics*, 0405.
- Babichev, E. and Deffayet, C. (2013). An introduction to the vainshtein mechanism. *Classical and Quantum Gravity*, 30(18):184001.
- Bahamonde, S. et al. (2018). Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity. *Physical Report.*, 775-777.
- Baker, T. et al. (2017). Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A. *Physical Review Letters.*, 119(25):251301.
- Bettoni, D., Ezquiaga, J. M., Hinterbichler, K., and Zumalacárregui, M. (2017). Speed of Gravitational Waves and the Fate of Scalar-Tensor Gravity. *Physical Review D*, D95(8):084029.
- Creminelli, P. and Vernizzi, F. (2017). Dark Energy after GW170817 and GRB170817A. *Physical Review Letters*, 119(25):251302.
- Deffayet, C., Deser, S., and Esposito-Farese, G. (2009a). Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors. *Physical Review D.*, D80:064015.
- Deffayet, C., Esposito-Farese, G., and Vikman, A. (2009b). Covariant Galileon. *Physical Review D*, D79:084003.

- Deffayet, C., Gao, X., Steer, D., and Zahariade, G. (2011). From k-essence to generalised Galileons. *Physical Review D*, D84:064039.
- Deffayet, C. and Steer, D. (2013). A formal introduction to horndeski and galileon theories and their generalizations. *Classical and Quantum Gravity*, 30(21):214006.
- Ellis, G., Maartens, R., and MacCallum, M. (2012). *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press.
- Ezquiaga, J. and Zumalacárregui, M. (2017). Dark energy after gw170817: dead ends and the road ahead. *Physical Review Letters*, 119(25):251304.
- Felice, A. D. and Tsujikawa, S. (2010). Cosmology of a covariant Galileon field. *Phys. Rev. Lett.*, 105:111301.
- Felice, A. D. and Tsujikawa, S. (2011). Generalized Galileon cosmology. *Physical Review*, D84:124029.
- Garcia, A. et al. (2019 (Ultimo Ingreso, 10 de noviembre.)). Tensor calculation tool, xact. <http://www.xact.es/>.
- García, R. et al. (2015). Introduction to the application of dynamical systems theory in the study of the dynamics of cosmological models of dark energy. *European Journal of Physics.*, 36(2):025008.
- Gleyzes, J., Langlois, D., Piazza, F., and Vernizzi, F. (2015a). Exploring gravitational theories beyond Horndeski. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 1502:018.
- Gleyzes, J., Langlois, D., Piazza, F., and Vernizzi, F. (2015b). Healthy theories beyond Horndeski. *Physical Review Letters*, 114(21):211101.
- Goldstein, A. et al. (2017). An ordinary short gamma-ray burst with extraordinary implications: Fermi-gbm detection of grb 170817a. *The Astrophysical Journal Letters*, 848(2):L14.

- Horndeski, G. (1974). Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics*, 10(6).
- Jeans, J. (1940). *An introduction to the kinetic theory of gases*. University Press Cambridge.
- José, J. and Saletan, E. (2000). *Classical dynamics: a contemporary approach*. American Journal of Physics.
- Kase, R. and Tsujikawa, S. (2018). Dark energy scenario consistent with gw170817 in theories beyond horndeski gravity. *Physical Review D*, 97(10):103501.
- Langlois, D. (2019). Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar–tensor (DHOST) theories: A review. *International Journal of Modern Physics.*, D28(05).
- Langlois, D. and Noui, K. (2016). Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 1602(02):034.
- Nicolis, A., Rattazzi, R., and Trincherini, E. (2009). Galileon as a local modification of gravity. *Physical Review D*, 79(6):064036.
- Nojiri, S. and Odintsov, S. (2007). Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 4(01):115–145.
- Ostrogradsky, M. (1850). Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Memoires de l'Academie imperiale des sciences de St. Petersburg*, 6:385–517.
- Palmese, A. et al. (2017). Evidence for Dynamically Driven Formation of the GW170817 Neutron Star Binary in NGC 4993. *Astrophysical Journal*, 849(2):L34.
- Peebles, E. and B. R. (2003). The cosmological constant and dark energy. *Reviews of modern physics*, 75(2):559.

