

Procesos de razonamiento y demostración en el estudio de las propiedades del círculo: Una secuencia de enseñanza basada en tareas de construcción, lugares geométricos, cajas negras y simulaciones en GeoGebra

Jennifer Carol Guarín Delgado

Trabajo de grado para optar al título de *Magíster en Educación Matemática*

Director:

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Codirector:

Luis Ángel Pérez Fernández

Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2026

Agradecimientos

A Dios, por iluminar este camino y por poner en mi vida a personas maravillosas que hicieron de este proceso uno más ameno.

A mi familia, especialmente a mi madre Carmen Delgado, por el amor, el apoyo y la comprensión que día a día me ha ofrecido. Gracias a ella soy la profesional y la persona que soy hoy. Todos mis logros han sido respaldados y alentados por ella.

A mi compañero de vida, Mauricio Santos, porque en tus largos abrazos encontré la paz que necesitaba cuando en mi mente solo había caos. Por creer en mí cuando a veces yo no lo hacía, por comprenderme y escucharme en cada momento, y por el amor y las sonrisas que surgen cuando el tiempo se comparte.

A mi director y codirector, Jorge Enrique Fiallo Leal y Luis Ángel Pérez Fernández, por su guía, acompañamiento y valiosas observaciones a lo largo de este proceso, las cuales fueron fundamentales para el desarrollo y la culminación de este trabajo.

A mis compañeros y amigos de la maestría, Sergio, Luis, Álvaro, Héctor y Sebastián, porque con sus ocurrencias lograron generar una sonrisa diaria. Gracias por compartir sus anécdotas y por crear un ambiente de apoyo y colaboración.

A mis amigos, Dilan y Jaiver, por su ayuda, por los consejos y por su cariño.

Finalmente, a mí misma, por la valentía de iniciar este camino aun con miedos y dudas, y por la disciplina y perseverancia que permitieron culminar esta etapa de aprendizaje.

Tabla de contenido

Introducción.....	11
1. Antecedentes: revisión bibliográfica.....	12
1.1. Sobre la demostración y la enseñanza en Geometría Euclidiana.....	12
1.2. Sobre las tareas matemáticas suscitadas por los SGD.....	17
1.3. Sobre las formas de razonamiento:	23
2. Planteamiento del problema	25
3. Marco de referencia.....	29
3.1. El concepto de demostración en el aula.....	29
3.2. Estructura analítica de los tipos de demostración	31
3.3. Formas de razonamiento.....	34
4. Método de investigación: Experimento de enseñanza.	40
4.1. Etapas del experimento de enseñanza	41
4.1.1. Fundamentación conceptual y formulación de la conjetura	42
4.1.2. Preparación de la secuencia de enseñanza	43
4.1.3. Experimentación, análisis intercalados y ajustes de la secuencia	50
4.1.4. Análisis retrospectivos de los datos.....	51
5. Análisis de resultados.....	52
5.1. Sobre las tareas de simulación	53
5.1.1. Conjeturación en simulaciones mediante el uso libre de las herramientas de GeoGebra. ..	54
5.1.2. Conjeturación en simulaciones mediante la restricción del uso de las herramientas de GeoGebra. 57	
5.1.3. Demostración de las relaciones geométricas conjeturadas.	62
5.1.4. Algunas reflexiones sobre este tipo de tareas.....	74
5.2. Sobre las tareas de construcción	77
5.2.1. Ensayo y error controlado en el proceso de construcción	77
5.2.2. Exploración para el descubrimiento de relaciones en el proceso de construcción.....	82
5.2.3. Heurística de análisis en el proceso de construcción.....	86
5.2.4. Uso de reglas teóricas en el proceso de construcción.....	91
5.2.5. Protocolo de construcción conocido.....	94

5.2.6. Algunas reflexiones sobre este tipo de tareas.....	97
5.3. Sobre las tareas de cajas negras	99
5.3.1. Cajas negras estilo Sangaku.....	99
5.3.2. Caja negra dinámica	111
5.3.3. Algunas reflexiones sobre este tipo de tareas	117
5.4. Sobre las tareas de lugares geométricos.	119
5.4.1. Determinación de la figura correspondiente al lugar geométrico	119
5.4.2. Construcción de la figura que representa el lugar geométrico.....	121
5.4.3. Demostración de la conjetura sobre el lugar geométrico.....	124
5.4.4. Algunas reflexiones sobre este tipo de tareas.....	146
6. Conclusiones.....	148
Referencias bibliográficas	156
Apéndices	164

Lista de Figuras

Figura 1 Modelo de Toulmin adaptado en Pedemonte (2005)	35
Figura 2 Esquema para el razonamiento deductivo	36
Figura 3 Esquema para el razonamiento abductivo	37
Figura 4 Esquema para el razonamiento abductivo creativo	37
Figura 5 Esquema para el razonamiento inductivo por generalización de resultados	38
Figura 6 Esquema razonamiento inductivo por generalización de procesos.....	39
Figura 7 Tomado de Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. recursos para la captura de información y análisis (p. 89), por Camargo, 2021, Editorial Universidad de Antioquia.	41
Figura 8 Esquema de dependencia de reglas teóricas	45
Figura 9 Applet de la tarea T.1.2.....	55
Figura 10 Razonamiento inductivo de la congruencia de cuerdas.....	56
Figura 11 Razonamiento inductivo sobre el teorema de las cuerdas congruentes.....	57
Figura 12 Applet de la tarea T.6.1	58
Figura 13 Razonamiento deductivo sobre ángulos inscritos y centrales.....	59
Figura 14 Razonamiento deductivo sobre un ángulo exterior	59
Figura 15 Razonamiento inductivo sobre ángulos entre cuerdas	62
Figura 16 Razonamiento abductivo OHG isósceles	63
Figura 17 Razonamiento abductivo HOF y GOE congruentes	65
Figura 18 Razonamiento deductivo basado en la posición de la figura.....	66
Figura 19 Razonamiento deductivo basado en características observadas	66
Figura 20 Razonamientos deductivos que sustentan la demostración del teorema de las cuerdas congruentes.....	69
Figura 21 Applet de la tarea T.4.2.....	69
Figura 22 Razonamiento abductivo creativo del Teorema del ángulo inscrito	70
Figura 23 Imagen de referencia de las construcciones auxiliares.....	72
Figura 24 Razonamiento abductivo de Juan y Luis	73
Figura 25 Applet de la tarea T.1.3.....	76
Figura 26 Casos para la demostración en la tarea T.4.2.....	77
Figura 27 Razonamiento abductivo para el centro del círculo	80
Figura 28 Razonamiento deductivo en la demostración de la construcción del incírculo	82
Figura 29 Relación del ángulo con la posición del centro del círculo	85
Figura 30 Razonamiento inductivo de la relación del ángulo inscrito con el centro del círculo ..	85
Figura 31 Razonamiento inductivo sobre el proceso de construcción de los puntos H.....	86
Figura 32 Razonamiento deductivo en la construcción del circuncírculo	88
Figura 33 Razonamiento inductivo sobre la construcción de las tangentes	90
Figura 34 Razonamiento deductivo en la demostración de la construcción de las tangentes	91
Figura 35 Razonamiento deductivo para garantizar equidistancia de puntos	92
Figura 36 Razonamiento abductivo para demostrar el centro del circuncírculo	96
Figura 37 Permiso de inferir y datos del razonamiento abductivo del centro del circuncírculo ..	96
Figura 38 Sangaku de la tarea T.2.4.....	100
Figura 39 Razonamiento deductivo para construir un triángulo isósceles.....	101
Figura 40 Razonamiento deductivo para construir el incírculo del Sangaku.....	102
Figura 41 Razonamiento inductivo del segmento paralelo	104

Figura 42 Supuesto del centro del círculo de radio intermedio	104
Figura 43 Razonamiento inductivo en la construcción del centro del círculo de radio intermedio	105
Figura 44 Sangaku de la tarea T.3.3.....	106
Figura 45 Razonamiento deductivo en la construcción de la tangente en el Sangaku	107
Figura 46 Razonamiento inductivo para validar la perpendicularidad de dos segmentos tangentes	108
Figura 47 Razonamiento inductivo para encontrar el centro del círculo del Sangaku	110
Figura 48 Caja negra dinámica	111
Figura 49 Respuesta de Andrés y José sobre la dependencia de objetos	111
Figura 50 Razonamiento inductivo de Andrés y José sobre la dependencia de los objetos.....	112
Figura 51 Razonamiento deductivo para construir el círculo tangente a una recta	113
Figura 52 Razonamiento deductivo para determinar propiedades de la caja negra.....	114
Figura 53 Representación de Andrés sobre la tangente y la secante al círculo	115
Figura 54 Razonamiento deductivo en la construcción de la media geométrica.....	115
Figura 55 Demostración de la construcción de la caja negra dinámica.....	116
Figura 56 Razonamiento inductivo para conjeturar el LG de la tarea T.1.5	120
Figura 57 Identificación errónea del lugar geométrico	120
Figura 58 Lugar geométrico de la tarea T.4.5.....	122
Figura 59 Razonamiento deductivo sobre la medida del ángulo central correspondiente al inscrito ADB	123
Figura 60 Razonamiento deductivo para la construcción del lugar geométrico.....	124
Figura 61 Lugar geométrico de la tarea T.1.5.....	126
Figura 62 Demostración del lugar geométrico de la tarea T.1.5.....	126
Figura 63 Demostración del lugar geométrico de la tarea T.4.5.....	127
Figura 64 Razonamiento inductivo en demostración de lugares geométricos a través del rastro	127
Figura 65 Razonamiento inductivo al relacionar las cuerdas del círculo y del lugar geométrico	129
Figura 66 Lugar geométrico de las cuerdas con un extremo fijo T.1.5.....	130
Figura 67 Razonamiento abductivo tarea T.1.5	132
Figura 68 Razonamiento deductivo para completar el razonamiento abductivo de la tarea T.1.5	133
Figura 69 Lugar geométrico de la tarea T.4.5.....	133
Figura 70 Razonamiento abductivo de la tarea T.4.5.....	135
Figura 71 Razonamiento abductivo equivalente al de la Figura 70.....	135
Figura 72 Razonamiento abductivo, ángulos suplementarios constantes	136
Figura 73 Razonamiento deductivo en la tarea T.4.5.....	137
Figura 74 Lugar geométrico de la tarea T.5.2.....	138
Figura 75 Razonamiento abductivo de la tarea T.5.2.....	139
Figura 76 Construcciones realizadas sobre el rombo ABDC	140
Figura 77 Lugar geométrico de la tarea T.6.3.....	141
Figura 78 Razonamiento abductivo en la tarea T.6.3.....	143
Figura 79 Construcciones sobre la tarea T.6.3.....	145
Figura 80 Razonamiento deductivo en la tarea T.6.3.....	145
Figura 81 Tarea T.4.3	145

Lista de tablas

Tabla 1 Razonamientos y demostraciones en el desarrollo de la tarea153

Lista de Apéndices

Apéndice A: Reglas teóricas relacionadas con círculos..... 164

Resumen

Título: Procesos de razonamiento y demostración en el estudio de las propiedades del círculo: Una secuencia de enseñanza basada en tareas de construcción, lugares geométricos, cajas negras y simulaciones en GeoGebra.*

Autor: Jennifer Carol Guarín Delgado **

Palabras Clave: Demostración, razonamiento, tareas, GeoGebra, dinamismo.

Descripción:

El presente trabajo presenta una secuencia de enseñanza relacionada con las propiedades del círculo y, adicionalmente, reflexiona sobre los procesos de demostración y razonamiento que desarrollan los estudiantes al resolver tareas dinámicas. Lo anterior se sustenta en que el uso del Software de Geometría Dinámica (SGD) favorece la articulación entre la percepción y la teoría, permitiendo a los estudiantes generar diferentes tipos de demostraciones (Olivero et al., 2003; MEN, 2004; Marrades y Gutiérrez, 2000; Laborde, 2001). En este sentido, Nirode (2012), Joubert (2017) y Komatsu y Jones (2019) subrayan la importancia de diseñar tareas en el SGD que aprovechen las capacidades del entorno, fomenten la actividad estudiantil deseada y provoquen la exploración, experimentación, conjeturación y demostración.

Estas tareas generan una interacción entre distintas formas de razonamiento, la cual suele ser compleja al transitar de demostraciones empíricas a demostraciones teóricas (Meyer, 2004; Arzarello et al., 2012). El MEN (2004) y Galindo (1998) destacan las tareas de simulación, construcción, lugares geométricos y cajas negras como estrategias para promover diversos tipos de demostraciones. Sin embargo, Prieto y Gutiérrez (2024) concluyen que las investigaciones han privilegiado las tareas de construcción, lo que deja abiertos interrogantes sobre las demostraciones y los razonamientos que emergen al integrar otros tipos de tareas en la enseñanza de contenidos geométricos. Por tanto, el objetivo de esta investigación es aportar información sobre las formas de razonamiento y los tipos de demostración que surgen en los estudiantes al estudiar las propiedades del círculo mediante tareas de construcción, lugares geométricos, cajas negras y simulación.

* Trabajo de grado

** Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal, Doctor en Didáctica de las Matemáticas. Codirector: Luis Ángel Pérez Fernández, Magister en Educación Matemática.

Abstract

Title: Reasoning and Proof Processes in the Study of the Properties of the Circle: A Teaching Sequence Based on Construction Tasks, Loci, Black-Box Tasks, and Simulations in GeoGebra

Author: Jennifer Carol Guarín Delgado

Key words: Proof, reasoning, tasks, GeoGebra, dynamism.

Description:

This paper presents a teaching sequence related to the properties of the circle and additionally reflects on the proof and reasoning processes developed by students when solving dynamic tasks. This approach is grounded in the idea that the use of Dynamic Geometry Software (DGS) fosters the articulation between perception and theory, enabling students to generate different types of proofs (Olivero et al., 2003; MEN, 2004; Marrades & Gutiérrez, 2000; Laborde, 2001). In this regard, Nirode (2012), Joubert (2017), and Komatsu and Jones (2019) emphasize the importance of designing DGS-based tasks that take advantage of the affordances of the environment, promote the desired student activity, and provoke exploration, experimentation, conjecturing, and proving.

These tasks generate interactions among different forms of reasoning, which are often complex when transitioning from empirical proofs to theoretical proofs (Meyer, 2004; Arzarello et al., 2012). MEN (2004) and Galindo (1998) highlight simulation, construction, locus, and black-box tasks as strategies to promote diverse types of proofs. However, Prieto and Gutiérrez (2024) conclude that existing research has privileged construction tasks, leaving open questions regarding the proofs and reasoning that emerge when other types of tasks are integrated into the teaching of geometric content. Therefore, the aim of this study is to contribute evidence on the forms of reasoning and types of proof that arise among students when studying the properties of the circle through construction, locus, black-box, and simulation tasks.

* Bachelor Thesis

** Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal, Doctor en Didáctica de las Matemáticas. Codirector: Luis Ángel Pérez Fernández, Magister en Educación Matemática.

Introducción

La investigación sobre la demostración ha sido un tema ampliamente trabajado desde diferentes enfoques en la educación matemática. Stylianides y Stylianides (2017) comentan que uno de los resultados sólidos sobre este tema es que los alumnos inicialmente consideran un ejemplo como una demostración, esto debido a que, se convencen a sí mismos sobre la verdad de una aseveración matemática por medio de uno o varios ejemplos que cumplen con la propiedad a demostrar. Sobre ello, Marrades y Gutiérrez (2000) exhiben una necesidad por identificar los tipos de argumentos que convencen y persuaden a los estudiantes sobre la veracidad de una afirmación matemática para ir transitando entre ellas hacia una demostración formal, para ello, mencionan que las tareas que se proponen en entornos dinámicos pueden ayudar a producir diferentes tipos de argumentos.

Samper y Molina (2013), Marrades y Gutiérrez (2000) y el MEN (2004) indican que el uso del Software de Geometría Dinámica (SGD) acompañado de tareas adecuadas que permitan la exploración y la experimentación pueden ayudar a los estudiantes a realizar diferentes tipos de demostraciones. Además, según Arzarello et al. (2012) y Meyer (2023), en toda actividad matemática se ven involucrados tres tipos de razonamientos, el inductivo, el deductivo y el abductivo, los cuales interactúan en los procesos de exploración y de experimentación para lograr el objetivo de la tarea.

Sobre las tareas que son suscitadas por el SGD, el MEN (2004) propone algunas como, tareas de *construcción*, *lugares geométricos*, *simulación* y de *cajas negras*. Komatsu y Jones (2019) exhiben que, aunque en la literatura se indique que el uso del SGD genera un mundo de posibilidades para generar la práctica demostrativa, hay pocos estudios sobre el diseño de tareas en entornos dinámicos.

Con todo lo anterior, esta investigación se interesó por analizar los tipos de demostración y las formas de razonamiento que surgieron de los estudiantes de primer ingreso de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS) al desarrollar tareas de construcción, simulación, lugares geométricos y cajas negras planteadas en una secuencia de enseñanza diseñada en el aula virtual de GeoGebra.

La memoria de esta investigación está estructurada de la siguiente manera: en el primer capítulo se exponen algunos antecedentes que profundizan sobre la demostración, los SGD en la enseñanza de la Geometría Euclidiana, las tareas suscitadas por el SGD y sobre las formas de razonamiento. En el segundo capítulo se presenta el problema de investigación y los objetivos planteados. En el tercer capítulo se presenta el marco teórico compuesto por la tipología de demostraciones de Marrades y Gutiérrez (2000) y por las formas de razonamiento relacionadas con los tipos de argumentación mencionados por Pedemonte (2005). En el cuarto capítulo se plantea el experimento de enseñanza como método de investigación. En el quinto capítulo se exponen los análisis de la información y los resultados. Finalmente, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones del trabajo

1. Antecedentes: revisión bibliográfica

1.1. Sobre la demostración y la enseñanza en Geometría Euclidiana

Acosta y Fiallo (2017) expresan la existencia y la tensión de dos polos en la Geometría Euclidiana; siendo estos, la percepción-intuición y la teoría-deducción. Los autores indican que, aunque existen diferencias marcadas entre ambos extremos, se reconoce la dependencia y la complementariedad de ellos. Bajo estas ideas, definen dos objetivos generales sobre la enseñanza de la Geometría; el primero, introducir a los alumnos al mundo de la teoría partiendo del mundo

de la percepción, y el segundo, lograr un equilibrio entre los polos de tal forma que uno no predomine sobre el otro.

Al respecto, Torregrosa y Quesada (2007) y el MEN (2004) mencionan que los aspectos teóricos deben estar anclados a lo perceptivo para que adquiera un sentido, y a su vez, que las habilidades visuales estén guiadas por la teoría para mayor precisión; los autores describen esta articulación como una puerta de entrada al pensamiento deductivo. Para ello, los Softwares de Geometría Dinámica (SGD) poseen un rol importante, ya que permiten manipular las representaciones de los objetos geométricos, de tal forma que se convierten en objetos perceptibles por los estudiantes; no obstante, estos también son objetos teóricos debido a que los SGD están fundamentados en leyes teóricas de la Geometría Euclidiana. Esta dualidad que emerge del SGD permite generar relaciones entre los dos polos descritos anteriormente mediante la actividad de experimentación, la cual incluye enunciar conjeturas y verificarlas experimentalmente, para luego ser validadas y transformadas a leyes teóricas (Acosta y Fiallo, 2017; MEN, 2004).

Acosta y Fiallo (2017) mencionan que al trabajar en el SGD se presencian propiedades que no son construidas directamente por alguna herramienta del software, sino que son generadas como un encadenamiento lógico de las construcciones anteriormente realizadas; la necesidad de justificar por qué se presenta dicha propiedad abre camino al proceso de demostración, considerándolo, de manera amplia, como “el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática” (Fiallo, 2011, p.85).

En ese sentido, es importante identificar los tipos de argumentos que logran persuadir y convencer a los estudiantes sobre la veracidad de una afirmación matemática (Marrades y

Gutiérrez, 2000). Sobre esto, inicialmente, las demostraciones de los estudiantes suelen ser de carácter empírico; como lo comentan Stylianides y Stylianides (2017), los alumnos se convencen a sí mismos sobre la verdad de una aseveración matemática por medio de uno o varios ejemplos que cumplen con la propiedad a demostrar.

Marrades y Gutiérrez (2000) describen las tipologías de diferentes autores, como Balacheff (1988), Bell (1976), Harel y Sowder (1996), sobre las justificaciones que realizan los estudiantes en problemas de demostración; cabe señalar que los autores definen la justificación como “cualquier razón dada para convencer a la gente (por ejemplo, profesores y otros estudiantes) de la verdad de un enunciado” (p.89). Bell (1976) identifica dos categorías; las *justificaciones empíricas*, basadas en ejemplos como forma de convencimiento y las *justificaciones deductivas*, en las que se conectan los datos con las conclusiones de manera deductiva. Así mismo, Balacheff (1988) reconoce dos categorías, *justificaciones pragmáticas y conceptuales*. La primera, caracterizada por los ejemplos y las acciones realizadas sobre estos y la segunda, determinada por la formulación de propiedades y de relaciones entre ellas. Por otra parte, Harel y Sowder (1996) mencionan tres categorías. Las justificaciones que son basadas en una autoridad ajena al estudiante, como en libros o en el profesor, se denominan *externas*. Aquellas que tienen fundamento en los ejemplos o en los dibujos las llaman *empíricas*. Y las justificaciones *analíticas o teóricas* son las que se basan en “argumentos genéricos u operaciones mentales que dan lugar, o pueden dar lugar, a demostraciones matemáticas formales” (Marrades y Gutiérrez, 2000, p.90).

Acosta y Fiallo (2017) resaltan el papel del profesor para mostrarle a los estudiantes la debilidad de las demostraciones empíricas, ya sea con contraejemplos o realizando preguntas que lleven al estudiante a reflexionar sobre el uso de las reglas teóricas. Además, Marrades y Gutiérrez (2000) indican que una planificación adecuada de las actividades que se proponen en clase, en un

entorno de geometría dinámica, puede ayudar a los estudiantes a producir diferentes justificaciones; esto lo corroboran al planificar e implementar una unidad didáctica de treinta actividades, las cuales, en su mayoría, estaban estructuradas por tres fases, una fase de exploración en el SGD, seguidamente de la fase de conjeturación y la de justificación.

En concordancia con Marrades y Gutiérrez (2000), Samper y Molina (2013) consideran que el uso del SGD debe estar acompañado de tareas adecuadas de exploración y de experimentación que permitan la indagación y la búsqueda de ideas para la justificación que permitan realizar demostraciones. Estas ideas son fundamentales para lo que Samper y Molina (2013) denominan *actividad demostrativa* como eje central del curso de Geometría Euclidiana en la universidad.

La actividad demostrativa, según Samper y Molina (2013), consta de los procesos de *conjeturar* y de *justificar*; el primer proceso consiste en identificar y verificar invariantes para formular una conjetura, como enunciado condicional, para finalmente corroborarla, es decir, determinar que los elementos del antecedente son los necesarios y los suficientes para garantizar el consecuente; el segundo proceso tiene que ver con la producción de una argumentación de tipo deductivo que valide la conjetura realizada según un sistema de conocimiento. Entre los procesos de conjeturar y de justificar se encuentran los procesos de visualización, que permiten encontrar información geométrica de una figura, y de exploración, que, realizada en el mundo teórico o perceptivo, permite encontrar regularidades y relaciones geométricas. Con la descripción anterior, Samper y Molina mencionan que “el objetivo de la actividad demostrativa es producir un teorema matemático entendido como un sistema conformado por un enunciado, su demostración y la teoría que la guía y enmarca”, (2013, p. 22).

Bajo estos elementos fundamentales, en los cuales se observa la coordinación de los polos mencionados por el MEN (2004) y por Acosta y Fiallo (2017), se podrían rebatir algunas ideas que los estudiantes suelen tener sobre la práctica demostrativa. Por ejemplo, ellos la consideran como una actividad ritual en la que utilizan una forma de comunicación incomprensible, una actividad en la que se realizan acciones rebuscadas que solo un experto podría pensarlas y realizarlas, una actividad en la cual se verifican enunciados que en ocasiones ni se entienden y como una actividad no necesaria dentro del aprendizaje de las matemáticas, la cual se puede eliminar y no habría repercusiones (Samper y Molina, 2013). Es decir, bajo el enfoque de la actividad demostrativa las creencias negativas que los estudiantes tienen sobre la demostración pueden cambiar al punto de considerar la demostración como un proceso necesario y útil.

Las concepciones de Samper y Molina (2013) se encuentran implícitamente en los trabajos de Iglesias y Ortiz (2019); Ojeda, Saldivia y Maglione (2017) y Larez (2014). Estos estudios proponen problemas en el SGD siguiendo la concepción de *actividad demostrativa*, es decir, los problemas van enfocados en el proceso de conjeturar y de justificar. Aunque cada investigación se enfoca en aspectos diferentes, los autores concuerdan en que por medio de la exploración con el software el estudiante se convence de las realidades a demostrar y puede descubrir propiedades que le ayudan a construir la demostración.

Las ideas mencionadas anteriormente, en pocas palabras, exhiben la existencia de dos polos en la enseñanza de la Geometría Euclidiana, la percepción y la teoría; no obstante, el uso adecuado del SGD puede generar relaciones entre dichos polos, pues el medio dinámico trabaja con representaciones de los objetos matemáticos y está basado en reglas teóricas. Adicionalmente, al construir objetos, en el SGD, se pueden presentar propiedades que no se construyeron directamente, por lo que podría dar cabida a la demostración. No obstante, como se ha mencionado,

los estudiantes suelen convencerse de la veracidad de un hecho de manera empírica, por lo que algunos autores mencionan la necesidad de identificar las razones que convencen a los estudiantes sobre una afirmación matemática, es decir, los tipos de demostración. Dicha necesidad es una idea fundamental para esta investigación. Finalmente, se menciona que el profesor tiene un rol muy importante en el tránsito de demostraciones empíricas a deductivas y en la selección de tareas, propiciadas por el SGD, que permitan la exploración, experimentación, conjeturación y demostración.

1.2. Sobre las tareas matemáticas suscitadas por los SGD

Una de las labores que debe realizar el profesor al momento de planear las clases es seleccionar las tareas que va a proponerle a los estudiantes. Zakaryan (2013), Lupiáñez (2009) y Gómez (2007) entienden por tarea a aquella demanda que el profesor plantea, la cual activa los conocimientos matemáticos de los estudiantes y conlleva a realizar una cierta actividad matemática. Las actividades están compuestas por acciones, tales como construir o manipular objetos mentales, físicos o simbólicos, para la consecución de la tarea.

Zakaryan (2013) y Lupiáñez (2009) identifican a la tarea como el principal vehículo que suministra oportunidades de aprendizaje a los estudiantes, esto debido a que cada tarea, dependiendo de la demanda cognitiva, puede generar diversos tipos de actividades, las cuales, dependiendo de la experiencia del estudiante, pueden producir distintos aprendizajes. Por tanto, el profesor, al tener un propósito de aprendizaje, selecciona la tarea y predice las posibles actividades y acciones que realizará el estudiante y definirá si concuerdan con el propósito planteado. De esta forma el profesor decidirá si dicha tarea será planteada a los alumnos o si debe cambiarla.

Anteriormente se ha indicado la importancia de utilizar los SGD para articular y coordinar los procesos de conjeturación y de justificación por medio de la exploración y de la experimentación (Samper y Molina, 2013); mostrando la dependencia y la relación que existe entre los extremos *percepción-intuición* y *teoría-deducción*. Sobre ello, Laborde et al. (2006), Olivero et al. (2003), Nirode (2012) y Joubert (2017) enfatizan en que la elección de las tareas relacionadas con el entorno de geometría dinámica puede ser crucial para el desarrollo de la comprensión de los objetos geométricos por parte de los estudiantes, dado que las herramientas que tiene el SGD a disposición de los alumnos, más las situaciones problemáticas que se les presentan, pueden convertirse en un buen medio para el surgimiento de nuevos conocimientos. Laborde (2001) realiza una categorización de las tareas que los profesores suelen proponer a los alumnos en un entorno de geometría dinámica, de esta forma, menciona que existen tareas en las que el entorno facilita las acciones materiales pero no cambia la tarea de los alumnos; tareas en las que el entorno facilita la exploración y el análisis de los estudiantes; tareas que se pueden realizar con papel y lápiz pero que se resuelven de manera diferente en el SGD y tareas que no se pueden plantear sin la mediación del SGD.

Por otra parte, el MEN (2004) menciona el potencial del SGD, ya que, al tener la opción del arrastre, se pueden manipular representaciones geométricas para identificar propiedades que se mantienen invariantes, y al contar con la opción de la traza, se pueden llegar a concluir hechos geométricos. Las tareas mediadas por el SGD, que permiten conjeturar y justificar, propuestas por el MEN (2004), son las de construcción, lugares geométricos, cajas negras y de simulación, que relacionándolas con la categorización de Laborde (2001) se encontrarían en las tres últimas categorías. Galindo (1998) considera tres de estas tareas como fuente para la justificación y para la creación de conexiones entre las construcciones hechas en el computador y los objetos

geométricos ideales. Se ahondará a continuación sobre cada una de las tareas propuestas por el MEN (2004).

Tareas de construcción: El MEN (2004) menciona que estas tareas ayudan a superar los límites perceptivos de los estudiantes, en el sentido de que las figuras geométricas ya no se deben considerar como formas generales, sino que se deben reconocer como figuras conformadas por objetos más básicos con relaciones geométricas entre ellos. Por tanto, una construcción en el SGD se puede considerar como un dibujo técnico en el que, al asegurar propiedades, se logra una generalización y se garantiza la reproductibilidad del dibujo. El arrastre que permite el software es el que ayuda a validar las acciones realizadas, pues un proceso de construcción a “ojo”, en el cual prima la percepción visual, no soportará la prueba del arrastre, es decir, al mover algún elemento de la base dejará de satisfacer las condiciones necesarias. Por consiguiente, para realizar una construcción en el SGD es necesario garantizar relaciones geométricas entre elementos constitutivos de la figura.

Acosta (2008) indica que los enunciados de las tareas de construcción deben contener tres elementos; *datos*, que son los objetos o las relaciones dadas para iniciar la construcción; *metas*, que son los objetos o las relaciones que se deben construir y *herramientas* que pueden o deben utilizar los estudiantes en la construcción. El MEN (2004) menciona que se pueden proponer tareas de construcción cuya meta sea la misma pero los datos iniciales sean diferentes, lo cual desencadena construcciones distintas, puesto que se deben usar otras propiedades y relaciones geométricas.

Laborde, et al. (2006) reportan que los estudiantes al iniciar con tareas de construcción tienen dificultades para superar la prueba del arrastre, puesto que, para ellos, las figuras construidas en el SGD y la teoría geométrica son mundos separados, lo que Galindo (1998) menciona como

falta de conexiones. Galindo (1998) establece que no solo basta con que los estudiantes construyan las figuras deseadas, sino que, se les debe proponer que escriban la explicación sobre cómo crearon la construcción, por qué se realizó de esa forma y que pasó al momento de arrastrar los objetos iniciales, esto con el objetivo de analizar las conexiones que realizan los alumnos.

Tareas de lugares geométricos: Acosta (2008) define un lugar geométrico como la trayectoria de un punto A que depende de un punto B, cuando este punto B se mueve a través de un objeto. Hurani y Dal maso (2016) realizan una observación sobre la dificultad que conlleva imaginarse los lugares geométricos que se generan por el movimiento de una configuración en un ambiente de lápiz y papel, no obstante, el uso de los SGD, por medio de la opción “traza”, facilita el proceso, ya que al activar la traza del punto dependiente, se va produciendo en la pantalla una marca de su posición a medida que se realiza el movimiento de la configuración, de tal forma, el estudiante observa el comportamiento y puede realizar conjeturas sobre el lugar geométrico que se genera, describiéndolo por medio de propiedades geométricas. Por tanto, las tareas de lugares geométricos ofrecen espacios propicios para el planteamiento de conjeturas y el desarrollo de los procesos de visualizar, reconocer y argumentar (MEN, 2004 y Hurani y Dal maso, 2016).

De Villiers (1993) destaca que la principal función que se le suele otorgar a la demostración es la de verificación. Galindo (1998) indaga sobre esta función de la demostración al plantear una tarea de lugar geométrico y preguntarle a los estudiantes sobre cómo se convencen de que se forma dicho lugar geométrico. Los argumentos de los estudiantes son variados: algunos estudiantes se convencen simplemente observando la traza; otros construyen el lugar geométrico y corroboran que los puntos se encuentran allí a medida que se mueve la configuración; algunos construyen elementos auxiliares que les permiten identificar visualmente una propiedad invariante la cual

utilizan para convencerse a sí mismo y a los demás del lugar geométrico formado y otros pocos utilizan la construcción para organizar su justificación utilizando reglas teóricas.

Por otro lado, Dal maso (2023) reconoce que los estudiantes logran describir los lugares geométricos utilizando el SGD; sin embargo, al observar la traza el estudiante se convence así mismo sin algún tipo de actividad demostrativa y por tanto no sienten la necesidad de realizar la demostración para verificar la veracidad del resultado. Por ello, Dal maso (2023) propone que al realizar tareas como las de lugares geométricos la función de la demostración debe trasladarse a otra distinta de la verificación, especialmente, menciona la función de explicación y de descubrimiento.

Tareas de cajas negras: En los documentos del MEN (2004), Salinas y Sánchez (2007), Galindo (1998), Triana (2013) y de Dahan (2005) indican que las tareas de cajas negras consisten en pedirle a los estudiantes que repliquen una construcción dada en el SGD, en la cual se han ocultado diferentes objetos y de la que se desconoce el protocolo de construcción. Algunos SGD tienen la facilidad de crear “Macros”, es decir, de generar una nueva herramienta en la cual se guarda una construcción realizada previamente, de esta manera, al usar la Macro, se puede replicar la construcción partiendo de los objetos iniciales correspondientes. Con la opción de la Macro se pueden modificar las tareas de cajas negras, es decir, el estudiante usará la Macro y observará que esta genera una construcción determinada, el estudiante desconoce el proceso de fabricación de la herramienta, por lo que se le pedirá al estudiante que realice una Macro que genere lo mismo que la dada.

Salinas y Sánchez (2007) y Galindo (1998) mencionan que estas tareas exigen que el estudiante explore la construcción dada mediante el arrastre para que identifique los objetos dependientes e independientes junto con las propiedades geométricas que permanecen invariantes

y que las verifique utilizando las demás herramientas ofrecidas por el Software. Según el MEN (2004) y Galindo (1998) estas tareas permiten generar relaciones o conexiones entre las propiedades visuales de los objetos y los conocimientos geométricos.

Tareas de simulación: El MEN (2004, p. 47) denomina la simulación como “una representación visual de un fenómeno o proceso con mayor o menor fidelidad perceptual”, en el ámbito de la geometría, la simulación implica la representación visual de una situación geométrica en el SGD, lo que Sinclair (2003) define como *bocetos preconstruidos*, en los cuales, se pueden arrastrar los puntos, tomar medidas, proporciones, etc.

Sinclair (2003) menciona que el proceso de exploración está involucrado en las tareas en las que se presentan bocetos preconstruidos y que una exploración exitosa consta de observar, generar preguntas y analizar el cambio generado por el arrastre para identificar relaciones e invariancias. No obstante, también identifica que los estudiantes deben aprender dicho proceso, es por eso, que expone la importancia de los elementos y de las preguntas que hacen parte de la tarea, ya que las decisiones que se tomen sobre ellos tienen la capacidad de potenciar o debilitar el proceso de exploración. Por ejemplo, un boceto preconstruido puede contener una serie de botones que permitan aparecer o desaparecer algún objeto geométrico, utilizarlo generaría una consecuencia, ya sea positiva o negativa, en el proceso de exploración.

Con lo anterior, según Sinclair (2003), las tareas con bocetos preconstruidos en los que se detallan en el diseño los elementos y las preguntas realizadas contribuyen a los estudiantes a identificar propiedades geométricas, explorar relaciones y desarrollar habilidades de razonamiento relacionadas con la demostración en geometría.

Este apartado, en conclusión, menciona la importancia de las tareas que se proponen en clase para la comprensión de los objetos matemáticos. Al utilizar el SGD, el profesor debe tener en cuenta las herramientas que están a disposición del estudiante y orquestarlas con situaciones problemáticas adecuadas para construir un buen medio para el aprendizaje. Laborde (2001) categoriza las tareas que se proponen en el SGD y el MEN (2004) menciona unos ejemplos de tareas que pueden enriquecer la actividad demostrativa del estudiante, pues estas le permiten explorar, conjeturar y demostrar. Por tanto, es provechoso investigar cómo se pueden articular las tareas que propone el MEN(2004) para enseñar un contenido geométrico y cómo van cambiando los tipos de demostración con dicha articulación.

1.3. Sobre las formas de razonamiento:

El desarrollo de las tareas que se proponen en el SGD, siguiendo las ideas del MEN (2004), conlleva que el estudiante explore, experimente, conjeture y demuestre. Estos procesos, como se ha visto previamente, articulan la percepción con la teoría. En todo el desarrollo de la tarea, según Samper et al. (2011), Meyer (2023) y Arzarello et al. (2012), se ven involucradas diferentes formas de razonamiento, ya que, a pesar de que posiblemente el objeto final, es decir, la demostración, tenga un encadenamiento deductivo, la exploración, experimentación y la conjeturación conllevan interacciones entre el razonamiento inductivo, abductivo y deductivo.

Sobre lo último, el razonamiento, según Balacheff (1987, p.87), se define como la “actividad intelectual, la mayor parte del tiempo no explícita, de manipulación de informaciones para producir nuevas informaciones a partir de datos”, esta actividad, según Meyer (2023) y Arzarello et al. (2012), se clasifica en razonamiento deductivo, inductivo y abductivo, los cuales, se caracterizan de la siguiente manera:

- *Razonamiento abductivo*: Es el proceso en el cual se infieren ciertos hechos y/o leyes que hacen aceptables algunas afirmaciones o que logran explicar algún evento u observación; como tal, es ese proceso en el que se construyen o se seleccionan hipótesis explicativas (Arzarello et al., 2012). En palabras de Samper y Toro, “se trata de encontrar explicaciones plausibles para que lo observado o concluido realmente se dé; se buscan datos que causen el resultado” (2017, p.371).
- *Razonamiento deductivo*: Es el proceso por el cual se obtiene una aseerción o conclusión a partir de unos datos dados que funcionan como premisas de una regla con la que se contaba previamente, ya sea matemática o no (Samper y Toro, 2017).
- *Razonamiento inductivo*: Según Samper y Toro “el proceso inductivo parte de la observación de ciertos hechos o datos, a partir de los cuales se concluye una regla” (2017, p. 371). Para resolver una tarea que promueva el razonamiento inductivo se debe pasar por tres momentos, uno de observación de regularidades, otro de determinación de patrones y el último de formulación de la generalización (Sosa et al., 2019)

Arzarello et al. (2012) y Meyer (2023) identifican que la interacción entre las formas de razonamiento, al momento de transitar de pruebas empíricas a teóricas, es bastante compleja. Se encontraron dos perspectivas que relacionan las formas de razonamiento documentadas. Por una parte, Pierce (1935), en Komatsu y Jones (2021), menciona que la interacción de los razonamientos se da de la siguiente manera, por la abducción se constituye una hipótesis; a partir de esta, por medio de la deducción se consiguen las consecuencias de la hipótesis y con la inducción se corrobora, modifica o se rechaza la hipótesis al comparar, con casos particulares, las consecuencias determinadas. Por otra parte, Arzarello et al. (1998), citado en Komatsu y Jones (2021), menciona

que la transición entre la inducción a la deducción está marcada por la abducción y por procesos ascendentes (del dibujo a la teoría) y descendentes (de la teoría al dibujo).

Las ideas planteadas en este apartado ponen en evidencia que, al desarrollar tareas que permiten al estudiante realizar los procesos de exploración, experimentación, conjeturación y demostración, se movilizan y se relacionan diferentes formas de razonar, por tanto, para esta investigación resulta interesante identificar y analizar dichos razonamientos al aplicar la secuencia de enseñanza con las tareas propuestas por el MEN (2004), pues estas dan cabida a que el estudiante realice los procesos mencionados.

2. Planteamiento del problema

Olivero et al. (2003), el MEN (2004), Marrades y Gutiérrez (2000) y Laborde (2001) concuerdan con que el SGD permite elaborar una articulación entre la percepción y la teoría. Puesto que, las representaciones de los objetos geométricos, elaborados en el entorno dinámico, permiten que el estudiante se acerque de manera perceptiva y de manera teórica al objeto, debido a que el SGD está fundamentado en reglas teóricas de la Geometría Euclidiana. Sobre la demostración, los autores indican que el uso del SGD por parte de los estudiantes no debería eliminar la posibilidad de realizar demostraciones. Particularmente, Laborde (2001) exhibe algunas investigaciones en las que realizan secuencias de enseñanza utilizando el SGD y en las cuales se fue desarrollando el proceso de demostración, entre ellas destaca la de Marrades y Gutiérrez (2000), mencionada previamente en los antecedentes.

Para conseguir lo anterior, Olivero et al. (2003), Laborde, et al. (2006) y el MEN (2004) le otorgan una gran importancia a las tareas que se proponen en el entorno dinámico y al rol del profesor; estos elementos juegan un papel importante para animar a los estudiantes a que vayan

más allá de lo que ven y de la verificación empírica. Estas ideas son compartidas por Nirode (2012) y Joubert (2017), los cuales, comentan que los profesores deben proponer tareas que aprovechen el poder y las capacidades de los SGD para mejorar el aprendizaje de los estudiantes, en ese sentido, no basta con que un profesor utilice la tecnología, sino el cómo la usa.

No obstante, Laborde (2001) identifica la complejidad de involucrar las tecnologías al aula y más que eso, lo difícil que es crear nuevas tareas que aprovechen los recursos del software, que favorezcan la adquisición de conocimientos y el desarrollo de la demostración. El autor muestra como los profesores, inicialmente, suelen proponer tareas en las que el software facilita las acciones materiales, como medir longitudes o ángulos, es decir, los profesores, en las primeras versiones de sus secuencias de enseñanza, establecen tareas que no se diferencian en profundidad de tareas realizadas en lápiz y papel, en las que el SGD funciona únicamente para facilitar la recolección de datos numéricos. Así mismo, en el estudio de Santos-Trigo et al. (2007), se comunican algunas reflexiones de docentes sobre el uso del SGD, allí identifican que algunos profesores utilizaban cierto SGD únicamente para mostrar un resultado numérico y que carecían de un plan para poder incorporar dicho entorno dinámico en la práctica educativa diaria.

El uso del SGD como un facilitador de acciones materiales, según Laborde (2001), genera un uso reducido y estático de las posibilidades del software, una exploración limitada y una restricción sobre la observación de los comportamientos dinámicos de los elementos geométricos. Por ende, bajo estas tareas, no se generan los espacios para las actividades de explorar, conjeturar, predecir o verificar, las cuales el MEN (2004) considera necesarias para el aprendizaje de la geometría y de la demostración. Precisamente, Joubert (2017) reitera lo complejo que es para muchos profesores diseñar tareas en el SGD de tal forma que provoquen la actividad estudiantil necesaria para generar el aprendizaje esperado, para ello, la autora menciona que es indispensable

un análisis profundo que permita conocer las matemáticas que el SGD produce y las matemáticas que pueden hacer los estudiantes en este medio.

Komatsu y Jones (2019) reconocen que el diseño de tareas es crucial para mejorar el aprendizaje de las matemáticas y que la demostración es importante en la matemática educativa; sin embargo, exhiben que, aunque en la literatura se indique que el uso del SGD genera un mundo de posibilidades para generar la práctica demostrativa en los estudiantes, hay pocos estudios sobre el diseño de tareas en estos entornos dinámicos. Sobre ello, el MEN (2004) y Galindo (1998) presentan las tareas de construcción, de lugares geométricos, de cajas negras y de simulación como tareas que aprovechan las posibilidades del SGD, que propician la percepción y la demostración.

Aunque en la literatura se definan este tipo de tareas, no hay muchas investigaciones que presenten secuencias de enseñanza articulándolas y utilizándolas con el propósito de desarrollar procesos de demostración, por lo que no hay suficientes resultados empíricos sobre las demostraciones presentadas por los estudiantes al desarrollar estas tareas o sobre la posibilidad o no de articular dichas tareas para enseñar contenidos geométricos.

Al respecto, Prieto y Gutiérrez (2024) realizaron una búsqueda y un análisis de artículos referentes al aprendizaje de la Geometría Euclidiana con SGD, de allí concluyeron que la tarea que tiene mayor prevalencia en las investigaciones es la de construcción y que las demandas de estas tareas iban desde simplemente construir una figura hasta construir, describir el protocolo y demostrar la consistencia de la construcción. En concordancia con Prieto y Gutiérrez (2024), en la Universidad Industrial de Santander, uno de los objetivos del curso de Geometría Euclidiana, para estudiantes de la escuela de Matemáticas, es demostrar formalmente reglas teóricas a través del sistema axiomático formal. Además, en el plan de asignatura se le otorga un papel significativo al SGD como herramienta de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, se evidencia en el plan de

asignatura que, de las tareas mencionadas por el MEN (2004), la tarea de construcción es la única tarea, propiciada por el SGD, que se promueve. Además, la literatura que se propone de guía para los profesores no es tan nueva, la más reciente es de 1993, por lo que no se mencionan en ellas diferentes tareas que sean propiciadas por el SGD. Por lo tanto, no es común encontrar profesores que propongan otros tipos de tareas que aprovechen el potencial del SGD para alcanzar los objetivos del curso.

Adicional a lo anterior, según Sierpinska (2004), en Komatsu y Jones (2019), el diseño, el análisis y la comprobación empírica de tareas matemáticas, ya sea en la investigación o no, es una de las responsabilidades más importantes de la enseñanza de las matemáticas. Sobre esto, Stylianides y Stylianides (2017) y Stylianides et al. (2024) indican que existe la necesidad de realizar investigaciones en el aula, con intervenciones de calidad, que aporten información real sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración.

