

Modelos De Resistividad Y Profundidad De Investigación A Partir De Inversión De Datos
Magnetotelúricos

Omar Felipe Latorre Ramírez

Trabajo de Investigación para optar al título de Magíster en Geofísica

Director

Sait Khurama Velasquez

Geólogo PhD.(c)

Codirector

Luis Carlos Mantilla Figueroa

PhD.en Geología Económica

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

*Dedico mi tesis principalmente a Dios, por darme la fuerza necesaria para
culminar mis estudios de maestría.*

A Mary Alejandra, mi novia, por no soltar mi mano en todo este camino.

*A mis padres quienes me impulsan a ser mejor cada día y me ayudan a
levantarme en cada caída.*

Agradecimientos

Agradezco a todos aquellos profesores y compañeros que aportaron desde su conocimiento para poder desarrollar este trabajo de investigación.

También agradezco por la motivación de mi pareja, mi familia y mis amigos que me apoyaron para poder cumplir este objetivo de lograr un posgrado de maestría en geofísica.

Pero sobre todo agradezco a Dios que me permitió gozar de salud en tiempos difíciles que vivió la humanidad a causa de la pandemia por el coronavirus, y que a pesar de las circunstancias me concedió este tan anhelado sueño.

Tabla de Contenido

Introducción	15
1. Generalidades	17
1.1. Planteamiento del problema	17
1.2. Hipótesis	18
1.3. Justificación del proyecto	18
1.4. Objetivos	20
1.4.1. Objetivo general	20
1.4.2. Objetivos específicos	20
2. Marco de referencia	21
2.1. Conceptos básicos	24
2.1.1. Tensor de impedancia	28
2.1.2. Propagación de ondas electromagnéticas	29
2.1.3. Profundidad de investigación	31
2.2. Métodos de inversión	35
2.2.1. Teoría de inversión	36
2.2.2. Magnetotelúrica 1D	38
2.3. Transformada de Bostick	39

2.3.1. Magnetotelúrica en Paipa (Boyacá)	41
2.3.1.1. Geología	42
2.3.1.2. Perfil B-B'	44
2.4. Algoritmo de Occam	46
2.5. Inversión con SimPEG	48
3. Aspectos metodológicos	55
4. Resultados y análisis	59
4.1. Modelo Sintético A	59
4.2. Modelo Sintético B	69
4.2.1. Inversión con 50 iteraciones	80
4.3. Estaciones magnetotelúrica Paipa	87
4.3.1. Estaciones Perfil B-B'	98
4.3.2. Inversión 1D Transformada de Bostick	106
4.3.3. Inversión 1D Algoritmo de Occam	109
5. Conclusiones	114
Referencias Bibliográficas	116

Lista de Figuras

Figura 1.	Conductividad y resistividad eléctrica teórica de materiales de la Tierra. Modificado de Martí i Castells (2006).	23
Figura 2.	Representación esquemática del espectro electromagnético conocido.	32
Figura 3.	Localización del municipio de Paipa en el Departamento de Boyacá.	42
Figura 4.	Perfil B-B'.	45
Figura 5.	Marco SimPEG que indica el flujo de información. En la implementación, cada uno de estos módulos es una clase base. Tomado de Cockett et al. (2015).	49
Figura 6.	Curva de Tikhonov	52
Figura 7.	Modelos sintéticos a evaluar	57
Figura 8.	Matrices RMSE para el Modelo Sintético A.	61
Figura 9.	Modelos recuperados del Sintético A considerando un modelo inicial de baja resistividad.	62
Figura 10.	Datos observados y datos calculados para el Modelo 01	63
Figura 11.	Modelos recuperados del Sintético A considerando un modelo inicial de resistividad media.	64
Figura 12.	Datos observados y datos calculados para el Modelo 02	65

Figura 13.	Modelos recuperados del Sintético A considerando un modelo inicial de resistividad máxima.	66
Figura 14.	Datos observados y datos calculados para el Modelo 03	67
Figura 15.	Variación del Φ_d y Φ_m en cada iteración para el Modelo Sintético A.	68
Figura 16.	Matrices RMSE para el Modelo Sintético B.	71
Figura 17.	Modelos recuperados del Sintético B considerando un modelo inicial de baja resistividad.	72
Figura 18.	Datos observados y datos calculados para el Modelo 04	73
Figura 19.	Modelos recuperados del Sintético B considerando un modelo inicial de resistividad media.	74
Figura 20.	Datos observados y datos calculados para el Modelo 05	75
Figura 21.	Modelos recuperados del Sintético B considerando un modelo inicial de resistividad máxima.	76
Figura 22.	Datos observados y datos calculados para el Modelo 06	77
Figura 23.	Variación del Φ_d y Φ_m en cada iteración para el Modelo Sintético B.	78
Figura 24.	Matriz RMSE para el Modelo Sintético B (Modelo 06) usando 50 iteraciones.	79
Figura 25.	Modelos recuperados del Sintético B usando 50 iteraciones con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 0,2$.	82
Figura 26.	Modelos recuperados del Sintético B usando 50 iteraciones con $\alpha_s = 0,6$ y $\alpha_x = 0,8$.	83

Figura 27.	Modelos recuperados del Sintético B usando 50 iteraciones con $\alpha_s = 1,0$ y $\alpha_x = 0,6$.	84
Figura 28.	Variación del Φ_d y Φ_m en cada iteración para el Modelo Sintético B.	85
Figura 29.	Modelos recuperados del Modelo Sintético B usando 50 iteraciones y mayor RMSE.	86
Figura 30.	Matrices RMSE para el Modelo Sintético A.	90
Figura 31.	Modelos recuperados de la Estacion 06 de Paipa considerando un modelo inicial de baja resistividad.	91
Figura 32.	Datos observados y datos calculados para la Estación 06 con resistividad del medio como la mínima observada.	92
Figura 33.	Modelos recuperados de la Estación 06 de Paipa considerando un modelo inicial de resistividad media.	93
Figura 34.	Datos observados y datos calculados para la Estación 06 con resistividad del medio como la media observada.	94
Figura 35.	Modelos recuperados de la Estación 06 de Paipa considerando un modelo inicial de resistividad máxima.	95
Figura 36.	Datos observados y datos calculados para la Estación 06 con resistividad del medio como la máxima observada.	96
Figura 37.	Variación del Φ_d y Φ_m en cada iteración para el Modelo Sintético A.	97
Figura 38.	Matrices RMSE para las estaciones 04, 05 y 07 correspondiente del Perfil B-B'.	99

Figura 39.	Modelos recuperados de la Estación 05 de Paipa considerando un modelo inicial de resistividad máxima.	100
Figura 40.	Datos observados y datos calculados para la Estación 04 con resistividad del medio como la máxima observada.	101
Figura 41.	Modelos recuperados de la Estación 05 de Paipa considerando un modelo inicial de resistividad máxima.	102
Figura 42.	Datos observados y datos calculados para la Estación 05 con resistividad del medio como la máxima observada.	103
Figura 43.	Modelos recuperados de la Estación 07 de Paipa considerando un modelo inicial de resistividad máxima.	104
Figura 44.	Datos observados y datos calculados para la Estación 07 con resistividad del medio como la máxima observada.	105
Figura 45.	Resultado de la inversión 1D Transformada de Bostick para la estación Paipa 06.	107
Figura 46.	Resultado inversión 1D Algoritmo de Occam de los datos crudos de Paipa 06.	109
Figura 47.	Resultado inversión 1D de los datos Paipa 06 con el Software WinGLink.	112
Figura 48.	Modelos generados para cada uno de los métodos de inversión para la Estación 06.	113

Lista de Tablas

Tabla 1.	Resistividad aparente de referencia para el calculo del <i>Skin Depth</i> y la profundidad de investigación Z_{max} para el Modelo Sintético A.	60
Tabla 2.	Resistividad aparente de referencia para el calculo del <i>Skin Depth</i> y la profundidad de investigación Z_{max} para el Modelo Sintético B.	69
Tabla 3.	Resistividad aparente de referencia para el calculo del <i>Skin Depth</i> y la profundidad de investigación Z_{max} para la Estacion 06 de Silva Benavides y Uribe Joya (2018).	87

Resumen

Título: Modelos De Resistividad Y Profundidad De Investigación A Partir De Inversión De Datos Magnetotelúricos.

*

Autor: Omar Felipe Latorre Ramírez **

Palabras Clave: SimPEG, inversión geofísica, resistividad.

Descripción: Uno de los desafíos a lo largo de la historia en algoritmos de inversión geofísica es mejorar su eficiencia y obtener modelos con una mayor aproximación a la realidad, sin embargo, algunos son “algoritmos de caja negra”, es decir, no se puede entender su funcionamiento o no son fácilmente escalables, tarea en la cual trabajan investigadores que buscan desarrollar esta capacidad apoyados en las diferentes herramientas de inversión. En la presente tesis se analizaron los parámetros *smallness* α_s y *smoothness* α_x en la inversión no-lineal de datos magnetotelúricos, mediante la integración de códigos de inversión de fácil acceso utilizando las herramientas de la librería *Simulation and parameter estimation in geophysics* (SimPEG).

En la primera etapa de evaluación se variaron los parámetros de los modelos sintéticos y se obtuvo resultados que permitieron evaluar la influencia en los modelos recuperados a partir de una inversión realizada con máximo 10 iteraciones, donde se consideró el análisis del error obtenido. En la segunda etapa se aplicó el algoritmo de inversión a los datos adquiridos en áreas relacionadas al Sistema Geotérmico de Paipa (Boyacá), los cuales fueron adquiridos con el equipo Stratagem de la Universidad Industrial de Santander, bajo las mismas consideraciones de los modelos sintéticos previamente evaluados. Y en la tercera etapa se realizó la inversión de los datos adquiridos en Paipa haciendo uso de la transformada de Bostick y el algoritmo de Occam; tanto los resultados obtenidos con SimPEG, como la transformada

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Sait khurama Velasquez, MSc. en Geofísica

de Bostick y el algoritmo de Occam fueron comparados.

Los modelos sintéticos 1D evaluados mediante SimPEG presentaron errores RMSE inferiores al 3 %, lo que evidenció una buena integración de los algoritmos en la inversión, y así mismo dio una idea generalizada del punto de partida para la inversión de datos reales. El análisis preliminar de los modelos a partir de las 10 iteraciones arrojó que el RMSE tendía a ser mínimo cuando el parámetro *smallness* α_s tendía a ser mínimo y el parámetro *smoothness* α_x máximo. Se procedió a aumentar el número de iteraciones y evaluar el ajuste de los modelos sintéticos, basados en que la resistividad del medio es directamente proporcional a la profundidad máxima de investigación, sin embargo, este aumento evidenció anomalías de baja resistividad inexistentes en el modelo sintético original a pesar de presentar un mejor ajuste en la última capa.

Hacer uso del criterio de la L-curve en la curva de Tikhonov permitió determinar un rango de iteraciones con una solución equilibrada entre los datos observados y un modelo de referencia. Finalmente, el código de inversión obtenido se caracteriza por la versatilidad para evaluar los resultados en múltiples modelos recuperados de manera gráfica que posteriormente serán analizados a partir de un contexto geológico determinado; brindando una herramienta adicional para futuros proyectos de investigación en la exploración de inversión de datos magnetotelúricos.

Abstract

Title: Resistivity Models and Depth of Investigation from Inversion Magnetotelluric Data. *

Author: Omar Felipe Latorre Ramírez **

Keywords: SimPEG, Skin Depth, geophysical inversion.

Description: One of the challenges throughout history in geophysical inversion algorithms is to improve their efficiency and obtain models with a closer approximation to reality; however, some are "black box algorithms" and their functioning cannot be understood or are not easily scalable, a task in which researchers work to develop this capacity supported by the different investment tools. In this thesis, the parameters *smallness* α_s and *smoothness* α_x were analyzed in the non-linear inversion of magnetotelluric data; by integrating inversion codes easily accessible using the Python library *Simulation and parameter estimation in geophysics* (SimPEG).

In the first stage of evaluation, the parameters of the synthetic models were varied, and the results obtained allowed evaluating the influence on the recovered models of an inversion made with a maximum of 10 iterations; the error result obtained was considered in the analysis. In the second stage, an inversion was made using the SimPEG algorithm and the data acquired in areas related to the Paipa Geothermal System (Boyacá), the data were acquired with the Stratagem instrument of the Industrial University of Santander; the resulting model was evaluated with the same considerations as the synthetic models. And in the third stage, the inversion of the data acquired in Paipa was carried out using the Bostick transform and the Occam algorithm; the results obtained with SimPEG, the Bostick transform and the Occam algorithm were compared.

The 1D synthetic models evaluated by SimPEG presented RMSE errors of less than 3 %, which is a good integration

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Sait Khurama Velasquez, MSc. en Geofísica

of the algorithms in the inversion, and likewise gave a generalized idea of the starting point for the inversion of real data. The preliminary analysis of the models from 10 iterations indicated that the RMSE tended to be minimum when the parameter *smallness* α_s tended to be minimum and the parameter *smoothness* α_x maximum. A next step was increase the number of iterations and evaluate the fit of the synthetic models, based on the fact that the resistivity of the medium is directly proportional to the maximum depth of investigation; however, this increase displayed non-existent low resistivity anomalies in the original synthetic model, despite presenting a better fit in the last layer.

Using the L-curve criterion in the Tikhonov curve allowed determine a range of iterations with a balanced solution between the observed data and a reference model. Finally, the inversion code its a versatile tool to evaluate the results from multiple models recovered graphically that have to be analyzed in a specific geological context; providing an additional tool for future research projects in the exploration of magnetotelluric reversal data.

Introducción

A comienzos del siglo XIX se inició la teoría de inversión geofísica desarrollada por sismólogos, con la finalidad de entender el comportamiento interno de la Tierra mediante datos tomados en superficie. La primera solución de un problema inverso fue la estimación de las coordenadas del hipocentro de un terremoto ([Mosegaard y Tarantola, 2002](#)). A lo largo de los años se extendió la teoría de inversión geofísica a los diferentes métodos geofísicos desarrollados, siendo más prácticos debido a los avances en el área computacional.

La magnetotélurica (MT) es un método electromagnético (EM) que utiliza las variaciones naturales del campo geomagnético en la Tierra y la inducción electromagnética, realizando mediciones de los componentes ortogonales de campos eléctricos y magnéticos en la superficie de la Tierra para determinar sus características resistivas desde centenas de metros hasta kilómetros de profundidad ([Simpson y Bahr, 2005](#)). En MT al igual que en otros métodos geofísicos, las inversiones proporcionan un marco matemático para construir modelos de propiedades físicas a partir de datos recopilados en adquisiciones, siendo la transformada de Bostick ([Bostick, 1977](#)) y el algoritmo de Occam ([Constable et al., 1987](#)) los métodos de inversión mas utilizados.

Recientemente con el desarrollo de lenguajes de programación de fácil interpretación se han desarrollado códigos abiertos que permiten interacciones y modificaciones prácticas, con el objetivo de ajustar o lograr aproximaciones en funciones complejas. *Simulation and parameter estimation in geophysics* o SimPEG ([Cockett et al., 2015](#)) es una librería diseñada en el lenguaje de programación Python, que proporciona una caja de herramientas para construir metodologías

de inversión basadas en gradientes para optimizar modelos geofísicos de resistividad.

Los métodos clásicos como la transformada de Bostick y el algoritmo de Occam se basan en una estimación de la profundidad de investigación considerando inicialmente un medio homogéneo, el cual se va ajustando hasta obtener un modelo próximo a la realidad del subsuelo considerando su heterogeneidad. [Borah y Patro \(2019\)](#) reconocen que la profundidad máxima de investigación en MT, dada su naturaleza compleja, debe considerar el desfase entre el campo magnético H y el campo eléctrico E en la frecuencia de evaluación más baja, al ser estas las ondas electromagnéticas que tendrían una mayor profundidad de penetración en la tierra y que registran mayor información.

La Universidad Industrial de Santander cuenta con el equipo Stratagem desarrollado por Geometrics INC ([Geometrics, INC., 2011](#)) el cual realiza mediciones mediante tres bandas de frecuencia. La Banda 3 maneja mediciones de baja frecuencia con un rango entre los 79.4 y 0.2 Hz, y fue utilizado por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) para adquirir información del Sistema Geotérmico de Paipa, aplicando la transformada de Bostick para la generación de un modelo del subsuelo. La integración de trabajos que han aportado en el desarrollo y solución de problemas para la inversión MT, como [Kang et al. \(2017\)](#); [Borah y Patro \(2019\)](#); [Nurjaman \(2019\)](#); [Muttaqien y Nurjaman \(2021\)](#), permitió generar un código único que logró automatizar tareas para la evaluación de parámetros de inversión usando SimPEG con datos reales a partir de las mediciones adquiridas por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#).

1. Generalidades

El desarrollo de códigos de inversión libres permite explorar el problema de inversión geofísica, el cual es un reto para los investigadores en la recuperación de imágenes del subsuelo aproximadas a la realidad. Es por esta razón que la presente tesis abarcó el problema inverso desde la estimación y análisis de parámetros de inversión en datos MT mediante herramientas computacionales proporcionadas por SimPEG.

1.1. Planteamiento del problema

En inversión MT un parámetro de entrada es la profundidad de investigación, definida por [Huang \(2005\)](#) como la máxima profundidad en la cual un sensor determinado puede detectar un objeto y puede relacionarse con diferentes factores como: la sensibilidad del sensor, la precisión, el rango de frecuencias, el nivel de ruido ambiental, las propiedades del subsuelo y las técnicas utilizadas en el procesamiento e interpretación de datos. Los métodos clásicos como la transformada de Bostick y el algoritmo de Occam se basan en una estimación de la profundidad de investigación considerando un medio homogéneo como modelo inicial. Recientemente [Cockett et al. \(2015\)](#) propuso un esquema de implementación modular para la inversión de datos MT basada en gradiente, mediante la librería de SimPEG de Python. [Kang et al. \(2017\)](#) proponen el método de inversión no lineal 1D utilizando diferencias finitas como uno de los métodos para conseguir mejores resultados, sin embargo, mencionan que debe encontrarse ciertos parámetros en la inversión, determinados a partir de la experimentación y de las condiciones del subsuelo, es así como surge la pregunta de investigación de la presente tesis:

- ¿Como obtener modelos optimizados de resistividad del subsuelo a partir de la variación en los parámetros de inversión geofísica de datos obtenidos mediante magnetotelúrica?

1.2. Hipótesis

Los parámetros de variabilidad en la resistividad del medio y ajuste de la profundidad de investigación permiten evaluar los modelos obtenidos en un contexto geológico preliminar, proporcionando un mayor control en las consideraciones del algoritmo.

Los modelos de resistividad más aproximados a la realidad del subsuelo se obtienen a partir de la variación de parámetros y las múltiples inversiones geofísicas realizadas según los entornos geológicos específicos.

1.3. Justificación del proyecto

Uno de los desafíos a lo largo de la historia en algoritmos de inversión geofísica es mejorar su eficiencia y obtener modelos con una mayor aproximación a la realidad, premisa planteada en los resultados de inversión de datos MT obtenidos por [Moyano Nieto \(2014\)](#); [Aparicio Monjarás y Canjura Guzmán \(2017\)](#); [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#), en los que se resalta la importancia de adquirir datos con calidad para disminuir la incertidumbre del modelo. Sin embargo, algunos son “algoritmos de caja negra”, es decir, no se pueden interrogar o profundizar fácilmente, tarea en la cual trabajan investigadores, que buscan desarrollar esta capacidad apoyados en las diferentes herramientas de inversión.

Generalmente los programas para el procesamiento de datos están desarrollados de forma interactiva y practica, lo cual permite hacer cambios a ciertas variables preestablecidas para la obtención de modelos, pero se ven limitados al momento de asignar múltiples valores a las variables,

escenario no contemplado por el programa, que dificulta la evaluación del comportamiento del modelo y exige una mayor demanda computacional. En este punto los algoritmos de inversión ejecutados en lenguajes de programación permiten una mayor libertad para automatizar dicha tarea, y disminuir la incertidumbre de caja negra de las variables en un modelo. SimPEG es una librería de Python enfocada en la simulación y estimación de parámetros basada en gradientes en el contexto de aplicaciones geofísicas, cuya accesibilidad y expansibilidad permite a los investigadores una interacción con sus herramientas computacionales para la creación de códigos de alta calidad y la propuesta de esquemas de inversión geofísica.

Integrar un modelo inicial y un modelo de referencia en el proceso de inversión es una herramienta que brinda mayor libertad al investigador en la comparación del comportamiento de los datos controlando la generación de anomalías no deseadas. A su vez, identificar el contexto geológico y establecer la profundidad de investigación, permite estimar el límite de confiabilidad del modelo, debido a que los cambios en el medio pueden generar perturbaciones o cambios en la propagación de las ondas electromagnéticas en el subsuelo, consideración abordada por [Borah y Patro \(2019\)](#), la cual al ser incluida en los procesos de inversión otorga un mayor margen de ajuste para el modelo.

En la presente tesis se analizaron parámetros de inversión no-lineal en datos MT, mediante las herramientas computacionales proporcionadas por SimPEG para construir un código de inversión de fácil acceso que permita evaluar los múltiples modelos recuperados a partir de los datos recolectados. Éste análisis aplicado en los diferentes desafíos de prospección permite conseguir un mayor acercamiento a la realidad del subsuelo y con ello aportar en el proceso de crecimiento

del programa de maestría en Geofísica, pues ayudará a futuros proyectos de investigación en la exploración del método MT, facilitando a los estudiantes una herramienta que permita un ajuste y flexibilidad en inversión geofísica.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general.

- Determinar modelos de resistividad y su profundidad de investigación a partir de la inversión de datos magnetotelúricos con herramientas proporcionadas por SimPEG.

1.4.2. Objetivos específicos.

- Relacionar los parámetros óptimos de inversión no-lineal utilizando datos sintéticos de magnetotelúrica mediante la implementación modular de SimPEG para optimizar modelos geofísicos de resistividades.
- Aplicar la inversión de SimPEG variando los parámetros de inversión y la profundidad de investigación a datos magnetotelúricos reales.
- Comparar los resultados de la inversión de datos magnetotelúricos obtenidos con SimPEG respecto a los modelos obtenidos usando la Transformada de Bosrick y el Algoritmo de Occam.

2. Marco de referencia

La geofísica como ciencia aplica los principios de la física al estudio de la Tierra, analizando las variaciones en la distribución interna de las propiedades a evaluar ([Kearey et al., 2002](#)). Los métodos geofísicos pueden aplicarse a diferentes escalas y medir diferentes propiedades físicas. El método electromagnético de la MT permite obtener las resistividades o conductividades del subsuelo y su profundidad, siendo de gran importancia en la caracterización de estructuras regionales del subsuelo.

