UNA MIRADA TEÓRICA SOBRE LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA TRASLACIÓN EN SEXTO GRADO A TRAVÉS DE UN APRENDIZAJE POR ADAPTACIÓN

ADRIANA MILENA ÁVILA REYES

MARÍA ANDREA GÓMEZ PATIÑO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2010

UNA MIRADA TEÓRICA SOBRE LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA TRASLACIÓN EN SEXTO GRADO A TRAVÉS DE UN APRENDIZAJE POR ADAPTACIÓN

Trabajo de Grado para Optar al título de

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

ADRIANA MILENA ÁVILA REYES

MARÍA ANDREA GÓMEZ PATIÑO

Director

MARTÍN ACOSTA GEMPELER

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2010

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a Dios por darnos la vida, la salud, la fortaleza y la sabiduría para enfrentar cada uno de los momentos de nuestro existir.

A la Universidad Industrial de Santander por ser el claustro que nos permitió formarnos integralmente.

Al profesor Martin Eduardo Acosta Gempeler porque con su ayuda y sus constantes consejos nos enseñó a reflexionar sobre la práctica pedagógica en el campo de la educación matemática.

A todos los docentes, que de alguna u otra manera intervinieron en nuestro crecimiento profesional.

A los estudiantes del colegio Las Américas, al profesor Juan de Dios Urbina y a la profesora Cruz Celina Balcucho porque sin su ayuda no hubiera sido posible este proyecto de investigación.

A nuestros familiares por su amor y apoyo incondicional en el trayecto de nuestras vidas.

A nuestros verdaderos amigos por su amistad sincera y sus palabras de aliento en nuestros momentos difíciles.

*A mi madre maravillosa, **MYRIAM REYES SANDOVAL,** por su constante apoyo incondicional, su comprensión y su paciencia en los momentos de dificultad.*

MIL GRACIAS MAMITA porque tu amor esta cargado de bendiciones para mi; que alegría tenerte a mi lado.

*A mi hijo, **ANDRÉS FELIPE ESPINOSA ÁVILA,** porque ver su rostro y su linda sonrisa es la fuente de mi inspiración y mis ganas por salir adelante.*

*A **ORLANDO ESPINOSA JAIMES,** mi amor hermoso, porque con su cariño, amor y carácter me dio la fuerza necesaria para levantarme en los tiempos de crisis, y me ha brindado felicidad cada instante de mi vida.*

*A mi padre, **ALFONSO ÁVILA SANCHEZ,** ya fallecido, porque sé que desde el cielo me protege y está junto a mi cada día de mi existencia.*

*A mis hermanos, **ANGELO, EDGAR ENRIQUE, ALFONSO** y **ALEX,** por su compañía en el transcurso de mi vida.*

ADRIANA MILENA ÁVILA REYES.

*A mi madre, **BEATRIZ PATIÑO CAPACHO,** por brindarme siempre su comprensión y positivismo para seguir adelante y no decaer en los momentos de dificultad.*

"Es la razón de mis esfuerzos"

*A mi padre, **PEDRO GÓMEZ,** por la seguridad que siempre me ha brindado.*

*A mis hermanos, **VALENTINA** y **PEDRO ALEXANDER,** porque ayudaron a fortalecerme con su ánimo y alegría cada día.*

"Los amo".

*A mi abuelita, **MARÍA CAPACHO,** por el amor y la confianza que me tuvo durante mi carrera universitaria.*

MARÍA ANDREA GÓMEZ PATIÑO.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

TÍTULO

UNA MIRADA TEÓRICA SOBRE LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA TRASLACIÓN EN SEXTO GRADO A TRAVÉS DE UN APRENDIZAJE POR ADAPTACIÓN[1].

AUTORAS

ÁVILA REYES, Adriana Milena y GÓMEZ PATIÑO, María Andrea.[2]

PALABRAS CLAVES

1. Aprendizaje por Adaptación. 2. Situación a-didáctica. 3. Cabri Geometry.
4. Traslación. 5. Exploración. 6. Estrategias

Esta investigación de tipo cualitativo se realizó en un grupo de sexto grado de la Institución Educativa las Américas De Bucaramanga. En ella se describen y analizan cuatro actividades de traslación, planeadas por el grupo EDUMAT-UIS bajo los conceptos de la Teoría de las Situaciones Didácticas (utilizando como medio material el programa Cabri Geometry), y su implementación, a cargo de la docente Cruz Celina Balcucho Contreras (profesora de la institución).

Nuestro objetivo es evaluar dichas actividades y su implementación, para emitir un juicio sobre las ventajas del uso de Cabri Geometry como medio facilitador de un aprendizaje por adaptación, que es aquel que se produce por interacción entre el sujeto y el entorno, interacción que comprende las intenciones del sujeto, las acciones que realiza sobre el medio, las retroacciones del medio, las interpretaciones que hace el sujeto de esas retroacciones (respuesta del medio a una acción) y la validación de las acciones.

Mediante el análisis de los datos recogidos (filmaciones, apuntes en el cuaderno y observaciones), se pudo concluir que la interacción de los estudiantes con el software para la solución de los problemas dados, les permitió adquirir conocimientos sobre las propiedades de la traslación, al punto de lograr dar una definición de la misma sin previas indicaciones teóricas por parte de la docente.

[1] Proyecto de grado.
[2] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas.
Director: ACOSTA GEMPELER, Martín Eduardo; Doctor en Didáctica de las Matemáticas.

SUMMARY

TITLE[3]

A THEORIC LOOK ABOUT THE CONCEPTUALIZATION OF TRANSLATION IN SIXTH GRADE THROUGH A LEARNING BY ADAPTATION

AUTHORS

ÁVILA REYES, Adriana Milena y GÓMEZ PATIÑO, María Andrea.[4]

KEY WORDS

1. Learning by Adaptation. 2. Situation non-didactic. 3. Cabri Geometry. 4. Translation. 5. Exploration. 6. Strategies.

This qualitative research was developed in the Educational Institution Americas of Bucaramanga's in a group of sixth grade. Here, four translation activities are described and analyzed, which were planned by EDUMAT-UIS research group under the concepts of the Theory of the Didactic Situations (using as material way the program Cabri Geometry), and its implementation is carried out by teacher Cruz Celina Balcucho Contreras (Teacher of the institution).

Our aim is to assess this activities and its implementation, in order to state an opinion about using Cabry Geometry advantages as an adaptation learning facilitator medium, that is that one produced by interaction between the subject and the environment, interaction that understands the intentions of the subject, the actions that it realizes on the way, the retroactions of the way, the interpretations that there does the subject of these retroactions (response of the way to an action) and the validation of the actions.

By means of collected data analysis, such as films, notes and observations, based on Didactic Situations Theory concepts, it was concluded that students-software interaction to solve some given exercise, allow them to acquire knowledge about translation properties, to the point of giving a definition without previous theoretical instruction of the teacher.

[3] Degree Research

[4] Science Faculty. Mathematics School. Bachelor in Mathematics.
Director: ACOSTA GEMPELER, Martín Eduardo; Mathematics Didactics Doctor.

1. INTRODUCCIÓN

> "Hoy en día, las nuevas tecnologías han cambiado profundamente el mundo de las matemáticas y el de las ciencias, ya que no sólo han afectado las preocupaciones propias de su campo y la perspectiva como éste se ve, sino también, el modo en que las ciencias y las matemáticas se hacen, se enseñan y se transmiten" [5] (MEN,2004).

El siglo XXI está marcado por la presencia de las tecnologías informáticas en todas las actividades humanas. El campo de la educación no escapa a esta tendencia, y cada día aparecen nuevas herramientas que pretenden mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, para la enseñanza de la geometría existen diferentes softwares dentro de los cuales destacamos el Cabri Geometry.

En nuestra opinión, el uso de tecnologías informáticas no representa en sí mismo un mejoramiento de la calidad de la enseñanza. Sin embargo, dichas tecnologías posibilitan una nueva relación de los estudiantes con las matemáticas, permitiéndoles asumir un rol más activo, al experimentar para resolver problemas, emitiendo conjeturas y verificándolas.

[5] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Enlace editoriales Ltda. Santafé de Bogotá, D.C, abril 2004.

En nuestro trabajo de grado I se nos dio la oportunidad de trabajar con Cabri Geometry y logramos implementar algunos temas de la geometría euclidiana básica. Observamos que la posibilidad de realizar construcciones y deformarlas por medio del arrastre, permitía que los estudiantes se plantearan verdaderos problemas geométricos y desarrollaran razonamientos sobre los mismos. Por eso, cuando se nos presentó la oportunidad de participar en un proyecto de investigación sobre uso de Cabri en la enseñanza de la geometría, liderado por el grupo Edumat-UIS, decidimos aprovecharla.

Proyecto Institucional de Uso de la Geometría dinámica

Entre los años 2000 y 2004, el ministerio de educación nacional (MEN), realizó un proyecto llamado "incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia" que buscaba difundir el uso de las tecnologías informáticas (en especial de las calculadoras) para la enseñanza de las matemáticas. Dicho proyecto entregó calculadoras en cada colegio, realizó la capacitación de profesores para el uso de las mismas, y conformó equipos de trabajo con profesores de colegio y profesores de universidad, que debían producir actividades de clase utilizando la tecnología.

A pesar de los logros alcanzados por este proyecto, en el año 2008 muchos de los colegios que participaron en él ya no usaban la tecnología en sus clases. El grupo Edumat-Uis, preocupado ante esta situación, realizó un diagnóstico que condujo a plantear el "Proyecto Institucional de Uso de la Geometría Dinámica", que trata de remediar las falencias del proyecto del MEN y lograr, a mediano plazo, el uso de la tecnología por parte de todos los profesores de los colegios participantes. Como parte de dicho proyecto, los colegios se comprometen a incluir a todos los profesores de matemáticas en el proceso de formación, y a hacer obligatorio el uso de la tecnología en la clase de geometría, asignando para ello horarios e infraestructura adecuados. Por su parte, el grupo Edumat-UIS se compromete a realizar la formación de profesores en didáctica de las matemáticas apoyada en la tecnología, y a diseñar actividades de clase correspondientes al currículo de geometría de los diferentes grados.

El proyecto se está realizando con dos colegios del área metropolitana de Bucaramanga (Colegio Vicente Azuero y el colegio las Américas), y se implementa de manera gradual: durante el primer año se diseña, aplica y evalúa el conjunto de actividades para sexto grado, durante el segundo año las de séptimo grado, y así sucesivamente.

Una componente fundamental del proyecto es la evaluación de las actividades diseñadas, en condiciones reales de clase. Nuestro trabajo de grado responde a esta necesidad de evaluación, y consiste en describir, analizar y evaluar tanto el diseño como la aplicación de las actividades sobre la traslación[6], basándonos en los conceptos de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau para identificar las características de las actividades que promueven un aprendizaje por adaptación.

Este análisis está clasificado en dos etapas:

1. El análisis a priori de las actividades que consiste en identificar las variables didácticas que tendrán una incidencia directa en el aprendizaje; es decir, identificar las condiciones y restricciones de las actividades que promueven el aprendizaje de los conceptos que se desea enseñar.

2. El análisis a posteriori que consiste en comparar los comportamientos efectivos de los estudiantes (basados en datos tomados de la experiencia) con lo que se había previsto en el análisis a priori, con el fin de concluir sobre la eficacia de las actividades y su posible mejoramiento para futuras experiencias.

[6] Durante el año 2009 se realizaron actividades sobre los temas de simetría axial, traslación y rotación.

Esperamos de esta manera poder emitir un juicio sobre las ventajas del uso de Cabri como medio facilitador de un aprendizaje por adaptación.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

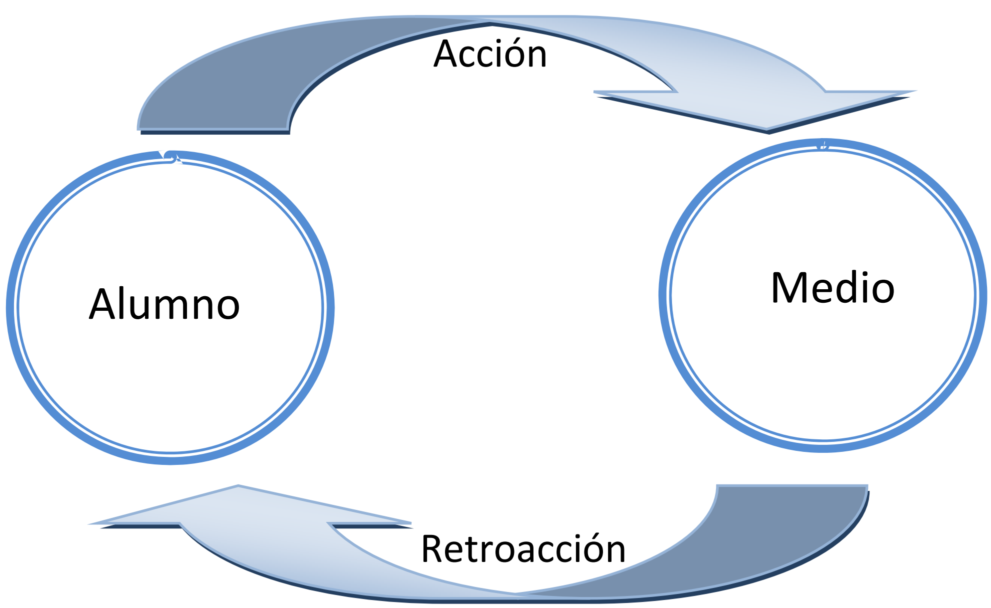
El análisis a priori y el análisis a posteriori se harán con base en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau.

2.1. TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS (TSD)

Guy Brousseau (1986), propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar.

Uno de los conceptos fundamentales de esta teoría es el de **Aprendizaje por adaptación** (Margolinas, 1989), que es el aprendizaje que se produce por interacción entre el sujeto y el entorno, interacción que comprende las intenciones del sujeto, las acciones que realiza sobre el medio, las retroacciones del medio, las interpretaciones que hace el sujeto de esas retroacciones (respuesta del medio a una acción) y la validación de las acciones.

Figura 1. Aprendizaje por adaptación



Guy Brousseau, para hablar de su concepción de aprendizaje habla de aprendizaje por adaptación de la siguiente manera:

> "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber[7], fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son las pruebas del aprendizaje"[8] (Brousseau, 1986)

> "Esta concepción de aprendizaje es cercana a la de Piaget en muchos aspectos. El **alumno** *construye* su propio conocimiento. *Actúa* en un ***medio*** fuente de *desequilibrios*. La concepción de enseñanza asociada a esta concepción de aprendizaje está relacionada con la constitución del *medio"* (Margolinas, 1989) [9]

Otro concepto fundamental de esta teoría es el de situación a-didáctica.

Una situación es didáctica cuando un individuo (**profesor**) tiene la intención de enseñar a otro individuo (**alumno**) un **saber** matemático dado explícitamente.

Una situación es a-didáctica cuando el individuo (**alumno**) aprende por la interacción con el medio, sin la intervención del profesor. Por esta razón, en una

---

[7] Lo que se quiere enseñar: en este caso la traslación

[8] BROUSSEAU Guy. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19, versión Castellana, 1993.

[9] MARGOLINAS Claire. La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas. Ediciones UIS, Bucaramanga, 2009.

situación a-didáctica el medio adquiere una importancia fundamental para el aprendizaje, y debe cumplir tres condiciones:

- El alumno debe tener la posibilidad de realizar acciones con el fin de resolver la tarea propuesta.
- El medio debe ofrecer retroacciones a esas acciones.
- El alumno debe estar en capacidad de interpretar esas retroacciones para poder validar o invalidar sus acciones.

La situación a-didáctica es de gran importancia para el proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que el conocimiento aparece en la acción del estudiante.

Si la acción del estudiante no trae consigo la solución del problema planteado, el medio invalidará esta acción; por lo tanto, el estudiante tendrá que reconocer su error y retomar otra acción que le permita solucionar su tarea en forma correcta (en nuestro trabajo, llamaremos "estrategias ganadoras" a aquellas acciones que son validadas por el medio).

El profesor debe entonces preparar cuidadosamente la tarea que va a proponer y el medio con el cual va a interactuar el alumno, previendo cuáles son las acciones que puede realizar espontáneamente el alumno, cuáles son las retroacciones del medio y cómo puede interpretarlas el alumno. Como resultado de esa interacción, el alumno construye un conocimiento y el profesor pone en relación ese conocimiento con el saber que desea enseñar[10].

> "En un proceso de aprendizaje por adaptación, cuando los estudiantes logran desarrollar una estrategia que resuelve el problema, el conocimiento que subyace a este no se les revela como un nuevo saber: si pudieron resolver el problema, es, para ellos, porque sabían hacerlo. Los estudiantes

[10] La TSD distingue el *saber* del *conocimiento*. El saber es llamado 'saber sabio'; es decir, es el producto de una comunidad con autoridad reconocida y por lo tanto es institucional. Por el contrario, el conocimiento es esencialmente personal y no institucional. Es el producto de las experiencias personales de los estudiantes.

> no tienen la posibilidad de identificar por sí mismos la presencia de un nuevo conocimiento, y menos aún el hecho de que dicho conocimiento corresponde a un saber cultural. Esto requiere de un proceso de institucionalización, que cae bajo la responsabilidad del maestro. Lo que indica claramente que el aprendizaje de los estudiantes no concluye con una situación a-didáctica, sino didáctica."[11]

En el análisis que desarrollamos en nuestro trabajo, trataremos de identificar el funcionamiento a-didáctico de las actividades propuestas, resaltando el problema, la interacción del alumno con el medio: las acciones del alumno, las retroacciones del medio y las posibilidades de validación. Además, examinaremos el proceso de institucionalización, es decir la manera como el profesor aprovecha esa interacción y el conocimiento que ella produce, para introducir los conceptos teóricos a enseñar.

2.2. CABRI GEOMETRY COMO MEDIO DE UN APRENDIZAJE POR ADAPTACIÓN

Cabri Geometry es un software de geometría dinámica para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Será el medio material que junto con el problema crearán en el aula una situación a-didáctica que permitirá la construcción de conocimientos geométricos. La ventaja de Cabri, es que las retroacciones programadas corresponden a la teoría de la geometría plana.

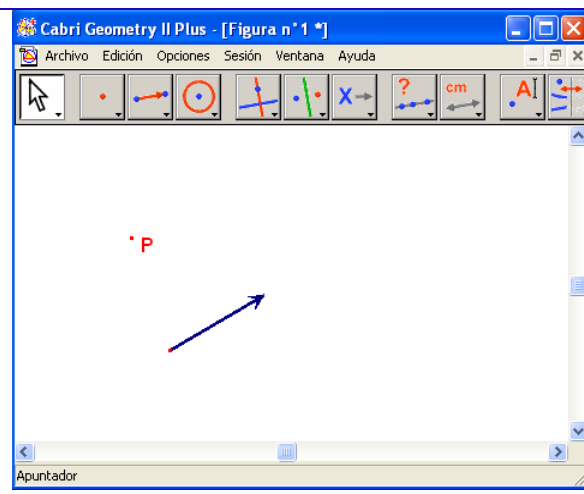
Cabri es un medio en el cual el alumno puede realizar acciones, recibir retroacciones e interpretarlas para modificar o reforzar sus acciones, con miras a resolver un problema.

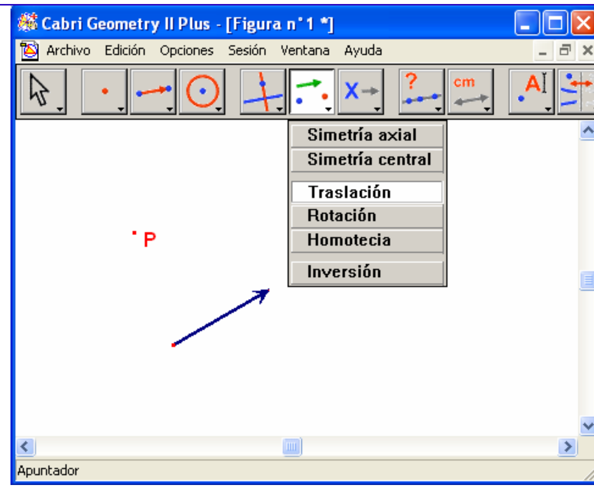
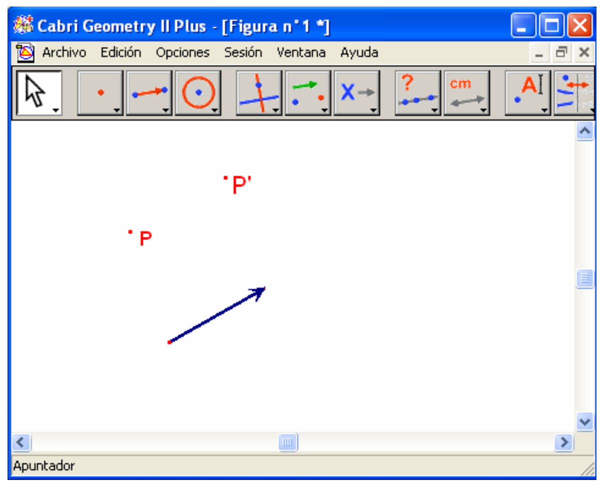
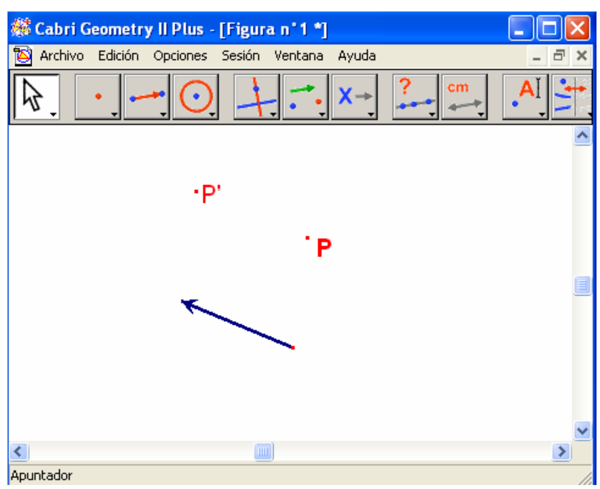
---

[11]SAIZ Irma, ACUÑA Nelci. La Didáctica de la Matemática como disciplina científica. 2006. Recuperado de: http://aportes.educ.ar/matematica/nucleo-teorico/tradiciones-de-ensenanza/

Distinguimos dos clases de acciones posibles en Cabri y sus correspondientes clases de retroacción: la primera clase de acción es *construir* y su retroacción es estática. Para construir, Cabri ofrece diferentes herramientas que permiten la construcción de rectas, circunferencias y otros comandos para la construcción de figuras geométricas. La segunda clase de acción es *arrastrar* y su retroacción será dinámica. Al arrastrar una figura, la programación garantiza que las propiedades declaradas en la construcción, y las que se deducen de ellas, se mantienen. Por ejemplo, si la acción es dibujar un punto y su respectiva traslación (con la herramienta traslación de Cabri) por un vector dibujado, entonces el medio construye otro punto que es la imagen de la traslación del punto inicial, respecto al vector (retroacción estática), luego al modificar la dirección, el sentido y la magnitud del vector, la imagen de la traslación con respecto al punto inicial, conserva las propiedades de este vector (retroacción dinámica)

En la siguiente tabla se muestra un claro ejemplo de la retroacción estática y dinámica presentada en cabri.

Con las herramientas de cabri se dibuja un punto P y un vector.	

<table>
<tr><td>Con la opción traslación de Cabri.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Se traslada el punto P por el vector dibujado, resultando el punto P’. (Retroacción estática).</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Se modifica la magnitud, dirección y sentido del vector. (Retroacción dinámica).</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

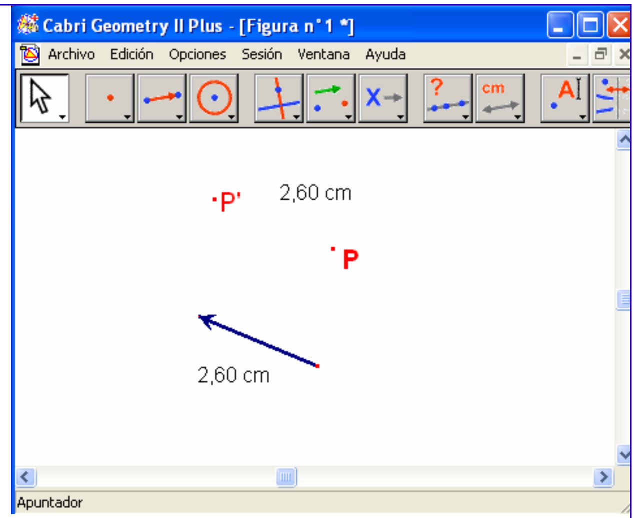
El punto P' (la imagen de la traslación) con respecto al punto P, conserva las propiedades del vector.	

Tabla 1. Retroacción estática y Retroacción dinámica

La intención de las actividades para la enseñanza de la traslación es que los estudiantes logren reconocer y predecir las propiedades de la traslación, gracias a las retroacciones dinámicas producto del arrastre.

A continuación se dará una definición de traslación.

TRASLACIÓN:

La **traslación** de un punto P respecto a un vector **v** es otro punto **P'** verificando que el vector **PP'** tiene la misma dirección, sentido y magnitud que el vector **v**. Es decir el vector **v** tiene como representante al vector **PP'.**

Magnitud: Distancia de **P** a **P'**.

Dirección: dos vectores tienen la misma dirección si y solo si son paralelos.

Sentido: dos puntos A y B definen dos vectores de igual dirección y magnitud pero de sentidos opuestos: el vector AB y el vector BA.

La traslación tiene las siguientes propiedades:

- la traslación conserva la dirección, sentido y magnitud respecto a un vector.
- Un segmento, una semirrecta, una recta, son paralelos a sus imágenes.
- La traslación conserva los ángulos, las longitudes, las áreas y la forma.

2.3. EJEMPLO DE SITUACIÓN A-DIDÁCTICA DONDE CABRI ES EL MEDIO

Una situación es didáctica cuando un individuo (**profesor**) tiene la intención de enseñar a otro individuo (**alumno**) un **saber** matemático dado explícitamente.

Esta intención no desaparece en la situación a-didáctica: la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el **problema** dado por el docente**.** Para esto, el estudiante debe interactuar con un **medio,** en este caso Cabri, en donde él realizará acciones y el medio le ofrecerá retroacciones que debe interpretar para hallar la respuesta correcta al problema dado; en este momento el alumno adquiere un **conocimiento** producto de la interacción con el medio. Esto es lo que se conoce como aprendizaje por adaptación.
A continuación presentamos un ejemplo para ilustrar estas ideas teóricas:

EL SABER: La magnitud de la traslación es constante.

EL CONOCIMIENTO: La distancia entre los triángulos cuando uno es traslación del otro es siempre la misma.

¿Cómo funciona Cabri como medio de un aprendizaje por adaptación?