- Perlmutter, S. et al. (1999). Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565.
- Riess, A. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3).
- Riess, A. et al. (1999). BV RI light curves for 22 type Ia supernovae. *The Astronomical Journal*, 117:707–724.
- Rodriguez, Y. and Navarro, A. (2017). Scalar and vector galileons. *Journal of Physics: Conference Series*, 831(1):012004.
- Sakstein, J. and Jain, B. (2017). Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories. *Physical Review Letters*, 119(25):251303.
- Wang, H. et al. (2017). The GW170817/GRB 170817A/AT 2017gfo Association: Some Implications for Physics and Astrophysics. *The Astrophysical Journal*, 851(1):L18.
- Weinberg, S. (1989). The cosmological constant problem. *Reviews of modern physics*, 61(1):1.
- Woodard, R. (2007). Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity. *Lecture Notes in Physics*, 720.
- Woodard, R. (2015). Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10(8):32243.

Apéndices

Apéndice A. Ecuaciones de campo

Truco de Leibniz

Para encontrar las ecuaciones de campo y se varía la acción con respecto a $g_{\mu\nu}$, se aísla $\delta g_{\mu\nu}$ y se aplica el principio de la acción estacionaria, $\delta\mathcal{S} = 0$. Para aislar las variaciones se emplea el siguiente truco, basado en la regla Leibniz, ejemplificado a continuación utilizando el siguiente Lagrangiano de juguete:

$$\mathcal{L} = \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi. \quad (125)$$

La variación de L es igual a:

$$\delta\mathcal{L} = \delta(\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi) = \delta g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi + 2\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \delta\phi, \quad (126)$$

en donde el termino $\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \delta\phi$ puede reescribirse como:

$$\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \delta\phi = \nabla_\mu [\delta\phi \nabla^\mu \phi] - \delta\phi \nabla^\mu \nabla_\mu \phi, \quad (127)$$

por lo que la variación del Lagrangiano se transforma en:

$$\delta\mathcal{L} = \delta g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi + 2(\nabla_\mu [\delta\phi \nabla^\mu \phi] - \delta\phi \nabla^\mu \nabla_\mu \phi), \quad (128)$$

y por ende, la variación de la acción corresponde a:

$$\delta\mathcal{S} = \int \delta g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi + 2(\nabla_\mu [\delta\phi \nabla^\mu \phi] - \delta\phi \nabla^\mu \nabla_\mu \phi) dx^4. \quad (129)$$

Utilizando el principio de la acción estacionaria,

$$\delta s = 0$$

se encuentra que:

$$0 = \int \delta g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi + 2(\nabla_\mu [\delta \phi \nabla^\mu \phi] - \delta \phi \nabla^\mu \nabla_\mu \phi) dx^4. \quad (130)$$

El segundo termino se transforma en una integral cerrada y dado que se está trabajando con extremos fijos su contribución es nula. Por otra parte, la única forma de que los términos restantes sean igual a cero es si se cumple:

$$0 = \delta g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi \quad 0 = \delta \phi \nabla^\mu \nabla_\mu \phi, \quad (131)$$

para todo $\delta g^{\mu\nu}$ y $\delta \phi$. Reemplazando la identidad:

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \quad (132)$$

se encontró que:

$$0 = \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi g^{\mu 0} g^{\nu 0}, \quad (133)$$

$$0 = \nabla_\nu \phi \nabla_\mu \phi g^{\mu i} g^{\nu j}, \quad (134)$$

$$0 = \nabla^\mu \nabla_\mu \phi, \quad (135)$$

donde los índices latinos toman los valores de 1, 2 y 3. Las primeras dos ecuaciones corresponden a los casos δg_{00} y δg_{ij} y son las ecuaciones de campo del sistema. La tercera expresión está asociada a la variación con respecto a ϕ y actúa como ecuación auxiliar.