Al conocer las tareas que propone el MEN (2004) y lo mencionado previamente, surge la pregunta *¿qué formas de razonamiento y tipos de demostración se favorecen al desarrollar tareas de simulación, construcción, lugares geométricos y cajas negras?* Por lo que el interés de esta investigación está dirigido a diseñar, implementar y analizar una secuencia de enseñanza sobre las propiedades del círculo, empleando las tareas propuestas por el MEN (2004), con estudiantes de primer ingreso de la Universidad Industrial de Santander (UIS) que cursan la asignatura de Geometría Euclidiana. Con ello se espera identificar los tipos de demostración que emergen por parte de los estudiantes cuando estudian las propiedades del círculo en tareas de construcción, lugares geométricos, cajas negras y de simulación. Adicionalmente, como las tareas involucradas dan paso a las actividades de exploración, experimentación y conjeturación, resulta relevante

observar las formas de razonamiento involucradas en tales actividades mientras resuelven las tareas propuestas (Meyer (2023) y Arzarello et al. (2012)).

Con todo lo anterior, el objetivo de esta investigación consiste en *aportar información sobre las formas de razonamiento y los tipos de demostración que surgen de los alumnos al estudiar las propiedades del círculo en tareas de construcción, lugares geométricos, cajas negras y de simulación.*

Para ello, se definen los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar, implementar y evaluar una secuencia de enseñanza sobre las propiedades del círculo, centrada en la transición de los diferentes tipos de demostración mediante el uso de las tareas propuestas por el MEN (2004).
- Analizar la transición de las demostraciones empíricas a las demostraciones deductivas producidas por los estudiantes al implementar la secuencia de enseñanza.
- Analizar las formas de razonamiento de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas propuestas en la secuencia de enseñanza.

3. Marco de referencia

3.1. El concepto de demostración en el aula

El concepto de demostración en el aula de clase depende de las concepciones que tenga el profesor y el estudiante. De esta forma, el profesor puede considerar un argumento estructurado deductivamente basado en reglas teóricas como una demostración mientras que un estudiante

puede considerar un dibujo como una demostración porque para él este tiene un cierto grado de certeza.

Los estudiantes que no se han enfrentado a demostrar en matemáticas, según Fiallo (2011), optan por realizar argumentaciones donde las propiedades matemáticas son descritas en lenguaje natural utilizando diagramas y ejemplos como respuesta a las tareas de demostración. Adicionalmente, los alumnos parecen relacionar la demostración más como una explicación que como una forma para convencerse a ellos mismo que alguna proposición es verdadera. El rol explicativo, didácticamente, parece más apropiado que el papel de verificación y para esto, es importante tener en cuenta el contexto de la clase y lo experimentado por los estudiantes con respecto a la demostración (Pedemonte, 2002). En este sentido, según Marrades y Gutiérrez (2000) hay que estudiar cómo va evolucionando la comprensión de la demostración por parte de los alumnos. Entre algunos autores que han investigado esto último se encuentran Balacheff, Harel y Sowder.

Balacheff (1988) distingue entre la explicación, prueba y la demostración. La primera la considera como el discurso que realiza un sujeto para determinar la validez de una proposición teniendo como base sus propios conocimientos y sus reglas de verdad. Una prueba es una explicación que es aceptada por una comunidad. Y la demostración es una prueba aceptada por la comunidad matemática. De esta forma clasifica las pruebas en *pragmáticas*, las que se basan en la acción y la ostensión, y las pruebas *analíticas*, que se fundamentan en propiedades y en sus relaciones.

Harel y Sowder (1998) por su parte, consideran como demostración a ese proceso realizado por el sujeto para eliminar o crear dudas sobre la verdad de una proposición. Los autores exponen tres esquemas de demostración: por convicción externa, empíricos y analíticos. Además,

consideran que, si se inicia con la formalidad de una demostración, el estudiante no tendrá la confianza para crear matemáticas, por lo que proponen ir transitando entre tipos de demostración.

Debido a lo expuesto anteriormente, Fiallo (2011) define la demostración de una manera amplia como “el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática” (p.85).

En esta investigación se considera como demostración lo definido por Fiallo (2011) debido a que es de nuestro interés indagar sobre el tránsito entre los tipos de demostración que realizan los estudiantes y esta definición da cabida a demostraciones empíricas, que son las más usuales al iniciar con este proceso (como se mencionó en las primeras líneas de esta sección).

3.2. Estructura analítica de los tipos de demostración

Teniendo en cuenta la definición de demostración establecida en esta investigación, para analizar el cambio de los tipos demostración de los estudiantes se utilizará la estructura analítica de los tipos de demostración propuesta por Marrades y Gutiérrez (2000) adaptada en Fiallo (2011) y en Beltrán-Meneu, et al. (2024).

Esta estructura está fundamentada en ideas de Bell, Balacheff, Harel y Sowder, y cuenta con dos categorías principales, las demostraciones empíricas y las demostraciones deductivas, de las cuales se desprenden otros tipos de demostración, los cuales se caracterizan a continuación,

Demostraciones empíricas:

Según Marrades y Gutiérrez (2000), Fiallo (2011) y Beltrán-Meneu, et al. (2024), estas demostraciones están caracterizadas por el uso de ejemplos como primordial o único elemento de convicción. Los alumnos formulan una conjetura después de haber observado algunos ejemplos y

para demostrar la conjetura utilizan los ejemplos o las relaciones que se extraen de ellos. Las demostraciones empíricas se dividen en tres clases dependiendo el modo en que se seleccionan los ejemplos.

Empirismo Ingenuo: En la demostración se usan ejemplos escogidos sin algún criterio. Los argumentos se basan en elementos visuales o táctiles (*tipo perceptivo*) o en elementos matemáticos o relaciones detectadas en el ejemplo (*tipo inductivo*).

Experimento crucial: La demostración de la conjetura se realiza utilizando un ejemplo cuidadosamente seleccionado; se escoge teniendo la creencia que en cualquier otro caso el resultado será el mismo. De tal forma, los alumnos asumen que la conjetura es siempre cierta si lo es en dicho ejemplo. Dependiendo de cómo se use el ejemplo, se definen las siguientes dos subclases.

Experimento crucial basado en el ejemplo: Cuando se basan en la existencia de un único ejemplo o en la falta de contraejemplos para la construcción de la demostración.

Experimento crucial constructivo: Cuando las demostraciones realizadas están basadas en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma en cómo se consiguió el ejemplo.

Ejemplo genérico: La demostración de la conjetura está basada en el uso de uno o varios ejemplos que son representantes de una clase. La demostración incluye definiciones, propiedades y elementos abstractos de la clase, pero que son extraídos empíricamente por el ejemplo.

La principal diferencia entre el experimento crucial y el ejemplo genérico es que, en el primero, la demostración se basa en la verificación experimental de la conjetura mediante el

ejemplo, mientras que, en el segundo, la demostración hace referencia a propiedades y a elementos de la clase representada por el ejemplo. Aquí se señalan dos tipos de ejemplos genéricos.

Ejemplo genérico analítico: Cuando la demostración se basa en un ejemplo representante de una clase y las propiedades y relaciones enunciadas en la demostración son descubiertas en el ejemplo.

Ejemplo genérico intelectual: Los argumentos utilizados están parcialmente descontextualizados del ejemplo, es decir, la demostración contiene propiedades matemáticas aceptadas además de afirmaciones basadas en el ejemplo.

Demostraciones deductivas:

Según Marrades y Gutiérrez (2000), Fiallo (2011) y Beltrán-Meneu, et al. (2024), las demostraciones deductivas están caracterizadas por basarse en aspectos generales del problema, en operaciones mentales y deducciones lógicas para demostrar la conjetura de manera global. Los ejemplos, si se utilizan, son para ayudar a organizar la demostración, no se tienen en cuenta las características particulares del ejemplo. Según el nivel de formalización se distinguen tres tipos de demostraciones en esta categoría.

Experimento mental: Procesos deductivos abstractos basados en observaciones previas sobre ejemplos concretos para poder organizar la demostración. Los ejemplos no forman parte de la prueba, sino que son una ayuda para encontrar propiedades y relaciones para construir la prueba.

Experimento mental transformativo: Las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro. Los ejemplos ayudan a predecir que transformaciones son adecuadas. Dichas transformaciones pueden estar basadas en imágenes mentales, en manipulaciones simbólicas o en construcción de objetos.

Experimento mental estructural: Las demostraciones están basadas en secuencias lógicas de reglas teóricas aceptadas en clase. Si se utilizan ejemplos, son para ayudar a organizar la secuencia lógica y a entender los pasos de la deducción.

Deductivas informales: Se fundamenta en procesos deductivos de carácter abstracto, expresados de manera informal mediante una combinación del lenguaje natural y del lenguaje matemático, apoyados en enunciados que se consideran evidentemente verdaderos. Estas demostraciones pueden ser, de tipo transformativo o estructural, en el mismo sentido al experimento mental, aunque con un uso restringido de ejemplos.

Deducción formal: Cuando la demostración se basa en operaciones mentales sin la necesidad de ejemplos específicos. Son las demostraciones formales que se realizan en la comunidad matemática. Se caracterizan dos tipos de deducciones formales.

Deducción formal transformativa: Las operaciones mentales transforman el problema inicial en otro equivalente.

Deducción formal estructural: Las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema y de las reglas teóricas aceptadas.

Demostraciones fallidas: demostraciones que carecen de coherencia o el detalle suficiente para asignarlas en alguna de las categorías anteriores. Son *empíricas* si muestran indicios de razonamientos empíricos y *deductivas* si evidencian razonamientos deductivos.

3.3. Formas de razonamiento

Las tareas que harán parte de la secuencia de enseñanza fomentan la conjeturación y la demostración. Por tanto, es de interés identificar las formas de razonamiento de los estudiantes mientras resuelven las tareas propuestas, es decir, mientras trabajan en la elaboración y la

justificación de la conjetura analizando los dibujos, las construcciones en el computador, encontrando relaciones visuales, observando invariantes en la pantalla, etc.

El razonamiento, según Balacheff (1987, p.87), es considerado como la “actividad intelectual, la mayor parte del tiempo no explícita, de manipulación de informaciones para producir nuevas informaciones a partir de datos”. Según Godino y Recio (2001), esta actividad intelectual da origen a las prácticas argumentativas, personales e institucionales, y adicionalmente, el razonamiento se desarrolla por medio de tales prácticas. Por tanto, el estudio del razonamiento tiene que ver con el estudio de la argumentación. En estas mismas líneas, Ríos (2021) menciona que gran cantidad de investigaciones buscan identificar las formas de razonamiento de los estudiantes de acuerdo con el argumento otorgado por el mismo.

Por tanto, en esta investigación se considerarán tres formas de razonamiento a raíz de los tres tipos de argumentos identificados por Pedemonte (2002), deductivo, inductivo y abductivo. Esta autora utiliza una adaptación del modelo de Toulmin para caracterizar y analizar la estructura de los argumentos, por tanto, en este trabajo también se utilizará tal adaptación para identificar la forma de razonamiento de los estudiantes. Pedemonte (2005), considera que un argumento está determinado por un esquema ternario formado por,

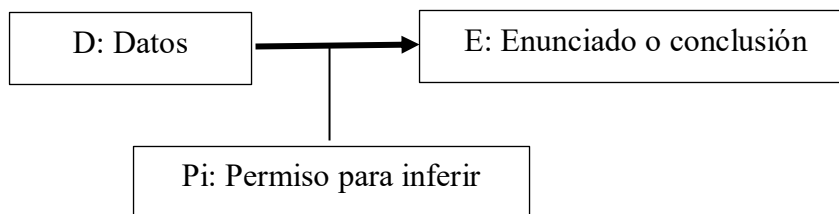


Figura 1 Modelo de Toulmin adaptado en Pedemonte (2005)

Un *Enunciado* (E) o conclusión que el interlocutor pretende justificar

Unos *Datos* (D) que son usados por el interlocutor para justificar el enunciado.

Un *Permiso de inferir* (Pi) que ofrece una regla, un principio general capaz de servir de fundamento a esta inferencia, de hacer de puente entre los datos y el enunciado. (Pedemonte, 2005, p.321-322)

Razonamiento deductivo

Cuando se aplica el permiso de inferir a unos datos con los que se cuentan para obtener el enunciado o la conclusión.

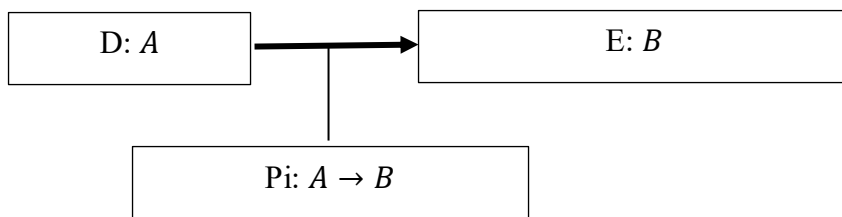


Figura 2 Esquema para el razonamiento deductivo

$A \rightarrow B$ es la regla

A es una proposición con la que se cuenta o un dato dado

B es el enunciado conclusión a la que se llega

Razonamiento abductivo

Cuando el enunciado y el permiso para inferir están dados y se concluye, mediante un proceso ascendente, que es posible el dato D . Se parte de las conclusiones y se dirige hacia las premisas. “La abducción es la derivación de las mejores o más plausibles explicaciones para un conjunto dado de hechos” (Pedemonte, 2005, p.69).

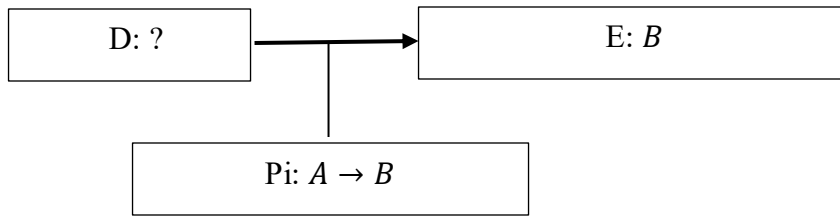


Figura 3 Esquema para el razonamiento abductivo

El signo de interrogación, en el lugar de los datos, significa que el sujeto está buscando los datos que se relacionan con el enunciado o conclusión por medio del permiso de inferir. La flecha siempre va dirigida hacia el enunciado debido a que el sujeto es consciente de que especificar los datos permitirá el uso del permiso de inferir para justificar la conclusión.

De esta forma, el objetivo del razonamiento abductivo es precisar la información con la que no se cuenta y utilizarla para explicar los hechos observados. En ocasiones, el permiso de inferir no está definido, solamente se tiene a la mano las conclusiones, por lo que hay que buscar la regla más adecuada y los datos iniciales para explicar lo que se tiene. Este razonamiento abductivo se denomina *creativo* (Pedemonte, 2005).

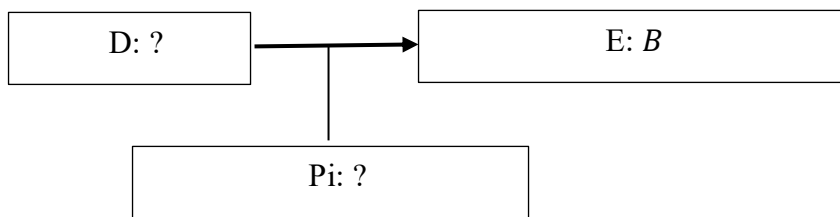


Figura 4 Esquema para el razonamiento abductivo creativo

Razonamiento inductivo

Se basa en inferencias ampliativas, es decir, a partir de un caso o un conjunto de casos se infiere una regla que se cree se cumple para un conjunto mayor de casos o para una clase. Este razonamiento va de lo particular a lo general, la inducción es una inferencia de una muestra a un todo.

El proceso inductivo parte de la observación y recolección de datos o de hechos, de un conjunto de casos, para concluir una regla. Los datos recolectados son comparados con el fin de determinar relaciones y abstraer una regla general, de esta forma, se puede observar una regularidad en los enunciados que se deducen de cada caso o una regularidad en el proceso que conduce a los resultados observados. Es decir, este proceso permite la realización de dos generalizaciones diferentes, los cuales Harel (2001) menciona como,

Generalización de patrones de resultados: Se observa un patrón en los enunciados que se deducen de cada caso. Los casos no necesariamente deben tener un orden particular. Pedemonte (2002) propone la siguiente esquematización para la inducción por generalización de patrones de resultados:

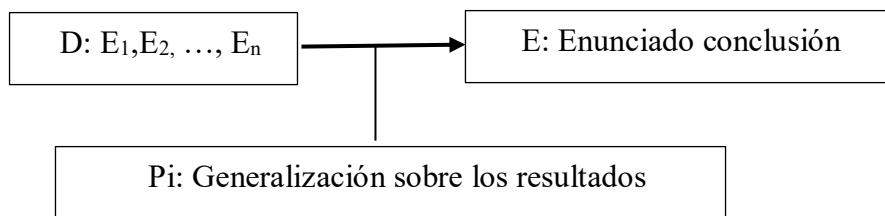


Figura 5 Esquema para el razonamiento inductivo por generalización de resultados

E_1, E_2, \dots, E_n son las conclusiones de los casos previamente observados, a partir de estos, se genera el caso general.

Generalización de patrones de proceso: Se observa la regularidad en el proceso que conlleva al resultado. Se logra ver la cadena que conecta las expresiones. Los casos que se consideran están relacionados y ordenados entre sí. Pedemonte (2002) propone la siguiente esquematización para la inducción por generalización de patrones de proceso:

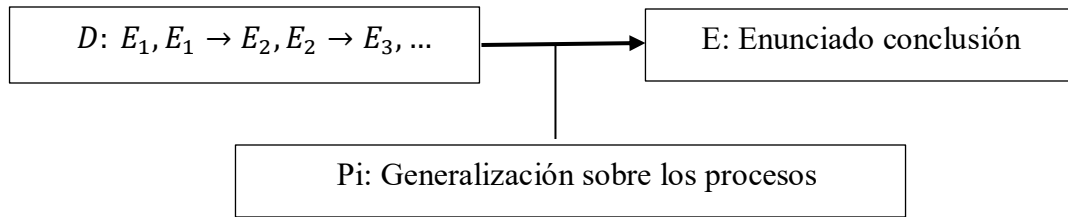


Figura 6 Esquema razonamiento inductivo por generalización de procesos

“Los datos $E_1, E_1 \rightarrow E_2, E_2 \rightarrow E_3, \dots$ representan los argumentos anteriores que conectan los enunciados. Se convierten en los datos del último paso, el que trae al caso general. El permiso de inferir es una generalización sobre el proceso.” (Fiallo, 2011, p.89)

La estructura analítica de los tipos de demostración y las formas de razonamiento, extraídas de los tipos de argumentos de Pedemonte (2005), son las herramientas con las cuales se analizarán los datos recolectados al aplicar la secuencia de enseñanza. Ya que, el modelo de Toulmin, adaptado en Pedemonte (2005), permite organizar la información recolectada en las grabaciones y en los escritos de los estudiantes para identificar las formas de razonamiento involucradas en el desarrollo de la tarea.

Además, durante la realización de las tareas, los estudiantes pueden generar diversas demostraciones, las cuales se analizan utilizando la estructura propuesta por Marrades y Gutiérrez (2000). Esto permite estudiar la interacción entre las diferentes formas de razonamiento que llevan al estudiante a construir una demostración específica. Así mismo, se puede determinar si ciertas tareas favorecen más un tipo particular de razonamiento o de demostración y con ello concluir sobre la pertinencia o no de las tareas propuestas para desarrollar diferentes tipos de demostraciones.

4. Método de investigación: Experimento de enseñanza.

El experimento de enseñanza (Camargo (2021); Molina (2006); Molina et al. (2011); Confrey y Lachance (2000)) es un método de investigación que se basa en “el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje en específico” (Camargo, 2021, p. 86).

El experimento de enseñanza resulta apropiado cuando se desea observar el proceso real del aprendizaje matemático, para así analizarlo y comprender los significados construidos por los estudiantes en un entorno natural de clase. Por tanto, el contexto en el que usualmente se desarrolla el experimento de enseñanza es el aula de clase regular, no obstante, es posible que se desarrolle en aulas adaptadas que posean las mismas características.

Por tanto, este método de investigación fue apropiado para este trabajo ya que permitió observar el proceso de razonamiento y demostración que los estudiantes efectuaban, en un ambiente natural de clase, al desarrollar tareas de simulación, cajas negras, lugares geométricos y de construcción, las cuales permitían el descubrimiento y la movilización de conocimientos sobre las propiedades del círculo. El experimento se desarrolló en el aula de clase de un curso de Geometría Euclidiana con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

Aunado a lo anterior, como menciona Camargo (2021), los participantes del experimento de enseñanza son los estudiantes y un grupo de investigación conformado por investigadores encargados del diseño de la secuencia de enseñanza, el docente-investigador que implementa la secuencia y por los investigadores-observadores que se encuentran en clase para analizar las situaciones y recolectar información.

En este experimento, el grupo de investigación estuvo conformado por la autora, el director y el codirector de este trabajo, además de cuatro coinvestigadores. Semanalmente se llevaban a cabo reuniones en las que se analizaba el diseño de las tareas y de las preguntas de la secuencia de enseñanza, se discutían cuestiones metodológicas de la clase y se examinaba lo que iba ocurriendo en las implementaciones para refinar las tareas de la secuencia.

Por lo anterior, todo el grupo estuvo involucrado en el diseño de la secuencia, mientras que, la autora asumió el rol de docente encargada de su implementación. Adicionalmente, dos de los coinvestigadores observaban, analizaban y recolectaban información sobre situaciones que se presentaban en clase.

4.1. Etapas del experimento de enseñanza

Camargo (2021) propone el siguiente esquema sobre la ejecución del experimento de enseñanza, del que se identificaron ciertas etapas que ayudaron a la organización del método y en las cuales se realizaron diferentes acciones.

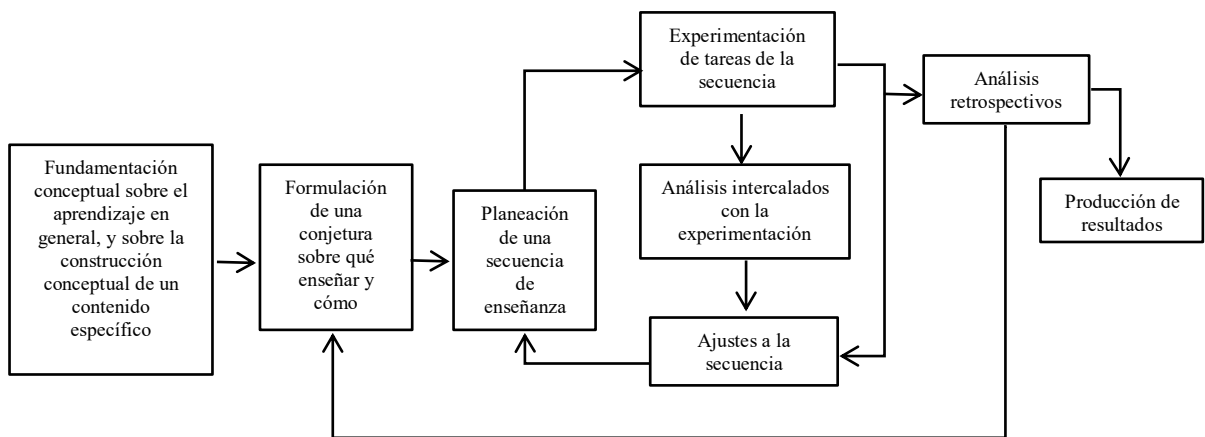


Figura 7 Tomado de Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. recursos para la captura de información y análisis (p. 89), por Camargo, 2021, Editorial Universidad de Antioquia.

4.1.1. Fundamentación conceptual y formulación de la conjetura

La conjetura consiste en una inferencia sobre el aprendizaje y sobre las maneras de fomentar el desarrollo de cierto elemento matemático, que emerge del análisis crítico de la literatura y del marco conceptual desarrollado. Por tanto, esta tiene dos dimensiones; la primera alude al contenido, ¿qué debe enseñarse?, y la segunda es pedagógica, ¿cómo debe enseñarse?, lo que involucra la organización de la instrucción, las tareas y los recursos proporcionados. La conjetura es el eje central del experimento, a partir de ella se organiza la secuencia y a su vez, a medida que se va ejecutando los episodios de enseñanza, la conjetura se va reformulando o refinando

En esta primera fase se realizó una revisión de la literatura sobre la demostración y la enseñanza en Geometría Euclidiana, sobre las tareas suscitadas por el SGD y sobre las formas de razonamiento, literatura que se analizó y se plasmó en el apartado de antecedentes de investigación. Teniendo como base la literatura se planteó como conjetura inicial que:

Los estudiantes de un curso de Geometría Euclidiana deberían comprender y demostrar las siguientes propiedades y relaciones fundamentales vinculadas con el círculo:

- Teorema del ángulo inscrito.
- Definición y teoremas de tangencia.
- Ángulos formados por cuerdas, secantes y tangentes a un círculo.
- Potencia de un punto respecto a un círculo.

Mediante una articulación de tareas de simulación, construcción, lugares geométricos y cajas negras, realizadas en el software de geometría dinámica GeoGebra que permita el

planteamiento de conjeturas y la construcción de demostraciones, así como el desarrollo de diferentes formas de razonamiento.

4.1.2. Preparación de la secuencia de enseñanza

Los investigadores deben tomar decisiones sobre qué contenidos trabajar, las tareas, problemas o ejercicios que se van a proponer, el orden de estas, la interacción entre el estudiante y el profesor, los recursos que se utilizarán, los roles de los investigadores en la clase y la forma en cómo se recolectarán los datos.

En este sentido, para diseñar la secuencia, según Confrey y Lachance (2000), se debe tener en cuenta algunos componentes como:

Currículo: Como el experimento de enseñanza se lleva a cabo en un aula de clase regular, se debe tener en cuenta los contenidos y los objetivos que se esperan se suplan en el curso para tomar decisiones sobre el tiempo en el que se implementará la secuencia de enseñanza para cumplir con las metas del curso.

Interacciones en el aula: El investigador debe decidir cómo se va a estructurar la instrucción.

Enseñanza (Rol del profesor): Se debe definir como actuará el profesor; ¿será un experto que distribuye el conocimiento o será un facilitador que ayuda a los estudiantes a actuar por cuenta propia?

En esta fase, a partir de los anteriores lineamientos, para el diseño de la secuencia de enseñanza se tomaron las siguientes decisiones:

I) En cuanto al *currículo*, se revisó el programa de Geometría Euclidiana de la Universidad Industrial de Santander para la carrera de Licenciatura en Matemáticas y el libro Clemens et al. (1998) que es uno de los libros guía del curso. Teniendo como base las definiciones y los teoremas relacionados con círculos que allí aparecen y la experiencia de más de diez años del codirector de este trabajo como docente de este curso, se seleccionaron las reglas teóricas presentes en el anexo 1 como indispensables en el estudio y demostración de propiedades y relaciones geométricas vinculadas con el círculo.

Al determinar tales reglas teóricas, se realizó una organización de dependencia de los teoremas con las definiciones, es decir, se realizó una articulación entre las reglas teóricas para generar un orden orientador en el diseño e implementación de la secuencia de enseñanza (véase Figura 8). Los teoremas que aparecen en gris corresponden a aquellos que los estudiantes ya habían trabajado previamente. Los teoremas en azul y en morado son nuevos para ellos, los de color azul fueron descubiertos por los estudiantes a través de una tarea propuesta, mientras que los de color morado fueron presentados por la profesora debido a limitaciones de tiempo. Los recuadros en verde contienen las definiciones que se trabajaron en esta parte del curso sobre propiedades y relaciones de los círculos. Las líneas hacen referencia a que determinada definición o teorema se utilizó para demostrar otro teorema.

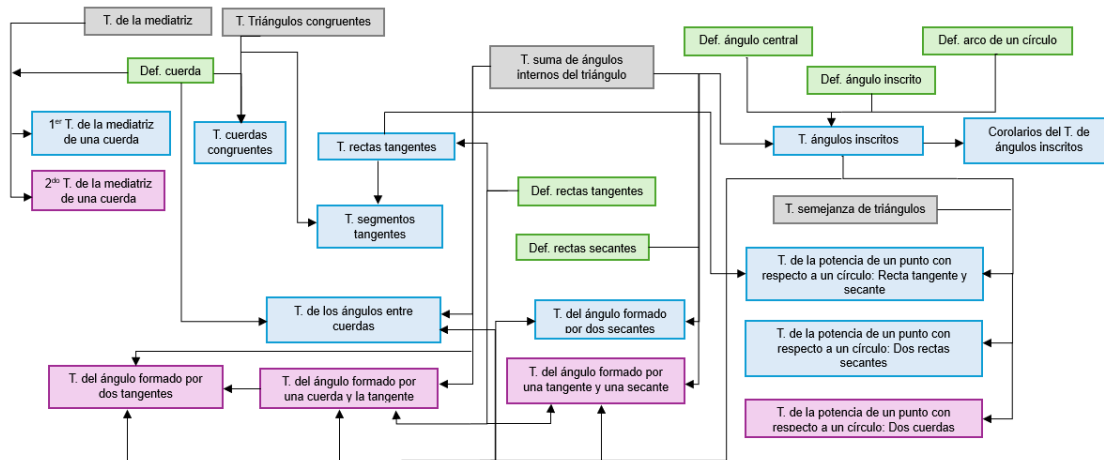


Figura 8 Esquema de dependencia de reglas teóricas

Samper y Molina (2013) señalan que resulta valioso que los estudiantes construyan su propio sistema teórico en interacción con sus compañeros y con el profesor. En la misma dirección, el MEN (2004) resalta la importancia de que los estudiantes descubran los teoremas por sí mismos, en lugar de recibirlos como una imposición del docente. En este sentido, el uso del software de geometría dinámica (SGD) constituye un recurso que potencia dicho proceso de descubrimiento. Adicionalmente, Dagiene y Jasutiene (2006) y Sinclair (2003) destacan que los bocetos preconstruidos, denominados en este trabajo como *simulaciones*, constituyen un recurso que facilita la exploración y el descubrimiento de propiedades geométricas, al tiempo que favorece una comprensión más profunda de las definiciones, teoremas y propiedades matemáticas.

Por lo anterior, se diseñaron tareas de simulación con el propósito de que los estudiantes exploraran, descubrieran y demostraran las reglas teóricas de interés. Una vez que los teoremas eran demostrados y aceptados por los estudiantes y por el profesor, se registraban en una lista de reglas teóricas (Ver anexo 1). Las definiciones y los teoremas se escribieron de la forma “si, entonces” dado que una de las dificultades que presentan los estudiantes frente a la lógica axiomática es no lograr interpretar afirmaciones matemáticas expresadas en lenguaje natural como

una relación de causalidad (Morales y Samper, 2015). Además, cada regla teórica incluía un recuadro destinado a que los estudiantes realizaran un dibujo que representara la relación entre los objetos geométricos de acuerdo con el teorema o la definición correspondiente.

Vinner (2002) y De Villiers (1998) indican que, así como se deben proponer situaciones para que los estudiantes formulen relaciones y propiedades geométricas, también se deben proponer situaciones donde se utilicen dichas relaciones y propiedades descubiertas para la deducción. Sobre eso, Galindo (1998) menciona que las tareas de cajas negras, de construcción y de lugares geométricos ayudan a generar conexiones entre las representaciones y los objetos geométricos ideales, es decir, entre lo empírico y lo teórico. Por consiguiente, se diseñaron tareas de esos tipos para que los estudiantes movilizaran los teoremas que iban descubriendo.

Para promover el razonamiento y la demostración, Fiallo (2011) indica que es necesario que cuando los estudiantes conjeturen relaciones se les exija explicar, verificar, justificar o validar sus conclusiones. Por tanto, en las tareas que se les propusieron a los estudiantes se les indicó que justificaran ¿por qué la construcción soporta la prueba del arrastre? ¿por qué el lugar geométrico es el que observó? ¿Por qué la construcción tiene las mismas propiedades de la caja negra establecida?

Teniendo en cuenta lo anterior, se diseñó y se implementó una secuencia de enseñanza que constó de siete talleres, disponible en el siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/kznshtfh>. Algunos de los problemas establecidos en las tareas fueron extraídos y adaptados de García y Naranjo (2015), Díaz (2016), Pérez (2001), Castilla (s.f) y García (1998), otros fueron diseñados en colaboración con el grupo de investigación. A continuación, se presenta brevemente la descripción de cada uno de los talleres.

Taller	Descripción
1) Cuerdas del círculo	El primer propósito de este taller apuntaba a que los estudiantes identificaran cuáles segmentos son cuerdas y cuáles no. Para ello, se les pidió realizar ejemplos y reflexionar sobre si el diámetro y el radio del círculo podían considerarse cuerdas. Además, se esperaba que lograran descubrir, enunciar y demostrar, mediante tareas de simulación, el <i>teorema de las cuerdas congruentes</i> y el <i>primer teorema de la mediatriz de una cuerda</i> . Finalmente, con el propósito de movilizar los teoremas descubiertos, se propusieron dos tareas adicionales, una de construcción y otra de lugar geométrico.
2) Tangentes y secantes a un círculo	El propósito de este taller consistió en establecer y demostrar el <i>teorema de las rectas tangentes</i> . Para ello, se planteó una simulación acompañada con preguntas orientadoras que guiaban al estudiante a conjeturar la relación. Posteriormente, se propuso una tarea de construcción para poner en juego el teorema descubierto y otros ya estudiados. Esta tarea permitió descubrir propiedades de la construcción no establecidas directamente y así definir el <i>teorema de los segmentos tangentes</i> . Finalmente se ofrecieron dos tareas, una de construcción y otra de caja negra estilo Sangaku, en las cuales los estudiantes debían emplear los teoremas previamente trabajados.
3) Sesión de integración: propiedades de cuerdas, secantes y tangentes	Este taller tenía como objetivo que los estudiantes utilizaran los teoremas descubiertos y discutidos en los talleres anteriores para desarrollar tres tareas: una de construcción, una de lugar geométrico y una de tipo caja negra estilo Sangaku. Además, se buscó que los estudiantes se familiarizaran y profundizaran en este tipo de tareas novedosas.
4) Ángulos inscritos	En este taller se presentaron las definiciones de arco, ángulo central y ángulo inscrito. Se esperaba que los estudiantes determinaran y demostraran <i>el teorema del ángulo inscrito</i> a través de la simulación planteada. Posteriormente, se pretendía que utilizaran dicho teorema, y otros ya estudiados, para desarrollar dos tareas de conjeturar y demostrar y una tarea de lugar geométrico.
5) Sesión de integración: ángulos inscritos	Este taller tuvo como objetivo profundizar en el teorema del ángulo inscrito, dado que es fundamental para la demostración de los teoremas abordados en los talleres siguientes. Por tanto, se propusieron cuatro tareas: una de construcción, otra de lugar geométrico y dos de demostración, las cuales requerían el uso del teorema en cuestión o de los corolarios discutidos en el Taller 4.

6) Ángulos entre cuerdas, secantes y tangentes	En este taller se presentaron dos tareas de simulación con el propósito de que los estudiantes determinaran el teorema del ángulo entre cuerdas y el teorema del ángulo entre secantes. Los demás teoremas relacionados con los ángulos se decidieron abordar durante la fase de institucionalización, por razones de tiempo. Asimismo, se propusieron una tarea de lugar geométrico y otra de conjetura y demostración, con el fin de movilizar algunos de los teoremas trabajados.
7) Potencia de un punto con respecto a un círculo	Este taller tuvo como objetivo conjeturar y demostrar el teorema de la potencia de un punto con respecto a un círculo a través de una tarea de simulación. Seguidamente, se presentaron tres tareas: una de lugar geométrico, otra de caja negra y otra de construcción para movilizar los teoremas enunciados.

II) En cuanto a *las interacciones en el aula*, los estudiantes fueron ubicados en parejas y cada grupo contaba con un computador para desarrollar las tareas de la secuencia de enseñanza que se mostraban en el Aula Virtual de GeoGebra. En cuanto a la estructura de la instrucción se llevaron a cabo las siguientes fases o momentos de clase:

1) *Fase de exploración y de conjeturación:* En esta fase se les planteó la tarea a los estudiantes, la cual contenía, o no, una configuración preconstruida en el SGD. Los estudiantes exploraron y experimentaron en el SGD, construyendo elementos auxiliares, midiendo, comparando y/o analizando trazas. Con estas acciones conjeturaron una relación entre objetos geométricos.

2) *Fase de explicitación:* La profesora promovió la participación de los estudiantes, con el propósito de que comunicaran la conjetura desarrollada. Se discutió en grupo los elementos necesarios y suficientes que hacen parte del antecedente y del consecuente de la conjetura.

3) *Fase de construcción:* Los estudiantes construyeron el lugar geométrico pedido o los elementos geométricos requeridos a partir de los objetos dados.

4) *Fase de demostración:* En esta fase los estudiantes construyeron la demostración en el Aula Virtual de GeoGebra o en la hoja de trabajo. Los estudiantes respondían a preguntas como ¿por qué se formó dicho lugar geométrico? ¿por qué la construcción realizada soportó la prueba del arrastre? ¿por qué a partir de los elementos preconstruidos en la simulación se obtuvo cierta relación geométrica?

5) *Fase de institucionalización:* El profesor invitó a los estudiantes a explicar sus demostraciones. Con esto se discutió en clase las ideas de algunos estudiantes para refinar la demostración. Adicionalmente se organizaba el conocimiento del contenido geométrico involucrado en la tarea.

Cabe resaltar que estas fases no fueron fijas, algunas tareas involucraron el desarrollo de todas las fases, en ese orden o en otro, mientras que otras necesitaron solo algunas fases. Por ejemplo, las tareas de construcción empezaron en la *Fase 3* y continuaron hasta la *Fase 5*. Adicionalmente, la fase de explicitación y la de institucionalización en algunas clases se realizó de manera breve por cuestiones de tiempo.

III) En cuanto al *rol del profesor*, la autora de esta investigación fue la encargada de dirigir las clases mientras que dos coinvestigadores ayudaron a recolectar información y a notar situaciones de interés que surgieron en las clases. En esta secuencia la profesora no actuaba como experta que transmitía el conocimiento, sino que permitía que los estudiantes experimentaran para descubrir relaciones o para realizar las demostraciones. La profesora se encargaba de plantear preguntas a los estudiantes para que los estudiantes no abandonaran la tarea, para que cambiaran de estrategia de solución o para que justificaran acciones que parecían producto del azar. En dichas intervenciones, la profesora se abstenía de dar soluciones a las tareas. Adicionalmente, en la *Fase*

2 y en la *Fase 5*, la profesora era la encargada de dirigir la discusión de las conjeturas y de las demostraciones establecidas.

4.1.3. Experimentación, análisis intercalados y ajustes de la secuencia

Los investigadores deben elegir los medios adecuados para la recolección de los datos y después de cada intervención se deben analizar los datos recogidos para realizar nuevos ajustes a la secuencia y a la conjetura inicial.

Este experimento de enseñanza se llevó a cabo en la tercera y última parte de un curso de Geometría Euclidiana con estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. El curso estaba conformado por 31 estudiantes y sus edades oscilaban entre los 17 y los 20 años.

La implementación de la secuencia tuvo una duración de cuatro semanas. Cada semana, los estudiantes contaban con tres sesiones de clase de dos horas y una sesión de tutoría adicional de dos horas, estas sesiones de tutorías se enfocaron en resolver tareas para profundizar en la comprensión de los teoremas descubiertos en clase. Cabe mencionar que las dos primeras partes del curso estuvieron a cargo de dos coinvestigadores del grupo, quienes estaban al tanto de los propósitos de esta investigación. En consecuencia, el trabajo desarrollado en esas etapas previas contribuyó a preparar a los estudiantes para abordar los teoremas establecidos en esta parte del curso.

Dado que el objetivo de investigación involucraba analizar los procesos de razonamiento y demostración que los estudiantes realizaban durante el desarrollo de las tareas de interés, fue necesario observar detalladamente las acciones que realizaban para avanzar en su solución. Sin embargo, considerando el volumen de información que implicaría recolectar datos de todo el

grupo, se seleccionaron dos parejas de estudiantes que se caracterizaban por comunicar sus ideas mientras trabajaban, perseverar ante las dificultades y asistir con regularidad a las clases. Para recolectar la información relacionada con el razonamiento y la demostración de los estudiantes, se realizaron grabaciones de audio y de la pantalla del computador donde estaban trabajando, adicionalmente, se tuvo en cuenta lo que escribieron en las hojas de trabajo y en el Aula Virtual de GeoGebra.

Durante la aplicación de la secuencia se reflexionó sobre la dificultad de ciertas tareas y del proceso de demostración de estas, por ende, se hicieron modificaciones antes de presentarlas. Por ejemplo, en algunas tareas de lugares geométricos se tenía previsto que la demostración se realizara por casos. Sin embargo, dado que este tipo de tareas resultaba novedoso para los estudiantes y como previamente habían mostrado dificultad al establecer los casos en una demostración, se consideró que combinar estos dos aspectos podía dificultar en exceso el desarrollo de la tarea. Por esta razón, en los enunciados de los lugares geométricos se optó por restringir los objetos matemáticos involucrados para solo considerar un caso, por ejemplo, considerar triángulos no obtusángulos o cuadriláteros convexos.

4.1.4. Análisis retrospectivos de los datos

En esta fase se recopilan y se organizan todos los datos de cada intervención para analizarlos. El investigador debe “distanciarse de los resultados del análisis preliminar y de las conjeturas iniciales para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad” (Molina et al., 2011, p.80). De esta forma se refina, confirma o modifica la conjetura, se proponen ideas teóricas o se realizan modelos de enseñanza y se refina la secuencia de enseñanza.

Para la consolidación de los datos de este experimento, en primer lugar, se realizaron las transcripciones de los videos de las clases siguiendo el orden de la implementación de la secuencia de enseñanza. Posteriormente, dado que el objetivo de esta investigación fue aportar información sobre la demostración y el razonamiento al desarrollar tareas de simulación, cajas negras, construcción y de lugares geométricos, se establecieron como categorías de análisis los tipos de tareas de interés. En cada categoría se seleccionaron los talleres que contenían dichas tareas y se analizó el desarrollo de estas a la luz de la tipología de demostraciones y de las formas de razonamiento definidas en el marco de referencia. Finalmente, se identificaron regularidades y particularidades en los razonamientos y demostraciones que fueron planteados en el apartado de análisis de resultados.

Con lo analizado en esta fase se llegó a la siguiente conjetura: *El proceso de razonamiento y de demostración de propiedades relacionadas con el círculo se enriquece y se diversifica al enfrentar al estudiante a tareas de distinta naturaleza, como tareas de simulación, cajas negras, construcción y de lugares geométricos.*

Adicionalmente, se realizaron refinamientos a la secuencia de enseñanza que se expondrán con detalle en el siguiente apartado. La secuencia corregida se encuentra en <https://www.geogebra.org/m/btxqaaaz>.

5. Análisis de resultados

En este capítulo se presenta el análisis de los datos obtenidos a partir de las grabaciones de las tareas desarrolladas en la secuencia de enseñanza. Dichas tareas se identifican como $T.m.n$, donde m corresponde al número del taller y n al número de la tarea dentro de ese taller.

El análisis se realiza para cada tipo de tarea. Para ello, se incluyen transcripciones de las grabaciones organizadas en una tabla de tres columnas: la primera indica el número de intervención; la segunda, el nombre del estudiante (en este caso se emplean los seudónimos Andrés, José, Juan y Luis por motivos de privacidad); y la tercera, recoge lo que los estudiantes dicen y hacen. En este sentido, las acciones realizadas se describen entre corchetes [], mientras que los paréntesis () se utilizan para complementar o aclarar lo expresado o lo realizado por el estudiante.

Posteriormente, se realiza una interpretación de las acciones y de los diálogos de los estudiantes, organizándolos según el modelo de Toulmin adaptado por Pedemonte (2005), con el propósito de identificar los razonamientos que los alumnos llevaron a cabo durante el desarrollo de la tarea. A su vez, en la fase de demostración se analizó el uso o no de ejemplos con el fin de determinar el tipo de demostración realizada. De esta manera, fue posible identificar regularidades en los razonamientos y variaciones en las demostraciones. Finalmente, se presentan consideraciones para el refinamiento de la secuencia de enseñanza en cada una de las categorías de análisis.

5.1. Sobre las tareas de simulación

En la secuencia de enseñanza se diseñaron e implementaron seis tareas de simulación, o también llamados bocetos preconstruidos, cuyo propósito era que los estudiantes descubrieran, formularan y demostraran relaciones geométricas que, en última instancia, corresponden a los teoremas relacionados con los círculos que se abordan en el curso de Geometría Euclidiana. Sobre ello, Dagiene y Jasutiene (2006) mencionan que el uso de bocetos preconstruidos ofrece la posibilidad de un conocimiento más profundo de las definiciones, teoremas y propiedades

matemáticas, puesto que, como lo indica el MEN (2004), al explorar en el SGD los estudiantes tienen la oportunidad de reconocer teoremas por ellos mismos y no por imposición del profesor.

El desarrollo de estas tareas reflejó la interacción entre razonamientos inductivos (al descubrir relaciones), abductivos y deductivos (al demostrar). Adicionalmente, al ofrecer situaciones geométricas que posibilitaban mediciones y construcciones auxiliares, las tareas propiciaron la aparición de diversos tipos de demostraciones.

5.1.1. Conjeturación en simulaciones mediante el uso libre de las herramientas de GeoGebra.

La mayoría de las simulaciones que se diseñaron contaban con distintas herramientas de GeoGebra que permitían medir y construir elementos auxiliares. Por tanto, al iniciar estas tareas, los estudiantes exploraban la situación geométrica arrastrando puntos y tomando medidas. Adicionalmente, como indica Sinclair (2003), se les plantearon preguntas para dirigir su atención hacia ciertos elementos presentes en la construcción o que aparecían al hacer clic en un botón, los cuales presentaban ciertas propiedades o relaciones geométricas que se esperaba que conjeturaran. Por tanto, a través de estas acciones, los estudiantes razonaban inductivamente y generalizaban los resultados observados.

Por ejemplo, en la tarea T.1.2, los estudiantes observaban dos cuerdas y un botón que permitía ocultar y mostrar los segmentos que representaban las distancias de las cuerdas al centro del círculo.

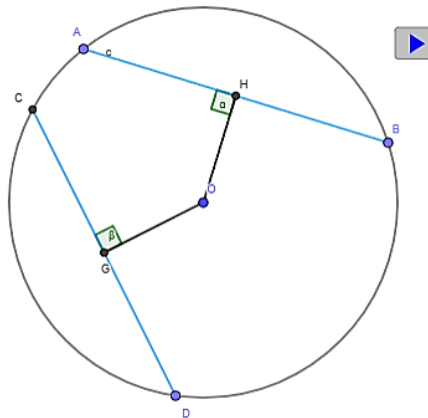


Figura 9 Applet de la tarea T.1.2

Juan y Luis, en [7] , movieron los puntos libres y determinaron relaciones dinámicas de dependencia y conjeturaron que las cuerdas AB y CD eran congruentes, así mismo, en [13], los estudiantes tomaron medidas y arrastraron los puntos para asegurar la propiedad de congruencia establecida. Es decir, *razonaron inductivamente* para establecer propiedades geométricas que se mantuvieron al arrastrar los puntos libres (ver Figura 10).