PROBLEMA: llevar todos los triángulos dentro del cuadrado

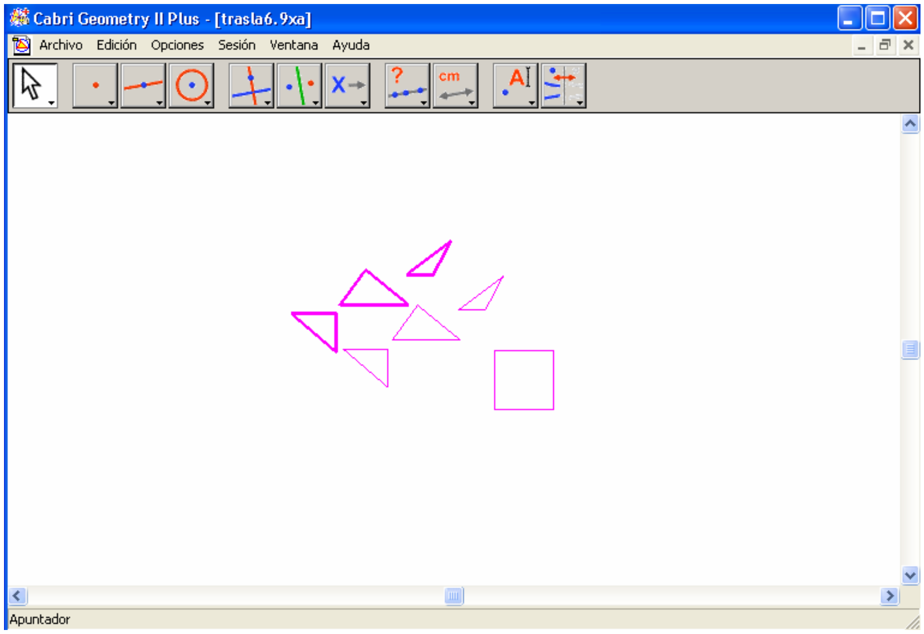


Figura 2. El medio

EL MEDIO: el medio está compuesto por una figura de Cabri. En la que aparecen tres triángulos delgados de diferentes tamaños, tres triángulos gruesos (imagen de los delgados por un vector que está oculto) y un cuadrado. Debido a la programación de Cabri, como los triángulos gruesos fueron construidos como traslación de los delgados con respecto a un vector, cuando se muevan los triángulos delgados, los gruesos se moverán también, manteniendo la magnitud, dirección y sentido del vector. Además, los triángulos gruesos no podrán arrastrarse directamente, mientras que los delgados sí.

A continuación presentamos las posibles acciones del estudiante, las retroacciones del medio, los efectos de las retroacciones y la estrategia ganadora

INTERACCIONES DEL ALUMNO CON EL MEDIO

Acción del alumno	Retroacción del medio	Efecto de la retroacción en el alumno	Estrategia Ganadora
Arrastrar los triángulos delgados hasta que los triángulos gruesos queden dentro del cuadrado.	Los triángulos gruesos quedan dentro del cuadrado pero los delgados quedan por fuera de él.	El estudiante observa que los triángulos delgados quedan por fuera del cuadrado	No hay estrategia ganadora.se espera que los estudiantes argumenten de alguna manera que la distancia entre los triángulos es constante.
Arrastrar los triángulos delgados dentro del cuadrado.	Los triángulos delgados quedan dentro del cuadrado pero los gruesos quedan por fuera de él.	El estudiante observa que los triángulos gruesos quedan por fuera del cuadrado	
Mover los triángulos delgados para ver si se unen con los gruesos en algún lado de la pantalla.	Los triángulos correspondientes no se unen en algún lado de la pantalla.	El estudiante reconoce que la distancia que hay entre los triángulos permanece constante en cualquier lugar de la pantalla y no es posible unir cada triángulo delgado con su correspondiente triángulo grueso	

Tabla 2. Resumen proceso de aprendizaje por adaptación- ejemplo

Como podemos ver en la tabla anterior, el estudiante realiza una serie de acciones en cabri para encontrar la solución al problema dado, y cabri le proporciona retroacciones que debe interpretar para encontrar la solución del mismo; por ejemplo, cuando los niños traten de meter los triángulos delgados (pues son los que se mueven autónomamente) dentro del cuadrado, la retroacción del medio será poner los triángulos gruesos fuera del cuadrado de manera que los inhabilite para realizar la tarea. Luego arrastrarán los triángulos delgados hasta que los triángulos gruesos queden dentro del cuadrado, pero observarán que los triángulos delgados quedaron por fuera de él. Finalmente lo único que les falta por hacer es tratar de encontrar un lugar en la pantalla en donde los triángulos gruesos y delgados se puedan unir, y arrastrarán los triángulos delgados por toda la pantalla, pero al no poder lograrlo podrán concluir que los triángulos gruesos y delgados jamás se podrán unir puesto que entre ellos hay una distancia que siempre permanece constante.

3. METODOLOGÍA

El objetivo de nuestro proyecto es la evaluación de las actividades propuestas por el grupo EDUMAT-UIS para enseñar el concepto de traslación en sexto grado. Para alcanzar ese objetivo utilizaremos una metodología de investigación cualitativa que consiste en el análisis *a priori* de las actividades, y el análisis *a posteriori* basado en registros de la actividad real en el salón de clase.

1. El análisis *a priori* de las actividades consiste en identificar las variables didácticas que tendrán una incidencia directa en el aprendizaje; es decir, identificar las condiciones y restricciones de las actividades que promueven el aprendizaje de los conceptos que se desea enseñar.

2. El análisis *a posteriori* consiste en comparar los comportamientos efectivos de los estudiantes (basados en datos tomados de la experiencia) con lo que se había previsto en el análisis *a priori*, con el fin de concluir sobre la eficacia de las actividades y su posible mejoramiento para futuras experiencias.

Condiciones de la experiencia: se llevó a cabo en la Institución Educativa las Américas ubicada en la calle 33 nº 36-16; es una institución de carácter público cuya población consta de niños y niñas.
En el grupo hay 38 estudiantes; son estudiantes con edades entre los 12 y 14 años de edad, la gran mayoría de ellos viven en barrios aledaños a la institución y son de estratos 1 y 2. La docente encargada de la implementación de las actividades en este grupo es la Licenciada Cruz Celina Balcucho Contreras; es una docente con experiencia en el uso de cabri para la enseñanza, pero es la primera vez que trabaja con estudiantes de sexto grado. Además, demuestra

mucho interés en el aprendizaje de la utilización de nuevas tecnologías en el aula. La docente cuenta con una sala especial de matemáticas en donde hay mesas y calculadoras suficientes para que los estudiantes se reúnan por parejas a realizar su trabajo.

Los datos que recogimos para realizar nuestro análisis son los apuntes de los estudiantes en el cuaderno, las observaciones realizadas en el aula y filmaciones realizadas durante el desarrollo de la actividad con su respectiva transcripción.

4. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

Llamamos actividad a un conjunto de tareas que los estudiantes realizarán utilizando figuras de cabri, y que tienen unos objetivos comunes. La mayoría de las actividades tienen varias tareas que se repiten con diferentes figuras. Llamaremos serie al conjunto de tareas que se realizan con una misma figura, y secuencia a la repetición de las tareas con diferentes figuras. Cada actividad comprende un tiempo de trabajo en grupos seguido de una puesta en común donde el profesor se asegura que todos los estudiantes han identificado las propiedades que desea institucionalizar, y que por lo menos algunos hayan encontrado una estrategia ganadora. El análisis a priori y a posteriori comprenderá entonces los objetivos de la actividad, la descripción de las tareas y el medio (las figuras de Cabri), el proceso de aprendizaje esperado en cada serie y en la secuencia, y la puesta en común.

4.1. ACTIVIDAD NÚMERO UNO

Esta actividad comprende ocho series de tres tareas cada una, y termina con un concurso.

OBJETIVOS:

- Identificar que al mover un triángulo, su imagen por una traslación se mantendrá siempre a la misma distancia.

- Reconocer y verificar las propiedades que se mantienen invariantes durante el arrastre tales como:

- Dependencia: los estudiantes se darán cuenta de que el triángulo grueso sólo se mueve al mover el triángulo delgado, es decir que este depende del movimiento que se le haga al delgado.
- Conservación de la dirección el sentido: los estudiantes notarán que cada triángulo grueso siempre se mueve hacia la misma dirección y sentido del correspondiente triángulo delgado.

Esta actividad consta de ocho series con las cuales se realizarán las siguientes tareas:

1. Llevar todos los triángulos gruesos dentro del cuadrado.
2. Llevar todos los triángulos dentro del cuadrado.
3. Colocar los dos cuadrados en la pantalla de manera que puedan ponerse todos los triángulos delgados en uno y todos los gruesos en otro.

DESCRIPCIÓN DE LA FIGURA

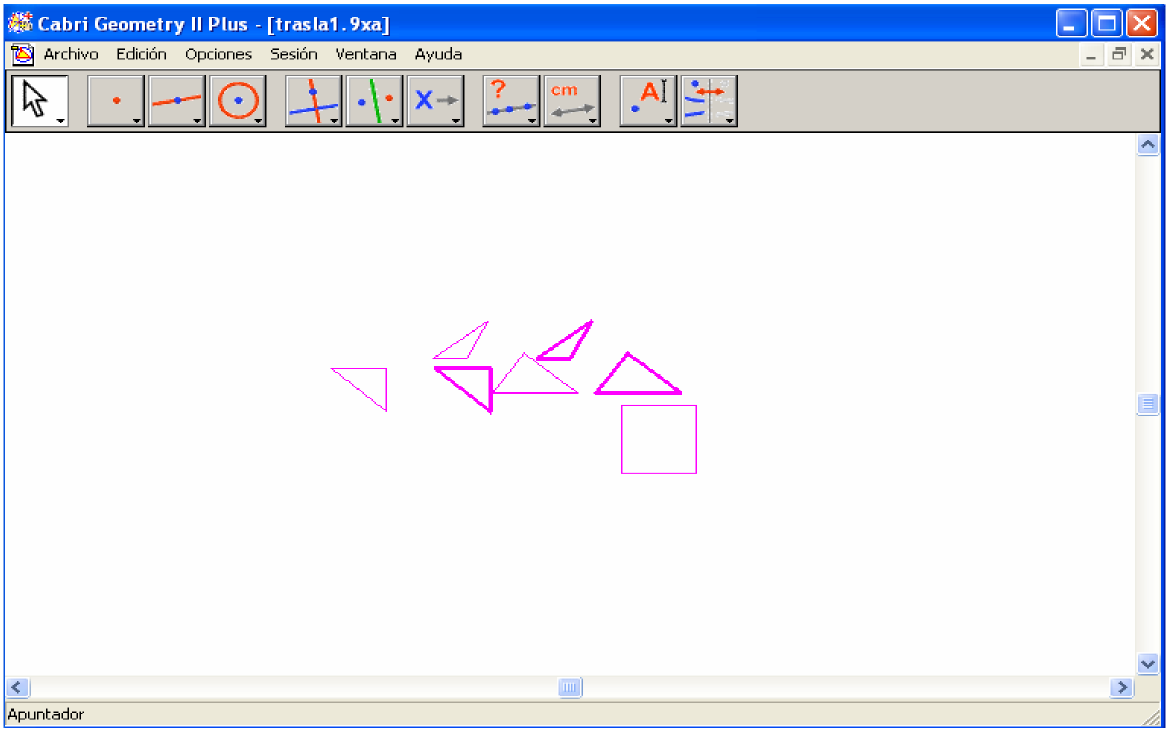


Figura 3. Serie 1. Primera actividad.

En la figura podemos observar tres triángulos delgados de diferentes tamaños, tres triángulos gruesos y dos cuadrados superpuestos de igual tamaño. Los triángulos gruesos son la traslación de los triángulos delgados, con respecto a un vector que permanece oculto.

El movimiento de los triángulos gruesos depende del movimiento de los triángulos delgados; es decir, que cada triángulo grueso sólo se mueve cuando su respectivo triángulo delgado es arrastrado; en el movimiento de cada pareja de triángulos se conserva su distancia, dirección y sentido. Por lo tanto es imposible que un triángulo delgado se pueda superponer con su respectivo triángulo grueso.

CARACTERÍSTICAS DE LA TRASLACIÓN EN LAS DIFERENTES SERIES

SERIE	DIRECCIÓN	SENTIDO	MAGNITUD
1	Horizontal	Hacia la derecha	1.79 cm

2	Oblicua derecha (Pendiente positiva)	Hacia abajo	1.38 cm
3	Horizontal	Hacia la izquierda	2.41 cm
4	Vertical	Hacia arriba	1.72 cm
5	Vertical	Hacia abajo	1.38 cm
6	Oblicua izquierda (pendiente negativa)	Hacia arriba	1.38 cm
7	Oblicua izquierda (pendiente negativa)	Hacia abajo	1.38 cm
8	Oblicua derecha (pendiente positiva)	Hacia arriba	1.38 cm

Tabla 3. Características de la traslación en cada serie.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA ACTIVIDAD

PRIMERA TAREA: llevar todos los triángulos gruesos dentro del cuadrado

Algunos estudiantes intentaran arrastrar los triángulos gruesos para llevarlos inmediatamente al cuadrado. Pero al darse cuenta de que no es posible hacerlo, se espera que ellos recuerden las actividades realizadas en simetría axial (los estudiantes ya habían trabajado en clases pasadas con actividades para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri Geometry) en donde para mover los triángulos gruesos debían mover los triángulos delgados.

De esta manera los estudiantes verificarán que el movimiento de los triángulos gruesos depende del movimiento que se le haga al triángulo delgado.

En consecuencia empezarán a mirar las diferencias que hay entre estas actividades y las realizadas anteriormente.

En esta actividad los estudiantes realizaran rápidamente la tarea por lo que no se detendrán para analizar características del movimiento[12] de los triángulos, solo tendrán en cuenta la dependencia que hay entre ellos.

INTERACCIONES DEL ALUMNO CON EL MEDIO			
Acción del alumno	**Retroacción del medio**	**Efecto de la retroacción en el alumno**	**Estrategia ganadora**
Mover el triángulo grueso	No se puede mover el triángulo grueso	Cambia la acción	Mover el triángulo delgado para que los gruesos se muevan y así poder ubicarlos dentro del cuadrado
Mover el triángulo Delgado	Se mueve el triángulo delgado junto con el triángulo grueso manteniendo la distancia entre los dos.	Refuerza la acción	

Tabla 4. Resumen proceso de Aprendizaje por Adaptación.

SEGUNDA TAREA: llevar todos los triángulos dentro del cuadrado

[12] En la enseñanza se acostumbra a describir la traslación como un movimiento rectilíneo o desplazamiento, y en ocasiones se simula este desplazamiento con ayuda de figuras en cartón o en papel calcante. Aunque en Cabri es posible simular ese desplazamiento, no nos referimos a la traslación como desplazamiento de un objeto, sino como la relación entre dos objetos, que conservan una magnitud, una dirección y un sentido, y por lo tanto se 'mueven juntos'. Cuando hablamos de movimiento nos referimos a la forma como se mueven los objetos al arrastrarlos en la pantalla, y no a la traslación como movimiento.

Se espera que en esta tarea los estudiantes empiecen a observar las características de la traslación.

Primero que todo, los estudiantes tratarán de llevar todos los triángulos dentro del cuadrado, pero notarán que al meter un triángulo grueso en el cuadrado, su correspondiente delgado se sale, y viceversa.

Al no poder realizar la tarea tratarán de encontrar un sitio en la pantalla (diferente al del cuadrado) en donde puedan unir todos los triángulos (como sucedía en simetría axial) pero el medio no se los permitirá, por lo cual se espera que los estudiantes noten que esto sucede porque las distancias entre los triángulos siempre se van a mantener iguales en todo lugar, por lo que la tarea es imposible de realizar.

INTERACCIONES DEL ALUMNO CON EL MEDIO			
Acción del alumno	**Retroacción del medio**	**Efecto de la retroacción en el alumno**	**Estrategia ganadora**
Arrastrar los triángulos delgados hasta que los triángulos gruesos queden dentro del cuadrado.	Ubica los triángulos gruesos dentro del cuadrado pero los delgados quedan por fuera de él.	No es posible llevar todos los triángulos dentro del cuadrado	La estrategia es que el alumno reconozca que es imposible llevar todos los triángulos dentro del cuadrado
Arrastrar los triángulos delgados dentro del cuadrado.	Ubica los triángulos delgados dentro del cuadrado pero los gruesos quedan por fuera de él.	No es posible llevar todos los triángulos dentro del cuadrado	
Mover los triángulos	Los triángulos	No es posible unir	

delgados para ver si se unen con los gruesos en algún lado de la pantalla	correspondientes no se unen en algún lado de la pantalla	cada triángulo delgado con su correspondiente triángulo grueso	

Tabla 5. Resumen Proceso de Aprendizaje por Adaptación

TERCERA TAREA: colocar los dos cuadrados en la pantalla de manera que puedan ponerse todos los triángulos delgados en uno y todos los gruesos en otro

El propósito de esta tarea es que los estudiantes descubran que si se colocan los cuadrados en cualquier lugar de la pantalla, pero separados por la misma distancia que hay entre un triángulo y su correspondiente, entonces podrán colocar todos los triángulos gruesos en uno y todos los delgados en otro.

Se prevén tres estrategias para la solución de la tarea:

1. Llevar cada uno de los triángulos delgados (o gruesos) hasta el cuadrado, por lo que los gruesos (o delgados) quedarán agrupados en algún sitio de la pantalla. Luego cogerán el cuadrado superpuesto y lo arrastrarán hasta los triángulos gruesos.

2. Llevar un triángulo delgado hasta el cuadrado para saber en qué posición quedaba el grueso; luego llevaba el cuadrado superpuesto hasta el sitio donde estaba el triángulo grueso y finalmente ubicar las otras dos parejas de triángulos dentro de los cuadrados.

3. Ubicar los cuadrados a la distancia y posición en que van a quedar los dos grupos de triángulos. Luego ubicar las tres parejas de triángulos dentro de los cuadrados.

INTERACCIONES DEL ALUMNO CON EL MEDIO			
Acción del alumno	**Retroacción del medio**	**Efecto de la retroacción en el alumno**	**Estrategia ganadora**
agrupar los triángulos delgados para que los gruesos también se agrupen luego mover los cuadrados para ubicarlos en cada grupo de triángulos	Los triángulos delgados quedan en un cuadrado y los gruesos en otro.	Refuerza la acción	Ubicar los dos grupos de triángulo en algún lado de la pantalla y luego mover los cuadrados de manera que cada grupo de triángulos quede dentro de estos.
Arrastrar un triángulo delgado hasta el cuadrado. Luego saca el otro cuadrado superpuesto y lo lleva hasta donde quedó el triángulo grueso. Finalmente arrastra los otros dos triángulos delgados para ubicarlos dentro del cuadrado y por lo tanto los gruesos también quedan en su respectivo cuadrado.	Los triángulos delgados quedan en un cuadrado y los gruesos en otro.	Refuerza la acción	
Separar los cuadrados de manera que a ojo conserven las características de cada pareja de triángulos correspondientes; luego arrastrar los triángulos delgados para ubicarlos en un cuadrado.	Los triángulos delgados quedan en un cuadrado y los gruesos en otro.	Refuerza la acción	

Tabla 6. Resumen proceso de Aprendizaje por Adaptación.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA SECUENCIA

En cada una de las series los estudiantes podrán observar la dependencia y la magnitud entre cada pareja de triángulos correspondientes. En cambio, para tomar conciencia de la dirección y el sentido, es necesario que comparen las diferentes series.

A partir de la tercera serie se espera que los estudiantes empiecen a observar la posición de los triángulos gruesos con respecto a los delgados, puesto que en esta serie la dirección es horizontal y el sentido es hacia la izquierda; los estudiantes pensarán que es igual a la primera serie, que tiene dirección horizontal y sentido a la derecha, por lo que la docente les pedirá que las comparen detalladamente para que observen la diferencia.

Pensamos que la tercera tarea podrá facilitar la comparación entre las diferentes series, puesto que al agrupar los triángulos gruesos en un cuadrado y los triángulos delgados en otro, se observa más claramente la posición que tienen los triángulos gruesos respecto a los triángulos delgados; por ejemplo si el estudiante compara las series 4 y 5 (figura 4) podrá identificar que aunque las dos figuras tienen la misma dirección (vertical) su sentido es diferente, puesto que en la serie 4 el sentido es hacia abajo y en la serie 5 el sentido es hacia arriba.

Además, el hecho de repetir las mismas tareas con figuras diferentes deberá conducir al abandono de estrategias invalidadas por las retroacciones del medio, y a reforzar las estrategias validadas. Por ejemplo, esperamos que durante el desarrollo de la primera serie los estudiantes reconozcan la dependencia de los triángulos gruesos, por lo que en las siguientes series ya no tratarán de moverlos por si solos sino que moverán directamente los triángulos delgados.

Además prevemos que a partir de cierta serie los estudiantes no tratarán de realizar la segunda tarea puesto que ya han establecido que es imposible lograr que los triángulos gruesos y delgados se unan en algún sitio de la pantalla debido a la distancia que permanece constante entre ellos.

Es necesario realizar una secuencia para que los estudiantes tomen conciencia de las diferencias que hay entre las series y expresen con sus propias palabras las características que cumple el vector en las diferentes series.

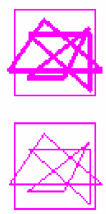
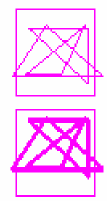
	
Serie 4	Serie 5

Figura 4. Comparación serie 4 y serie 5

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA PUESTA EN COMÚN

En la puesta en común esperamos que la docente intervenga para escuchar las estrategias que los estudiantes lograron implementar en la solución de los ejercicios y, además, las conclusiones que han surgido de la realización de dicha actividad; pero lo más importante de la puesta en común es que la docente logre que todos los estudiantes unifiquen conocimientos adquiridos durante el desarrollo de la actividad; es decir, que si algunos estudiantes no lograron entender las estrategias utilizadas o las conclusiones dadas, la docente deberá intervenir haciendo preguntas o proyectando nuevamente la figura para que estos estudiantes escuchen, observen y experimenten lo que sus demás compañeros dicen.

Las preguntas previstas para esta actividad son las siguientes:

¿Fue posible llevar los triángulos gruesos dentro del cuadrado? ¿Cómo lograron realizar la primera tarea? ¿Qué pudieron observar en la realización de la tarea?

Con estas preguntas se espera que los estudiantes digan que al mover los triángulos delgados se mueven también los gruesos (dependencia) por lo que la tarea se pudo realizar fácilmente.

¿Es posible meter todos los triángulos dentro del cuadrado? Los estudiantes rápidamente dirán que "no" y su justificación será porque entre cada pareja de triángulos siempre hay una distancia que permanece invariante.

¿Cómo lograron realizar la tercera tarea? Habrá varios grupos con diferentes respuestas, para lo cual esperamos que la docente les permita mostrar en el tablero sus estrategias.

¿Qué semejanza y qué diferencia hay entre las parejas de series 1 y 3, 6 y 7, 2 y 8, 4 .y 5?

Con esta pregunta se espera que los estudiantes al comparar las series identifiquen las diferentes direcciones y sentidos de la traslación; es decir, que expresen con sus propios términos estas características. Por ejemplo, "en las series 2 y 8 los triángulos delgados y sus correspondientes triángulos gruesos están verticales, pero en la serie 2 los triángulos gruesos están al lado de arriba de los delgados y en la serie 8 están al lado de abajo.

Finalmente esperamos que la docente realice la siguiente pregunta: **¿después de haber realizado las tres tareas, que conclusiones podrían sacar?** esperamos que en esta parte los estudiantes logren decir:

- La distancia entre los triángulos siempre es la misma.
- El triángulo grueso depende del delgado.

- El triángulo grueso siempre se mueve hacia el mismo lado que se mueve el delgado.
- La diferencia entre las series está en la posición de los triángulos gruesos con respecto a los delgados.

En la puesta en común la docente querrá que los estudiantes validen o invaliden los conocimientos que han adquirido, por lo que en sus intervenciones buscará que sus estudiantes comprueben lo que están diciendo de alguna manera sin hacerse juez de sus acciones.

Por ejemplo, si entre las conclusiones de sus estudiantes está que la distancia entre un triángulo delgado y su correspondiente triángulo grueso es siempre la misma, la docente podría preguntar: **¿cómo podríamos comprobar que eso es cierto?**, de esta manera los estudiantes buscarán alguna herramienta para medir esta distancia, lo que les permitirá validar su trabajo por sí mismos.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA ACTIVIDAD

PRIMERA TAREA: llevar todos los triángulos gruesos dentro del cuadrado

Como los estudiantes son bastante activos, inmediatamente después de que abrieron la primera serie trataron de mover un triángulo grueso, sin esperar que la docente les dijera la tarea, pero como no lo pudieron hacer entonces tuvieron que mover los triángulos delgados.

En la siguiente conversación se observa el hecho anterior. [13]

P: *Primera tarea: van a mover los triángulos…*

E4: *Ya los moví*

P: *¿Cuales triángulos van a mover?*

[13] Denotaremos al profesor con la letra P y los estudiantes con la letra E, acompañado de un número en donde hace referencia a los diferentes estudiantes que participan en las actividades; en donde no hay número significa que es cualquier estudiante al cual se le escuchó su voz en la filmación pero no logró determinarse quién era.

E6: *Los delgados*

P: *¿Se mueven los delgados?, ¿se mueven los gruesos?, ¿Cuáles triángulos se mueven?*

E: *Los delgados y el grueso*

P: *¿Quién se mueve autónomamente?*

E6: *El delgado*

P: *¿Y para qué se muevan los gruesos quien se debe mover?*

Todos: *El delgado*

Podríamos decir que los estudiantes empezaron a mover los triángulos relacionando la figura que abrieron con las series de la primera actividad de simetría axial, en donde aparecían triángulos iguales a estos y los triángulos gruesos dependían de los delgados.

A pesar de que no tenemos grabación sobre la estrategia utilizada por los estudiantes, pudimos observar que los estudiantes al principio trataron de coger el triángulo grueso; al darse cuenta de que este no se podía arrastrar recordaron fácilmente que debían coger los delgados para que el grueso se moviera, como en las actividades de simetría axial.

Como se esperaba, los estudiantes en esta actividad no se detuvieron a pensar en las características que tenía el movimiento de los triángulos, pero era algo normal puesto que a ellos les interesaba encontrar la solución del problema lo más pronto posible.

En esta tarea solo se quería que los estudiantes nuevamente observaran que había unos triángulos que dependían de otros; las demás características son metas del transcurso de las siguientes tareas.

SEGUNDA TAREA: llevar todos los triángulos dentro del cuadrado

Durante el desarrollo de la actividad, pudimos observar que los estudiantes utilizaron el arrastre para buscar un sitio en la pantalla en donde pudieran unir todos los triángulos, pero rápidamente se dieron cuenta de que si trataban de acercar el triángulo delgado a su correspondiente triángulo grueso, este se les retiraba siempre manteniendo la misma distancia.

En consecuencia manifestaron que la tarea era imposible de realizarse. Por ejemplo, escribieron:

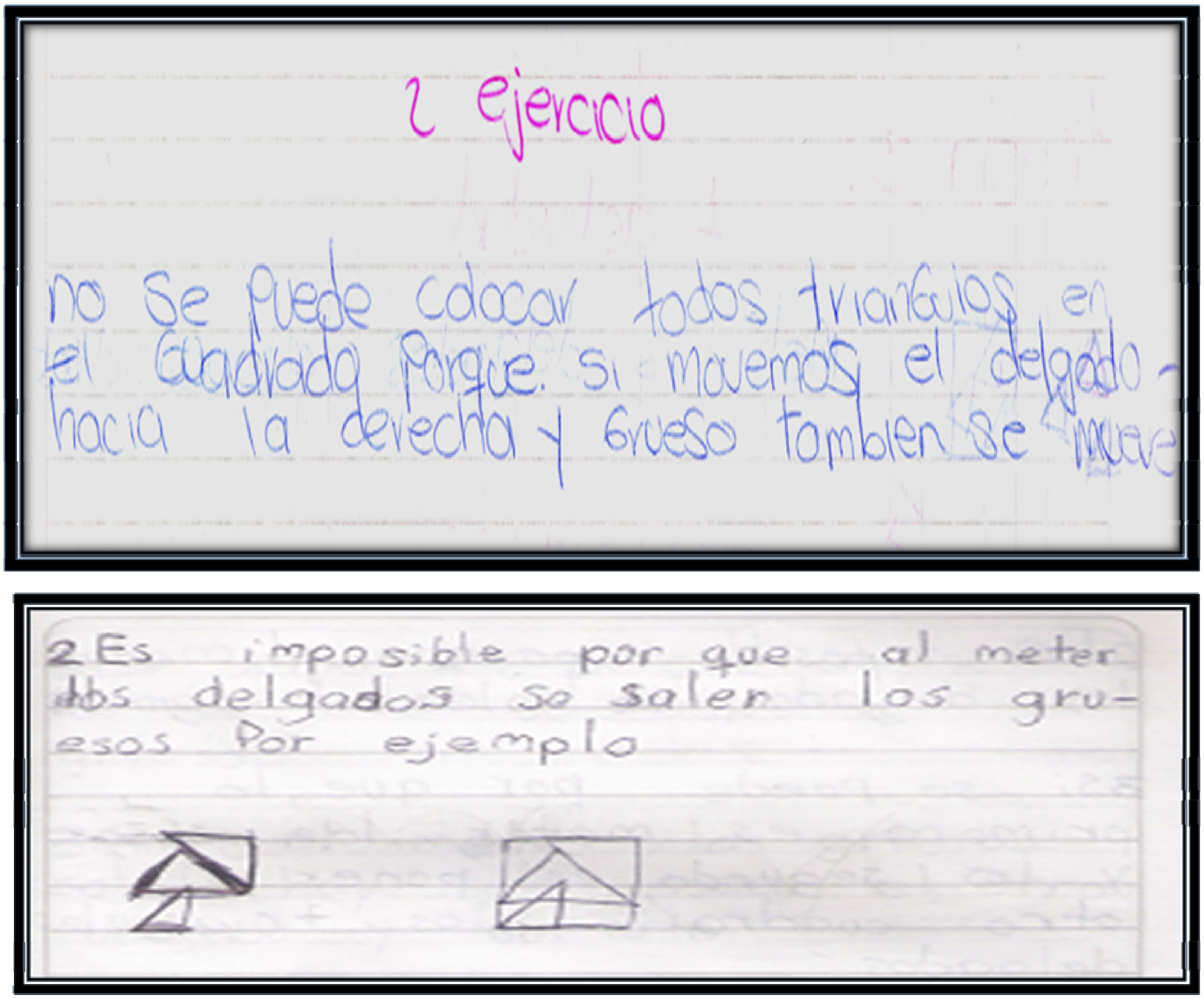


Figura 5. Apuntes de cuaderno.