Variación de \mathcal{L}_2

Variando \mathcal{L}_2 respecto a la métrica y aplicando el truco de Leibniz se obtuvo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta g^{\alpha\beta}} = & -a_1 g_{\alpha\gamma} g_{\beta\zeta} \nabla^\gamma \phi \nabla^\zeta \phi + \frac{1}{2} a_1 g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi - 2a_2 g_{\alpha\zeta} g_{\beta\eta} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi \nabla^\zeta \phi \nabla^\eta \phi \\ & + \frac{1}{2} a_2 g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi \nabla_\zeta \phi \nabla^\zeta \phi. \end{aligned} \quad (136)$$

Tomando $\alpha = 0, \beta = 0$ y $\alpha = i, \beta = i$ (donde i es un índice espacial que corre de 1 a 3) se encuentra que:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{00}} = -\frac{1}{2} a_1 \dot{\phi}^2 + \frac{3}{2} a_2 \dot{\phi}^4 \quad (137)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{ii}} = -\frac{1}{2} a_1 a(t)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} a_2 a(t)^2 \dot{\phi}^4. \quad (138)$$

Variación de \mathcal{L}_3

Variando \mathcal{L}_3 respecto a la métrica y aplicando el truco de Leibniz se obtuvo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_3}{\delta g^{\alpha\beta}} = & -3a_3 g_{\alpha\gamma} g_{\beta\zeta} \nabla^\gamma \phi \nabla^\zeta \phi \nabla_\eta \nabla^\eta \phi - \frac{3}{2} a_3 g_{\alpha\eta} g_{\beta\zeta} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi \nabla^\eta \nabla^\zeta \phi \\ & - \frac{3}{2} a_3 g_{\alpha\zeta} g_{\beta\eta} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi \nabla^\eta \nabla^\zeta \phi + \frac{3}{2} a_3 g_{\beta\zeta} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi \nabla_\alpha \nabla^\zeta \phi + \frac{3}{2} a_3 g_{\alpha\zeta} \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi \nabla_\beta \nabla^\zeta \phi \\ & + 3a_3 g_{\beta\zeta} \nabla^\gamma \phi \nabla^\zeta \phi \nabla_\alpha \nabla_\gamma \phi + 3a_3 g_{\alpha\zeta} \nabla^\gamma \phi \nabla^\zeta \phi \nabla_\beta \nabla_\gamma \phi - 3a_3 g_{\alpha\beta} \nabla^\gamma \phi \nabla^\zeta \phi \nabla_\zeta \nabla_\gamma \phi. \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = 0, \beta = 0$ y $\alpha = i, \beta = i$ se encuentra que:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_3}{\delta g^{00}} = \frac{9a_3 \dot{a}(t) \dot{\phi}^3}{a(t)}, \quad (139)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_3}{\delta g^{ii}} = -3a_3 a(t)^2 \dot{\phi}^2 \ddot{\phi}. \quad (140)$$