7	Juan	[Vuelve a leer la pregunta] Listo, movamos D a ver qué pasa. Si movemos D se mueve C. Muevo B se mueve C. Muevo A se mueve C. ¿Qué pasa? No entiendo. [Sigue arrastrando los puntos libres] ¿Tienen la misma longitud? Si, sí, sí. Tienen la misma longitud, claro, ambas tienen la misma longitud y siempre deben mantenerla.
13	Juan	Aquí hay una herramienta [Usa la herramienta “Distancia” y arrastra los puntos] mira aquí es donde lo descubrimos, comprobamos que era así tal cual. [Escribe en GeoGebra “Intuición matemática reforzada con la herramienta del Applet”].

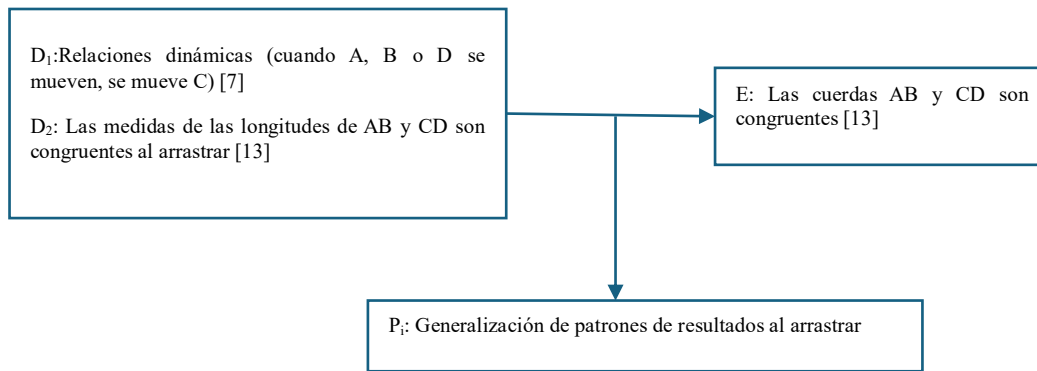


Figura 10 Razonamiento inductivo de la congruencia de cuerdas

Seguidamente, se les preguntaba a los estudiantes: “¿Cuál cuerda está más cerca del centro del círculo?” y “¿Qué debería ocurrir para que las distancias de las cuerdas al centro del círculo fueran diferentes?”. Juan y Luis, en [22], exploraron la situación geométrica planteada e identificaron, mediante el arrastre, que una cuerda de mayor longitud se encontraría más cerca del centro del círculo. Con esta observación, *razonaron inductivamente* y, en [26], concluyeron la relación correspondiente al teorema de las cuerdas congruentes (Ver Figura 11).

22	Juan	Bueno, las cuerdas AB y CD son congruentes, luego nos preguntaban ¿cuál de las dos cuerdas está más cerca del círculo? Bueno, ¿qué es lo que determina una distancia de segmento a un punto? la perpendicular a acá [Señala una cuerda] esas perpendiculares son iguales. Ahora ¿Qué es lo que determina esa distancia? Pues lo que determina esa distancia es la longitud de las cuerdas, ¿por qué razón? esas cuerdas tienen la misma longitud ¿cierto?, que pasa, que, si yo amplío la longitud de una, la cuerda pasaría a estar más acá, entonces ya estaría más cerca. Entonces, si son de igual longitud, su distancia va a ser la misma. Esto fue lo que poco a poco nos llevó la profesora. Por ejemplo, [Muestra el Applet con el Botón], ¿qué relación hay entre OG y OH?
23	Luis	Cuando preguntan por relación uno que puede decir
24	Juan	Por ejemplo, las propiedades, paralela, perpendiculares, congruentes, semejantes.
25	Luis	Que son iguales. Las iniciales son iguales también.
26	Juan	Entonces todo esto nos lleva a que si dos cuerdas son congruentes entonces las distancias también.

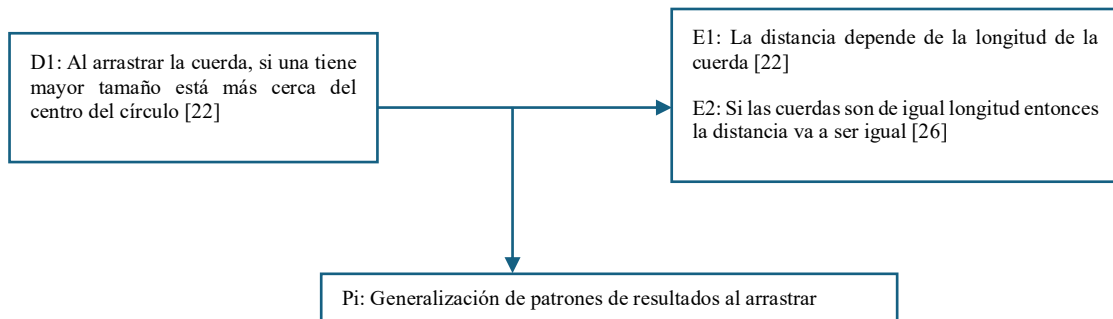


Figura 11 Razonamiento inductivo sobre el teorema de las cuerdas congruentes

En estas tareas, el razonamiento inductivo por generalización de resultados prevaleció en la etapa de conjeturación, principalmente porque las situaciones geométricas diseñadas incluían botones que dirigían la atención hacia ciertos elementos y, porque las preguntas planteadas promovían la exploración de la configuración. Además, como estaban habilitadas herramientas para medir y construir objetos, los estudiantes las empleaban activamente para explorar (Sinclair, 2003).

5.1.2. Conjeturación en simulaciones mediante la restricción del uso de las herramientas de GeoGebra.

En contraste con el apartado anterior, en la tarea T.6.1 se planteó una serie de preguntas sobre relaciones entre ángulos. A medida que los estudiantes respondían una pregunta, aparecía en pantalla la siguiente, acompañada de un botón para revelar el nuevo ángulo de interés. A diferencia de las demás tareas, en esta situación geométrica no se habilitaron las herramientas de GeoGebra; por tanto, se esperaba que los estudiantes recurrieran a las reglas teóricas trabajadas en clase para determinar las relaciones.

Tarea 1.

Explore el siguiente applet y responda las preguntas que en el applet aparecen.

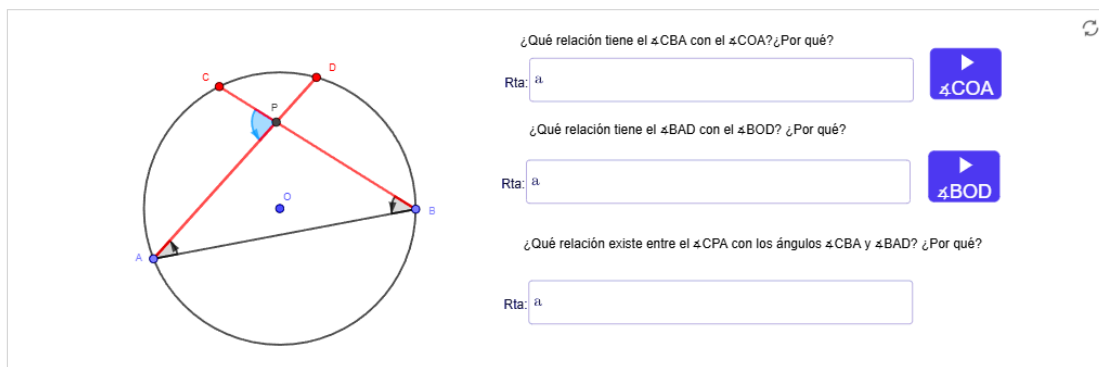


Figura 12 Applet de la tarea T.6.1

En esta tarea, Andrés y José, en [1-8], *razonaron deductivamente* utilizando como permisos de inferir el teorema de los ángulos inscritos y el teorema de los ángulos externos para encontrar relaciones entre ciertos ángulos.

1	José	¿Qué relación hay entre los ángulos CBA con el COA? [Activa el botón del ángulo COA] [Responde en el applet, “el ángulo COA es el ángulo central correspondiente del ángulo CBA”.]
2	Andrés	Entonces es el doble
3	José	No, solo eso.
4	Andrés	Hay que colocar todo completo
5	José	[Escribe en GeoGebra “el ángulo COA es el ángulo central correspondiente del ángulo CBA, por lo tanto, COA será el doble de CBA”] [Lee la siguiente pregunta] ¿Qué relación tiene el ángulo BAO con el BOA? Lo mismo
6	Andrés	Escriba lo mismo. ¿Y si lo medimos?
7	José	No se puede medir. [Escribe en GeoGebra “El ángulo BOD es el ángulo correspondiente del ángulo BAD y por lo tanto BOD será el doble de BOA”] [Lee la siguiente pregunta] Relación entre CPA con los ángulos CBA y BAD.
8	Andrés	Este va a ser la suma de estos dos, por ángulo exterior (hace referencia a que el ángulo CPA es la suma de los ángulos CBA y BAD)
9	José	[Escribe en GeoGebra “El ángulo CPA será igual a la suma de los ángulos CBA y BAD, esto por el teorema del ángulo exterior”] [Lee la siguiente pregunta] ¿Qué relación existe entre el ángulo CPA con los ángulos centrales COA y BOD

Respecto a los ángulos COA y CBA, los estudiantes, en [1-5], *razonaron deductivamente* de la siguiente manera:

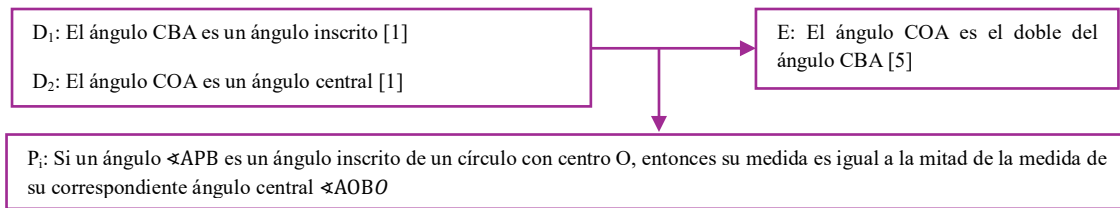


Figura 13 Razonamiento deductivo sobre ángulos inscritos y centrales

Adicionalmente, los estudiantes, en [5-7], usaron el mismo razonamiento para establecer la relación entre los ángulos BOD y BOA. Mientras que, en [8-9], los estudiantes razonaron de la siguiente forma para establecer la relación entre los ángulos CPA con CBA y BAD:

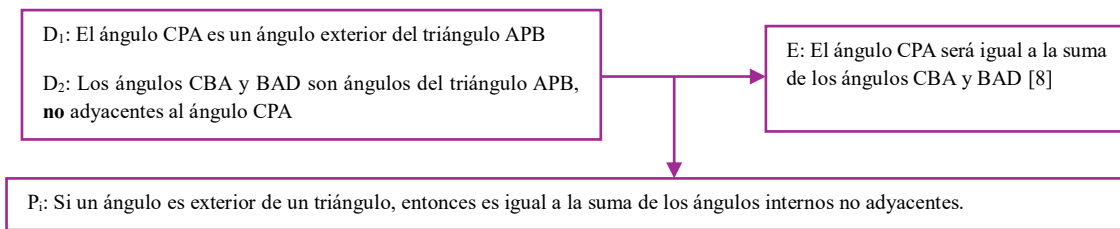


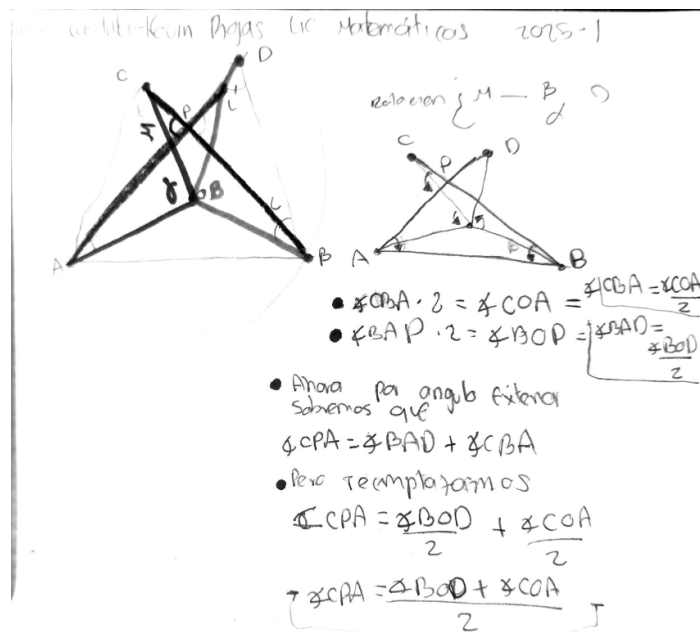
Figura 14 Razonamiento deductivo sobre un ángulo exterior

El grupo de Juan y Luis respondieron a las mismas preguntas razonando de igual manera que Andrés y José. No obstante, ambos grupos presentaron dificultades al responder la pregunta final: “¿Qué relación existe entre el ángulo CPA, formado por las cuerdas AD y BC, y los ángulos centrales COA y BOD? Exprese dicha relación mediante una ecuación”. En otras palabras, tuvieron problemas para conectar las conclusiones de sus razonamientos deductivos previos a fin de establecer la relación solicitada.

En el caso de Andrés y José, en [20-21], ellos expresaron su descontento por la ausencia de la herramienta de medición. Al observar las dificultades de los estudiantes para establecer la relación, la investigadora les propuso, en [26], escribir las conclusiones de los razonamientos

previos mediante ecuaciones. De este modo, los estudiantes *razonaron deductivamente* y, en [27-31], establecieron correctamente la relación entre los ángulos formados por las cuerdas.

16	Andrés	¿Profe toca relacionar este ángulo (CPA) con los otros dos? O toca con cada uno por aparte.
17	Inv	Con los dos.
18	Andrés	Por ejemplo, que la suma de los tres da 180°, eso sería un ejemplo de una relación.
19	Inv	Si, para eso están las preguntas orientadoras
20	José	Eso que quitaran la herramienta de medición está peligroso
21	Andrés	Con la herramienta de medir ángulos ya tendríamos la relación. Tendríamos el problema resuelto.
22	Inv	Lean nuevamente las preguntas
23	Andrés	Mueva el círculo
24	José	[Lee nuevamente las respuestas dadas previamente] Se me viene a la mente el teorema del ángulo exterior
25	Andrés	[Hace un dibujo en una hoja]
26	Inv	Les propongo que las relaciones que establecieron en las preguntas anteriores las expresen mediante una ecuación
27	Andrés	¿La mitad de este (COA) más la mitad de este (DOB) no va a dar este (CPA)?
28	Inv	¿Por qué?
29	Andrés	Porque este es el doble de ... COA es el doble de ...
30	Inv	¿Cuál es el ángulo inscrito correspondiente a COA?
31	Andrés	CBA, por eso, por eso es el doble de este (COA). En el triángulo pequeñito (APB) este es un ángulo exterior (CPA), entonces la suma de estos dos (BAD y CBA), que reemplazados van a ser la mitad de este (BOD) y la mitad de este (COA) va a ser igual a este (CPA).



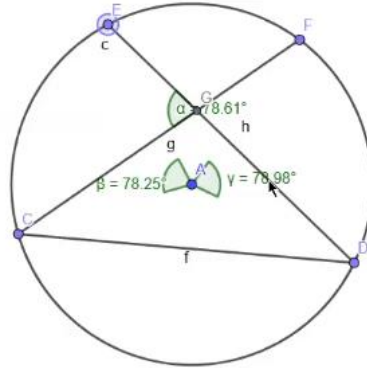
Por otro lado, Juan y Luis, en [17-20], consideraron que era imposible establecer la relación sin recurrir a medidas. Por ello, en una nueva pestaña de GeoGebra reconstruyeron la situación geométrica y, al hacerlo, cambiaron los nombres de los ángulos. Luego midieron los ángulos centrales de interés y calcularon su promedio. Al comparar, observaron en dos ejemplos que el

ángulo EGC coincidía con dicho promedio. De este modo, *razonaron inductivamente y generalizaron el resultado*.

17 Luis ¿Los ángulos no se pueden construir?

18 Juan No, no se pueden construir. No, al ojo no se puede. [Arrastra los puntos]

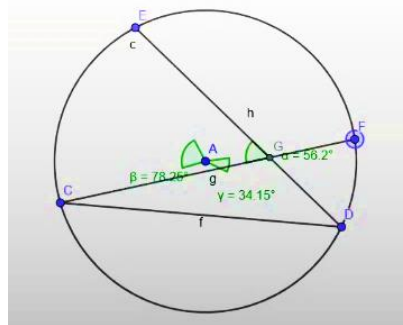
[Abre GeoGebra clásico en el navegador, construye el applet y mide los ángulos necesarios] Si encontramos la relación numérica, entonces tenemos la relación algebraica.



La suma de los dos, dividido en dos, o sea, el promedio de los dos.

[Utiliza la calculadora para sumar los ángulos y dividirlo entre dos] 78.615.

A ver movamos esto acá. [Hacen lo mismo para otro caso]



19 Inv ¿Qué hicieron?

20 Juan Lo hicimos numéricamente porque sin los ángulos era más difícil de hacer, llegamos a que es el promedio de esos dos ángulos.

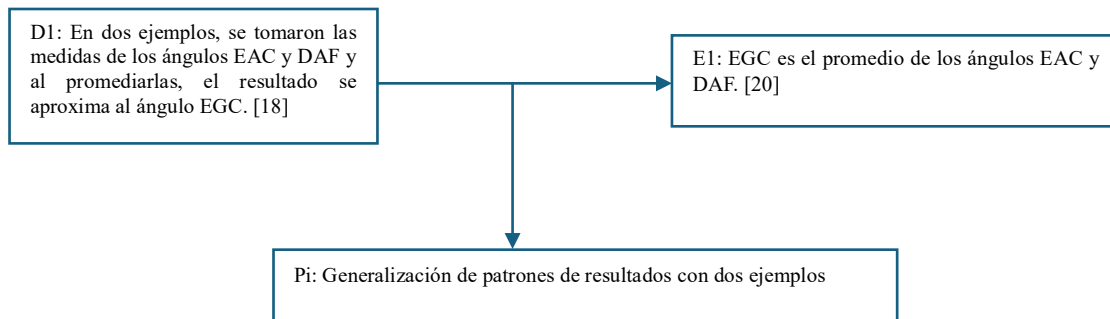


Figura 15 Razonamiento inductivo sobre ángulos entre cuerdas

Lo anterior refuerza lo indicado por Sinclair (2003); diseñar la simulación y las preguntas que la acompañan no es una tarea trivial, pues los bocetos preconstruidos y los cuestionamientos planteados sobre la situación actúan de manera conjunta y, según su diseño, pueden promover en los estudiantes distintos tipos de razonamientos. El hecho de ocultar las herramientas y de incorporar botones y preguntas que orientaban la atención de los estudiantes hacia ciertos ángulos generó en ellos la necesidad de razonar de manera deductiva, recurriendo a reglas teóricas como permisos de inferir. Sin embargo, el hecho de que en las primeras preguntas no se les indicara que debían establecer las relaciones en ecuaciones, dificultó asociar las conclusiones de los razonamientos deductivos previos para determinar la relación final, por lo que algunos estudiantes recurrieron a razonamientos inductivos para lograrlo.

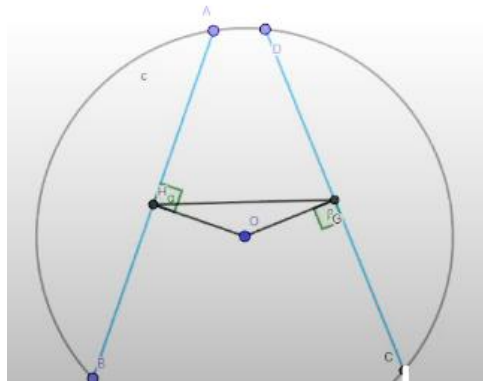
5.1.3. Demostración de las relaciones geométricas conjeturadas.

Luego de conjeturar las relaciones geométricas, se solicitó a los estudiantes que demostraran la conjetura formulada. Al iniciar esta etapa de demostración, los estudiantes razonaron de manera *abductiva*, ya que conocían la conclusión y buscaban los permisos de inferir y/o los datos necesarios para poder establecer la relación.

I) En la **tarea T.1.2**, los dos grupos de estudiantes llegaron a la siguiente conclusión: si dos cuerdas son congruentes, entonces equidistan del centro del círculo. Juan y Luis, en [26], indicaron

que, si demuestran que el triángulo OHG es isósceles en O, puede concluir que $OH=OG$, los cuales son los segmentos perpendiculares que representan las distancias de las cuerdas AB y CD al centro del círculo.

26 Juan Entonces todo esto nos lleva a que si dos cuerdas son congruentes entonces las distancias también.
 [Lee la pregunta “¿cómo demostraría que la conjetura formulada es verdadera?”] [Escribe en GeoGebra “Por medio de la congruencia de triángulos”] Mentiras, ni siquiera es necesario, ¿cuál congruencia de triángulos?, demostrando que este triángulo es isósceles.



[Borra][Escribe en GeoGebra “demostraría que la conjetura de formulada es verdadera por medio demostrando que el triángulo OHG es isósceles en el vértice O”]

Esto refleja el siguiente *razonamiento abductivo*, en el que consideraron como permiso de inferir la definición de triángulo isósceles.

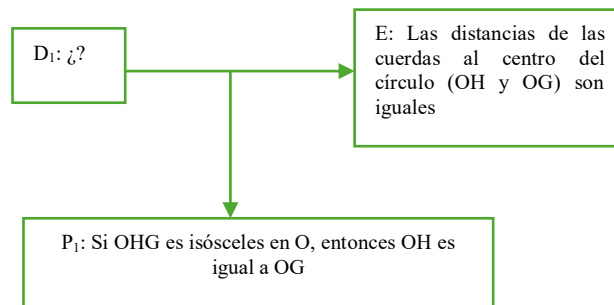
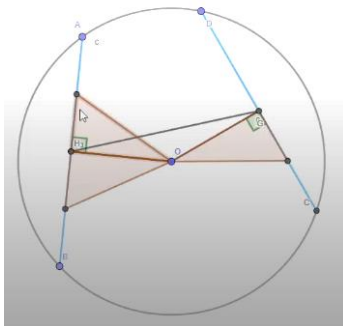


Figura 16 Razonamiento abductivo OHG isósceles

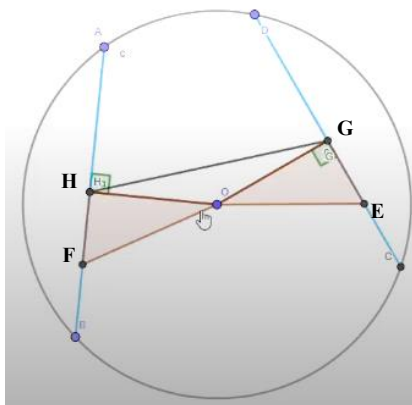
Los estudiantes no encontraron los datos necesarios que se relacionan con la conclusión por medio de dicho permiso de inferir, por lo que descartaron la idea. Seguidamente, los

estudiantes construyeron puntos medios a las cuerdas AB y CD; con estos elementos auxiliares establecieron, en [38-40], un nuevo *razonamiento abductivo* cuyo permiso de inferir fue la congruencia de triángulos (ver Figura 17).

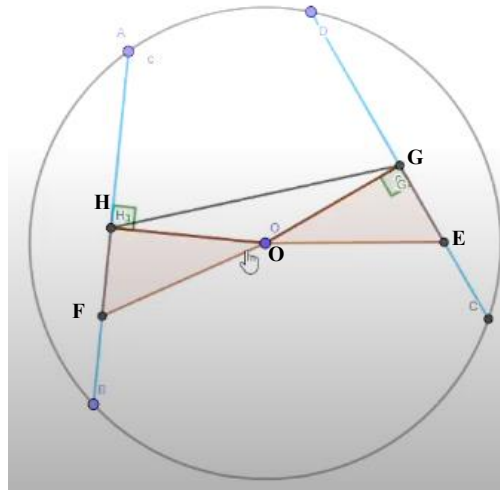
38 Juan Si, porque semejanza no quiere decir que estos dos sean iguales. Nosotros debemos demostrar que estas dos líneas son iguales (OH y OG). Mira yo lo había pensado así [construye el punto medio de HB (F) y crea un triángulo con ese punto F, con H y O]



[Borra uno de los triángulos construidos previamente]



Y entonces, ahora sí, tenemos que esto [Señala el ángulo HOF] es igual a este [Señala el ángulo GOE] Y que este de acá es de 90° que es igual a este. Ahora tenemos estos tres ángulos iguales, pero eso no nos sirve, lo que nos sirve es saber que esto de acá es igual con esto de acá [señala HF y GE]



39	Luis	Y si son iguales
40	Juan	Claro, porque esto es igual (hace referencia a AB y CD), punto medio y punto medio, entonces son iguales (hace referencia a HF y GE). Entonces tenemos ángulo, lado, ángulo. Listo demostrado.

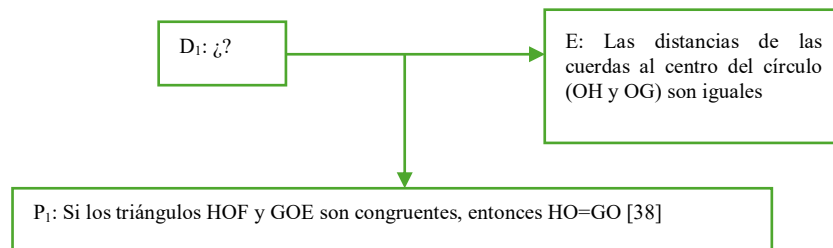


Figura 17 Razonamiento abductivo HOF y GOE congruentes

Juan y Luis buscaron los datos necesarios para poder utilizar el permiso de inferir planteado, no obstante, se basaron en la posición de la figura y concluyeron que los ángulos HOF y EOG eran opuestos por el vértice. Los estudiantes utilizaron dicha información como dato para *razonar deductivamente* y concluir que los ángulos OFH y GEO eran congruentes [38].

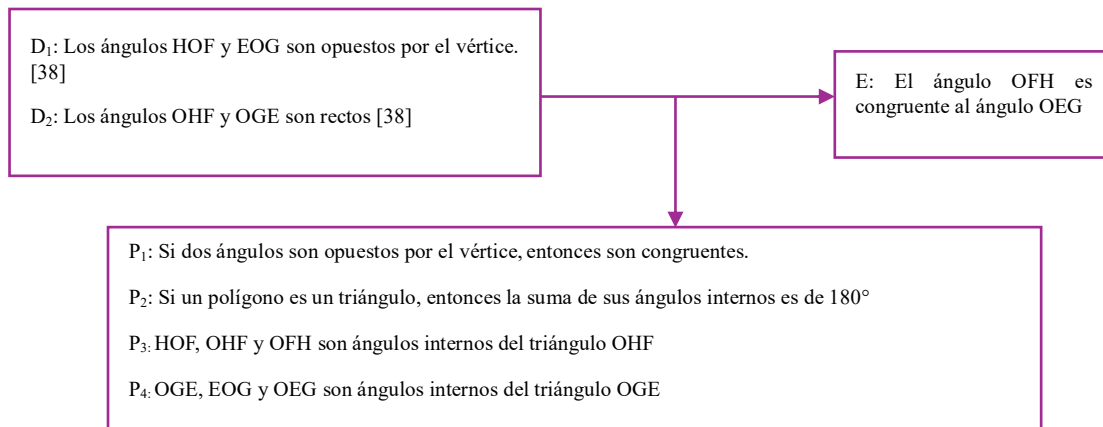


Figura 18 Razonamiento deductivo basado en la posición de la figura

Bajo este razonamiento, los estudiantes concluyeron que los ángulos internos correspondientes de los triángulos HOF y GOE eran congruentes. A continuación, buscaron la manera de demostrar la congruencia de los lados HF y GE para establecer que los triángulos eran congruentes y no solo semejantes. Para ello, tomaron como dato que H y G eran puntos medios de AB y CD, respectivamente; información que no se proporcionó en la tarea ni se había demostrado previamente, sino que fue inferida al observar la representación [39-40]. Con esta información, los estudiantes *razonaron deductivamente* de la siguiente manera para concluir que HF y GE eran congruentes:

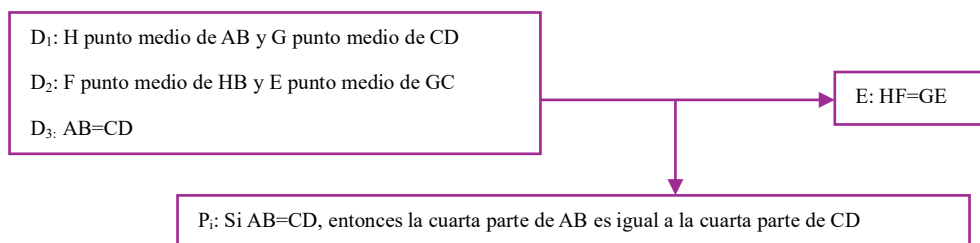


Figura 19 Razonamiento deductivo basado en características observadas

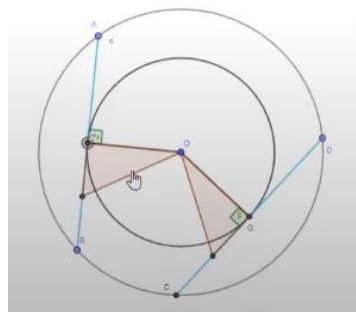
Con las conclusiones establecidas en los *razonamientos deductivos* previos, los estudiantes completaron los datos de su *razonamiento abductivo* para establecer la congruencia de los triángulos HOF y GOE, y de este modo dedujeron que $OH=OG$. Esta demostración no es general,

dado que se basa en una configuración en la que aparentemente los ángulos HOF y EOG son opuestos por el vértice. Es decir, no lograron concluir que las distancias de las cuerdas al centro del círculo eran congruentes, por lo que se categoriza como una *demostración deductiva fallida*, ya que los estudiantes evidenciaron razonamientos deductivos en su desarrollo.

Plantear la situación en un entorno dinámico permite que el estudiante arrastre y observe las propiedades que se mantienen invariantes (MEN, 2004). Por ello, al arrastrar los puntos libres, los estudiantes notaron que los ángulos HOF y EOG no siempre eran opuestos por el vértice y, en consecuencia, descartaron la primera demostración.

Luis, en [59-67], presentó una demostración de tipo *experimento crucial constructivo*, ya que basó su argumentación en la construcción realizada sobre el ejemplo. Consideró un círculo con centro en O que pasara por G y, al observar que aparentemente también pasaba por H, concluyó que OH y OG eran congruentes por ser radios del mismo círculo.

59	Luis	Si porque solamente así no podríamos. Haga un círculo.
60	Juan	Dónde
61	Luis	Con centro en O y radio H (hace referencia a que pasa por H)
62	Juan	[Construye el círculo] Listo y eso de qué nos sirve

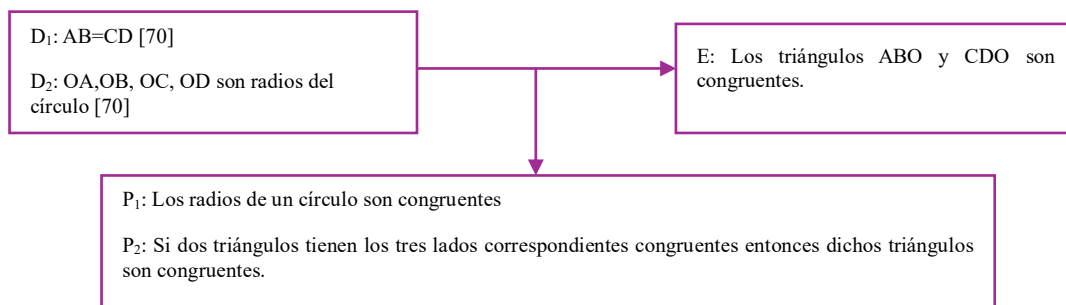


63	Luis	¿Usted no quería demostrar que este es igual a este? (OH y OG)
64	Juan	Si
65	Luis	Ya está
66	Juan	O sea, el centro en O pasa por acá [señala H] pero no pasa por acá [señala G]
67	Luis	Si pasa

Juan refutó la demostración argumentando que bajo la construcción realizada no se podía garantizar que el círculo pasara por el punto G. Finalmente, los estudiantes, en [68-70], presentaron su demostración final, evidenciando un *razonamiento deductivo* al concluir que OH y OG eran congruentes por ser alturas correspondientes de los triángulos congruentes ABO y CDO. Por tanto, esta demostración se clasifica como *deductiva formal estructural*, al estar basada en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema.

68	Juan	O sea, si pasa, pero eso no es una demostración, tendríamos que demostrar que efectivamente ese círculo pasa por G, entonces no sirve. ¿Qué más podemos hacer?
		Podríamos probar los triángulos grandes de acá (AOB y COD).Entonces como sabemos que estos son radios y que estos son iguales [señala AB y CD] congruentes. Y como esos triángulos son congruentes, las alturas de esos triángulos son congruentes. Y las alturas de esos triángulos son las distancias.
69	Luis	Ok
70	Juan	[Construye los triángulos AOB y COD] Se parte del hecho de que AB y CD son congruentes, a su vez, tenemos que AB y CD son cuerdas de un círculo, por lo tanto, sus extremos están sobre el círculo, por tanto las líneas OD, OC, OB y OA son radios, y pues sabemos que todos los radios son iguales, eso por el teorema de..., por la definición de círculo; ahora como partíamos de que AB y CD eran congruentes entonces tenemos que esos dos triángulos son congruentes (hace referencia a AOB y COD) y si a dos triángulos congruentes le sacamos su altura, esa altura también va a ser congruente, y justamente esas alturas serían los segmentos OG y OH, ya que son perpendiculares y pasan por O.

A continuación, se exponen los *razonamientos deductivos* que sustentan la demostración.



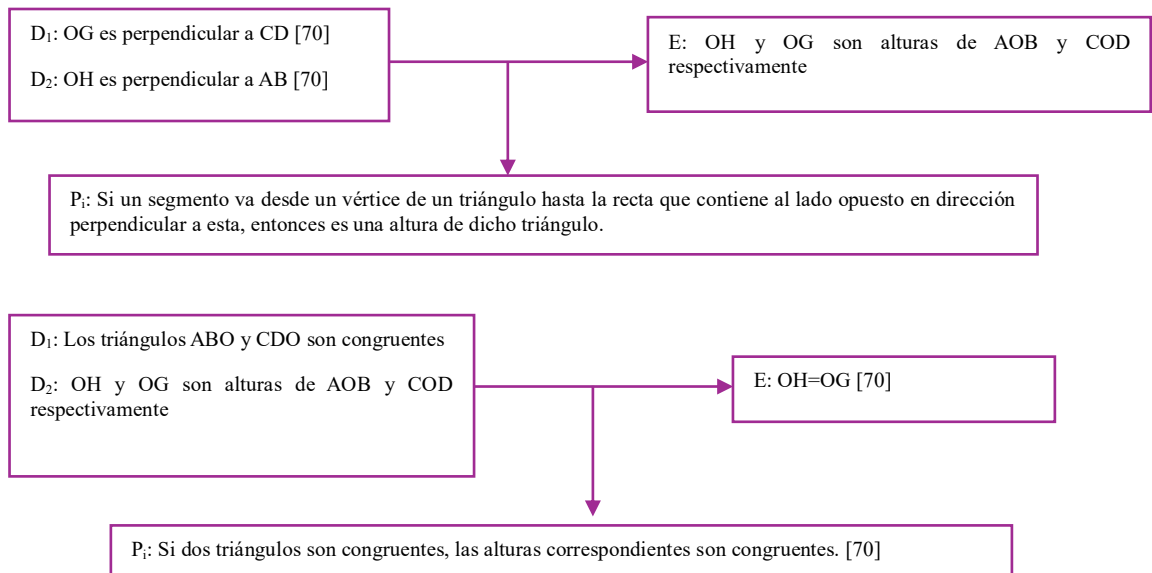


Figura 20 Razonamientos deductivos que sustentan la demostración del teorema de las cuerdas congruentes

II) En la **tarea T.4.2**, los dos grupos de estudiantes concluyeron que: “si un ángulo $\sphericalangle APB$ es un ángulo inscrito de un círculo con centro O , entonces su medida es igual a la mitad de la medida de su correspondiente ángulo central $\sphericalangle AOB$ ”.

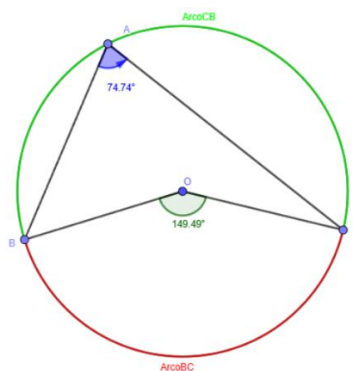


Figura 21 Applet de la tarea T.4.2

Al iniciar la demostración, evidenciaron un *razonamiento abductivo creativo*, pues conocían la conclusión, pero no identificaron de inmediato un permiso de inferir adecuado para fundamentarla.

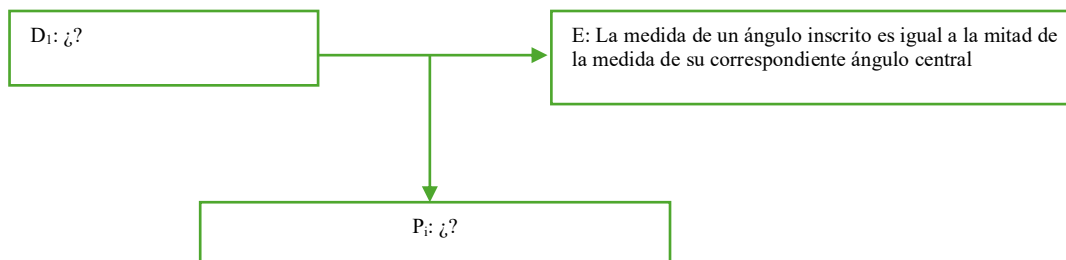
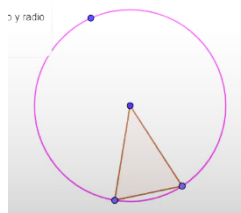


Figura 22 Razonamiento abductivo creativo del Teorema del ángulo inscrito

Por ende, Juan y Luis, en [14], consideraron un permiso de inferir intuitivo que decidieron poner a prueba antes de adoptarlo. Sospecharon que, si tienen dos triángulos ABC y DEF tales que $AB = BC = DE = EF$ y el doble de AC es igual a DF, entonces los ángulos ABC y DEF cumplirían que el doble del ángulo ABC es igual al ángulo DEF. Para verificarlo, dibujaron en GeoGebra dos triángulos que, perceptivamente, cumplían con esas condiciones; al medir los ángulos de interés, en dos ejemplos, comprobaron que uno no era el doble del otro. En consecuencia, descartaron el permiso de inferir.

14 Juan Es que yo quiero probar algo aparte. Si tengo dos triángulos con dos lados iguales y el tercero que uno sea el doble del otro, entonces ¿sus ángulos son el doble?

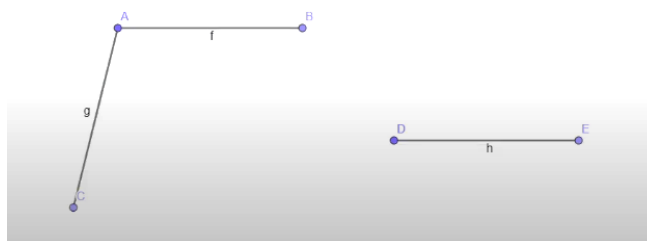
[Construye un círculo y un triángulo isósceles en él]



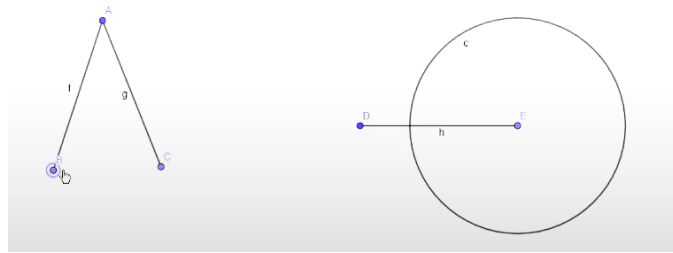
[Utiliza el compás para copiar la longitud de la base del triángulo, pero no logran hacerlo]

[Abren otra pestaña con GeoGebra virtual para usar la herramienta de longitud dada]

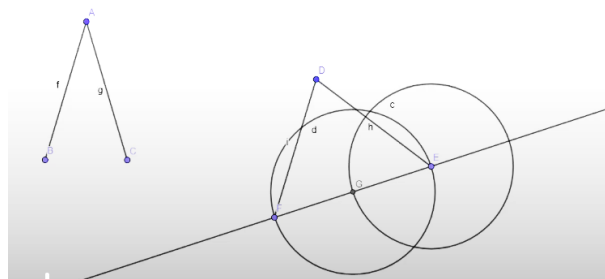
[Construye 3 segmentos con longitud 5]



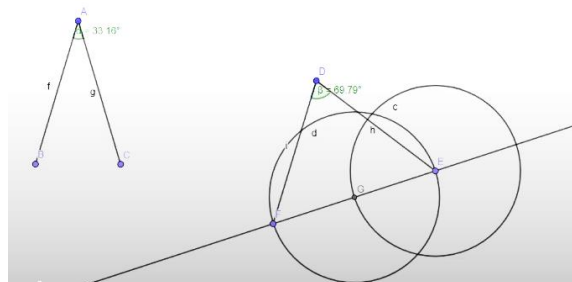
Ahora como hago para que quede el doble. [Utiliza el compás para copiar la longitud de BC y pone el círculo con centro en E]



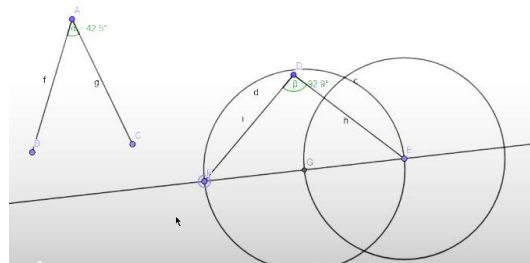
[Construye otro segmento DF desde D que mida 5] Y ahora el otro como debería quedar para que quede el doble.
[Construye la recta FE, G la intersección de FE y de c, construye un círculo con centro en G que pasa por E y arrastra los puntos hasta que F parezca intersección del círculo creado]



No sé cómo hacerlo, pero sería algo así. [Mide los ángulos BAC y FDE]



[Arrastra porque no está seguro de esa diferencia de los ángulos]



Daría 85 y no, aquí da 92, no, no es el doble. Dios, entonces cómo demuestro eso. ¿Borramos esto para solo quedarnos con un ángulo?

Juan y Luis, en [18], construyeron la bisectriz (ON) del ángulo central BOC. Luego, trazaron dos círculos con centro en O y radios AC y AB, con lo que generaron un triángulo OMN tal que $AB = OM$ y $ON = AC$. De este modo, para demostrar que el ángulo BOC es el doble del ángulo BAC, plantearon demostrar que el ángulo MON era congruente con BAC, utilizando la congruencia de los triángulos MON y BAC.

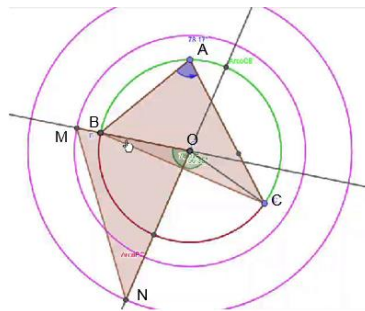
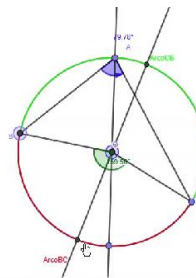
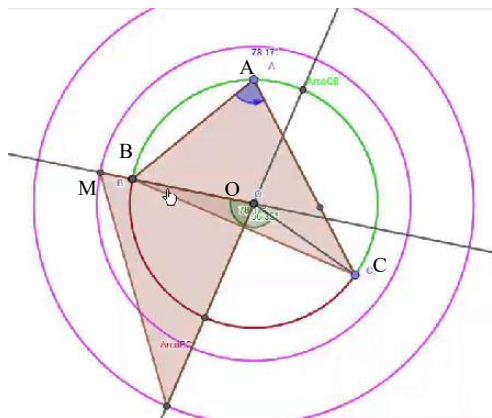


Figura 23 Imagen de referencia de las construcciones auxiliares

18 Juan ¿Cómo lo demuestro? A ver, demostrando que si a este ángulo se le saca una bisectriz [Traza la bisectriz de BAC] entonces este ángulo de aquí debería ser igual que el de arriba.



[Borra la línea AO] [Construye un círculo con radio AC y centro O, construye un círculo con radio AB y centro O, construye la recta OB] Entonces tendría que demostrar la congruencia de estos triángulos.



Si demostramos eso quedaría demostrada la conjetura. ¿Cómo demostramos la congruencia? Ya tenemos que esos dos lados de por sí son iguales.

19	Luis	¿Por qué?
20	Juan	Por construcción. Ahora, no tenemos nada más y no lo vamos a tener. No se puede sacar nada más. No sirve. No podemos sacar nada con respecto al otro lado o a los otros ángulos. Creo que es imposible.