Para la exploración geofísica con MT las fuentes de energía son los campos electromagnéticos naturales. Cuando esta energía externa considerada el campo electromagnético primario alcanza la superficie, una parte se refleja y la otra penetra dentro de la tierra. En este escenario la tierra actúa como un conductor generando corrientes eléctricas telúricas que al mismo tiempo generan un campo magnético secundario ([Martí i Castells, 2006](#)). La profundidad de penetración de los campos está relacionada directamente con la resistividad e inversamente con la frecuencia de las ondas electromagnéticas, a mayor resistividad del medio y menor frecuencia, mayor será la profundidad de los campos EM detectados. Dicha profundidad puede estimarse a través de la profundidad de capa o *skin depth* la cual define la profundidad teórica de investigación para un medio homogéneo e isotrópico ([Vozoff, 1972](#)).

La practicidad y versatilidad para la adquisición de datos MT en campo se debe a que el método es de fuente natural, por lo que la profundidad de investigación depende del tiempo de registro y las frecuencias del muestreo; no requiere de grandes longitudes de cable ni fuentes de

gran poder. Las fuentes que generan los campos electromagnéticos en el subsuelo están asociadas principalmente a los fenómenos de interacción entre el viento solar y la magnetósfera de la tierra, cuyas fluctuaciones tienen periodos entre 0.001 hasta 100000 segundos y a las descargas por tormentas que se generan en la atmósfera del planeta y que tienen periodos inferiores a 1 segundo (Simpson y Bahr, 2005). Considerando el rango de frecuencias como MT cuando fluctúan entre los $10^{-4} - 10$ Hz o Audiomagnetotelúrico (AMT) cuando fluctúan entre los $10 - 100000$ Hz, los periodos para la MT están entre los $10^{-1} - 10^4$ segundos y para la AMT en $10^{-4} - 10^{-1}$ segundos (Zhdanov, 2009).

Campanyà (2012); Zhdanov (2009) abordan el fundamento teórico-matemático del método MT y profundizan en las ecuaciones de campos electromagnéticos, donde la hipótesis principal del método MT es que existen campos eléctricos y magnéticos de origen natural (tormentas eléctricas e interacciones ionosfera-magnetosfera) que tienen una fuente distante.

Una desventaja del método es la superposición de las señales electromagnéticas de fuentes antropogénicas cercanas a los campos naturales (Escalas et al., 2013). Estas fuentes no se pueden despreciar, especialmente cerca de las áreas urbanas y son causadas por transformadores, líneas eléctricas, líneas de trenes eléctricos, turbinas eólicas, circulación de vehículos y tuberías de agua, las cuales crean un campo magnético que puede inducir corrientes eléctricas (Martí et al., 2020).

Las propiedades eléctricas (ej. resistividad eléctrica) de los materiales subsuperficiales se pueden determinar a partir de la relación entre los componentes de las variaciones de campo eléctrico y magnético medido, o funciones de transferencia. Estas funciones son los componentes magnético vertical (B_z), eléctricos horizontales (E_x y E_y) y magnéticos horizontales (B_x y B_y). La

conductividad eléctrica de los materiales de la tierra tiene una amplia variación de hasta diez ordenes de magnitud (Figura 1) y es sensible a los pequeños cambios en constituyentes menores de las rocas. Como la conductividad de la mayoría de las matrices de roca es muy baja (10^{-5} S/m), la conductividad de la unidad de roca depende en general de la interconectividad de los minerales altamente conductores como el grafito, arcillas y materiales saturados de agua (Martí i Castells, 2006).

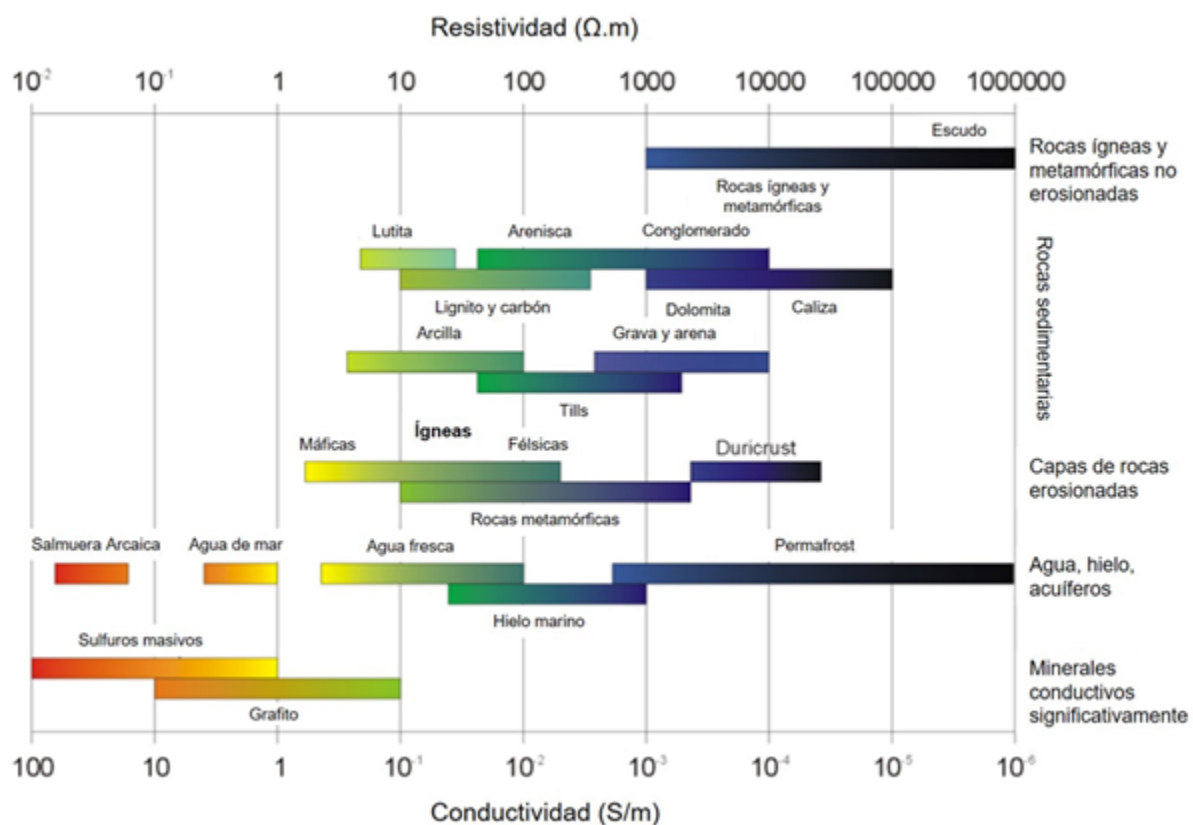


Figura 1. Conductividad y resistividad eléctrica teórica de materiales de la Tierra. Modificado de Martí i Castells (2006).

2.1. Conceptos básicos

El método de MT realiza la medición simultánea en superficie de las variaciones temporales de los campos eléctrico y magnético (\vec{E}_x y \vec{B}_y), como resultado de la superposición de los campos primarios y secundarios. Estos campos tienen un comportamiento vectorial, siendo posible determinar las tres componentes del campo magnético (H_x , H_y , H_z) y los dos componentes del campo eléctrico (E_x , E_y) (Simpson y Bahr, 2005; Zhdanov, 2009; Everett, 2013).

Considerando las propiedades de las ondas electromagnéticas en los conductores, la penetración de la onda electromagnética va a depender de la frecuencia de oscilación, esto implica que el valor de penetración está sujeto a la frecuencia del campo electromagnético. Las fuentes naturales para el método de MT pueden generar dos tipos de señales en función de la frecuencia (Simpson y Bahr, 2005; Zhdanov, 2009; Everett, 2013):

- Las de baja frecuencia (menores a 1Hz, o menores de 1 ciclo por segundo) son generadas cuando el viento solar interacciona con el campo magnético de la Tierra.
- Las de alta frecuencia (superiores a 1Hz, o mayores a 1 ciclo por segundo) son generadas en el planeta Tierra por las tormentas, usualmente cercanas al Ecuador.

Las ecuaciones de Maxwell describen el comportamiento e interacción de los campos eléctricos y magnéticos, considerandose para la base teórica del método magnetotelúrico como se expresa a continuación (Simpson y Bahr, 2005; Zhdanov, 2009; Everett, 2013):

$$\begin{aligned}
\nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} && \text{Ley de Faraday.} \\
\nabla \times H &= J + \frac{\partial D}{\partial t} && \text{Ley de Ampere.} \\
\nabla \cdot D &= \rho_V && \text{Ley de Gauss para el campo eléctrico.} \\
\nabla \cdot B &= 0 && \text{Ley de Gauss para el campo magnético.}
\end{aligned} \tag{1}$$

Donde, $E(V/m)$ y $H(A/m)$ son intensidades del campo eléctrico y magnético respectivamente, $B(T)$ es la inducción, $D(C/m^2)$ es el desplazamiento eléctrico, $J(A/m^2)$ es la densidad de corriente y $\rho_V(C/m^3)$ es la densidad de carga eléctrica, y todas estas magnitudes vectoriales se encuentran relacionadas con las ecuaciones constitutivas del medio ([Simpson y Bahr, 2005](#); [Zhdanov, 2009](#); [Everett, 2013](#)).

$$\begin{aligned}
J &= \sigma E \\
D &= \epsilon E \\
B &= \mu H
\end{aligned} \tag{2}$$

Donde σ es la conductividad, ϵ la permitividad eléctrica y μ la permeabilidad magnética, las cuales describen las propiedades intrínsecas de los materiales a través de los cuales se propaga el campo electro magnético.

Las ecuaciones de Maxwell describen el comportamiento de campos electromagnéticos,

considerando que las propiedades en el medio son homogéneas, es decir, no varían en el espacio, son isotrópicas debido a que no varían en la dirección de medición y el medio es conductivo ya que no hay distribución de cargas. Por ello aplicar el método MT parte de las siguientes consideraciones y simplificaciones (Simpson y Bahr, 2005; Zhdanov, 2009; Everett, 2013):

- El método se fundamenta y cumple con las ecuaciones de Maxwell.
- Se considera que la Tierra no genera energía electromagnética, solamente la disipa o absorbe.
- Los campos son tratados como conservativos y analíticos fuera de la fuente.
- Al considerar fuentes naturales, los campos electromagnéticos generados desde la fuente se asumen lo suficientemente retirados de la superficie terrestre, por lo que se consideran como ondas planas uniformes e inciden de manera casi vertical en la superficie de la Tierra.
- Para un modelo de capas planas, horizontales y paralelas no hay acumulación de cargas. Por el contrario para un modelo multi-dimensional las cargas se acumulan a lo largo de las discontinuidades generando un corrimiento estático (*Static Shift*).
- La carga se conserva y la Tierra se comporta como un conductor que cumple la siguiente ecuación:

$$j = \sigma E$$

Dónde j es la densidad de corriente (Am^{-2}), σ es la conductividad del medio (Sm^{-1}) y E es el campo eléctrico (Vm^{-1}).

- El desplazamiento eléctrico es casi estático para los periodos de registro de MT. Las corrientes de desplazamiento eléctrico originadas por efectos de polarización se pueden considerar insignificantes comparadas con las corrientes de conducción, permitiendo considerar la inducción electromagnética de la Tierra como un proceso de difusión.
- Cualquier variación de la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética de las rocas se asumen mínimas comparadas con las variaciones en la conductividad total de las mismas.

Las formulaciones anteriormente descritas, las hipótesis aplicadas a la inducción electromagnética junto con las leyes de Faraday y Ampere se convierten en el dominio de la frecuencia expresado de la siguiente forma ([Simpson y Bahr, 2005](#); [Zhdanov, 2009](#); [Everett, 2013](#)):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -i\omega\vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= -i\omega\vec{E}\end{aligned}\tag{3}$$

Las componentes de los campos eléctrico y magnético son registradas en la superficie del terreno como series de tiempo; con el uso de la Transformada de Fourier estas series son transformadas en espectros de frecuencia. Las propiedades del medio por el cual se propagan las ondas electromagnéticas son influyentes en los valores registrados, mas no la fuente que genera las ondas electromagnéticas. El método de MT caracteriza la distribución de la conductividad eléctrica de los diferentes materiales de la Tierra, brindando información de las estructuras geológicas del subsuelo a diferentes profundidades en función de la frecuencia de registro ([Simpson y Bahr, 2005](#);

[Everett, 2013](#)).

En la propagación electromagnética para el método MT se puede considerar la función de transferencia geomagnética conocida como Tipper, los invariantes rotacionales o el tensor de fase y el tensor de impedancia magnetotelúrico; éste último contiene los valores de resistividad eléctrica aparente del subsuelo y el tensor de impedancia es utilizado en los diferentes métodos de inversión ([Simpson y Bahr, 2005](#); [Zhdanov, 2009](#)).

2.1.1. Tensor de impedancia. El tensor de impedancia es una matriz compleja de orden 2, representada por $Z_{(\omega)}$, que relaciona las componentes horizontales de los campos eléctrico \vec{E} y magnético ($\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$) considerando una frecuencia dada (ω) ([Simpson y Bahr, 2005](#); [Zhdanov, 2009](#)):

$$\vec{E}(\omega) = Z\vec{H}(\omega) \quad (4)$$

O como matrices:

$$\begin{pmatrix} E_x(\omega) \\ E_y(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x(\omega) \\ H_y(\omega) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Las componentes del tensor de impedancia se determinan durante el procesamiento para cada frecuencia, estas componentes son magnitudes complejas que en la práctica se descomponen en la resistividad aparente proporcional al módulo y en la fase que coincide con el argumento, las cuales son analizadas mediante la interpretación de los datos magnetotelúricos ([Simpson y Bahr,](#)

2005; Zhdanov, 2009). La resistividad aparente se expresa como:

$$\rho_{aij(\omega)} = \frac{1}{2\pi\mu\omega} |Z_{ij(\omega)}|^2 \quad (6)$$

Donde $\vec{E}(\omega) = Z\vec{H}(\omega)$, esta expresión puede tomar la forma de $Z = \vec{E}(\omega)/\vec{H}(\omega)$, asumiendo la propagación de una onda plana, asegurando la perpendicularidad entre los campos al atravesar un medio homogéneo infinito e isotrópico sin acumulaciones de carga, donde la resistividad aparente puede ser obtenida de la siguiente manera (Simpson y Bahr, 2005; Zhdanov, 2009):

$$\rho_{aij(\omega)} = \frac{1}{2\pi\mu\omega} \left| \frac{E_{i(\omega)}}{H_{j(\omega)}} \right|^2 \quad (7)$$

Y la fase se expresa de la siguiente manera:

$$\phi_{ij(\omega)} = \arctan \left(\frac{\text{Im}Z_{ij(\omega)}}{\text{Re}Z_{ij(\omega)}} \right) \quad (8)$$

Donde $ij = xx, xy, yx, yy$.

2.1.2. Propagación de ondas electromagnéticas. La teoría de la propagación de los campos electromagnéticos propone el uso de las ecuaciones de Maxwell en un medio magnetizable, polarizable y en presencia de un campo eléctrico, donde la corriente fluirá si la conductividad del medio es diferente de cero (Simpson y Bahr, 2005; Zhdanov, 2009). Una suposición fundamental al interpretar las mediciones de MT en un semi-espacio homogéneo, empleando las ecuaciones de Maxwell para un sistema de coordenadas geográficas con los ejes xyz , es que los campos fuente

inciden sobre la tierra como ondas planas uniformes. Los campos E y H son constantes en planos perpendiculares a la dirección de propagación; para una onda plana que se propaga en una tierra uniforme, donde la dirección z es positiva hacia abajo, se consideran los componentes de campo E_x y H_y como de interés, los otros componentes de los campos E y H quedan en cero (Simpson y Bahr, 2005; Zhdanov, 2009).

En la propagación de la onda electromagnética el exponente imaginario representa la componente de onda del campo eléctrico y el término del exponente real define la caída de la amplitud de la onda respecto a la profundidad. Es conveniente especificar la distancia en términos de longitud de onda, una longitud de onda es 2π radianes, y la distancia a la que logra una onda EM penetrar un conductor se denomina *Skin Depth*; la cual es menor a la longitud original, por lo que un *Skin Depth* es un poco menos de un sexto de una longitud de onda y está dada por (Simpson y Bahr, 2005):

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (9)$$

El principio que rige el *Skin Depth* electromagnético, está relacionado con el decaimiento exponencial de los campos electromagnéticos, los cuales al difundirse en un medio se representan por la siguiente ecuación:

$$\delta(T) = \left(\frac{T}{\pi\mu\sigma} \right)^{1/2} \quad (10)$$

Donde $\delta(T)$ es el *Skin Depth* electromagnético dado en metros en función del periodo T ,

σ es la conductividad del medio penetrado y μ es la permeabilidad magnética. A una profundidad $\delta(T)$ el campo electromagnético es atenuado por e^{-1} amplitudes de la superficie de la tierra, este decaimiento del campo disminuye la resolución para estructuras conductivas a la profundidad $\delta(T)$, por lo tanto en estudios MT, el *Skin Depth* electromagnético generalmente se iguala a la profundidad de una onda electromagnética en la tierra.

2.1.3. Profundidad de investigación. Considerando el comportamiento de ondas electromagnéticas en conductores, la penetración de una onda electromagnética depende de la frecuencia de oscilación, la cual actúa como un determinante de la profundidad de estudio. Las oscilaciones electromagnéticas de interés en MT tienen un rango desde aproximadamente 10^{-5} hasta 10^3 Hz, que pertenecen a la parte más baja del espectro electromagnético conocido, el cual corresponde a las ondas de radio largas (Figura 2). Este rango de frecuencias permiten un rango de profundidad de investigación desde 10 metros hasta cientos de kilómetros (Martí i Castells, 2006).

La profundidad de investigación en los métodos electromagnéticos se considera como la máxima profundidad en la cual un sensor determinado puede detectar un objeto. Se relaciona con diferentes factores como la sensibilidad del sensor, la precisión, el rango de frecuencias, tiempo de detección, el nivel de ruido ambiental, las propiedades del subsuelo y las técnicas utilizadas de procesamiento e interpretación de datos (Huang, 2005). Por lo tanto, es de gran importancia en el alcance de la comprensión de estructuras subsuperficiales.

El modelo más simple para determinar la profundidad de investigación es nuevamente el *Skin Depth* (Vozoff, 1972), en la teoría electromagnética clásica se considera que las señales de onda plana normalmente incidentes pierden $1/e \sim 0,368$ de su amplitud incidente después de pe-

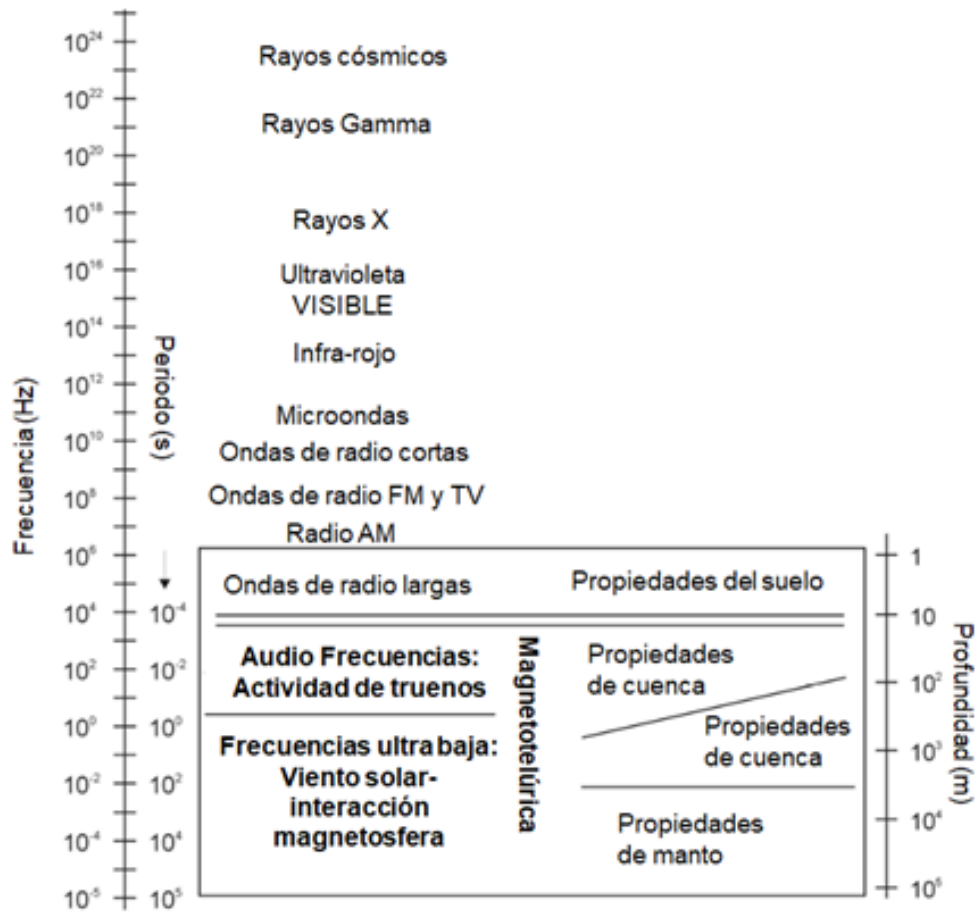


Figura 2. Representación esquemática del espectro electromagnético conocido. El cuadro negro corresponde a la parte del espectro usado en magnetotelúrica, donde la fuente de MT, objetivos y profundidad de investigación son indicados. Modificado de [Martí i Castells \(2006\)](#).

netrar una profundidad δ en un medio de conductividad σ homogéneo. El *Skin Depth* que usualmente se asigna en la Tierra es el valor de permeabilidad del espacio al factor μ , siendo este valor $e \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ HM}^{-1}$, aproximándose de esta manera a ([Simpson y Bahr, 2005](#); [Everett, 2013](#)):

$$\delta \approx \frac{500}{\sqrt{\sigma f}} \quad (11)$$

Donde σ es la conductividad eléctrica del medio (S/m) y f es la frecuencia más baja uti-

lizada (Hz). En condiciones ideales, la profundidad de investigación puede ser mayor que el *Skin Depth*, sin embargo, en zonas geográficamente complejas y/o ruidosas, la profundidad puede ser mucho menor.