Variación de \mathcal{L}_4

Variando \mathcal{L}_4 con respecto a la métrica y aplicando el truco de Leibniz se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta g^{\alpha\beta}} = & -\frac{1}{2}R_{\alpha\beta}m_p^2 + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}Rm_p^2 - 4a_4\nabla_\alpha\nabla^\zeta\phi\nabla_\beta\nabla_\zeta\phi\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi - 8a_4\nabla_\alpha\nabla_\gamma\phi\nabla_\beta\nabla_\zeta\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi \\
& - 2a_4\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\zeta\phi\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi + 4a_4g_{\beta\zeta}\nabla_\alpha\nabla_\eta\nabla^\eta\phi\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi - 2a_4\nabla_\beta\nabla_\alpha\nabla_\zeta\phi\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi \\
& + 4a_4g_{\alpha\zeta}\nabla_\beta\nabla_\eta\nabla^\eta\phi\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi + a_4R_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\phi\nabla^\zeta\phi - \frac{1}{2}a_4g_{\alpha\beta}R\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\phi\nabla^\zeta\phi \\
& - 4a_4g_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\nabla_\eta\nabla^\eta\phi\nabla^\zeta\phi + 2a_4g_{\alpha\kappa}g_{\beta\eta}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi\nabla^\zeta\phi \\
& + 2a_4g_{\alpha\eta}g_{\beta\kappa}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi\nabla^\zeta\phi + 4a_4g_{\beta\zeta}\nabla_\alpha\nabla^\zeta\phi\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\eta\nabla^\eta\phi \\
& + 4a_4g_{\alpha\zeta}\nabla_\beta\nabla^\zeta\phi\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\eta\nabla^\eta\phi - 2a_4g_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla^\eta\phi + 8a_4g_{\beta\zeta}\nabla_\alpha\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla^\eta\phi \\
& + 8a_4g_{\alpha\zeta}\nabla_\beta\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla^\eta\phi - 8a_4g_{\alpha\beta}\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\nabla_\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla^\eta\phi + 2a_4g_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla^\eta\nabla_\zeta\phi \\
& - 2a_4g_{\alpha\kappa}g_{\beta\zeta}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi - 2a_4g_{\alpha\zeta}g_{\beta\kappa}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi \\
& + 2a_4g_{\alpha\zeta}g_{\beta\eta}R\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla^\eta\phi + 4a_4g_{\alpha\beta}\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla_\zeta\phi\nabla^\eta\nabla_\gamma\phi \\
& - 4a_4g_{\alpha\kappa}g_{\beta\zeta}\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla^\kappa\phi\nabla^\eta\nabla_\gamma\phi - 4a_4g_{\alpha\zeta}g_{\beta\kappa}\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla^\kappa\phi\nabla^\eta\nabla_\gamma\phi \\
& - 4a_4g_{\alpha\zeta}g_{\beta\kappa}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\eta\nabla^\kappa\phi\nabla^\eta\nabla^\zeta\phi - 4a_4g_{\alpha\gamma}g_{\beta\zeta}\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\eta\nabla^\eta\phi\nabla_\kappa\nabla^\kappa\phi \\
& - 2a_4g_{\alpha\eta}g_{\beta\zeta}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\kappa\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi - 2a_4g_{\alpha\zeta}g_{\beta\eta}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\kappa\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi \\
& + 4a_4g_{\alpha\beta}g_{\eta\kappa}\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla^\eta\nabla_\gamma\phi\nabla^\kappa\nabla_\zeta\phi + 2a_4g_{\alpha\beta}g_{\eta\kappa}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\eta\nabla^\zeta\phi\nabla^\kappa\nabla_\zeta\phi \\
& - 4a_4g_{\alpha\kappa}g_{\beta\zeta}\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla^\eta\nabla_\gamma\phi\nabla^\kappa\nabla_\eta\phi - 4a_4g_{\alpha\zeta}g_{\beta\kappa}\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla^\eta\nabla_\gamma\phi\nabla^\kappa\nabla_\eta\phi \\
& - 2a_4g_{\alpha\kappa}g_{\beta\zeta}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\eta\nabla^\zeta\phi\nabla^\kappa\nabla_\eta\phi - 2a_4g_{\alpha\zeta}g_{\beta\kappa}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\eta\nabla^\zeta\phi\nabla^\kappa\nabla_\eta\phi \\
& - 2a_4g_{\alpha\kappa}g_{\beta\eta}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\nabla^\zeta\phi\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi - 2a_4g_{\alpha\eta}g_{\beta\kappa}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\nabla^\zeta\phi\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi \\
& + 4a_4g_{\alpha\kappa}g_{\beta\eta}\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\nabla_\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi + 4a_4g_{\alpha\eta}g_{\beta\kappa}\nabla^\gamma\phi\nabla_\zeta\nabla_\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi \\
& + 4a_4g_{\alpha\gamma}g_{\beta\zeta}\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla_\kappa\nabla_\eta\phi\nabla^\kappa\nabla^\eta\phi + 2a_4g_{\alpha\beta}g_{\eta\kappa}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\zeta\phi\nabla^\kappa\nabla^\eta\nabla_\zeta\phi \\
& + 4a_4g_{\alpha\eta}g_{\beta\lambda}g_{\zeta\kappa}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\eta\nabla^\zeta\phi\nabla^\lambda\nabla^\kappa\phi + 4a_4g_{\alpha\zeta}g_{\beta\kappa}g_{\eta\lambda}\nabla_\gamma\phi\nabla^\gamma\phi\nabla^\eta\nabla^\zeta\phi\nabla^\lambda\nabla^\kappa\phi.
\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = 0, \beta = 0$ y $\alpha = i, \beta = i$ se encuentra que, a excepción del termino de Einstein-Hilbert, todos las derivadas covariantes dan paso a términos proporcionales a, $\dot{\phi}^4, \dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2, \dot{\phi}^3\ddot{\phi}$ y