En otras palabras, bajo la construcción del triángulo realizado con la bisectriz y con los círculos, los estudiantes plantearon el siguiente *razonamiento abductivo*:

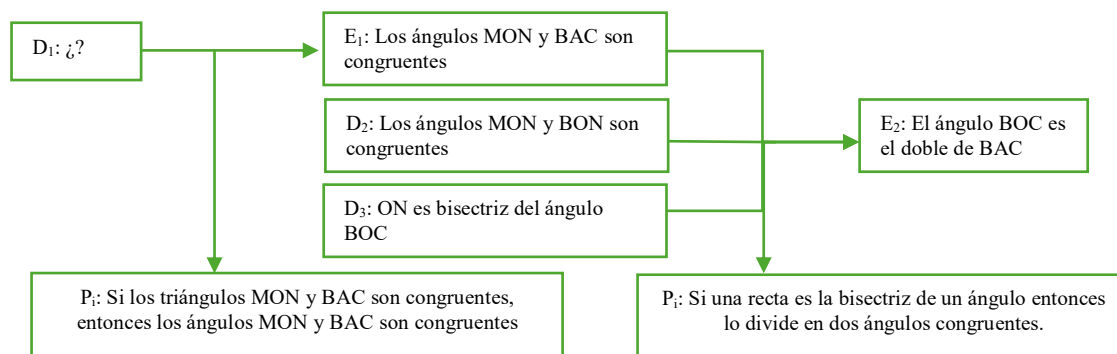
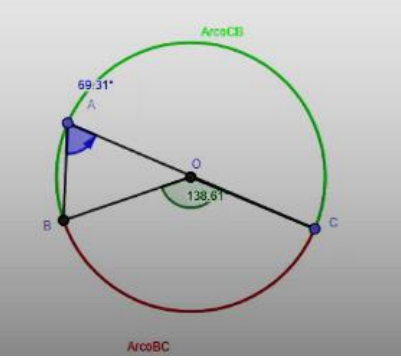
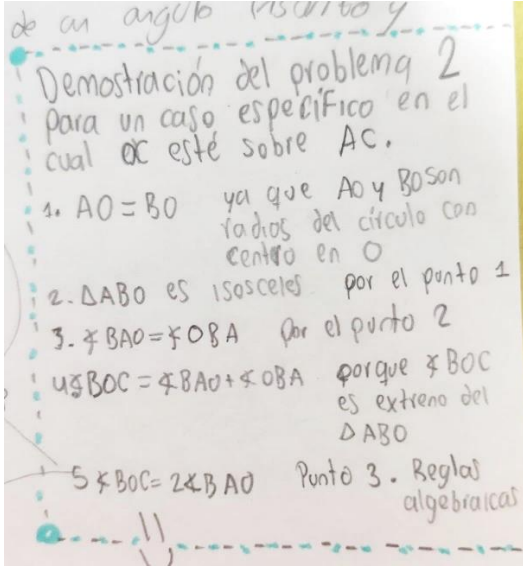


Figura 24 Razonamiento abductivo de Juan y Luis

En [20], Juan identificó que no tienen los datos necesarios para poder concluir la congruencia de los triángulos y que no es posible conseguirlos, por tanto, los estudiantes abandonaron la idea.

La demostración del teorema de los ángulos inscritos se realizaba por casos; por consiguiente, presentaba un grado de dificultad mayor para los estudiantes, ya que no estaban familiarizados con este tipo de demostraciones y no reconocían los casos que la conformaban. Por lo anterior, la investigadora, en [27], les planteó uno de los casos. Al observar dicha configuración, los estudiantes, en [28], pudieron hacer una *demostración deductiva formal*; sin embargo, no demostraron la propiedad para los otros dos casos, por tanto, la demostración del teorema de los ángulos inscritos fue incompleta y por tanto *Fallida*.

27	Inv	Les voy a proponer un caso que es ligeramente más sencillo. Cuando AOC forman un diámetro. Demuéstrenlo para ese caso.
----	-----	--

		
28	Juan	<p>Este [BOC] es la suma de este [BAO] más este [OBA]. Creo que así está más fácil. Tenemos que demostrar que BOC es dos veces el ángulo BAO, tenemos que el ángulo BOC es igual al ángulo BAO más el ángulo ... es que está tan sencillo.</p> <p>Mira profesor, OA y OB son iguales, o sea que el triángulo es isósceles, o sea, que este [OBA] es igual a este [OAB], o sea que un ángulo externo que está en un vértice de un triángulo isósceles es el doble de uno de los ángulos que tiene su congruencia. Porque se supone que este [BOC] es la suma de este [OBA] más este [OAB], y si esto y esto son iguales entonces es el doble.</p> 

5.1.4. Algunas reflexiones sobre este tipo de tareas

El análisis de las tareas de simulación evidenció una coordinación entre las tres formas de razonamiento de interés. Por un lado, el entorno dinámico favoreció la exploración empírica y la generalización inductiva de propiedades y relaciones geométricas, mientras que las preguntas orientadoras junto con la ausencia de herramientas de medición, en ciertos momentos, promovieron el uso de reglas teóricas y de razonamientos deductivos; mostrando que dependiendo del diseño de la tarea se genera distintos razonamientos (Sinclair, 2003).

De igual manera, la etapa de demostración evidenció el papel del razonamiento abductivo, dado que los estudiantes partían de conclusiones establecidas y buscaban los permisos de inferir y los datos que las sustentaran. En este proceso, recurrieron al razonamiento deductivo apoyándose en propiedades observadas en momentos específicos de la situación geométrica o en construcciones auxiliares, lo que dio lugar a diferentes tipos de demostraciones. Esta diversidad puede explicarse porque, durante el curso de Geometría Euclidiana, se les enfatizó la importancia de “ver más de lo que se ve”; es decir, analizar la figura, realizar construcciones adicionales, efectuar mediciones, entre otras estrategias, para identificar propiedades no evidentes a simple vista que pudieran orientar la demostración (MEN, 2004).

En cuanto a la secuencia de enseñanza, se considera pertinente ajustar algunos Applets con el fin de potenciar la exploración de los estudiantes en los momentos de conjetura y demostración. En particular, se propone modificar el Applet de la tarea T.1.3, cuyo propósito era que los estudiantes formularan que “si una recta es mediatriz de una cuerda, entonces pasa por el centro del círculo”. El Applet presentaba una cuerda animada que dejaba un rastro de las posiciones de sus mediatrices; sin embargo, al indagar por las propiedades comunes de dichas rectas, los estudiantes no lograban establecer la conjetura a partir de la visualización del rastro. Por esta razón, se considera más adecuado que los estudiantes construyan por sí mismos distintas cuerdas junto con sus mediatrices, de manera que puedan observar de forma más clara la regularidad y, a partir de ella, formular la conjetura correspondiente.

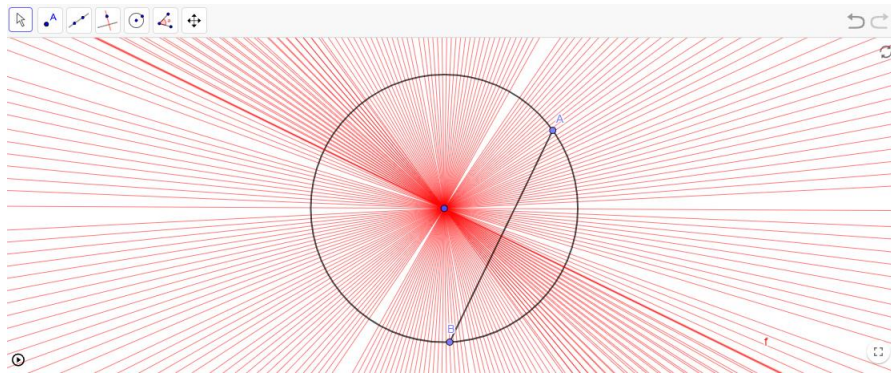


Figura 25 Applet de la tarea T.1.3

La tarea T.4.2 tenía como propósito que los estudiantes conjeturaran y demostraran que “Si un ángulo $\sphericalangle APB$ es un ángulo inscrito de un círculo con centro O , entonces su medida es igual a la mitad de la medida de su correspondiente ángulo central $\sphericalangle AOB$ ”. A través del Applet, los estudiantes formularon la conjetura, pero la demostración, al requerir un análisis por casos, presentó dificultades. Los estudiantes no lograron enriquecer la construcción con elementos auxiliares útiles ni identificar configuraciones específicas que orientaran la formulación de los distintos casos, probablemente porque no se habían enfrentado previamente a este tipo de demostraciones. En consecuencia, se considera adecuado incorporar botones en el Applet que permitan visualizar cada uno de los casos y acompañar dichas configuraciones con preguntas orientadoras que ayuden a los estudiantes a comprender por qué deben considerarse exactamente tres casos y no más ni menos.

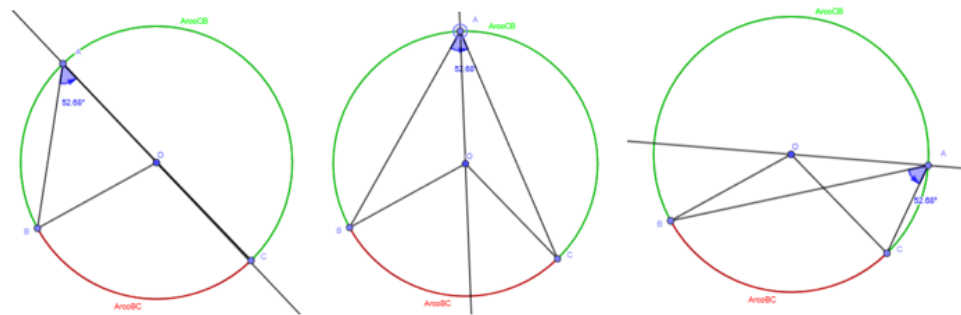


Figura 26 Casos para la demostración en la tarea T.4.2

Finalmente, como se evidenció en la tarea T.6.1, los estudiantes lograron razonar deductivamente y establecer relaciones entre algunos ángulos; sin embargo, en la pregunta final, que buscaba establecer la relación entre el ángulo formado por dos cuerdas y los ángulos centrales determinados por los extremos de estas, no consiguieron articular las conclusiones previas que determinaban la relación requerida. No obstante, cuando se les pidió expresar las relaciones de los ángulos anteriores mediante ecuaciones, pudieron responder adecuadamente la pregunta final. En este sentido, resulta oportuno incorporar en las preguntas iniciales la solicitud explícita de escribir las relaciones encontradas en forma de ecuaciones, de manera que los estudiantes progresivamente articulen sus razonamientos.

5.2. Sobre las tareas de construcción

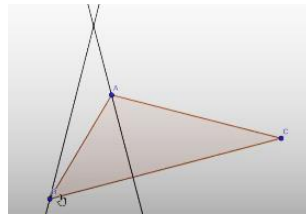
En la secuencia de enseñanza se diseñaron e implementaron seis tareas de construcción. Las estrategias que los estudiantes utilizaron para desarrollar estas tareas fueron variadas, lo que involucró el uso de diferentes formas de razonamiento.

5.2.1. Ensayo y error controlado en el proceso de construcción

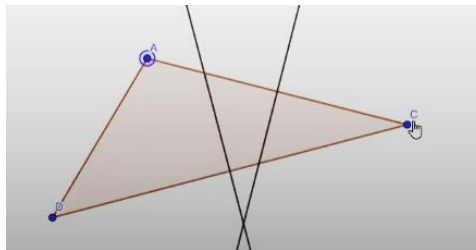
Una de las heurísticas más comunes fue el ensayo y error (Rodríguez et al., 2017), lo cual se evidenció en la tarea T.2.3, que consistía en construir el círculo tangente a los lados de un triángulo ABC dado.

Al iniciar con la tarea, Juan y Luis, en [1], por medio del ensayo y error, intentaron averiguar la posible posición del centro del incírculo. Los estudiantes descartaron las intersecciones de las alturas y de las mediatrices, aunque en el momento las razones del descarte no fueron explícitas, en [14] comentaron que se descartaban debido a que las intersecciones de las alturas y de las mediatrices no siempre estaban dentro del triángulo.

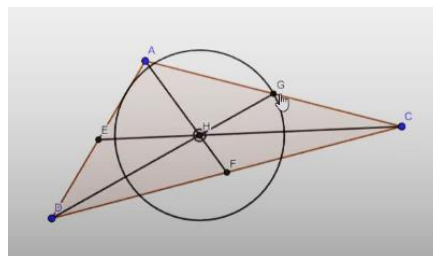
1 Juan [Construye el triángulo ABC, construye las alturas del triángulo, borra las alturas]



[Construye las mediatrices, elimina la idea]



[Construye las medianas, el punto de intersección se ubica dentro del triángulo, por lo que construye un círculo con centro en el baricentro que pasa por uno de los puntos medios]

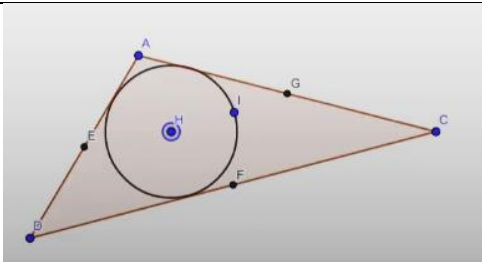


[Borra la construcción]

2 Luis Qué es un incírculo

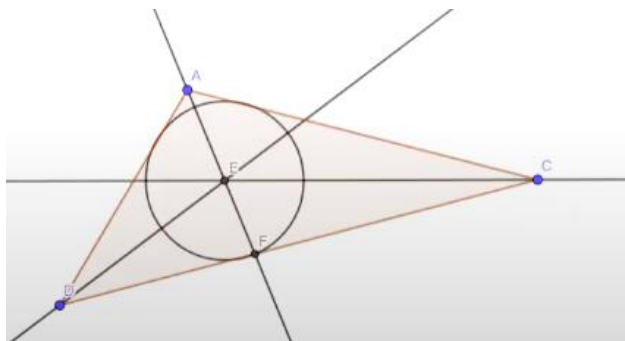
3 Juan Que esté inscrito en el triángulo

4 Luis Ah ya entendí, que sea así [construye un círculo aparentemente tangente a los tres lados] que toque cada lado en un solo punto



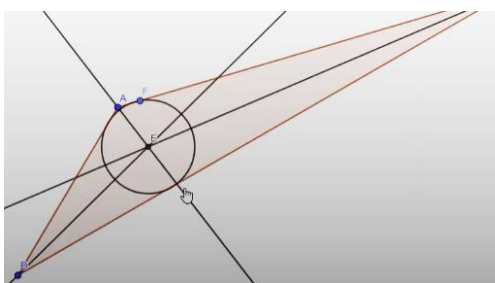
5 Juan ¿Cómo lo hacemos? Porque con mediana no es, con altura tampoco, mediatrices tampoco.

6 Luis [Traza las bisectrices del triángulo ABC, el punto de intersección y luego el círculo con centro en el incentro que pasa por la base de una de las bisectrices]



Pero no creo que corte en un solo punto, mire acá no [Hace zoom al lado AB]

7 Juan Pero hasta donde va, va hasta el punto más cercano que conecta con una recta. Como algo así.



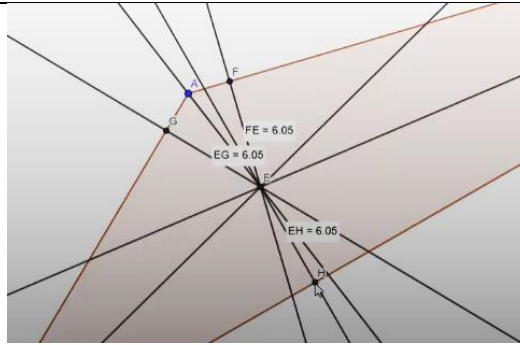
Tenemos que encontrar ese punto de tangencia.

8 Luis ¿Qué fue lo que hicimos ahorita? ¿Cómo fue que hicimos la tangente? [Se regresa a la tarea anterior]

9 Juan ¿Qué nos dice la teoría? [Busca las reglas teóricas]

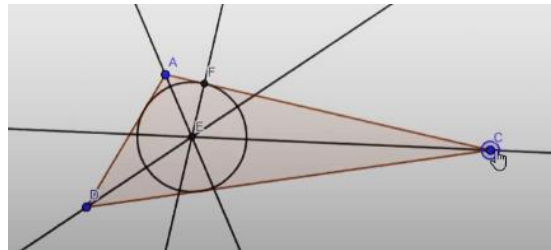
Mi idea es que lo corta en un punto que guarda una proporción, pero no, idea descartada

¿Cuál es el punto más cercano? Pues fácil, el punto más cercano a una recta siempre será una perpendicular [Traza las perpendiculares a los lados del triángulo que pase por el incentro] Ahora vamos a medir la distancia [Mide EF, EG, EH, donde E es el incentro y F,G,H son las bases de las perpendiculares]



¿Qué? Es imposible

- | | | |
|----|------|---|
| 10 | Luis | No, ya lo encontró. |
| 11 | Juan | Ah es que no se debe hacer las tres perpendiculares. Solo una. [Borra dos perpendiculares y deja una, construye el incírculo][Arrastra los puntos] |
| 12 | Luis | Lo de las bisectrices fue mi idea |
| 13 | Inv | ¿Qué hicieron? |
| 14 | Juan | Tenemos el triángulo ABC, intenté con las alturas, no funcionaban, se cortaban en un punto externo al triángulo y eso no nos sirve, mediatrices tampoco porque pasaba lo mismo que las alturas, mediana no porque el punto de intersección se acercaba mucho más a un lado del triángulo. La idea de las bisectrices fue de ella. |
| 15 | Luis | Solo fue por instinto, ya en una anterior clase sabía que las bisectrices se cortaban adentro, entonces fue por eso. |



Lo anterior evidencia que Juan y Luis partieron de un *razonamiento abductivo*, ellos necesitaban encontrar el centro del círculo para realizar la construcción requerida y consideraron, como permiso de inferir, que el centro del incírculo debía estar dentro del triángulo ABC [14].

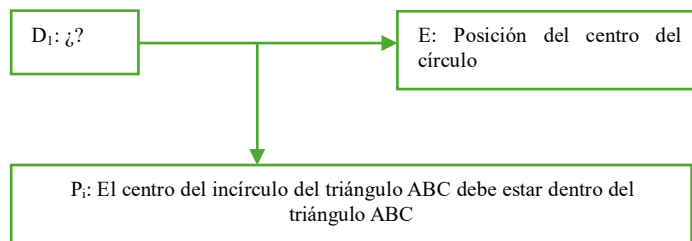


Figura 27 Razonamiento abductivo para el centro del círculo

En la búsqueda del dato necesario para aplicar el permiso de inferir establecido, Juan y Luis, en [1], consideraron la intersección de las medianas como posible centro del círculo, ya que se encontraba dentro del triángulo ABC, pero descartaron la idea; ellos explicaron en [14] que el punto de intersección se acercaba más a un lado del triángulo y por ende no funcionaba como centro. Por tanto, Luis, en [15], consideró construir las bisectrices porque sabía que se cortaban dentro del triángulo.

Luis, en [6], construyó el centro del círculo usando la intersección de las bisectrices del triángulo, no obstante, construyó el círculo usando como punto auxiliar la intersección de una bisectriz con un lado del triángulo. Por otro lado, Juan, en [7-9], indicó que necesitaba encontrar el punto más cercano al centro del círculo, por eso, en [9] consideró las perpendiculares a los lados del triángulo que pasaban por el centro del círculo; evidenciando un *razonamiento deductivo*, cuyo permiso de inferir es la definición de distancia de un punto a una recta en el plano euclidiano.

Aunque la construcción es correcta, la forma como se construyó el centro del círculo no obedece a reglas teóricas aceptadas en clase, ellos usaron un permiso de inferir empírico y por medio de ensayos fueron descartando opciones. Por tanto, se les pidió en [22] que demostraran por qué la intersección de las bisectrices era el centro del incírculo.

16	Inv	Luego de las bisectrices ¿qué hicieron?
17	Juan	El centro iba a ser ese punto de corte
18	Inv	¿Por qué es el centro del círculo?
19	Juan	Por construcción, porque es la intersección de las bisectrices. La pregunta ahora era determinar cuál era el punto a donde iba a llegar el círculo. Entonces trazamos una perpendicular a un lado que pase por ese punto de corte porque esa es la distancia menor de ese punto a la recta.
20	Inv	¿Si fuera mayor la distancia que pasaría?
21	Juan	Entonces ya no sería una tangente sino una secante
22	Inv	Bueno, entonces ahora el trabajo es demostrar por qué la intersección de las bisectrices genera el centro del círculo y luego, por qué la perpendicular genera el punto de tangencia.
23	Juan	¿Qué se tiene con las bisectrices? Proporcionalidad [Revisa las reglas teóricas] Vamos a explorar el teorema de la bisectriz. ¿Eso existe? [Busca en las reglas teóricas] Si un punto está en la bisectriz de un ángulo, entonces equidista de los lados que comprenden dicho ángulo, perfecto. Claro, mira, cuáles son los lados del ángulo DAC
24	Luis	DA y AC
25	Juan	Entonces qué pasa, si un punto está aquí [Señala la bisectriz del ángulo DAC] en cualquier lugar, entonces equidista de esos lados, o sea que tiene la misma distancia, o sea que si yo trazo un círculo aquí [señala cualquier punto de la bisectriz de DAC], entonces va a tener la misma distancia aquí [señala DA] y aquí [AC]. Ahora que pasa, si yo hago lo

		mismo con este [señala el ángulo ACD] ahora se cumple para acá [AC] y para acá [DC] y como se sigue cumpliendo para allá entonces se sigue cumpliendo para los tres.
26	Luis	Equidistar
27	Juan	Ah bueno, ¿qué es equidistar? ¿Cómo se mide la distancia de un punto a un lado? Con una línea recta perpendicular a un lado. ¿Por qué la perpendicular? Porque con las perpendiculares se mide las distancias.

En [23-27] los estudiantes *razonaron deductivamente* para realizar algunos pasos en la demostración utilizando reglas teóricas aceptadas en clase como permisos de inferir.

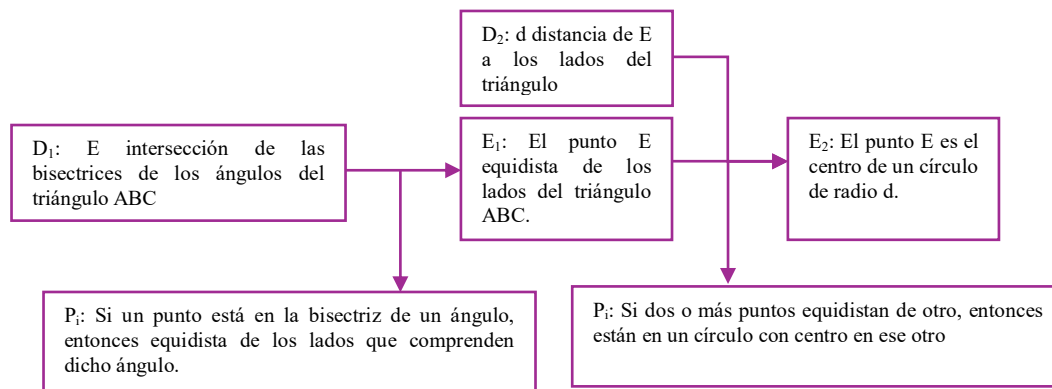


Figura 28 Razonamiento deductivo en la demostración de la construcción del incírculo

No obstante, en [25-27] se identifican aspectos que los estudiantes no explicitaron. Por ejemplo, concluyeron que el punto E, al equidistar de los lados del triángulo, era el centro del incírculo; sin embargo, con el razonamiento que desarrollaron, solo podían afirmar que E era el centro de un círculo de radio igual a dicha distancia; es decir, faltaba justificar que ese círculo resultaba tangente a los lados del triángulo. En este sentido, aunque la demostración se fundamentó en *razonamientos deductivos*, hubo pasos que se asumieron como evidentes sin ser demostrados. Por ello, se clasifica como una demostración *deductiva informal estructural*.

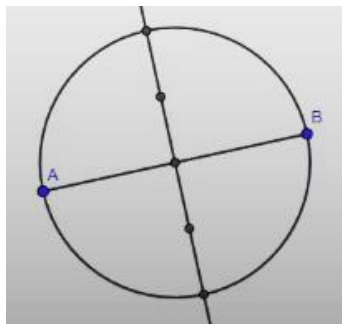
5.2.2. Exploración para el descubrimiento de relaciones en el proceso de construcción

Por otro lado, la tarea T.5.1 requería construir todos los puntos H tales que los ángulos $\angle AHB = 30^\circ$, con A y B fijos. Luis, como estrategia, construyó y arrastró unos puntos, lo que

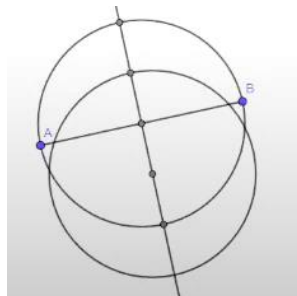
permitió a los estudiantes observar las maneras en como cambian las figuras y descubrir propiedades invariantes (Arzarello et al., 2002).

Luis, en [1], identificó que debía construir un arco de circunferencia. Para ello, construyó algunos puntos medios para formar un círculo d que pasara por A y por B, luego tomó medidas de los ángulos formados por A, por los puntos sobre d y por B.

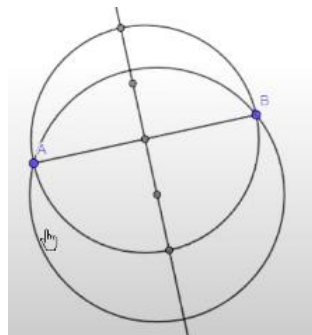
1 Luis [Construye los puntos A y B y un círculo con diámetro AB] Ahí van a ser de 90° [Traza la mediatriz de AB y marca los puntos de intersección, luego traza los puntos medios de los puntos de intersección con el centro]



[Traza un círculo con centro en uno de esos puntos medios que pasa por el otro punto medio]

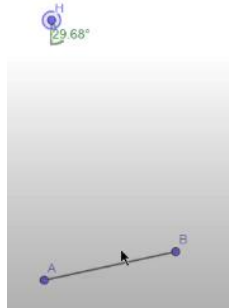


[Borra la construcción] [construye un círculo con centro en un punto medio que pasa por A y por B]

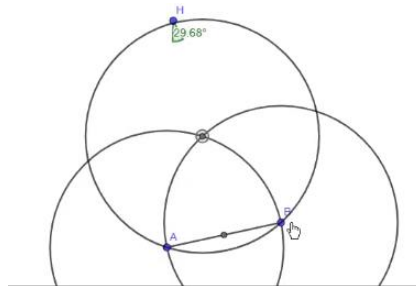


[Coloca un punto y mide el ángulo AHB, no da 30°] [Borra toda la construcción]

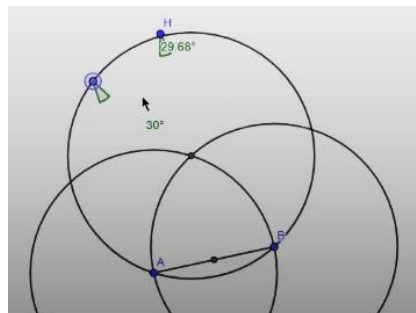
[Construye un punto H y lo arrastra hasta que el ángulo sea aproximadamente de 30°]



[Construye un círculo con centro en A que pasa por B y un círculo con centro en B que pasa por A, marca la intersección y construye un círculo con centro en esa intersección que pasa por B.]



[Ubica un punto sobre el círculo, mide el ángulo y arrastra]



Ay ya cumplió. [Borra H].

Mi intuición me decía que era algo así.

[Escribe en GeoGebra]

Tarea 2: Pregunta 1.1

Describe los intentos de construcción realizados. ¿Fueron útiles para llegar a la construcción final?

Los intentos dados fueron 3 los cuales me ayudaron poco a poco a saber que hacer mas o menos tenia la idea de hacer una circunferencia y transportarla para abajo creando arcos dentro del semicírculo pero me di de cuenta que esto hacia el ángulo mas grande con eso seguí con la misma idea pero ahora para arriba hasta llegar a lograrlo, con la ayuda de ver el problema resuelto y ya.

[Abre el documento de las reglas teóricas][Intenta construir algunos elementos auxiliares para poder demostrar la construcción, pero no lo logra]

[Escribe en GeoGebra]

Tarea 3: Pregunta 1.2

¿Por qué la construcción soporta la prueba del arrastre?



la construcción soporta la prueba del arrastre porque al construir dos círculos con radio AB que se interceptan en este segmento y en la intersección de los dos círculos creamos otro círculo con centro en esta intersección y radio AB, eso se debe por que se garantiza la propiedad del ángulo inscrito que mientras no cambie la longitud de la cuerda este no cambiara, en este caso si la longitud de AB cambia con este cambia el radio de los círculos utilizados manteniendo el ángulo.

Al construir los círculos, según lo escrito en GeoGebra, Luis se dio cuenta de la forma en cómo el ángulo cambia dependiendo de la posición del centro del círculo que pasa por A y por B, este se puede hacer más grande o pequeño.

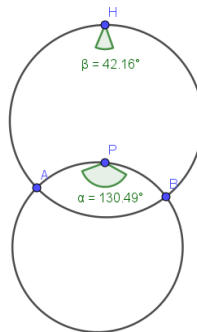


Figura 29 Relación del ángulo con la posición del centro del círculo

Luego, Luis ubicó un punto H libre en la pantalla y lo arrastró hasta que el ángulo AHB fuera aproximadamente de 30°, este punto se encontraba en la parte superior del segmento AB. Lo anterior formó parte del siguiente *razonamiento inductivo*,

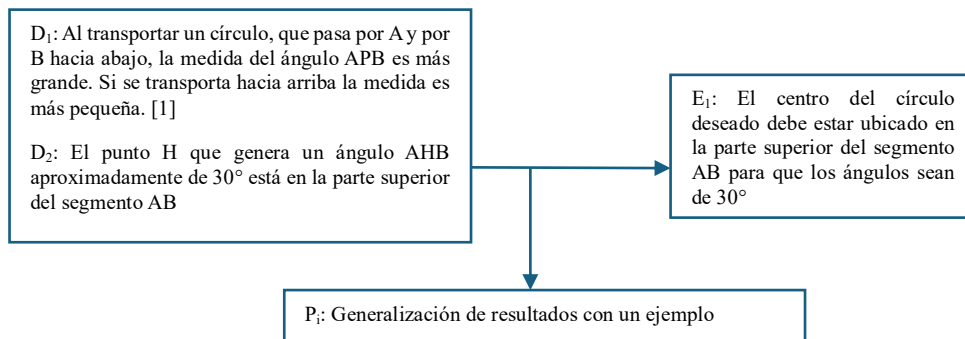


Figura 30 Razonamiento inductivo de la relación del ángulo inscrito con el centro del círculo

Con esta idea, Luis trató de “fijar” un punto en la parte superior del segmento AB que funcionara como centro del círculo, con esa finalidad, construyó un círculo con centro en A que

pasara por B, un círculo con centro en B que pasara por A, marcó la intersección ubicada en la parte superior de AB y construyó un círculo con centro en esa intersección que pasara por B, Luis notó que ese círculo parecía pasar por el punto H, por lo que ubicó otro punto sobre el círculo construido y midió el ángulo de interés, efectivamente midió 30° . Por tanto, *razonó inductivamente* generalizando y validando el proceso de construcción.

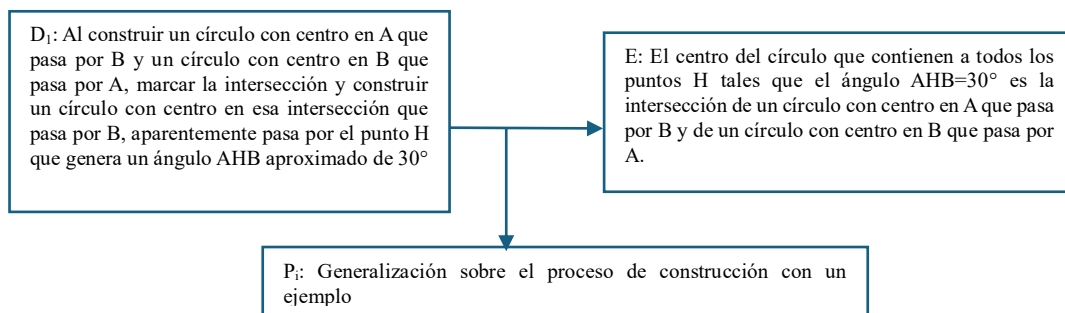


Figura 31 Razonamiento inductivo sobre el proceso de construcción de los puntos H

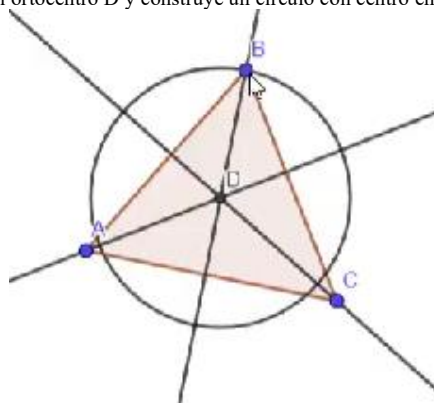
En cuanto a la pregunta “¿Por qué la construcción soporta la prueba del arrastre?” Luis basó su demostración en la forma en como construyó el círculo para esos puntos A y B y no utilizó reglas teóricas aceptadas en clase, por tanto, se considera una demostración de tipo *experimento crucial constructivo*.

5.2.3. Heurística de análisis en el proceso de construcción

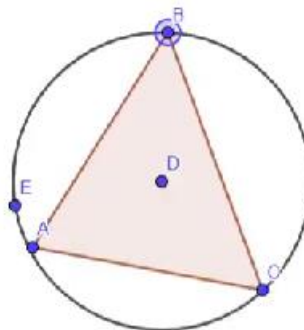
Por otra parte, en las tareas T.1.4 y T.2.2, los estudiantes Andrés y José utilizaron la heurística del análisis que Guerrero et al. (2015) consideran frecuente para desarrollar tareas relacionadas con el entorno dinámico, esta es, considerar el problema resuelto para encontrar propiedades o relaciones entre los elementos de la configuración, para esto, en ocasiones es necesario agregar elementos auxiliares.

Por ejemplo, la tarea T.1.4 consistía en construir el círculo que pasa por los tres vértices de un triángulo ABC dado. Andrés y José, en [6-7], iniciaron construyendo las alturas para utilizar el ortocentro como centro del círculo requerido, sin embargo, se dieron cuenta que no les funcionaba esta idea. Andrés, en [10], propuso considerar el problema resuelto, estrategia promovida desde el inicio del curso por el profesor, por lo que José, en [11], construyó un círculo y tres puntos sobre él para construir un triángulo. Esta representación, le ayudó a Andrés y a José a fijarse en los lados del triángulo como cuerdas del círculo deseado, por tanto, partieron de esta propiedad y *razonaron deductivamente* para construir el círculo en [12-14] (Ver Figura 32)

6	Andrés	Trace las alturas y la intersección de estas
7	José	[Construye las alturas de ABC, el ortocentro D y construye un círculo con centro en D que pasa por B]



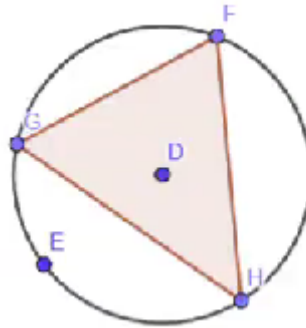
8	Andrés	No, bórralo
9	José	[Borra la construcción]
10	Andrés	Como dice el profesor, imaginemos el problema resuelto. Tenemos un círculo, pasa por los tres vértices
11	José	[Construye un círculo cualquiera y lo ubica perceptivamente para que pase por A, B y C]



Suponiendo tiene que ser así.

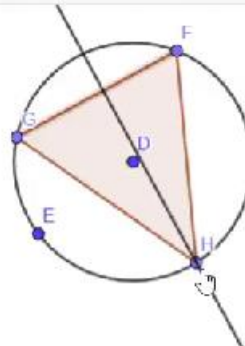
[Borra lo realizado]

Partamos de un círculo y tenemos que lograr que haya algo así. [Construye un círculo cualquiera y un triángulo GFH inscrito en él]



¿Cómo hacemos?

[Sobre el triángulo GFH construye una altura, pero nota que no pasa por el centro del círculo]



12	Andrés	No, venga [construye la mediatriz de los lados AB, BC, y AC; luego construye el círculo con centro en el circuncentro y que pasa por A] [Hace zoom] (Quiere confirmar que el círculo pase por cada uno de los vértices)
13	José	¿Qué hizo ahí? ¿Rectas?
14	Andrés	Mediatrices, si dijimos que todas las mediatrices pasan por el punto medio, entonces donde se intersequen.
15	Inv	¿Cómo lo construyeron?
16	Andrés	Mediatriz a cada segmento
17	Inv	¿Por qué la mediatriz?
18	Andrés	Porque sé que va a pasar por el punto medio de un círculo, entonces donde se intersequen ahí va a hacer un círculo que pase por todas las mediatrices, perdón, por todos los vértices del triángulo.

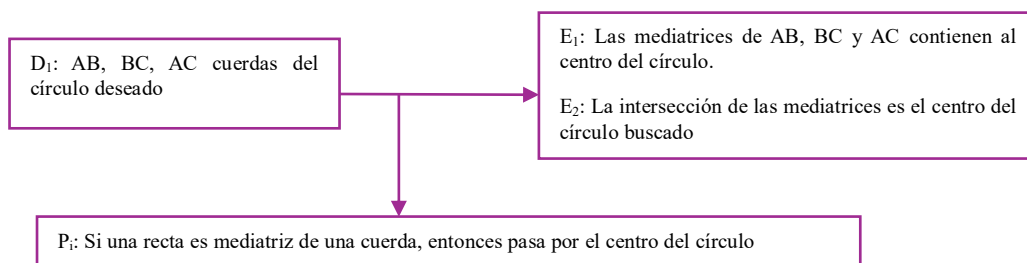
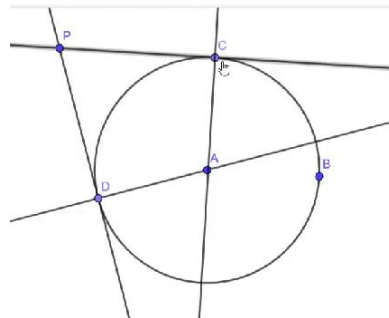


Figura 32 Razonamiento deductivo en la construcción del circuncírculo

Cuando se indagó sobre cómo y por qué siguieron ese protocolo de construcción, los estudiantes en [16-18] hacen referencia al teorema de la mediatriz de una cuerda. Por tanto, como *razonaron deductivamente* y utilizaron un permiso de inferir aceptado en clase, la demostración se categoriza como *deductiva formal estructural*.

Por otra parte, la tarea T.2.2 consistía en construir las rectas tangentes a un círculo que pasan por un punto exterior dado. Inicialmente, Andrés y José intentaron construir perpendiculares por ciertos puntos, pero no obtuvieron solución al problema, por lo que recurrieron a dibujar la solución del problema.

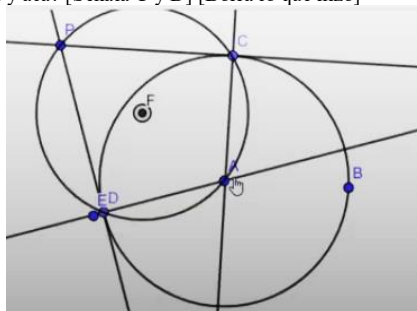
6 Andrés [Construye dos rectas, PC y PD, que perceptivamente son tangentes, construye perpendiculares a PC y a PD, que pasen por C y D respectivamente] Uy, la hice sin culpa. [Hace zoom]



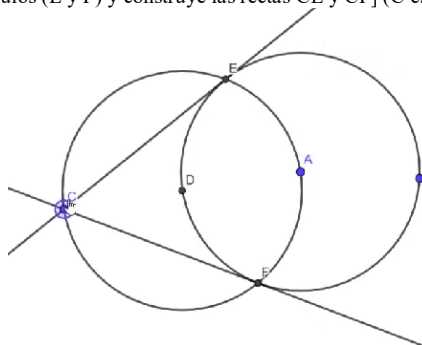
7 José ¿Qué hizo?

8 Andrés Construir las tangentes. [Mueve el círculo y deja de ser tangentes, vuelve a la configuración donde perceptivamente son tangentes] Ya.

9 José [Construye F, el punto medio de AP, y construye un círculo con centro en F que pasa por P] (perceptivamente el círculo pasa por C y D) ¿Y acá y acá? [Señala C y D] [Borra lo que hizo]



[Construye D, punto medio de AC; construye un círculo con centro en D que pasa por C, marca las intersecciones entre los círculos (E y F) y construye las rectas CE y CF] (C es punto libre)



[Arrastra la construcción y se mantiene]

En [6], Andrés y José construyeron dos rectas PC y PD y las arrastraron hasta que perceptivamente fueran tangentes en C y en D. José, en [9], construyó un círculo con diámetro PA y observó que este parecía pasar por los puntos C y D, con este ejemplo, José *razonó inductivamente* y generalizó el proceso de construcción y lo realizó nuevamente para construir las rectas tangentes.

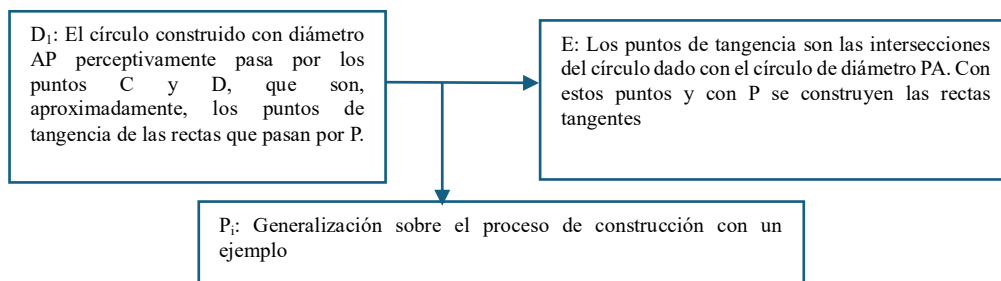


Figura 33 Razonamiento inductivo sobre la construcción de las tangentes

Aunque la construcción se basó en un razonamiento inductivo, los estudiantes en [14-16] y en [20-25] demostraron por qué el protocolo de construcción que siguieron dio como resultado las tangentes necesitadas.

14	Andrés	Imagínese ese triángulo, el triángulo CAF.
15	José	[Construye el triángulo CAF]
<p>The diagram shows two overlapping circles. The left circle has a point C on its circumference. The right circle has a diameter PA, with point A on its circumference and point B on the opposite side. A point D is located on the line segment CA. A point E is at the top intersection of the two circles. A point F is at the bottom intersection of the two circles. A triangle CAF is shaded in light red. Lines connect C to A, C to F, and A to F. A line also passes through C and D.</p>		
16	Andrés	Lo que nos dice ese triángulo es que, si un lado del triángulo es el diámetro de un círculo, entonces el ángulo que se forma, otro, es recto. Y este ángulo es recto [Señala CFA] y eso es lo que estamos buscando un ángulo recto.
20	Inv	Y ¿por qué la construcción es válida? ¿por qué se mantiene cuando se arrastra?
21	Andrés	Porque partimos de lo dado. Sin embargo, se va a conservar el ángulo recto de la tangente y la recta AF

22	Inv	¿Qué pasa con estos ángulos (CEA y CFA)?
23	Andrés	Son rectos
24	Inv	Y ¿por qué?
25	Andrés	Postulado de Tales

En estas líneas, los estudiantes tomaron como datos los objetos construidos y por medio de *razonamientos deductivos* concluyeron que las rectas CF y CE eran tangentes al círculo bajo el protocolo realizado.

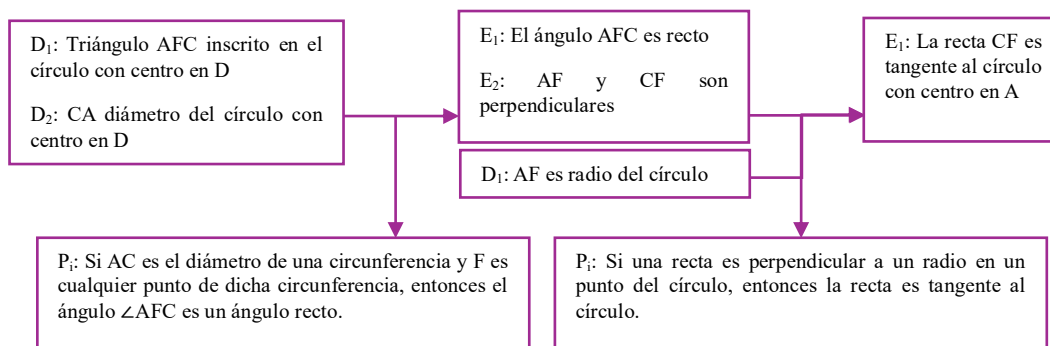


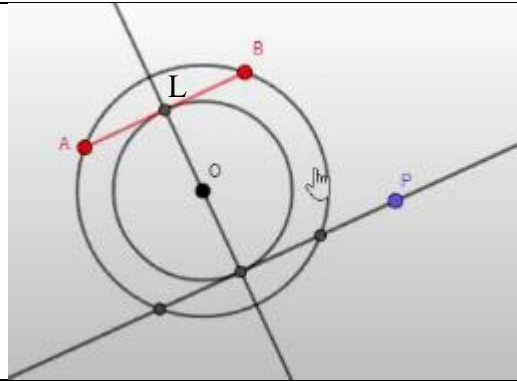
Figura 34 Razonamiento deductivo en la demostración de la construcción de las tangentes

Con lo anterior se observa que la demostración está basada en reglas teóricas aceptadas en clase y en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, por tanto, esta demostración sería *deductiva formal estructural*.

5.2.4. Uso de reglas teóricas en el proceso de construcción

Por otro lado, en las tareas T.3.1 y T.5.1 los estudiantes utilizaron reglas teóricas para iniciar la construcción. Por ejemplo, en la tarea T.3.1 los estudiantes debían construir una secante a un círculo, que pasara por un punto P dado, tal que la cuerda que genere la secante con el círculo sea congruente con una cuerda dada. Los estudiantes basaron la construcción en que “dos cuerdas son congruentes si y solamente si, equidistan del centro del círculo”.