Se puede observar en el registro, que los estudiantes lograron identificar que hay una distancia entre los triángulos correspondientes que permanece invariante y por lo tanto nunca se van a poder unir.

TERCERA TAREA: colocar los dos cuadrados en la pantalla de manera que puedan ponerse todos los triángulos delgados en uno y todos los gruesos en otro.

A continuación se pueden observar algunas de las estrategias utilizadas por los estudiantes para la solución de la tarea.

En el siguiente extracto mostramos a una estudiante realizando la primera serie utilizando la primera estrategia[14].

La estudiante arrastró el primer triángulo delgado para llevar su respectivo triángulo grueso al cuadrado	
Inmediatamente después arrastra otro triángulo delgado para llevar su correspondiente triángulo grueso al cuadrado	
La estudiante termina de llevar los triángulos gruesos dentro del cuadrado y luego saca el otro cuadrado para ponerlo sobre los triángulos delgados.	

Tabla 7. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri.

En el siguiente aparte se muestra un estudiante realizando la primera serie con la estrategia número tres prevista en el análisis *a priori*.[15]

[14] La primera estrategia nombrada en al análisis *a priori* es: Llevar cada uno de los triángulos delgados (o gruesos) hasta el cuadrado, por lo que los gruesos (o delgados) quedarán agrupados en algún sitio de la pantalla. Luego cogerán el cuadrado superpuesto y lo arrastrarán hasta los triángulos gruesos.

<table>
<tr><td>El estudiante tomó uno de los cuadrados y lo arrastró hacia la izquierda, hasta dejarlo separado del otro cuadrado con la misma distancia que hay entre dos triángulos correspondientes.</td><td></td></tr>
<tr><td>Luego arrastró un triángulo delgado hasta dejarlo dentro del cuadrado que separó.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">El alumno ubica todos los triángulos delgados en un cuadrado y todos los triángulos gruesos en el otro.</td></tr>
</table>

Tabla 8. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri.

Con lo anterior podríamos decir que el estudiante está anticipando la distancia, la dirección y el sentido de la traslación en la figura. Pero con el siguiente extracto notaremos que no es así.

[15] La estrategia numero tres prevista en el análisis a priori es: ubicar los cuadrados a la distancia y posición en que van a quedar los dos grupos de triángulos. Luego ubicar las tres parejas de triángulos dentro de los cuadrados.

El estudiante arrastra un cuadrado hacia la izquierda.	
Luego arrastra un triángulo delgado hasta que su correspondiente triángulo grueso quede dentro del cuadrado.	
Coge el cuadrado y lo arrastra hasta que quede sobre el triángulo delgado	
El estudiante arrastra otro triángulo delgado hasta llevarlo al cuadrado de manera que su correspondiente triángulo grueso queda en el otro cuadrado.	
Finalmente el estudiante lleva la pareja de triángulos faltantes a sus respectivos cuadrados	

Tabla 9. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri.

Lo que el estudiante trata de hacer en la segunda serie es utilizar nuevamente la estrategia utilizada en la primera serie, pero vemos que al separar los cuadrados y poner un triángulo grueso dentro uno de ellos, el triángulo delgado queda en una posición diferente a la horizontal (que era la dirección de la primera serie), esta sería la retroacción que el medio produce para que el estudiante finalmente termine utilizando la estrategia número 2 que teníamos prevista en el análisis *a priori.*

Esto invalida nuestra suposición anterior puesto que vemos que en realidad el alumno aún no identifica las características en cada pareja de triángulos.

La estrategia que esperábamos ver en los estudiantes era la primera, puesto que ellos siempre buscan la manera más fácil de llegar a la solución y además porque suponíamos que hasta ahora se estaban familiarizando con las propiedades de distancia, dirección y sentido de las parejas de triángulos.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA SECUENCIA

A medida que los estudiantes iban trabajando con cada una de las series empezaron a observar las diferencias que había entre ellas. La docente intervino para hacerlos comparar las series que tenían la misma dirección, de manera que identificaran el sentido en cada una.

Algunos por recomendación de la docente decidieron tomar apuntes sobre estas diferencias y otros simplemente dibujaron en su cuaderno lo que veían en la pantalla de la calculadora al finalizar la primera tarea de cada serie.

Para esto, cada vez que abrían una serie tomaban como referencia una sola pareja de triángulos, Pues notaron fácilmente que en todas las parejas los triángulos gruesos estaban hacia el mismo lado, por lo que no había necesidad de tomar las otras dos parejas.

A continuación mostramos un cuaderno donde un estudiante consignó estas observaciones.

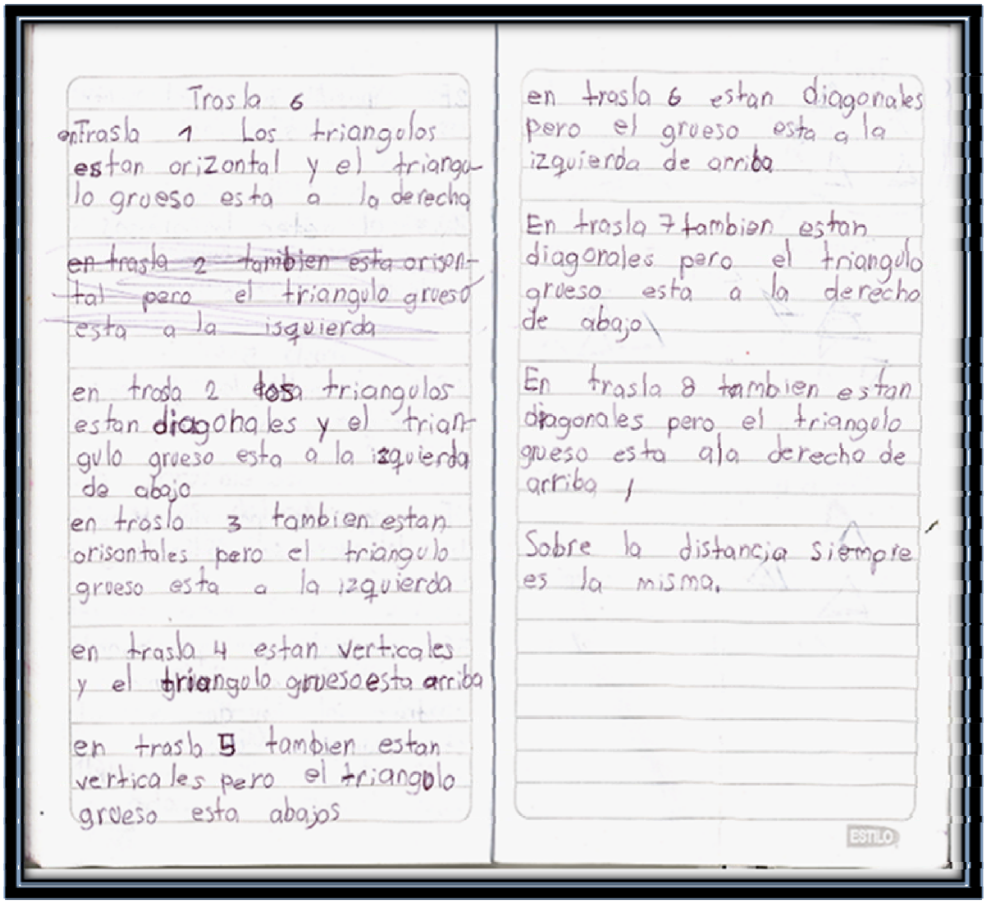


Figura 6. Apuntes de cuaderno.

En este escrito se puede observar que los estudiantes logran decir con sus palabras las características de cada serie.

Cuando el alumno utiliza la palabra “**también**” está haciendo comparación entre dos series que se asemejan en su dirección. Cuando utiliza la palabra “**pero**” está indicando la diferencia entre esas dos series, que está dada por el sentido.

Por ejemplo, cuando dice “**en trasla3 (serie 3) también están horizontales pero el triángulo grueso esta a la izquierda**” está haciendo la comparación de la tercera serie con la primera, es decir que está reconociendo que ambas tienen dirección horizontal pero el sentido es diferente: en la primera es hacia la derecha y en la tercera es hacia la izquierda.

Cabe mencionar que los estudiantes gastaron menos tiempo del que la docente tenía previsto para realizar las tres tareas con cada una de las series.

Finalmente las conclusiones de los mismos estudiantes dejan una gran satisfacción, puesto que se logro cumplir con los objetivos planeados para esta actividad y además, estos objetivos serán la base para la construcción del concepto de traslación a través de Cabri.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA PUESTA EN COMÚN

Es necesario mencionar que la docente no esperó a que los estudiantes terminaran de realizar las ocho series de la actividad para hacer puesta en común de las mismas.

Es decir, que intervino en varias ocasiones para hacer preguntas que llevaran a los estudiantes a obtener conclusiones a las que debían llegar después de realizar todas las series. A continuación mostraremos una conversación obtenida durante la realización de la actividad.

P: *Bueno ¿qué es lo que sucede en trasla1*[16] *(serie 1)?, ¿cómo quedaron las parejas?*

E: *¿Por qué hay dos cuadrados?*

(E16 maneja su calculadora y agrupa en un lado los triángulos gruesos y en otro lado los delgados, encajando los gruesos en un cuadrado)

E16: *Porque hay dos conjuntos de triángulos*

E11: *Gruesos y delgados*

P: *¿Y qué tiene ese conjunto de triángulos?, ¿Qué es lo que sucede que no sucedía en simax (actividad de simetría axial)? A ver E15*

[16] Trasla1 es el nombre como se presenta el archivo a los estudiantes, en este trabajo es llamado serie 1; trasla2 se refiere a la serie 2, y así sucesivamente.

(E15 muestra con las manos lo que va explicando)

E15: *Profe que los triángulos están acomodados de la misma posición a las parejas, si corro uno hacia el lado el otro también se corre y al otro lado también. No pasa como en simax que los podíamos pegar.*

(E15 mueve su mano izquierda hacia el lado izquierdo para representar el movimiento de los triángulos delgados y luego lleva su mano derecha hacia el mismo lado para representar el movimiento que hacen los triángulos gruesos al mismo tiempo. Luego hace lo mismo pero para hacia el lado derecho)

A continuación se observa la comparación que hacen los estudiantes de la serie 1 con la serie 2:

P: *¿En trasla2 (serie 2) cómo quedaron? (los triángulos)*

E: *Es que en trasla2 aparecen un poquito los triángulos inclinados hacia abajo*

E16: *Profe es que trasla1 (serie 1) y trasla3 (serie 3) son iguales*
(E16 y E22 comparan las series 1 y 3, donde una de ellas trabaja en su calculadora la serie 1 y la otra estudiante trabaja con la serie 3, llegando a la conclusión que en la serie 1 los triángulos gruesos están hacia la derecha y que en la serie 3 están hacia a la izquierda)

E22: *Profe que en trasla1 (serie1) los negros (triángulos gruesos) están hacia la derecha y en trasla3 (serie 3) están a la izquierda*

P: *Pero ambos ¿son qué?, ¿Qué tienen iguales?*

E16: *Horizontales*

P: *Muy bien, ellas ya encontraron que dos traslas tienen dirección horizontal, pero en uno tienen los triángulos negros (triángulos gruesos) ¿para el lado?*

E22: *De allá(señalando hacia la izquierda)*

P: *¿Qué es el lado de allá?*

E22: *Izquierdo*

P: *¿Y el otro tiene para el lado?*

E22: *Derecho*

Notamos que de cierta manera la docente, a través de sus preguntas, trataba de apresurar un poco el proceso de enseñanza que se seguía en el aula y por lo tanto llevaba a los estudiantes a dar respuestas que ella quería de cierta manera escuchar.

Cuando la estudiante dice **"Profe que en trasla1 (serie1) los negros están hacia la derecha y en trasla3 (serie 3) están a la izquierda"** reconoce claramente el sentido de la traslación.

No se hicieron preguntas como las que teníamos en el análisis *a priori*, diseñadas para que el estudiante revelara lo que había hecho y las observaciones que tuvo en cada una de las tareas; la mayoría de ellas estaban centradas más bien en la necesidad de encontrar las diferencias entre series.

Finalmente no hicieron puesta en común de la actividad en general, pero los estudiantes lograron identificar las características que había en las figuras; prueba de ello son las conclusiones escritas que se encuentran en el análisis *a posteriori* de las series. Además, lograron identificar la dependencia de los triángulos.

4.1.1. CONCURSO DE LA PRIMERA ACTIVIDAD

Una vez los estudiantes se han familiarizado con los fenómenos visuales relativos a la traslación, se trata de que utilicen ese conocimiento para predecir la magnitud, dirección y sentido de la traslación.

Por lo tanto se organiza un concurso en donde se tienen preparadas tres figuras.

Descripción de la figura

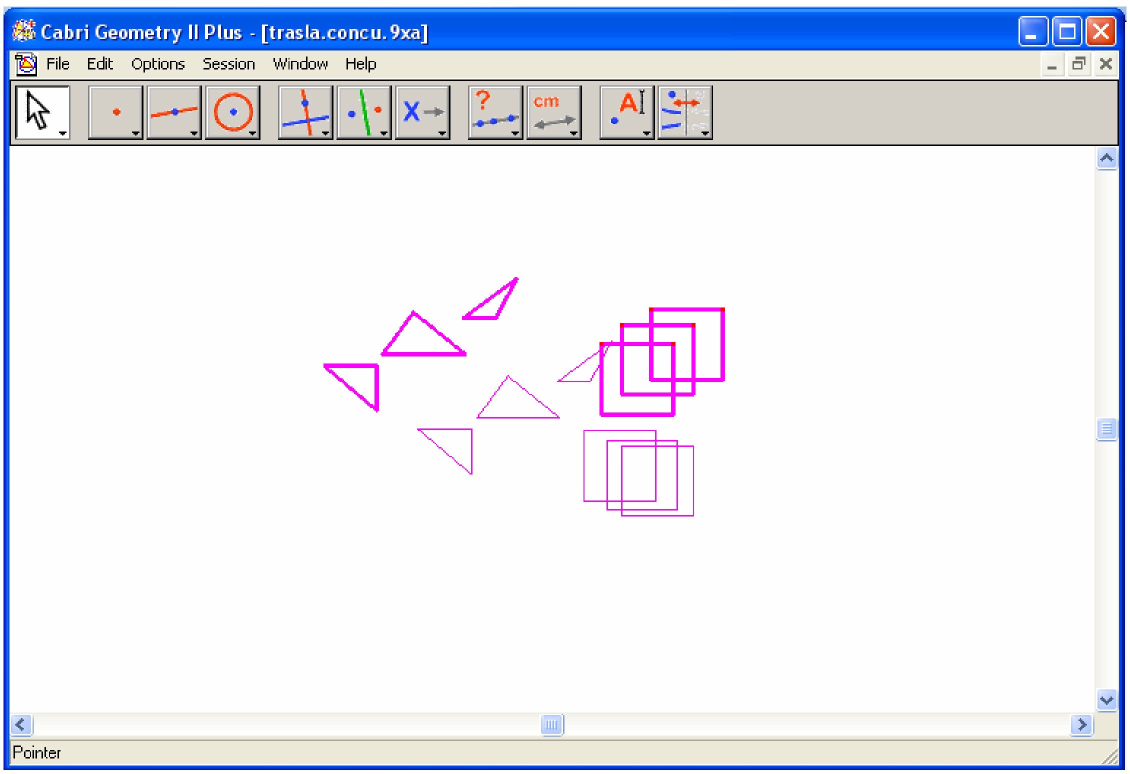


Figura 7. Concurso

En cada una de las tres figuras, podemos observar seis cuadrados (tres delgados y tres gruesos) que se pueden arrastrar; además hay tres triángulos gruesos que son la traslación de los tres triángulos delgados, por medio de un vector oculto.

FIGURA	DIRECCIÓN	SENTIDO	MAGNITUD
1	Oblicuo izquierdo (pendiente negativa)	Hacia arriba	2.06cm
2	Oblicuo izquierdo (pendiente negativa)	Hacia abajo	1.95cm
3	Vertical	Hacia arriba	1.62cm

Tabla 10. Características de la traslación en cada figura

Metodología

Por el hecho de ser un concurso, se organizan dos o más equipos dentro del salón, con el fin de despertar la motivación en los estudiantes al estar en un ambiente de competencia; es obvio que cada equipo querrá ganar el concurso. La docente plantea el problema que deberán resolver, y explica que ella escogerá un representante de cada equipo para realizar la tarea delante de toda la clase. De esta manera la mayoría, si no todos, los estudiantes podrán compartir sus conocimientos y proponer estrategias para resolver el problema, asi se evita que escojan un estudiante y le deleguen la responsabilidad de resolverlo. Cada equipo se reúne para discutir la manera de resolver el problema. Esto permitirá que los estudiantes puedan socializar con sus compañeros los conocimientos adquiridos durante el transcurso de la actividad. La docente escoge un representante de cada equipo para pasar a resolver el problema delante de todos los demás. El representante de cada equipo debe resolver el problema sin ayuda de nadie. Finalmente, se valida la solución propuesta por cada representante de manera pública. Si ninguno de los representantes resuelve el problema, puede volver a comenzar la discusión por grupos. Si alguno resuelve el problema, se organiza una puesta en común para analizar la solución.

El concurso consiste en realizar la siguiente tarea:

- ***sin mover los triángulos*, colocar los cuadrados de manera que en cada cuadrado grueso pueda ponerse un triángulo grueso y en cada cuadrado delgado pueda ponerse un triángulo delgado.**

Se espera que los estudiantes puedan predecir la posición que deben tener los cuadrados para que representen la dirección, el sentido y la magnitud de la traslación; es decir, ubicaran los cuadrados gruesos y delgados de manera que representen las características del vector oculto; luego arrastrarán los triángulos delgados de manera que cada uno quede dentro de un cuadrado delgado y, por lo tanto, cada triángulo grueso quedará dentro de su respectivo cuadrado grueso.

Finalmente, se puede decir que para que los estudiantes logren encontrar la estrategia ganadora, será necesario que tengan en cuenta la dirección, el sentido y la magnitud del triángulo grueso con respecto al delgado. Si, por ejemplo, solamente tienen en cuenta la distancia entre cada pareja de triángulos, cuando arrastre los triángulos delgados y los lleve hasta un cuadrado delgado, su respectivo triángulo grueso no quedará dentro del cuadrado grueso; si tienen en cuenta la dirección y el sentido pero no la magnitud la estrategia quedará invalidada de manera similar a la anterior.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DEL CONCURSO

La docente no realizó el concurso debido a que no entendió la metodología del mismo.

Al observar las figuras dadas observamos que los estudiantes podrían haber realizado de manera perceptiva la solución, simplemente arrastrando los cuadrados hasta los triángulos; creemos que sería recomendable mejorar la construcción de la figura, haciendo que tres de los cuadrados sean estáticos (por ejemplo, dos gruesos y uno delgado), de manera que al no poder mover esos cuadrados ni los triángulos se verán obligados a predecir la dirección, el sentido y

CONCLUSIONES DE LA PRIMERA ACTIVIDAD

- Los estudiantes lograron identificar la dependencia de los triángulos gruesos respecto a los triángulos delgados; observaron que para mover los triángulos gruesos era necesario arrastrar los delgados. Además, lograron identificar que la distancia entre los triángulos gruesos y delgados era constante; por ejemplo, en la segunda tarea trataron de unirlos en algún lugar de la pantalla y notaron que era imposible pues la distancia permanecía invariante.

- Los estudiantes lograron expresar con sus palabras las características del vector por el cual se trasladaron los triángulos en cada figura. Por ejemplo, “los triángulos están diagonales y el triángulo grueso esta a la izquierda de abajo”.

- La profesora interviene durante el desarrollo de la actividad, cada vez que un estudiante resuelve un problema. Consideramos que esta intervención interrumpe el proceso de aprendizaje por adaptación de los que aún no han encontrado una solución, ya que no alcanzan a experimentar sus propias acciones y validarlas con las retroacciones del medio, sino que reciben la estrategia ganadora de otro compañero o de la profesora.

4.2. ACTIVIDAD NÚMERO DOS

OBJETIVOS:

- Los mismos de la actividad anterior (dependencia, distancia, sentido y dirección de la traslación). Lograr que los estudiantes reconozcan que la distancia entre una figura y su traslación es siempre la misma.

- Lograr que los estudiantes identifiquen el siguiente fenómeno visual:
    - Si una figura se hace girar, su traslación gira en el mismo sentido.

Esta actividad consta de 8 series de una tarea:

TAREA: superponer el triángulo grueso y el triángulo punteado

DESCRIPCIÓN DE LA FIGURA

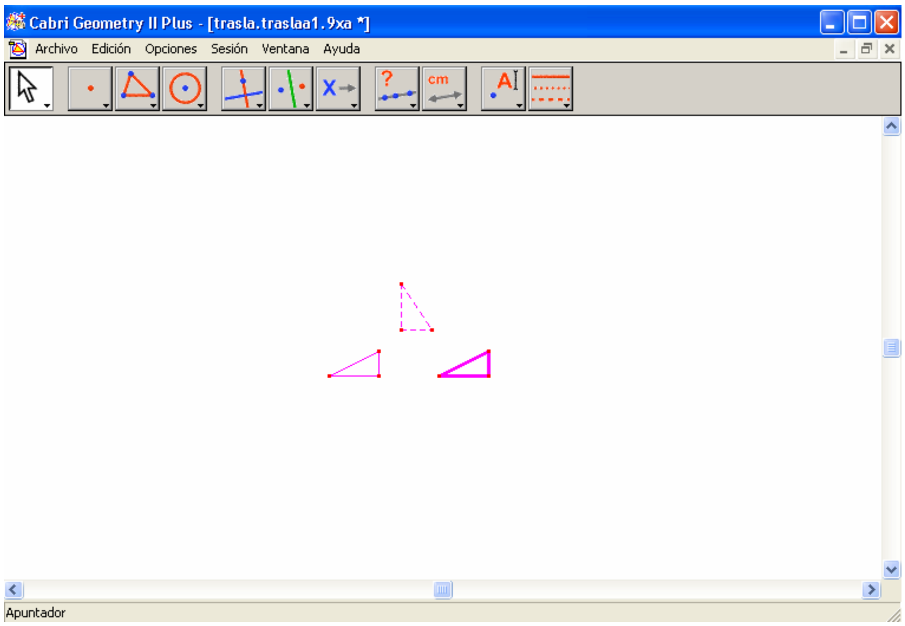


Figura 8. Serie 1. Segunda actividad

La figura consta de tres triángulos: uno delgado, uno grueso y uno punteado. El triángulo grueso es la traslación del triángulo delgado con respecto a un vector que está oculto; el triángulo punteado es congruente con el delgado, pero independiente de él.

El triángulo delgado sólo puede arrastrarse agarrando dos de sus vértices, que producen movimientos diferentes: uno de los vértices permite desplazar el triángulo sin cambiar su inclinación, el otro permite girar el triángulo alrededor de uno de los vértices. El triángulo punteado no puede moverse.

CARACTERÍSTICAS DE LA TRASLACIÓN EN CADA SERIE

SERIES	DIRECCIÓN	SENTIDO	MAGNITUD
1	Horizontal	Hacia la derecha	2.45 cm

2	Horizontal	Hacia la izquierda	1.59 cm
3	Vertical	Hacia abajo	1.59 cm
4	Vertical	Hacia arriba	2.07cm
5	Oblicua derecha (pendiente positiva)	Hacia abajo	1.59 cm
6	Oblicua derecha (pendiente positiva)	Hacia arriba	1.97 cm
7	Oblicua izquierda (pendiente negativa)	Hacia arriba	1.59 cm
8	Oblicua izquierda (pendiente negativa)	Hacia abajo	1.59 cm

Tabla 11. Características de la traslación en cada serie.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA ACTIVIDAD

TAREA: superponer el triángulo grueso y el triángulo punteado

Para escribir nuestro análisis utilizaremos las siguientes convenciones:

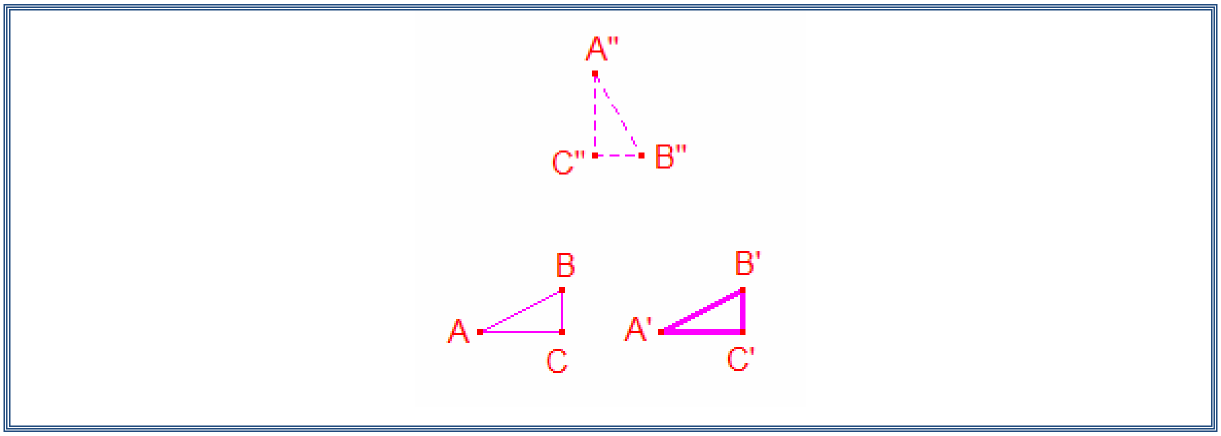


Figura 9. Convenciones

A pesar de que los estudiantes ya han comprobado la dependencia de los triángulos gruesos con respecto a los delgados, verificarán nuevamente que los triángulos gruesos no se pueden mover al tratar de cogerlos con la herramienta de Cabri; luego se espera que traten de mover el triángulo delgado cogiéndolo por uno de sus lados como en las actividades anteriores.

El medio no les permitirá arrastrar de esta manera los triángulos, por lo que esperamos que los estudiantes observen que en esta figura los tres vértices están visibles (cosa que no sucedía con las figuras de la actividad número uno) y traten de coger el triángulo delgado por medio de ellos.

Algunos cogerán por azar el vértice C que les permite desplazar los triángulos en línea recta por toda la pantalla y se lo harán saber a toda la clase.