Una de las técnicas más utilizadas actualmente para estimar la profundidad de investigación es la metodología heurística de la transformada de Niblett-Bostick ([dos Santos et al., 2013a](#)), la cual proporciona la distribución de la resistividad como una función de la profundidad que se define como:

$$h = \sqrt{\frac{\rho_a(T)T}{2\pi\mu_0}} \quad (12)$$

Los valores de resistividad asociados con la profundidad se obtienen a partir de:

$$\rho_N(h) = |\rho_a| \frac{1 + m(T)}{1 - m(T)} \quad (13)$$

donde la curva de resistividad aparente se define como:

$$m(T) = \frac{d \log |\rho_a|}{d \log T}, o$$

$$\rho_B(h) = |\rho_a| \left(\frac{\pi}{2\varphi} - 1 \right) \quad (14)$$

Los valores de ρ_N y ρ_B son, respectivamente, resistividad de Niblett y de Bostick. Además, ρ_N se obtiene de la resistividad aparente, mientras que ρ_B tanto de la resistividad aparente como

de la fase.

[Borah y Patro \(2019\)](#) proponen un enfoque diferente a los cálculos mencionados anteriormente de la profundidad de investigación, basándose únicamente en los datos MT medidos, teniendo en cuenta la medida de fase (φ) la cual proporciona el desfase entre el campo magnético H y el campo eléctrico E para la frecuencia de evaluación más baja, calculando así la profundidad de investigación (*depth of investigation*-DOI) expresado mediante la siguiente ecuación:

$$Z_{max} = \left(\frac{3\pi}{4} - \theta^l \right) \times \delta_l \quad (15)$$

Donde el *Skin Depth* (δ_l , en metros) y el valor de fase (θ^l , en radianes) se calculan para la frecuencia más baja (f_l).

2.2. Métodos de inversión

La inversión es una herramienta que permite traducir datos adquiridos en un modelo, de la o las propiedades físicas de la tierra de interés, que sea consistente con los datos obtenidos tanto en campo como en el conocimiento geológico ([Kang et al., 2017](#)).

La interpretación de los datos adquiridos en términos de la distribución de resistividad del subsuelo se realiza mediante simulación numérica. Se inicia generalmente discretizando el medio en capas (1D) o en celdas (2D o 3D) de resistividad homogénea, las ecuaciones de Maxwell se resuelven en forma discreta (diferencias finitas o elemento finito) simulando la propagación de las ondas para calcular la impedancia en el modelo generado, proceso conocido como “el problema directo”.

La impedancia calculada en la simulación es comparada con las observadas, se hace un ajuste al modelo de manera iterativa hasta que su respuesta de la simulación se ajuste a las observaciones, este último proceso se conoce como “inversión de datos” o “problema inverso”. Para la minimización de la función objetivo, usualmente el residual entre los datos observados y los calculados, se utiliza algún algoritmo de optimización, a esta función objetivo se le agrega generalmente alguna condición adicional como la *smoothness* en el modelo ([Salas Ariza, 2012](#)).

Dentro de los diferentes métodos desarrollados para inversión geofísica 1D en datos magnetotelúricos se mencionan los más utilizados actualmente accesibles en los programas de modelamiento e inversión; estos son la transformada de Bostick y el algoritmo de Occam. A través de los años con el aumento de la potencia computacional, existe un impulso en extraer información

de los datos geofísicos. Además, los estudios geofísicos se están aplicando en entornos cada vez más desafiantes. Como resultado, las geociencias se están moviendo hacia la integración de información geológica y geofísica para caracterizar mejor el subsuelo. Estos desafíos, combinados con inconsistencias entre diferentes conjuntos de datos, a menudo hacen que la integración y la implementación sean complicadas y/o no reproducibles. El desarrollo de nuevas metodologías de inversión como la propuesta por [Cockett et al. \(2015\)](#) en SimPEG para abordar estos desafíos permite a los investigadores el fácil acceso a herramientas consistentes y bien probadas que se pueden ampliar, adaptar y combinar.

Entre los diferentes aportes actuales en los procesos de inversión geofísica se encuentran los de [Hall \(2016\)](#); [Kang et al. \(2017\)](#), los cuales expresan cómo discretizar el problema MT 1D, cómo diseñar una malla adecuada y exploran un ejemplo de no unicidad para la configuración de inversión 1D usando la herramienta SimPEG. Aunque [Kang et al. \(2017\)](#) consideran el problema inverso como un problema de optimización expresan que no necesariamente se llega a un mínimo real, ya que siempre existe incertidumbre con los datos. Debido a la existencia de esta incertidumbre en los datos, no se debe tratar de conducir el modelo a su verdadero mínimo, ya que esto puede producir la inclusión de estructuras no existentes en el modelo para ajustar los datos observados.

2.2.1. Teoría de inversión. Uno de los métodos básicos para resolver los primeros problemas de inversión es la aplicación del método de regresión lineal, la cual busca definir una curva que aproximadamente toque la mayor cantidad de datos ([Aster et al., 2013a,b](#); [Salas Ariza, 2012](#)):

$$d = F(m) + e \quad (16)$$

donde d corresponde a los datos observados, $F(m)$ es la respuesta del modelo directo y e es el error de ajuste. Los modelos son discretizados en M bloques de resistividad constante $m = [m_1, m_2, \dots, m_M]$ y hay N número de datos observados $d = [d_1, d_2, \dots, d_N]$, con N errores $e = [e_1, e_2, \dots, e_N]$. En la teoría de inversión se hace uso de un criterio de mínimos cuadrados u optimización, éste busca minimizar la diferencia entre los datos observados d y la respuesta del modelo $F(m)$ (Aster et al., 2013a,b; Salas Ariza, 2012):

$$\|d - F[m]\|^2 \quad (17)$$

Debido a que la función $F(m)$ es no-lineal respecto a m , los parámetros del modelo (resistividades en las celdas), no se puede utilizar la técnica estándar de mínimos cuadrados y se debe proceder a la linealización del problema. Además del problema de no linealidad, los problemas electromagnéticos están mal condicionados, es decir, tienen inestabilidad numérica, no tienen solución numérica o tienen más de una solución, definido como problema de no unicidad (Aster et al., 2013a,b; Salas Ariza, 2012).

Para obtener una solución numérica de un problema inverso mal planteado (ill-posed), Tikhonov y Arsenin (1977) introdujeron el “método de regularización”, lo que considera agregar información sobre el vector de incógnitas, para estabilizar la solución, introduciendo las técnicas de inversión como la norma cuadrática de un operador diferencial para controlar la *smoothness* o

rugosidad del modelo:

$$\min \|d - F[m]\|^2 + \alpha \|Lm\|^2 \quad (18)$$

El balance entre el ajuste a los datos $\|d - F[m]\|^2$ y la estabilización $\|Lm\|^2$ se realiza mediante un parámetro global de regularización α .

2.2.2. Magnetotelúrica 1D. Para un comportamiento 1D de la resistividad, se considera que la distribución varía sólo con la profundidad de la Tierra, como resultado de esto las funciones de transferencia MT son independientes de los ejes de medición, los elementos de la diagonal del tensor de impedancia Z_{xx} y Z_{yy} son cero y los elementos fuera de la diagonal Z_{xy} y Z_{yx} son iguales en magnitud pero opuestos en signos. Para este caso se representa el tensor de impedancia de la forma ([Zhdanov, 2009](#)).

$$Z_{1D} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{xy} \\ -Z_{yx} & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

La correspondiente resistividad aparente y la fase se definen por:

$$\begin{aligned} \rho_a &= \frac{1}{\mu \omega} |Z|^2 \\ \phi_a &= \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}Z}{\text{Re}Z} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

2.3. Transformada de Bostick

La transformada de Bostick (Bostick, 1977) presenta un esquema de inversión heurístico que genera una distribución de resistividad continua o casi continua en función de la profundidad. Se ha considerado que el problema inverso MT 1D está bien condicionado para la conductancia, por lo que las mediciones magnetotelúricas están más directamente relacionadas con la conductancia que con la conductividad (Gomez-Treviño, 1996). Niblett y Sayn-Wittgenstein (1960) expresan matemáticamente una relación aproximada entre las medidas y una distribución de conductividad arbitraria, considerando las conductividades aparentes medidas como (Gomez-Treviño, 1996):

$$\sigma_a(T) = 2\pi\mu_0 T^{-1} |Z|^{-2} \quad (21)$$

donde $\sigma_a(T)$ representa la conductividad aparente, μ_0 la permeabilidad del espacio vacío, y Z la impedancia eléctrica en la superficie de la Tierra medida en un periodo T . La relación entre σ_a y la conductividad vertical del perfil fue obtenida por Niblett y Sayn-Wittgenstein (1960) asumiendo una aproximación de diferencias finitas en las ecuaciones de Maxwell, obteniendo (Gomez-Treviño, 1996):

$$\sigma_a(T) = \int_0^h k_a(\sigma_a, T, z) \sigma(z) dz \quad (22)$$

Esta expresión indica que σ_a representa el promedio de $\sigma(z)$ desde la superficie de la Tierra hasta una profundidad máxima h , donde (Gomez-Treviño, 1996):

$$h = \sqrt{\frac{T}{2\pi\mu_0\sigma_a}} \quad (23)$$

y

$$\begin{aligned} k_a(\sigma_a, T, z) &= \frac{1}{h} \quad \text{si } z \leq h \\ k_a(\sigma_a, T, z) &= 0 \quad \text{si } z > h \end{aligned} \quad (24)$$

En la misma expresión también se puede considerar que el producto $\sigma_a h$, que se puede calcular directamente a partir de los datos, representa la conductancia para la región $z \leq h$. Esto significa que las mediciones magneto-telúricas en la superficie de la Tierra son esencialmente mediciones de conductancia. El perfil de conductividad $\sigma(h)$ puede entonces recuperarse simplemente tomando la derivada de $\sigma_a h$ con respecto a h (Gomez-Treviño, 1996).

El obtener $\sigma(h)$ usando la derivación representa un método de inversión exacto, en el sentido de que $\sigma(h)$ es una solución exacta de la integral no lineal en $\sigma_a(T)$. Esta solución se conoce como la transformación de Niblett-Bostick y se expresa de la siguiente manera (Gomez-Treviño, 1996):

$$\sigma(h) = \sigma_a(T) \frac{1+m}{1-m} \quad (25)$$

Donde

$$m = \frac{\partial \log \sigma_a}{\partial \log T} \quad (26)$$

Las transformaciones de Bostick y Niblett son esencialmente la misma siendo las más adecuadas en caso de no tener buenos datos de fase (Rojas Sarmiento, 2012). La transformada de Bostick crea básicamente una distribución continua de la resistividad en función de la profundidad, la resistividad aparente y la fase ϕ , por lo que se puede expresar también como (Corbo, 2006):

$$\begin{aligned} \rho(Z) &= \rho_a(\omega) \left(\frac{\pi}{2\phi(\omega)} - 1 \right) \\ Z &= \sqrt{\frac{\rho_a(\omega)}{\mu \omega}} \end{aligned} \quad (27)$$

Donde μ es la permeabilidad magnética del vacío, los valores de Z corresponden a las profundidades nominales de semi-espacios isotrópicos y homogéneos de resistividad aparente ρ_a para cada valor de frecuencia angular ω (Corbo, 2006; Zhdanov, 2009).

2.3.1. Magnetotelúrica en Paipa (Boyacá). La magnetotelúrica por su profundidad de investigación se ha usado para el estudio de sistemas geotérmicos por autores como Moyano Nieto (2014); Aparicio Monjarás y Canjura Guzmán (2017); Silva Benavides y Uribe Joya (2018). Silva Benavides y Uribe Joya (2018) realizaron un trabajo de investigación cerca del Sistema Geotérmico de Paipa (SGP), Boyacá, localizado en el Altiplano Cundiboyacense (Cordillera Oriental) donde afloran las rocas sedimentarias del Cretácico y Cenozoico, con presencia de fallas de tipo regional que generan estructuras de gran importancia al considerarse ligadas con las fuentes

termales. [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en la adquisición de datos geofísicos registraron información en quince (15) estaciones de MT, las cuales fueron ubicadas a partir de la interpretación de perfiles geológicos.

2.3.1.1. Geología. En el área relacionada con el SGP afloran unidades sedimentarias (Figura 3) correspondientes al Cretácico como lo son el Grupo Churuvita (Kch), Formación Conejo (Kc), Formación Plaeners (Kpl), Formación Los Pinos (Klp), Formación Labor y Tierna (Klt) y Formación Guaduas (KPgg), constituidas por sedimentos asociados a areniscas, shales, arcilla y limolita. Este material de roca se considera con alta capacidad de absorción de agua debido a su porosidad. La unidad del Paleógeno en el área de estudio del SGP es la Formación Bogotá (Pgb) constituida por areniscas cuarzosas principalmente. Las unidades del Neógeno en el SGP se asocian a depósitos de materiales volcánicos predominantemente piroclásticos y a depósitos de edad Cuaternaria ([Silva Benavides y Uribe Joya, 2018](#)).

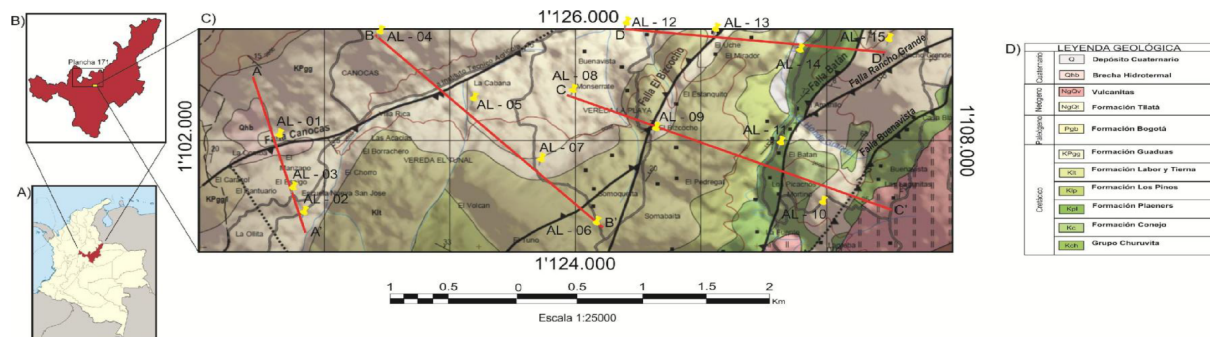


Figura 3. Localización del departamento de Boyacá (A), donde en el municipio de Paipa (B) se realizó el trabajo de investigación por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#). Donde se generaliza la geología (C) aflorante (D) en el área de estudio y la ubicación de las estaciones de campo (pines amarillos). Tomado de [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#).

En el SGP predominan las fallas longitudinales con dirección NNE-NE, orientación paralela

a la de la mayoría de estructuras en la Cordillera Oriental, incluso a las fallas regionales principales (Silva Benavides y Uribe Joya, 2018). Las estructuras presentes en el área de estudio, de oriente a occidente, son:

- Falla El Batán. Falla inversa con dirección NNE y vergencia NW la cual pone en contacto la Formación Plaeners (Kpl) con el Grupo Churuvita (Kch) y Formación Conejo (Kc). A su vez, dos fallas satélites se encuentran al este, con una dirección similar, pero vergencia opuesta afectando las mismas litologías. Una de estas fallas continúa al sur, hasta inmediaciones de la caldera (Falla Buenavista), mientras que la segunda sólo ocurre en la zona de la Falla Rancho Grande (Silva Benavides y Uribe Joya, 2018).
- Falla El Bizcocho. Falla inversa con dirección NNE y vergencia NW la cual pone en contacto la Formación Guaduas (KPgg) con la Formación Labor y Tierna (Klt). Al igual que la Falla El Batán, una falla satélite que se origina en la zona, con dirección NNE, la cual se extiende hacia el sur (Silva Benavides y Uribe Joya, 2018).
- Falla Canocas. Falla inversa con dirección NE y vergencia SE, la cual atraviesa a la Formación Guaduas (KPgg). Su trazo pasa por el sector de “El Durazno” (Ahora llamado El Manzano), donde las brechas hidrotermales (Qhb) se explotan para extraer puzolana (Silva Benavides y Uribe Joya, 2018).

En el proyecto se utilizó el equipo STRATAGEM EH4 (Geometrics, INC., 2011), construido por la compañía estadounidense Geometrics, en asociación con Electromagnetic Instruments (EMI), integrado por una consola de comandos, un receptor y un transmisor con sus respectivas

antenas. Un total de 15 estaciones de adquisición de datos de magnetotelúrica usando la banda 3 con frecuencias de 0.1-75 Hz fueron realizadas a lo largo de cuatro perfiles definidos acorde a la geología. De los datos recolectados por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) se tiene acceso a las estaciones asociadas al Perfil B-B', por lo que se procede a mostrar sus resultados.

2.3.1.2. Perfil B-B'. El perfil B-B' tiene una longitud de 2.68 km (Figura 4), se desarrolla perpendicular al trazo de la Falla Canocas (falla inversa con dirección NE) y la falla satélite a la estructura El Bizcocho ubicándose en superficie sobre las unidades denominadas Formación Guaduas (KPgg), Formación Tilatá (NgQt), Formación Labor y Tierna (Klt). Se tomaron 4 estaciones MT, Paipa 04 ubicada en el bloque yacente de la Falla Canocas, Paipa 05 en el bloque colgante, Paipa 06 en el bloque yacente de la falla satélite a la Falla El Bizcocho y Paipa 07 en el bloque colgante ([Silva Benavides y Uribe Joya, 2018](#)).

Paipa 04. Ubicada sobre la Formación Guaduas (KPgg). Se obtuvieron valores de resistividad entre $10 - 300 \Omega \cdot m$ correspondientes a los 300–1200 metros de profundidad y se asociaron a la secuencia Cretácica. El Basamento Jurásico (J-Pz) se estimó a profundidades de 1500 metros, con resistividades entre $100 - 700 \Omega \cdot m$. No se observaron cambios asociados con la Falla El Batán ([Silva Benavides y Uribe Joya, 2018](#)).

Paipa 05. Ubicada sobre la Formación Tilatá (NgQt). La estación no registró datos confiables según los resultados de resistividad aparente, fase y coherencia, el valor estimado a los 700 metros de profundidad se asoció con la zona de despegue de la Falla El Batán ([Silva Benavides y Uribe Joya, 2018](#)).

Paipa 06. Ubicada sobre la Formación Labor y Tierna (Klt). Se obtuvieron valores de resistividad entre los $8 - 12 \Omega \cdot m$ y se asociaron con la secuencia Cretácica, a 800 metros de profundidad se

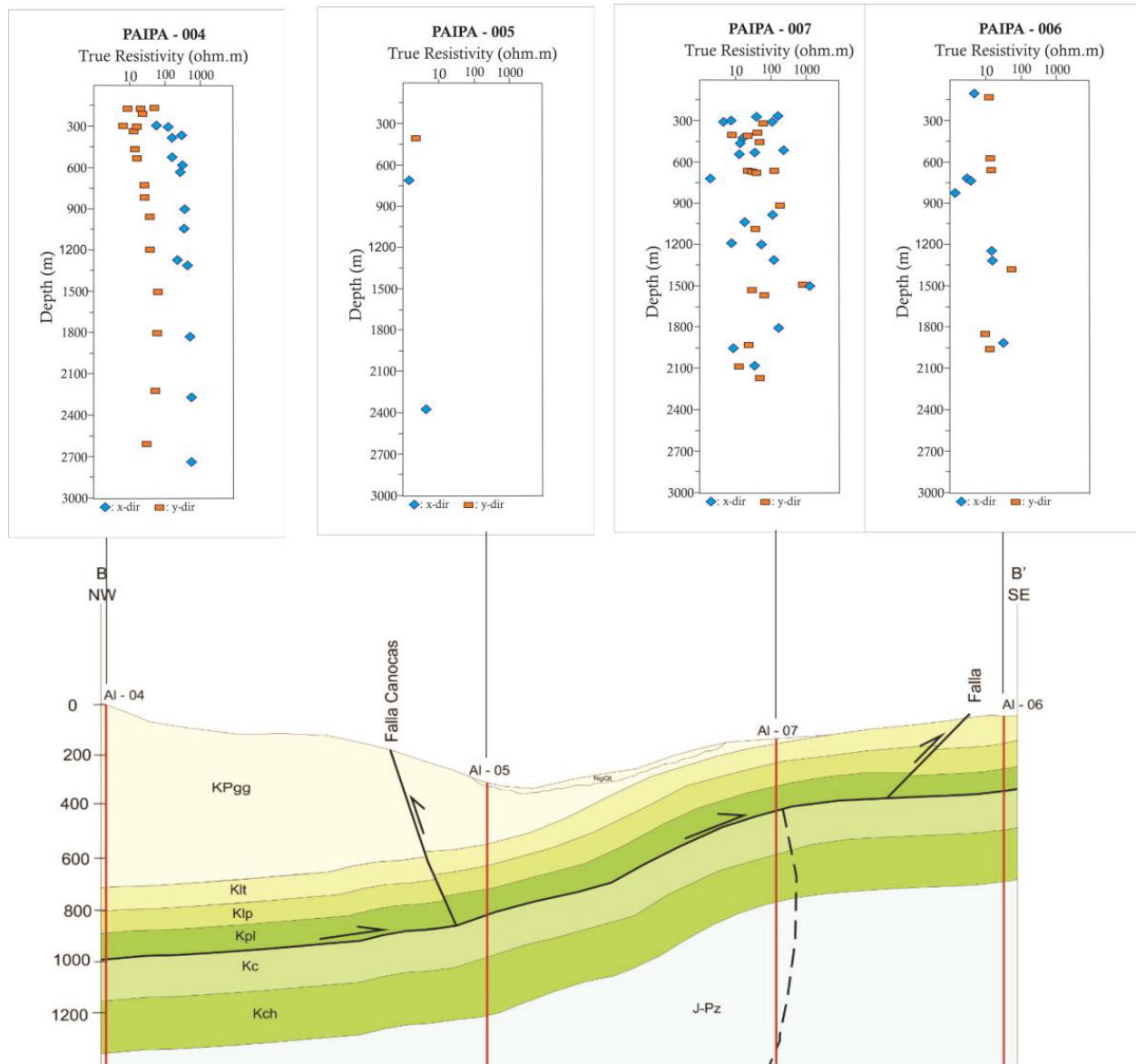


Figura 4. Resultados MT 1D para las estaciones Paipa 04, Paipa 05, Paipa 06, y Paipa 07 en el corte B-B' propuestos por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#). En la cual se observa la Falla Canocas al NW (izquierda de la figura) como falla inversa con inclinación al SE y una Falla no definida (derecha de la figura) inversa con inclinación al NW; esta ultima falla se conecta con la Falla El Bizcocho.

registró un valor anómalo que disminuyó la resistividad antes registrada, considerada como el límite entre la secuencia cretácica y el Basamento Jurásico (J-Pz) (Silva Benavides y Uribe Joya, 2018).