10	Andrés	[Construye una perpendicular a AB que pasa por O, construye un círculo con centro en O que pase por el punto de intersección de la perpendicular con AB, marca el otro punto de intersección del círculo con la perpendicular y con él y con P crea una secante]
----	--------	--



11	José	No va a dar; mentiras sí, porque va a equidistar, mídala
12	Andrés	[Mide la cuerda AB y la cuerda generada por la secante creada, ambas medidas resultaron ser de 7.03] (por la posición en la que está P pareciera que las cuerdas son congruentes) ¿Pero yo cómo aseguro que este ángulo sea de 90°? (se refiere al ángulo formado por la secante y la perpendicular a AB)
13	José	Usted esta la hizo perpendicular a esta [señala AB y la recta perpendicular a AB] y esta ¿la hizo paralela a esta? [Señala la secante y la cuerda AB]
14	Andrés	No
15	José	¿De dónde la sacó?
16	Andrés	Uniendo los puntos
17	José	Ah no, entonces no.
18	Inv	Mueva A
19	Andrés	[Mueve el punto A]
20	José	[Mide las cuerdas] No
21	Andrés	No, es que necesito garantizar la perpendicularidad acá.
22	Inv	Para que
23	Andrés	Para que equidiste, como están en un mismo radio entonces si equidistan del centro van a ser congruentes las cuerdas, ya garanticé la perpendicularidad acá, me hace falta garantizar la perpendicularidad acá.
24	José	¿Si traza una paralela?
25	Andrés	[Traza una paralela a la cuerda AB que pasa por P][Mueve A] No, cuando AB se hace pequeña la otra se hace grande. Lo que toca hacer es una perpendicular a esta recta que pase por P. [Construye una perpendicular a la perpendicular de AB que pase por P] [Mueve A] [Revisan el documento de reglas teóricas]

En [10], los estudiantes realizaron construcciones para asegurar dicha equidistancia de las cuerdas al centro del círculo, de tal forma se evidenció, en un primer momento, el siguiente *razonamiento deductivo*,

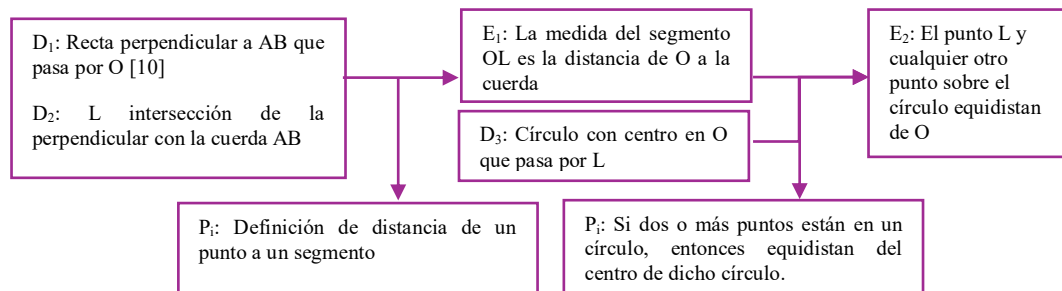
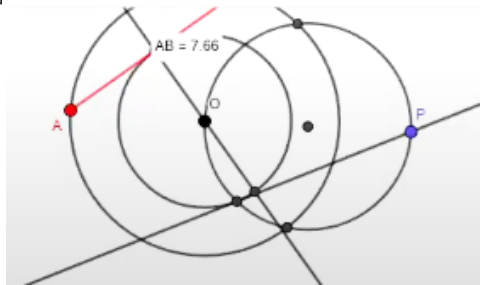


Figura 35 Razonamiento deductivo para garantizar equidistancia de puntos

Andrés, en [23], comentó que, aunque la distancia de O a cualquier punto sobre el círculo era igual a OL, necesitaba garantizar que el ángulo formado por la secante y un radio del círculo fuera de 90° , ya que necesitaba que la distancia de O a la cuerda a construir fuera igual a OL y esta distancia se representa por medio de un segmento perpendicular a la cuerda.

33	Andrés	Sabemos que esto es perpendicular a esto (se refiere a la cuerda AB y a la perpendicular a AB que pasa por O), o sea que es una tangente, necesitamos que esto sea perpendicular a esto, entonces necesitamos otra tangente.
----	--------	--

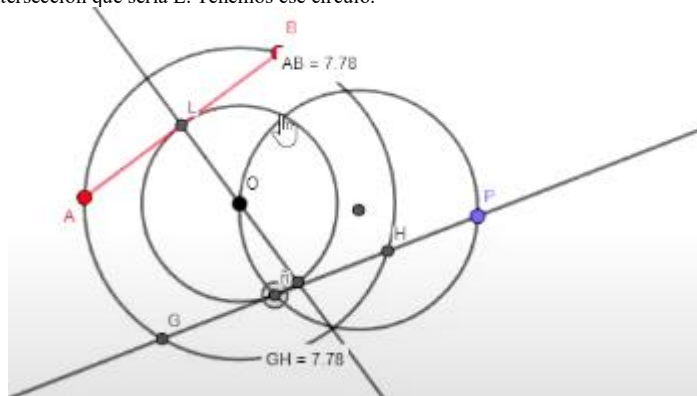
34	José	[Construye la recta que pasa por P y por el punto de intersección del círculo con centro O y radio menor con el círculo de diámetro OP]
----	------	---



En [33], Andrés determinó que lo que necesitaba era equivalente a construir una tangente al círculo de radio OL que pasara por P, por lo que la construyó siguiendo el procedimiento de la tarea T.2.2.

39	Inv	Cuéntenme, ¿qué hicieron?
----	-----	---------------------------

40	José	Hicimos una perpendicular a AB que pasara por O, en la intersección, hicimos un círculo con centro en O que pasa por la intersección que sería L. Tenemos ese círculo.
----	------	--



41	Inv	¿Para qué hicieron ese círculo?
----	-----	---------------------------------

42	Andrés	Para garantizar la equidistancia.
----	--------	-----------------------------------

43	José	Del centro a L
----	------	----------------

44	Andrés	Si tenemos un radio y este es un radio, son equidistantes, faltaría garantizar la perpendicularidad, que la cuerda GH sea perpendicular
----	--------	---

45	Inv	¿Y cómo la garantizaron?
----	-----	--------------------------

46	Andrés	Construyendo una tangente que pasara por P, con eso garantizo que este punto, el punto Ñ, sea perpendicular a uno de los radios y como este radio [señala LO] es igual a este radio [OÑ], entonces equidistan y al equidistar las cuerdas van a ser congruentes.
----	--------	--

47	Inv	¿cómo hicieron la tangente?
48	Andrés	Usando Tales

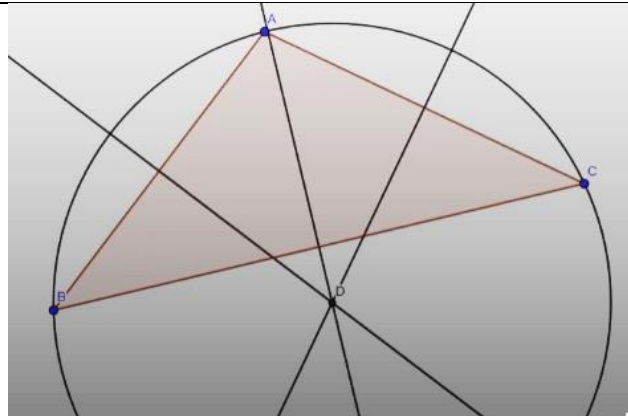
Cuando se indagó sobre lo que hicieron y por qué lo hicieron, los estudiantes, en [39-48], describieron una secuencia lógica sustentada en reglas teóricas aceptadas en clase, como la definición de radio de un círculo, de distancia, el segundo Teorema de Tales y el teorema de las cuerdas congruentes, por tanto, esta demostración estaría categorizada como *deductiva formal estructural*.

5.2.5. Protocolo de construcción conocido

En los párrafos anteriores se ha observado que los estudiantes al iniciar el desarrollo de este tipo de tareas realizaron construcciones de ensayo y error, consideraron el problema resuelto o utilizaron reglas teóricas aceptadas en clase.

Sin embargo, en la tarea T.1.4, que consistía en construir el circuncírculo de un triángulo ABC, los estudiantes Juan y Luis conocían el protocolo de construcción necesario para completar la tarea [1-6]. En este caso la pregunta “¿por qué la construcción soporta la prueba del arrastre?” fue fundamental para que los estudiantes relacionaran las acciones realizadas en la construcción con las propiedades que debían garantizar.

1	Luis	[Construye un triángulo ABC] Construya un círculo que pase por los tres vértices
2	Juan	Construya las mediatrices
3	Luis	[Construye las mediatrices de AB, BC, CD y el punto de intersección de estas, luego construye el círculo con centro en tal punto que pase por B]



		[Lee la pregunta “Describe los intentos de construcción realizados”]
4	Juan	Lo teníamos de conocimiento previo
5	Inv	¿Cómo hicieron la construcción?
6	Juan	Con la intersección de las mediatrices. Eso ya lo tenía como conocimiento previo.
7	Inv	Pero ahora la pregunta es ¿por qué funciona esa construcción?
8	Juan	¿Por qué esa construcción se cumple?
9	Inv	¿Por qué la construcción soporta la prueba del arrastre? O sea, que efectivamente al trazar las mediatrices encuentran el centro del círculo.
10	Juan	Esas demostraciones de demuestre que algo pasa por otra cosa, lo he evitado siempre, eso es imposible, y los últimos problemas se han tratado de eso. [Lee la pregunta “¿Por qué la construcción soporta la prueba del arrastre?”] Vamos a partir de lo siguiente, vamos a hacer primero que todo una conjetura.
11	Luis	¿Para qué conjetura?
12	Juan	Si un triángulo está inscrito dentro de un círculo, no, no, si los tres vértices de un triángulo están inscritos dentro de un círculo, entonces, la intersección de sus mediatrices pasa por el centro de este. O la otra sería...
13	Luis	Si la intersección de las mediatrices es el centro de un círculo, entonces el triángulo queda inscrito en él
14	Juan	Pero esa más compleja, porque tenemos que ver que los tres puntos caen en el círculo. Entonces más bien partimos de la otra, de que el círculo, efectivamente ya están ahí, y las mediatrices..., eso se cumple por el teorema de allá, que dice que, si tenemos una cuerda, que no es diámetro, los lados del triángulo vienen siendo cuerdas, por lo tanto, efectivamente, como pasa por el punto medio, lo biseca, entonces es perpendicular y por lo tanto pasa por el centro.
15	Luis	[Arrastra el triángulo de tal forma que BC parece diámetro]
16	Juan	Bueno, ya no podemos usar eso para demostrar.
17	Luis	¿Por qué no?
18	Juan	Porque en ese teorema está la condición de que no debe ser diámetro
19	Luis	[Lee el teorema] Pero vamos a trabajar sobre el primer teorema de la mediatriz. Dice, si una recta es mediatriz de una cuerda, entonces pasa por el centro del círculo.
20	Juan	Si ahí está
21	Luis	Y ya, porque los tres lados son cuerdas y sus mediatrices van a tener que pasar por el centro
22	Inv	¿Cómo van?
23	Juan	Vamos a partir de eso, de si un triángulo está inscrito en un círculo entonces las mediatrices de los lados pasan por el centro del círculo, porque se cumple que los lados del triángulo son cuerdas del círculo y pues las mediatrices son perpendiculares a las cuerdas y por el primer teorema de la mediatriz se cumple.

En [12] Juan estableció la conjetura que debían demostrar para explicar por qué el protocolo de construcción era válido, en las siguientes líneas los estudiantes buscaron un permiso de inferir y unos datos que les permitieran concluir lo establecido en [12], evidenciando el siguiente *razonamiento abductivo creativo*.

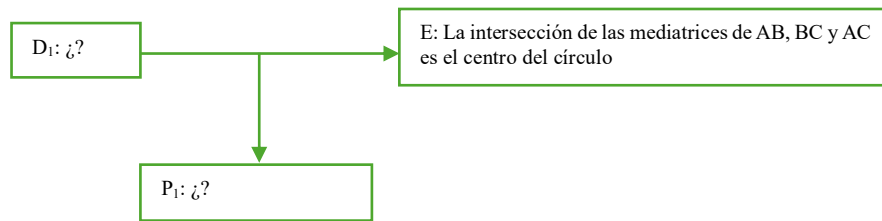


Figura 36 Razonamiento abductivo para demostrar el centro del circuncírculo

Juan en [14] pensó en utilizar como permiso de inferir, lo que llamamos en clase, el segundo teorema de la mediatriz de una cuerda: Si una recta que pasa por el centro del círculo biseca a una cuerda, que no es el diámetro, entonces, es perpendicular a la cuerda. Juan descartó esta regla teórica como permiso de inferir porque este teorema excluye a las cuerdas que son diámetros y no porque el consecuente no esté relacionado con la conclusión que deseaban justificar. Luis en [19] planteó utilizar, como permiso de inferir, el primer teorema de la mediatriz de una cuerda: Si una recta es mediatriz de una cuerda, entonces contiene al centro del círculo. Juan estuvo de acuerdo y completaron el razonamiento abductivo de la siguiente manera.

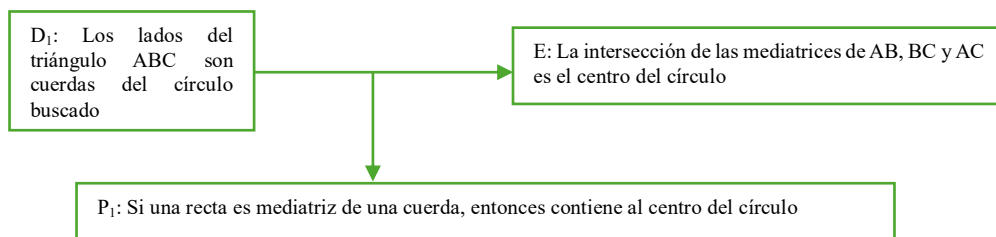


Figura 37 Permiso de inferir y datos del razonamiento abductivo del centro del circuncírculo

En [23] Juan organizó la información y estableció una secuencia lógica que parte de los datos del problema, tomando los lados del triángulo como cuerdas, y basada en el primer teorema de la mediatriz de una cuerda, por tanto, la demostración se clasifica como *deductiva formal estructural*.

5.2.6. Algunas reflexiones sobre este tipo de tareas

El MEN (2004) menciona la existencia de dos polos en la Geometría, la intuición y la deducción, así mismo, indica que las tareas de construcción pueden funcionar como puente entre dichos polos. Lo expuesto previamente secunda las ideas del MEN (2004), pues se evidenció que las construcciones geométricas pueden tener un inicio inductivo, en donde los estudiantes pueden explorar y construir elementos auxiliares para observar y generalizar propiedades que se deben cumplir en la construcción y garantizarlas; sin embargo, indagar ¿por qué el protocolo de construcción fue válido? se convierte en un punto clave, Galindo (1998) indica que escribir una explicación sobre cómo crearon la construcción y por qué funciona permite identificar y realizar conexiones entre cada paso del protocolo de construcción con propiedades geométricas que justifican su validez. De este modo, se evidenció que la mayoría de las demostraciones de protocolos de construcción que comenzaron con una base empírica terminaron convirtiéndose en demostraciones deductivas.

Lograr el paso de la intuición a la deducción no es sencillo, los resultados mostrados pueden justificarse, en parte, porque durante todo el desarrollo del curso de Geometría Euclidiana los estudiantes se enfrentaron a este tipo de tareas, lo que generó ciertas reflexiones y criterios fundamentales para el desarrollo de las mismas. Por ejemplo, los estudiantes logran diferenciar entre un dibujo y una construcción, lo que según Galindo (1998) ayuda a los estudiantes a pensar en sus construcciones como objetos que deben poseer ciertas propiedades geométricas. Por consiguiente, los estudiantes reconocen que las propiedades que están presentes en una construcción no son productos del azar, sino que debe existir una cadena deductiva, basada en reglas teóricas, que las valide (MEN, 2004), lo que invita al estudiante a demostrar el protocolo de construcción dotándolo de razonamientos deductivos teóricos, esto, según Mariotti y Bartolini

(1998) corresponde a un avance esencial, pues los estudiantes pasan de validar únicamente la construcción mediante el arrastre a explicar la prueba del arrastre en sí misma.

Sin embargo, algunas construcciones se apoyaron desde el inicio en razonamientos deductivos, utilizando como permisos de inferir teoremas y definiciones que garantizaban las propiedades necesarias y la reproductibilidad de la construcción (MEN, 2004). En estos casos, el tránsito hacia la demostración fue inmediato, pues la misma construcción contenía la justificación teórica de su validez. Esto muestra que las construcciones pueden cumplir una doble función, servir como un medio exploratorio que prepara el terreno para la deducción, o bien, constituirse directamente en un proceso deductivo que conduce de manera natural a la formalización de la demostración.

En cuanto a la secuencia de enseñanza, la pregunta “¿Por qué la construcción soporta la prueba del arrastre?” solía ser respondida por los estudiantes apelando a las “reglas del juego”. Es decir, señalaban que la validez se mantenía porque partían de los objetos dados y, al arrastrar, los objetos construidos seguían siendo los mismos. Sin embargo, cuando la profesora-investigadora indagaba más a fondo sobre cómo habían realizado la construcción y por qué funcionaba, los estudiantes recurrían a explicaciones teóricas.

Por esta razón, se propone reformular la pregunta en términos más precisos, de modo que guíe a los estudiantes hacia una demostración geométrica más sólida. La formulación sugerida es “¿Qué relaciones geométricas explican que el protocolo de construcción funcione al arrastrar los puntos?”.

5.3. Sobre las tareas de cajas negras

En la secuencia de enseñanza se diseñaron e implementaron tres tareas de cajas negras: dos de ellas basadas en Sangakus estáticos y la otra en una construcción dinámica que debían reproducir. Durante el desarrollo de estas tareas, los estudiantes coordinaron razonamientos inductivos y deductivos que les permitieron inferir y reconstruir el procedimiento oculto de la caja negra.

5.3.1. *Cajas negras estilo Sangaku*

Las tareas T.2.4 y T.3.3 consistían en construir el Sangaku que se mostraba en el applet en formato imagen. Para ello, en un primer momento, los estudiantes debían identificar las propiedades geométricas de la figura y de los objetos geométricos que la conformaban (Triana, 2013). Al tener el Sangaku en formato imagen, los estudiantes debían tener cuidado con las afirmaciones que podían asumir como ciertas al observar el dibujo (Samper et al., 2013).

Cuando los estudiantes identificaron las relaciones y propiedades que debían cumplirse, emplearon el razonamiento deductivo para construir algunas de las propiedades del Sangaku. Sin embargo, otras las formularon a partir de suposiciones basadas en lo que observaban en la figura, es decir, realizaban conjeturas sobre ciertos elementos del Sangaku. En esos casos, realizaban la construcción tomando como punto de partida dichas conjeturas y, cuando el proceso les permitía obtener las propiedades requeridas, generalizaban la construcción mediante un razonamiento inductivo por generalización de procesos, es decir, demostraban la conjetura de manera empírica.

Por ejemplo, en la tarea T.2.4 se esperaba que los estudiantes identificaran la existencia de un triángulo ABC isósceles en A, un círculo tangente a los lados del triángulo ABC, un círculo que

es tangente a los lados del triángulo formados por A y por dos puntos de tangencia determinados por el primer círculo y un círculo que es tangente a los dos anteriores.

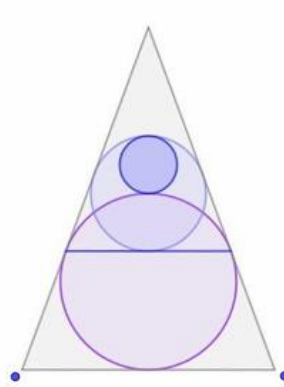


Figura 38 Sangaku de la tarea T.2.4

Precisamente, una de las dificultades que se evidenció al iniciar esta tarea fue determinar qué propiedades y relaciones geométricas podían considerarse ciertas a partir de la imagen. Esto se debe a que, durante el curso de Geometría Euclidiana, se ha inculcado a los estudiantes la idea de “dudar de lo que ven” (MEN, 2004). Esta situación se hizo evidente en el trabajo de Andrés y José, quienes comenzaron a desarrollar la tarea utilizando un triángulo cualquiera, sin reconocer la congruencia entre dos de sus lados.

Por otra parte, Juan y Luis consideraron como cierta la idea de que el triángulo de mayor tamaño que se presentaba en la imagen era isósceles; por tanto, iniciaron la construcción garantizando dicha propiedad (las paralelas construidas simulaban los márgenes de la imagen del Sangaku). Las acciones que realizaron en [1] evidenciaron el *razonamiento deductivo* que llevaron a cabo para garantizar la propiedad de la congruencia de lados, dicho razonamiento usó como permiso de inferir principal el teorema de la mediatriz (ver Figura 39).

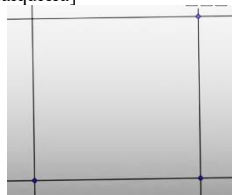
1 Juan [Experimenta con la imagen del Sangaku borrando los puntos que determinan la posición del Sangaku] Realice una descripción detallada de los objetos que observa en el Sangaku. Vamos a intuir que es lo que está en la imagen.

Tarea 16: Pregunta 4.1

Realice una descripción detallada de los objetos que se observan en el Sangaku junto con sus relaciones geométricas.

En el Sangaku se pueden observar varias figuras geométricas, entre ellas algunos triángulos, círculos, rectas, etc.. Se puede ver que los lados del triángulo más grande son tangentes de círculo rosa, también podemos ver un segmento formado por dos puntos de tangencia del círculo rosa. Podemos ver otro círculo, inscrito en el triángulo grande, que tiene centro en la intersección entre la perpendicular del segmento anterior que pasa por el punto medio y el círculo rosa. Y un último círculo morado, que tiene centro en el punto medio entre la intersección anterior y una nueva intersección que se forma con la misma perpendicular y el círculo 2 que no es el mismo punto que pasa por el segmento antes mencionado.

Construya el mismo sangaku, bueno primero un triángulo isósceles, primero tenemos la recta [Construye una recta cualquiera que pasa por dos puntos y las perpendiculares a la recta que pasa por dichos puntos, traza una paralela a la primera recta que pase por un punto cualquiera]



Ahora tenemos un triángulo que se forma como un isósceles [Traza la mediatriz y la intersección de la mediatriz con la paralela] vamos a trazar el triangulito.

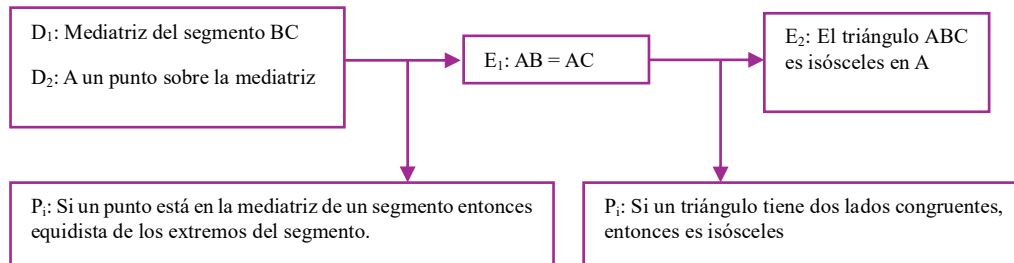
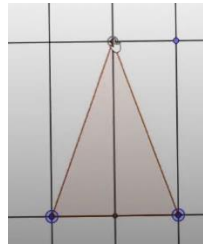
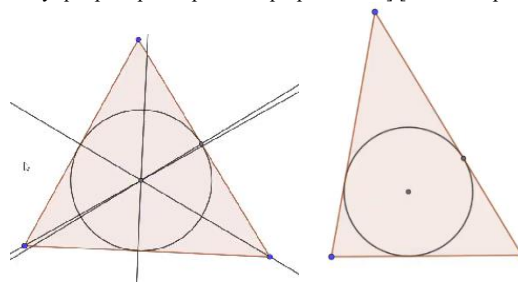


Figura 39 Razonamiento deductivo para construir un triángulo isósceles

Posteriormente, tanto el grupo de Juan y Luis como el de Andrés y José identificaron un círculo tangente a los tres lados del triángulo ABC, el cual construyeron en [10].

10 José [Traza las bisectrices de los ángulos del triángulo y perpendiculares a los lados que pasen por el incentro, construye el círculo con centro en el incentro y que pasa por el pie de la perpendicular] [oculta las perpendiculares y las bisectrices]



Las acciones realizadas para construir el incírculo, en [10], evidenciaron la presencia de un *razonamiento deductivo* cuyo permiso de inferir fue el teorema de la bisectriz de un ángulo.

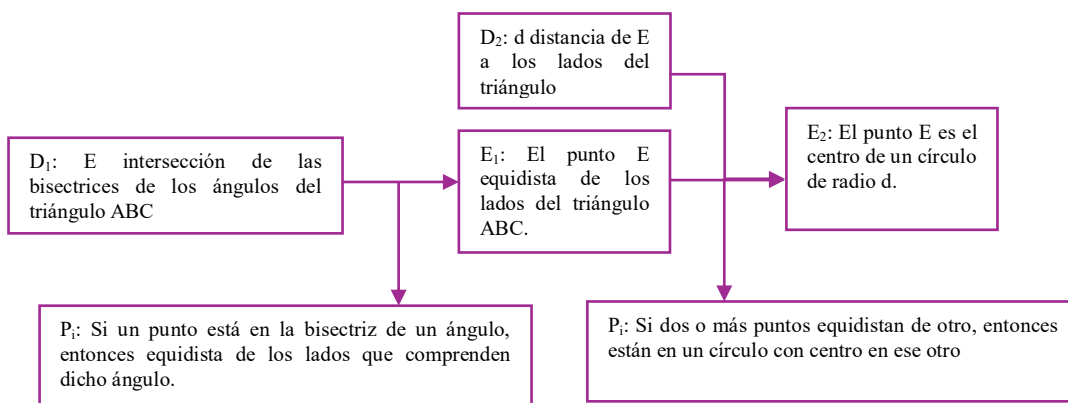
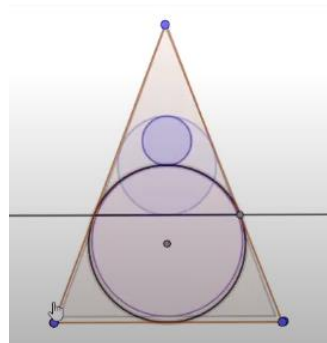


Figura 40 Razonamiento deductivo para construir el incírculo del Sangaku

En las líneas anteriores se observó que los estudiantes identificaron en el Sangaku ciertas propiedades y relaciones geométricas que garantizaron en su construcción por medio de razonamientos deductivos con permisos de inferir aceptados en clase. No obstante, para asegurar la presencia de otras propiedades, los estudiantes recurrieron a supuestos visuales extraídos de la imagen, es decir, conjeturas que perceptivamente parecían verdaderas. Estas conjeturas se fueron construyendo en GeoGebra para determinar cuál de ellas permitía asegurar la existencia de la propiedad deseada. De esta manera, los estudiantes garantizaban que la conjetura era cierta, en consecuencia, realizaban una *demostración empírica* de la misma.

Por ejemplo, Andrés y José, en [21-22], conjeturaron que el segmento que ayudaba a constituir el triángulo de menor tamaño era paralelo a un lado del triángulo mayor; para asegurar tal supuesto los estudiantes construyeron una paralela a un lado del triángulo que pasara por un punto de tangencia y superpusieron la imagen del Sangaku a la construcción, los estudiantes observaron que aparentemente la paralela construida concordaba con el segmento del Sangaku, por tanto los estudiantes generalizaron el proceso por medio del *razonamiento inductivo* y concluyeron que la forma para construir dicho segmento por medio de dicha paralela (ver Figura 41).

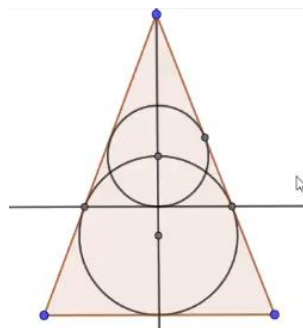
21 Andrés Intentemos llevar el tamaño al de nosotros [arrastra la imagen del Sangaku sobre la construcción que ellos hicieron]



Si es ese punto (se refiere a que la intersección de la paralela con el otro lado si es el punto que forma el triángulo pequeño)

Ahora hacemos con el triángulo pequeño lo mismo que hicimos con el otro triángulo

22 José [Traza la intersección de la paralela con el otro lado, construye las bisectrices de los ángulos del triángulo pequeño, luego la perpendicular y con eso el incírculo del triángulo pequeño]



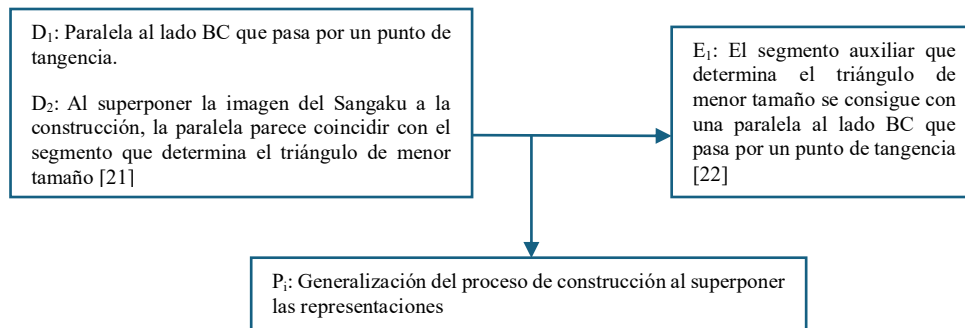
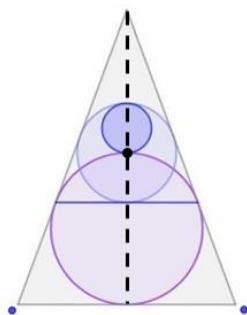


Figura 41 Razonamiento inductivo del segmento paralelo

Dicho *razonamiento inductivo* permitió que los estudiantes validaran su conjetura, como los argumentos que utilizaron se basaron en elementos visuales al superponer la imagen con la construcción, se considera que esta demostración es *empírica ingenua perceptiva*.

En el mismo orden de ideas, Juan y Luis conjeturaron que el centro del círculo de radio intermedio era la intersección de la mediatriz del segmento formado por los puntos de tangencia y por el círculo de radio mayor. Tal relación no es evidente en la imagen del Sangaku, sin embargo, los estudiantes al observar la imagen extrajeron tal supuesto.



Tarea 16: Pregunta 4.1

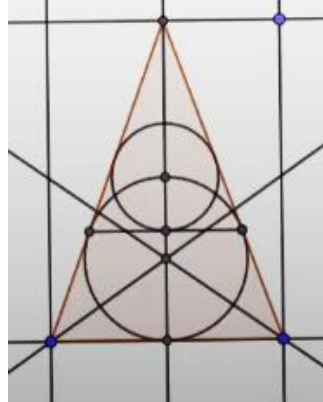
Realice una descripción detallada de los objetos que se observan en el Sangaku junto con sus relaciones geométricas.

En el Sangaku se pueden observar varias figuras geométricas, entre ellas algunos triángulos, círculos, rectas, etc.. Se puede ver que los lados del triángulo más grande son tangentes de círculo rosa, también podemos ver un segmento formado por dos puntos de tangencia del círculo rosa. Podemos ver otro círculo, inscrito en el triángulo grande, que tiene centro en la intersección entre la perpendicular del segmento anterior que pasa por el punto medio y el círculo rosa. Y un último círculo morado, que tiene centro en el punto medio entre la intersección anterior y una nueva intersección que se forma con la misma perpendicular y el círculo 2 que no es el mismo punto que pasa por el segmento antes mencionado.

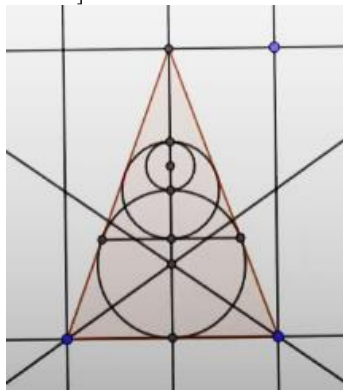
Figura 42 Supuesto del centro del círculo de radio intermedio

Juan y Luis utilizaron dicho supuesto y en [1] construyeron el círculo de radio intermedio con centro en la intersección planteada. De esta forma, los estudiantes observaron que el círculo parecía mantenerse tangente y por tanto generalizaron el proceso de construcción por medio del *razonamiento inductivo*.

- 1 Juan [Marca los puntos de tangencia, traza el segmento formado por dichos puntos y la intersección de la mediatriz con el círculo construido, construye el círculo con centro en ese punto que pasa por la intersección de la mediatriz con el segmento de los puntos de tangencia][Arrastran y se mantiene la tangencia]



[Luego marca la intersección de la mediatriz con el nuevo círculo creado y construye el punto medio entre este y el centro del círculo nuevo, con ello construye un nuevo círculo]



[Oculta algunos objetos auxiliares] [Mueve los puntos] (se mantienen las propiedades)

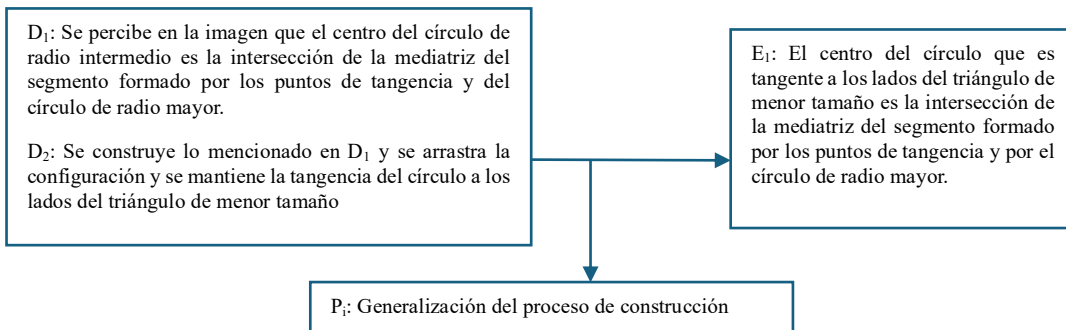


Figura 43 Razonamiento inductivo en la construcción del centro del círculo de radio intermedio

Este *razonamiento inductivo* permitió que los estudiantes validaran su conjetura. Además, dado que los argumentos empleados se sustentaron en la observación de que, al construir el ejemplo, la tangencia se mantenía perceptivamente al arrastrar, es decir, no se presentaban

contraejemplos durante la manipulación, dicha demostración se considera un *experimento crucial basado en el ejemplo*.

Lo anterior, según Galindo (1998), es una estrategia para desarrollar este tipo de tareas, los estudiantes formulan hipótesis sobre relaciones que se presentan en la figura, construyen su propio boceto siguiendo las hipótesis y comparan las propiedades de la figura dada y de su propio boceto para validar las hipótesis, favoreciendo de esta forma el razonamiento inductivo y las demostraciones empíricas.

Ese ir y venir de razonamientos deductivos e inductivos para la construcción del Sangaku también se evidenció en la tarea T.3.3. En ella se esperaba que los estudiantes identificaran la existencia de un cuadrado, de un semicírculo con diámetro el lado del cuadrado, dos rectas que son tangentes al semicírculo y a su vez a dos círculos que también son tangentes a ciertos lados del cuadrado.

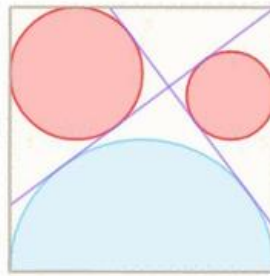
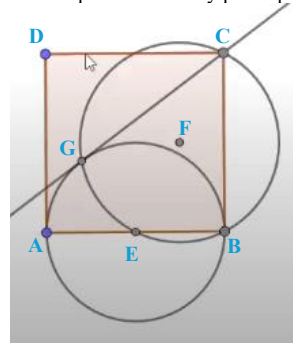


Figura 44 Sangaku de la tarea T.3.3

Andrés y José, luego de construir el cuadrado y el semicírculo, identificaron una tangente al semicírculo que pasaba por el vértice superior derecho del cuadrado. Los estudiantes, en [2], construyeron dicha tangente basándose en un *razonamiento deductivo* teórico cuyos permisos de inferir fueron el teorema de las rectas tangentes y el segundo teorema de Tales.

- 2 Andrés Necesito trazar una tangente [Construye el punto medio del centro del círculo y el extremo superior derecho del cuadrado, de ahí construyó un círculo con centro en el punto medio que pasa por el extremo superior derecho, marcó la intersección entre los círculos y trazó la recta que pasa por el extremo superior derecho y por el punto de intersección]



[Oculta el círculo auxiliar y el punto medio]

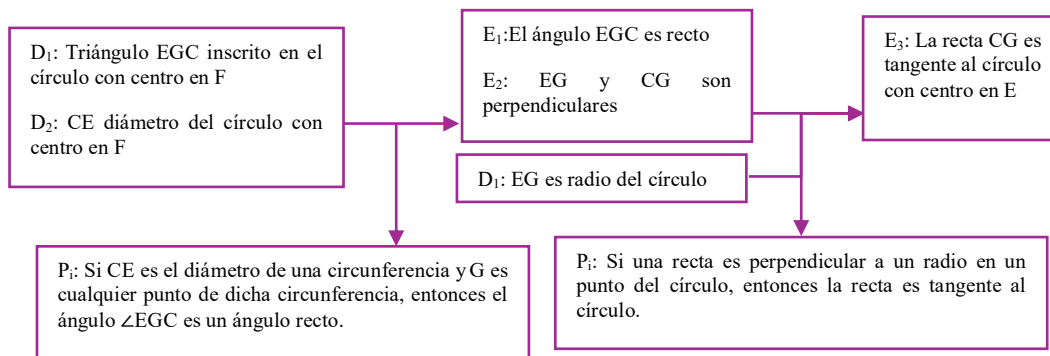


Figura 45 Razonamiento deductivo en la construcción de la tangente en el Sangaku

La recta tangente, junto con los lados izquierdo y superior del cuadrado, formaba un triángulo en el que el círculo rosado de mayor tamaño era tangente. Es decir, con la construcción de la primera tangente, era posible construir uno de los círculos rosados. No obstante, los estudiantes no identificaron el triángulo y empezaron a buscar formas para construir la segunda recta tangente. Esto puede deberse a que en el Sangaku el triángulo mencionado estaba solapado con otras figuras y según el MEN “si dos figuras están solapadas será más difícil su percepción” (2004, p. 12).

Este orden en la construcción no era el más adecuado para el desarrollo de la tarea, ya que no se contaba con un punto por donde pasara dicha recta tangente. Aun así, los estudiantes

construyeron diversos puntos medios y los unieron para identificar si alguna de esas rectas era tangente al semicírculo. Andrés y José, en [9], conjeturaron que los segmentos tangentes del Sangaku parecían perpendiculares, por tanto, construyeron la perpendicular a la primera recta tangente, pasando por el punto medio del segmento determinado por el centro del semicírculo y el vértice superior derecho del cuadrado. En [10-11] los estudiantes hicieron zoom a la construcción y concluyen que la recta si era tangente al semicírculo.

9	José	[Vuelve a tomar el mouse y construye una perpendicular a la tangente creada que pasa por el punto medio del centro del círculo y del extremo superior derecho]
10	Andrés	[Le hace zoom]
11	José	Si es, si es.

Es decir, Andrés y José validaron la conjetura y la construcción por medio del siguiente *razonamiento inductivo*,

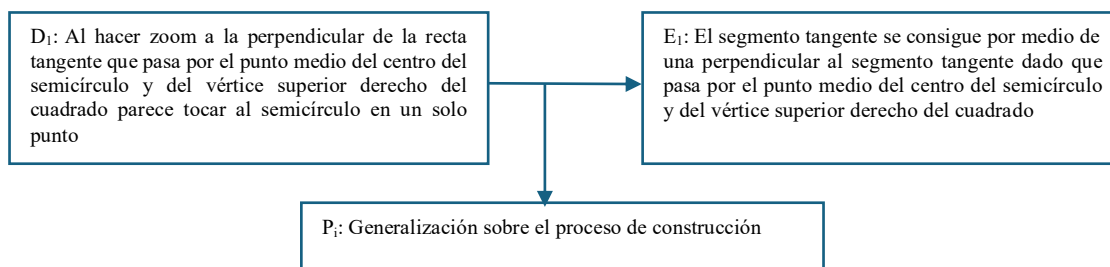


Figura 46 Razonamiento inductivo para validar la perpendicularidad de dos segmentos tangentes

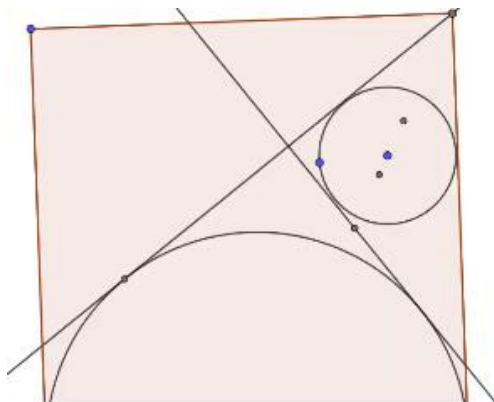
Como los estudiantes validaron que los segmentos tangentes eran perpendiculares entre sí al construir el ejemplo y al observar que la tangencia se mantenía perceptivamente al arrastrar, es decir, no se presentaban contraejemplos durante el arrastre, dicha demostración se considera un *experimento crucial basado en el ejemplo*.

Luego de construir las dos rectas tangentes, los estudiantes se interesaron por encontrar los centros de los círculos rosados; como estrategia ubicaron unos círculos que aparentemente fueran tangentes a ciertos segmentos, de esta forma, analizaron la figura para encontrar propiedades. En ese sentido, construyeron puntos medios, pero ninguno concordaba con el centro del círculo, luego en [23], José construyó dos bisectrices y la intersección de estas perceptivamente coincidía con el centro del círculo del ejemplo. Por tanto, por medio del *razonamiento inductivo* generalizaron la construcción del centro del círculo buscado.

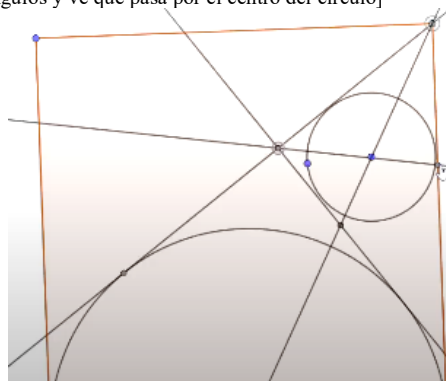
23

José

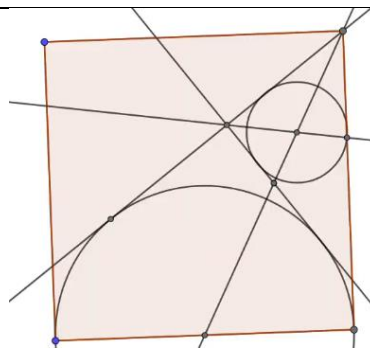
Un cuadrado de lado el radio del círculo. [Borra las perpendiculares hechas por Andrés] [Vuelve a aplicar su estrategia, considera un círculo que aparentemente sea tangente y busca que algún punto característico concuerde con el centro]



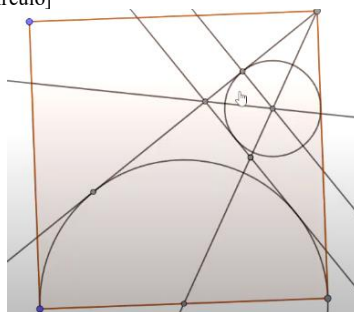
[Traza la bisectriz de dos ángulos y ve que pasa por el centro del círculo]



[Borra el círculo, construye las bisectrices y un círculo con centro en el punto de intersección de las bisectrices que pasa por la base de una de las bisectrices]



24	Andrés	Aumente
25	José	[Hace zoom, no son tangentes]
26	Andrés	Si usted prestara atención a las clases lo haría [Construye una perpendicular a una tangente que pasara por el incentro y con él construye el incírculo]



Ahora toca el otro círculo

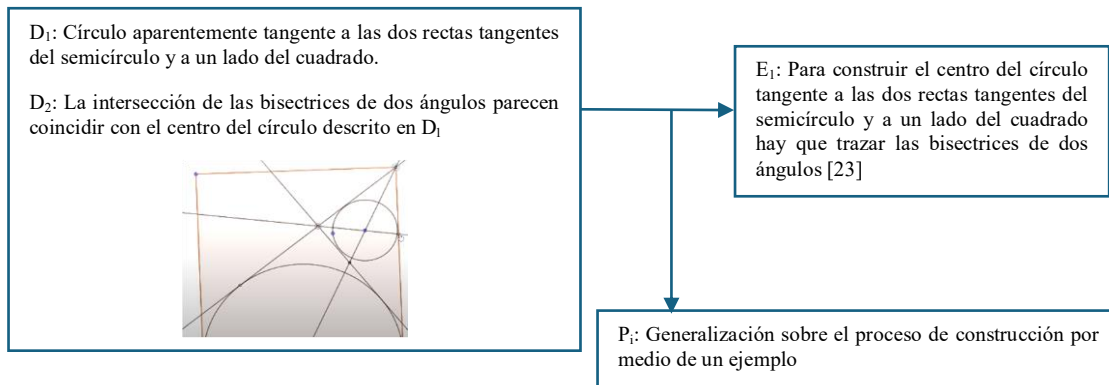


Figura 47 Razonamiento inductivo para encontrar el centro del círculo del Sangaku

Al encontrar el centro, Andrés, en [26], terminó de construir el círculo tangente a los segmentos requeridos siguiendo el protocolo de construcción realizado en la tarea T.2.3. El otro círculo rosado, lo construyeron de la misma manera.

En estas tareas de cajas negras con Sangakus la pregunta ¿Por qué la construcción que realizó tiene las mismas propiedades del Sangaku? no fue contestada por los estudiantes o hicieron

alusión a las propiedades que cumplía el Sangaku más no al por qué se cumplían. Sin embargo, a lo largo de la construcción del Sangaku se evidenció que los estudiantes realizaban conjeturas de lo que veían y la forma en que las demostraban, aunque no fuera de manera verbal, fue construyendo la conjetura y observando que las propiedades que requerían se mantenían al arrastrar, por tanto, generalizaban la construcción y validaban la conjetura, es decir, realizaban demostraciones empíricas al ir desarrollando la tarea.

5.3.2. Caja negra dinámica

La tarea T.7.3 involucraba una caja negra dinámica conformada por una recta tangente a un círculo. Los estudiantes debían reproducir el comportamiento de la caja negra, por lo que, en un primer momento, como menciona Triana (2013), mediante el uso de la herramienta de arrastre, los estudiantes observaron el comportamiento de las figuras geométricas, elaboraron conjeturas, hallaron propiedades invariantes, distinguieron elementos dependientes e independientes

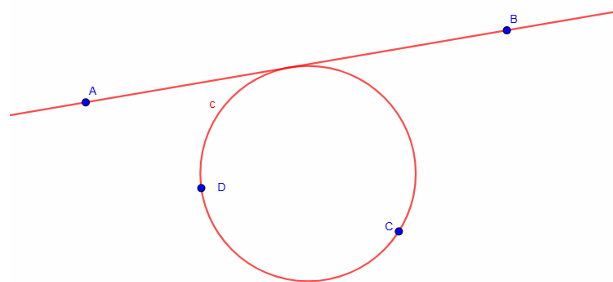


Figura 48 Caja negra dinámica

Andrés y José, razonando *inductivamente*, concluyeron que el círculo dependía de la recta; pero no identificaron que el círculo también dependía de los puntos D y C.