Otros estudiantes cogerán el vértice B que permite que los triángulos se giren y también se lo dirán a todos sus compañeros.

Se prevé que los estudiantes utilizarán dos estrategias para la solución de esta tarea:

1. Girar el triángulo delgado por medio de B hasta que A’B’IIA’’B’’, A’C’IIA’’C’’ Y C’B’IIC’’B’’. Luego desplazar el triángulo delgado por medio de C hasta lograr superponer el triángulo grueso sobre el triángulo punteado.

2. Desplazar el triángulo delgado para poner uno de los vértices del grueso sobre su correspondiente vértice en el triángulo punteado y luego girarlo hasta que coincidan los demás vértices del triángulo grueso y el triángulo punteado.

Al tratar de utilizar la estrategia número dos algunos estudiantes podrán ubicar el vértice A’ o B’ sobre el vértice A’’ o B’’; al girar el triángulo delgado, el grueso también se gira pero no queda superpuesto al triángulo punteado debido a que esta estrategia es satisfactoria cuando se ubica el vértice C’ sobre C’’, puesto que C es el centro de rotación del triángulo delgado.

Con esta actividad se desea que los estudiantes, además de observar que los triángulos delgados y gruesos se mueven siempre en la misma dirección y sentido, al girar un triángulo delgado su correspondiente grueso se gira al tiempo en el mismo sentido.

INTERACCIONES DEL ALUMNO CON EL MEDIO			
Acción del alumno	**Retroacción del medio**	**Efecto de la retroacción en el alumno**	**Estrategia ganadora**
1. Coger el vértice B y girarlo hasta que A’B’IIA’’B’’, A’C’IIA’’C’’ Y C’B’IIC’’B’’; luego arrastrar el vértice C hasta que Δ A’B’C’ queda superpuesto al Δ A’’B’’C’’.	Logra realizar la tarea	Refuerza la acción	Las estrategias ganadoras son la uno y la dos.
2. Coger el vértice C y arrastrarlo hasta que C’ quede sobre C’’ y luego coger el vértice B y girarlo hasta que el triángulo grueso quede sobre el punteado.	Logra realizar la tarea	Refuerza la acción	
3. Coger el vértice C y arrastrarlo hasta que B’ o A’ queden sobre B’’ o A’’, respectivamente. Luego coger el vértice B para girar el	El triángulo grueso se gira pero no queda superpuesto al triángulo punteado.	Cambia la acción	

triángulo grueso.			

Tabla 12. Resumen Proceso de Aprendizaje por Adaptación.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA SECUENCIA

A medida que los estudiantes vayan realizando las series, esperamos que la interacción con el medio les permita observar propiedades que se conservan con el arrastre de las figuras: la distancia, sentido y magnitud, pero esta vez, a diferencia de la actividad anterior, deberán observar también que al girar el triángulo delgado, el grueso también se gira en el mismo sentido.

Al comparar las diferentes series, los estudiantes identificaran la dirección y el sentido del vector oculto; por ejemplo, en las series tres y cuatro la dirección es la misma (vertical) pero en la serie tres el sentido es hacia abajo mientras que, en la serie cuatro el sentido es hacia arriba. De igual manera podrán comparar las direcciones de las series; por ejemplo, al observar las series cuatro y cinco podrán decir que en la cuatro la dirección es vertical, mientras que en la cinco es oblicua derecha (pendiente positiva); claro está que con sus propias palabras.

Al finalizar las series se espera que los estudiantes observen nuevamente las diferencias que hay entre ellas y estas les permitirán predecir las características del vector que está oculto.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA PUESTA EN COMÚN

Recordemos que en esta fase la responsabilidad del profesor es ayudar al estudiante a reconocer sus errores (si los hay) o a validar sus conclusiones.

Esperamos que la docente busque que sus estudiantes validen las conclusiones que obtuvieron; es decir, que estos puedan predecir cómo pueden hacer para lograrlo sin que ese cómo le sea revelado por el profesor.

Prevemos que la docente escuchará lo que los estudiantes han logrado obtener y se ayudará de comentarios o preguntas que inciten a los estudiantes a validar sus conclusiones.

Algunas de las preguntas que podrá realizar la docente son:

¿Cuál triángulo se puede mover? Con esta pregunta se espera que los estudiantes al haber manipulado la figura hayan identificado que el único triángulo que se puede mover es el delgado.

¿Es posible mover el triángulo grueso? Esperamos que los estudiantes respondan que no se puede mover el triángulo grueso, puesto que la única forma para que se mueva es arrastrando el triángulo delgado.

¿Cómo se puede mover el triángulo delgado? Esperamos que los estudiantes hayan identificado las funciones que cumple cada vértice del triángulo punteado al arrastrarlo. Se prevé que el estudiante responda que al arrastrar un vértice el triángulo delgado se gira y que al arrastrar el otro vértice el triángulo delgado se desplaza (en línea recta).

¿Qué sucede cuando movemos o giramos el triángulo delgado? Se espera que el estudiante al arrastrar el triángulo delgado identifique que el triángulo grueso se mueve con él de la misma forma; si se gira o desplaza el triángulo delgado el grueso también lo hace.

Una cosa importante que esperamos, es que la docente no se conforme con que un solo estudiante le de las conclusiones, sino que esperará a que la mayoría, si no todos, de los estudiantes estén de acuerdo con la conclusión dada y en ese momento empezará a buscar la forma de que en la socialización los estudiantes logren comprobar lo que están diciendo.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA ACTIVIDAD

TAREA: superponer el triángulo grueso y el triángulo punteado

Con la primera serie los estudiantes empezaron por tratar de mover algún triángulo grueso para asegurarse nuevamente de que era imposible hacerlo.

Algunos intentaron arrastrar el triángulo punteado para descartar cualquier acción sobre este triángulo.

Luego, como estaba predicho, trataron de arrastrar un triángulo delgado de alguno de sus lados pero al versen imposibilitados para realizar esta acción decidieron tratar de coger sus vértices.

Algunos cogieron el vértice que les permitía girar los triángulos y otros cogieron el vértice que les permitía desplazarlos.

A continuación se muestra la conversación de un observador (O) con dos estudiantes (E8 y E5):

O[17]: *¿Qué sucede con los puntos del triángulo?*

E8: *Sólo dos puntos se pueden mover, el otro no sirve(el niño señala con su mano los vértices que se pueden coger en la calculadora)*

O: *¿Cómo se llaman esos puntos?*

E8: *Los vértices*

O: *Entonces ¿de un vértice que puede hacer?*

E5: *De este vértice lo mueve para dar la vuelta (coge un vértice y gira los triángulos)*

E8: *En giros*

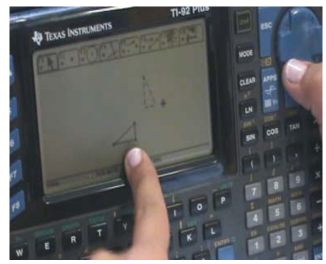
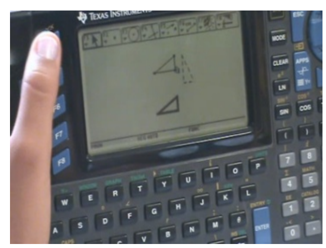
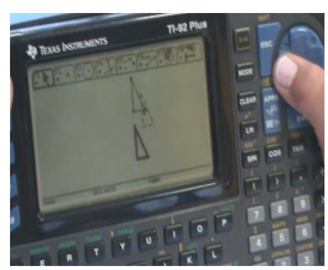
E5: *Y con este vértice(coge el otro vértice del triángulo delgado y lo arrastra hacia la derecha)*

E8: *Lo ubica*

[17] La letra O hace referencia a un observador, estudiante universitario, quien realiza preguntas a algunos estudiantes.

Los estudiantes tienen clara la función que cumplen dos de los vértices (pues el otro no permite realizar ninguna acción) del triángulo delgado y esto será importante para la construcción de estrategias.

La siguiente descripción muestra la conversación entre dos alumnas que al abrir el archivo en la calculadora donde aparece la figura, encontraron que el triángulo grueso estaba fuera de la pantalla y se mostrará la estrategia que utilizaron para resolver el ejercicio:

E2:	¿Dónde estará el triángulo grueso?	
E22	Búsquelo	
E2:	Tengo que mover este (E2 señala el vértice del triángulo que permite desplazarlo)	
E22:	Entonces si usted mueve ahí, entonces mueve el triángulo grueso (E2 mueve el triángulo delgado hacia arriba y dice: “ay ya lo encontré”)	
O:	¿Entonces dónde estaba el triángulo grueso?	
E2:	Estaba más abajo (E2 coge un vértice del triángulo delgado y lo gira; cabri le gira el grueso también)	
O:	¿Qué le está haciendo al triángulo exactamente?	
E22:	Poniéndolo en la posición del otro triángulo…del triángulo punteado (E22 coge el otro vértice del triángulo delgado y lo	

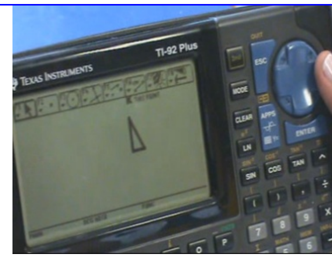
desplaza hasta lograr que el grueso quede sobre el punteado)	

Tabla 13. Extracto trabajo de dos alumnas en el aula con cabri.

Cuando E2 dice “**Tengo** que mover este” y señala un vértice del triángulo delgado, se refiere a que para mover el triángulo grueso es necesario mover el triángulo delgado.

Se observa que algunos estudiantes tienen clara la dependencia que hay entre el triángulo delgado y su correspondiente triángulo grueso, por lo que pensamos que en las siguientes series no se tomaran la molestia de tratar de coger el triángulo grueso para realizar las tareas.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA SECUENCIA

A medida que los estudiantes iban encontrando la solución a las tareas de las series, observaron que la diferencia entre ellas nuevamente se dio por la ubicación que tenía el triángulo grueso con respecto al triángulo delgado. Además, al igual que en la primera actividad, los estudiantes reconocieron la dependencia que había entre los triángulos gruesos y delgados, pero en esta ocasión no solo se desplazaban en cualquier dirección y sentido sino que además giraban en el mismo sentido.

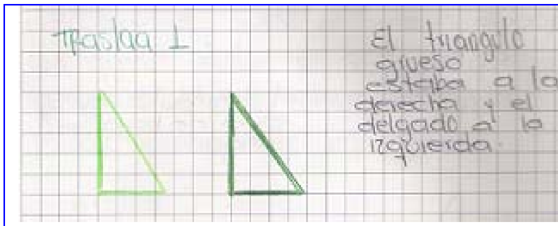
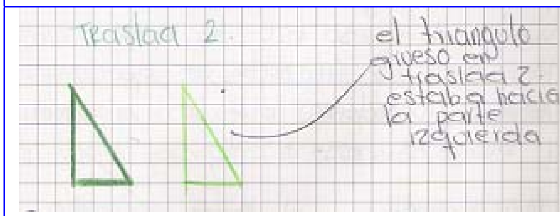
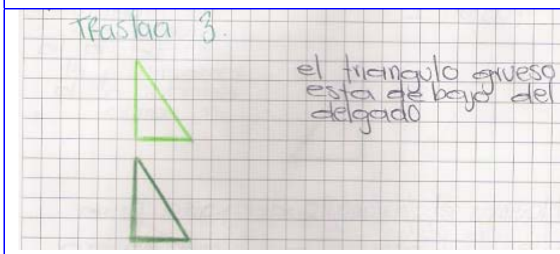
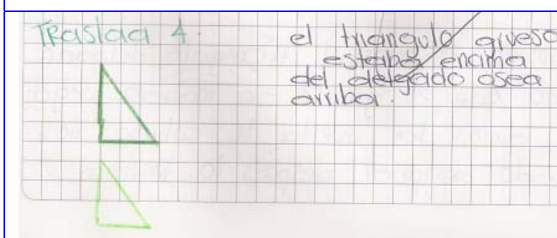
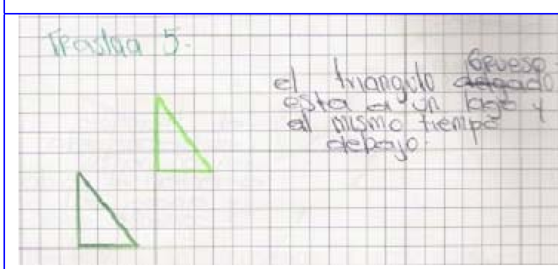
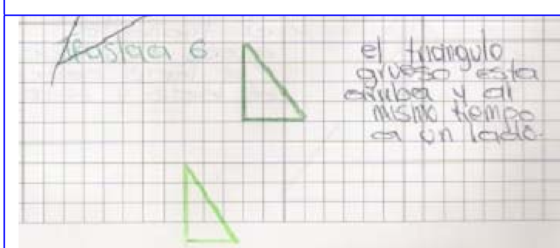
<table>
<tr><td>
</td><td>“El triángulo grueso estaba a la derecha y el delgado a la izquierda”</td></tr>
<tr><td>
</td><td>“El triángulo grueso en traslaa2 estaba hacia la parte izquierda”</td></tr>
<tr><td>
</td><td>“El triángulo grueso esta debajo del delgado”</td></tr>
<tr><td>
</td><td>“El triángulo grueso estaba encima del delgado, o sea arriba”</td></tr>
<tr><td>
</td><td>“El triángulo grueso esta a un lado y al mismo tiempo debajo”</td></tr>
<tr><td>
</td><td>“El triángulo grueso está arriba y al mismo tiempo a un lado”</td></tr>
</table>

Tabla 14. Extracto apuntes de estudiante.

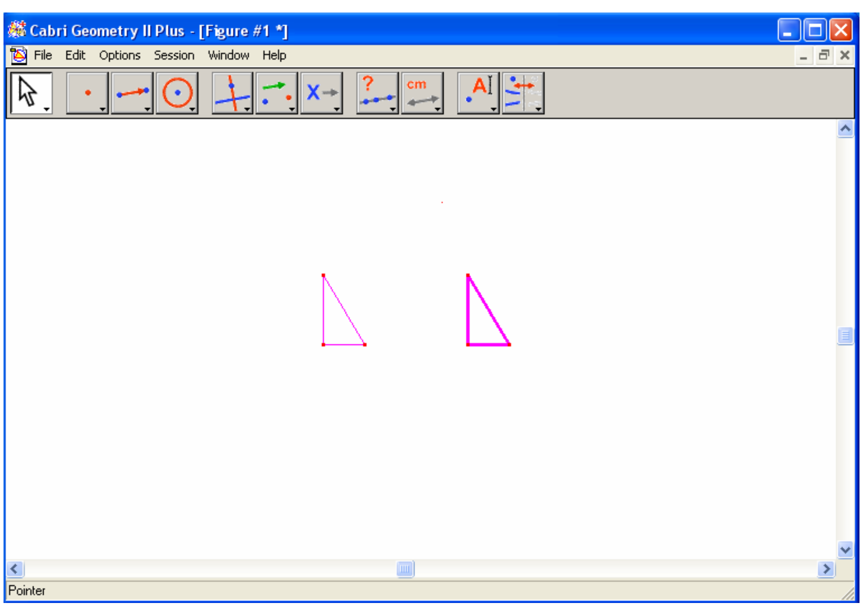
La estudiante utilizó sus propios términos para describir el sentido y la dirección de los triángulos gruesos con respecto a los delgados. En las cuatro primeras series habla solamente del sentido de la traslación. Por ejemplo, en la primera dice: “el triángulo grueso estaba a la derecha y el delgado estaba a la izquierda”.

En las series cinco y seis expresa con sus palabras la dirección de la traslación; por ejemplo, dice:”el triángulo grueso esta a un lado y al mismo tiempo debajo”. Por el dibujo realizado, se entiende que se refiere a la dirección oblicua (pendiente positiva).

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA PUESTA EN COMÚN

Recordemos nuevamente que la docente no hacia puesta en común sino que realizaba socializaciones en cualquier momento. A continuación veremos una de estas intervenciones en donde los estudiantes muestran su trabajo y sacan algunas conclusiones del mismo:

La figura para la socialización es la siguiente:



P: *A ver E21 muéstrenos qué hizo.*

(E21 coge un vértice del triángulo delgado para lograr que el grueso gire y sus lados queden paralelos a los lados correspondientes en el triángulo punteado; luego coge el otro vértice del triángulo delgado para poder desplazar el grueso hasta la posición donde está el punteado)

P: *Pero ¿qué es lo que pasa con el triángulo grueso?*

E21: *Que se mueve en la misma dirección del triángulo delgado.*

P: *Muy bien, ¿pero el grueso no se mueve qué?*

E6: *Sólo.*

P: *¿Y en qué dirección?*

E8: *Horizontal.*

P: *Dirección horizontal.*

(E21 termina de arrastrar el triángulo grueso y lo pone sobre el punteado).

(Por petición de la docente E21 coge el triángulo delgado y lo desplaza hacia la izquierda).

P: *¿Qué pasa con el grueso y el delgado?*

E6: *Van a la misma dirección.*

P: *¿Qué permanece constante?*

E19: *La distancia.*

P: *Dice E19 que permanece constante la distancia ¿será cierto?*

todos: *Si.*

P: *A ver ¿Cómo demuestra eso E19?*

E10: *Midiéndolo.*

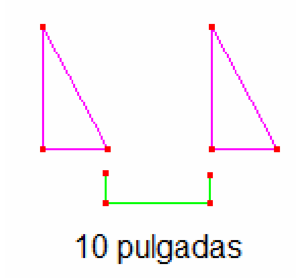
(E18 pasa al tablero hacia el proyector donde está la imagen de los triángulos y con ayuda de la regla empieza a medir las distancias)

P: *Vamos a medir ¿entre quién y quién?*

E2: *Entre un triángulo a otro.*

P: *A ver E18 lo va a comprobar (E18 está en el tablero con la regla mide las distancias)*

E18: *10 pulgadas (mide un par de vértices que nos son correspondientes)*

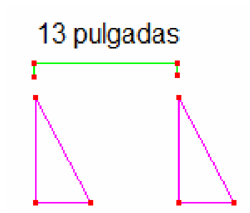


P: *Ahora bájelos (E[18] baja los triángulos para ponerlos en otro lado de la pantalla)*

E18: *10 pulgadas (cometiendo la misma equivocación anterior)*

E: *Mida otro par de vértices.*

E18: *Tiene 13 pulgadas (midiendo otro par de vértices correspondientes).*



19

P: *A ver vuélvalo a mover (E mueve los triángulos hacia arriba para que queden en otro lado de la pantalla).*

E18: *13 pulgadas (midiendo la distancia del mismo par de vértices correspondientes)*

E8: *Igual que la de abajo.*

E6: *La medida es igual.*

P: *Pero yo tengo una pregunta, ¿si en los puntos de arriba mide 13 pulgadas por que en los puntos de abajo no tiene 13 pulgadas? (puesto que E18 había tomado las primeras medidas mal porque no midió la distancia con sus vértices correspondientes), a ver ¿cuál con cuál punto se coge?*

(E12 se acerca al tablero y en voz muy baja le dice a E18 cuáles eran los vértices que ella debía medir, señalándoselos con la mano).

E18: *Yo yo yo…Este con este tiene 13 pulgadas y este con este tiene 13* *pulgadas (E18 toma la regla nuevamente y esta vez mide correctamente la distancia entre los vértices correspondientes que la habían confundido antes).*

E16: *Había quedado mal la medida porque no había cogido los pares de vértices bien.*

P: *Ahhh. Entonces permanece constante la distancia…Entonces ¿qué conclusión podemos sacar?*

E18: *Que tienen la misma distancia, si este se mueve para este lado (ósea el triángulo para la izquierda) también va a tener la misma distancia.*

P: *¿En este caso cuál es la dirección?(refiriéndose al par de triángulos)*

E: *Derecha…izquierda.*

P: *Horizontal, y ¿qué sentido?*

E: *Derecho…izquierdo.*

P: *Hacia la izquierda o la derecha*

E: *Las dos.*

E18: *Según para el lado donde se necesite ponerlo.*

P: *Entonces ¿depende de qué?*

E6: *Del triángulo punteado.*

P: *De donde este el triángulo punteado, respecto ¿a quién?*

E18: *Hacia el triángulo grueso.*

P: *Eso, muy bien, dependiendo de la posición que tenga el triángulo grueso.*

Vemos que en esta actividad la docente empieza a utilizar el término dirección, quizá aprovechando que el estudiante lo mencionó cuando dijo: “Que se mueve en la misma **dirección** del triángulo delgado”. Sin embargo, cuando ella pregunta por la dirección de los triángulos responden correctamente “horizontal” observando la posición de los dos.

Luego, los estudiantes logran concluir que la distancia entre los triángulos es constante. Esta es una de las conclusiones que esperábamos obtener según lo que mencionamos en el análisis *a priori*.

Más adelante observamos cómo logran verificar la conclusión anterior, utilizando una regla lo suficientemente grande como para medir directamente en el proyector. La estudiante que cogió la regla no tuvo claro en una primera instancia la correspondencia entre vértices, por lo que al medir obtuvo dos magnitudes diferentes; la docente hace una pregunta: "¿si en los puntos de arriba mide 13 pulgadas por qué en los puntos de abajo no tiene 13 pulgadas?"; esto logra llamar la atención de los demás estudiantes para que entre todos logren resolver el problema presentado; claramente hay estudiantes que ya identifican vértices correspondientes, luego pudieron ayudar a su compañera a salir de la equivocación en la que estaba.

Finalmente queremos resaltar la última parte de la puesta en común, en donde la docente hace preguntas que realmente confunden a los estudiantes; no son preguntas claras.

P: *En este caso ¿cuál es la dirección? (refiriéndose al par de triángulos).*

E: *Derecha…izquierda.*

P: *Horizontal, y ¿qué sentido?*

E: *Derecho,…izquierdo.*

P: *Hacia la izquierda o la derecha.*

E: *Las dos.*

E18: *Según para el lado donde se necesite ponerlo.*

P: *Entonces ¿depende de qué?*

E6: *Del triángulo punteado.*

P: *De donde este el triángulo punteado, respecto ¿a quién?*

E18: *Hacia el triángulo grueso.*

P: *Eso, muy bien, dependiendo de la posición que tenga el triángulo grueso.*

Se nota claramente la confusión que tienen los estudiantes al hablar de sentido y dirección[20]; primero porque hasta ahora están conociendo estas características en cada pareja de triángulos; segundo, y por esta misma razón la docente debió haber utilizado una puesta en común al final de todas las series para hablar sobre las características que encontraron en la actividad y las diferencias entre los triángulos de cada serie. Estas diferencias son las que en adelante permitirán que los estudiantes logren entender la dirección y el sentido de la traslación.

Pero, lógicamente los estudiantes contestaron: “horizontal”, porque los triángulos están horizontales; pero en el momento en que la docente pregunta: ¿hacia la izquierda o hacia la derecha? contestaron que las dos, pensando en que para ambos lados se podían mover.

Teóricamente, esta actitud de la docente se conoce en la TSD como el efecto Topaze que es aquel en el cual el profesor hace preguntas que provocan la respuesta del alumno, aunque esto no suponga la adquisición del sentido por parte del mismo.

Creemos que la docente, en su afán de lograr que los estudiantes lleguen a conclusiones rápidamente, no hace las preguntas convenientes para que los estudiantes reflexionen sobre las mismas y busquen conclusiones dentro de su análisis durante el desarrollo de las actividades.

CONCLUSIONES DE LA SEGUNDA ACTIVIDAD

- Los estudiantes identificaron que los triángulos gruesos dependen de los delgados y además que la distancia entre ellos es constante.
- La docente no realizó preguntas en donde pudiéramos observar si los estudiantes identificaron o no la dirección y el sentido de las figuras. Aunque sí lo observamos en los dibujos hechos en los cuadernos.
- Como vimos en el trascurso de la actividad, la docente utilizó los términos matemáticos de dirección y sentido para realizar preguntas a los estudiantes, pero ellos dieron diferentes respuestas sin saber a que

correspondían; por ejemplo, la docente pregunta: ¿en este caso cuál es la dirección? y el estudiante le responde: “derecha – izquierda”.

Pensamos que no era el momento para hablar de dirección y sentido pues los estudiantes se confundieron demasiado; de hecho ni siquiera conocen la definición de los términos para dar respuesta a preguntas que los utilicen.

4.3. ACTIVIDAD NÚMERO TRES

OBJETIVOS:

- Precisar las características de la traslación como son la magnitud, dirección y sentido.

- Utilizar un vector para representar la traslación.

- Reconocer que las flechas que se dibujan entre cada punto de la figura original y su correspondiente imagen por la traslación, son paralelas, tienen la misma medida y el mismo sentido.

La actividad consta de dos partes:

- En la primera parte el alumno debe modificar un vector ya dibujado, para que represente la traslación entre dos triángulos (uno continuo y uno punteado). El estudiante podrá realizar ajustes perceptivos para lograr que el vector tenga la misma dirección, magnitud y sentido de la traslación.

- En la segunda parte, el alumno debe construir un vector que represente la traslación entre dos triángulos, de tal manera que al modificar la traslación, también se modifique el vector. La figura comprende un punto móvil sobre un círculo que modifica la dirección, el sentido y la magnitud de la traslación entre los dos triángulos. El ajuste perceptivo del vector ya no es suficiente para resolver el problema; deberá utilizar los puntos correspondientes de los dos triángulos para construir el vector.

PRIMERA PARTE DE LA ACTIVIDAD

Para la primera parte de la actividad se tienen ocho series con las cuales se debe realizar la siguiente tarea:

TAREA: El triángulo punteado es el resultado de trasladar el triángulo continuo; debes modificar la flecha para que represente el movimiento del triángulo.

DESCRIPCIÓN DE LA FIGURA

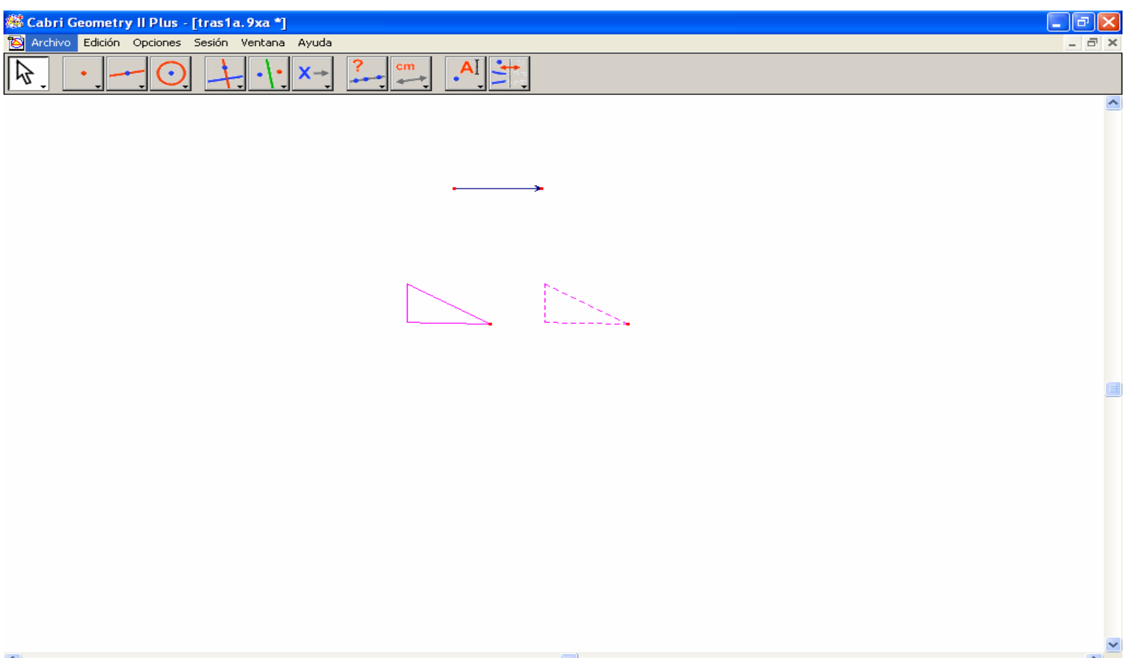


Figura 10. Serie 1. Tercera actividad. Primera parte

Las series están constituidas por dos triángulos: uno continuo y uno punteado, imagen del continuo por una traslación, con respecto a un vector oculto. El triángulo continuo puede arrastrarse por dos de sus vértices; uno lo desplaza en línea recta y el otro lo gira.