Paipa 07. Ubicada sobre la Formación Guaduas (KPgg). Se obtuvieron valores de la secuencia sedimentaria en los primeros metros con resistividades entre $8 - 300\Omega \cdot m$. A profundidades de 900 metros se infirió el Basamento Jurásico (J-Pz) con resistividades entre $100 - 1000\Omega \cdot m$ (Silva Benavides y Uribe Joya, 2018).

2.4. Algoritmo de Occam

El algoritmo de inversión Occam (Constable et al., 1987) conduce a un modelo simple que contiene las propiedades esenciales de todos los modelos posibles que se ajustan a los datos de campo. Una gran cantidad de modelos podrían coincidir con los datos observados, algunos de los cuales pueden ser muy complejos. Cuando se intenta lograr un mejor ajuste entre pequeñas longitudes de la curva calculada y observada de $\rho(\omega)$ y $\phi(\omega)$, la complejidad del modelo obtenido aumenta y los resultados a menudo no son confiables. El modelo debe ser tan complejo como el medio, pero no más complejo, el algoritmo parte de un medio espacio y produce un medio estratificado. Las resistividades varían hasta que se logre un ajuste adecuado entre las curvas de campo y las calculadas (Delgado-Rodríguez et al., 2013).

El problema es simple, se busca encontrar el mínimo de una función sujeta a una restricción, en este caso se tiene la condición de *smoothness* en el modelo para minimizar su rugosidad y esta sujeta a una condición de máximo ajuste a las observaciones, siendo la función objetivo (Constable

et al., 1987; Salas Ariza, 2012):

$$U = \|\partial m\|^2 + \lambda^{-1} \{\|Wd - Wf[m]\|^2 - X^2\} \quad (28)$$

Donde el primer término $\|\partial m\|^2$ es el operador diferencial que regula la “suavidad-rugosidad”, el segundo término $\|Wd - Wf[m]\|^2$ es la condición de ajuste, λ^{-1} es el multiplicador de Lagrange que es un parámetro de regularización que regula los dos términos de la expresión, W es la matriz de covarianza que pondera los datos y al modelo directo según su error estimado y X^2 es el nivel de error esperado (Salas Ariza, 2012).

En la inversión de sondeos geoeléctricos es posible generar más de un modelo como solución, por lo que el algoritmo de Occam tiene la ventaja de obtener modelos suavizados con el fin de evitar una sobre interpretación de los datos. Para evitar la sobre interpretación se emplea el concepto de aspereza o rugosidad, el cual se define como la integral del cuadrado de la primera o segunda derivada de las resistividades (m) en función de la profundidad (Z) de la siguiente manera (Rojas Sarmiento, 2012):

$$\begin{aligned} R_1 &= \int \left(\frac{dm}{dz} \right)^2 dz = \sum_{i=2}^N (m_i - m_{i-1})^2 \\ R_2 &= \int \left(\frac{d^2m}{dz^2} \right)^2 dz = \sum_{i=2}^{N-1} (m_{i+1} - 2m_i + m_{i-1})^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Donde m_i es la resistividad en la capa i -ésima y N el número de capas del modelo. El problema inverso se resuelve mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, buscando

el modelo de resistividades que minimiza R_1 convirtiendolo en el modelo más suavizado posible, quedando la función a minimizar expresada como (Rojas Sarmiento, 2014):

$$X^2 = R_1 + \lambda \sum_{j=1}^M \frac{d_j - [F_j(m)]^2}{\phi_j^2} \quad (30)$$

Donde λ es el multiplicador de Lagrange, d_j son los datos, $F_j(m)$ la respuesta del modelo (m), M el número de datos y ϕ_j es el error estimado del j-ésimo dato (Rojas Sarmiento, 2012; Rojas Sarmiento, 2014).

2.5. Inversión con SimPEG

En MT la inversión es la herramienta que permite traducir los datos medidos en un modelo de resistividades interpretables y consistentes con el conocimiento geológico. Kang et al. (2017) proponen el método de inversión no-lineal 1D utilizando diferencias finitas como uno de los más óptimos para obtener mejores resultados, pero el proceso de inversión depende también de la experiencia del geofísico y de las condiciones esperadas en el subsuelo.

En relación al proceso de inversión de datos magnetotelúricos, Cockett et al. (2015) proponen un esquema de implementación modular para la inversión basada en gradiente (Figura 5), mediante la librería de SimPEG de Python, la cual se usó en la presente tesis. SimPEG proporciona un marco de trabajo que soporta diferentes tipos de simulación directa en geofísica y problemas inversos deterministas que facilitan el proceso iterativo.

La inversión se divide en ocho componentes. La clase Malla (*Mesh*) proporciona los operadores numéricos y las herramientas para la discretización de la tierra por medio del método de

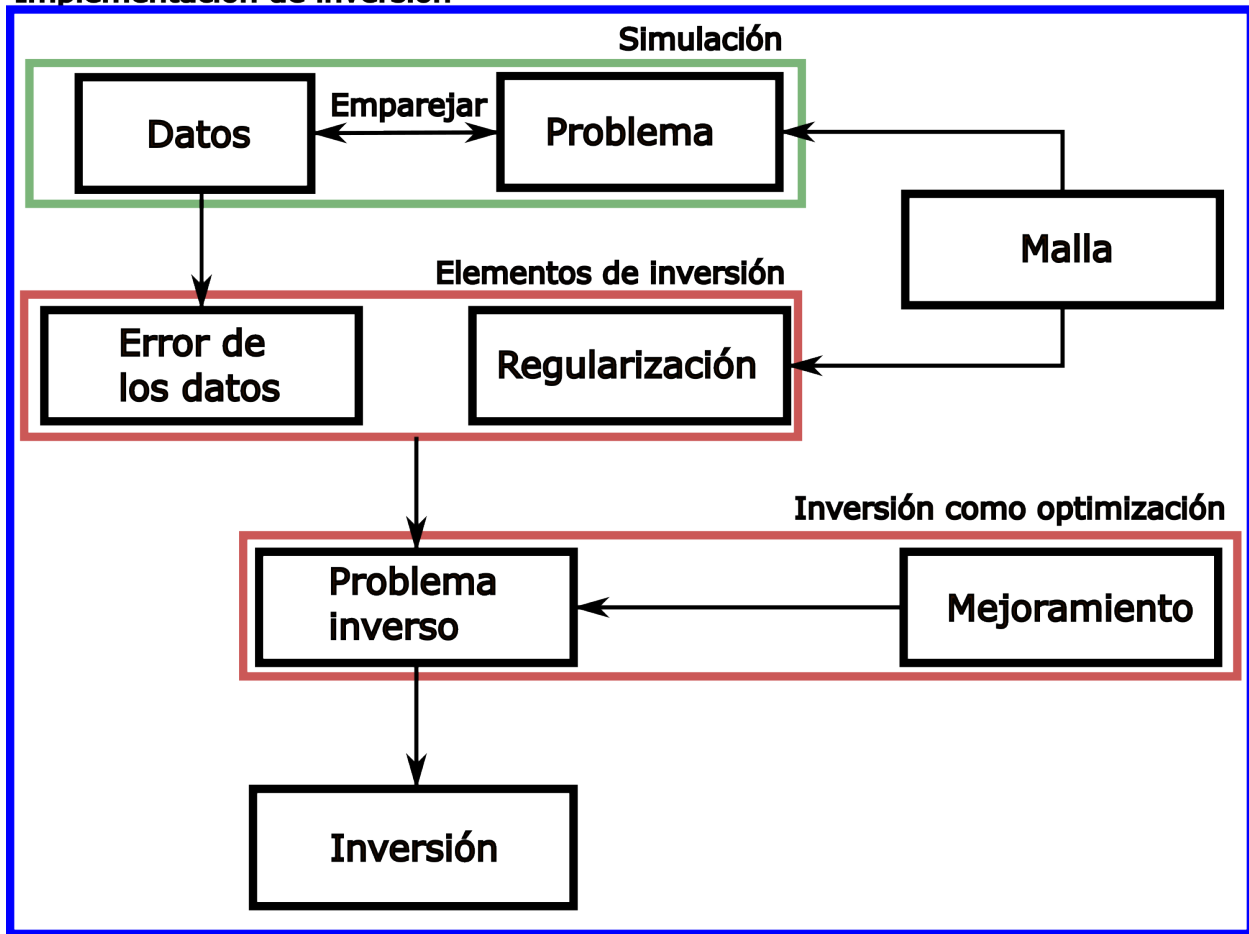
Implementación de Inversión

Figura 5. Marco SimPEG que indica el flujo de información. En la implementación, cada uno de estos módulos es una clase base. Tomado de [Cockett et al. \(2015\)](#).

volumen finito. La simulación directa (*forward simulation*) combina las clases Datos (*Survey*) y Problema (*Problem*) para formar los componentes necesarios en la simulación (adquisición, simulación de la física, crea campos geofísicos). Los elementos de inversión corresponden a:

Error de los datos (Φ_d): Evalúa el tamaño del desajuste entre los datos pronosticados o predichos ($d_{pred} = F[m]$) y los datos observados. Se expresa como la norma L2:

$$\Phi_d(m) = \frac{1}{2} \|W_d(F[m] - d_{obs})\|_2^2 \quad (31)$$

donde W_d es asignado y captura el ruido del modelo.

Regularización (Φ_m): Se construye para evaluar el ajuste del modelo con los supuestos y conocimiento previo. Generalmente se usa la regularización de Tikhonov, expresada como la norma L2:

$$\Phi_m(m) = \frac{1}{2} \alpha_s \|W_s(m - m_{ref})\|_2^2 + \alpha_x \|W_x(m)\|_2^2 \quad (32)$$

donde el primer término refiere a la pequeñez (*smallness*) que incluye el modelo de referencia (m_{ref}), y el escalar α_s pondera la importancia de este término en la regularización. El segundo término se denomina suavidad (*smoothness*) y refiere a una medida de cuán “suave” es el modelo, donde el escalar α_x pondera la importancia relativa de la suavidad *smoothness* en la regularización.

Los elementos de inversión descritos anteriormente se combinan con una rutina de la clase Optimización (*Optimization*) dentro de la clase Problema Inverso (*Inverse Problem*) planteando la minimización de la función de costo:

$$\Phi(m) = \left(\frac{1}{2} \|W_d(F[m] - d_{obs})\|_2^2 \right) + \beta \left(\frac{1}{2} \alpha_s \|W_s(m - m_{ref})\|_2^2 + \alpha_x \|W_x(m)\|_2^2 \right) \quad (33)$$

donde β es el parámetro de compensación *trade-off* que pondera la importancia relativa del

error en los datos (*data misfit*) y regularización (*regularization*) en el proceso de optimización. Las rutinas de optimización en SimPEG incluyen el *steepest descent*, *L-BFGS* y *Inexact Gauss-Newton*.

Cuando β es grande las soluciones corresponden a una norma del modelo pequeño pero con grandes desajustes (*misfit*) (Figura 6). Por el contrario, cuando β es pequeño los desajustes son pequeños pero la norma del modelo es grande (Oldenburg y Li, 2005). Se ha utilizado el criterio de la curva L para estimar una regularización óptima, donde se evalúa el desajuste de los datos en función de la norma del modelo, esta curva se conoce como la curva de Tikhonov (Oldenburg y Li, 2005).

Por último, la clase Problema inverso (*Inverse Problem*) es la declaración matemática que se resuelve numéricamente ejecutando la clase Inversión (*Inversion*) que maneja la organización y distribución de directivas entre todas las piezas del marco SimPEG para recuperar el modelo que tenga un mejor ajuste.

A partir de la implementación modular se observa que hay muchas opciones para elegir: definir incertidumbres sobre los datos (W_d), seleccionar un modelo de referencia (m_{ref}), elegir la importancia de los parámetros α_s y α_x , y seleccionar un parámetro de compensación (β) (Kang et al., 2017).

Nurjaman (2019) investigo sobre la inversión 1D de datos magnetotelúricos (MT) medidos en campo utilizando SimPEG. El modelo de inversión de los datos medidos de MT corresponde a la cuenca de Banyumas; el modelado de inversión unidimensional para estaciones de medición de datos de 5 MT proporciona información de la existencia de 3 capas: una capa conductora a una profundidad de menos de 1000 m, una capa resistiva dominada por rocas sedimentarias a una

profundidad de más de 1000 m y capas constituyentes del lecho rocoso a una profundidad de más de 10 km con un error RMS promedio de 0.537 %.

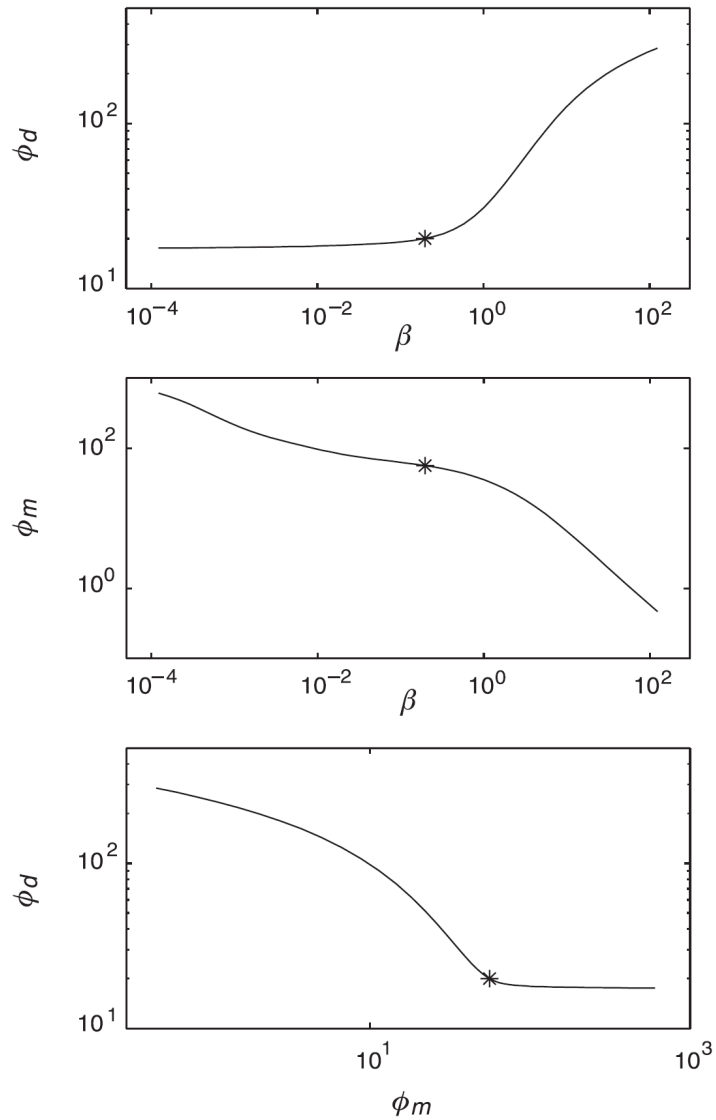


Figura 6. La imagen superior y central muestran el cambio del desajuste de datos Φ_d y la norma Φ_m del modelo, respectivamente, en función del parámetro de regularización. La imagen inferior es la curva de Tikhonov que evalúa el valor de desajuste Φ_d de los datos en función de la norma del modelo Φ_m ; donde se considera como la solución (estrella) en función del criterio de la L-curve. Tomado de [Oldenburg y Li \(2005\)](#).

Muttaqien y Nurjaman (2021) realizan la inversión de datos sintéticos MT utilizando SimPEG; partiendo de generar un modelo directo de conductividad, cuyo objetivo es producir datos sintéticos MT en modo TE (transversal eléctrico), modo TM (transversal magnético) y una combinación de modo TE y TM. Con el modelo y los datos generados realizan un modelo de inversión en los datos sintéticos de MT, donde incluyen un 5 % de ruido gaussiano. La calidad de los resultados se validan comparando el modelo verdadero, el modelo de inversión entre los datos observacionales (sintéticos) y los datos predichos.

Los parámetros que se disponen para realizar la inversión de datos magnetotelúricos con SimPEG corresponden a:

Incertidumbres en los datos W_d . Puede ser elegido para cada dato en específico, dependiendo de la información obtenida. Generalmente, se asume que los errores en los datos son gaussianos y no están correlacionados, su inclusión se hace estimando la desviación estándar para cada dato. Matemáticamente este parámetro corresponde a una matriz diagonal cuyos elementos son iguales a $W_{dii} = 1/\varepsilon_i$ donde ε_i es una desviación estándar estimada del i-ésimo dato.

Modelo de referencia m_{ref} . Corresponde a la construcción de un modelo de referencia basado en la información a priori del área de estudio. Puede corresponder a conocimiento previo tomado en campo, perforaciones u otros métodos geofísicos aplicados previamente.

Modelo de inicialización m_0 . Corresponde al modelo inicial en el cual el algoritmo va a comenzar a iterar y/o modificar el modelo recuperado, para obtener una solución numérica.

Parámetro de *smallness* α_s . Corresponde a un parámetro escalar de regularización que pondera la importancia del modelo de referencia en la función de regularización.

Parámetro de *smoothness* α_x . Corresponde al segundo parámetro en la regularización, y se refiere a una medida de cuan “suave” es el modelo, es decir, este parámetro pondera la importancia relativa de la *smoothness* en la regularización.

Parámetro de compensación (Tikhonov) β . Es una constante positiva que pondera la importancia relativa de las funciones *data misfit* y *regularization* en el proceso de optimización. Si el valor de β es muy grande, entonces la función $\Phi(m)$ produce un modelo que minimiza el termino regularización y produce un gran $\Phi_d(m)$. Pero si el valor de β es muy pequeño, entonces $\Phi(m)$ produce un modelo que ajusta muy bien los datos, pero está contaminado con una estructura excesiva de modo que $\Phi_m(m)$ es muy grande.

$$\Phi(m) = \Phi_d(m) + \beta \Phi_m(m) \quad (34)$$

3. Aspectos metodológicos

Para el desarrollo de la presente tesis se utilizaron datos adquiridos por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) con el equipo Stratagem de la Universidad Industrial de Santander, para el estudio de áreas relacionadas al Sistema Geotérmico de Paipa (Boyacá). En la adquisición se usaron las frecuencias de 79.4, 63.1, 50.1, 39.8, 31.6, 25.1, 20.0, 15.8, 12.6, 10.0, 7.94, 6.31, 5.01, 3.98, 3.16, 2.51, 2.0, 1.58, 1.26, 1.0, 0.794, 0.501, 0.398 y 0.2 Hz, correspondientes a la banda 3 del equipo, consideradas para los modelos sintéticos presentados en este documento. Se calculó la profundidad máxima de investigación a partir del trabajo realizado por [Borah y Patro \(2019\)](#), donde:

$$Z_{max} = \left(\frac{3\pi}{4} - \theta^l \right) \times \delta_l \quad (35)$$

Para el cálculo del *Skin Depth*, se considero la frecuencia mas baja (f^l), donde:

$$\delta = 500 \sqrt{\frac{\rho}{f^l}} \quad (36)$$

Se consideraron las resistividades aparentes mínimas, medias y máximas obtenidas en la adquisición y simulación para la etapa de inversión. La fase para la frecuencia mas baja θ^l se calculó considerando los valores de impedancias medidos para la respectiva componente con la siguiente ecuación:

$$\theta^l = \arctan \frac{Z_{img}}{Z_{real}} \quad (37)$$

El análisis del método de inversión con SimPEG se realizó mediante el código de [Kang et al. \(2017\)](#) para la etapa de simulación en la adquisición de datos MT a dos modelos sintéticos (Figura 7):

- El Modelo Sintético A corresponde a una intercalación de cinco (5) capas de alta ($70 \Omega \cdot m$) y baja ($10 \Omega \cdot m$) resistividad con espesores de 900, 100, 500 y 500 metros para las primeras 4 capas. Este modelo tiene como objetivo evaluar si una capa de alta resistividad se enmascara cuando se encuentra en medio de dos capas de baja resistividad o si presenta algún cambio en el espesor.
- El Modelo Sintético B considera la interpretación y resultados de [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en Paipa 06, para una primera capa de 700 m y $8 \Omega \cdot m$, una segunda capa de 100 m y $7 \Omega \cdot m$, una tercera capa de 400 m y $1 \Omega \cdot m$, una cuarta capa de 600 m y $20 \Omega \cdot m$ y una quinta capa con una resistividad de $70 \Omega \cdot m$. El objetivo de este modelo es poder comparar los resultados de Paipa 06 respecto a su comportamiento durante la inversión.

Considerando los trabajos y códigos desarrollados con la herramienta de SimPEG por [Kang et al. \(2017\)](#); [Nurjaman \(2019\)](#); [Muttaqien y Nurjaman \(2021\)](#) para la etapa de inversión de los datos adquiridos durante la simulación de los dos modelos sintéticos, se procedió a la modificación de los códigos para la automatización de la tarea y se incluyó la profundidad de investigación propuesta por [Borah y Patro \(2019\)](#). El proceso de automatización tuvo como objetivo evaluar la influencia de los parámetros α_s y α_x variando ambos parámetros entre los valores 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 y analizar la influencia en el error del modelo recuperado. Donde se obtuvo un máximo inicial

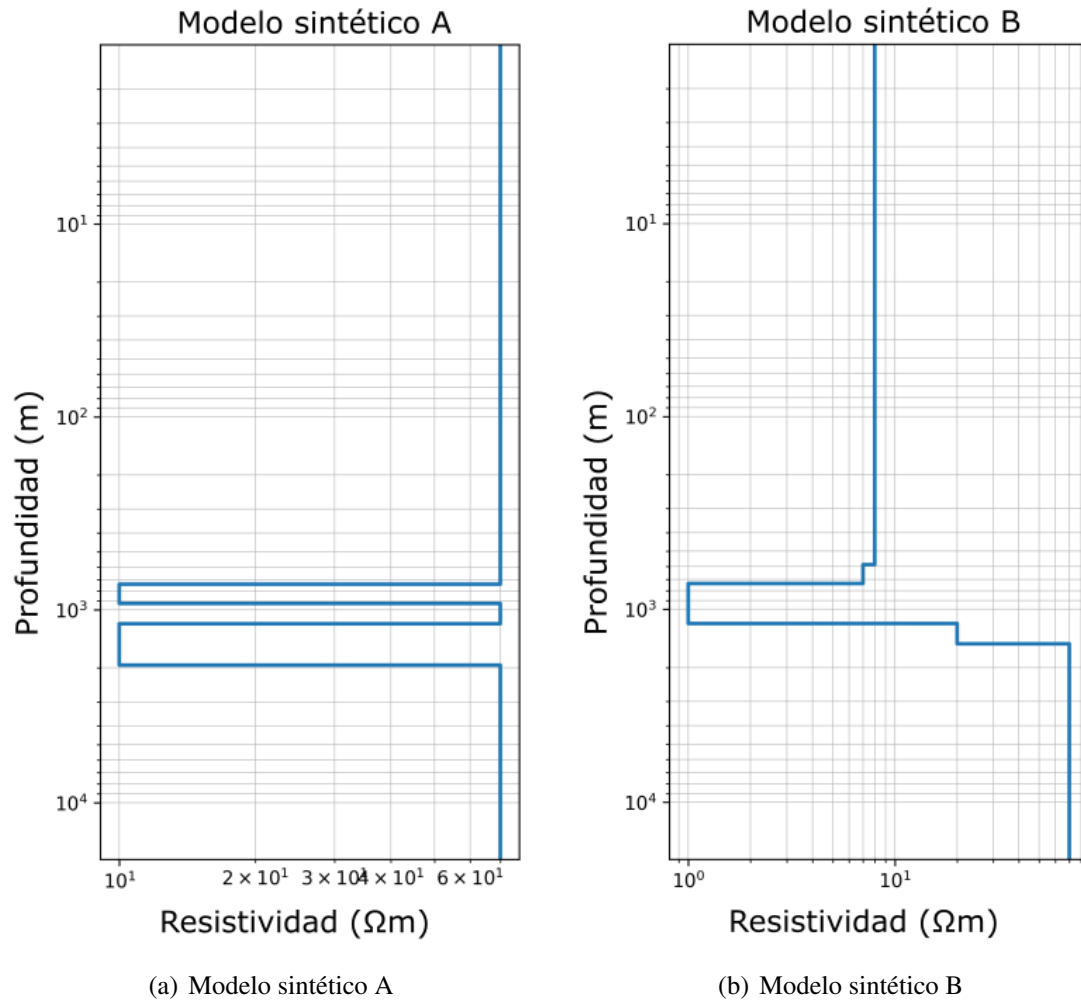


Figura 7. Modelos sintéticos a evaluar, el modelo sintético A corresponde a un modelo de intercalación de capas de alta y baja resistividad con diferentes espesores. El modelo sintético B se considera a partir de la interpretación de [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en Paipa 06.

de 10 iteraciones para cada modelo sintético y se evaluó el comportamiento del modelo recuperado al cambiar los valores de dichos parámetros. Finalmente se procedió a realizar la inversión con SimPEG, la transformada de Bostick y el algoritmo de Occam para los datos de MT de Paipa 06 para ser comparados posteriormente.