Tarea 13: Pregunta 3.1

¿Qué objetos dependen de otros objetos? Describa esa dependencia. ¿Cómo llegó a esa conclusión?

el círculo depende de la recta, llegamos a esta conclusión luego de observar como a medida que se mueve un punto sobre el círculo la recta permanece quieta, por el contrario, cuando se mueve la recta el círculo empieza a variar

Figura 49 Respuesta de Andrés y José sobre la dependencia de objetos

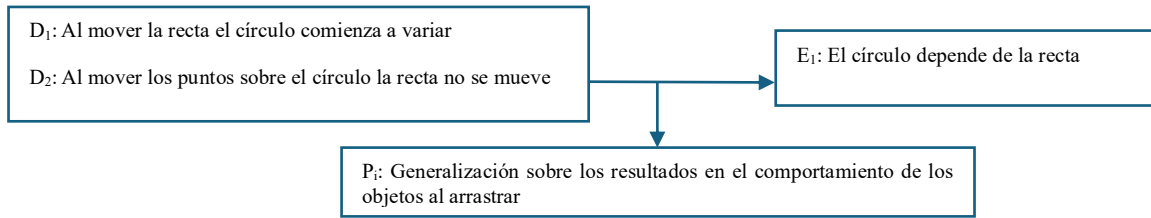


Figura 50 Razonamiento inductivo de Andrés y José sobre la dependencia de los objetos

La propiedad de la tangencia fue rápidamente identificada por los estudiantes, por lo que empezaron a realizar construcciones para asegurar la propiedad, tratando de respetar la dependencia establecida.

16	Andrés	Toca hacer lo de arriba. Haga una recta y luego hágale una tangente al círculo
17	José	[Traza una recta cualquiera y un círculo con centro cualquiera que pasa por uno de los puntos que define a la recta]
18	Andrés	¿No es capaz? [Construye una perpendicular a la recta y construye un círculo tangente a la recta]
<p>[Arrastra los puntos] Pero vea, no cumple con las condiciones dadas. [Borra la construcción] [Construye un círculo y una recta que sea tangente al círculo en un punto] [Borra la construcción] [Utiliza la herramienta “círculo por tres puntos”, encuentra el centro del círculo, traza un radio y una tangente al radio que pase por el círculo]</p>		
<p>Creo que está mal. Primero se construye la recta y luego se construye el círculo según lo que dijimos. [Borra todo] [Construye una recta cualquiera]</p>		

En [16-18], los estudiantes partieron de una recta y construyeron un círculo tangente a la recta, siguiendo el próximo *razonamiento deductivo*.

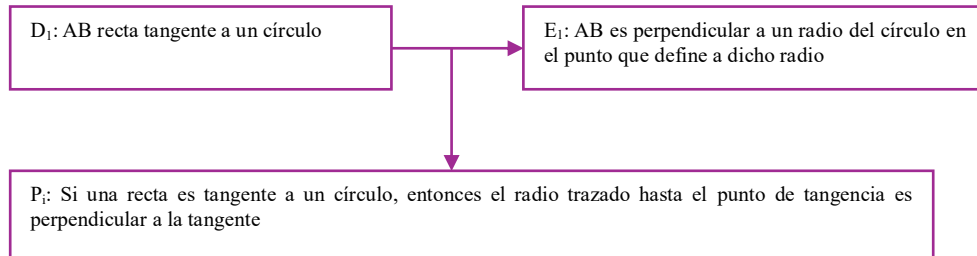
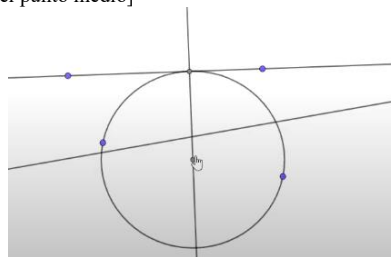


Figura 51 Razonamiento deductivo para construir el círculo tangente a una recta

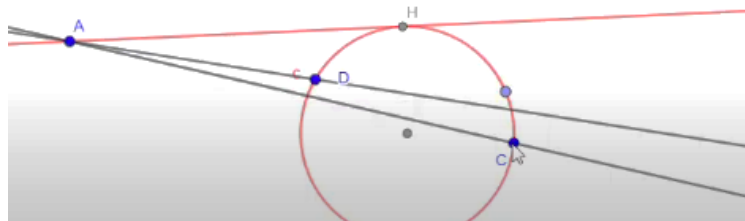
No obstante, Andrés, en [18], notó que el comportamiento no era igual al de la caja negra presentada, por tanto, cambió la estrategia y partió del círculo para encontrar la recta tangente, sin embargo, en [18], indicó que el procedimiento era erróneo porque primero se debía construir la recta y luego el círculo. Con estas acciones se evidenció que los estudiantes no reconocían que los puntos C y D eran libres y que de ellos también dependía el círculo, por lo que la investigadora, en [25 -26], intervino y preguntó sobre qué ocurría al mover C y D, con ello, los estudiantes identificaron que los puntos A,B,C y D eran libres.

25	Inv	Y ¿qué pasa con el círculo cuando mueve C y D?
26	Andrés	Se hace grande, cambia. Entonces, A, B, C y D son libres. Entonces vamos a partir de objetos libres, entonces partamos de A y B. [Traza 4 puntos y traza una recta que pasa por dos puntos, traza el punto medio de los dos puntos libres y traza una perpendicular a la recta que pase por el punto medio]

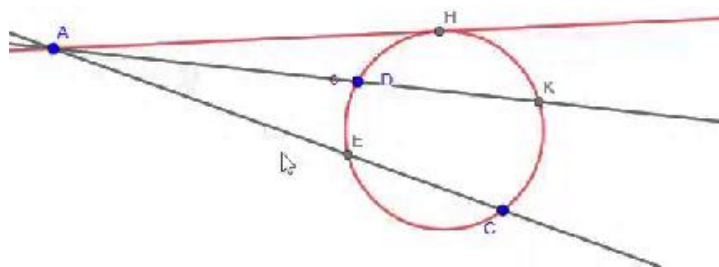


Al momento de considerar los cuatro puntos libres, los estudiantes comenzaron a trazar perpendiculares por distintos puntos para encontrar el centro del círculo, esta estrategia no les funcionó, por lo que empezaron a enriquecer la caja negra establecida para observar relaciones.

43	José	[Marca el punto de tangencia H en la caja negra]
44	Andrés	AH ² va a ser igual a AD por algo...
45	José	AD por ¿qué cosa? Ah, donde pegue la recta [Construye la recta AD] AD*AF (se refiere a F como punto de intersección de la recta AD con el círculo)



46	Andrés	Nómbreme esos puntos
----	--------	----------------------



47	José	AH ² va a ser igual a AD por AK o a AE por AC
----	------	--

En [43-47], al marcar el punto de tangencia y al construir las secantes AD y AC, los estudiantes, por medio del *razonamiento deductivo*, lograron concluir nuevas relaciones.

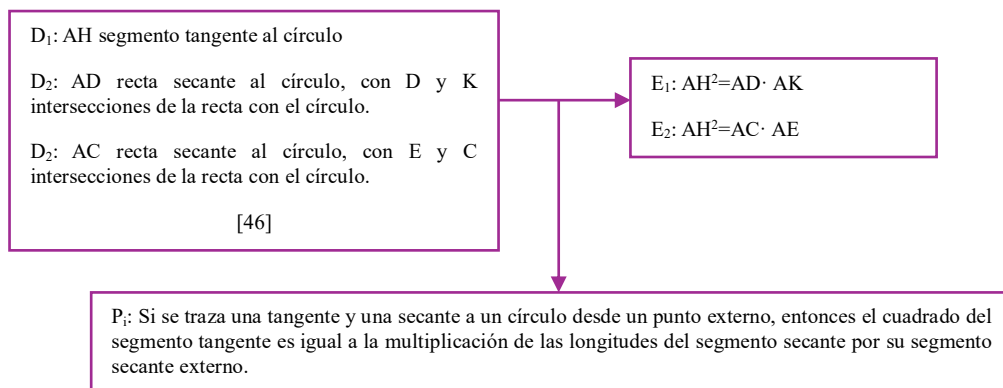


Figura 52 Razonamiento deductivo para determinar propiedades de la caja negra

No obstante, las relaciones que concluyeron no fueron útiles para realizar la tarea porque los puntos K y E no se conocían, entonces, no se pueden utilizar para hallar la medida de AH. Por tanto, consideraron la siguiente representación.

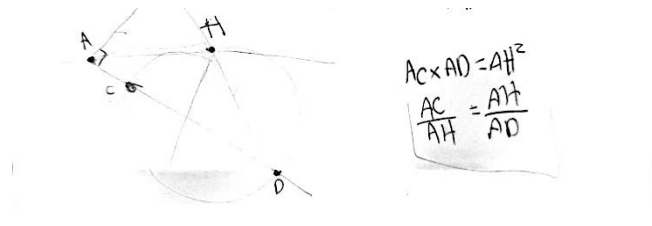


Figura 53 Representación de Andrés sobre la tangente y la secante al círculo

A partir de dicha configuración y de la relación $AC \cdot AD = AH^2$, los estudiantes razonaron deductivamente y concluyeron que el segmento AH es media geométrica de AC y de AD, por lo que, para encontrar la medida del segmento AH construyeron un triángulo rectángulo con hipotenusa AC+AD, tal que la altura trazada desde el vértice donde es rectángulo separe a la hipotenusa en dos segmentos con medidas AC y AD respectivamente. Es decir, desarrollaron el siguiente *razonamiento deductivo*

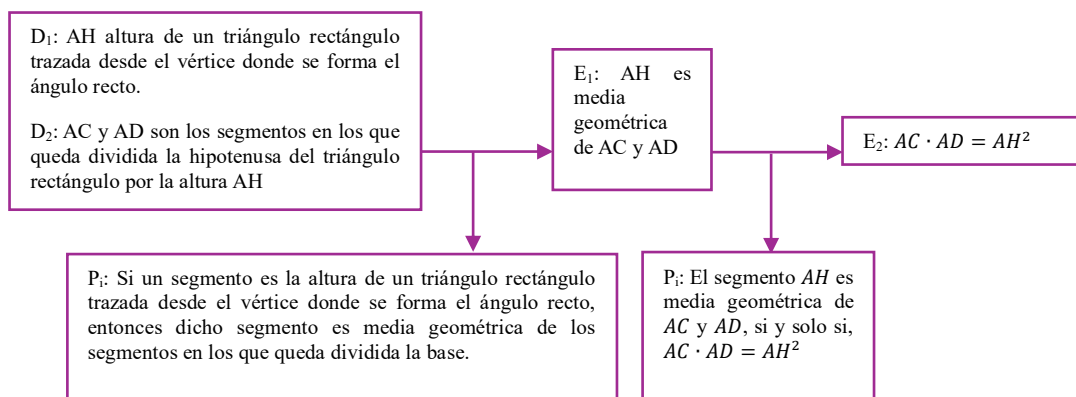


Figura 54 Razonamiento deductivo en la construcción de la media geométrica

Luego de encontrar la medida del segmento AH, trasportaron la medida a la recta AB, por medio del compás, para construir H; sin embargo, la construcción no funcionó porque se basó en una configuración particular y es cuando A, C y D se encontraban alineados. La investigadora les

indicó dicha particularidad, por lo que los estudiantes trabajaron con una configuración general, trazaron la secante CD y nombraron P a la intersección de la recta AB con la secante CD y con estos elementos efectuaron el mismo razonamiento previamente establecido, a continuación, se expone la demostración presentada por los estudiantes.

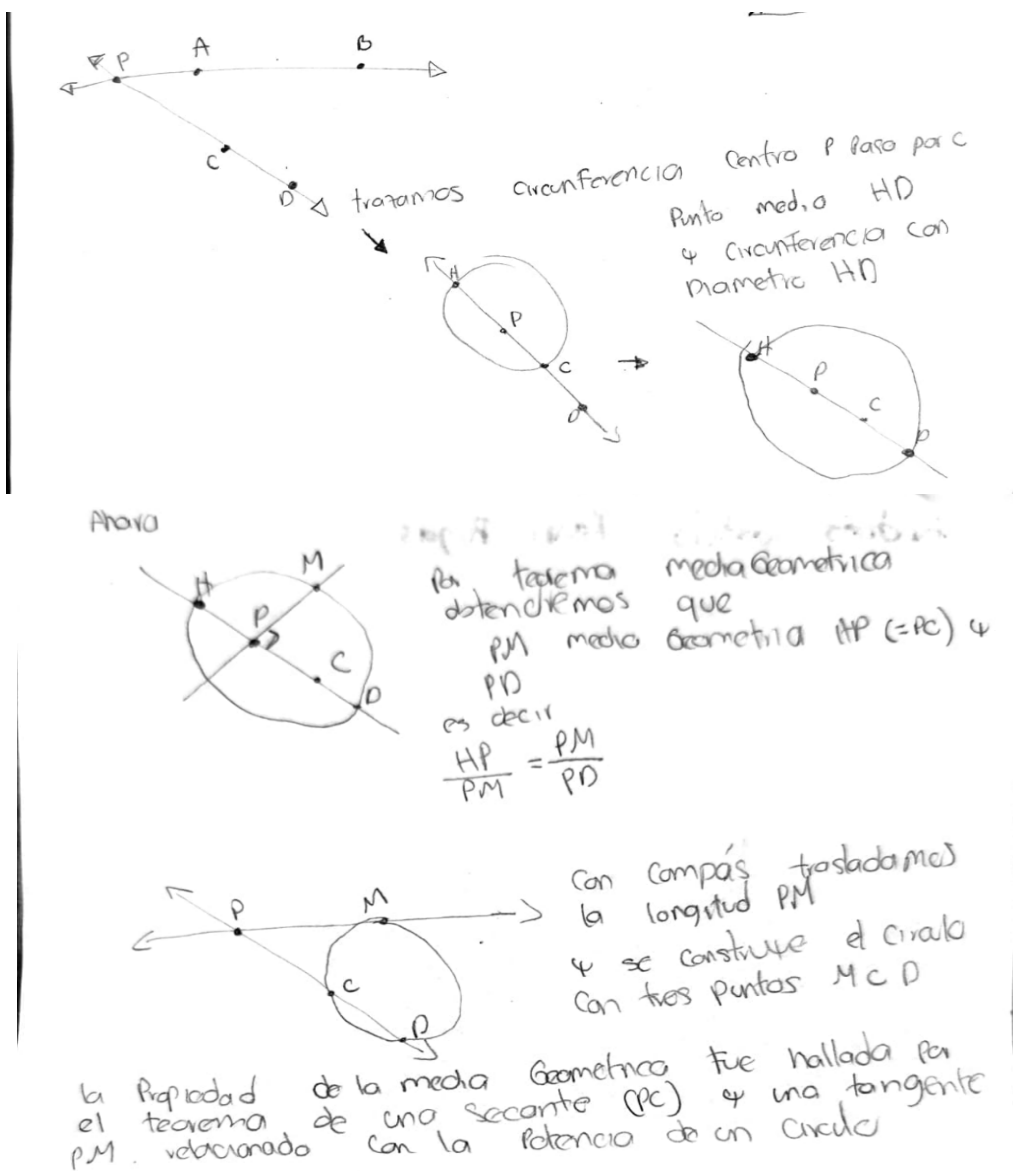


Figura 55 Demostración de la construcción de la caja negra dinámica

Esta demostración al estar basada en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema utilizando reglas teóricas aceptadas en clase, pero obviando algunas propiedades que consideran evidentes, se categoriza como una demostración *deductiva informal estructural*.

5.3.3. *Algunas reflexiones sobre este tipo de tareas*

El análisis evidenció que las tareas de cajas negras promovieron la coordinación entre razonamientos inductivos y deductivos en los estudiantes. La reproducción de Sangakus y la construcción de configuraciones dinámicas les permitió observar, formular conjeturas y validar propiedades geométricas, lo que demuestra que este tipo de tareas constituye un recurso valioso para fomentar la exploración y el descubrimiento en geometría.

En los Sangakus se evidenció una dificultad para asumir como ciertas algunas propiedades o relaciones únicamente a partir de la observación de la figura, dado que, a lo largo del curso de Geometría Euclidiana, los estudiantes han sido instruidos para cuestionar lo que perciben visualmente. Al respecto, el MEN (2004) señala que el dinamismo de la configuración es lo que permite al alumno identificar relaciones contingentes o necesarias en la figura, mientras que un dibujo estático o una imagen no siempre puede transmitir esta información. Durante el diseño de la secuencia se optó por presentar el Sangaku en formato de imagen con el fin de evitar que los estudiantes recrearan una figura semejante mediante paralelas, ya que el propósito era que aplicaran los teoremas de tangencia; sin embargo, tras identificar las dificultades y considerar lo señalado por el MEN (2004), se sugiere ofrecer el Sangaku de manera dinámica. Para atender la preocupación de que los estudiantes repliquen una figura semejante, podría proponerse que elaboren el Sangaku en una vista gráfica diferente o en un applet independiente.

Por otra parte, Hollebrands et al. (2008) indican que estas tareas pueden representar un reto ya que requieren un vínculo entre el enfoque espacial o visual y el teórico. En los Sangakus, se observó que los estudiantes, en algunas ocasiones, identificaron propiedades de manera visual y para asegurarlas se basaron en razonamientos deductivos teóricos, mientras que, en otros momentos, las propiedades fueron aseguradas por medio de construcciones que no tenían un sustento teórico sino solamente perceptivo o intuitivo, poniendo en evidencia un destacado uso del razonamiento inductivo.

Es posible que esta situación se deba a que las figuras empleadas en los Sangakus (un triángulo isósceles y un cuadrado) son configuraciones particulares que poseen propiedades no generales y que pudieron facilitar construcciones basadas en la percepción o la intuición. En consecuencia, y en línea con lo planteado por Hollebrands et al. (2008), se sugiere que los Sangakus presenten un mayor grado de generalidad, por ejemplo, desarrollando la tarea T.2.4 con un triángulo cualquiera y la tarea T.3.3 con un rectángulo, sin perder de vista la importancia del dinamismo de las configuraciones, señalado en párrafos anteriores por el MEN (2004).

En cuanto a la caja negra dinámica, los estudiantes utilizaron el razonamiento inductivo para determinar propiedades y dependencias. Sin embargo, para construir la configuración preponderó el razonamiento deductivo. Los estudiantes enriquecieron la caja negra y por medio del teorema de la potencia de un punto con respecto a un círculo lograron replicar el comportamiento de la configuración planteada. En ese sentido, las tareas de cajas negras pueden ser una forma útil de comprobar qué tan bien comprenden los estudiantes los conceptos aprendidos. Puesto que los desafía a usar sus conocimientos geométricos previos en una situación distinta para averiguar cómo se construyen los diagramas (Maiduang, 2013).

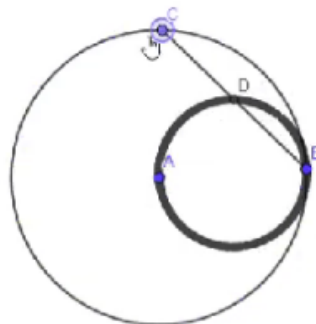
5.4. Sobre las tareas de lugares geométricos.

En la secuencia de enseñanza se diseñaron e implementaron seis tareas de lugares geométricos. Para el análisis de las regularidades en los razonamientos exhibidos por los estudiantes, que se observaron en el desarrollo de este tipo de tareas, se considerará la complejidad de imaginar la trayectoria de un punto cuando se mueve dentro de una configuración, reconocida por Santos Trigo (2011) en su trabajo. Este investigador también destaca que, el SGD permite fácilmente trazar el camino que deja el punto y tomar dicha información para analizar y describir la trayectoria del punto.

5.4.1. *Determinación de la figura correspondiente al lugar geométrico*

De acuerdo con Santos Trigo (2011), en un primer momento, los estudiantes razonan inductivamente para identificar, caracterizar y conjeturar la figura que representa el lugar geométrico. Por ejemplo, en la tarea T.1.5, que consistió en encontrar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas con un extremo fijo, los estudiantes Andrés y José, en [3-5], utilizaron como datos el rastro del punto medio D y la construcción del círculo, que ellos conjeturaron era el lugar geométrico; al ver que concordaba la construcción con el rastro, generalizaron el resultado (ver Figura 56).

3 José Yo quiero el rastro del punto medio. [Activan el rastro del punto medio y arrastran a C]



Si ve, lo que yo le dije.

4	Andrés	¿Entonces? Es una circunferencia con centro en el punto medio de A y B.
5	José	[Construye el círculo con centro en el punto medio de A y B, que pasa por B, ve que concuerda con el rastro, luego lo borra] [Escribe en GeoGebra “es la circunferencia con centro en el punto medio de AB que pase por B”]

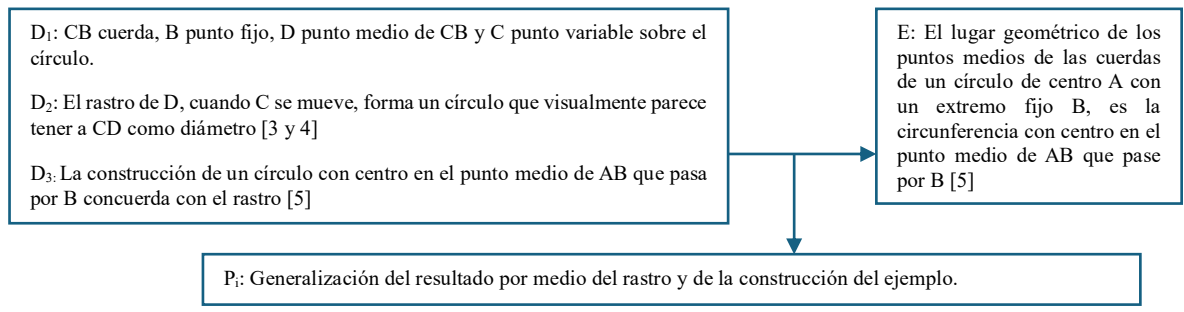


Figura 56 Razonamiento inductivo para conjeturar el L:G de la tarea T.1.5

Aunque estos razonamientos inductivos por generalización de resultados fueron comunes en el desarrollo de las tareas, los estudiantes, en algunas ocasiones, no lograron deducir qué figura correspondía al lugar geométrico y tampoco caracterizarlo. En la tarea T.4.5, como se observa en la Figura 57, los estudiantes Juan y Luis, por medio del rastro, concluyeron que el lugar geométrico era una parábola y no un arco de circunferencia, por lo que, en este caso, el dato del rastro no fue suficiente para realizar una generalización de resultados que tuviera en cuenta relaciones geométricas, sino que resultó ser solamente perceptiva.

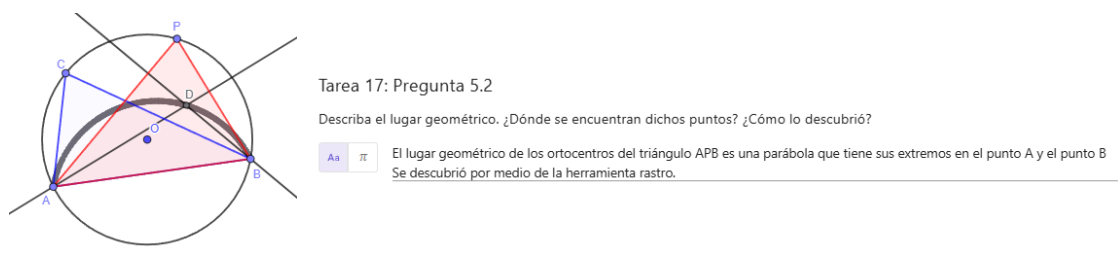
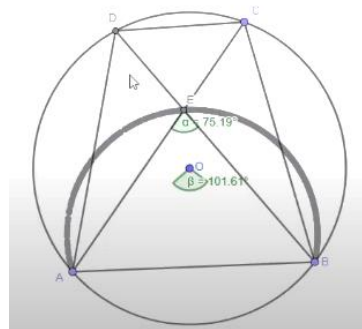


Figura 57 Identificación errónea del lugar geométrico

Por otra parte, en la tarea T.6.3, los estudiantes utilizaron el rastro para identificar cuál figura representaba el lugar geométrico, ellos reconocieron fácilmente que era un arco de circunferencia, sin embargo, en [15] presentaron una preocupación sobre cómo referirse al correcto

(arco BA), ya que hay infinitos arcos que pasan por A y B. Para referirse apropiadamente a uno en específico, podrían haber mencionado el círculo al cual pertenece o el ángulo central que genera los extremos de ese arco con el centro del círculo. En estos casos, se les pedía que demostraran que el lugar geométrico era un arco para después caracterizarlo adecuadamente.

15 Andrés ¿Qué hay que hacer? No sé qué hay que hacer. ¿Cómo específico que el arco al que me estoy refiriendo es específicamente este?



16 Inv Ah, o sea, que es el arco BA, pero no del círculo con centro en O sino con otro

5.4.2. Construcción de la figura que representa el lugar geométrico

Luego de reconocer la figura, los estudiantes procedían a construir el lugar geométrico. En algunas ocasiones la construcción era inmediata por medio de una herramienta y en otras ocasiones era necesario un protocolo de construcción más elaborado. En la tarea T.4.5 los estudiantes Andrés y José debían construir el arco correspondiente al lugar geométrico de los ortocentros (D) de los triángulos APB.

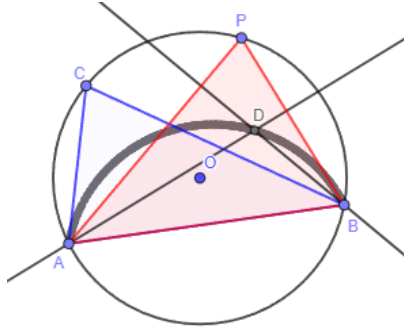
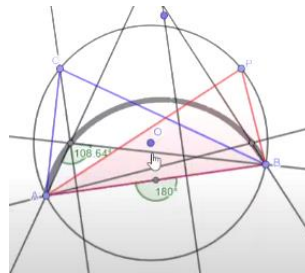


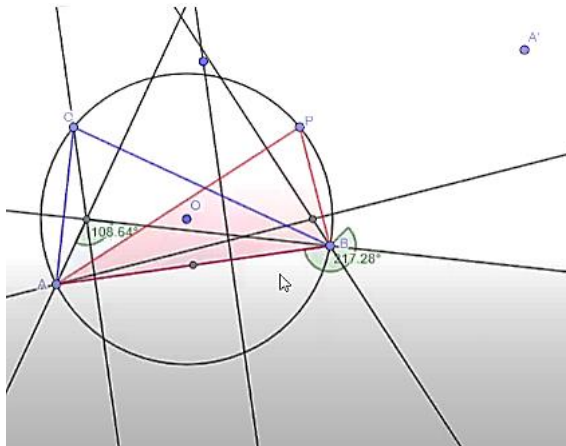
Figura 58 Lugar geométrico de la tarea T.4.5

En las líneas [17-21], Andrés y José se interesaron por la medida del ángulo inscrito formado por A, B y por el ortocentro, adicionalmente, se interesaron por el doble de dicho ángulo.

17	Andrés	Mida ese ángulo
18	José	[Mide el ángulo formado por el ortocentro de ABC y por A y B] [Mide el ángulo formado por el punto medio de AB y por A y B]



19	Andrés	No, espere. ¿108x2?
20	José	216
21	Andrés	Pero hay algo más, 64, multiplique eso en la calculadora, sería 217.28. [Construye un ángulo con la herramienta “ángulo de longitud dada” que tiene lado AB y medida 217.28°] [Borra la construcción]



El interés por duplicar la medida del ángulo APB y las acciones realizadas en [19-21] son producto del siguiente *razonamiento deductivo*,

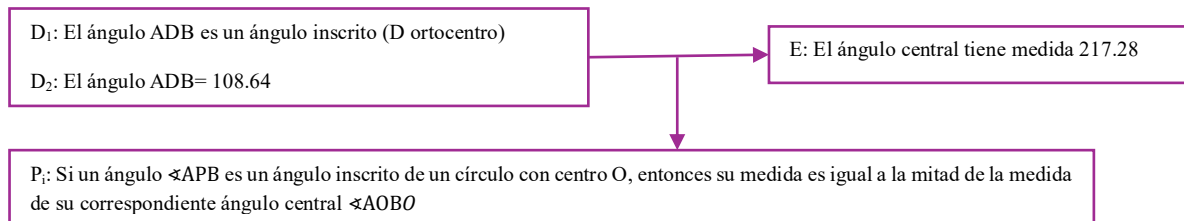
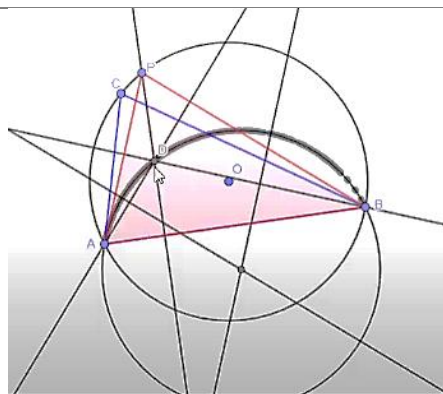


Figura 59 Razonamiento deductivo sobre la medida del ángulo central correspondiente al inscrito ADB

Bajo este razonamiento, Andrés y José, reconocieron la relación de un ángulo inscrito y su correspondiente ángulo central, por lo que decidieron construir el ángulo ABA', con la medida 217.28°, con la herramienta “ángulo de longitud dada”, es decir, el doble del ángulo ADB [21]. El ángulo ABA' no era el ángulo central correspondiente a ADB, por lo que la construcción no concordó con el rastro trazado, no obstante, el razonamiento detrás de la construcción tiene partes teóricas.

Luego de ello, Andrés y José en [36], cambiaron la estrategia de construcción y *razonaron deductivamente* para realizar la construcción,

35	Inv	Qué han encontrado
36	Andrés	<p>En este punto nos pedía el lugar geométrico de los ortocentros de los triángulos APB. Lo que hicimos fue el trazo de los ortocentros primero que todo y nos dimos cuenta de que este punto coincidía un ortocentro, entonces bueno, construimos este segmento y este segmento, sabiendo que este ángulo está inscrito [recargan la página y se borra todo].</p> <p>Bueno, lo hago paso por paso. [Traza las alturas del triángulo APB y con ellas el ortocentro D, le activa el rastro] este es el arco, este ángulo que se forma acá, ADB, va a estar en un arco que contiene a todos los ortocentros, entonces tendríamos que buscar la manera de hacer el arco, entonces, si sabemos que es un arco va a estar en una circunferencia, entonces, <u>sabiendo que está en una circunferencia, esta va a ser una cuerda [AD] y esta va a ser una cuerda [DB], entonces trazamos la mediatriz de este lado y de este lado y en ese punto de intersección trazamos la circunferencia que pasa por D, obtuvimos esta circunferencia.</u></p>



Ahora tenemos que demostrar que está en un arco, para demostrar que está en un arco debemos corroborar que dichos ángulos son congruentes.

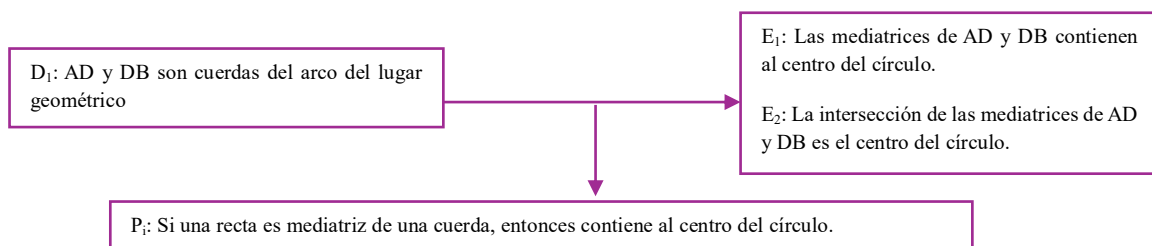


Figura 60 Razonamiento deductivo para la construcción del lugar geométrico

5.4.3. Demostración de la conjetura sobre el lugar geométrico

Después de que los estudiantes descubrieron y construyeron el lugar geométrico debían demostrar por qué el lugar geométrico era la figura que observaron y no otra. De esta forma, como indica Molfino y Lezama (2011), la demostración en las tareas de lugares geométricos tiene un papel de explicación en lugar de verificación.

Esta fase de demostración, como se muestra en la siguiente transcripción [12-19], presentó gran dificultad para los estudiantes a lo largo de toda la secuencia de enseñanza, los estudiantes manifestaron inconvenientes para identificar con claridad el enunciado a demostrar en este tipo de tareas. Este resultado es común con el trabajo de Molfina y Lezama, en el que indican que los estudiantes reconocían la figura del lugar geométrico a partir de casos particulares, pero “no

lograban deducir, a partir de la observación de la situación y de propiedades aceptadas como válidas, que la figura hallada es en efecto el lugar geométrico” (2011, p. 39)

12	Andrés	¿Cómo demostramos el lugar geométrico?
13	José	Es que siempre preguntamos lo mismo
14	Andrés	Es que hay diversas situaciones
15	José	Profe ¿cómo demostramos el lugar geométrico?
16	Inv	¿cuál es el lugar geométrico?
17	José	Un círculo con centro en A que pase por un punto de tangencia.
18	Inv	¿Qué es lo que quieren demostrar?
19	Andrés	Dónde se encuentran todos los puntos de tangencia, o sea, que en todo este círculo se van a encontrar los puntos de tangencia.

En estas tareas, a diferencia de otras, la implicación condicional a demostrar no es explícita, por lo tanto, los estudiantes debían formular dicha implicación, esta actividad matemática de conjeturar es compleja, con lo que concuerdan Hurani y Dal maso (2016), ya que exponen que la formulación de conjeturas es una dificultad que se observa incluso en alumnos de nivel superior, lo que ocasiona dificultades en la demostración.

Por tanto, las demostraciones que realizaron Andrés, José, Juan y Luis, en las primeras tareas de lugares geométricos, se basaron en la definición dada en clase de lugar geométrico y en la percepción visual del rastro. En la tarea T.1.5, Andrés y José realizaron la demostración relacionando cada fragmento de la definición de lugar geométrico con el elemento correspondiente en la tarea, adicionalmente, el argumento aludió a percepciones visuales expresando que “D hace un recorrido,...,formando una circunferencia” [21-22].

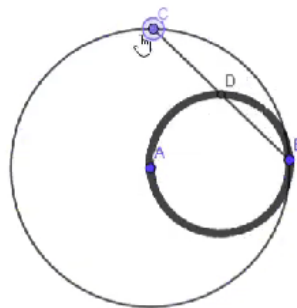


Figura 61 Lugar geométrico de la tarea T.1.5

21	Inv	Ahora ¿por qué ese es el lugar geométrico?
22	José	¿Cómo era la descripción de lugar geométrico? Nos dice, trayectoria de un punto A que depende de un punto B que se mueve a través de un objeto. D (punto medio de la cuerda CB) ese es el punto que traza la trayectoria dependiendo del movimiento del punto C, a medida que C se mueve, D hace un recorrido, el cual sería la trayectoria, formando una circunferencia con centro en el punto medio de AB, el cual denominamos E, que pasa por B.

En esta misma tarea, Juan y Luis también recurrieron a aspectos visuales como fundamentos de la demostración, mencionando que el lugar geométrico contiene todos los puntos que cumplen con las propiedades indicadas en la tarea y que estos se observan por medio del Rastro (ver Figura 62).

Tarea 24: Pregunta 5.3

Demuestre que el lugar geométrico que observó es el buscado



Se cumple debido a que la construcción cumple con lo que se pide.

Dado que el lugar geométrico del punto J son todas sus posibles posiciones, estas se pueden observar con la herramienta Rastro.

Figura 62 Demostración del lugar geométrico de la tarea T.1.5

Juan y Luis, en la tarea T.4.5, la segunda de lugar geométrico que desarrollaron, también recurrieron a la idea de que el rastro está tomando cada posición posible del punto de interés, en este caso, de los ortocentros de los triángulos APB.

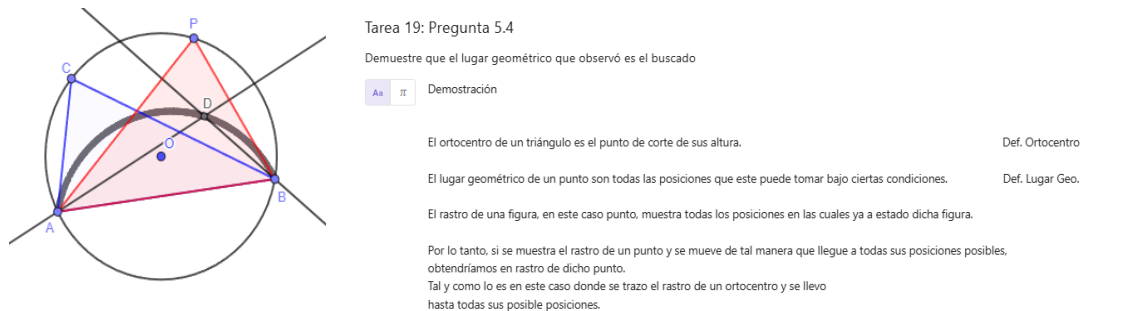


Figura 63 Demostración del lugar geométrico de la tarea T.4.5

Estas demostraciones están basadas en *razonamientos inductivos*, que de manera general se modelan de la siguiente forma.

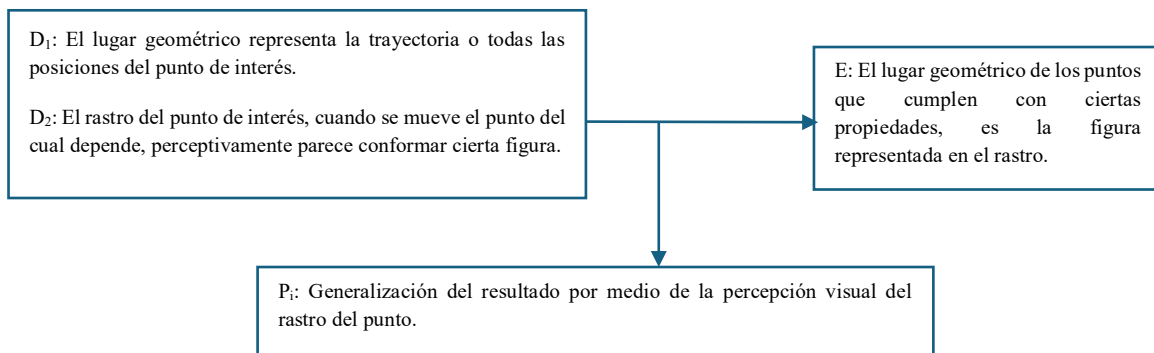


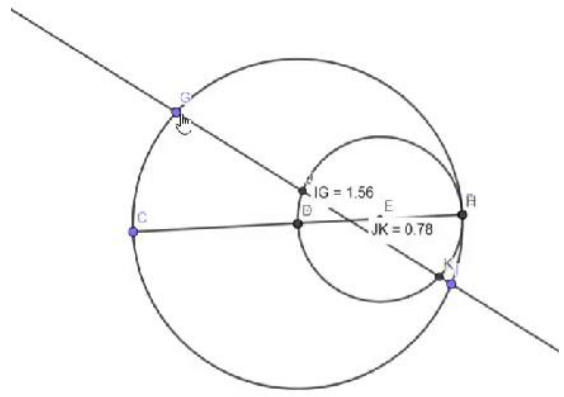
Figura 64 Razonamiento inductivo en demostración de lugares geométricos a través del rastro

Estas primeras demostraciones, al basarse en ejemplos, que en este caso son las representaciones geométricas de las situaciones planteadas en el enunciado de la tarea, y al recurrir a aspectos visuales del rastro como aspecto fundamental, se categorizan como *demostraciones empíricas ingenuas perceptivas*. Este resultado era esperado, debido a que los estudiantes no se habían enfrentado a este tipo de tareas previamente y como mencionan Molfino y Lezama “la mayoría de los estudiantes no tienen la necesidad de demostrar las propiedades, especialmente cuando éstas resultan evidentes y se pueden descubrir o establecer intuitivamente” (2011, p. 40)

En estas primeras demostraciones, los estudiantes no plantearon una proposición condicional para guiar la demostración. Sin embargo, Andrés y José, en la tarea T.1.5, después de

realizar la demostración empírica, intentaron establecer la propiedad a demostrar para poder concluir que el lugar geométrico era el establecido. Andrés y José, en [36-38], mencionaron que debían demostrar que el diámetro DB, del lugar geométrico, era el doble del diámetro BC, del círculo dado.

36	Andrés	Decir que el radio de este es el doble de este. No, o sea, esta cuerda es la mitad de esta cuerda
37	José	DB es la mitad de BC
38	Andrés	No lo sabemos, pero es lo que hay que demostrar
39	José	[Traza una recta que pasa por un punto G del círculo original y corta al lugar geométrico en J y K]



40	Andrés	$0.78+0.78$, este es el doble de esto, ahí está. Escriba
41	José	[Escribe en GeoGebra “después de observar en el Applet el radio DB es el doble del radio EB”]

Tarea 24: Pregunta 5.3

Demuestre que el lugar geométrico que observó es el buscado

después de observar en el applet el radio DB es el doble del radio EB

Para demostrar, lo que ellos consideraron es el fundamento del lugar geométrico, los estudiantes en [39] construyeron una recta IG, esta recta no era una recta particular, es decir, no era una recta que pasara por algún punto específico de la construcción. Dicha recta generaba dos cuerdas, la cuerda IG, del círculo dado, y la cuerda JK, del círculo del lugar geométrico, como en [40] la medida de la cuerda JK era la mitad de la medida de la cuerda IG, y estas cuerdas fueron formadas por una recta no específica, los estudiantes generalizaron el resultado debido a que se

cumplió para el ejemplo elegido, evidenciando un razonamiento inductivo por generalización de resultados.

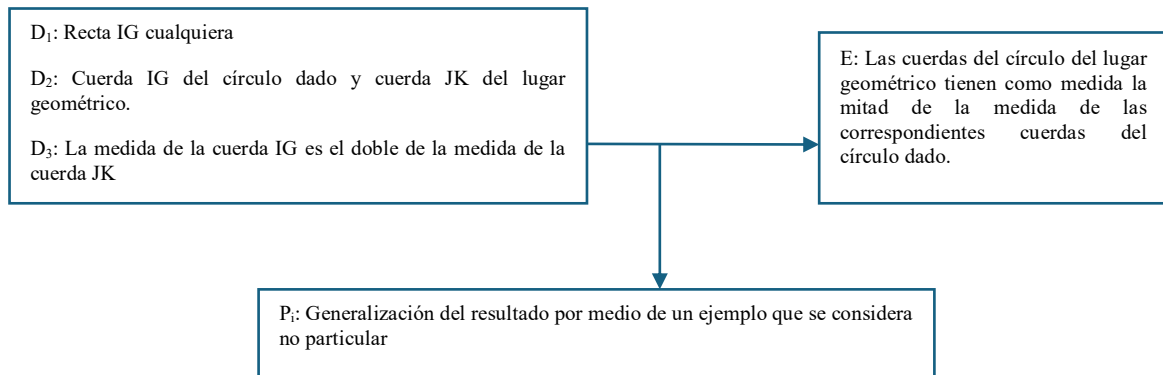


Figura 65 Razonamiento inductivo al relacionar las cuerdas del círculo y del lugar geométrico

Como el diámetro DB es una cuerda particular del lugar geométrico y el diámetro BC es una cuerda del círculo dado, por la generalización realizada por medio del ejemplo, Andrés y José concluyeron que DB era la mitad de BC, por lo que el lugar geométrico era el descrito. Por lo tanto, esta demostración está categorizada como un *experimento crucial basado en el ejemplo*.

Ante la dificultad exhibida previamente sobre la formulación de las proposiciones condicionales que orientan la demostración, la investigadora-profesora les realizaba preguntas como ¿Cuáles propiedades son dadas? ¿Cuáles son las características del lugar geométrico? ¿Cuáles puntos se encuentran en dicho lugar geométrico? Para orientar la formulación de la conjetura. Aunque en estos problemas de lugares geométricos se demuestra una doble implicación, en el desarrollo de la secuencia de enseñanza nos bastó con que los estudiantes formularan y demostraran una sola implicación.

Cuando los estudiantes reconocían adecuadamente el consecuente que debían demostrar, aparecieron diferentes razonamientos abductivos, en los cuales los estudiantes buscaban permisos de inferir que ayudaran a concluir lo requerido y buscaban los datos necesarios que se relacionaran

con la conclusión por medio del permiso de inferir establecido. En esta búsqueda de los datos o de las premisas, se evidenciaron diferentes razonamientos y provocaron distintos tipos de demostraciones:

I) La tarea T.1.5, solicitaba encontrar y demostrar el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de un círculo con un extremo fijo. Los estudiantes, reconocieron que el lugar geométrico era un círculo con diámetro CH, donde H es el extremo fijo y C es el centro del círculo dado.

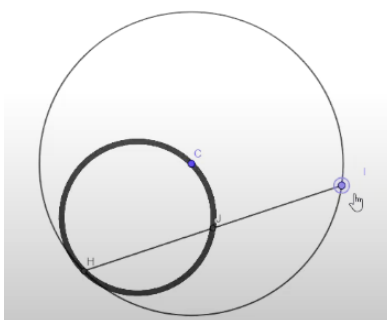
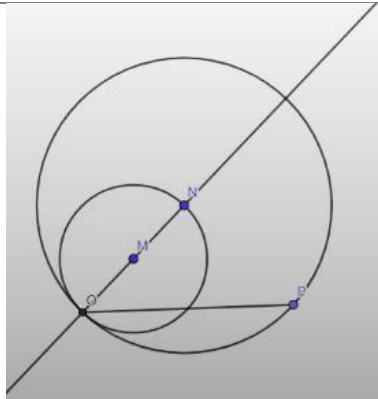


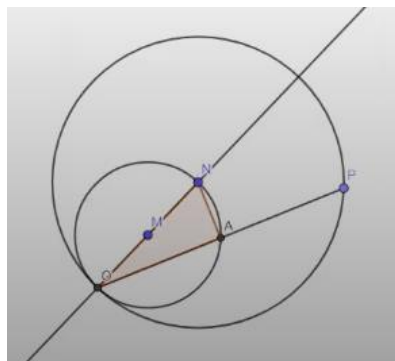
Figura 66 Lugar geométrico de las cuerdas con un extremo fijo T.1.5

En [14-18], la profesora intentó que los estudiantes formularan la proposición condicional, en [17] Juan intentó construir la proposición, tenía ideas sobre lo que se debía demostrar, pero las formuló con un lenguaje natural, por tanto, en [18] la profesora les ayudó a construir la proposición con un lenguaje matemático.