$\ddot{\phi}\dot{\phi}^3$. Al sumar todos los términos apropiadamente las derivadas de orden superior a dos se desvanecen y la variación de \mathcal{L}_4 con respecto a $g^{\alpha\beta}$ da como resultado:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta g^{00}} = \frac{3m_p^2}{2} - 15H^2\dot{\phi}^2, \quad (141)$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta g^{ii}} = \frac{\dot{a}(t)^2 m_p^2}{2} + a(t)\ddot{a}(t) - a_4\dot{\phi}^3(8a(t)\dot{a}(t) + \phi(2\ddot{a}(t)\dot{a}(t) + a(t)^2)). \quad (142)$$

Al combinar estos términos con la variación de las demás piezas del Lagrangiano se obtiene las Ecs.(65) y (66).

Apéndice B. Autovalores y autovectores del sistema

■ Variedades críticas:

1. Autovectores:

$$[0, 0, -4, -3, -3]$$

Los autovectores de la primera variedad crítica no serán presentados ya que son demasiado extenso y debido a su forma, no es posible obtener información directa sobre la evolución del sistema.

2. Autovalores:

$$[-4, 2, -1, 1, 0]$$

Autovectores:

$$\left(0, -\frac{x_2+4}{x_2-1}, 0, \frac{5}{x_2-1}, 1\right), \left(-\frac{1}{x_2-1}, -\frac{x_2-2}{x_2-1}, 0, 0, 1\right), (0, -1, 1, 0, 0), \left(0, -\frac{x_2}{x_2-1}, 0, 0, 1\right),$$

$$(0, -1, 0, 0, 1).$$

3. Autovalores:

$$[0, -1, 3/2, 3, 3]$$

Autovectores:

$$(0, 0, 0, 1, 0), \left(0, 0, 0, -\frac{4x_4}{x_4+3}, 1\right), \left(0, 0, -\frac{-x_4-3}{x_4-5}, 1, 0\right), \left(-\frac{-x_4-3}{2(3x_4-5)}, 0, 0, 1, 0\right),$$

$$\left(-\frac{2(2x_4-5)}{3(3x_4-5)}, 1, 0, 0, 0\right).$$

■ **Subvariedades críticas:**

1. Autovalores:

$$[0, 0, -4, -3, -3]$$

Autovectores

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right),$$

$$\left(0, \frac{3(x_3^2-4x_3-32)}{x_3^2+4x_3-64}, \frac{64(x_3-4)}{x_3^2+4x_3-64} - 4, -\frac{40(x_3-4)}{x_3^2+4x_3-64}, 1\right), \left(0, -\frac{3(x_3+4)}{10(x_3-4)}, 0, 1, 0\right),$$

$$\left(0, -\frac{3(x_3+4)}{4x_3}, 1, 0, 0\right).$$

2. Autovalores:

$$[0, 0, -4, -3, -3]$$

Autovectores:

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right), \left(\frac{1}{6}(x_3+4), 0, -x_3, \frac{5}{6}(x_3-2), 1\right)$$

$$\left(-\frac{x_3+4}{5(x_3-2)}, 0, 0, 1, 0\right),$$

$$\left(-\frac{x_3+4}{3x_3}, 0, 1, 0, 0\right).$$

3. Autovalores:

$$[0, 0, -4, -3, -3]$$

Autovectores

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right),$$

$$\left(\frac{2(2x_4^2 - 15x_4 + 25)}{6x_4^2 - 15x_4 + 25}, \frac{15(3x_4 - 5)}{6x_4^2 - 15x_4 + 25}, 0, -\frac{10x_4^2}{6x_4^2 - 15x_4 + 25}, 1\right), \left(-\frac{2x_4 - 5}{5x_4}, 0, 0, 1, 0\right),$$

$$\left(-\frac{2(2x_4 - 5)}{3(3x_4 - 5)}, 1, 0, 0, 0\right).$$

4. Autovalores:

$$[0, 0, -4, -3, -3]-$$

Autovectores:

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right),$$

$$\left(\frac{2x_1^2}{x_1^2 + x_1 + 2}, -\frac{3(x_1^2 - x_1 - 2)}{x_1^2 + x_1 + 2}, -\frac{4(x_1 + 2)}{x_1^2 + x_1 + 2}, 0, 1\right), \left(-\frac{x_1}{x_1 + 2}, 0, 1, 0, 0\right), \left(-\frac{2x_1}{3(x_1 + 1)}, 1, 0, 0, 0\right).$$

■ Puntos críticos

1. Autovalores:

$$\left[-\frac{12}{5}, \frac{12}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right]$$

Autovectores:

$$(0, 0, -1, 1, 0), (-1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 0, 1).$$

2. Autovalores:

$$[-4, 2, -1, 1, 0]-$$

Autovectores:

$$(0, -1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0, 1).$$

3. Autovalores:

$$[-12, -6, -6, 3, 2]-$$

$$\text{Autovectores: } (-1, 0, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0, 0), (-1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, -1).$$

4. Autovalores:

$$[-4, -3, -3, 0, 0]-$$

Autovectores:

$$(0, 3, -4, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), \left(\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right).$$

5. Autovalores:

$$[-4, -3, -3, 0, 0]-$$

Autovectores:

$$(1, 0, -2, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), \left(\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right).$$

6. Autovalores:

$$[-4, -3, -3, 0, 0]$$

Autovectores:

$$(0, 0, 4, -5, 1), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (4, -9, 0, 5, 0), (1, -3, 2, 0, 0).$$

7. Autovalores:

$$[-4, -3, -3, 0, 0]$$

Autovectores:

$$\left(\frac{2}{3}, 0, 0, -\frac{5}{3}, 1\right), (0, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 0), \left(\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right)$$

8. Autovalores:

$$[-4, -3, -3, 0, 0]$$

Autovectores:

$$\left(0, \frac{3}{2}, 0, -\frac{5}{2}, 1\right), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0), \left(\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right).$$

9. Autovalores:

$$[-4, -3, -3, 0, 0]$$

Autovectores:

$$(2, -3, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), \left(\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0, 0\right).$$