Además de los dos triángulos hay una flecha (horizontal y con sentido izquierda-derecha) que puede arrastrarse agarrándola por el medio o por los extremos (cabeza y cola):

- Si la flecha se toma del medio, al arrastrarla se conserva la magnitud, la dirección y el sentido.
- Si se toma de un extremo, al arrastrarla el otro extremo queda fijo, y por lo tanto se modifican la magnitud, la dirección y el sentido.

Cuando la flecha es aproximadamente igual al vector de la traslación (oculto) se muestra en la pantalla un punto con el letrero "muy bien".

CARACTERÍSTICAS DE LA TRASLACIÓN EN CADA SERIE

SERIE	DIRECCIÓN	SENTIDO	MAGNITUD
1	Horizontal (pendiente cero)	Hacia la derecha	3.31cm
2	Horizontal (pendiente cero)	Hacia la izquierda	3.31cm
3	Vertical (pendiente indefinida)	Hacia abajo	3.31cm
4	Vertical (pendiente indefinida)	Hacia arriba	2.41cm
5	Oblicuo derecha (pendiente positiva)	Hacia arriba	3.31cm
6	Oblicuo derecha (pendiente positiva)	Hacia abajo	3.31cm
7	Oblicuo izquierda (pendiente negativa)	Hacia abajo	3.31cm

8	Oblicuo izquierda (pendiente negativa)	Hacia arriba	3.31cm

Tabla 15. Características de la traslación en cada serie.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA PRIMERA PARTE

TAREA: "**En la figura, el triángulo punteado es el resultado de trasladar el triángulo continuo; debes modificar la flecha para que represente el movimiento del triángulo".**

Se espera que en las actividades anteriores, los estudiantes hayan identificado la magnitud (todos los triángulos correspondientes, o los puntos correspondientes están a la misma distancia), la dirección y el sentido de la traslación entre dos triángulos. Podemos entonces esperar que intenten plasmar esas características en el vector dibujado modificando su tamaño, su inclinación y su sentido.

Los estudiantes podrán darse cuenta de que la estrategia utilizada es la correcta en el momento en que les aparece en la pantalla el letrero "muy bien"; la docente se encargará de hacérselos saber en el inicio de la actividad.

Creemos que algunos estudiantes, trataran de modificar la dirección, el sentido y la magnitud del vector arrastrándolo de la cabeza y dejando la cola en el mismo sitio donde se encuentra (es decir que el estudiante no tratará de llevar el vector hasta los triángulos); esta estrategia puede llevar a la solución, en especial en las cuatro primeras series, pero tiene un nivel de dificultad bastante alto en las demás, pues cuando la dirección no es horizontal ni vertical, es muy difícil obtener "a ojo" una dirección y una magnitud dadas.

Sabiendo que el estudiante reconoce que el triángulo punteado es la traslación del triángulo continuo, (con las anteriores actividades el estudiante reconoció esta condición) entonces podrá llevar la cola hasta un vértice del triángulo continuo y llevar la cabeza del vector al vértice correspondiente del triángulo punteado. El medio le permitirá ubicar el vector en un par de vértices correspondientes y en ese momento aparecerá el letrero “muy bien”, lo que le permitirá concluir que ha encontrado la estrategia ganadora.

Suponemos que habrá algunos estudiantes que caerán en la equivocación de llevar la cola hasta uno de los vértices del triángulo continuo, pero ubicarán la cabeza del vector en un vértice no correspondiente del triángulo punteado, por lo que el medio no les mostrará el “muy bien” que ellos esperan; de esta manera el estudiante deberá reconocer el error que cometió al realizar la acción y tendrá que poner la cabeza del vector en el vértice correcto para arreglar su estrategia.

INTERACCIONES DEL ALUMNO CON EL MEDIO			
Acción del alumno	**Retroacción del medio**	**Efecto de la retroacción en el alumno**	**Estrategia ganadora**
Llevar la cabeza sobre un vértice del triángulo continuo y llevar su cola al vértice correspondiente en el triángulo punteado.	Ubica el vector de vértice a vértice correspondiente. No aparece el letrero	Cambiar la acción.	Desplazar el vector de tal manera que la cabeza este en un vértice del triángulo punteado y la cola sobre el triángulo continuo en el vértice correspondiente del triángulo punteado.
Llevar la cola hasta un vértice del triángulo continuo y llevar la cabeza del vector al vértice correspondiente en el triángulo punteado.	Ubica el vector de vértice a vértice correspondiente. Aparece el letrero	Refuerza la acción.	
Modificar la dirección, la magnitud y el sentido del vector arrastrando la cabeza, realizando pequeños ajustes hasta que salga el letrero	Mueve el vector de la cabeza hasta que quede en la misma dirección. Aparece el letrero	Refuerza la acción.	
Llevar la cola del vector a un vértice del triángulo	No aparece el	Cambiar la	

continuo y la cabeza a otro vértice (no correspondiente)	letrero	acción.	

Tabla 16. Resumen del proceso de Aprendizaje por Adaptación

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA SECUENCIA

Los estudiantes al ver las diferencias entre las series podrán identificar el sentido, la dirección y la magnitud de la traslación.

En la primera serie el vector dibujado tiene dirección horizontal y sentido hacia la derecha, que son la dirección y el sentido del vector oculto. Por lo tanto, el alumno sólo debe modificar la magnitud y podrá hacerlo arrastrando la cabeza del vector hacia la derecha hasta que aparece el letrero ‘muy bien’. En la segunda serie, el vector dibujado tiene dirección horizontal y sentido hacia la derecha, y el vector oculto tiene dirección horizontal y sentido hacia la izquierda. Se espera que los estudiantes piensen que es exactamente la misma figura de la primera serie y arrastren la cabeza del vector hacia la derecha, pero no obtendrán el letrero ‘muy bien’. La docente les pedirá que comparen las series 1 y 2 para verificar si son iguales. Se espera que los estudiantes comparen las series, y digan que en la serie 1, el triángulo punteado esta a la derecha del triángulo grueso, mientras que en la serie 2 el triángulo punteado esta a la izquierda del triángulo grueso. Es decir, que identifiquen el sentido del vector oculto, y modifiquen el vector dibujado de la segunda serie, arrastrando la cabeza hacia la izquierda, obteniendo así el letrero “muy bien”.

Lo mismo sucederá con los pares de series 3 y 4 (dirección vertical), 5 y 6 (dirección oblicua- pendiente positiva) y 7 y 8 (dirección oblicua – pendiente negativa). Se espera que los estudiantes identifiquen directamente el cambio de sentido para que la docente no tenga que intervenir.

En resumen, al comparar las distintas series esperamos que el alumno identifique aquellas que tienen igual dirección, y pueda diferenciarlas por el sentido.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA PUESTA EN COMÚN

En la puesta en común se podrán realizar las siguientes preguntas para esta primera parte de la actividad:

¿Qué estrategia utilizaron para resolver la primera serie?

Se espera que los estudiantes digan que lo único que debían hacer era estirar la flecha de la cabeza para que les saliera el "muy bien". En este momento la docente podría preguntar **¿Qué era lo único que le faltaba a la flecha para representar esa traslación?** Los estudiantes, entonces, podrán decir que el vector debía tener la misma distancia que había entre los dos triángulos.

¿Qué diferencias hay entre las series 1 y 2? ¿En qué se parecen?

Esperamos que los estudiantes comparen la primera y segunda serie notando que el sentido del vector de la traslación es diferente, pero que la dirección es la misma. Por ejemplo, podrán decir que en la primera serie el triángulo punteado esta a la derecha del triángulo continuo, mientras que en la segunda serie el triángulo punteado esta a la izquierda.

¿Qué diferencias hay entre las parejas de series 1 y 2, 3 y 4?

Se espera que los estudiantes comparen las series 1 y 2 con las series 3 y 4, notando que la dirección de las primeras es horizontal y en cambio la dirección de las segundas es vertical.

¿Qué diferencias hay entre las series 5 y 6?

Esperamos que los estudiantes reconozcan que la dirección entre las series es oblicua derecha para las dos series, pero que el sentido es diferente puesto que en la quinta serie es hacia arriba y en la sexta serie esta hacia abajo.

¿Qué diferencias hay entre las series 7 y 8?

Esperamos que los estudiantes reconozcan que la dirección para ambas series es oblicua a la izquierda y que además noten que el sentido es diferente puesto que en la séptima serie es hacia arriba y en la octava serie es hacia abajo.

¿Qué sucede con la cabeza del vector cuando lo arrastramos tomándolo del medio hasta que la cola quede en cada uno de los vértices del triángulo continuo?

Los estudiantes podrán establecer que el vector siempre queda entre un par de vértices correspondientes. Esta conclusión será de gran importancia en la segunda parte de la actividad, pues a la hora de dibujar un vector tendrán en cuenta que este quede en un par de vértices correspondientes.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA PRIMERA PARTE

TAREA: “En esta figura, el triángulo punteado es el resultado de trasladar el triángulo continuo; debes modificar la flecha para que represente el movimiento del triángulo”.

Algunos estudiantes para la primera serie solo modificaban la magnitud arrastrando la cabeza del vector hasta que saliera el letrero “muy bien”, como lo habíamos previsto en el análisis *a priori*; esto era fácil para ellos puesto que la dirección es horizontal y el sentido hacia la derecha. A continuación observamos los apuntes de un alumno:

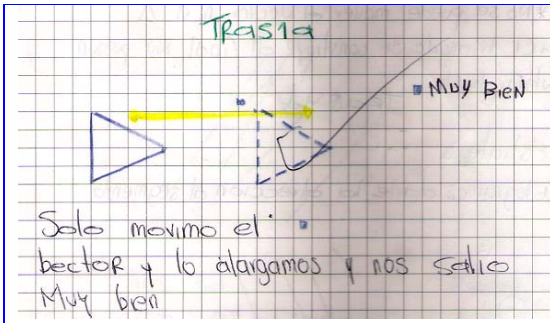
	Los apuntes dicen: “solo movimos el vector y lo alargamos y nos salió Muy bien”.

Tabla 17. Extracto apuntes de estudiante

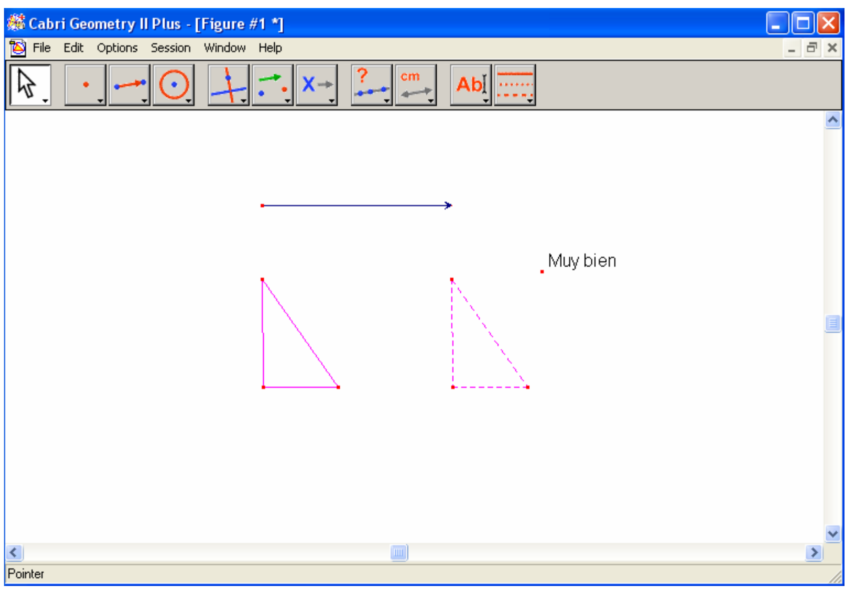


Figura 11. Serie 1

Con esta figura se tuvo la siguiente conversación entre los estudiantes y la docente:

P: *Miren lo curioso.*

P: *Hasta por fuera sale bien. Pero ¿por qué?*

E8: *Profe, hay la misma distancia del vector a los dos vértices.*

E6: *El vector va igual, va recto como los triángulos.*

E4: *Profe también debe ir en la misma dirección, la medida y debe ir con los mismos puntos.*

P: *¿Cómo así?, no le entiendo, dice que debe ir en la misma dirección con la medida, a ver E3 ¿cómo así?*

E3: *Que las líneas deben ser a igual medida de los puntos.*

P: *Tiene la misma distancia ¿a dónde?, ¿por qué sirve por fuera, y por qué no necesito que sea la unión de los dos?, a ver E15.*

E15: *Porque los triángulos están a la misma distancia del vector, lo que tiene de largo el vector es la misma distancia que tienen los triángulos.*

P: *¿Solamente la misma distancia?, ¿qué otra cosa?*

E15: *La misma posición.*

P: *La misma posición ¿en qué sentido?*

E15: *Es que no es como si fuera el espejo, el vector no queda como el espejo.*

P: *Pero qué pasa si se mueve la puntica hacia abajo (aquí la docente se refiere a la cabeza del vector).*

E: *Pues que ya no le va a salir muy bien.*

P: *¿Por qué?*

E: *Porque no están en la misma posición (señalando los triángulos).*

P: *Pero puede tener la misma distancia, a ver ¿por qué si movemos la* *punta hacia abajo no nos sale muy bien?*

E6: *Porque no están rectos, porque debe ser recto a los triángulos.*

E8: *Deben quedar rectos y a la misma distancia del vector.*

Podemos observar que los estudiantes lograron identificar la dirección y la magnitud, aunque los estudiantes no tienen las palabras adecuadas para poder expresar estas características. Un ejemplo que muestra que el lenguaje del alumno no es preciso, es cuando E8 dice **"hay la misma distancia del vector a los dos vértices",** a diferencia de la alumna E15 que logra definir muy bien la magnitud de la traslación puesto que dice con sus palabras: **"los triángulos están a la misma distancia del vector, lo que tiene de largo el vector es la misma distancia que tienen los triángulos".**

Notamos que cuando se refieren a la dirección del vector, los estudiantes no tienen un término para describirla; por ejemplo, al querer expresar que la dirección de la traslación es horizontal, los estudiantes dicen **"el vector va recto como los triángulos".**

Los estudiantes reconocieron la dirección de la traslación puesto que la docente al preguntar: **¿Qué pasa si muevo la punta del vector hacia abajo?** (refiriéndose a la cabeza del vector), los estudiantes explicaron que los triángulos no iban a quedar en la misma posición del vector, argumentando: "**debe ser recto a los triángulos".**

A continuación analizaremos el caso de una estudiante resolviendo la tarea, utilizando la estrategia ganadora prevista en el análisis *a priori:*

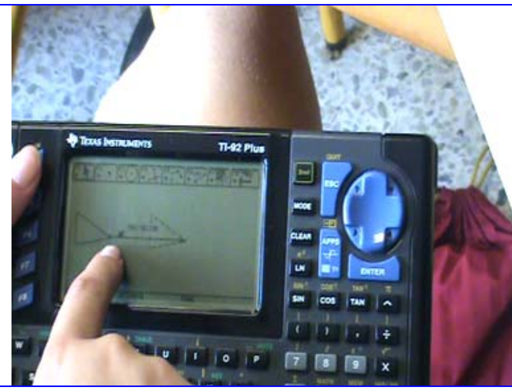
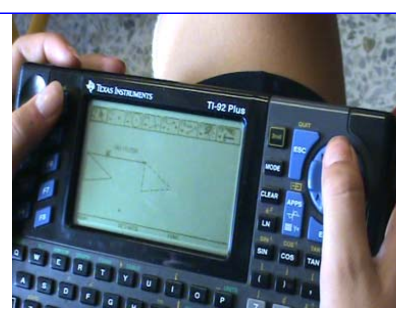
La estudiante E15 reconoce que para representar la traslación la cola del vector debe estar en un vértice del triángulo continuo.	
Y la cabeza del vector debe estar sobre el vértice correspondiente del triángulo punteado.	

Tabla 18. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri**.**

La estudiante reconoció que el vector debe estar ubicado en los vértices correspondientes de los triángulos (continuo y punteado) para representar el movimiento. La estudiante E15 luego de haber identificado lo anterior reconoció que al arrastrar el vector a cada par de vértices, la magnitud, dirección y sentido se mantiene, esto lo veremos en la siguiente tabla.

La estudiante E15 ubica el vector entre vértices correspondientes de tal manera que la cola del vector esta sobre un vértice del triángulo continuo y la cabeza sobre el vértice correspondiente del triángulo punteado.	

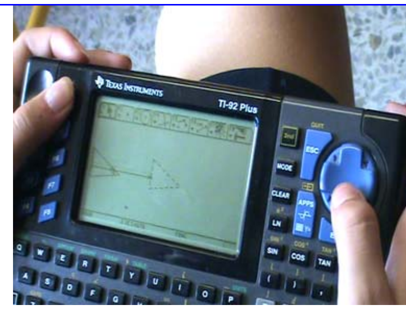
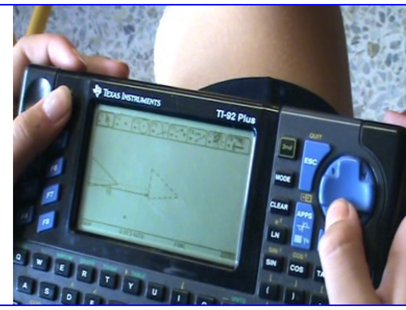
La estudiante coge el vector del medio y lo arrastra para llevarlo a otro par de vértices correspondientes.	
La estudiante ubica el vector en otro par de vértices correspondientes, manteniéndose la dirección, magnitud y sentido de la traslación.	

Tabla 19. Extracto trabajo de estudiante en el aula con Cabri.

Podemos concluir que las predicciones realizadas en el análisis *a priori* se cumplieron satisfactoriamente, puesto que algunos estudiantes lograron encontrar la estrategia ganadora de la actividad en la primera serie (ubicar la cola del vector en un vértice del triángulo continuo y luego llevar la cabeza hasta el vértice correspondiente en el triángulo punteado).

También observamos algunos comportamientos que no fueron previstos en el análisis *a priori*, como los siguientes:

La estudiante E15 al decir **"no es como si fuera el espejo"** esta identificando que los triángulos no son simétricos.

Los estudiantes utilizan otros recursos como la regla para verificar que la magnitud del vector es la misma que hay entre los dos vértices correspondientes a cada triángulo, esto lo veremos en la siguiente tabla.

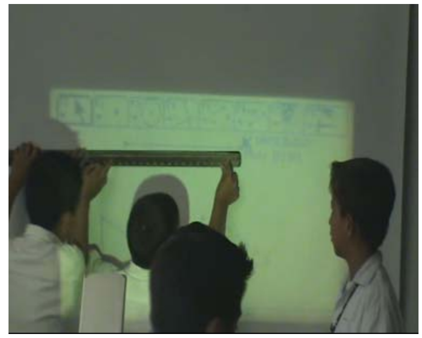
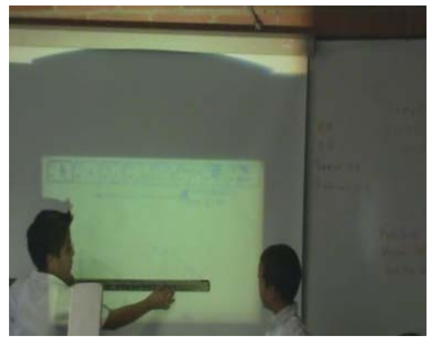
E8 y E miden la magnitud del vector	
E mide finalmente la distancia entre un par de vértices correspondientes para verificar que es la misma magnitud del vector.	

Tabla 20. Extracto trabajo de estudiantes en el aula con Cabri.

Los únicos datos disponibles corresponden a la primera serie. Por lo tanto no es posible realizar un análisis *a posteriori* de la secuencia ni de la puesta en común.

SEGUNDA PARTE DE LA ACTIVIDAD

Para la segunda parte de la actividad se tiene una serie con la cual se debe realizar la siguiente tarea:

TAREA: Debes construir un vector de manera que siempre represente la traslación del triángulo continuo (representada por el triángulo punteado), aunque se mueva el punto sobre el círculo.

DESCRIPCIÓN DE LA FIGURA

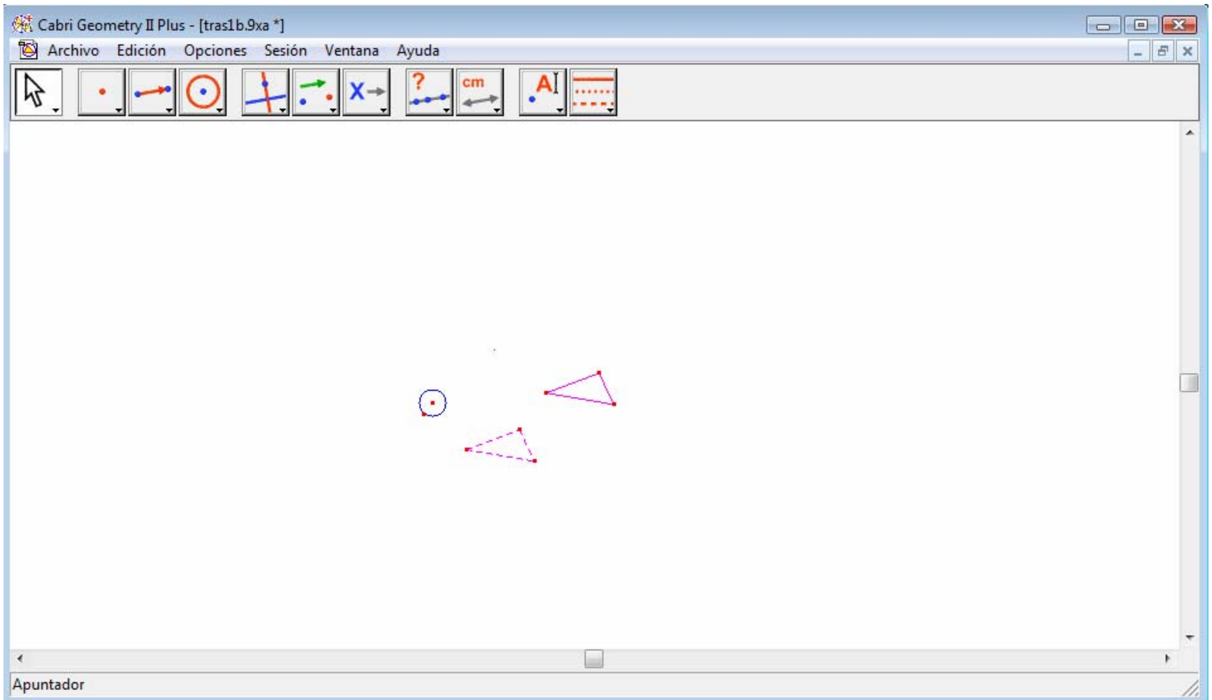


Figura 12. Tercera actividad. Segunda parte

Esta figura tiene los mismos triángulos de las figuras que se trabajaron en la primera parte de esta actividad, y no aparece la flecha (los estudiantes deberán construirla). Además hay un círculo con un punto sobre él. Al mover el punto sobre el círculo, el vector que define la traslación cambia de dirección, sentido y magnitud (aunque permanece oculto) y por lo tanto el triángulo punteado cambia de posición.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA SEGUNDA PARTE

TAREA: "Debes construir un vector de manera que siempre represente la traslación del triángulo continuo (representada por el triángulo punteado), aunque se mueva el punto sobre el círculo".

Luego de haber trabajado con las figuras de la primera parte, la docente pasará un estudiante a trabajar delante de la clase y le mostrará la figura de la segunda parte, en donde se pide que construya un vector que represente la traslación entre los dos triángulos. La docente le mostrará cómo usar la herramienta Vector. Se espera que el estudiante construya el vector aparte de los triángulos y arrastre la cola del vector hasta un vértice del triángulo continuo y luego la cabeza del vector hasta el vértice correspondiente del triángulo punteado. En ese momento, la docente mostrará cómo utilizar la herramienta Traslación y pedirá al estudiante que construya la traslación del triángulo continuo con respecto al vector dibujado, obteniendo un triángulo que coincide con el triángulo punteado, es decir validando la estrategia del alumno. Enseguida, la docente le pedirá que mueva el punto sobre el círculo, produciendo un movimiento del triángulo punteado, que ya no quedará superpuesto al triángulo producido por Cabri. La docente planteará el problema: "¿cómo construir el vector de manera que el triángulo punteado siempre coincida con el triángulo producido por Cabri?" y dejará que los estudiantes trabajen en grupos.

El problema planteado es nuevo para los estudiantes, que en la primera parte resolvieron un problema similar, pero en el cual el vector oculto no cambiaba de posición.

En esta actividad, se producen dos retroacciones principales del medio:

1. Una vez construido el vector, se pide a Cabri que construya la traslación del triángulo continuo según ese vector; la estrategia de construcción del vector queda validada cuando el triángulo punteado coincide con el triángulo producido por Cabri.

2. Se arrastra el punto sobre el círculo, modificando el vector oculto y por lo tanto la posición del triángulo punteado; nuevamente, la estrategia de construcción del vector será validada si el triángulo punteado sigue coincidiendo con el triángulo producido por Cabri, y será invalidada en los otros casos.

Es probable que los estudiantes tengan dificultades para aceptar este nuevo problema, y traten de conformarse con arrastrar nuevamente el vector hasta hacer coincidir el triángulo punteado con el producido por Cabri. La docente deberá hacerles entender que esa solución ya no es aceptable, y que el triángulo punteado y el triángulo producido por Cabri deberían moverse juntos.

Se espera que los estudiantes realicen diferentes intentos colocando el vector inicialmente en distintas posiciones y arrastrando los extremos hasta hacerlos coincidir con vértices correspondientes de los dos triángulos (continuo y punteado). Esta estrategia siempre será invalidada al arrastrar el punto sobre el círculo.

Se espera que algunos estudiantes abandonen la estrategia de construir primero el vector aparte de los triángulos, y lo construirán utilizando dos vértices correspondientes de los dos triángulos. En el caso en que ningún alumno adopte esta estrategia, la docente podrá sugerirla como respuesta al problema.

INTERACCIONES DEL ALUMNO CON EL MEDIO					
Acción del alumno	**Retroacción 1: triángulo producido utilizando la herramienta traslación**	**Efecto de la retroacción en el alumno**	**Retroacción 2: movimiento del triángulo punteado**	**Efecto de la retroacción en el alumno**	**Estrategia ganadora**
construir el vector en cualquier lugar de la pantalla y luego llevar la cola a un vértice del triángulo continuo y la cabeza sobre el vértice correspondiente del triángulo punteado	El triángulo construido por Cabri queda superpuesto al triángulo punteado.	Se refuerza la acción	El triángulo punteado se mueve y ya no está superpuesto al triángulo producido	Abandona la acción	Con la opción vector que ofrece el medio, hacer clic sobre un vértice del triángulo continuo para crear la cola y sobre el vértice correspondiente del triángulo punteado para crear la cabeza
Con la opción vector que ofrece el medio, hacer clic sobre un vértice del triángulo continuo para crear la cola y sobre el vértice correspondiente del triángulo punteado para crear la cabeza	Dibuja el vector de vértice a vértice correspondiente.	Se refuerza la acción.	El triángulo punteado se mueve y sigue quedando superpuesto	Refuerza la acción.	

Tabla 21. Resumen de proceso de Aprendizaje por Adaptación**.**

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA PUESTA EN COMÚN

En la puesta en común la docente podrá hacer un pequeño ejercicio con Cabri en donde se encuentre el triángulo continuo y un vector cualquiera, con esto la docente podrá preguntar: **¿Qué vamos a trasladar? ó ¿a quién vamos a trasladar?**, se espera que los estudiantes respondan que al triángulo continuo, aunque cabe la posibilidad de que algunos estudiantes respondan que el vector y otros que el triángulo punteado. Al comprender que vamos a trasladar el triángulo continuo, la docente preguntara: **¿Qué características debe cumplir esa traslación?,** se espera que los estudiantes reconozcan que se deberá trasladar el triángulo continuo con respecto al vector y que además esta traslación es representada por el triángulo punteado.