14	Inv	¿Cómo demostrarían que ese es el lugar geométrico? ¿Qué deberían demostrar?
15		(Silencio)
16	Inv	Recuerdan en la clase anterior que propuse unos ejemplos, que para demostrar un lugar geométrico tenían que demostrar dos implicaciones, Si está en el lugar geométrico cumple la propiedad Y si cumple la propiedad está en el lugar geométrico
17	Juan	Tendríamos que demostrar que si tenemos un círculo pequeño y otro círculo que tiene su radio igual al diámetro de este, entonces cualquier cuerda que tenga un extremo en ese punto de intersección pues va a tener su punto medio en la intersección que tenga con el primer círculo [Construye un círculo y luego otro que sea tangente al primero y que tenga como radio el diámetro del primero]



18	Inv	Es decir, vamos a demostrar lo siguiente, que, si un punto P es punto medio de esa cuerda, entonces, está en ese círculo que dicen es el lugar geométrico. ¿Cómo se demostraría?
19	Juan	Es que no sé si demostramos eso antes, que si un punto forma un ángulo de 90° entonces está inscrito en un semicírculo formado por esos dos.
20	Inv	¿Cuál es el teorema del que estabas hablando?
21	Juan	Pensamos en demostrar que está inscrito en un círculo demostrando que está inscrito en dos semicírculos, los cuales serían, no sé cómo se lee un semicírculo (se refiere a ON y NO). Entonces tenemos que demostrar que este ángulo es de 90° , el ángulo NAO es de 90° , si demostramos eso entonces está inscrito en un semicírculo formado por el diámetro NO. Y a su vez con el otro semicírculo.



¿Cómo demostramos que estas líneas son perpendiculares?

En [19-21] Juan *razonó abductivamente*, la conclusión estaba dada, se debía demostrar que los puntos medios (A) de dichas cuerdas se encontraban sobre el círculo de diámetro ON, en [21] Juan planteó como permiso de inferir el segundo Teorema de Tales.

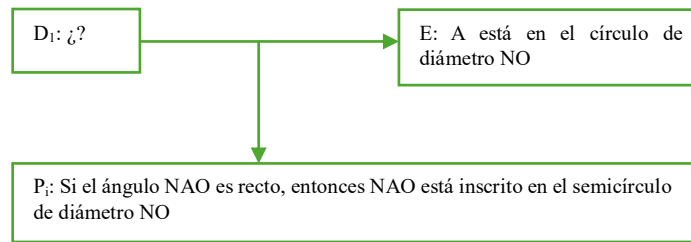
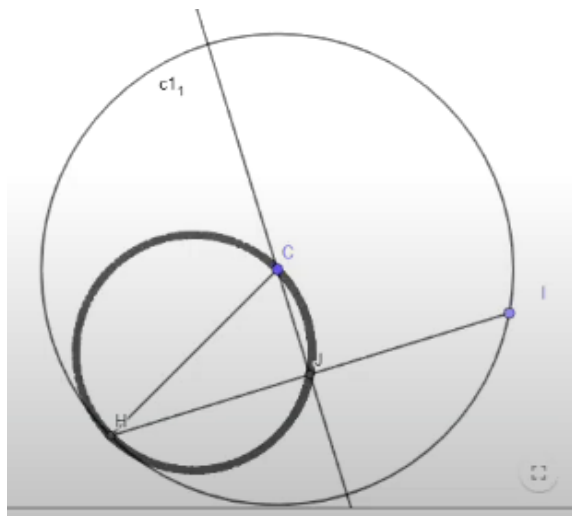


Figura 67 Razonamiento abductivo tarea T.1.5

Al continuar con la tarea, en la siguiente clase, el estudiante buscó los datos que se relacionaran con la conclusión por medio del permiso de inferir establecido.

23	Juan	Tenemos que demostrar dos cosas, que si es un punto del círculo entonces es la mitad y si es la mitad pasa por círculo. Ahora sí, si es la mitad pasa por el círculo, porque si es la mitad entonces es perpendicular a esta cuerda, y si es perpendicular...
24	Luis	No, esa no es la conclusión
25	Juan	Si mira “Si una recta pasa por el centro del círculo y pasa por la mitad de la cuerda, entonces es perpendicular” entonces si pasa por la mitad es perpendicular y si es perpendicular pasa por un semicírculo formado por el punto H y por el C.



En [23-25], Juan expresó un *razonamiento deductivo*, ya que partió de los datos del problema y utilizó como permiso de inferir el segundo teorema de la mediatriz de una cuerda, para concluir que la recta era perpendicular con la cuerda y por tanto el ángulo era de 90° . Datos suficientes para poder utilizar el permiso de inferir involucrado en el razonamiento abductivo previamente descrito.

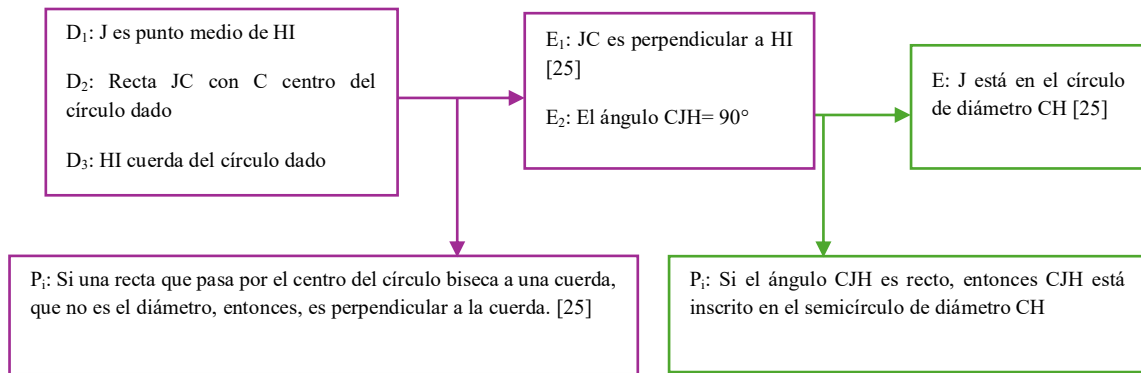


Figura 68 Razonamiento deductivo para completar el razonamiento abductivo de la tarea T.1.5

Esta demostración, al estar basada en secuencias lógicas cuyos permisos de inferir son teoremas que ya habían sido previamente aceptados se categoriza como una *demostración deductiva formal estructural*. Cabe señalar que, al inicio, los estudiantes habían realizado una demostración empírica, luego, al enunciar la proposición condicional lograron producir una demostración deductiva. Esta proposición ayuda a que el estudiante reconozca cuales son los datos conocidos y cuál es la conclusión a la que se desea llegar.

II) La tarea T.4.5 indagaba sobre el lugar geométrico de los ortocentros de los triángulos no obtusángulos APB, que tienen lado fijo AB y el ángulo APB constante en medida. Andrés y José, identificaron por medio del rastro que el lugar geométrico era un arco de circunferencia BA. Para demostrar esta proposición, se debía demostrar que los ortocentros de los triángulos APB se encontraban en un arco de circunferencia.

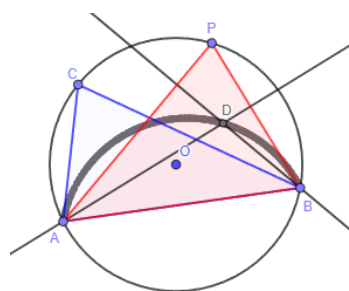


Figura 69 Lugar geométrico de la tarea T.4.5

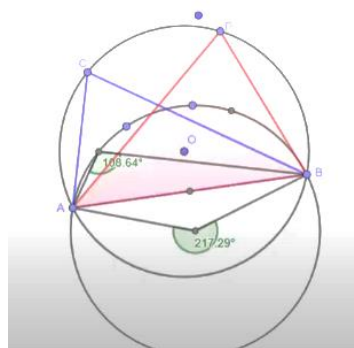
26	Inv	¿Cómo demuestran que esos puntos al arrastrar están sobre ese arco de esa circunferencia?
27	José	Moviendo

28	Inv	¿Cómo demuestro que esos ángulos están sobre un arco de circunferencia?
29	Andrés	Demostrando que son congruentes. Entonces ¿tenemos que construir punticos y demostrar que los ángulos son congruentes?
30	Inv	¿Qué es lo que le dice el teorema?
31	Andrés	Que si para distintos puntos P, los ángulos APB tienen la misma medida, entonces todos esos puntos P están sobre el arco BA de un círculo con ángulo central $\angle AOB = 2\angle APB$.

Por eso, entonces, aquí hay algo que no entiendo, entiendo el punto de que está sobre un arco BA de un círculo con ángulo central AOB, pero ahí que dice que está sobre el arco BA, ¿cómo hago yo para construir el arco BA?

Yo lo que hice fue, bueno, este ángulo es un ortocentro, entonces ese punto es la intersección de las alturas, entonces tracé este segmento y este segmento, y sé que ese ángulo va a estar sobre el arco que vi por el rastro, entonces lo que hice fue trazar la mediatriz de este lado y de este lado y donde se interseque va a ser el centro del círculo, pero aquí en las reglas teóricas, simplemente nos dice que va a estar sobre un arco BA de un círculo con el ángulo central AOB. Bueno, o sea, nosotros podemos construir este ángulo con la herramienta dada su amplitud, eso lo intenté yo también, ¿cómo hago para construir ese ángulo ahí?

¿Yo tendría que demostrar que todos esos puntos forman ángulos congruentes? [construye varios puntos sobre el arco BA]



32	Inv	O sea, en pocas palabras, al arrastrar usted ve que ese ángulo siempre constante
----	-----	--

Andrés y José en [29-31] *razonaron abductivamente* y plantearon el corolario del teorema del ángulo inscrito, “si para distintos puntos P, los ángulos $\angle APB$ tienen la misma medida, entonces todos esos puntos P están sobre el arco BA de un círculo con ángulo central $\angle AOB = 2\angle APB$ ”, como permiso de inferir para concluir que los puntos están sobre un arco.

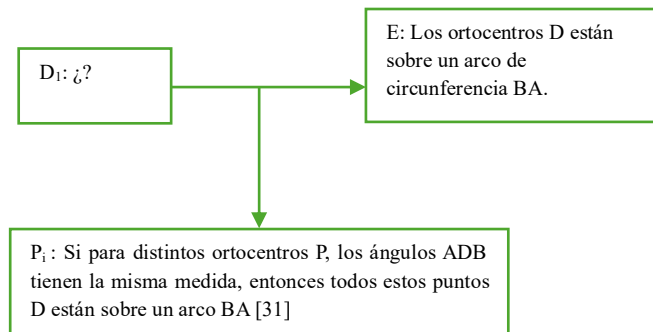


Figura 70 Razonamiento abductivo de la tarea T.4.5

En [32] la profesora-investigadora trataba de hacer ver que el permiso de inferir descrito era equivalente a: si un punto P se mueve en el plano de modo que el ángulo APB se mantiene constante, entonces P pertenece a un arco de circunferencia que pasa por A y por B. Por tanto, el nuevo razonamiento abductivo fue el siguiente,

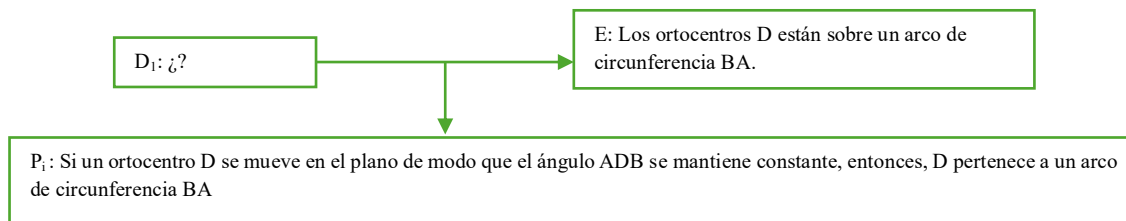


Figura 71 Razonamiento abductivo equivalente al de la Figura 70

Por tanto, los estudiantes comenzaron a buscar los datos necesarios para concluir que el ángulo ADB se mantenía constante a pesar del movimiento de P.

54	José	[Mide el ángulo ADB , el ángulo APB y arrastra]
55	Andrés	Se mantiene constante los dos (se refiere a APB y a ADB)
56	José	Ay, 180, suman 180.
57	Andrés	A ver, haga ahí con la calculadora
58	José	[Suma en la calculadora y da 180°] suplementarios
59	Andrés	¿Por qué?

Los estudiantes, en [54-57], tomaron medidas de los ángulos APB y ADB, ellos notaron que los ángulos se mantenían constantes al mover P y adicionalmente descubrieron que los ángulos eran suplementarios, ellos reconocían que el ángulo APB se mantenía constante debido a que se mantenía inscrito en un arco BA, por tanto, debían demostrar que el ángulo ADB era su suplementario para así concluir que también se mantenía constante. Evidenciando un nuevo *razonamiento abductivo* mostrado a continuación.

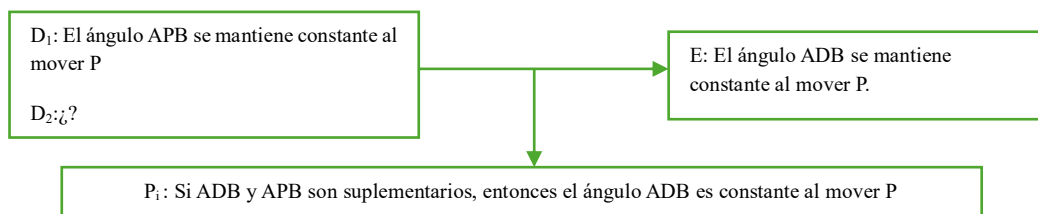
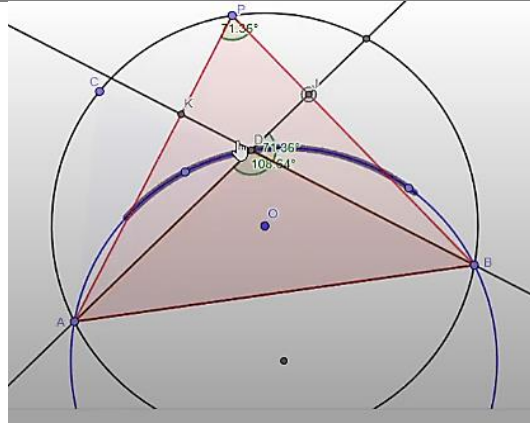


Figura 72 Razonamiento abductivo, ángulos suplementarios constantes

70	Andrés	Ya lo demostré (trabaja sobre un dibujo hecho en el papel) mire el triángulo CDB, este ángulo se llama β , este es recto porque es una altura y este es α . Ahora mire este triángulo CDE, tienen un ángulo compartido que es β , tiene un ángulo recto por definición de altura y tiene a θ . Entonces $90 + \beta + \theta$ va a ser igual a 180, con el triángulo anterior, $90 + \beta + \alpha$ va a ser igual a 180°, conclusión, α va a ser igual a θ . Ahora, $\theta + \omega$ va a ser 180° por ángulos suplementarios. Pero como θ es igual a α , $\omega + \alpha$ va a ser 180° y como α permanece constante, necesariamente ω será constante para que se cumpla ángulos suplementarios.
<p>Profe, ya descubrimos que son suplementarios y por qué</p>		
71	Inv	¿Por qué?
72	Andrés	Tenemos el triángulo BKP, tiene este ángulo [PBK] y este ángulo recto [BKP], ahora observemos el triángulo BDJ, comparte este mismo ángulo [PBK] también tiene el ángulo BJD recto, por tanto, este [APB] ángulo, va a ser congruente a este [BDJ], por suma de ángulos internos, ahora sabemos que este ángulo [BDJ] más este [ADB], por estar sobre una misma recta van a ser suplementarios, pero como este [BDJ] va a ser igual a este [APB] entonces este [APB] más este [ADB] va a ser suplementarios y por lo tanto constantes.



Los estudiantes *razonaron deductivamente* en [70-72], iniciaron con los datos y por medio de reglas teóricas y algebraicas concluyeron que los ángulos APB y ADB eran suplementarios (ver Figura 73). Por tanto, el ángulo ADB era constante, completando el razonamiento abductivo previamente establecido.

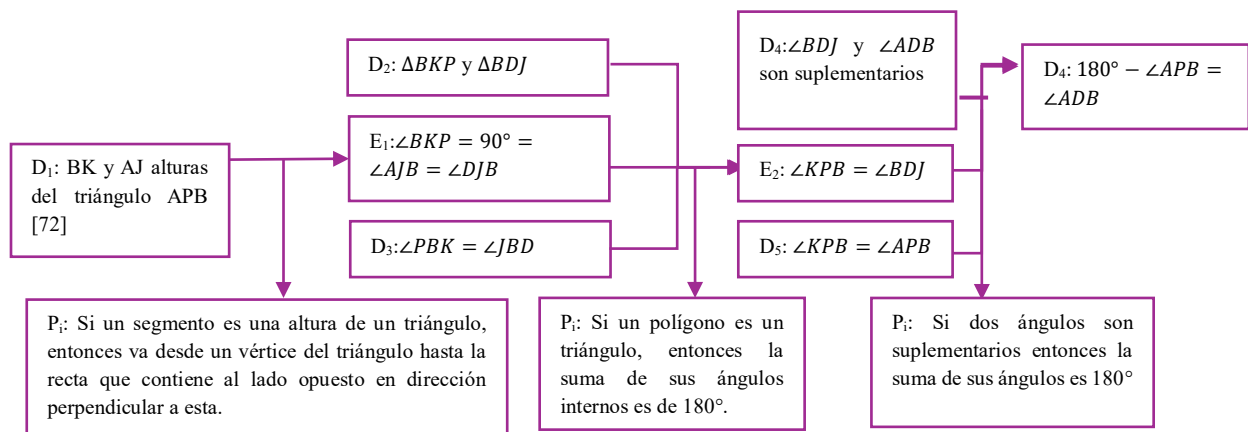


Figura 73 Razonamiento deductivo en la tarea T.4.5

Como el ejemplo, que en este caso corresponde a la construcción presentada en la tarea, permitió encontrar propiedades y relaciones útiles para construir la demostración y como ella está desligada de características propias del ejemplo, se concluye que la demostración presentada por los estudiantes es una *prueba deductiva de tipo experimento mental estructural*.

III) En la tarea T.5.2, se les preguntaba sobre el lugar geométrico de las intersecciones de las diagonales de los rombos ABDC con el lado fijo CD. Luis experimentó con el SGD y por medio del rastro identificó que el lugar geométrico era un círculo con diámetro CD.

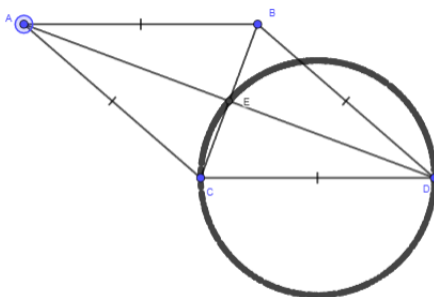
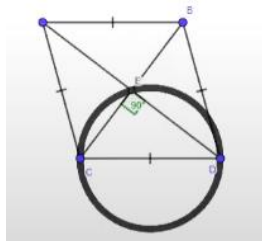
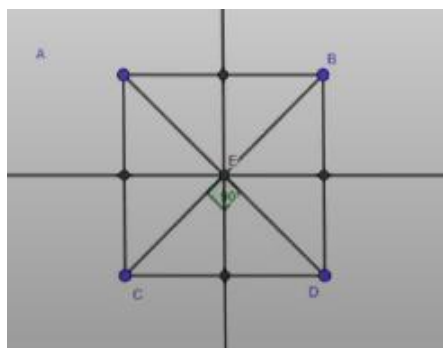


Figura 74 Lugar geométrico de la tarea T.5.2

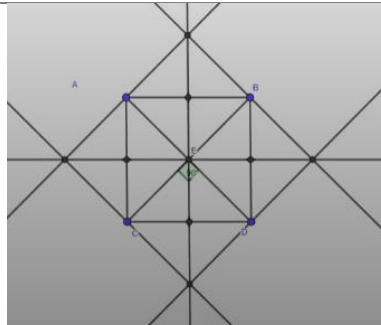
7	Luis	No podría decir que como el ángulo de acá es de 90° [Mide el ángulo CED] está sobre un semicírculo
8	Inv	Con diámetro CD
9	Luis	¿Esa podría ser la demostración?
10	Inv	Pero tendrías que demostrar que el ángulo es de 90°
11	Luis	Y con eso estaría. [Busca en las reglas teóricas propiedades sobre los paralelogramos]



[Escribe en GeoGebra “Por una propiedad de los paralelogramos sabemos que sus diagonales se bisecan y al bisecarse forma ángulos rectos porque estas diagonales son perpendiculares”]
 [Lee el postulado de perpendicularidad y paralelismo]
 [Construye los puntos medios de los lados, AC, AB, CD, BD, construye semirrectas que partes de E y van hacia cada punto medio]



[Trazó una perpendicular a ED que pasa por D, una perpendicular a EB que pasara por B, una paralela a la primera perpendicular que pasara por A y una paralela a la según perpendicular que pasara por C]
 [Marca las intersecciones]



[Escribe en GeoGebra]

Tarea 6: Pregunta 2.2

Demuestre que el lugar geométrico que observó es el pedido

Por una propiedad de los paralelogramos sabemos que sus diagonales se bisecan, y al bisecarse forma ángulos rectos porque estas diagonales son perpendiculares por el Postulado de perpendicularidad y paralelismo porque las diagonales son perpendiculares al menos a una de dos paralelas con las cuales se crean el paralelogramos semejante y sabiendo que E crea ángulos rectos entonces se encuentra en un semicírculo por teorema de tales, en este caso el lugar geométrico se encuentra en el semicírculo CD ya que es el segmento fijo.

Profe, ¿esto sirve como demostración? [Lee lo que escribió]

12	Inv	¿Por qué el postulado de perpendicularidad y paralelismo?
13	Luis	Creé un paralelogramo auxiliar, pero siendo semejante a este, aprovechando de que son semejantes, lo que hice fue utilizar las diagonales y crear una perpendicular que pase por este punto [Señala B] y una paralela a esa recta y como esta [segmento CB] es perpendicular al menos a una de las dos paralelas crea un ángulo de 90.

Luis en [7] mencionó que para demostrar que las intersecciones de las diagonales (E) estaban sobre dicho círculo, debía demostrar que el ángulo CED era recto. Lo cual representa un *razonamiento abductivo*, cuyo permiso de inferir, es el segundo Teorema de Tales.

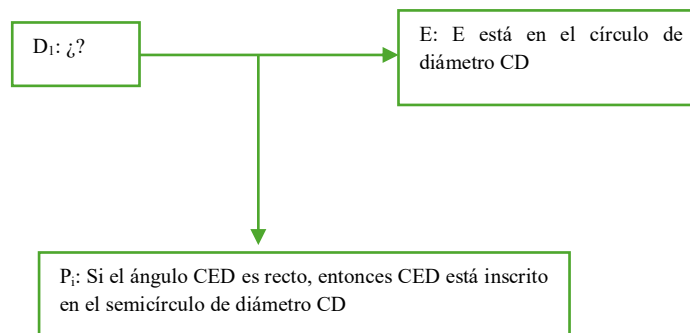


Figura 75 Razonamiento abductivo de la tarea T.5.2

Luis se interesó por buscar los datos necesarios para poder utilizar el teorema de Tales. Para ello construyó una perpendicular a ED que pasara por D, una perpendicular a EB que pasara por B, una paralela a la primera perpendicular que pasara por A y una paralela a la segunda perpendicular que pasara por C.

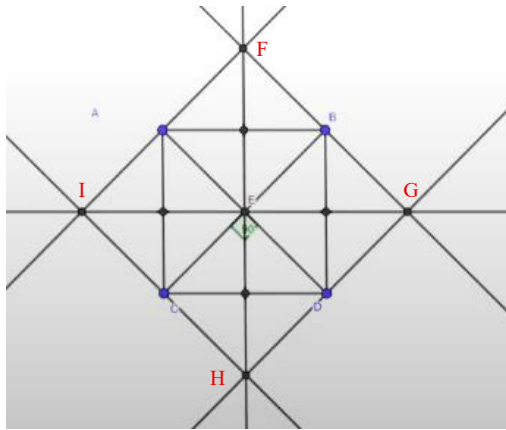


Figura 76 Construcciones realizadas sobre el rombo $ABDC$

Luis, en [13], expresó que CB era perpendicular a una de las dos paralelas. Es decir, construyó FG perpendicular a CB y HI paralela a FG . Por la percepción visual, Luis consideró que AD también era paralela a FG . Como CB es perpendicular a FG y AD la consideró paralela a FG , entonces por el postulado de perpendicularidad y paralelismo, CB sería perpendicular

a AD , por tanto, el ángulo CED sería un ángulo recto, que es lo que estaba buscando. Las acciones realizadas por Luis son comunes en la demostración de lugares geométricos, Galindo (1998) menciona que usualmente los estudiantes en este tipo de tareas construyen elementos auxiliares que les permiten identificar visualmente una propiedad invariante la cual utilizan para convencerse a sí mismo y a los demás del lugar geométrico formado

Debido a que, la demostración estuvo basada en las construcciones de las paralelas y las perpendiculares sobre el ejemplo y en relaciones identificadas debido a las construcciones, se considera a esta demostración como un *experimento crucial constructivo*.

IV) La tarea T.6.3 consistió en encontrar y demostrar el lugar geométrico de la intersección (E) de las diagonales de un cuadrilátero inscrito $ABCD$, convexo, con un lado AB fijo y el lado CD constante en longitud. El lugar geométrico corresponde a un arco de circunferencia BA , el cual fue descubierto sin problema por Luis.

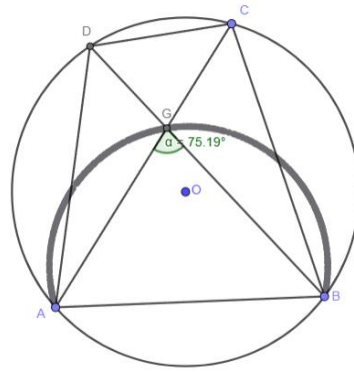
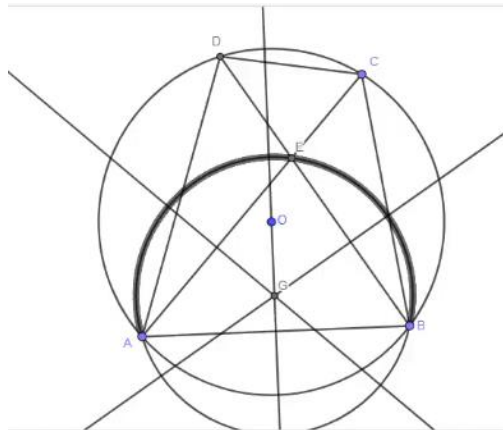


Figura 77 Lugar geométrico de la tarea T.6.3

2	Inv	¿Qué piensa Luis?
3	Luis	Es que no sé cómo demostrar que es lugar geométrico. Sé que si el ángulo es constante entonces está dentro de un círculo.
4	Inv	En un arco
5	Luis	Pero no sé cómo demostrar que ese ángulo es constante, porque fácil es decir que es constante y que están dentro de un arco, pero no sé cómo demostrar eso. [Traza las mediatrices de AE, EB y AB, con la intersección traza el círculo con centro en ese punto que pasa por A]

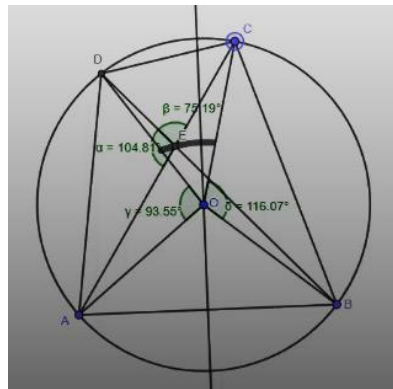


Teorema de los ángulos entre cuerdas, si un ángulo formado por dos cuerdas es la mitad de la suma ... [Lee las reglas de los ángulos formados por las cuerdas, tangentes y secantes]

Estas son cuerdas. [Borra las mediatrices]

Este teorema me sirve demasiado, dice, un ángulo formado por dos cuerdas intersecadas dentro del círculo es la mitad de la suma de los ángulos centrales que determinan los pares externos.

[Construye los segmentos CO, OB, DO, AO, mide los ángulos DEA, DOA y BOC] Entonces la calculadora [Suma y divide los ángulos]



		Ya encontré la solución.
6	Inv	¿Sí?
7	Luis	Con el teorema del ángulo entre cuerdas, el teorema dice que este ángulo formado por la intersección de las cuerdas de un círculo, DEA, es igual a la suma dividido entre dos de los ángulos centrales DOA y BOC y con eso tengo que este ángulo [AEB] es para completar con este [DEA] 180°, en este caso es 75°, entonces este ángulo es constante [señala AEB] ya que pues dos de los extremos de esas cuerdas son constantes, perdón fijos (se refiere a A y B), entonces ese valor siempre va a ser ese valor [AEB]. Entonces, al decir que es constante podemos decir que está en un arco.
8	Inv	Escribe tus ideas.
9	Luis	[Escribe en la hoja de trabajo]

clase 5: Angulos entre cuerdas

Tarea 6

Demostración del lugar geométrico

para demostrar que el lugar geométrico es un arco, nos tendremos que asegurar que $\angle AEB$ es constante (mantiene su medida). para esto nombraremos los ángulos a trabajar: $\angle DOA = \beta$ según el teorema de ángulos entre cuerdas sabemos $\angle BOC = \alpha$ que $\theta = \frac{\beta + \alpha}{2}$ y $\angle DEW = 180^\circ - \theta$, w se mantiene constante y al ser todas w de la misma medida podemos decir que por el segundo corolario o del teorema del ángulo inscrito el punto E se encuentra en un arco

$\angle AEB = w$

$\theta = \frac{\beta + \alpha}{2}$ es constante porque

[otra idea]

[Corrige lo que escribió en GeoGebra “El lugar geométrico es un ARCO, lo descubrí realizando la construcción de las diagonales de ABCD y con ayuda del rastro del punto E”]

Mira profe

10	Inv	Okey, tu utilizaste acá el ángulo entre cuerdas, entonces si la suma se mantiene constante entonces todo se mantiene constante, ¿cómo sé que la suma se mantiene constante?
11	Luis	Porque si la cuerda mantiene su longitud constante entonces el ángulo se mantiene constante.
12	Inv	¿Cuál es el ángulo que se mantiene constante? Lo que haría falta es demostrar que la suma de los ángulos se mantiene constante. ¿Cómo te diste cuenta de que los ángulos eran constantes?
13	Luis	Al moverlo

En [3], Luis mencionó que debía demostrar que el ángulo AEB se mantenía constante para poder concluir que el punto E estaba sobre el arco, evidenciando el siguiente *razonamiento abductivo*.

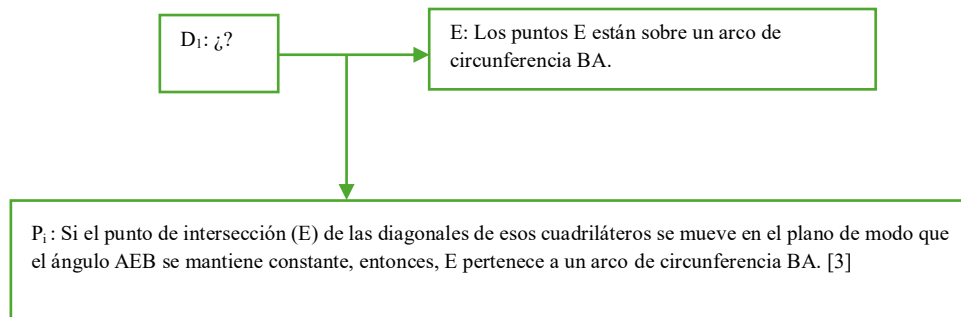


Figura 78 Razonamiento abductivo en la tarea T.6.3

Luis, en [5-9], buscó los datos necesarios para poder utilizar el permiso de inferir determinado en el esquema del razonamiento abductivo, por tanto, se interesó por el teorema del ángulo formado entre cuerdas. Luis, en [7], enunció que el ángulo DEA era igual a la semisuma de los ángulos DOA y BOC. Por tanto, el ángulo AEB sería el suplementario a DEA. Por lo que, si el ángulo DEA era constante, AEB también lo sería.

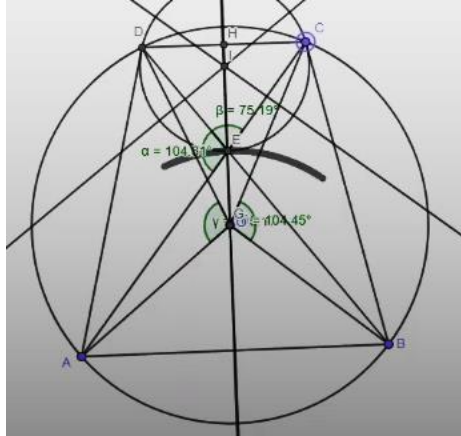
La investigadora, en [10-13], indagó sobre cómo la estudiante concluyó que el ángulo DEA era constante, Luis en [13] aseguró que el ángulo se mantenía constante porque lo observó al moverlo. Por tanto, aunque Luis hacía referencia a un teorema aceptado en clase, utilizó como base de su demostración propiedades identificadas en el ejemplo. Por lo que esta demostración sería *Empírica Ingenua Inductiva*.

Luego de que la investigadora le señalara a Luis que no resultaba evidente por qué la semisuma de los ángulos DOA y BOC es constante, Luis tomó otro camino en la demostración. El estudiante continuó buscando por qué el ángulo AEB era constante, para ello construyó el círculo que pasaba por los puntos D, C y E. En ese caso, según Arcavi y Hadas (2000) el uso de los SGD permite transformar construcciones en tiempo real, lo cual facilita el estudio de variantes e invariantes que pueden orientar al estudiante en la formulación de una demostración.

16 Luis ¿Qué ocurre si la longitud de DC se mantiene constante?
[Marca la mediatriz de DE, EC y DC, construye el círculo que pasa por D, E y C]

Podría decir que el ángulo AEB siempre es constante ya que su opuesto al vértice [DEC] es constante ¿por qué es constante? Porque es un ángulo inscrito en un círculo y mientras la cuerda de ese ángulo inscrito se mantenga constante este ángulo siempre se mantendrá constante.

Profe, tenemos el triángulo formado por las diagonales del ángulo opuesto al que necesitamos [DEC], este está sobre el círculo con centro en la intersección de las mediatrices de este triángulo [DEC] y mientras DC se mantenga constante el ángulo inscrito se mantiene constante.



17	Inv	¿Cuál ángulo inscrito?
18	Luis	DEC
19	Inv	O sea, tu creaste ese círculo, inscrito de ese círculo.
20	Luis	Al estar inscrito en ese círculo su ángulo será constante y por opuestos al vértice este será el mismo, o sea, será constante y al ser constante está sobre un arco.
21	Inv	Claro tu construiste un círculo que pasara por esos tres puntos.
22	Luis	[Escribe en GeoGebra]

arco

O = B + D es constante porque

[otra idea]

Para demostrar que el lugar geométrico es un arco, nos tenemos que asegurar que $\angle AEB$ es constante (cambie su medida), para esto podremos notar que $\angle CED$ es un ángulo inscrito en el círculo con centro en la intersección de las líneas notables de $\triangle ECD$ y con esto sabemos que $\angle CED$ es constante ya que es inscrito y la cuerda DC mantiene su longitud (prop. de ángulos inscritos), entonces $\angle CED = \angle AEB$ por los ángulos opuestos por el vértice y si tenemos que para cualquier punto E el $\angle AEB$ mantiene su medida, entonces E estará sobre un arco.

Luis quería transformar el problema en otro que ya se había resuelto previamente en la tarea T.4.3, de tal forma *razonó deductivamente* de la siguiente manera.

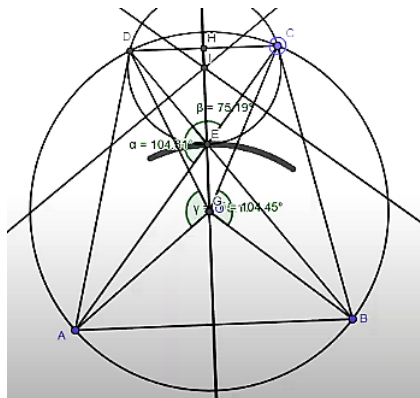


Figura 79 Construcciones sobre la tarea T.6.3

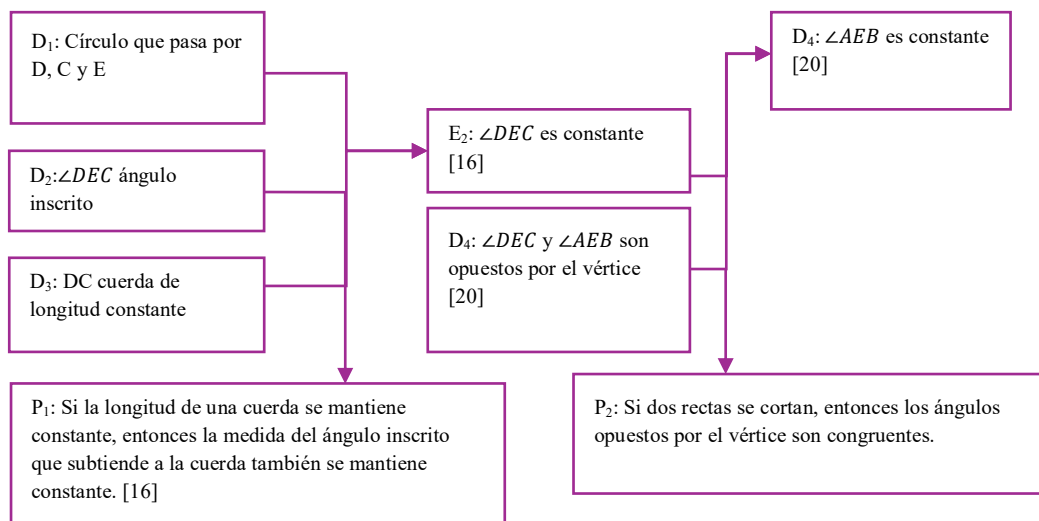


Figura 80 Razonamiento deductivo en la tarea T.6.3

Es preciso aclarar que la tarea T.4.3 es ligeramente diferente a como Luis la planteó. Esta tarea consistía en una cuerda AB que se mantenía constante en longitud al arrastrar B sobre la propia circunferencia. En cambio, en la tarea T.6.3, la cuerda CD se mantiene constante al arrastrar C, pero este punto se mueve a lo largo del circuncírculo del cuadrilátero convexo. En ese sentido, no

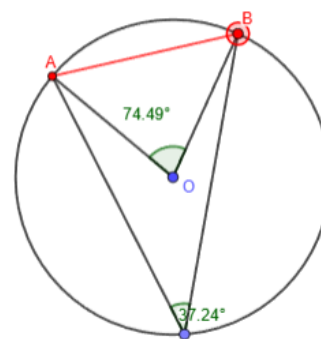


Figura 81 Tarea T.4.3

transformó el problema de la tarea T.6.3 al conocido en la tarea T.4.3. Ahora, el ángulo se mantiene constante debido a que el círculo que pasa por los tres puntos D,C y E se mantiene con el mismo

radio a medida que se mueve C, esto hace que el ángulo central se mantenga constante y por ende el ángulo inscrito DEC.

No obstante, como la demostración se basó en construcciones realizadas sobre el ejemplo, se considera que esta demostración es un *experimento crucial constructivo*.

5.4.4. Algunas reflexiones sobre este tipo de tareas

Molfino y Lezama indican que desarrollar una tarea de lugar geométrico:

Es una oportunidad en la que los estudiantes se enfrentan a un problema que involucra elementos estáticos y dinámicos, y en parte, su resolución depende precisamente de identificar la relación entre ellos, encontrar las invariancias de una situación que es dinámica: determinar cuáles medidas o relaciones permanecen constantes, mientras otras no y justificarlo. Esto favorece nuevos tipos de razonamientos respecto a los problemas en los que sólo intervienen elementos estáticos (2011, p.42).

El análisis realizado evidencia lo mencionado por Molfino y Lezama (2011), los estudiantes transitan por diferentes formas de razonamiento a lo largo del desarrollo de la tarea. Inician con estrategias perceptivas que, por medio del razonamiento inductivo, permiten establecer la figura que representa el lugar geométrico. Utilizan el razonamiento abductivo para buscar reglas teóricas, aceptadas en clase, que permitan concluir que los puntos que cumplen ciertas propiedades se encuentran en el lugar geométrico y para buscar los datos necesarios para utilizar el permiso de inferir establecido. Al momento de buscar los datos, surgen razonamientos inductivos o deductivos que generan diversos tipos de demostraciones.

Como se observó en las líneas anteriores, para diferentes tareas de lugares geométricos el permiso de inferir que se consideraba útil en el razonamiento abductivo era el mismo, pero la

búsqueda de los datos fue diferente en cada tarea, los estudiantes usaban información identificada experimentalmente en el ejemplo, realizaban construcciones auxiliares o utilizaban deducciones lógicas para encontrar los datos. En esta búsqueda se esperaba que se movilizaran los teoremas relacionados con círculos.

En cuanto a la secuencia de enseñanza, este tipo de tareas demandaba que el estudiante describiera, construyera y demostrara que el lugar geométrico sí corresponde al objeto que se ha conjeturado. Al utilizar la opción *Rastro*, se reconoce inmediatamente la figura que conforma el lugar geométrico, sin embargo, dotarlo de características que permitan identificarlo únicamente a él puede ser un reto para los estudiantes, o incluso, podría lograrse después de la demostración y no en un primer paso de identificación del lugar geométrico. Por ejemplo, en la tarea T.4.5 el lugar geométrico era un arco BA, para hacer referencia a ese arco en particular era necesario mencionar la medida del ángulo central AOB, que en ese caso era de $360^\circ - 2\angle APB$, dicha característica no es inmediata al observar el rastro, de hecho, aparece en el momento de la demostración, por tanto, es posible caracterizarlo hasta entonces. En ese sentido, parece pertinente modificar la pregunta “Describe el lugar geométrico. ¿Dónde se encuentran dichos puntos? ¿Cómo lo descubrió?” por “¿Qué figura caracteriza el lugar geométrico en esta situación?”.

En la etapa de demostración, se observó que los estudiantes presentaban problemas para saber lo que debían demostrar, puesto que no contaban explícitamente con una proposición condicional. En ese orden de ideas, la indicación “Demuestre que el lugar geométrico que observó es el buscado” es vaga para ellos.

Santos Trigo (2011) menciona que, en estas tareas, el problema debe ser pensado por los estudiantes a partir de preguntas que los orienten hacia la generación de conjeturas o relaciones. Por tanto, se considera pertinente proponerle al estudiante una serie de cuestionamientos que le

permitan reconocer el antecedente y el consecuente de la proposición condicional. Para el antecedente, “¿Qué condición cumplen los puntos que se están considerando?”, para el consecuente “¿Dónde estará ese punto si cumple la condición?” y para formular la proposición “Complete: Si un punto cumple con _____, entonces pertenece a _____.
Demuéstrelo ”.

6. Conclusiones

Desarrollar procesos de razonamiento y demostración ha sido uno de los objetivos principales de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Euclidiana. Los Softwares de Geometría Dinámica se han considerado herramientas valiosas para enriquecer dichos procesos cuando están acompañados de tareas que invitan al estudiante a explorar y a experimentar. Entre ellas, las tareas de construcción han ocupado un lugar preponderante en investigaciones sobre didáctica de la geometría; en ese sentido, este trabajo se interesó por esta y otras tareas en el entorno dinámico. Por tanto, el objetivo de este trabajo fue aportar información sobre las formas de razonamiento y los tipos de demostración que surgen de los alumnos al estudiar las propiedades del círculo en tareas de construcción, lugares geométricos, cajas negras y de simulación.

A partir de los resultados expuestos en el capítulo anterior, se evidenció que en las tareas no se utilizó un único tipo de razonamiento; por el contrario, los estudiantes coordinaron dos o tres tipos a lo largo de su desarrollo. Además, las demostraciones presentaron una notable diversidad, aunque la secuencia de enseñanza se llevó a cabo al final del curso de Geometría Euclidiana, se observaron tanto demostraciones empíricas como deductivas. A continuación, se presentan las conclusiones correspondientes a cada tipo de tarea.

En las *tareas de simulación* se evidenció que las herramientas y elementos presentes en el boceto preconstruido generaron distinciones en los razonamientos de los estudiantes al momento de encontrar las relaciones geométricas deseadas. Cuando la simulación contaba con herramientas de construcción y de medición, los estudiantes *razonaban inductivamente*; por otra parte, cuando dichas herramientas se ocultaban y ciertos objetos se hacían visibles mediante botones, ellos *razonaban deductivamente*, con permisos de inferir teóricos, para determinar las relaciones entre los objetos. Con ello, los estudiantes lograron plantear las relaciones geométricas deseadas en forma de enunciados condicionales, descubriendo teoremas sobre círculos por ellos mismos y no por imposición del profesor.

Al descubrir la relación geométrica, los estudiantes *razonaron abductivamente* para establecer permisos de inferir teóricos que permitieran concluir el consecuente de la relación. De tal forma, necesitaban buscar los datos necesarios que se conectaran con la conclusión por medio del permiso de inferir. En este proceso, el uso de representaciones geométricas dinámicas les permitió generar distintas demostraciones: *razonaban deductivamente* sobre una configuración particular de la simulación, generando *demostraciones fallidas deductivas* que fueron descartadas al *arrastrar* la configuración; realizaron construcciones sobre la representación que fundamentaron la demostración, generando demostraciones de tipo *experimento crucial constructivo* que fueron descartados por *refutaciones* de los compañeros de trabajo; o se basaron en aspectos generales del problema que por medio del *razonamiento deductivo* y de reglas teóricas permitieron la presencia de *demostraciones deductivas formales*.