4. Resultados y análisis

En el presente capítulo se expondrán los resultados, análisis y observaciones de los diferentes modelos obtenidos a partir de los datos objeto de estudio, variando los parámetros *smallness* α_s y *smoothness* α_x ; cabe considerar que se le asignó el nombre de Paipa a los resultados e interpretaciones realizadas por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) y Estación a la inversión realizada con estos mismos datos.

4.1. Modelo Sintético A

Se generaron tres modelos iniciales para el Modelo Sintético A donde se evaluó el comportamiento del *Skin Depth*, la profundidad de investigación Z_{max} y la influencia en la inversión de los datos. El Modelo 01 usó la resistividad mínima medida, el Modelo 02 usó la resistividad media medida y el Modelo 03 usó la resistividad máxima medida. El *Skin Depth* es directamente proporcional a la resistividad del medio, la cual afecta la profundidad máxima de investigación calculada para la ejecutar la inversión (Tabla 1), este comportamiento evidencia una relación para los tres modelos iniciales donde el Z_{max} es 1.8 veces el *Skin Depth*, y la profundidad de investigación para cada uno de los modelos fue de aproximadamente 8.8 km para el Modelo 01 (resistividad del medio de $19.35 \Omega \cdot m$), 14.3 km para el Modelo 02 (resistividad del medio de $50.45 \Omega \cdot m$) y 19.8 km para el Modelo 03 (resistividad del medio de $97.20 \Omega \cdot m$).

Al variar los parámetros de *smallness* α_s y de *smoothness* α_x para el Modelo Sintético A se observó que el error cuadrático medio (RMSE) (Figura 8) fue bajo cuando α_s tiende a ser mínimo y cuando α_x máximo. Al evaluar los modelos recuperados con menor RMSE usando una resistividad

Tabla 1

Resistividad aparente de referencia para el calculo del Skin Depth y la profundidad de investigación Z_{max} para el Modelo Sintético A.

Modelo Sintético A	ρ_a [$\Omega \cdot m$]	Skin Depth [m]	Z_{max} [m]	$Z_{max}/SkinDepth$
Modelo 01	19.35	4918.77	8853.22	1.80
Modelo 02	50.45	7941.30	14293.43	1.80
Modelo 03	97.20	11023.23	19840.54	1.80

del medio mínima (Figura 9), media (Figura 11) y máxima (Figura 13), se observó que estos son mas coherentes con el Modelo Sintético A. Esta coherencia resultó cuando las resistividades del medio correspondían al valor medio (Figura 12) o valor máximo (Figura 14) de la resistividad aparente medida en comparación a cuando se usaba el valor mínimo (Figura 10).

Al emplear el análisis de la curva de Tikhonov donde se usó el criterio de la L-curve para evaluar las iteraciones que cumplen este criterio se encontró que: la influencia del parámetro de regularización generó un aumento en Φ_d y una disminución en Φ_m cuando β aumentó, y una disminución en Φ_d y un aumento en Φ_m cuando β disminuyó. Las iteraciones 3 y 4 del Modelo Sintético A lograron encontrar a partir del análisis de la curva de Tikhonov la solución donde Φ_d y Φ_m eran mínimos (Figura 15). Las gráficas de los datos observados y los datos calculados para los tres modelos iniciales del Modelo Sintético A se consideran con buen ajuste, reflejado en los modelos recuperados, los cuales difieren en que tan evidente es la capa intermedia de alta resistividad. Donde es poco evidente la presencia de esta capa cuando la resistividad del medio es mínima, se hace mas evidente cuando la resistividad del medio es el promedio de las resistividades aparentes medidas y se evidencia en menor magnitud cuando es máxima.

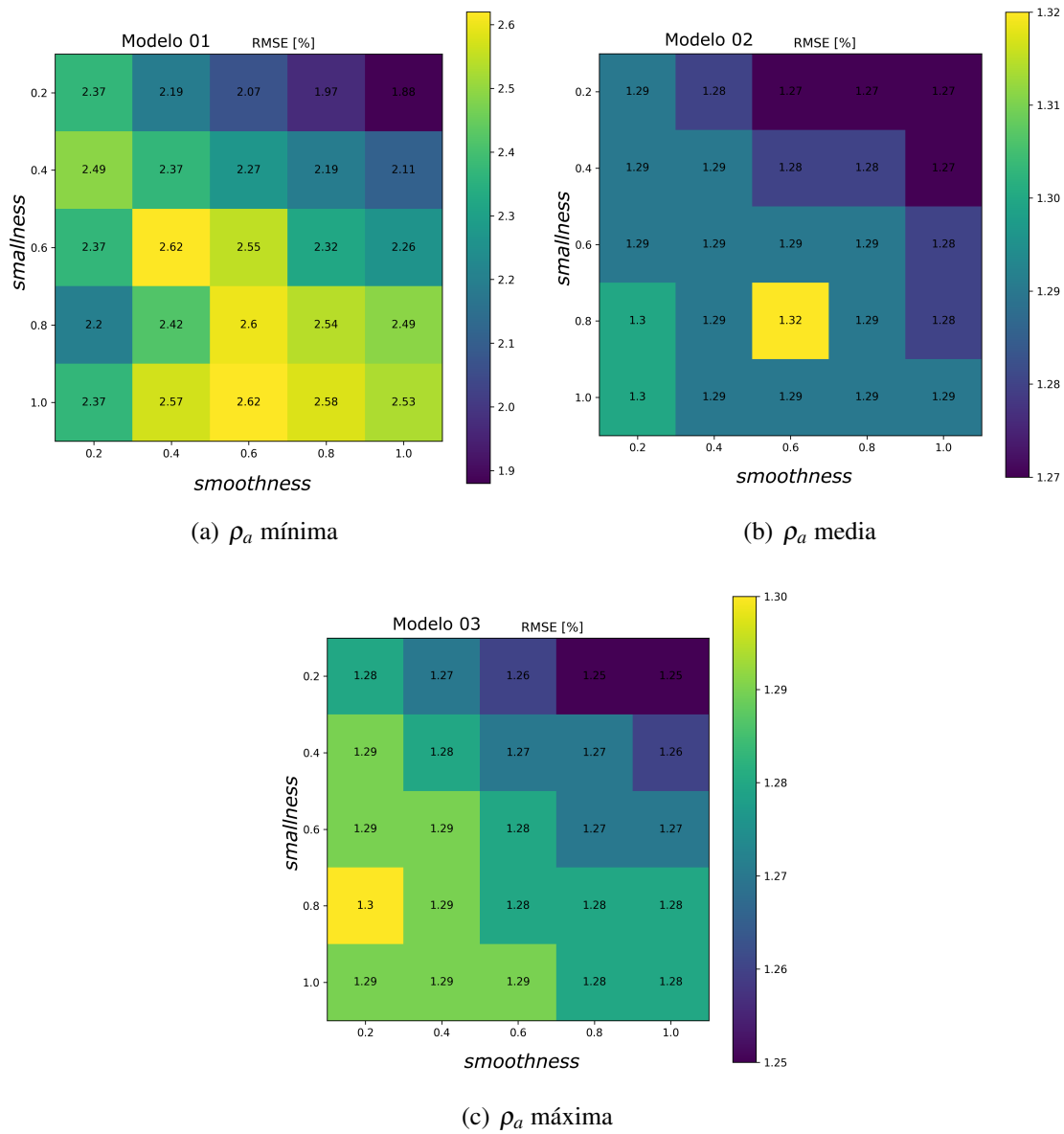


Figura 8. Matrices RMSE para el Modelo Sintético A, al variar los valores de los parametros $smallness$ α_s (eje de ordenadas o posición vertical) y $smoothness$ α_x (eje de abscisas o posición horizontal), considerando la resistividad del medio mínima para el Modelo 01 (a), media para el Modelo 02 (b) y máxima para el Modelo 03 (c).

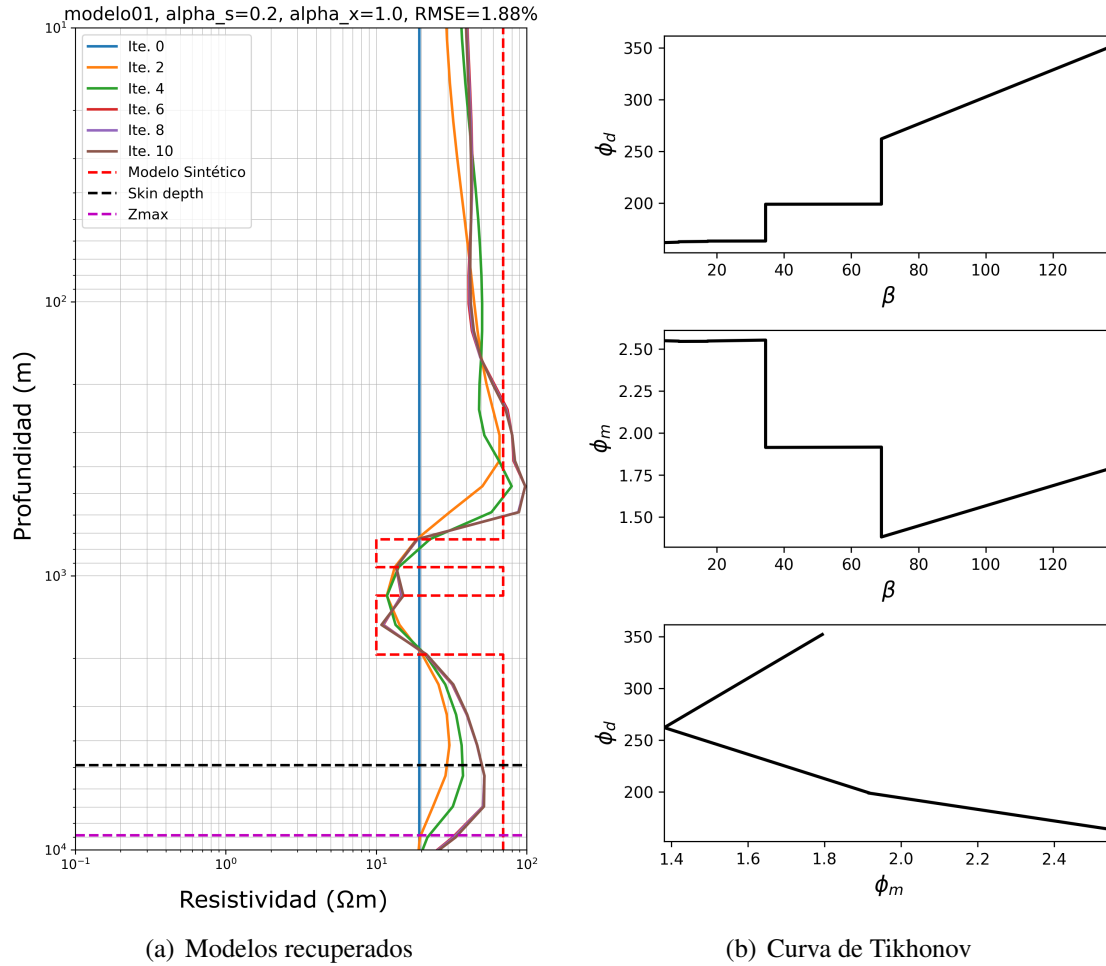


Figura 9. Modelo recuperado del Modelo Sintético A considerando la resistividad del medio mínima para el Modelo 01 (a) con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 1,0$. (b) Variación del Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m , curva de Tikhonov (inferior), donde se considera la solución óptima aquella que cumpla el criterio de la L-curve para el Modelo Sintético A.

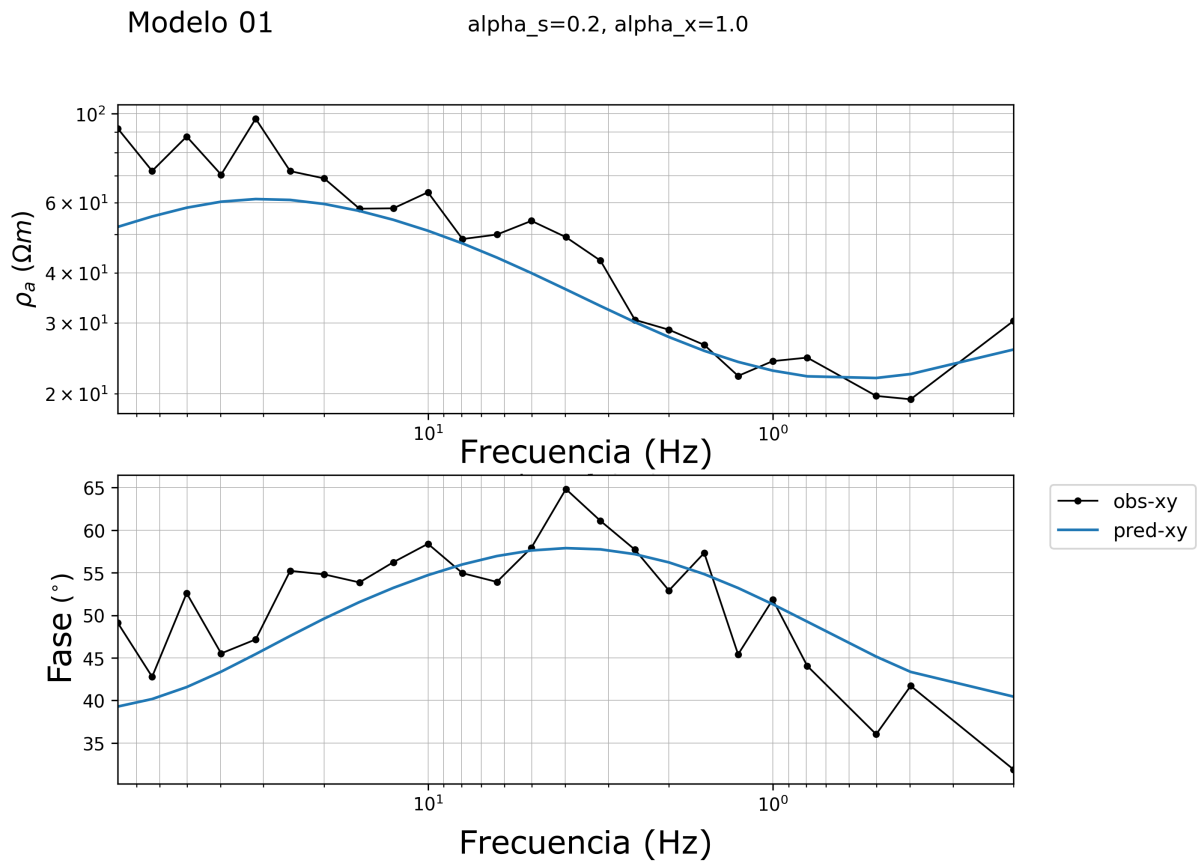


Figura 10. Datos observados y datos calculados para el Modelo 01, el cual considera la resistividad el medio como la resistividad aparente mínima observada en el Modelo Sintético A.

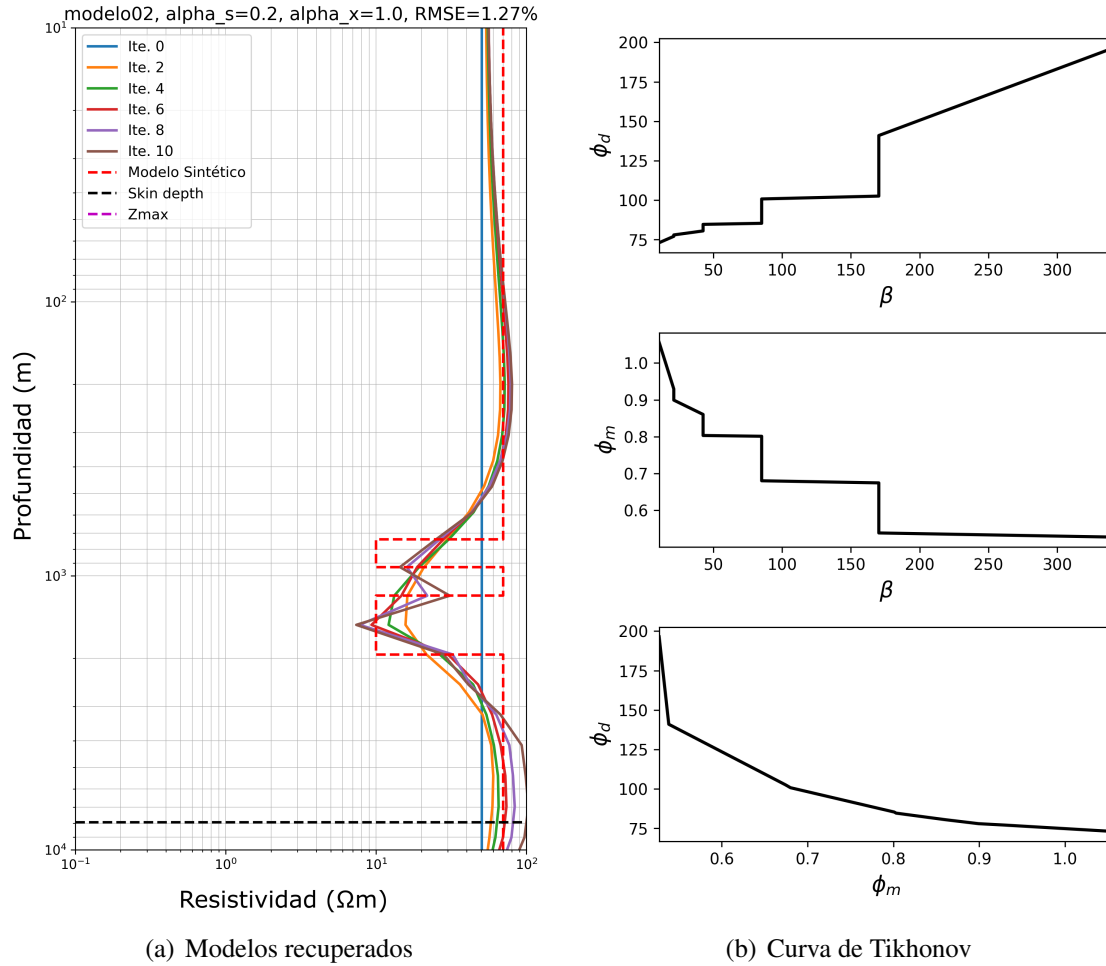


Figura 11. Modelo recuperado del Modelo Sintético A considerando la resistividad media del medio para el Modelo 02 (a) con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 1,0$. (b) Variación del Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m , curva de Tikhonov (inferior), donde se considera la solución óptima aquella que cumpla el criterio de la L-curve para el Modelo Sintético A.

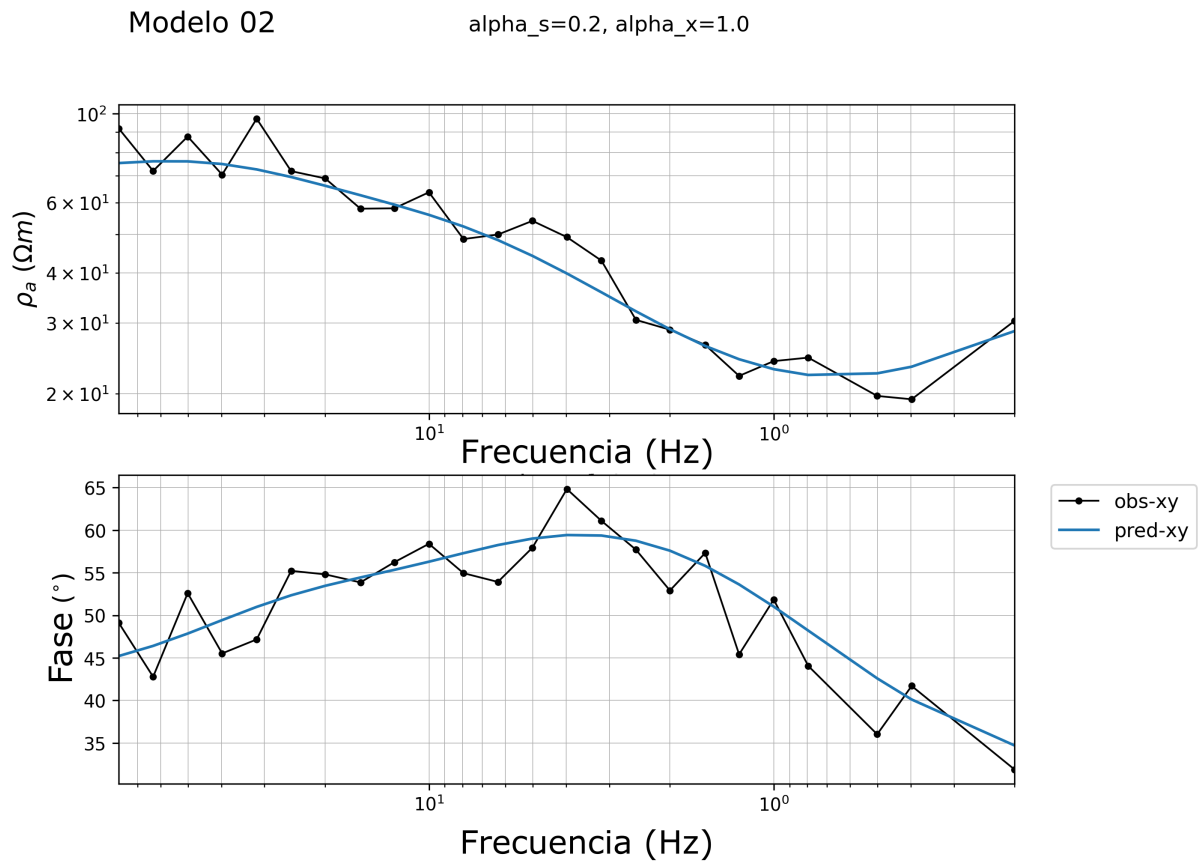


Figura 12. Datos observados y datos calculados para el Modelo 01, el cual considera la resistividad el medio como la resistividad aparente media observada en el Modelo Sintético A.