¿Qué pasa cuando movemos el punto sobre el círculo?

Con esta pregunta esperamos que noten que al mover el punto sobre el círculo el triángulo punteado cambia de posición (el vector que está oculto define la traslación por esto al mover el punto sobre el círculo se modifica la dirección sentido y magnitud del triángulo punteado sobre el triángulo continuo); de igual manera se espera que los estudiantes identifiquen que para que el vector represente la traslación aunque se mueva el punto sobre el círculo, deberán construirlo haciendo clic sobre un vértice del triángulo continuo para crear la cola y sobre el vértice correspondiente del triángulo punteado.

¿Qué pasa si trazamos los vectores a cada par de vértices correspondientes? ¿Cómo serán estos vectores?

Se espera que los estudiantes con la actividad ya hayan identificado que los vectores para que representen la traslación deben ubicarse a cada par de vértices, por lo tanto algunos estudiantes los construirán en Cabri y notaran con ayuda de la docente que al arrastrar el punto sobre el círculo los vectores siempre serán paralelos.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA SEGUNDA PARTE

TAREA: Debes construir un vector de manera que siempre represente la traslación del triángulo continuo (representada por el triángulo punteado), aunque se mueva el punto sobre el círculo.

Por alguna razón desconocida la docente no realizó la segunda parte de la actividad; por lo tanto no podemos hacer análisis *a posteriori* de la actividad ni de la puesta en común.

CONCLUSIONES DE LA TERCERA ACTIVIDAD

- Los estudiantes reconocieron que al arrastrar el vector del medio (una vez el vector dibujado haya obtenido las características del vector oculto) hasta cada par de vértices correspondientes la magnitud, la dirección y el sentido se mantiene.

- No se obtuvieron datos que indicarán que el estudiante pudo reconocer que las flechas que se dibujan entre cada par de vértices correspondientes de los dos triángulos son paralelas, tienen la misma dirección y el mismo sentido.

- Los estudiantes utilizaron la regla para validar que la magnitud del vector es la misma que hay entre dos vértices correspondientes.

4.4. ACTIVIDAD NÚMERO CUATRO

OBJETIVOS:

- Precisar las condiciones para construir la imagen de una figura por una traslación.

- Reconocer que las líneas que se dibujan entre cada punto de la figura original y su correspondiente imagen por la traslación son paralelas y la distancia entre puntos correspondientes debe ser la misma.

- Comprender que el vector cumple con las propiedades así se mueva para cualquier lugar de la pantalla.

Al igual que en la actividad anterior, esta actividad consta de dos partes:

- En la primera parte, el estudiante deberá modificar de manera aproximada las características de un triángulo punteado, ya dibujado, para que represente la traslación de un triángulo continuo por un vector dado. En esta parte de la actividad los estudiantes podrán lograr de manera perceptiva que el triángulo punteado sea imagen del continuo por la traslación representada por el vector.

- En la segunda parte, se requiere que el estudiante utilice las herramientas y los conocimientos aprendidos anteriormente, para que construya el triángulo que represente la traslación de un triángulo dado por un vector ya dibujado. Esta construcción deberá resistir el arrastre que se le haga al vector, por lo que debe realizarse de manera exacta.

PRIMERA PARTE DE LA ACTIVIDAD

La primera parte de esta actividad consta de ocho series con una tarea:

1. “en la figura, el vector representa un movimiento”. **Debes mover el triángulo punteado para mostrar la posición que ocupará el triángulo continuo si hace ese movimiento.**

DESCRIPCIÓN DE LA FIGURA

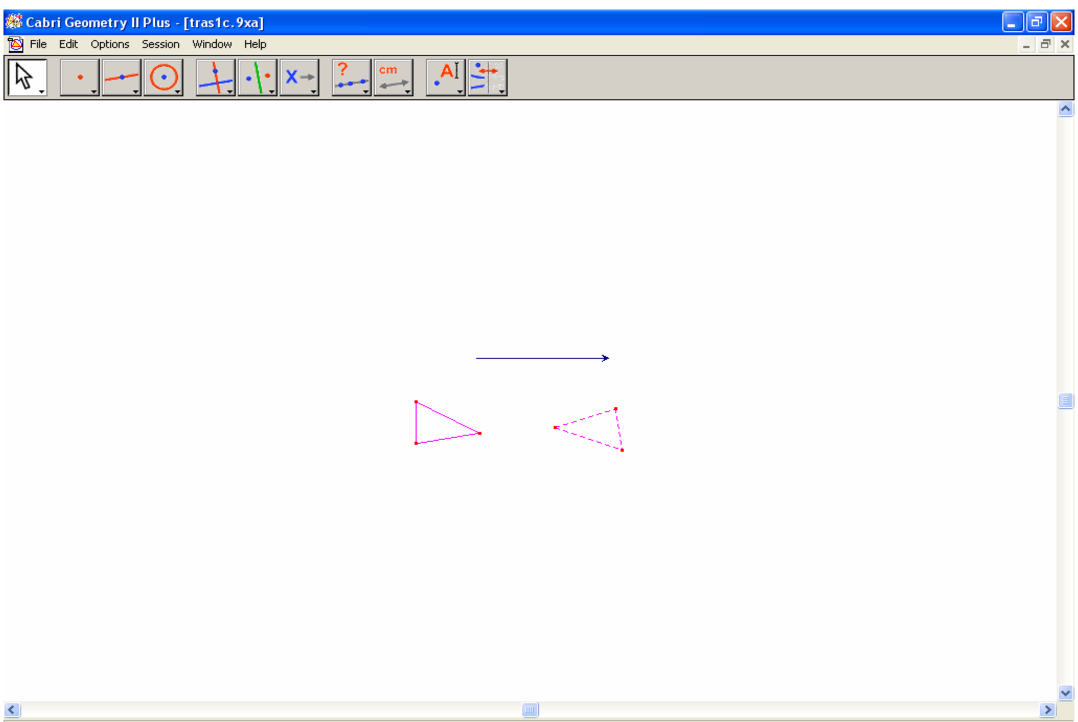


Figura 13. Serie 1. Cuarta actividad. Primera parte

Las figuras de la primera parte están constituidas por dos triángulos (uno continuo y uno punteado) y un vector que sólo es posible agarrar por la mitad para desplazarlo por toda la pantalla (como lo mencionamos anteriormente este arrastre mantiene invariantes las características del vector).

El triángulo punteado puede arrastrarse por dos de sus vértices; uno lo desplaza en línea recta y el otro lo gira(a diferencia de la actividad anterior en la que los vértices de los triángulos estaban ocultos). El triángulo continuo puede arrastrase cogiéndolo de sus lados y se deforma al cogerlo por sus vértices[21]. Cuando el triángulo punteado está aproximadamente sobre la imagen (oculta) del triángulo continuo por el vector, aparece en la pantalla un punto con el letrero ‘muy bien’.

.

CARACTERÍSTICAS DE LA TRASLACIÓN EN LAS DIFERENTES SERIES

SERIE	DIRECCIÓN	SENTIDO	MAGNITUD
1C	Horizontal (pendiente 0)	Hacia la derecha	3.31 cm
2C	Horizontal (pendiente 0)	Hacia la izquierda	3.31 cm
3C	Vertical (pendiente indefinida)	Hacia arriba	2 cm
4C	Vertical (pendiente indefinida)	Hacia abajo	2 cm
5C	Oblicuo derecha (pendiente positiva)	Hacia arriba	3.31 cm
6C	Oblicuo derecha (pendiente positiva)	Hacia abajo	3.31 cm
7C	Oblicuo izquierda (pendiente negativa)	Hacia abajo	3.31 cm
8C	Oblicuo izquierda (pendiente negativa)	Hacia arriba	3.31 cm

Tabla 22. Características de la traslación en cada serie

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA PRIMERA PARTE

PRIMERA TAREA: 'en la figura, el vector representa un movimiento'**. Debes mover el triángulo punteado para mostrar la posición que ocupará el triángulo continuo si hace ese movimiento.**

Para describir los movimientos se utilizarán las siguientes convenciones**:**

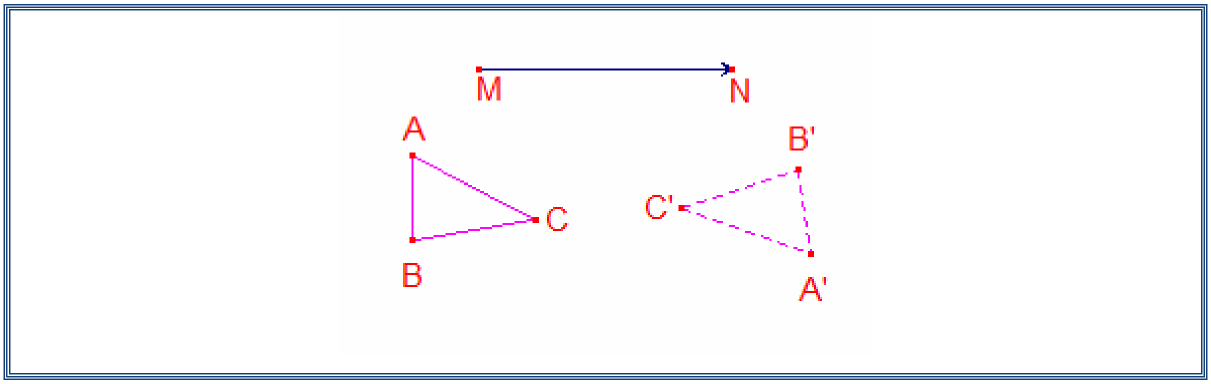


Figura 14. Convenciones

- Los puntos del triángulo punteado A', B' y C' son vértices correspondientes de A, B y C en el triángulo continuo.
- M es la cola del vector y N es la cabeza del vector.

Como en la primera parte de la actividad anterior los estudiantes ubicaron el vector entre dos vértices correspondientes, se espera que en esta actividad realicen acciones que les permitan ver el problema de manera similar.

En la primera serie es posible que los estudiantes traten de modificar el triángulo punteado, dejando el vector en el lugar en el que está. Es decir, cogerán el vértice B' para girar el triángulo punteado hasta que ABIIA'B', ACIIA'C' y BCIIB'C'. Luego cogerán el vértice A' y arrastrarán cuidadosamente el triángulo, hasta ponerlo en el sitio que "a ojo" representa la distancia, la dirección y el sentido del vector dibujado.

Al abrir la segunda serie de la actividad, los triángulos (grueso y punteado) están exactamente en la misma posición de la primera serie y el vector tendrá la misma dirección pero sentido contrario; algunos estudiantes cometerán la equivocación de ubicar el vector entre un par de vértices correspondientes de manera que la cola quede en el vértice del triángulo punteado y la cabeza en el vértice del triángulo continuo; al no aparecer el “muy bien” esperamos que comparen las dos series y noten la diferencia entre ellas. De manera que, utilizando la estrategia anterior, sólo deberán arrastrar el triángulo punteado hacia el lado izquierdo del triángulo continuo hasta que aparezca el “muy bien”

Prevemos que en las series en donde el vector es oblicuo, los estudiantes cambiarán la estrategia anterior por la dificultad que hay para representar “a ojo” una traslación con dirección oblicua en Cabri; entonces, cogerán el vector de la mitad y lo arrastrarán hasta que su cola quede en un vértice del triángulo continuo, por ejemplo C; Luego cogerán el vértice B’ que les permite girar el triángulo punteado para lograr que ABIIA’B’, ACIIA’C’ y BCIIB’C’; finalmente cogerán el vértice A’ para desplazar el triángulo punteado hasta que C’ quede sobre la cabeza del vector. En este momento le aparecerá en la pantalla el letrero “muy bien”.

Otra estrategia que podrían utilizar los estudiantes sería la siguiente: girar y desplazar el triángulo punteado hasta que quede superpuesto al triángulo continuo; luego coger el vector por la mitad y arrastrarlo hasta que M quede, por ejemplo, en A, y finalmente coger el vértice A’ hasta que este quede sobre N. con esta estrategia les aparecerá el letrero “muy bien”. De aquí en adelante se espera que el alumno siga utilizando esta estrategia de manera exitosa, observando más detalladamente las características del vector.

<table>
<tr><th colspan="4">INTERACCIONES DEL ALUMNO CON EL MEDIO</th></tr>
<tr><th>Acción del alumno</th><th>Retroacción del medio</th><th>Efecto de la retroacción en el alumno</th><th>Estrategia ganadora</th></tr>
<tr><td>1. Coger el vértice B’ y girar el triángulo punteado hasta que ABIIA’B’, ACIIA’C’ y BCIIB’C’. Luego coger el vértice A’ y arrastrar cuidadosamente el triángulo, hasta ponerlo en el sitio que “a ojo” representa la distancia, la dirección y el sentido del vector dibujado.</td><td>Aparece e letrero muy bien</td><td>Refuerza la estrategia</td><td rowspan="4">Coger el vector de la mitad y arrastrarlo hasta que M quede en un vértice del triángulo continuo, por ejemplo C; Luego cogerán el vértice B’ que les permite girar el triángulo punteado para lograr que ABIIA’B’, ACIIA’C’ y BCIIB’C’; finalmente cogerán el vértice A’ para desplazar el triángulo punteado hasta que C’ quede sobre la cabeza del vector.</td></tr>
<tr><td>2. desplazar y girar el triángulo hasta lograr sobreponerlo sobre el triángulo continuo. Luego arrastrar el vector por la mitad hasta que M quede sobre C’, por ejemplo; finalmente arrastrar el triángulo punteado por el vértice A’ hasta que C’ quede sobre N.</td><td>Aparece el letrero “muy bien”</td><td>Refuerza la estrategia</td></tr>
<tr><td>3. Coger el vector de la mitad y arrastrarlo hasta que M quede en un vértice del triángulo continuo, por ejemplo C; Luego cogerán el vértice B’ que les permite girar el triángulo punteado para lograr que ABIIA’B’,ACIIA’C’ y BCIIB’C’; finalmente cogerán el vértice A’ para desplazar el triángulo punteado hasta que C’ quede sobre N.</td><td>Aparece el letrero “muy bien”</td><td>Sigue con la estrategia</td></tr>
<tr><td>4. Coger el vector y poner su cabeza sobre un vértice del triángulo continuo, por ejemplo B; Luego cogerán el vértice B’ que les permite girar el triángulo punteado para lograr que ABIIA’B’, ACIIA’C’ y BCIIB’C’; finalmente cogerán el vértice A’ para desplazar el triángulo punteado hasta que B’ quede sobre la cola del vector.</td><td>No aparece el letrero “muy bien”</td><td>Abandona la acción</td></tr>
</table>

Tabla 23. Resumen de proceso de Aprendizaje por Adaptación.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA SECUENCIA

En la segunda serie el alumno podrá cometer la equivocación prevista en el análisis *a priori* de la actividad, pero se espera que recuerde que estas equivocaciones ya han sido cometidas en otras actividades y por lo tanto haga una comparación entre las series 1 y 2 para determinar la diferencia que hay entre ellas.

Por esto, al realizar la secuencia y hacer estas comparaciones el estudiante podrá hallar las diferentes direcciones que hay en ellas y reconocer que aunque hay series en donde los vectores tienen la misma dirección el sentido cambia en cada una de ellas.

Esperamos que al finalizar esta primera parte de la actividad el estudiante pueda expresar con facilidad las diferencias entre las series. Por ejemplo “en la primera serie los triángulos están horizontales y el punteado esta hacia la derecha del triángulo continuo” “en la serie 7 los triángulos quedan oblicuos y el triángulo punteado queda hacia la derecha abajo del triángulo continuo”

Esto reforzará más el hecho de que el estudiante pueda comprender fácilmente lo que significa dirección, sentido y magnitud del vector en una traslación.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA PUESTA EN COMÚN

En la puesta en común la docente deberá verificar que todos los estudiantes han adquirido conocimientos de dirección, sentido y magnitud de una traslación.

Por esto prevemos que tiene preguntas preparadas para explorar lo que sus estudiantes han construido a través de las series.

Por ejemplo podrá tener en cuenta preguntas como:

¿De qué manera se podía mover el triángulo punteado? Esperamos que los estudiantes hablen sobre los vértices del triángulo. Es decir, que digan que un vértice lo giraba y el otro lo desplazaba en línea recta. Esta pregunta será la introducción que permita a la docente empezar a explorar las estrategias de los estudiantes, y es claro que era importante que descubrieran la función de los vértices, del triángulo punteado en la figura.

¿Qué estrategia ganadora encontraron para realizar las tareas? ¿Cuántas estrategias ganadoras encontraron?

La docente podrá pasar algunos grupos adelante para que realicen algunas series en la calculadora (esta estará unida al proyector para que los demás estudiantes vean lo que hace). A medida que el estudiante realiza acciones, la docente podrá escribir en el tablero la estrategia utilizada. De esta manera se dará respuesta a la segunda pregunta pues los estudiantes dirán que para todas las series la estrategia ganadora es la misma.

Ahora el trabajo de la docente consiste en explorar en los estudiantes el conocimiento sobre la dirección, sentido y magnitud del vector en la traslación. Prevemos que utilizará las siguientes preguntas:

¿Cuales series se parecen y en qué se diferencian? Se espera que los estudiantes mencionen las parejas de series 1 y 2, 3 y 4, 5 y 6, 7 y 8. Y digan que en cada pareja la dirección de la flecha es la misma. Luego podrá darle a cuatro grupos que comparen una de las parejas de series y le digan cual es la diferencia entre ellas. En ese momento los estudiantes hablaran del sentido, dado por la cabeza del vector y posiblemente algunos nombraran la magnitud que tiene la flecha.

Esta puesta en común deberá recoger por parte de los estudiantes todos los conocimientos que alcanzaron con el desarrollo de las primeras tres actividades, y la primera parte de la cuarta, pues el fin de todas era precisar las características de una traslación.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA PRIMERA PARTE

Antes de dar la tarea a los estudiantes la docente se encargó de hacer que los estudiantes se dieran cuenta cómo se podían mover los triángulos, es decir, que lo que hicieron primero los estudiantes fue explorar el movimiento de los triángulos.

No tenemos datos sobre la solución de la primera serie, pero a continuación se verán apuntes de algunos estudiantes:

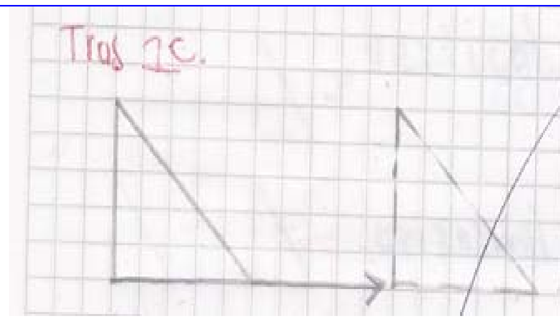
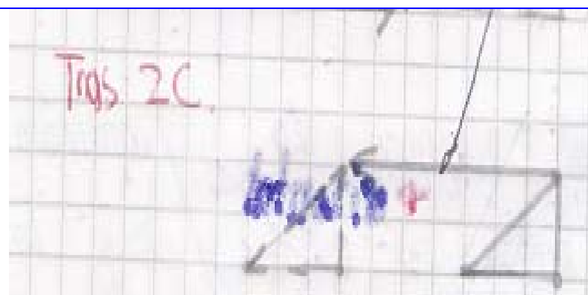
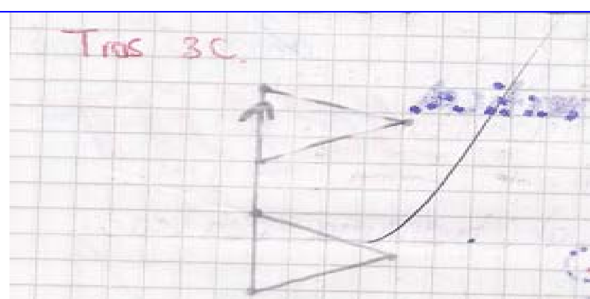
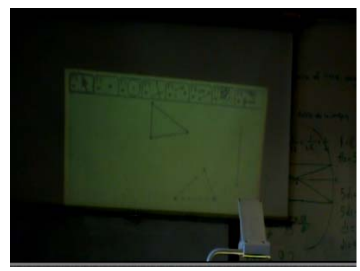
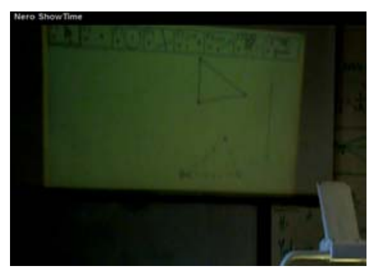
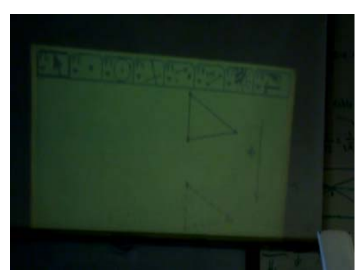
Serie 1	
Serie 2	
Serie 3	

Tabla 24. Extracto apuntes de estudiante.

Se observa que el alumno utilizó la estrategia ganadora prevista en el análisis *a priori*; es decir, ubicó el vector entre dos vértices correspondientes teniendo en cuenta que los lados del triángulo punteado quedaran paralelos a los lados correspondientes en el triángulo continuo.

Además, en la segunda serie reconoció que el sentido de la traslación era contrario al de la primera serie y realizó la tarea correctamente.

Se observa a continuación la estrategia utilizada por E para resolver la cuarta serie. Por decisión de la docente un estudiante trabajó con la calculadora conectada al proyector mientras los demás trabajaban en grupos.

E abre en la calculadora la serie 4 que tiene dirección vertical y sentido hacia abajo.	
E desplaza el triángulo continuo hasta que queda al lado de arriba del triángulo punteado.	
E coge el vértice que le permite girar el triángulo punteado y lo arrastra hasta que los lados correspondientes queden paralelos a los del triángulo continuo.	

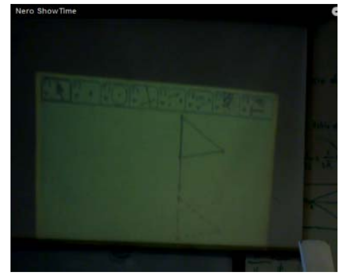
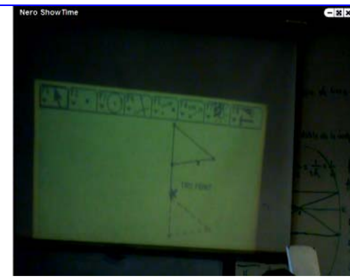
E coge el vector por la mitad y lo arrastra hasta que la cola queda en un vértice del triángulo continuo.	
E coge el vértice que le permite desplazar el triángulo y lo arrastra un poco hacia arriba, hasta que la cabeza del vector queda sobre el vértice correspondiente del triángulo continuo.	

Tabla 25. Extracto trabajo de estudiantes en el aula con Cabri.

Notamos que al principio el estudiante arrastró el triángulo continuo hasta ponerlo al lado de arriba del triángulo punteado. Esto permite observar que el alumno reconoce la dirección de la traslación. La estrategia utilizada fue la número 3 prevista en el análisis *a priori* de la actividad.

También hubo estudiantes que realizaron la cuarta serie (anterior) utilizando la estrategia número cuatro del cuadro de interacción del alumno con el medio (en el análisis *a priori).* Es decir, que no tuvo en cuenta el sentido del vector. Sorprende que ni siquiera se preocupó por obtener el "muy bien". Sin embargo la tercera serie la hizo correctamente y expresa, además, la dirección; aunque no tiene claro el sentido (escribió: "vertical con sentido de arriba a abajo"). A continuación se observa los apuntes del alumno:

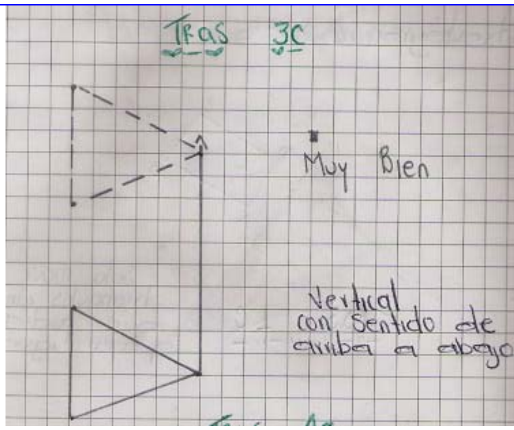
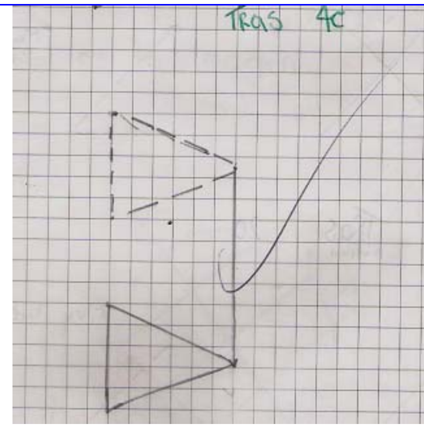
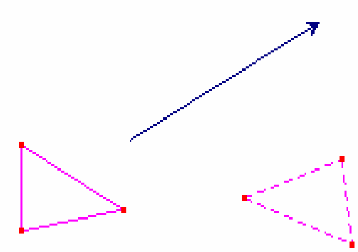
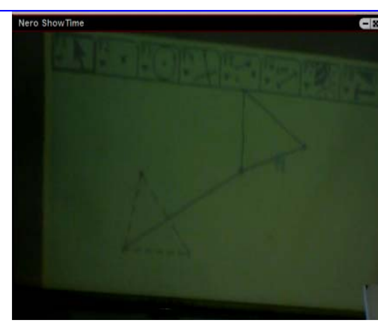
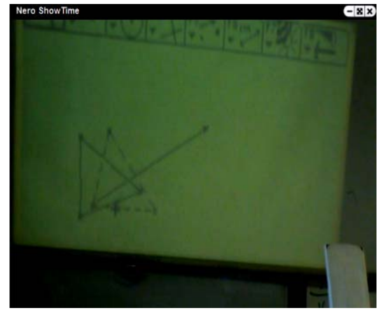
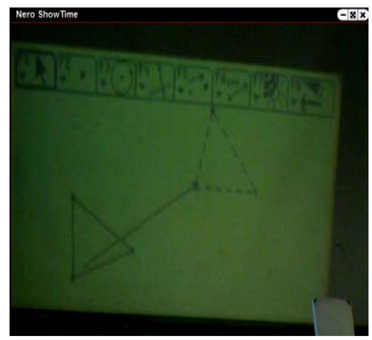
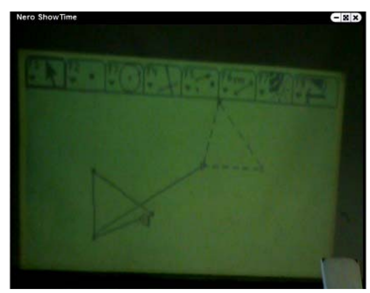
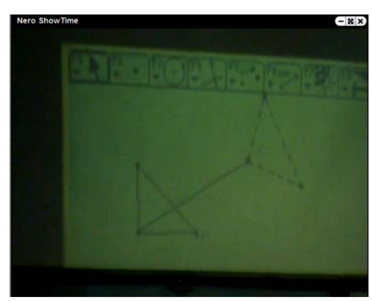
	

Tabla 26. Extracto apuntes de estudiante.

Pero lo más preocupante es que la docente le acepto el dibujo. Quizá producto de los afanes.