Apéndice C. Encontrando $\delta\varepsilon'_\phi, \delta h'$

Definiendo:

$$a = 20(3x_1 + 2x_2) - 5x_3(3x_1 + x_2 + \Omega_r - 3) - x_4(36x_1 + 16x_2 + 3x_3 + 8\Omega_r)], \quad (143)$$

$$b = [10(3x_1 + x_2 + \Omega_r + 3)(x_1 + 2x_2) + 10x_3(6x_1 + 3x_2 + \Omega_r + 3) + 15x_3^2 + x_4(78x_1 + 32x_2 + 30x_3 + 12\Omega_r + 36) + 12x_4^2], \quad (144)$$

se encuentra que

$$\varepsilon_\phi = -\frac{a}{q_s}, \quad h = -\frac{b}{q_s}. \quad (145)$$

Las derivadas con respecto al número de e-folds de estos dos últimos parámetros son:

$$\varepsilon'_\phi = -\left[\frac{a'}{q_s} - \frac{a}{q_s^2}q'_s\right] = -\left[\frac{a'}{q_s} + \frac{\varepsilon_\phi}{q_s}q'_s\right], \quad (146)$$

$$(147)$$

$$h' = -\left[\frac{b'}{q_s} - \frac{b}{q_s^2}q'_s\right] = -\left[\frac{b'}{q_s} + \frac{h}{q_s}q'_s\right]. \quad (148)$$

Perturbando las anteriores expresiones se obtiene:

$$\delta\varepsilon'_\phi = -\left[\frac{\delta a'}{q_s} - \frac{a'}{q_s^2}\delta q_s + \frac{\delta\varepsilon_\phi}{q_s}q'_s + \frac{\varepsilon_\phi}{q_s}\delta q'_s - \frac{\varepsilon_\phi}{q_s^2}q'_s\delta q_s\right], \quad (149)$$

$$(150)$$

$$\delta h' = -\left[\frac{\delta b'}{q_s} - \frac{b'}{q_s^2}\delta q_s + \frac{\delta h}{q_s}q'_s + \frac{h}{q_s}\delta q'_s - \frac{h}{q_s^2}q'_s\delta q_s\right], \quad (151)$$

y dado que $x'_i, q'_s, \epsilon_\phi$ y h son iguales a cero en el punto crítico se obtiene:

$$\delta\epsilon'_\phi = -\frac{\delta a'}{q_s}, \quad (152)$$

$$\delta h' = -\frac{\delta b'}{q_s}. \quad (153)$$

Finalmente, Remplazando la dependencia de a y b y la relación de $\delta x'_i$ con $\delta\epsilon_\phi$ y δh se encuentra que:

$$\delta\epsilon'_\phi = -3\delta\epsilon_\phi + \frac{18(x_1 + 2)\delta\Omega_r}{4x_2^2 + 6x_2 + 3x_1(5x_2 - 6) - 36}, \quad (154)$$

$$(155)$$

$$\delta h' = -3\delta h - \frac{6(3x_1 + 4x_2 + 6)\delta\Omega}{4x_2^2 + 6x_2 + 3x_1(5x_2 - 6) - 36}. \quad (156)$$

Apéndice D. Evolución de w_{MH}

Para explicar el comportamiento anómalo del parámetro de estado más allá de Horndeski se analiza la evolución de las variables adimensionales respecto al número de e-folds, concretamente los periodos donde una de estas variables es muy grande respecto a las demás. Tomando las condiciones $1 \gg x_3, x_4, x_4, x_3 \gg x_2, |x_1|$ y aplicándolas a las Ecs.(82) y (83) se encuentra que:

$$\epsilon_\phi \simeq \frac{5x_3(\Omega_r - 3) + 8\Omega_r x_4}{4(5x_3 + 6x_4)}, \quad (157)$$

$$h \simeq -\frac{1}{2}(3 + \Omega_r). \quad (158)$$

Al remplazar las expresiones anteriormente encontradas en la Ec.(87) y tomando $x_4 \gg x_3$ o $x_3 \gg x_4$ se obtiene que el parámetro de estado en cada caso es:

$$(159)$$

$$w_{MH} = -\frac{1}{9}\Omega_r, \quad (160)$$

$$w_{MH} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\Omega_r. \quad (161)$$