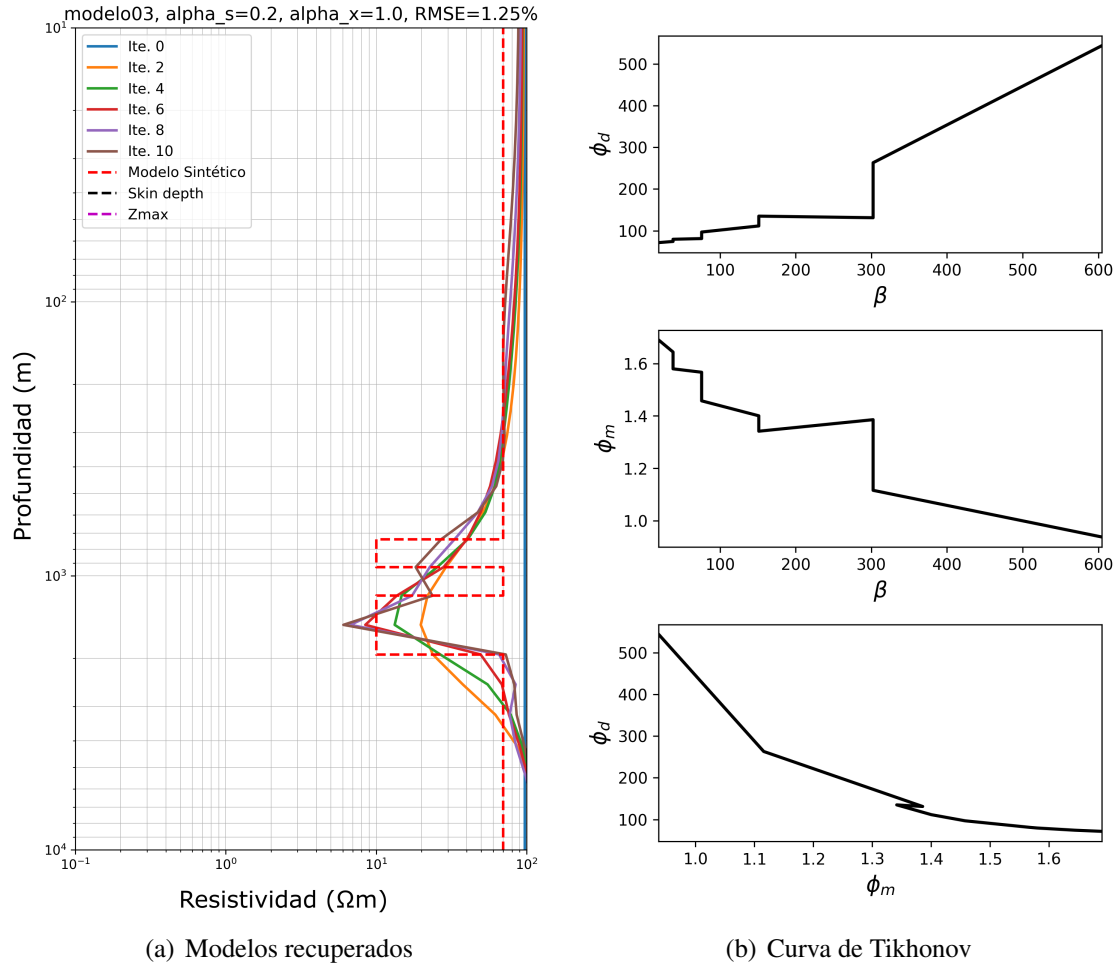


Figura 13. Modelo recuperado del Modelo Sintético A considerando la resistividad máxima del medio para el Modelo 03 (a) con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 1,0$. (b) Variación del Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m , curva de Tikhonov (inferior), donde se considera la solución óptima aquella que cumpla el criterio de la L-curve para el Modelo Sintético A.

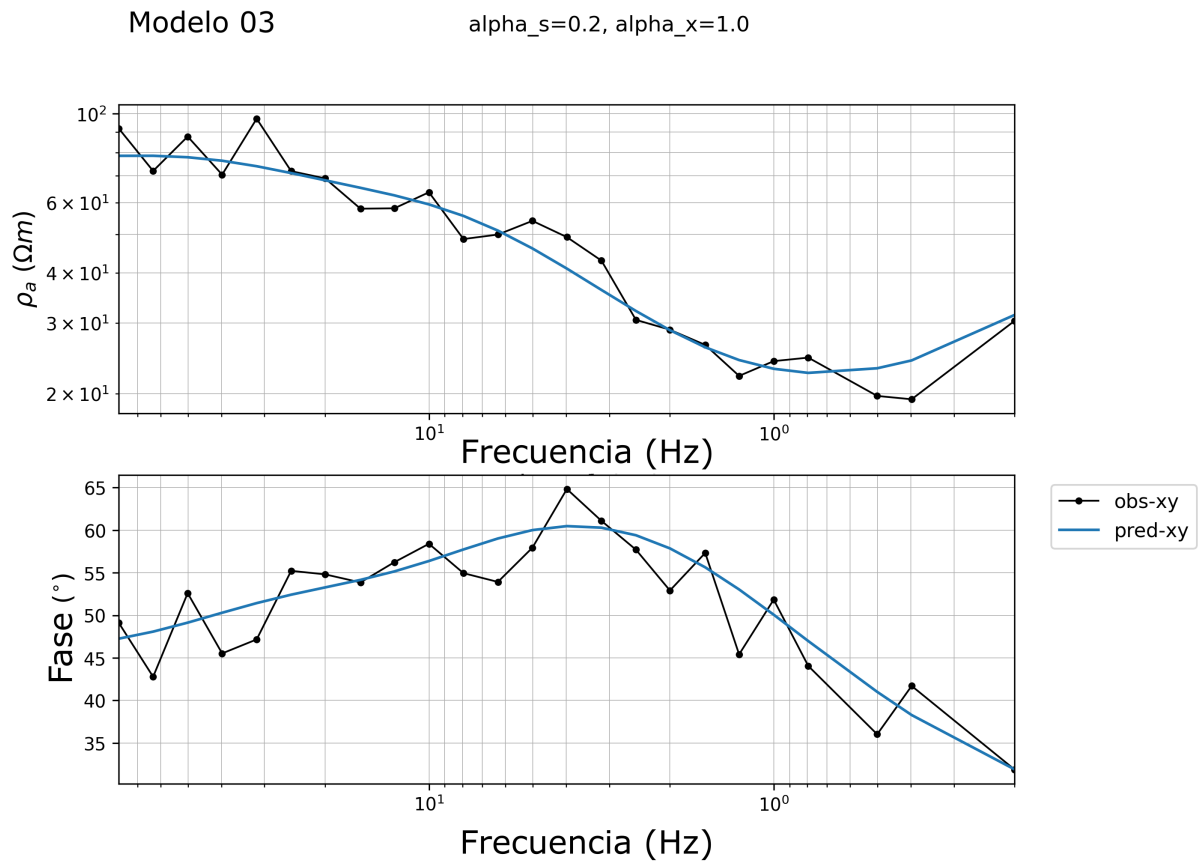


Figura 14. Datos observados y datos calculados para el Modelo 01, el cual considera la resistividad el medio como la resistividad aparente máxima observada en el Modelo Sintético A.

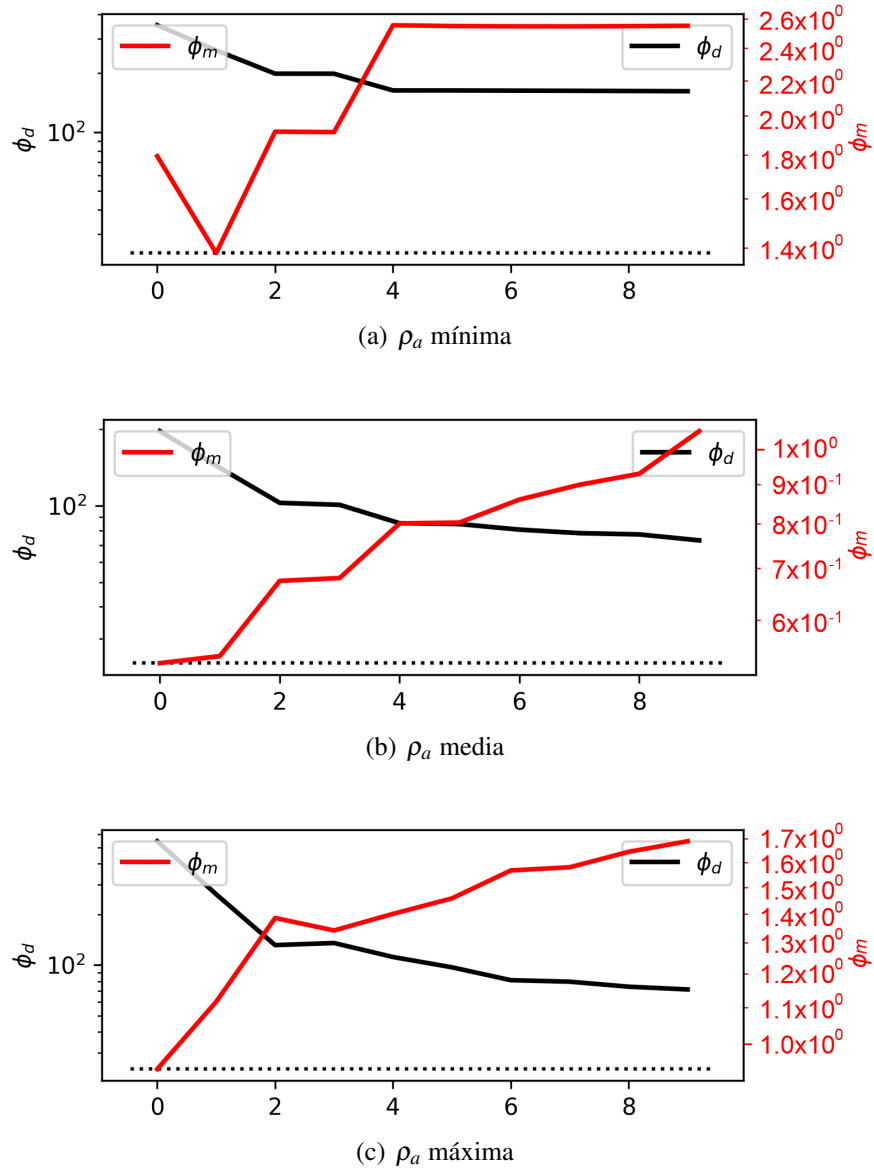


Figura 15. Variación del Φ_d y Φ_m en cada iteración para las diferentes condiciones iniciales de la resistividad del medio en el Modelo Sintético A, donde se observa la disminución del Φ_d en cada nueva iteración, pero un incremento en el valor del Φ_m , considerando el criterio de la L-curve en la curva de Tikhonov se puede estimar la iteración que mejor soluciona el problema.

4.2. Modelo Sintético B

Para el Modelo Sintético B se realizó el mismo procedimiento de análisis del Z_{max} (Tabla 2); donde la relación para los tres modelos iniciales del Z_{max} es 1.7 veces el *Skin Depth* y la profundidad de investigación fue de aproximadamente 3.2 km para el Modelo 04 (resistividad del medio de $2.82 \Omega \cdot m$), 5.2 km para el Modelo 05 (resistividad del medio de $7.33 \Omega \cdot m$) y 6.2 km para el Modelo 06 (resistividad del medio de $10.45 \Omega \cdot m$).

Tabla 2

Resistividad aparente de referencia para el calculo del Skin Depth y la profundidad de investigación Z_{max} para el Modelo Sintético B.

Modelo Sintético B	$\rho_a [\Omega \cdot m]$	Skin Depth [m]	Z_{max} [m]	$Z_{max}/SkinDepth$
Modelo 04	2.82	1880.09	3204.38	1.70
Modelo 05	7.33	3027.22	5159.51	1.70
Modelo 06	10.45	3615.88	6162.81	1.70

Los cambios en los parámetros de *smallness* α_s y de *smoothness* α_x para el Modelo Sintético B (Figura 8) presentaron un error RMSE bajo cuando el α_s tendía a ser mínimo y α_x máximo, similar al Modelo Sintético A.

Los modelos recuperados con menor RMSE para el Modelo Sintético B evidenciaron que cuando la resistividad del medio era mínima (Figura 17) el modelo en profundidad aumentaba la resistividad respecto al modelo inicial de la inversión, llegando a ser similar a las primeras capas; y cuando las resistividades del medio correspondían al valor promedio (Figura 19) o valor máximo (Figura 21) de la resistividad aparente se obtenían modelos visualmente mas coherentes respecto al Modelo Sintético B.

Para los tres modelos recuperados la última capa no se evidencia al conservar un valor similar a la resistividad del medio inicial; al comparar las curvas de los valores observados con los calculados no se observa una diferencia significativa al usar una resistividad del medio mínima (Figura 18), media (Figura 20) y máxima (Figura 22), por lo que matemáticamente son aceptables los tres modelos.

En la curva de Tikhonov la influencia del parámetro de regularización β para Φ_d y Φ_m es semejante a lo observado en el Modelo Sintético A; y en general para el Modelo Sintético B las iteraciones 4 y 5 logran una solución donde Φ_d y Φ_m tienden a ser mínimos (Figura 23).

Las gráficas de los datos observados y los datos calculados en los tres modelos iniciales del Modelo Sintético B se pueden considerar con un buen ajuste, la representación de los modelos recuperados evidencia solo 3 capas de las 5 planteadas en los resultados de la Estación 06.

Cuando la resistividad del medio es mínima en el modelo inicial la primera capa presentó una distorsión y generó anomalías que pueden interpretarse como otras posibles capas, esta distorsión de la primera capa no es tan marcada cuando los valores de resistividad del medio son promedio o máximos respecto a los observados. En los tres modelos la cuarta capa no se logró diferenciar por lo que se consideró replantear el número de iteraciones, aumentándolas y evidenciando de mejor manera el criterio de la L-curve, debido a que con solo 10 iteraciones no se representó fácilmente ese punto de inflexión.

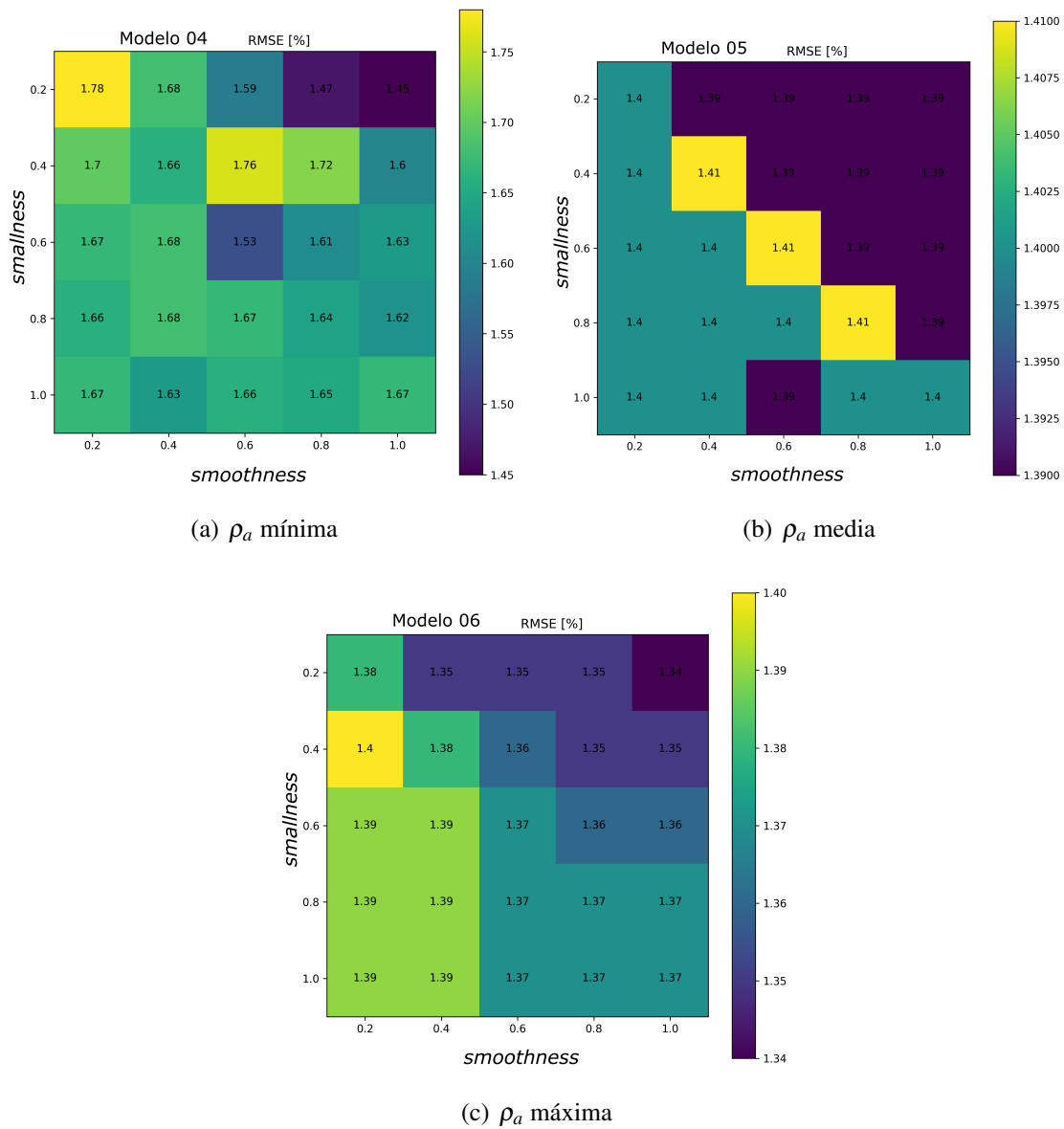


Figura 16. Matrices RMSE para el Modelo Sintético B, al variar los valores de los parametros $smallness \alpha_s$ (eje de ordenadas o posición vertical) y $smoothness \alpha_x$ (eje de abscisas o posición horizontal), considerando la resistividad del medio mínima para el Modelo 04 (a), media para el Modelo 05 (b) y máxima para el Modelo 06 (c).

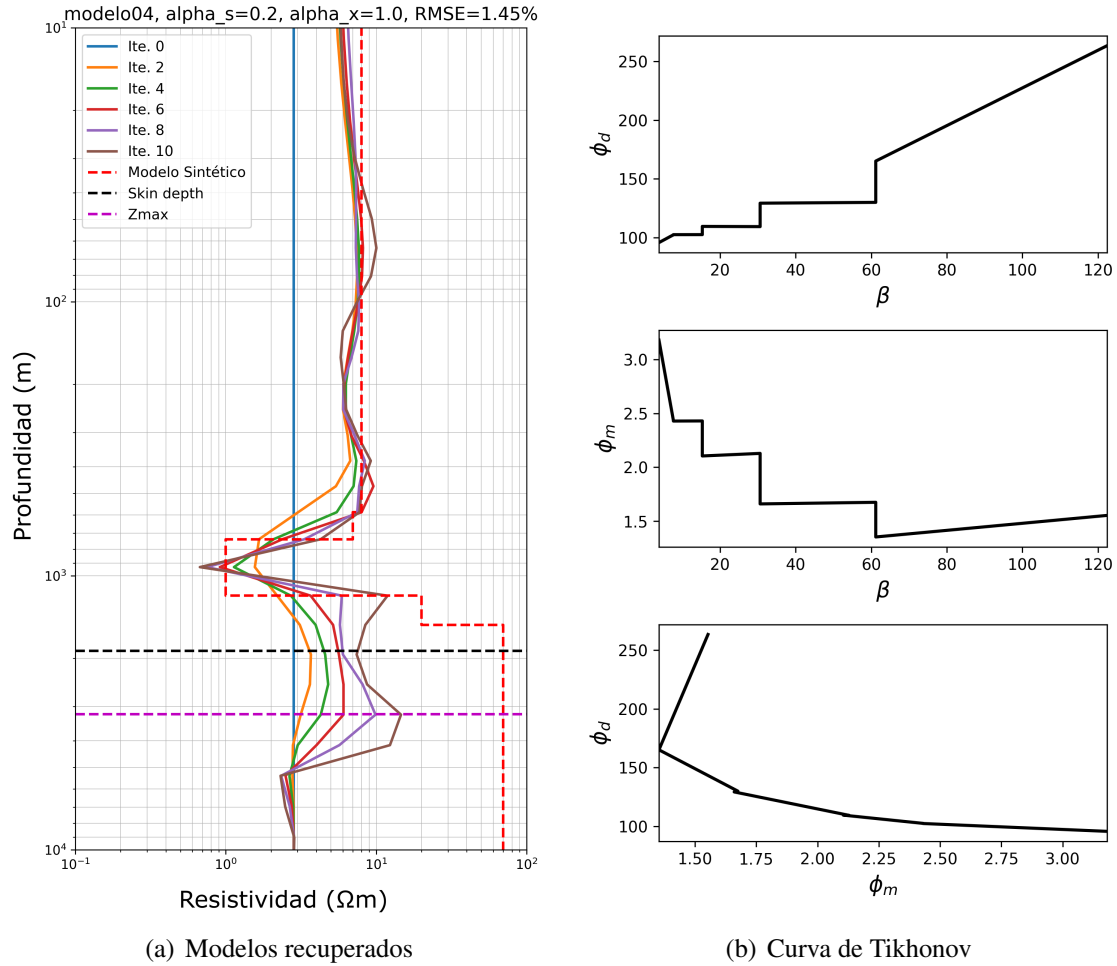


Figura 17. Modelo recuperado del Modelo Sintético B considerando la resistividad del medio mínima para el Modelo 04 (a) con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 1,0$. (b) Variación del Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m , curva de Tikhonov (inferior), donde se considera la solución óptima aquella que cumpla el criterio de la L-curve para el Modelo Sintético B.