En las *tareas de construcción* se evidenció el uso de *razonamientos inductivos, abductivos y deductivos* al momento de realizar la construcción, dependiendo de las heurísticas empleadas. No obstante, aunque algunas construcciones partieron de una base *inductiva*, las *demostraciones*

realizadas sobre el protocolo de construcción fueron de carácter *deductivo*. Esto se debe a que este tipo de tareas se trabajaron durante todo el curso y se reflexionó sobre las propiedades que se garantizan al realizar construcciones en el SGD. De este modo, los estudiantes lograron reconocer que una propiedad no es producto del azar, sino el resultado de una cadena lógica determinada por los objetos construidos. Por tanto, es natural para los estudiantes indagar sobre la validez del protocolo de construcción para relacionar sus acciones con propiedades y reglas teóricas aceptadas en clase. Este reconocimiento por parte de los estudiantes puede interpretarse como una manifestación del *contrato didáctico* establecido en el curso, en el que se espera que toda construcción sea acompañada de una demostración que *explique* su validez.

En las *tareas de cajas negras* se evidenció el uso de razonamientos tanto *inductivos* como *deductivos*, según la naturaleza de la tarea. En aquellas inspiradas en los *Sangakus*, aunque algunas propiedades fueron determinadas a partir de razonamientos deductivos, muchas otras surgieron de conjeturas perceptivas que los estudiantes validaron mediante el arrastre. En este caso, los razonamientos fueron predominantemente *inductivos*, dando lugar a demostraciones de tipo *empírico ingenuo perceptivas* y a *experimentos cruciales basados en el ejemplo*. Así, la demostración adquirió un carácter de *verificación*, en el cual el arrastre proporcionado por el entorno de geometría dinámica (SGD) permitió a los estudiantes *comprobar* la validez de la construcción, pero no *explicar* por qué el protocolo de construcción era geoméricamente válido.

Por el contrario, en la caja negra *dinámica*, los estudiantes razonaron inicialmente de manera *inductiva* para identificar propiedades invariantes y relaciones de dependencia entre los objetos, y posteriormente *deductiva* para fundamentar la construcción. En este contexto, el arrastre facilitó la identificación de propiedades y funcionó como medio de verificación del

comportamiento esperado. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, la demostración adquirió un carácter *explicativo* lo que condujo a la elaboración de *demostraciones deductivas*.

En las *tareas de lugares geométricos* se evidenció una interacción de los tres tipos de razonamientos: inductivo, abductivo y deductivo. En un primer momento, los estudiantes razonaron *inductivamente* para determinar la figura que representaba el lugar geométrico y en algunos casos, la construcción de dicha figura implicó *razonamientos deductivos* apoyados en permisos de inferir teóricos.

Por otro lado, al momento de demostrar por qué la figura obtenida correspondía efectivamente al lugar geométrico, emergió una gran diversidad de estrategias y tipos de demostraciones. Inicialmente, los estudiantes recurrieron a argumentos basados en la definición del lugar geométrico y en la observación del rastro de los puntos de interés, lo que dio lugar a *demostraciones empíricas ingenuas perceptivas*. En este proceso se identificaron dificultades para determinar lo que debía demostrarse, ya que muchos no lograban enunciar la *proposición condicional* que caracterizaba al lugar geométrico. A partir de preguntas orientadoras como ¿qué propiedades cumplen todos los puntos? y ¿dónde se encuentran dichos puntos?, los estudiantes comenzaron a formular la proposición en términos condicionales, cabe recalcar que esta dificultad se presentó durante toda la secuencia.

Cuando los estudiantes formularon la proposición que determinaba el lugar geométrico de la forma “si, entonces”, se observaron *razonamientos abductivos*, los estudiantes conocían la conclusión deseada y buscaban los *permisos de inferir* y los *datos* necesarios para conseguirla. Los estudiantes plantearon permisos de inferir teóricos; sin embargo, la búsqueda de los datos condujo a demostraciones de distinta naturaleza.

Algunos estudiantes utilizaron medidas dentro del entorno dinámico como elementos fundamentales de la demostración, dando lugar a *demostraciones empíricas ingenuas inductivas*. En otras ocasiones, sus argumentos se basaban en construcciones realizadas sobre la configuración, lo que correspondió a *demostraciones de tipo experimento crucial constructivo*. En ciertos casos, las medidas no fueron parte de la demostración final, sino un medio para identificar propiedades teóricas relevantes, generando así *demostraciones de tipo experimento mental estructural*. Finalmente, en algunos casos, lograron encadenar lógicamente los datos y los permisos de inferir, construyendo *demostraciones deductivas formales*.

La siguiente tabla presenta una síntesis de lo mencionado anteriormente sobre cada tarea.

Razonamientos y demostraciones en el desarrollo de la tarea					
Tareas de simulación	Formulación de la relación geométrica		Demostración de la relación geométrica		
	<i>Característica del diseño</i>	<i>Razonamientos involucrados</i>	<i>Razonamientos involucrados</i>	<i>Objetivo o uso del razonamiento</i>	<i>Tipo de demostración</i>
	Con acceso a herramientas de medición	Inductivo	Abductivo	Determinar un permiso de inferir para determinar la conclusión	
			Inductivo	Sobre construcciones auxiliares	Experimento crucial constructivo
	Sin acceso a herramientas de medición	Deductivo	Deductivo	Sobre una representación	Fallida deductiva
				Sobre los datos del problema	Deductiva formal
Tareas de construcción	Desarrollo de la construcción		Demostración de la construcción		
	<i>Heurística</i>		<i>Razonamientos involucrados</i>	<i>Razonamientos involucrados</i>	<i>Tipo de demostración</i>
	Ensayo y error controlado		Abductivo	Deductivo sobre los datos del problema y con permisos de inferir teóricos	Deductiva formal o informal
	Exploración y descubrimiento de relaciones		Inductivo		
	Análisis		Inductivo/deductivo		
Reglas teóricas		Deductivo			
Tareas de cajas negras	Tipo	Razonamientos involucrados		Objetivo o uso del razonamiento	
	Sangaku	Deductivo		Construir algunas propiedades	

		Inductivo	Demostrar supuestos perceptivos (<i>Demostración empírica perceptiva y experimento crucial basado en el ejemplo</i>)			
	Dinámica	Inductivo	Determinar dependencias			
		Deductivo	Demostrar el protocolo de construcción (<i>Demostración deductiva informal</i>)			
Tareas de lugares geométricos	Determinación del lugar geométrico	Construcción del lugar geométrico	Proceso de demostración			
	<i>Razonamientos involucrados</i>	<i>Razonamientos involucrados</i>		Razonamientos involucrados	Objetivo o uso del razonamiento	Tipo de demostración
	Inductivo a través del rastro y de construcciones auxiliares	Deductivo por medio de datos y de reglas teóricas	Sin enunciado condicional	Inductivo	Demostrar el lugar geométrico por medio del rastro	Empírica Ingenua Perceptiva
				Abductivo	Identificar permisos de inferir útiles para llegar a la conclusión	
			Con enunciado condicional	Inductivo	Al buscar datos para el razonamiento abductivo toman medidas o realizan construcciones para generalizar	Empírica Ingenua Inductiva Experimento crucial constructivo
				Deductivo	Al buscar datos identifican propiedades	Experimento mental estructural
			Encadenar datos	Deductiva formal o informal		

Tabla 1 Razonamientos y demostraciones en el desarrollo de la tarea

Lo anterior muestra que el experimento de enseñanza implementado permitió que los estudiantes se enfrentaran a diversos escenarios para la actividad demostrativa. Es decir, aunque la secuencia se desarrolló durante el último mes del curso de Geometría Euclidiana, cuando los estudiantes ya contaban con cerca de tres meses de trabajo en torno a la demostración, se evidenció que las tareas nuevas para ellos propiciaron demostraciones de carácter empírico.

Por ejemplo, los estudiantes ya habían trabajado anteriormente con tareas de construcción, lo que favoreció la aparición de demostraciones deductivas. En cambio, en las tareas de simulación, cajas negras y lugares geométricos, se presentaron algunas demostraciones empíricas. Estos resultados permiten afirmar que exponer a los estudiantes a distintos tipos de tareas

enriquece su capacidad demostrativa. No obstante, se reconoce que el diseño de estas tareas no es una labor sencilla, por ejemplo, elaborar una situación de lugar geométrico que movilice determinados teoremas requiere un cuidadoso análisis de las posibles acciones que realizará el estudiante.

No obstante, cabe señalar que el momento del curso en que se implementó la secuencia permitió que los estudiantes realizaran cambios en sus demostraciones, puesto que los estudiantes, en este momento del curso, tenían mayor conciencia y sensibilidad frente a las refutaciones presentadas tanto por sus compañeros como por la profesora. Esto sugiere que el trabajo colaborativo desempeña un papel importante en el desarrollo del proceso de demostración, ya que obliga a los estudiantes a convencer al otro y a sustentar sus afirmaciones. Así mismo, se resalta el rol del profesor como mediador en este proceso, su intervención mediante preguntas o refutaciones resulta clave para guiar el camino hacia las demostraciones deductivas. Sin embargo, también se reconoce la dificultad de seguir de cerca las acciones y demostraciones de todos los grupos de trabajo en una clase numerosa.

Adicionalmente, los resultados obtenidos pueden orientar a los profesores interesados en implementar este tipo de tareas en sus clases. En primer lugar, se destaca la importancia de definir cuidadosamente las herramientas, preguntas y controles presentes en las simulaciones, pues estos elementos pueden favorecer distintos tipos de razonamiento según su diseño. En las tareas de construcción, resulta fundamental formular preguntas que ayuden a los estudiantes a vincular los pasos del protocolo de construcción con reglas teóricas aceptadas en clase. En las cajas negras, el dinamismo del entorno puede aprovecharse para promover razonamientos deductivos, mientras que el uso de imágenes estáticas, como en las tareas tipo Sangaku, tiende a propiciar razonamientos inductivos basados en la observación. Finalmente, en las tareas de lugares geométricos, conviene

prestar especial atención a las dificultades de los estudiantes para enunciar proposiciones condicionales, ya que esta limitación puede obstaculizar el paso de la exploración a la demostración.

Así mismo, se destaca que la secuencia de enseñanza refinada conforma un producto de esta investigación, por lo que se invita a los profesores e investigadores a utilizarla con propósitos académicos y de investigación. Esta secuencia al estar planteada en el Aula Virtual de GeoGebra (AVG) permite gestionar la clase, en el sentido en que permite al profesor observar lo que los estudiantes van escribiendo y haciendo en los applets para mediar estas acciones, y permite pausar las tareas en las fases de discusión para centrar la atención del estudiante en la puesta en común. Además, para los investigadores, el AVG permite una recolección y almacenamiento de datos práctico.

En cuanto a las limitaciones, este estudio presenta algunas de carácter metodológico, inicialmente, los resultados presentados están basados en información recolectada por dos pares de estudiantes, por lo que los resultados presentados no pretenden ser generalizables. Además, se aplicó únicamente una tarea de caja negra dinámica, lo que sugiere que la inclusión de más tareas de este tipo podría generar resultados distintos o ampliar la información obtenida. No obstante, este trabajo aportó información sobre el proceso de demostración y de razonamiento al desarrollar las tareas de interés.

Finalmente, futuras investigaciones podrían indagar sobre la demanda cognitiva que implica cada uno de estos tipos de tareas, así como sobre las diferencias en la formulación de enunciados condicionales entre las tareas de simulación y las de lugares geométricos. Además, sería pertinente explorar las reflexiones que los futuros profesores pueden realizar sobre su práctica docente tras conocer, estudiar y desarrollar este tipo de tareas en el aula.

Referencias bibliográficas

- Acosta, M. (2008). *Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie*. [Tesis doctoral, Université Grenoble]
- Acosta, M. y Fiallo, J. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. <http://hdl.handle.net/11349/37613>
- Arcavi, Abraham., & Hadas, Nurit. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 25-45.
- Arzarello, F., Bartolini, M., Leung, A., Mariotti, M. y Stevenson, I. (2012). Experimental approaches to theoretical thinking: Artefacts and proofs. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study*, 97-143.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, (pp. 216-235).
- Bell, A. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23-40.
- Beltrán-Meneu, M. J., Ramírez-Uclés, R., Ribera-Puchades, J. M., Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2024). A Case Study of Proving by Students with Different Levels of Mathematical Giftedness. *Mathematics Teaching Research Journal*, 16(2), 119-145.
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis*. Editorial Universidad de Antioquia.

Castilla, A. (s.f). *Trazoide: Dibujo técnico, geometría y cad*. Consultado el 11 de octubre de 2025.

<https://trazoide.com/ejercicios-de-dibujo-tecnico/>

Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1998). *Geometry*. Addison Wesley Longman.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 231-265). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Dagiene, V., y Jasutiene, E. (2006). Developing dynamic sketches for teaching mathematics in basic schools. *The 17th ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) Study: Technology Revised*, 120-127.

Dahan, J. (2005). *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-Géomètre en mathématiques: un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problèmes de boîtes noires*. [Tesis Doctoral, Universidad Joseph Fourier-Grenoble]

Dal Maso, M. (2023). Un problema de lugar geométrico que invita a descubrir y explicar propiedades mediadas por un software de geometría dinámica. *Epsilon*, 115, 21-33

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En: A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology Of Mathematics Education: Vol. 2*. (pp. 248-255). University of Stellenbosch: Stellenbosch.

Díaz, J. (2016). *Miscelánea de Geometría: Lugares geométricos*

Fiallo J. E. (2011). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. [Tesis doctoral, Universitat De València]

- Galindo, E. (1998). Implementing the Assessment Standards for School Mathematics: Assessing Justification and Proof in Geometry Classes Taught Using Dynamic Software. *The Mathematics Teacher*, 91(1), 76-82.
- García, G. (1998). *Heurística Geométrica*. Limusa.
- García, S. y Naranjo, D. (2015). *Problemas en templos del oriente: los Sangaku*. [Tesis de Pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]
- Godino, J. y Recio, Á. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza De Las Ciencias*, 19 (3), 405-414.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación de profesores de matemáticas de secundaria*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]
- Guerrero-Ortiz, C., Reyes-Rodriguez, A., y Espinosa-Perez, H. (2015). Integrating synthetic and analytical aspects of geometry through solving problems using a DGS. *International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud*, 283-297.
- Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for DNR - based instruction. En S. Campbell & R. Zaskis (Eds.), *Learning and teaching number theory, journal of mathematical behavior* (pp. 185 - 212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.
- Harel, G. y Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. *PME Conference*, 3, 3-59.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: results from exploratory studies. En A. Schoenfeld y otros (Ed.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 7, pp. 234 - 283). Providence, EE. UU.: American Mathematical Society.
- Hollebrands, K., Laborde, C., & Strässer, R. (2008). Technology and the learning of geometry at the secondary level. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, 1, 155-205.

- Hurani, C. y Dal Maso, M. (2016). Algunas consideraciones sobre una propuesta de resolución de problemas de lugares geométricos con GeoGebra. *Memorias VI REPEM*, 6, 58-69.
- Iglesias, M. y Ortiz, J. (2019). La Demostración en Geometría desde una Perspectiva Didáctica. *UNIÓN-Revista iberoamericana de educación matemática*, 15(55), 159-183.
- Joubert, M. (2017), Revisiting Theory for the Design of Tasks: Special Considerations for Digital Environments. En A. Leung and A. Baccaglioni-Frank (eds.), *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks*, (pp. 17-40). Springer.
- Komatsu, K. y Jones, K. (2021). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 109(3), 567-591.
- Komatsu, K., y Jones, K. (2019). Task design principles for heuristic refutation in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(4), 801-824.
- Laborde, C. (2001). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151–161.
- Laborde, C. (2006). Integration of technology in the design of Geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283–317.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275–304). Brill.
- Lárez, J. (2014). Las Demostraciones Geométricas como Instancias de Resolución de Problemas. *Paradigma*, 35(2), 183-198.
- Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemática secundaria*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]
- Maiduang, A. (2013). *Dynamic geometry environment and its relation to thai students' higher-order thinking: reasoning in euclidean geometry*. [Tesis Doctoral, King's College London]

- Mariotti, A. y Bartolini, M. (1998). From drawing to construction: teacher's mediation within the Cabri environment. *Actas de la 22ª Conferencia del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática*, 3, 247-255.
- Marrades, R. y Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, 44, 87-125.
- Meyer, M. (2023). Using Abduction for Characterizing the Process of Discovery. En L. Magnani (ed.), *Handbook of Abductive Cognition* (pp. 557-583). Springer Nature Switzerland.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Enlace Editores LTDA.
- Molfino, V., y Lezama, J. (2011). Lugares geométricos: su rol en el aprendizaje de la demostración en geometría. *Educación matemática*, 23(1), 37-61.
- Molina, M. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]
- Molina, M., Castro, E., Molina, J., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 75-88.
- Morales, S. y Samper, C. (2015). Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea, *Amazonia Investiga*, 4(6). 55-68.
- Nirode, W. (2012). *An Analysis of How and Why High School Geometry Teachers Implement Dynamic Geometry Software Tasks for Student Engagement*. [Tesis Doctoral, Ohio University]
- Ojeda, V., Saldivia, F. y Maglione, D. (2017). Procesos de validación mediados por el software GeoGebra. Los criterios de congruencia para explorar, construir, argumentar y demostrar. *Informe Científico Técnico UNPA*, 9(2), 96-114.

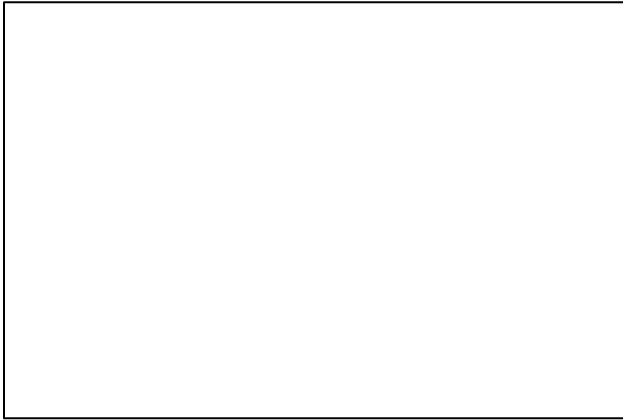
- Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2003). Approaching theoretical thinking within a dynamic geometry environment. *Educação Matemática Pesquisa*, 5(1), 85-103.
- Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans le apprentissage des mathématiques*. [Tesis doctoral, Université Joseph Fourier – Grenoble I].
- Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques*, 25(3), 313 - 348.
- Pérez, J. (2001). *Lugares geométricos*.
- Prieto, J. y Gutiérrez, R. (2024). Geometry learning with dynamic software in pre-service mathematics teacher education: A systematic review. *Education and Information Technologies*, 1-21.
- Ríos-Cuesta, W. (2021). Argumentación en educación matemática: elementos para el diseño de estudios desde la revisión bibliográfica. *Amazonia Investiga*, 10(41), 96–105.
- Rodríguez, M., Gregori, P., Riveros, A., y Aceituno, D. (2017). Análisis de las estrategias de resolución de problemas en matemática utilizadas por estudiantes talentosos de 12 a 14 años. *Educación matemática*, 29(2), 159-186.
- Salinas, J. y Sánchez, E. (2007). Identificación de propiedades y relaciones en un ambiente de Geometría Dinámica. *Investigación en Educación Matemática XI*, 343-353.
- Samper, C. y Molina, Ó. (2013). *Geometría plana. Un espacio de aprendizaje*. Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- Samper, C. y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 50, 367-382.
- Samper, C., Echeverry, A., & Molina, O. (2013). *Elementos de geometría: aprendizaje y enseñanza de la geometría*.

- Samper, C., Perry, P., Molina, O., Camargo, L. y Echeverry, A. (2011). Geometría dinámica, implicación y abducción: un estudio de caso. *Memorias XIII CIAEM-IACME*.
- Santos-Trigo, M. (2011). La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6(8), 33-54.
- Santos-Trigo, M., Reyes-Rodríguez, A. y Espinosa-Pérez, H. (2007). Musing on the use of dynamic software and mathematics epistemology. *Teaching mathematics and its applications*, 26(4), 167-178.
- Sinclair, M. (2003). Some Implications Of The Results Of A Case Study For The Design Of Pre-Constructed, Dynamic Geometry Sketches And Accompanying Materials. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 289–317.
- Sosa, L.; Aparicio, E. y Cabañas, G. (2019). Characterization of inductive reasoning in middle school mathematics teachers in a generalization task. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 563–581.
- Stylianides, G. y Stylianides, A. (2017). Based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 119-127.
- Stylianides, G., Stylianides, A. y Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: a systematic review. *ZDM–Mathematics Education*, 56(1), 47-59
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.
- Triana, Y. (2013). *Análisis del razonamiento inductivo que movilizan los estudiantes de grado séptimo del colegio Miguel de Cervantes Saavedra al resolver actividades de tipo “caja negra” en Cabri*. [Tesis de Maestría, Centro de Investigación y Formación en Educación]

- Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En: Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library*, 11. 65-81, Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5
- Zakaryan, D. (2013). El tipo de tareas como oportunidad de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años. *Memorias I CEMACYC*, 1-12.

Apéndices

Apéndice A: Reglas teóricas relacionadas con círculos



Definición de cuerda de un círculo

- Si un segmento tiene como extremos dos puntos de un círculo, entonces es una cuerda de ese círculo.
- Si un segmento es una cuerda de un círculo, entonces sus puntos extremos están sobre dicho círculo



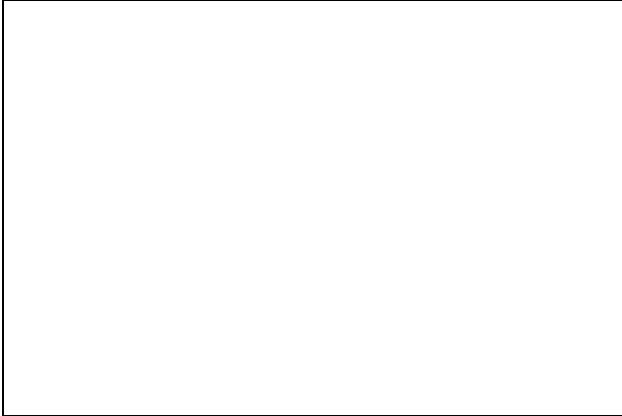
Teorema de las cuerdas congruentes

- Si dos cuerdas son congruentes, entonces equidistan del centro del círculo.
- Si dos cuerdas equidistan del centro del círculo, entonces, son congruentes.

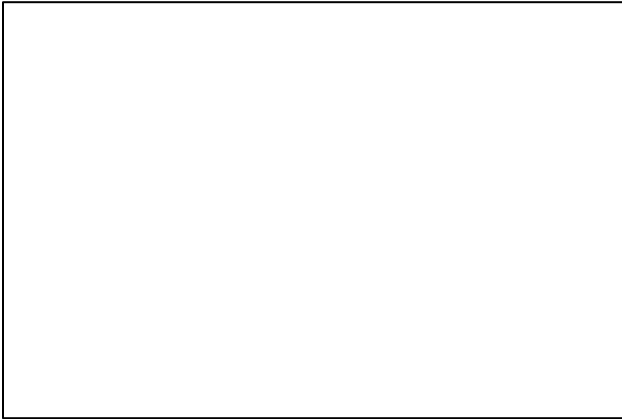


Primer teorema de la mediatriz de una cuerda

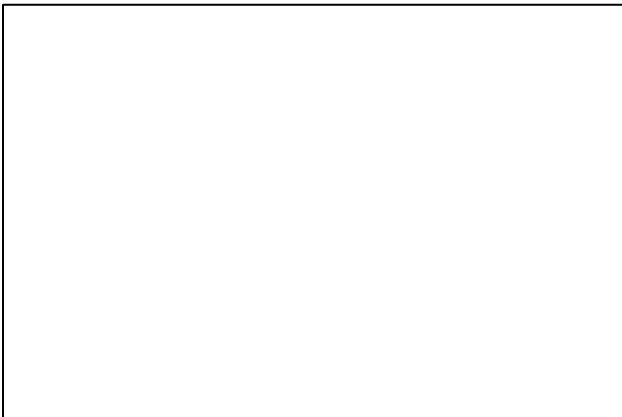
- Si una recta es mediatriz de una cuerda, entonces contiene al centro del círculo.

**Segundo teorema de la mediatriz de una cuerda**

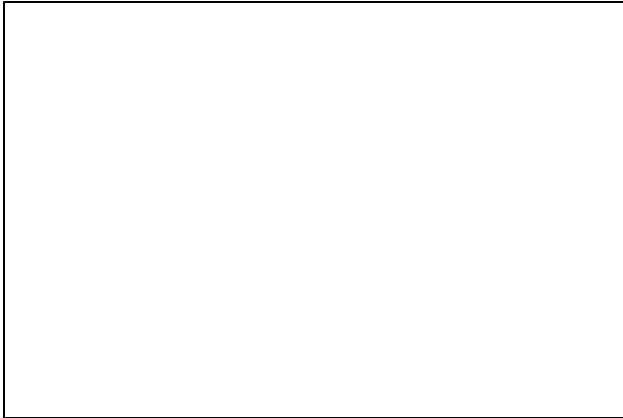
- Si una recta que pasa por el centro del círculo biseca a una cuerda, que no es el diámetro, entonces, es perpendicular a la cuerda.
 - Si una recta que pasa por el centro del círculo es perpendicular a una cuerda, que no es el diámetro, entonces biseca a la cuerda.
-

**Definición de rectas secantes a un círculo**

- Si una recta interseca al círculo en exactamente dos puntos, entonces es una recta secante al círculo
 - Si una recta es secante de un círculo, entonces interseca al círculo en exactamente dos puntos
-

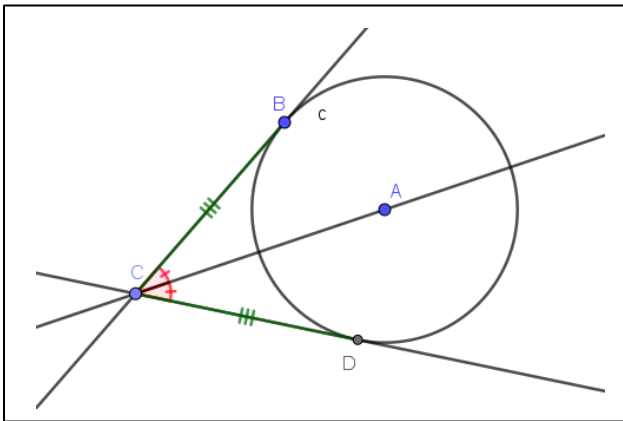
**Definición de rectas tangentes a un círculo**

- Si una recta interseca al círculo en exactamente un punto, entonces es una recta tangente al círculo
- Si una recta es tangente a un círculo, entonces interseca al círculo en exactamente un punto



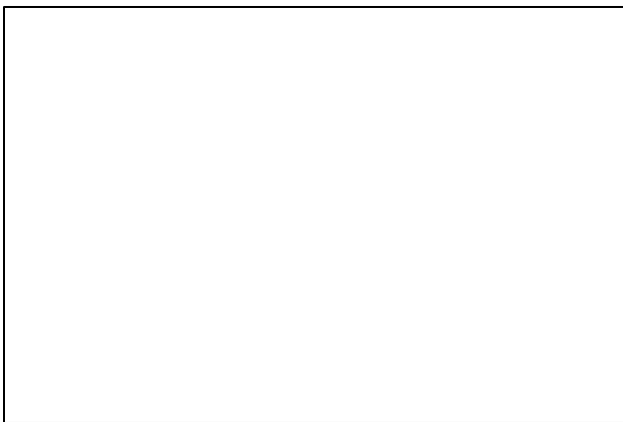
Teorema de las rectas tangentes

- Si una recta es perpendicular a un radio en un punto del círculo, entonces la recta es tangente al círculo.
- Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio trazado hasta el punto de tangencia es perpendicular a la tangente



Teorema de los segmentos tangentes

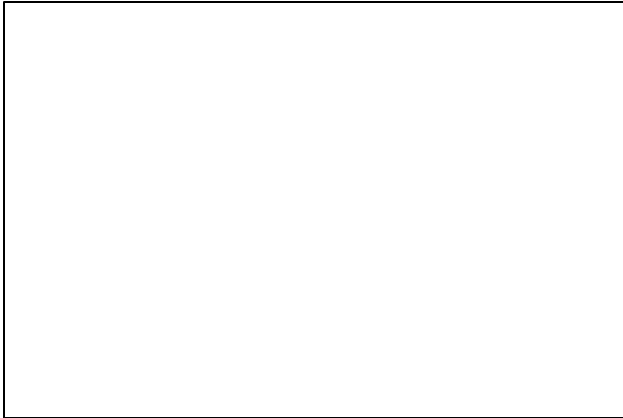
- Si se trazan dos rectas desde un punto exterior a un círculo, entonces los segmentos tangentes son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto.



Definición de arco de un círculo

- Un arco en un círculo es una parte continua del círculo, delimitado por dos puntos sobre el mismo.

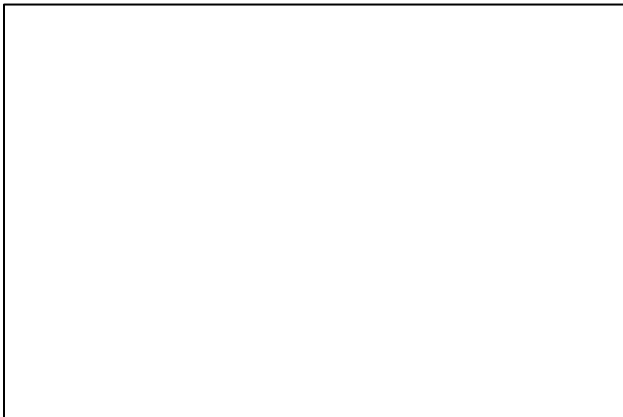
Nota: Los arcos en un círculo se van a nombrar usando los puntos que lo delimitan y se hará en sentido antihorario. De esta forma el arco AB es diferente al arco BA.

**Definición de ángulo inscrito**

- Si un ángulo, menor a 180° , tiene su vértice en un círculo y sus lados contienen cuerdas del círculo, entonces es un ángulo inscrito.
- Si un ángulo menor a 180° es un ángulo inscrito de un círculo, entonces tiene su vértice en el círculo y sus lados contienen cuerdas del círculo

**Definición de ángulo central**

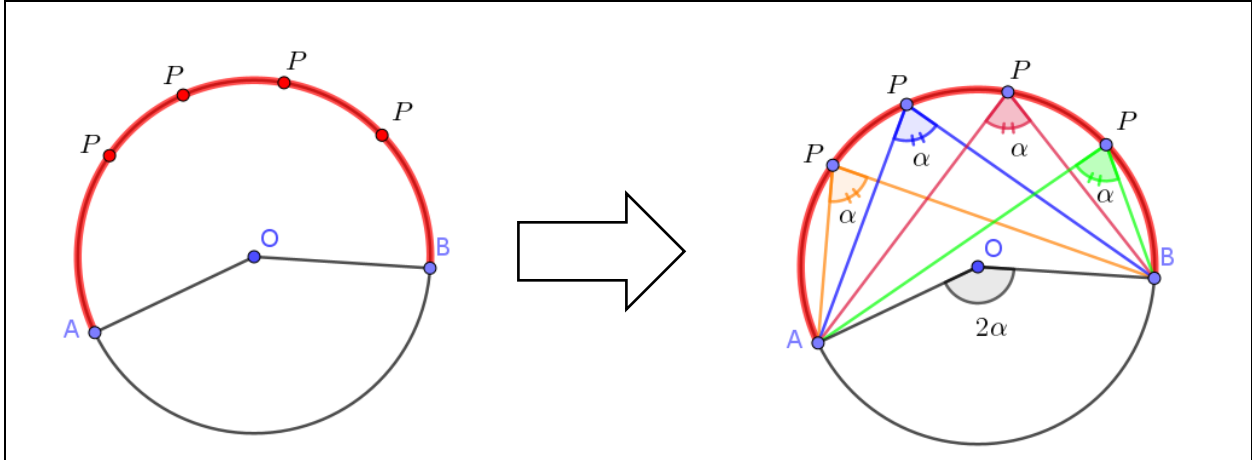
- Si un ángulo tiene su vértice en el centro del círculo, entonces es un ángulo central de dicho círculo.
- Si un ángulo es un ángulo central, entonces tiene su vértice en el centro del círculo.

**Teorema del ángulo inscrito**

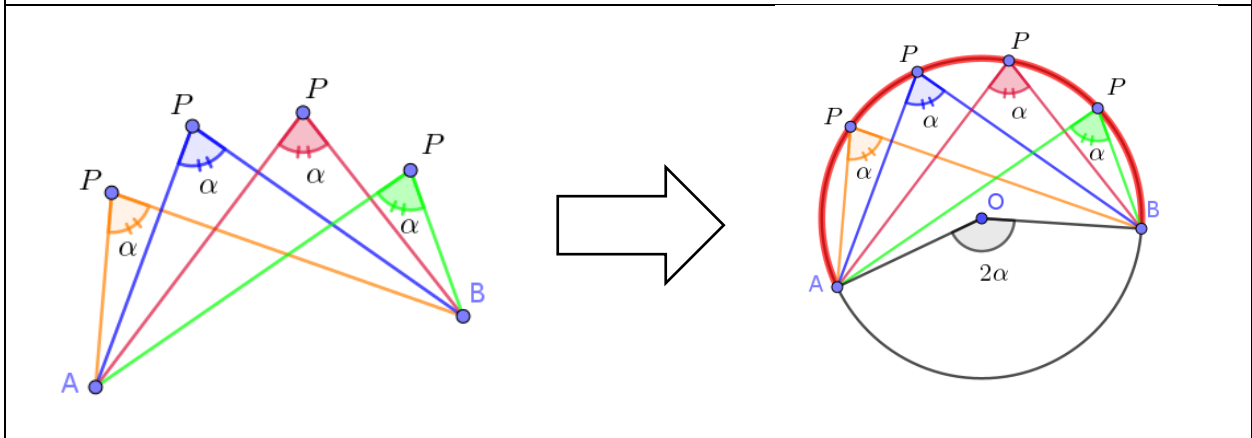
- Si un ángulo $\sphericalangle APB$ es un ángulo inscrito de un círculo con centro O , entonces su medida es igual a la mitad de la medida de su correspondiente ángulo central $\sphericalangle AOB$.
- Si el ángulo $\sphericalangle AOB$ es un ángulo central y un ángulo $\sphericalangle APB$ tiene medida igual a la mitad de la medida del $\sphericalangle AOB$, entonces $\sphericalangle APB$ es un ángulo inscrito.

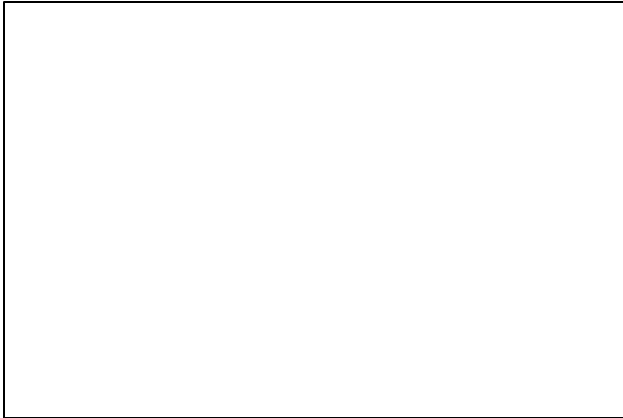
Corolarios del Teorema del ángulo inscrito

- Si P es un punto cualquiera sobre el arco BA , de un círculo con ángulo central $\sphericalangle AOB$, entonces el ángulo $\sphericalangle APB$ tiene la misma medida para cualquier punto P , la cual es la mitad de la medida del ángulo central $\sphericalangle AOB$



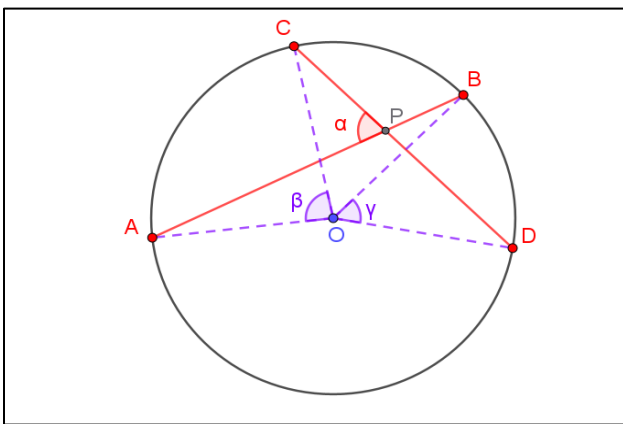
- Si para distintos puntos P , los ángulos $\sphericalangle APB$ tienen la misma medida, entonces todos esos puntos P están sobre el arco BA de un círculo con ángulo central $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle APB$





Propiedad de la cuerda con longitud constante

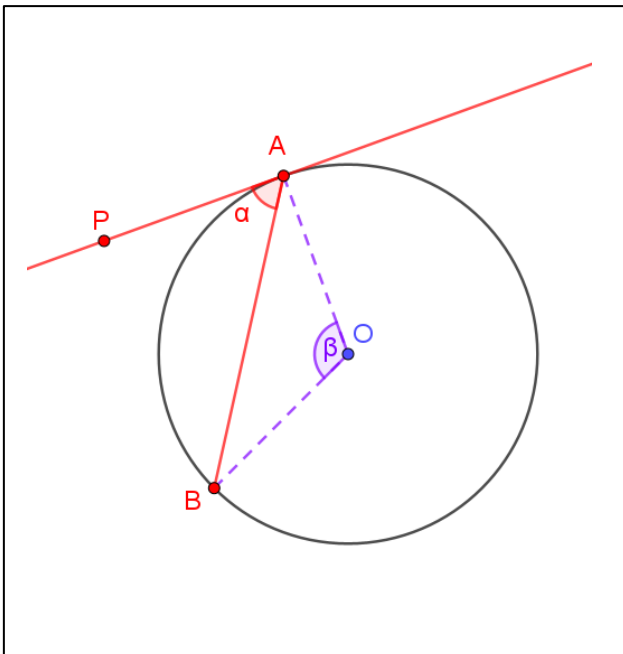
- Si la longitud de una cuerda se mantiene constante, entonces la medida del ángulo inscrito que subtende a la cuerda también se mantiene constante.



Teorema de los ángulos entre cuerdas

- Un ángulo formado por dos cuerdas intersecadas dentro del círculo es la mitad de la suma de los ángulos centrales que determinan los pares de extremos de esas cuerdas.

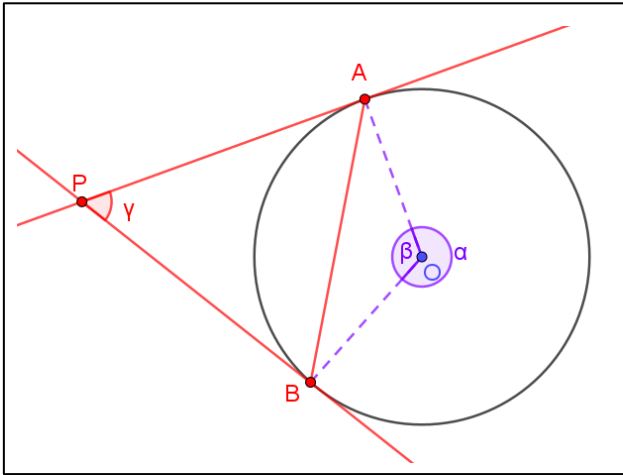
$$\sphericalangle CPA = \frac{1}{2}(\sphericalangle COA + \sphericalangle DOB)$$



Teorema del ángulo formado por una cuerda y la tangente

- La medida del ángulo formado por una tangente y una cuerda trazada desde el punto de tangencia es igual a la mitad del ángulo central formado por los dos extremos de la cuerda.

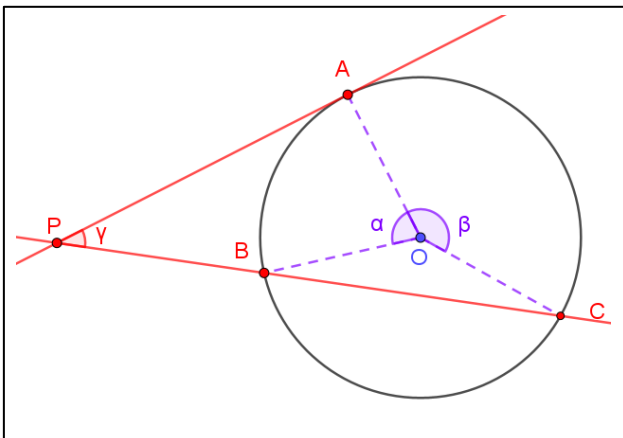
$$\sphericalangle PAB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$$



Teorema del ángulo formado por dos tangentes

- La medida de un ángulo formado por dos tangentes a un círculo es igual a la mitad de la diferencia entre los ángulos centrales determinados por los puntos de tangencia.

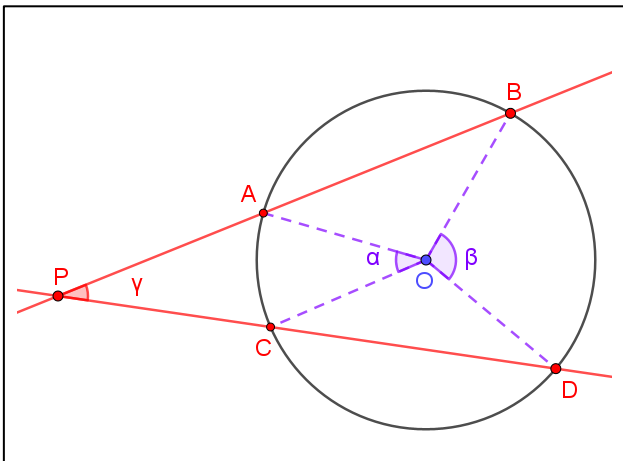
$$\sphericalangle BPA = \frac{1}{2} |\sphericalangle BOA - \sphericalangle AOB|$$



Teorema del ángulo formado por una tangente y una secante

- La medida del ángulo formado por una tangente y una secante es igual a la mitad de la diferencia entre los ángulos centrales determinados por los puntos de intersección de la tangente y la secante con el círculo.

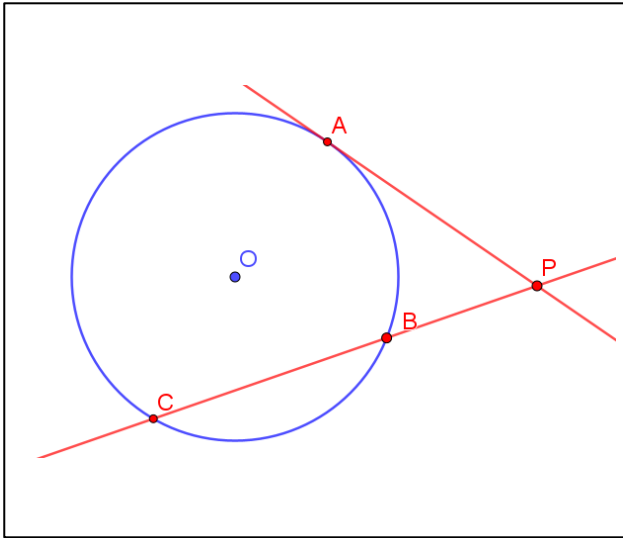
$$\sphericalangle BPA = \frac{1}{2} |\sphericalangle AOB - \sphericalangle COA|$$



Teorema del ángulo formado por dos secantes

- La medida del ángulo formado por dos secantes es igual a la mitad de la diferencia entre los ángulos centrales determinados por los puntos de intersección de las secantes.

$$\sphericalangle CPA = \frac{1}{2} |\sphericalangle AOC - \sphericalangle DOB|$$

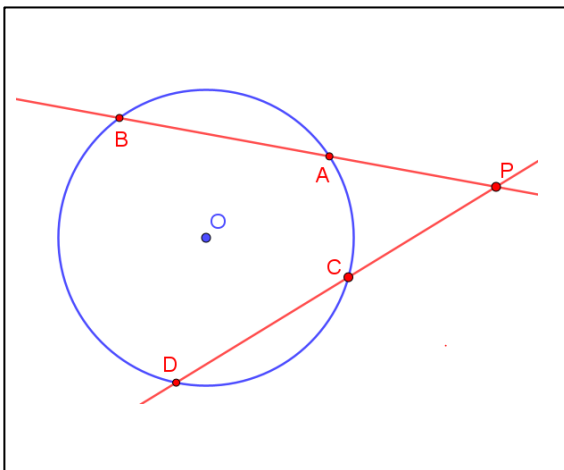


Teorema de la potencia de un punto con respecto a un círculo:

Recta tangente y recta secante.

- Si se traza una tangente y una secante a un círculo desde un punto externo, entonces el cuadrado del segmento tangente es igual a la multiplicación de las longitudes del segmento secante por su segmento secante externo.

$$PA^2 = PB \cdot PC$$

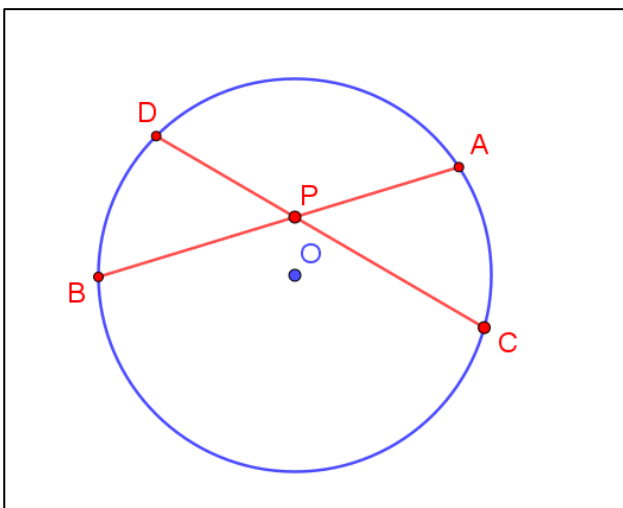


Teorema de la potencia de un punto con respecto a un círculo:

Dos rectas secantes.

- Si se trazan dos rectas secantes desde un punto exterior, entonces el producto de las longitudes de un segmento secante y su segmento secante externo es igual al producto de las longitudes del otro segmento secante y su segmento secante externo.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Teorema de la potencia de un punto con respecto a un círculo:

Dos cuerdas.

- Si dos cuerdas se intersecan en un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las longitudes de la segunda cuerda.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$