En la quinta serie, en donde el vector tiene dirección oblicua (pendiente positiva) y sentido hacia arriba, el niño que está manejando la calculadora, empieza a realizar la estrategia anterior, pero hay un momento en el que se confunde como veremos a continuación:

(E abre la quinta serie. No tenemos datos sobre las primeras acciones que realizó, pero en la siguiente figura se observa que modificó un poco los triángulos y además llevó el triángulo continuo hacia arriba y el punteado lo movió hacia la izquierda)	
(E arrastra el vector por el medio hasta que su cabeza queda sobre un vértice del triángulo continuo, y luego ubica el vértice correspondiente del triángulo punteado en la cola del vector)	

P : Cuál es la estrategia siempre, E3. ¿Cuál es la estrategia de trabajo? **E3:** Llevar el… **P:** Ah, pero ahí tenemos un problema con ese. ¿El punteado dónde debe estar? **P:** Abajo. O sea el punteado arriba. (E coge el triángulo continuo y lo arrastra hacia abajo)	
P: ¿Cuál es el que estamos moviendo de un lado para otro? El punteado ¿cierto?... eso que está haciendo E3 no es válido.	
(E3 coge el vértice que desplaza el triángulo punteado y lo lleva hasta la cabeza del vector) (arrastra el triángulo continuo y ubica el vértice correspondiente a punteado en la cola del vector)	
(E arrastra un vértice del triángulo continuo hacia abajo, pero se da cuenta de que se deforman los dos)	

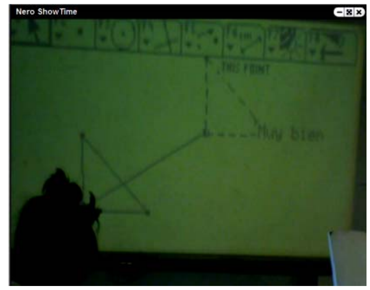
(E le pasa la calculadora a E18 y ella coge el vértice del triángulo punteado que lo gira y logra obtener el muy bien)	

Tabla 27. Extracto trabajo de estudiantes en el aula con Cabri.

Podemos observar que el estudiante en su afán de utilizar la estrategia número tres termina utilizando la estrategia número cuatro al no tener en cuenta el sentido del vector dibujado.

En las primeras líneas observamos cómo la docente interviene para “ayudar” de cierta manera al estudiante a caer en cuenta de su error, en vez de haberlo dejado realizar su estrategia sin obtener resultados positivos; además, con la ayuda de sus compañeros (ya que se estaba haciendo al frente de todos) muy posiblemente hubiese encontrado el por qué de no obtener el “muy bien”.

Esto impide el aprendizaje que el estudiante obtiene al cometer errores en el medio, que lo obliguen a realizar comparaciones de manera individual y sin la intervención de la docente; de hecho esta es la parte fundamental de un aprendizaje por adaptación. Además, cuando la docente interviene con ese tipo de comentarios no podemos sacar conclusiones de lo que el alumno comprende o no de la estrategia que está utilizando para la solución de la tarea.

En la parte final de la estrategia el estudiante quedó bloqueado al no utilizar el vértice que permite girar el triángulo punteado, pero su compañera terminó de solucionar el ejercicio de manera adecuada. Aquí sí podemos decir que hay estudiantes que tienen claro que los lados correspondientes de los triángulos deben ser paralelos.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA SECUENCIA

El siguiente análisis *a posteriori* lo haremos con base en algunas intervenciones de la docente, puesto que se hicieron preguntas que necesitaban de la comparación prevista en el análisis *a priori* de la secuencia.

A continuación veremos algunos apartes de las conversaciones que la docente tenia con el grupo a medida que avanzaban las series:

P: *¿Ahora el punteado hacia donde quedó?… (Refiriéndose a la serie 2) a ver ¿en el 1c hacia donde había quedado el punteado?, ¿hacia la qué?*

E3: *La derecha.*

P: *Hacia la derecha, ¿en forma qué?*

E4: *Horizontal.*

P: *Horizontal a la derecha, ahora el 2c ¿hacia dónde queda?*

E4: *Horizontal a la izquierda.*

P: *Horizontal a la izquierda, muy bien, los dibujos deben quedar muy bien, ahora pasamos al 3c.*

P: *¿Dónde hizo el movimiento ahora?...E3 hace la señal de que va hacia arriba con la mano, después de esto la docente pregunta: ¿luego el movimiento que es?*

E3: *Vertical.*

P: *Vertical muy bien, E3, vertical hacia arriba…miremos 4c a ver.*

Podemos observar que los estudiantes expresan con bastante facilidad la dirección horizontal, y aunque la docente ayuda un poco con las preguntas, pueden expresar que mientras en la primera serie el sentido es hacia la derecha, en la segunda serie esta hacia la izquierda.

Más adelante hablan de dirección vertical, pero la docente les terminó diciendo cuál era el sentido de esa traslación.

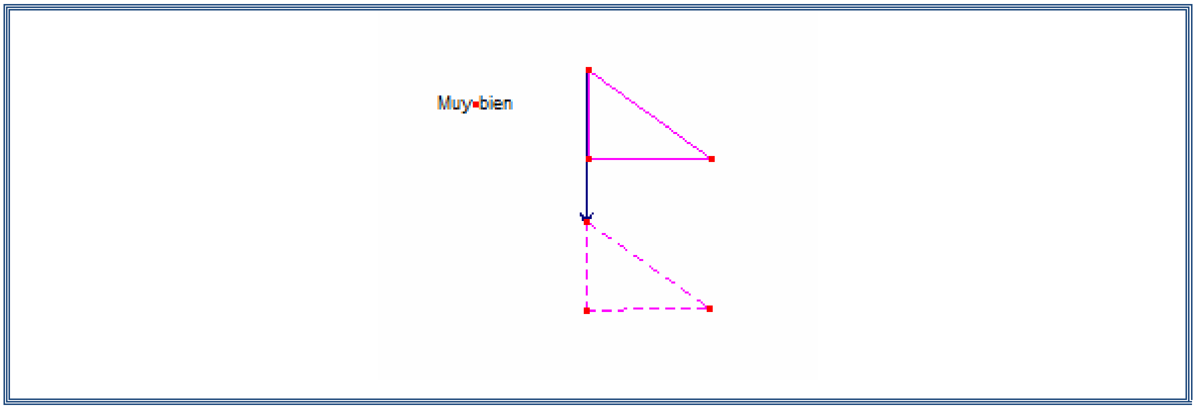


Figura 15. Serie 4

P: *¿Qué característica tienen los dos triángulos, como son los dos triángulos?...*

E19: *Igual forma.*

P: *Igual forma, ¿que más tienen igual?, ¿cuál es la diferencia con la simetría?*

E6: *¿Qué está mirando al mismo lado que está mirando el otro?*

P: *Muy bien, mientras que en la simetría ¿qué pasaba?*

E6: *Se veía al contrario.*

P: *Muy bien.*

De la anterior conversación, podría decirse que los estudiantes reconocen que la característica que tienen los dos triángulos es diferente a la que tendrían si fueran simétricos, puesto que afirman que los triángulos en la simetría "se veían al contrario" a como se ven acá, además reconocen que los triángulos están de igual forma, es decir, que los lados correspondientes son paralelos.

Al terminar cada actividad la docente les pide a los estudiantes que en su cuaderno dibujen la figura y que además concluyan las diferentes posiciones en que se encuentra ubicado el vector.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA PUESTA EN COMÚN

Como lo mencionamos anteriormente, la docente intervino en el transcurso de la clase para dar solución a algunas de las preguntas previstas en el análisis *a posteriori* y que se observaron anteriormente. La única pregunta que teníamos prevista en el análisis *a priori* de la puesta en común y que aun no se había mostrado es la siguiente:

P: *Vamos a mover los dos triángulos a ver cuál de los dos se puede mover.*

E19: *Por un punto se traslada.*

P: *¿Y por el otro?*

E19: *Se gira.*

E19: *"una es para subir y bajarlo o hacia la izquierda y a la derecha llevarlo y el otro es para rotarlo en forma circular"*

Esta pregunta fue realizada al comenzar la actividad; suponemos que la docente la hizo con el fin de avanzar en el desarrollo de la actividad y no darles mucho tiempo para esta exploración. De hecho, como se pudo observar, la actividad fue apresurada y no se les dio a los estudiantes el tiempo necesario para interactuar con el medio.

Sin embargo, se puede ver que los estudiantes lograron hallar con facilidad la función que tenía cada vértice del triángulo punteado.

SEGUNDA PARTE DE LA CUARTA ACTIVIDAD

La segunda parte de esta actividad consta de una figura con una tarea:

TAREA: Construir el triángulo que represente el movimiento del triángulo continuo por el vector dado y que resista el arrastre del vector.

DESCRIPCIÓN DE LA FIGURA

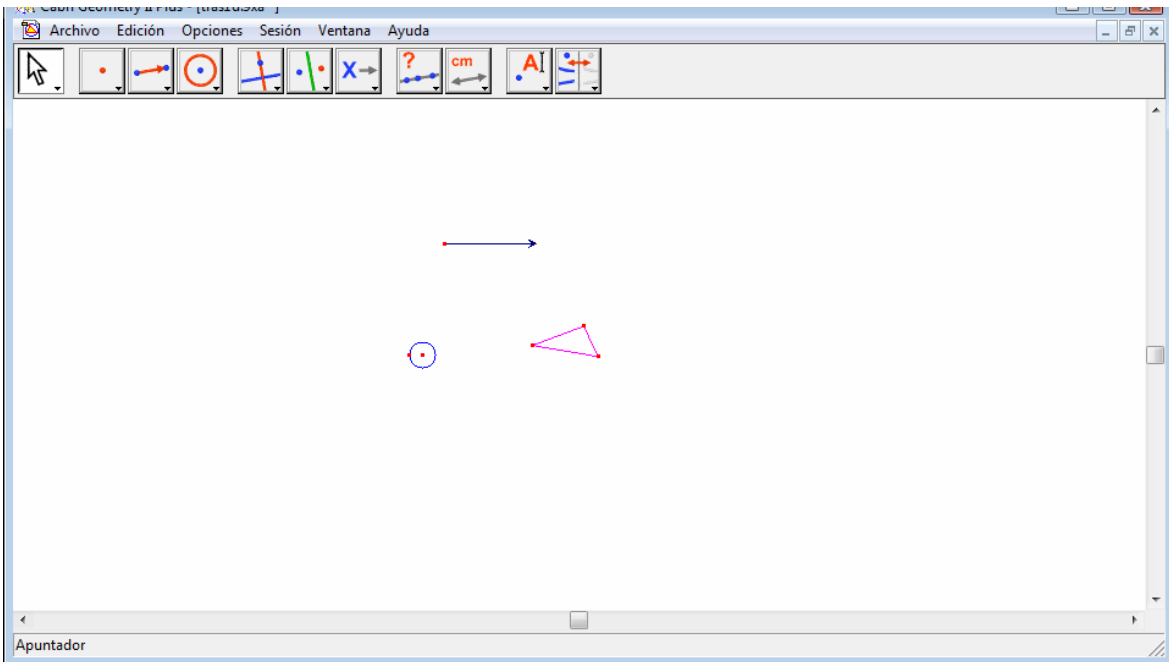


Figura 16. Cuarta actividad. Segunda parte

Esta figura tiene un triángulo continuo, un vector y un círculo con un punto. Al mover el punto sobre el círculo se modifica el vector.

Esta segunda parte supone un problema nuevo para los estudiantes, que requiere una puesta en escena de parte de la docente, para que los estudiantes entiendan el problema y la validación del mismo. Por lo tanto, en el análisis *a priori* incluiremos la puesta en escena por parte de la docente.

PUESTA EN ESCENA DEL PROBLEMA

Una vez hayan terminado la puesta en común de la primera parte de la actividad, la docente muestra la figura 16. Le pide a un alumno que construya un triángulo que sea la traslación del continuo con respecto al vector, y verifica utilizando la herramienta 'traslación'. Si el triángulo construido no coincide con esta imagen, permite que el alumno lo ajuste hasta que coincidan exactamente. Luego mueve el punto sobre el círculo, de manera que el vector cambie, y muestra que el triángulo construido ya no coincide con la imagen del triángulo dado. Entonces borra el triángulo construido por el alumno, y la imagen de verificación, y explica que se trata de hacer una construcción que **siempre** coincida con la imagen, incluso cuando se mueve el punto sobre el círculo.

En este momento la docente les devuelve el problema para que ellos busquen su solución. Cada vez que los estudiantes crean haber encontrado una estrategia ganadora para la construcción del triángulo, la docente la valida o invalida con la herramienta traslación; en nuestro análisis *a priori* esta será la retracción 1 que el medio le proporciona al alumno. Si el triángulo construido por el medio queda superpuesto al construido por los estudiantes, la docente les pedirá que muevan el punto sobre la pantalla para determinar si los dos triángulos siguen superpuestos; esta será la retroacción 2 en nuestro análisis *a priori*. Cuando las dos retroacciones del medio refuercen las acciones de los estudiantes, habrán logrado encontrar la estrategia ganadora para la solución del problema.

En esta actividad los estudiantes deben pasar de una problemática de colocar el triángulo 'aproximadamente' a colocarlo de manera exacta, y que se mantenga la precisión al modificar el vector; de manera que los estudiantes después de haber propuesto varias soluciones erróneas (previstas a continuación en el análisis *a priori*), llegarán a hablar de paralelismo en sus propios términos, lo que constituye una propiedad necesaria a la hora de hacer una traslación; A continuación, la docente les pedirá que usen la herramienta 'recta paralela' para obtener el dibujo que ellos esperan.

Ahora el problema para los estudiantes consiste en encontrar un punto P sobre la recta que pasa por el vértice A de manera que la magnitud del segmento AP sea igual a la magnitud del vector (Figura 17). Lo mismo para las otras dos líneas que pasan por los vértices B y C del triángulo.

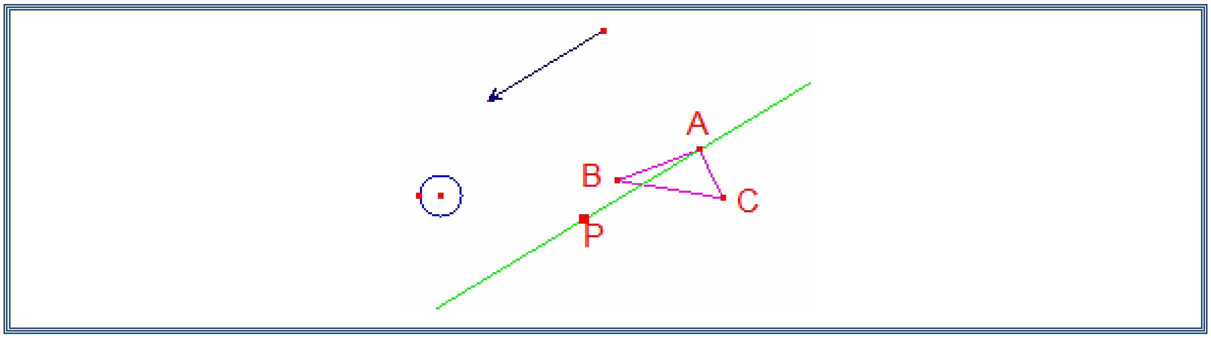


Figura 17. Representación gráfica.

En este momento los estudiantes empezarán a buscar nuevas estrategias para lograr su solución; pero estas serán invalidadas nuevamente al mover el punto sobre el círculo, de manera que cuando la docente considere que los estudiantes han identificado claramente la necesidad de lograr la equidistancia, les mostrará cómo usar la herramienta compás, y explicará por qué el círculo asegura la equidistancia (un círculo está formado por todos los puntos que están a igual distancia del centro, por lo tanto los dos puntos que están sobre la recta y el círculo están a igual distancia del centro, es decir, del eje).

El profesor también podrá explicarles a los estudiantes cómo obtener el paralelismo utilizando regla y escuadra, y cómo utilizar el compás para obtener la equidistancia.

Esta serie será la que le permita a los estudiantes encontrar las características correctas para hacer la traslación, no solo de un triángulo sino de cualquier figura.

ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA SEGUNDA PARTE

TAREA: Construir el triángulo que represente el movimiento del triángulo continuo por el vector dado y que resista el arrastre del vector.

Con esta actividad se pretende que los estudiantes logren establecer de manera exacta las características de una traslación.

Al finalizar podrán estar en la capacidad de dar una definición de lo que para ellos es la traslación, teniendo en cuenta los conocimientos adquiridos durante el desarrollo de las actividades.

Para realizar nuestro análisis utilizaremos las siguientes convenciones

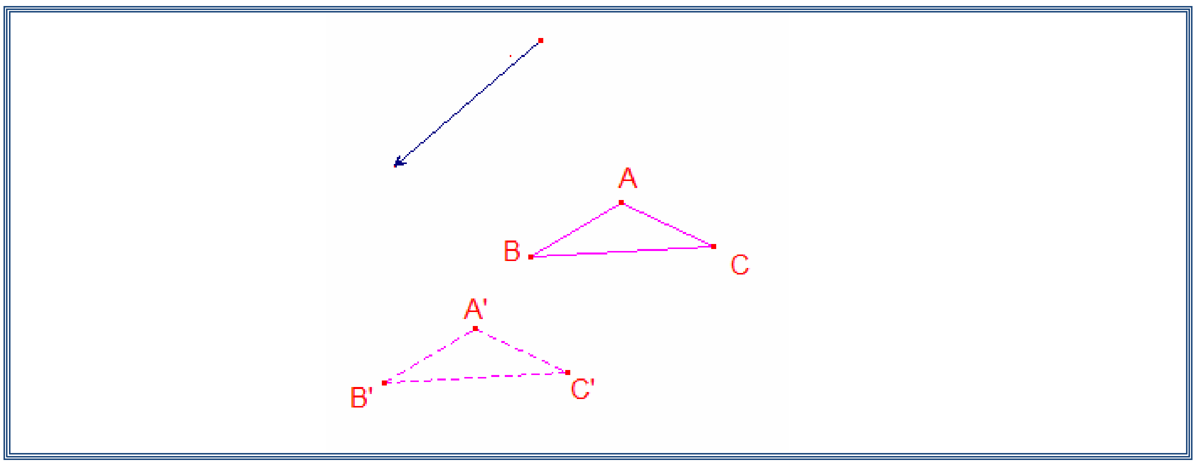


Figura 18. Convenciones.

Se espera que la primera estrategia que utilicen los estudiantes sea completamente perceptiva o "a ojo; es decir: arrastrarán el vector del medio hasta que su cola quede sobre el vértice A, con el fin de tener una "base" a partir de la cual harán su construcción. Luego, pondrán un punto A' sobre la cabeza del vector para utilizarlo como vértice al construir el triángulo. Después, tratarán de arrastrar nuevamente el vector hasta B con el fin de ubicar el vértice B'; al hacer esto notarán que el punto A' se va con el vector (esto sucede porque cuando el estudiante pone un punto sobre la cabeza del vector, Cabri lo toma como un punto del mismo y lo mueve con él). En este momento el estudiante cambiará su acción.

Sin dejar a un lado la estrategia anterior, suponemos que los estudiantes podrán dibujar tres puntos (A', B' y C') en cualquier lugar de la pantalla, con el fin de ubicarlos en la cabeza del vector cada vez que la cola de este quede sobre uno de los vértices A, B y C. Finalmente dibujarán el triángulo A'B'C' con la herramienta 'triángulo' de Cabri. La primera retroacción del medio dejará que el alumno valide su estrategia, pues los triángulos quedarán superpuestos. Pero al mover el punto sobre el círculo (retroacción 2) el triángulo de la traslación se modifica y la estrategia queda invalidada.

Otra estrategia que prevemos que los estudiantes podrán utilizar es construir segmentos a partir de los vértices A, B y C (puntos iniciales) de tal manera que "a ojo" tengan las mismas características del vector (que sean paralelos entre sí); luego construirán un triángulo con la herramienta "triángulo" cuyos vértices A', B' y C' sean los puntos finales de cada segmento. Los estudiantes deberán tener en cuenta que la magnitud del vector debe ser la misma para cada segmento, por eso tomarán las medidas de los segmentos para luego aproximarlas a la medida del vector (|AA'|=|BB'|=|CC'|= magnitud del vector). Con la retroacción 1 el estudiante pensará que la estrategia utilizada está bien, pero al mover el punto sobre el círculo (retroacción 2) nuevamente quedara invalidada puesto que el triángulo construido por Cabri se mueve y el triángulo creado por los estudiantes se quedara quieto.

En las estrategias anteriores se espera que los estudiantes observen la necesidad de que los segmentos sean paralelos; por lo tanto, en esta estrategia la docente les dirá cómo utilizar la herramienta "recta paralela" de Cabri; por lo tanto, los estudiantes trazarán líneas que pasen por cada uno de los vértices del triángulo y que sean paralelas al vector dado. Luego pondrán puntos, P, F y O, sobre las rectas dibujadas, hacia el lado que indica el sentido del vector, y que "a ojo" la distancia entre cada punto y su respectivo vértice sea igual a la del vector. Pensamos que por obvias razones esta distancia no les va a quedar exacta, por lo que deberán mover los puntos sobre las rectas hasta que coincida con la del vector; con la herramienta "traslación" podrán construir el Δ PFO.

Esta estrategia nuevamente será invalidada al mover el punto sobre el círculo, pero se darán cuenta de que están mucho más cerca de lograr la solución del problema. Al modificar la dirección y el sentido del vector, el triángulo trasladado por Cabri y el construido por los estudiantes se mueven representando la traslación del triángulo dado; pero al cambiar la magnitud del vector, el triángulo trasladado por Cabri cambia de magnitud mientras que el triángulo construido por los estudiantes siempre mantiene la misma distancia (la del vector dado en un primer momento).

Después del camino recorrido, y teniendo siempre presente la necesidad de que los vértices correspondientes del triángulo dado y el triángulo construido tengan la magnitud del vector, la docente les mostrará cómo utilizar la herramienta compás que garantiza la distancia del vector entre puntos correspondientes, y que además, asegura que cada vez que esta distancia se modifique también se modificarán las otras. Y esto era lo que le faltaba a la estrategia anterior.

Finalmente, se espera que la estrategia utilizada por los estudiantes sea la siguiente: construir rectas paralelas al vector (con la herramienta "recta paralela") y que pasen por cada uno de los vértices A, B y C. luego construirán circunferencias (con la herramienta "compás") que tengan la distancia del vector y que pasen por cada uno de los vértices mencionados anteriormente. Después, construirán un triángulo cuyos vértices sean los puntos de intersección entre cada circunferencia y la recta que pasa por el centro de ella (por cada uno de los vértices).

En la siguiente tabla:

- La retroacción 1 es el triángulo producido utilizando la herramienta traslación.
- La retroacción 2 es el movimiento del punto sobre el círculo (que modifica el vector oculto y por lo tanto el triángulo dado y su respectiva traslación se mueven).

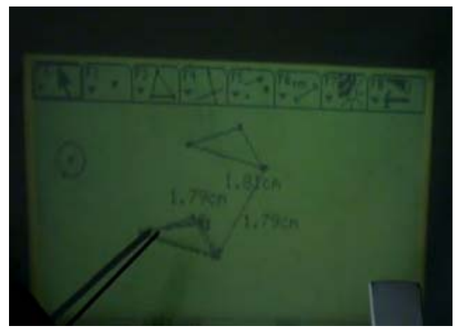
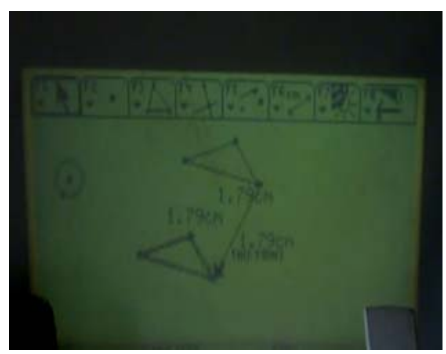
INTERACCIONES DEL ALUMNO CON EL MEDIO					
ACCIÓN DEL ALUMNO	**RETROACCIÓN 1:**	**EFECTO DE LA RETROACCIÓN 1 EN EL ESTUDIANTE**	**RETROACCIÓN 2:**	**EFECTO DE LA RETROACCIÓN 2 EN EL ESTUDIANTE**	**ESTRATEGIA GANADORA**
1. Coge el vector por la mitad para llevar su cola hasta un vértice del triángulo. Dibuja tres puntos en cualquier lugar de la pantalla. Coge un punto y lo lleva hasta la cabeza del vector; luego arrastra el vector hasta otro vértice del triángulo dado, coge otro punto y lo lleva hasta la cabeza del vector y finalmente realiza el mismo procedimiento con el último vértice. Con la herramienta triángulo une los tres puntos obtenidos.	El triángulo queda superpuesto en el triángulo dibujado por el estudiante	Refuerza la acción	El triángulo construido en la retroacción 1 se mueve y ya no está superpuesto al triángulo construido por el estudiante	Abandona la acción	La estrategia ganadora es la número cuatro
2. Construir segmentos a ojo desde cada vértice del triángulo (puntos iníciales) que cumplan la orientación y magnitud del vector. Luego construyen el triángulo cuyos vértices son los puntos finales de los segmentos.	El triángulo queda superpuesto en el triángulo dibujado por el estudiante	Refuerza la acción	El triángulo construido en la retroacción 1 se mueve y ya no está superpuesto al triángulo construido por el estudiante	abandona la acción	
3. Construir líneas paralelas al vector y que pasen por los vértices del triángulo dado. Luego ubicar a ojo puntos sobre la recta que conserven la distancia del vector dibujado y finalmente construir el triángulo por los puntos dibujados.	El triángulo queda superpuesto en el triángulo dibujado por el estudiante	Refuerza la acción	El triángulo construido en la retroacción 1 se mueve y ya no está superpuesto al triángulo construido por el estudiante	abandona la acción	
4. Construir líneas paralelas al vector y que pasen por los vértices del triángulo dado. Luego con la opción compas toman la magnitud del vector y la llevan hasta cada vértice del triángulo dado. Después construyen el triángulo tomando como vértices los puntos de intersección entre las circunferencias y las rectas paralelas.	El triángulo queda superpuesto en el triángulo dibujado por el estudiante	Refuerza la acción	El triángulo construido en la retroacción 1 se mueve y sigue superpuesto sobre el triángulo construido por los estudiantes	Refuerza la acción	

Tabla 28. Resumen de proceso de Aprendizaje por Adaptación.

ANÁLISIS *A POSTERIORI* DE LA SEGUNDA PARTE

TAREA: Construir el triángulo que represente el movimiento del triángulo continuo por el vector dado y que resista el arrastre del vector.

A continuación se muestran evidencias recogidas durante la actividad

E lleva el vector hasta que la cola quede en un vértice del triángulo continuo. Luego hace un triángulo aproximado con la herramienta 'triángulo' de Cabri, ubicando un vértice sobre la cabeza del vector. Mide la distancia entre vértices correspondientes. Construye el triángulo trasladado con la herramienta "traslación" de Cabri (retroacción 1 del medio). Acomoda el triángulo que él construyó sobre la traslación de Cabri)	
P: Bueno listo; ya logramos que coincida, muy bien…. Si estamos bien, no importa que movamos los vértices.	

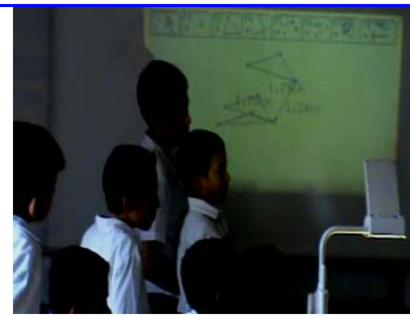
P:	Ahora, si movemos el vector, ¿Qué pasa con el triángulo[22]? (hay alguien arrastrando el punto sobre el círculo; por lo tanto el vector se mueve y la traslación hecha por Cabri)	
E1:	Se mueve con el triángulo.	
P:	¿Y con quién se mueve?	
E:	Con el triángulo.	
P:	¿Con cuál triángulo?	
E3:	Con el de la calculadora.	
P:	O sea que el que nosotros hicimos ¿qué	
E4:	pasó?	
E5:	Quedó mal.	
	Se quedó ahí.	
P:	Entonces debemos buscar una estrategia mejor que esa, para hacer la traslación; porque se supone que si yo muevo parece que un punto si se mueve con el triángulo (les muestra en el tablero lo que está sucediendo cuando el niño mueve el vector) pero se tienen que mover todos los otros puntos.	