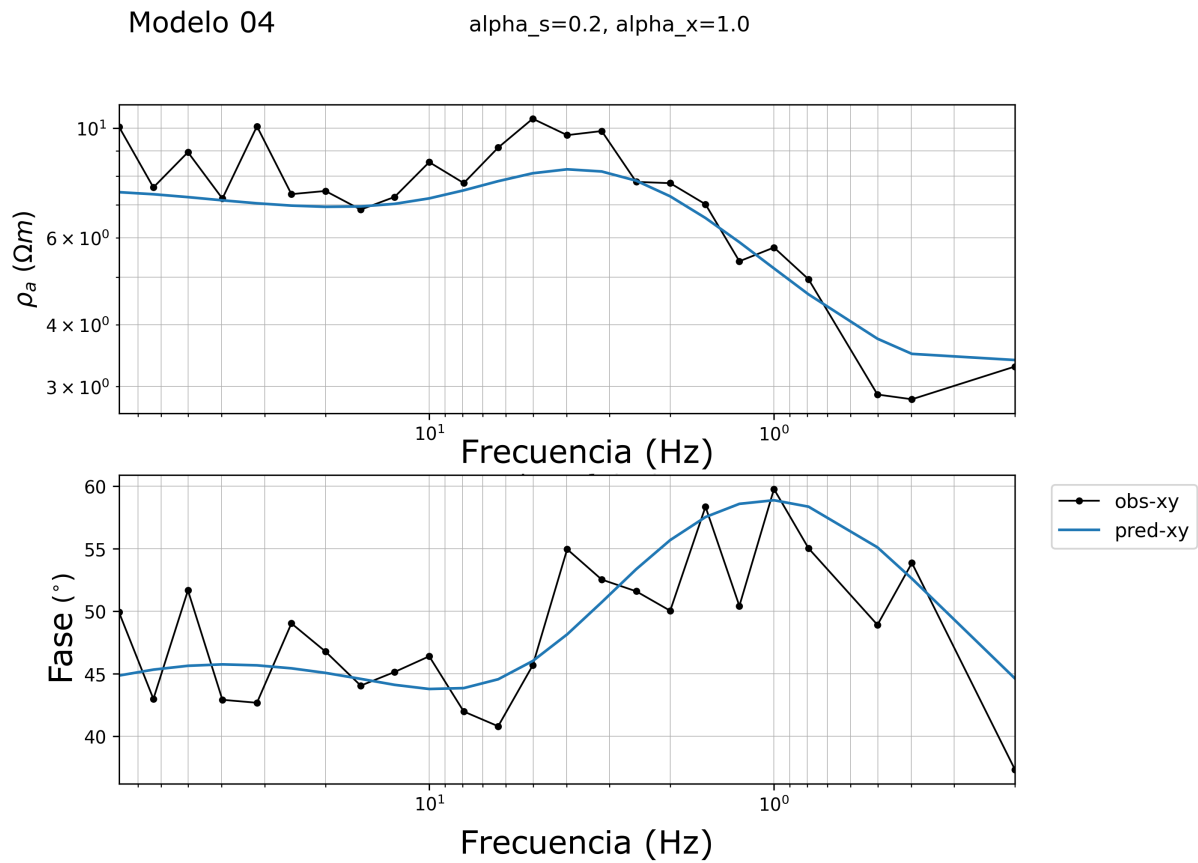


Figura 18. Datos observados y datos calculados para el Modelo 04, el cual considera la resistividad el medio como la resistividad aparente mínima observada en el Modelo Sintético B.

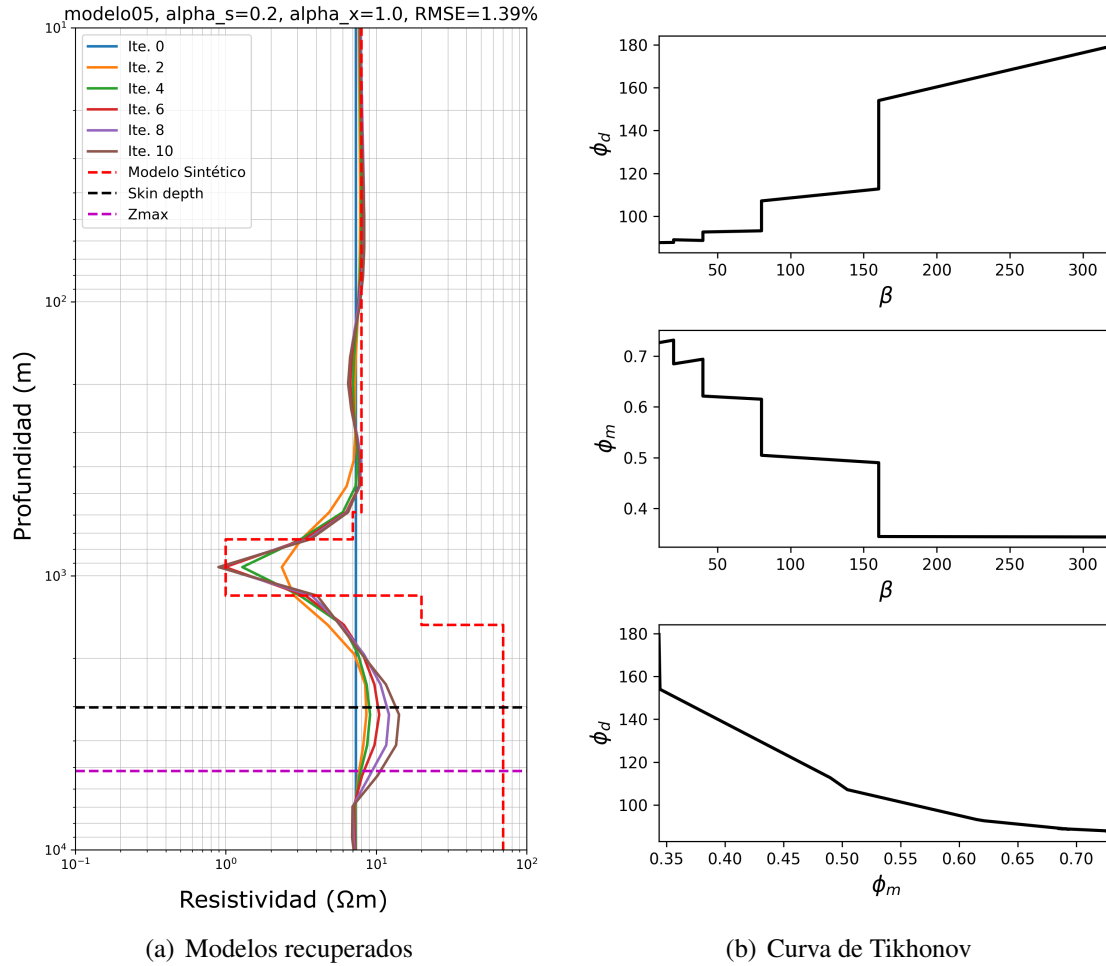


Figura 19. Modelo recuperado del Modelo Sintético B considerando la resistividad media del medio para el Modelo 05 (a) con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 1,0$. (b) Variación del Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m , curva de Tikhonov (inferior), donde se considera la solución óptima aquella que cumpla el criterio de la L-curve para el Modelo Sintético B.

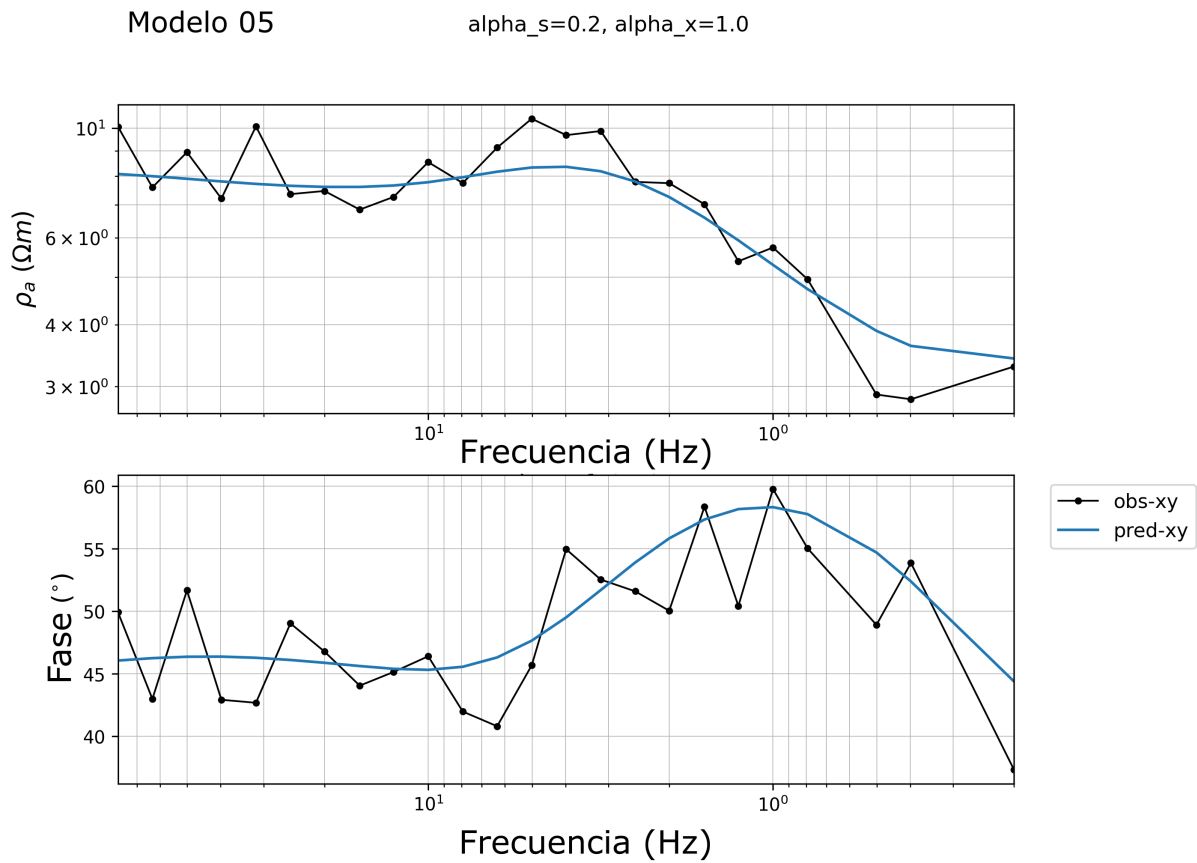


Figura 20. Datos observados y datos calculados para el Modelo 05, el cual considera la resistividad el medio como la resistividad aparente media observada en el Modelo Sintético B.

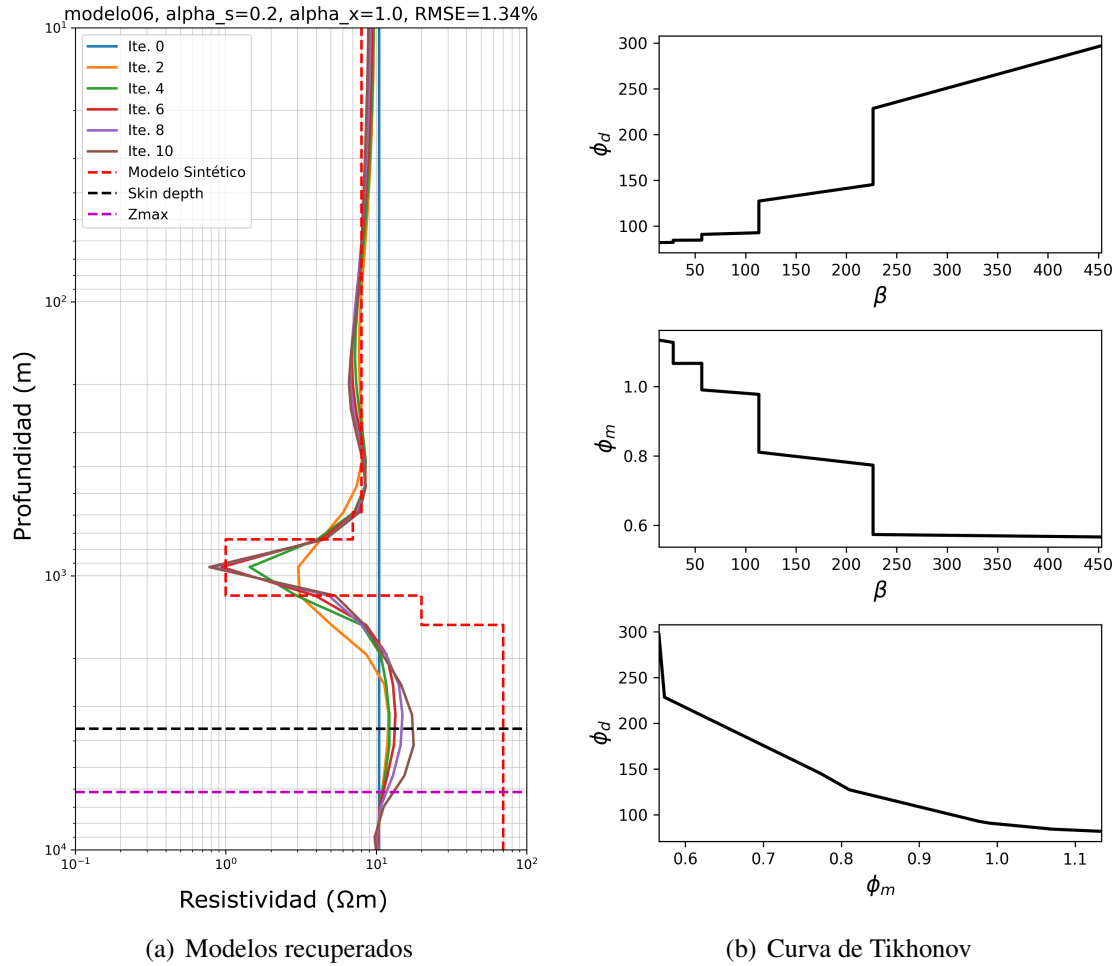


Figura 21. Modelo recuperado del Modelo Sintético B considerando la resistividad máxima del medio para el Modelo 06 (a) con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 1,0$. (b) Variación del Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m , curva de Tikhonov (inferior), donde se considera la solución óptima aquella que cumpla el criterio de la L-curve para el Modelo Sintético B.

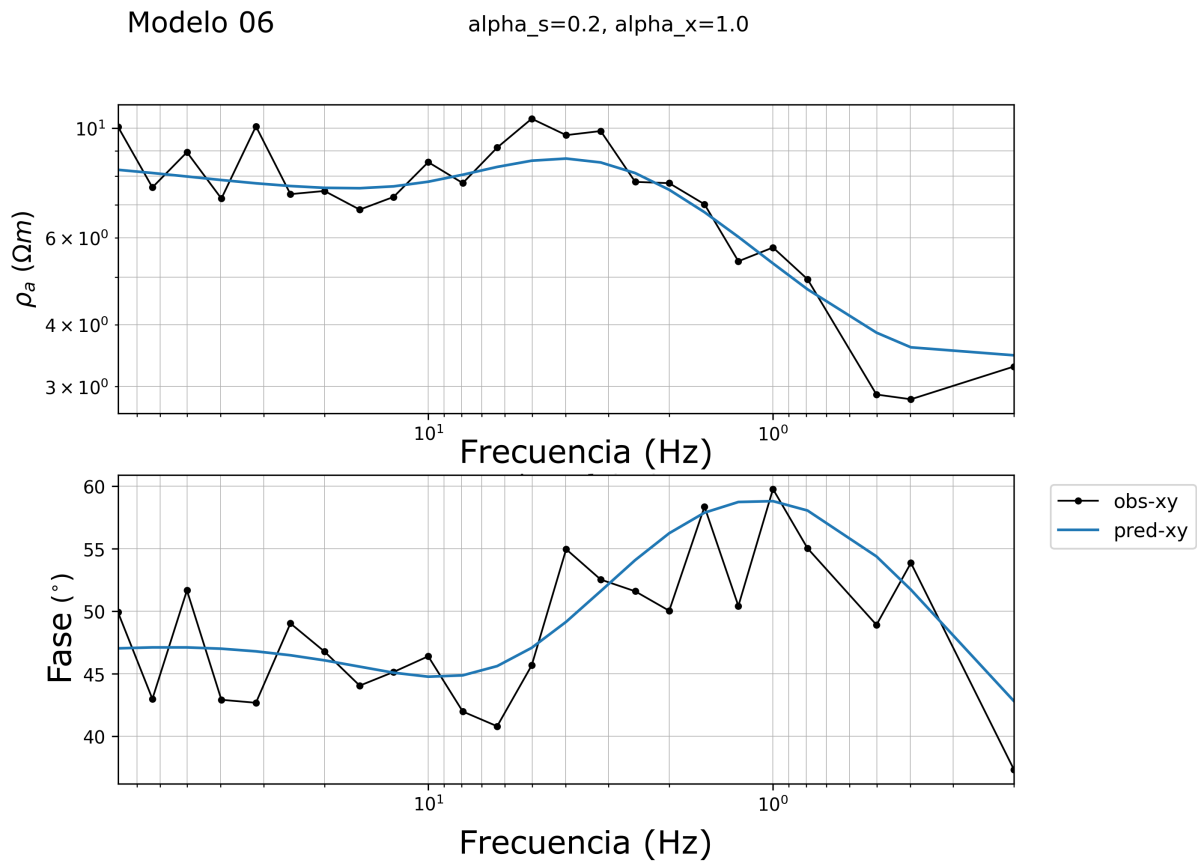


Figura 22. Datos observados y datos calculados para el Modelo 06, el cual considera la resistividad el medio como la resistividad aparente máxima observada en el Modelo Sintético B.

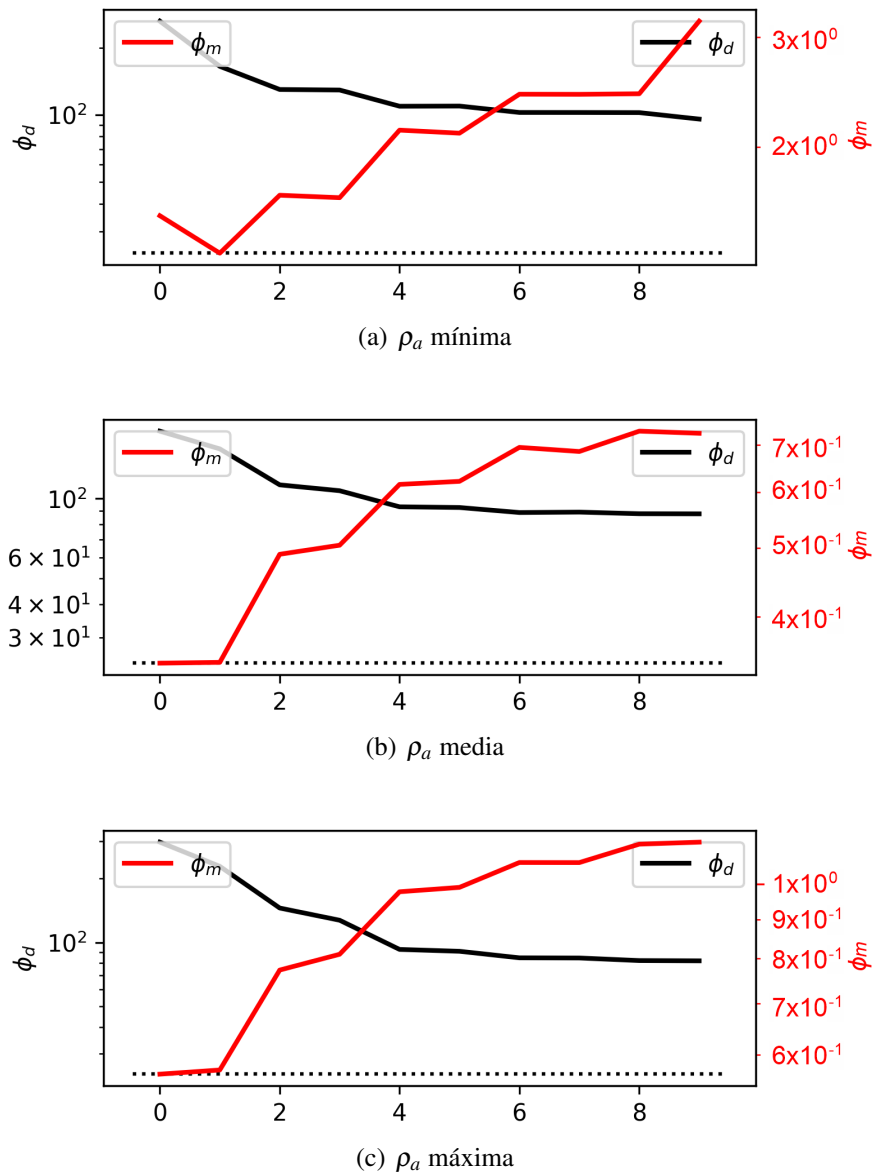


Figura 23. Variación del Φ_d y Φ_m en cada iteración para las diferentes condiciones iniciales de la resistividad del medio en el Modelo Sintético B, donde se observa la disminución del Φ_d en cada nueva iteración, pero un incremento en el valor del Φ_m .

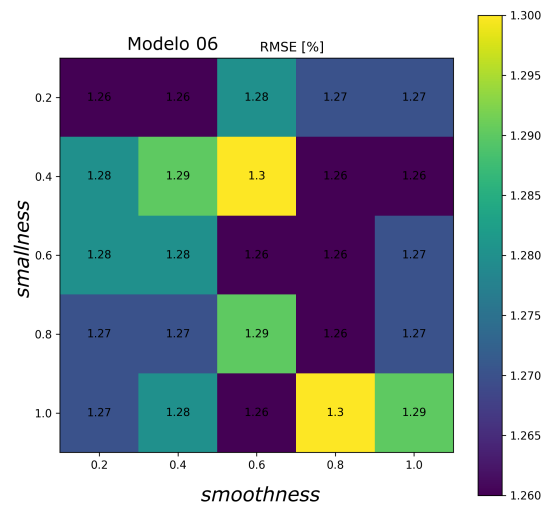


Figura 24. Matrices RMSE para el Modelo Sintético B considerando la resistividad máxima del medio (Modelo 06) usando 50 iteraciones, al variar los valores de los parametros $smallness$ α_s (eje de ordenadas o posición vertical) y $smoothness$ α_x (eje de abscisas o posición horizontal).