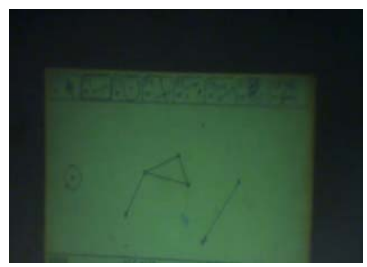
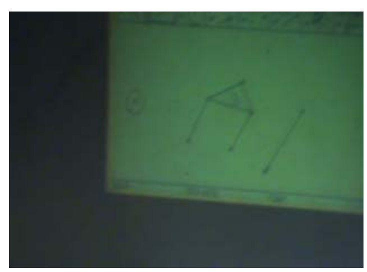
Tabla 29. Extracto trabajo de estudiantes en el aula con Cabri.

Podemos observar que los estudiantes han adquirido conocimientos sobre las características que debe tener un triángulo para ser traslación de otro.

En el momento en que deciden poner la cola del vector sobre un vértice del triángulo dado y un punto sobre la cabeza del vector, tienen claridad sobre vértices correspondientes. Cuando hacen el triángulo a ojo, se observa que los estudiantes tienen en cuenta la distancia que debe haber entre cada par de vértices correspondientes y además que los lados del triángulo queden paralelos a los del triángulo dado, es decir, la dirección y el sentido de la traslación.

Cuando deciden medir la distancia entre vértices correspondientes buscan la exactitud de la traslación que les pide la docente. Al mover el punto sobre el círculo la estrategia que parecía estar correcta quedó invalidada; nos sorprendió que los estudiantes lograron entender que en realidad al triángulo construido por ellos, les hacía falta cumplir con ciertas propiedades importantes para concluir la solución correcta.[23]

Luego la docente abre nuevamente la figura inicial y pone como condición no mover el vector; a continuación se mostrará la conversación con los estudiantes.

P:	Recuerden que no pueden mover nada (E4 abre la opción “segmento” de Cabri y construye un segmento a partir de un vértice del triángulo).	
	Miren lo que se le ocurrió a E4… se fue a f-2 y buscó segmento. Y entonces por cada punto, está pasando un segmento. (E4 está trazando los segmentos)	
	(E4 termina de construir los segmentos)	

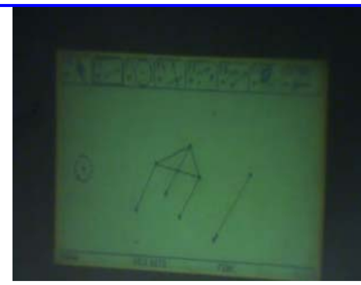
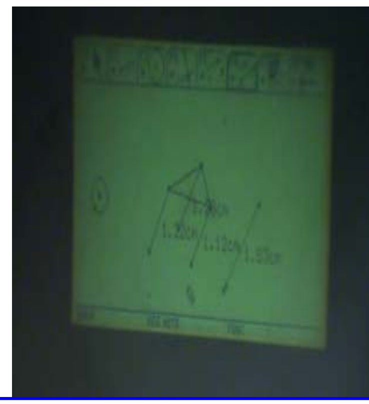
P:	Voy a preguntar varias cosas ¿será suficiente con eso?	
E8:	No, porque primero tiene que averiguar la medida del vector. Vaya a la opción “distancia”. (E4 mide la magnitud de los segmentos y del vector)	
P:	¿Cuánto mide el vector?	
E8:	1.83	
P:	1.83, y los otros ¿cuánto miden?	
E:	Diferentes	
P:	¿Entonces qué hacemos?	
E5:	Toca moverlos hasta que den 1.83.	

Tabla 30. Extracto trabajo de estudiantes en el aula con Cabri.

Los estudiantes finalmente hacen coincidir las medidas. En este momento la docente pasa una niña al tablero a dar su opinión sobre la estrategia.

La estrategia utilizada por E4 estaba prevista en el análisis *a priori* y se puede ver claramente que en el momento de la construcción de segmentos trata de que estos sean paralelos al vector; además, cuando dicen “No porque primero tiene que averiguar la medida del vector”, los estudiantes tienen presente que la magnitud de los segmentos debe ser la misma a la del vector y no es suficiente con hacer segmentos paralelos al mismo.

Antes de que E4 construyera el triángulo con la opción “triángulo” de la calculadora, la estrategia es invalidada por una de sus compañeras de la siguiente manera:

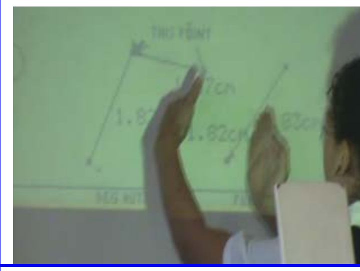
E16:	[Está mal]…Porque el ángulo del vector no concuerda con las líneas que él está haciendo. Si el vector esta así (muestra con su mano derecha la posición del vector) las líneas que él está haciendo están así (muestra con su mano izquierda la posición del segmento que hizo el niño), diferentes.	
P:	Vaya y explíqueles lo que está diciendo allá en el tablero	
E16:	Que las líneas deberían ir perpendiculares (E16 señala correctamente las líneas paralelas, pero se confunde al nombrarlas)	
P:	¿Serán perpendiculares o qué?	
E16:	Paralelas	
P:	Es decir que la estrategia de los segmentos estaría bien siempre y cuando tengan...	
E16:	El mismo ángulo	
E:	La misma dirección	
P:	El mismo ángulo o la misma dirección. Muy bien…	

Tabla 31. Extracto trabajo de estudiantes en el aula con Cabri.

Es interesante poder ver cómo han logrado avanzar de manera exitosa algunos estudiantes. El extracto anterior nos muestra cómo la estudiante de manera natural expresa que los segmentos deben ser paralelos al vector. No fue necesario que el alumno terminara la estrategia pues la misma estudiante se la invalidó al mostrar con sus gestos que los segmentos realizados a "ojo" no tenían la misma dirección del vector.

En este momento empieza la búsqueda de una estrategia que logre darle solución al problema que la docente planteó: "Construir el triángulo que represente el movimiento del triángulo continuo por el vector dado y que resista el arrastre del vector".

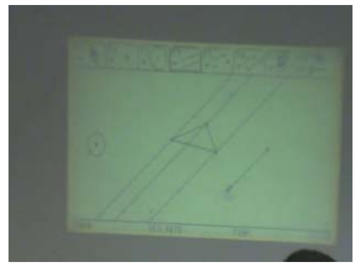
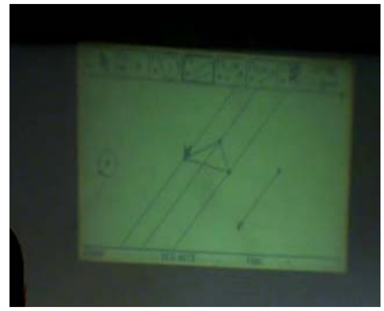
<table>
<tr><td>P: Entonces ¿cómo hacemos para que nos queden paralelas?
E8: En la opción "recta paralela". Ahí lo puede hacer.
E selecciona la opción recta paralela y se acerca a un vértice del triángulo
P: Debe ser una paralela que pase por ese punto
E: y que sea paralela ¿a quién?
Al vector (E construye las tres líneas paralelas)</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 32. Extracto trabajo de estudiantes en el aula con Cabri.

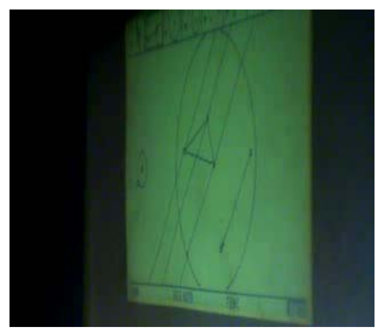
No tenemos datos del momento en que la docente permite que los estudiantes construyan las circunferencias y los puntos de intersección; pero sabemos que en el transcurso de la actividad los estudiantes habían insistido en la necesidad de que la distancia entre puntos correspondientes fuera la misma que la magnitud del vector.

A continuación observamos el repaso que hizo la docente sobre la estrategia ganadora que lograron construir los estudiantes:

<table>
<tr>
<td>
P: Primera parte de la estrategia
E7: Trazar las líneas paralelas
P: Paralelas ¿a quién?
E7: Al vector
P: ¿y que pasen por dónde?
E1: Por los puntos todos del triángulo
P: ¿Por qué? ¿Qué garantiza eso?
E7: La dirección
P: La dirección, que tenga la misma dirección; entonces, ¿cuál es una de las primeras cosas que debo tener en cuenta para poder hacer traslaciones?
E: La misma dirección
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>
P: (Hay un niño dando click en la herramienta “compás”) segunda parte de la estrategia ¿cómo garantizamos la distancia?, ¿cómo construimos la distancia?
E1: Con el compás[24](E hace una circunferencia con la herramienta “compás”)
P: Ahora cual punto de intersección tomamos: el de arriba o el de abajo
E: El de abajo
P: E22, ¿por qué nosotros no colocamos la intersección arriba y la vamos a colocar abajo?
E22: Porque la flecha esta hacia abajo (haciendo el movimiento con su mano derecha)
</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

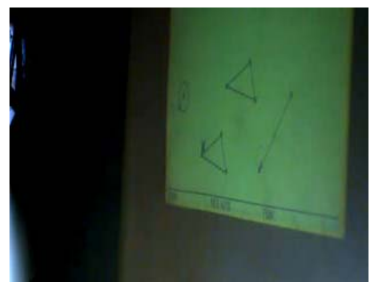
P: Porque la flecha esta hacia abajo. Qué me indica eso de la traslación. Se llama sentido ¿Cómo se llama? **T:** Sentido (E pone el punto de intersección entre el círculo y la recta; luego los oculta para que sólo quede el punto; después hace el mismo procedimiento para hallar los dos puntos que faltan)	
E5: Listo…herramienta “triángulo” **E12:** profe después construimos el triángulo (E construye el triángulo que pasa por los tres puntos) **E5:** Listo profe... **T:** ¡Eeeeeeeee!	

Tabla 33. Repaso de la estrategia.

Sorprende que la docente no haya arrastrado para validar esta construcción. Era importante que los estudiantes validarán nuevamente la estrategia con las dos retroacciones del medio, para que constataran que definitivamente es necesario utilizar rectas paralelas y circunferencias (con centro en cada vértice y radio igual a la magnitud del vector) para garantizar la dirección y la magnitud de la traslación; el sentido logran establecerlo cuando hallan los puntos de intersección, entre cada circunferencia y la recta paralela que pasa por el centro de ellas, teniendo en cuenta el sentido que indica la cabeza del vector.

A continuación observaremos la estrategia que los estudiantes lograron concluir para hacer una traslación:

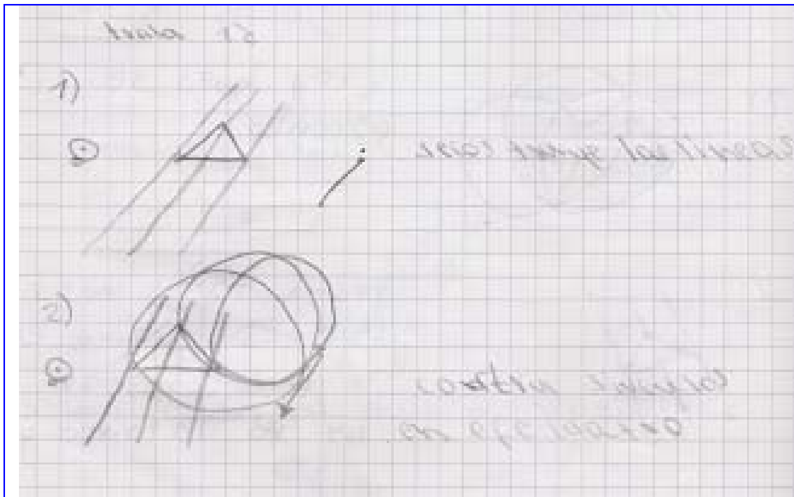
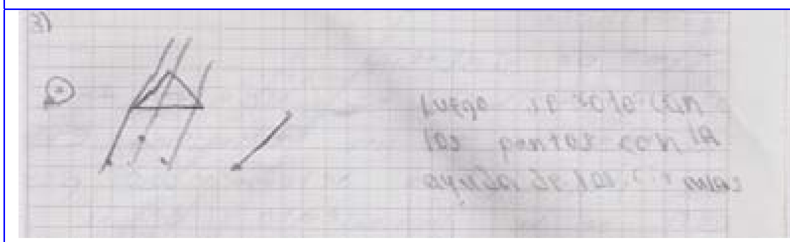
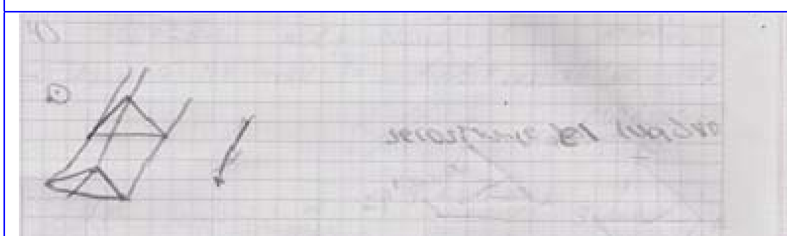
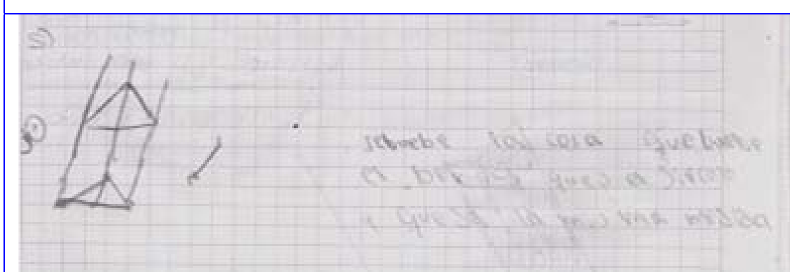
	Se construyen las líneas Construir círculos
	Luego se colocan los puntos con la ayuda de los círculos
	Se construye el triángulo
	Se mueve la cosa (se refiere a que se mueve el puntos sobre el círculo) que mueve el vector y queda la misma medida.

Tabla 34. Extracto apuntes de estudiante.

Observamos que al hacer el dibujo de las circunferencias el estudiante se equivoca pues toma sólo un vértice para hacer las tres circunferencias, pero más adelante se observa que pone acertadamente los puntos de intersección.

El estudiante al decir: **“Luego se colocan los puntos con la ayuda de los círculos”** está reconociendo que entre las rectas paralelas y las circunferencias existen puntos (los puntos de intersección) que serán los vértices del triángulo trasladado. El alumno reconoce que los puntos que se toman son los de abajo (ya que la intersección de una recta paralela y una circunferencia produce dos puntos de intersección) puesto que observa que la flecha del vector esta hacia abajo; se concluye que el estudiante reconoció el sentido de la traslación, y así construye el triángulo con la opción “triángulo” de la calculadora.

Finalmente notamos que el alumno identifica la función que cumple el punto sobre el círculo ya que dice: **“se mueve la cosa que mueve el vector”,** además reconoce que se mantiene la misma medida al mover este punto.

CONCLUSIONES DE LA CUARTA ACTIVIDAD

- Los estudiantes reconocieron que la distancia entre vértices correspondientes es la misma magnitud del vector. Los estudiantes arrastraron el vector por el medio hasta que su cola quedó en un vértice del triángulo continuo y observaron que la cabeza del vector quedó exactamente en el vértice correspondiente del triángulo punteado.

- Los estudiantes lograron describir con sus propios términos la posición de los triángulos, expresando con facilidad la dirección cuando es horizontal y vertical; en los otros casos, algunos estudiantes, para referirse a la dirección usaban términos como “hacia el lado y al mismo tiempo hacia abajo” o “hacia el lado y al mismo tiempo hacia arriba” ,mientras que otros estudiantes decían “son diagonales a la izquierda”(oblicuo con pendiente negativa) o “diagonales a la derecha”(oblicuo con pendiente positiva).

- los estudiantes identificaron que los lados correspondientes de los triángulos debían ser paralelos. En la segunda parte de la actividad se observa que al construir el triángulo con la herramienta "triángulo" de cabri, los estudiantes tratan de lograr perceptivamente que los lados del triángulo que están construyendo sean paralelos a los del triángulo original.

- Los estudiantes lograron reconocer que con las rectas paralelas se garantiza la dirección, con la opción compás se garantiza la magnitud y el sentido con la flecha del vector de la traslación.

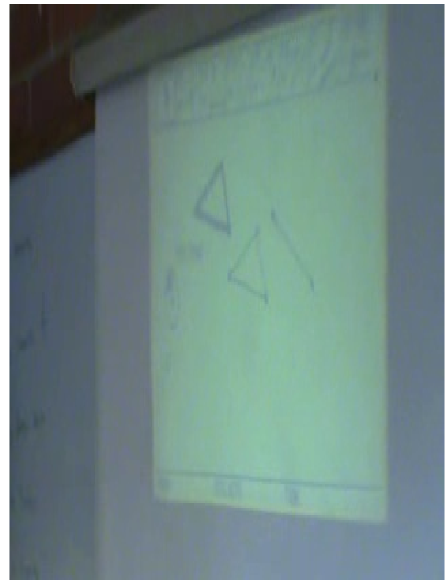
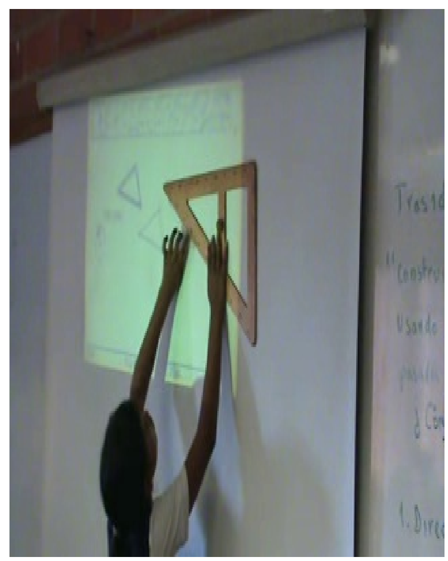
5. INSTITUCIONALIZACIÓN

> "En un proceso de aprendizaje por adaptación, cuando los estudiantes logran desarrollar una estrategia que resuelve el problema, el conocimiento que subyace a este no se les revela como un nuevo saber: si pudieron resolver el problema, es, para ellos, porque sabían hacerlo. Los estudiantes no tienen la posibilidad de identificar por sí mismos la presencia de un nuevo conocimiento, y menos aún el hecho de que dicho conocimiento corresponde a un saber cultural. Esto requiere de un proceso de institucionalización, que cae bajo la responsabilidad del maestro. Lo que indica claramente que el aprendizaje de los estudiantes no concluye con una situación a-didáctica, sino didáctica".[25]

En resumen, la institucionalización tiene por finalidad dar un status oficial a los conocimientos adquiridos durante las actividades de la clase. Es decir que la docente intervendrá para que los estudiantes relacionen el saber que se les quería enseñar con el conocimiento producto de la actividad.

En el transcurso de las actividades se observó que la docente utilizó las palabras dirección, sentido y magnitud sin definirlas. Al finalizar las cuatro actividades la docente utilizó la representación de la traslación como un vector para institucionalizar el uso de esas palabras. La docente modificaba el vector y preguntaba a un alumno cuál era la magnitud, a otro la dirección y a otro el sentido de ese vector.

A continuación se observa una parte de esta fase de institucionalización:

P: ¿Cuál es la dirección?, ¿cuál es la distancia? y ¿cuál es el sentido de esa traslación? mesa 1, me responde E3. **E3:** Hacia la izquierda. **P:** Pero ¿cómo?...Dirección… **E16:** Diagonal izquierda. **P:** Sentido, E18. **E18:** Hacia la izquierda. **E:** Noooooooooo **P:** E20: ¿cuál es el sentido? **E:** La flecha **E…** Hacia arribaaaa	
P: Distancia E2. **E2:** ¿Mido en centímetros o pulgadas? **P:** Pulgadas o centímetros (la niña va al tablero y mide con una regla el vector y luego la distancia que hay entre dos vértices correspondientes de los triángulos) ¿Cuánto es? **E2:** 18 cm. **E2:** 18 cm tiene el vector y también la distancia de... los triángulos. **E:** De un punto al otro.	

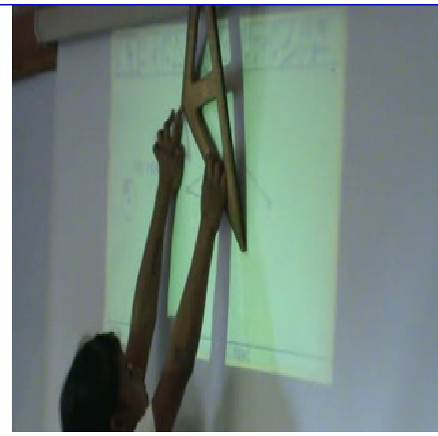
P:	¿Y el otro?...usted midió en un solo lado, toca medir ¿donde más?... (E2 mide otro par de vértices correspondientes).	
E2:	18 profe.	
P:	Ajá...muy bien, ¿donde más?	
E8:	todos tienen la misma distancia profe	
P:	Ajá muy bien.	

Tabla 35. Institucionalización.

Luego la docente pide a cada grupo de estudiantes que construyan una definición de lo que para ellos es la traslación y les permite sacar el diccionario[26] con la advertencia de que tienen que escribir una definición propia:

Los resultados de los estudiantes fueron los siguientes:

E6: *"Es la traslación de un lugar a otro".*

E3: *"Mover una figura de un lugar a otro, teniendo en cuenta la medida de la distancia y el sentido… y la dirección".*

E1: *"Es el movimiento de un objeto hacia otro lugar".*

E18: *"Es el movimiento mediante el cual se puede mover una figura con respecto a la otra teniendo en cuenta la dirección, la distancia y el sentido.*

E2: *Es el movimiento alrededor de un objeto.*

E: *Es la cosa que nos permite mover un objeto de un lugar a otro.*

CONCLUSIÓN DE LA INSTITUCIONALIZACIÓN

- Los estudiantes lograron definir con sus propias palabras la traslación, no se limitaron en repetir la definición del diccionario, puesto que argumentan que además de ser un movimiento en donde una figura se mueve respecto a la otra, también explicitaron las propiedades de magnitud, dirección y sentido constantes.

6. CONCLUSIONES

Las actividades planeadas por el grupo EDUMAT-UIS para la enseñanza de las traslaciones logran promover un aprendizaje por adaptación utilizando el medio Cabri Geometry; estas actividades fueron construidas teniendo en cuenta las retroacciones que el medio debía ofrecer a los estudiantes, para que lograran observar las características de las figuras dadas. En el transcurso del desarrollo de las actividades se observó que los estudiantes adquirieron conocimientos sin que el saber se les revelara; además, en la institucionalización lograron construir nociones de traslación que, aunque no son perfectos, dejan ver claramente los conocimientos adquiridos. Esto es lo más interesante de nuestro trabajo: poder ver cómo un estudiante que nunca ha escuchado hablar de traslación, interactúa con Cabri para darle solución a un problema y llega a construir un concepto de manera natural.

Debido a la falta de datos correspondientes, en algunas actividades no fue posible realizar el análisis *a posteriori.*

Durante el desarrollo de las actividades también pudimos evidenciar aprendizaje por adaptación puesto que los estudiantes lograron identificar la dependencia de los triángulos y las características de la traslación: magnitud, dirección y sentido.

La dependencia: para identificar la dependencia los estudiantes notaron que los triángulos gruesos (figura trasladada) se mueven si se mueven los triángulos delgados (figura original), esto lo reconocieron en la primera actividad (primera tarea). De igual forma cuando arrastraban y giraban el triángulo delgado los estudiantes observaban que el triángulo grueso también se movía y se giraba en el mismo sentido que el delgado. Esto lo reconocieron en la segunda actividad.

La magnitud: para identificar la magnitud los estudiantes pudieron reconocer que en la primera actividad (segunda tarea), los triángulos no se podían unir en ningún lugar de la pantalla ya que entre ellos había una distancia que se mantenía. Esto también se ve cuando los estudiantes notan que la distancia de los triángulos entre vértices correspondientes es la misma que la magnitud del vector (cuarta actividad, segunda parte)

La dirección y el sentido: para identificar la dirección y el sentido, los estudiantes reconocieron las diferencias entre las series; por ejemplo, al comparar dos series, podían ver que tenían igual dirección pero diferente sentido, o que tenían diferentes direcciones.

Como autoras de este trabajo nos gustaría destacar la importancia de adquirir conocimientos sobre nuevas herramientas para la enseñanza de las matemáticas. La utilización de Cabri Geometry como medio de un aprendizaje por adaptación permite a los estudiantes adquirir conocimientos propios a través de la interacción con el medio. En adelante, esperamos cosechar estos frutos recogidos de nuestro trabajo de grado para desarrollar en el aula actividades didácticas que les permitan a los estudiantes desempeñar un rol más activo dentro de la clase, pero más importante, dentro de la adquisición de su propio conocimiento, sin olvidar el importante papel del docente.

Cabe mencionar que la profesora no realizó el concurso de la actividad número uno. Creemos que la docente no tenía claro de que los estudiantes en el concurso debían anticipar las propiedades de dicha traslación, logrando la precisión de las mismas.

7. RECOMENDACIONES

Anteriormente se observó que las actividades diseñadas cumplen con los objetivos necesarios para un aprendizaje por adaptación. Sin embargo, la realización de estas actividades implica un cambio en la concepción de la enseñanza y en las prácticas del profesor. Este cambio es complejo y toma tiempo. Sería importante analizar los aspectos de las actividades que los profesores tienen más dificultades en asimilar y poner en práctica, y buscar los medios adecuados para realizar ese cambio. Por ejemplo, en el caso de la profesora que observamos, constatamos que tiende a intervenir de manera prematura durante el desarrollo de la actividad, interrumpiendo el proceso de aprendizaje por adaptación.

Al hacer la puesta en común de cada actividad, se recomienda que la docente haga una tabla con las características que los estudiantes observan al comparar las series, de manera que los estudiantes puedan observar de forma general las características de la traslación en cada una.

Es necesario que los estudiantes tengan un tiempo suficiente de trabajo para que logren realizar acciones sobre el medio y analizar las retroacciones que este les ofrece. Además, es importante que el estudiante reciba la responsabilidad de decidir si la solución que encontró para el problema está bien o no; de esta manera logra adquirir conocimiento por sí mismo y no porque se le fue dado por la docente o por sus compañeros.

En este proyecto se recogieron filmaciones de todo el grado sexto, esto hizo que no pudiéramos analizar detalladamente a cada estudiante para identificar su proceso de aprendizaje. Para una próxima investigación de este tipo, se recomienda que los datos para realizar el análisis de las actividades sean recogidos filmando un solo grupo de estudiantes al azar durante cada actividad, puesto que esto permite observar de manera completa el proceso de aprendizaje de los estudiantes a través de la secuencia de las actividades.

8. BIBLIOGRAFÍA

BROUSSEAU Guy. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19, versión Castellana, 1993.

CHAVARRÍA Jessenia. Cuadernos de investigación y formación de educación matemática. 2006, año 1, numero 2.recuperado de: http://www.cimm.ucr.ac.cr.

MARGOLINAS Claire. La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas. Ediciones UIS, Bucaramanga, 2009.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Enlace editoriales Ltda. Santafé de Bogotá, D.C, abril 2004.

MONROY Lilian, RUEDA Karol. Conceptualización de la simetría axial y la traslación con la mediación del programa cabri geometry II. Universidad industrial de Santander (UIS). Facultad de ciencias. Bucaramanga 2009.

SAIZ Irma, ACUÑA Nelci. La Didáctica de la Matemática como disciplina científica. 2006. Recuperado de: http://aportes.educ.ar/matematica/nucleo-teorico/tradiciones-de-ensenanza.visitado por última vez el 28 de Abril de 2010.