4.2.1. Inversión con 50 iteraciones. Los resultados obtenidos y el análisis preliminar con 10 iteraciones para el Modelo Sintético A y Modelo Sintético B donde se obtuvo un valor RMSE bajo cuando el valor de α_s (parámetro de *smallness*) tiende a ser mínimo y α_x (parámetro de *smoothness*) máximo fueron considerados para evaluar los resultados en 50 iteraciones del Modelo Sintético B, usando una resistividad máxima del medio en los valores medidos del Modelo 06, considerando la relación directa entre la resistividad del medio y la profundidad de investigación (Z_{max}).

El RMSE mas bajo obtenido para el Modelo 06 usando 10 iteraciones fue de 1.34, y usando 50 iteraciones fue de 1.26, en total (8) modelos lograron este valor de RMSE con 50 iteraciones (Figura 24). Se tomaron solo tres modelos considerando que el parámetro de *smallness* controla el modelo de referencia, el primer modelo a evaluar consideró un *smallness* $\alpha_s = 0,2$ y *smoothness* $\alpha_x = 0,2$ (Figura 25), el segundo modelo un *smallness* $\alpha_s = 0,6$ y *smoothness* $\alpha_x = 0,8$ (Figura 26) y el tercer modelo un *smallness* $\alpha_s = 1,0$ y *smoothness* $\alpha_x = 0,6$ (Figura 27). Los tres modelos hicieron un mejor ajuste de la capa mas profunda, aunque obtuvieron un RMSE de 1.26 los modelos generaron anomalías en la primera y última capa interpretadas como presencia de capas de baja resistividad no existentes en el Modelo Sintético B original.

Los modelos recuperados en la inversión con 10 iteraciones no presentaron distorsiones o anomalías de bajas resistividades ausentes en el Modelo Sintético B original, la influencia del parámetro de regularización β sobre Φ_d y Φ_m en el análisis de la curva de Tikhonov se hizo mas evidente al realizar un mayor número de iteraciones, por lo que se observó que entre la cuarta y

séptima iteración el valor era mínimo para Φ_d y Φ_m considerando el criterio de L-curve (Figura 28).

Aunque se puede llegar a considerar que un bajo RMSE implica un mejor modelo en su ajuste, se debe evaluar la coherencia geológica que esto implica, ya que modelos con un mayor RMSE pueden presentar una mejor coherencia (Figura 29), por ejemplo en los siguientes dos modelos: el primero con un *smallness* $\alpha_s = 0,8$ y un *smoothness* $\alpha_x = 0,6$, el segundo con un *smallness* $\alpha_s = 1,0$ y un *smoothness* $\alpha_x = 0,8$, donde se obtuvo un RMSE de 1.29 y 1.30 respectivamente; la representación de los dos modelos recuperados permitió observar que desde la iteración 20 se hace un acercamiento al Modelo Sintético B original a pesar de presentar anomalías de baja resistividad.

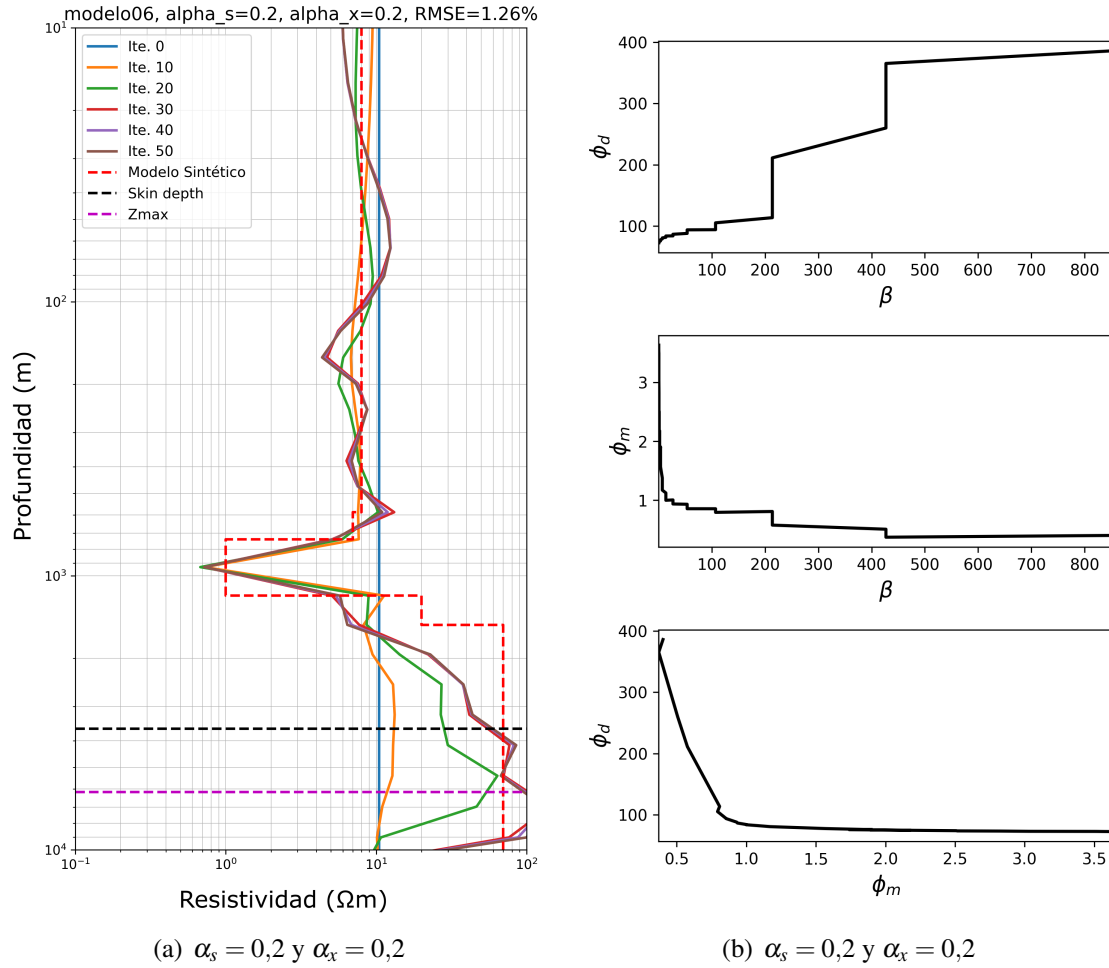


Figura 25. (a) Modelo recuperado del Modelo 06 cuya resistividad inicial fue la máxima medida usando 50 iteraciones, donde se obtuvo un RMSE de 1.26, bajo los parámetros de $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 0,2$ (RMSE de 1.26). (b) Variación del Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β el cual fue mas evidente, y el criterio de la L-curve para la curva de Tikhonov (inferior) mas claro.

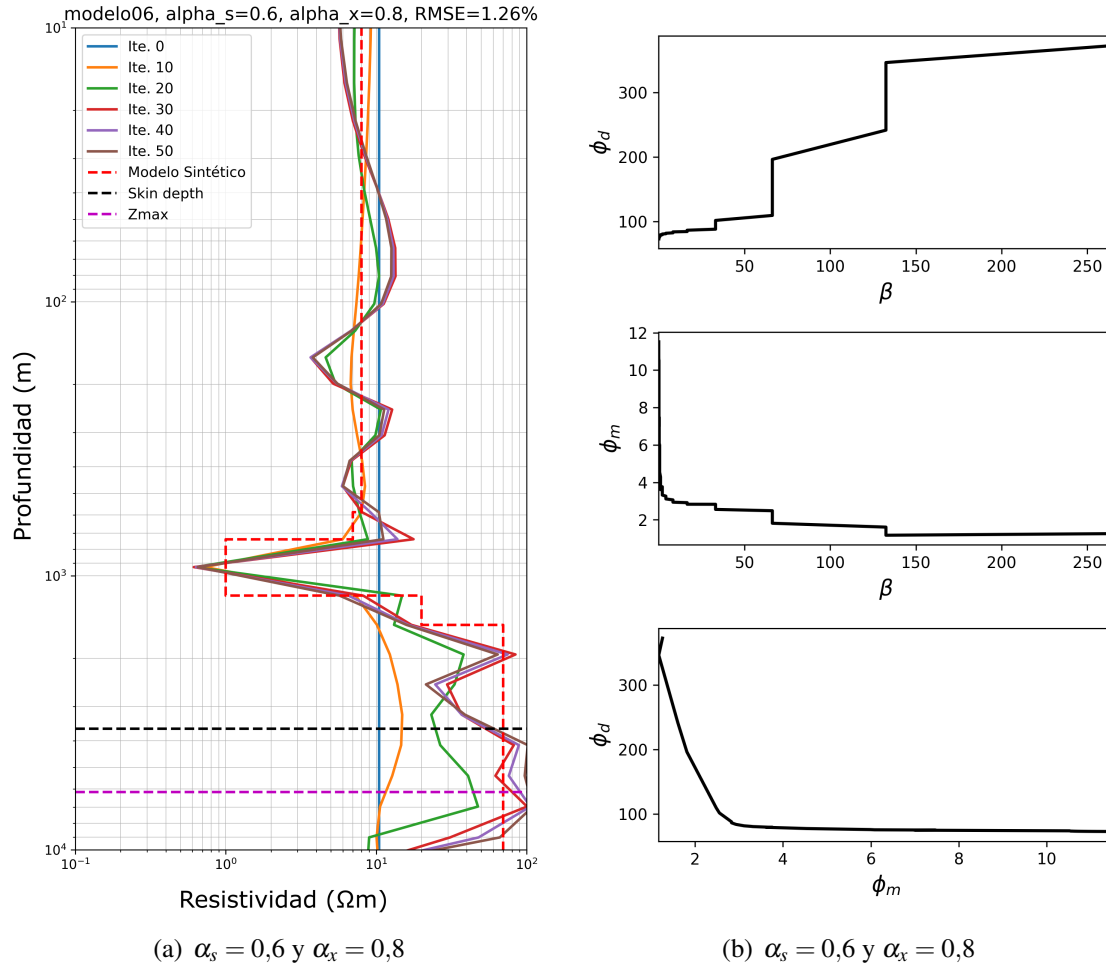


Figura 26. (a) Modelo recuperado del Modelo 06 cuya resistividad inicial fue la máxima medida usando 50 iteraciones, donde se obtuvo un RMSE de 1.26, bajo los parámetros de $\alpha_s = 0,6$ y $\alpha_x = 0,8$ (RMSE de 1.26). (b) Variación del Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β el cual fue mas evidente, y el criterio de la L-curve para la curva de Tikhonov (inferior) mas claro.

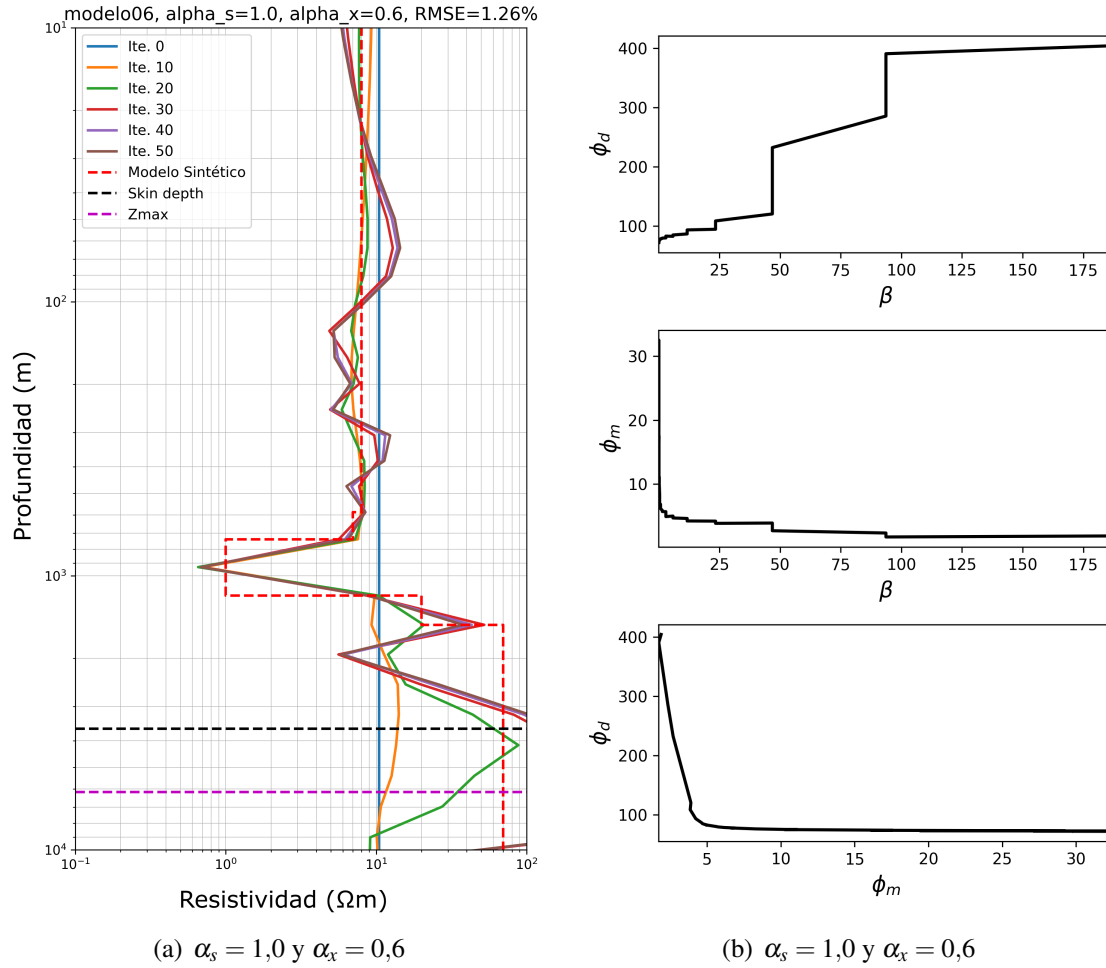


Figura 27. (a) Modelo recuperado del Modelo 06 cuya resistividad inicial fue la máxima medida usando 50 iteraciones, donde se obtuvo un RMSE de 1.26, bajo los parámetros de $\alpha_s = 1.0$ y $\alpha_x = 0.6$ (RMSE de 1.26). (b) Variación del Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β el cual fue mas evidente, y el criterio de la L-curve para la curva de Tikhonov (inferior) mas claro.

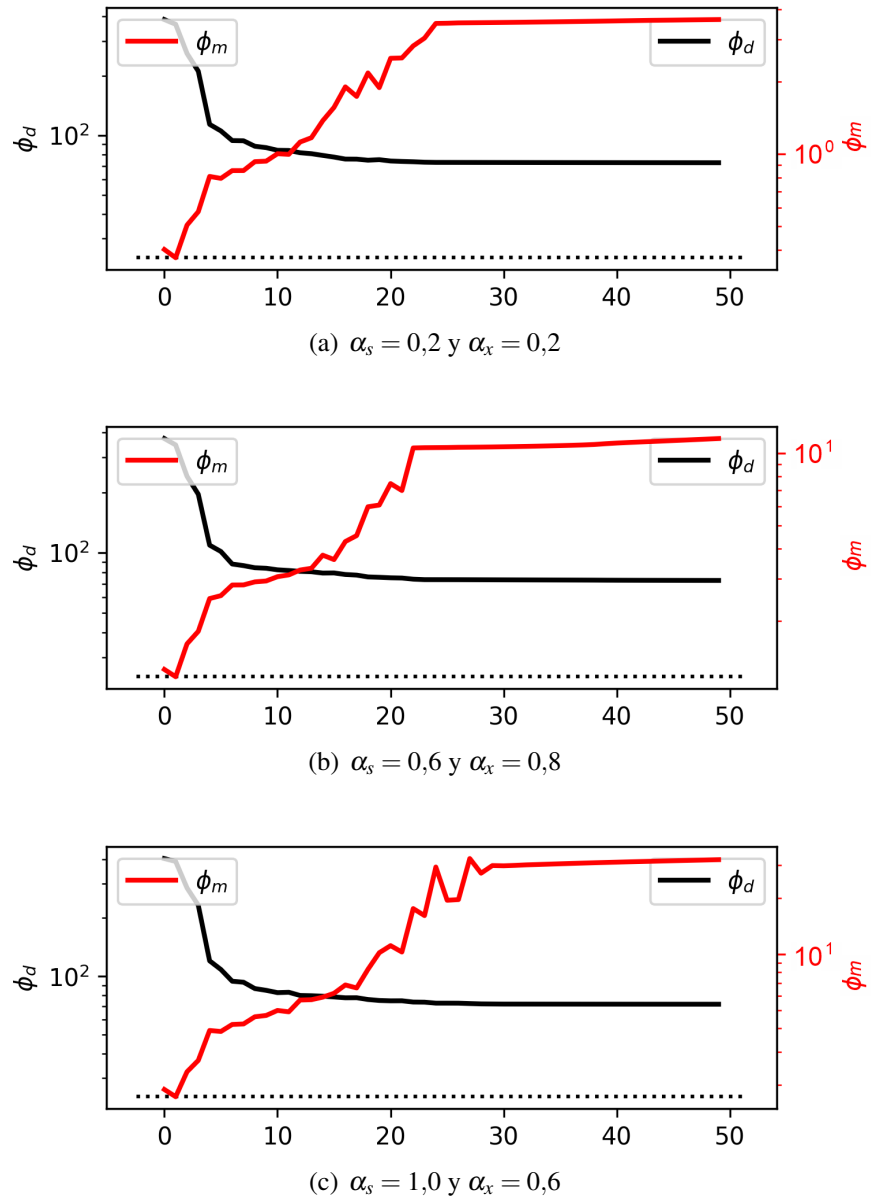


Figura 28. Curvas de Tikhonov para los tres modelos recuperados con RMSE de 1.26.

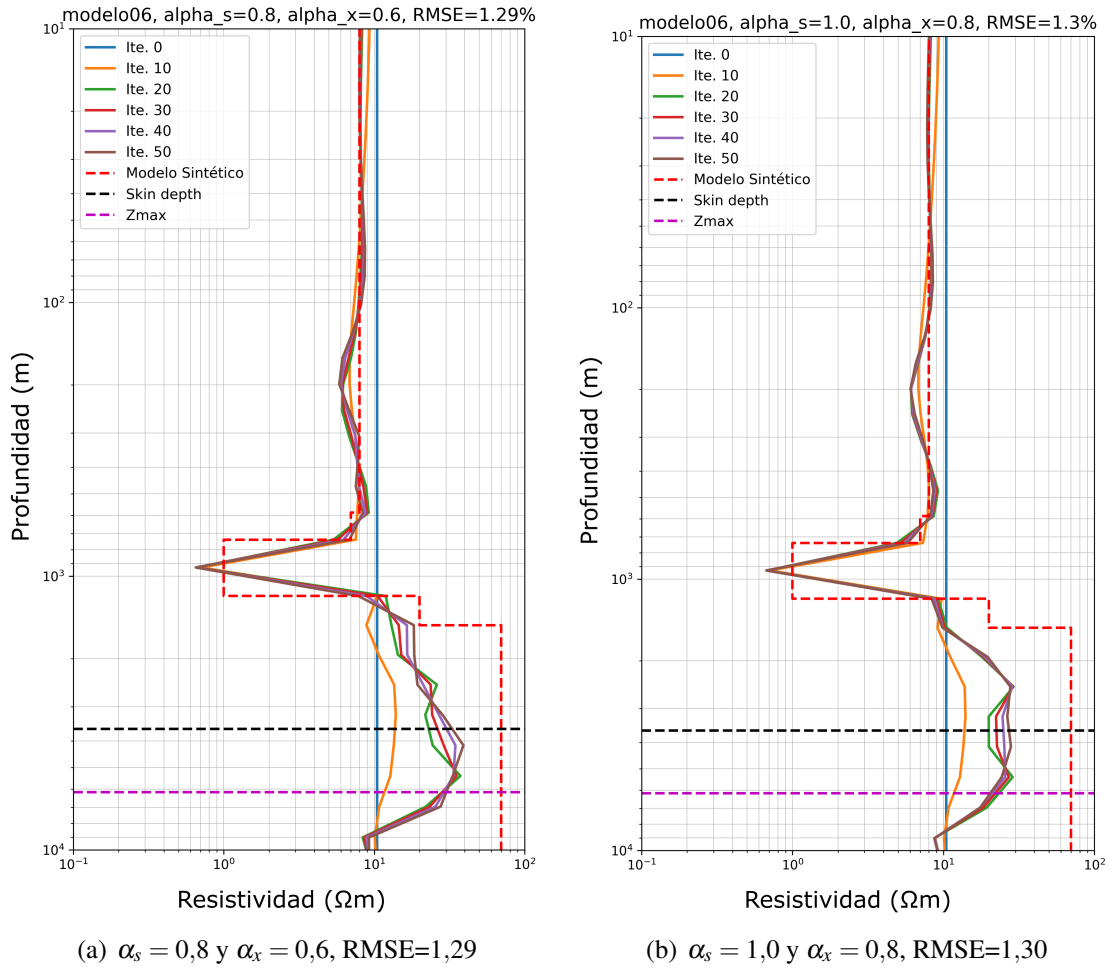


Figura 29. Modelos recuperados del Modelo 06 usando 50 iteraciones con RMSE mayor a 1.26, con parámetros de $\alpha_s = 0,8$ y $\alpha_x = 0,6$ (a), $\alpha_s = 1,0$ y $\alpha_x = 0,8$ (b). Estos dos modelos mantienen una mejor coherencia y no muestran anomalías de baja resistividad que perturben al modelo recuperado.

4.3. Estaciones magnetotelúrica Paipa

Los resultados obtenidos de los modelos sintéticos confirmaron que la profundidad de investigación Z_{max} es mayor al *Skin Depth*, siendo 1.8 veces mayor para el Modelo Sintético A y 1.7 veces mayor para el Modelo Sintético B; los modelos recuperados presentaron una similitud en la localización en profundidad de las anomalías generadas por los cambios de resistividad en las capas; la resistividad del medio se relacionó directamente con el Z_{max} y el *Skin Depth*, un mayor valor de resistividad genera un mayor *Skin Depth* y a su vez un Z_{max} mayor alcanzado.

Considerando las anteriores observaciones para la Estación 06 correspondiente a datos reales de Paipa 06 se utilizaron tres modelos en la etapa de inversión: Estación 06a usando la resistividad mínima medida, Estación 06b usando la resistividad promedio medida y Estación 06c usando la resistividad máxima medida. La relación para los tres modelos iniciales del Z_{max} es 1.4 veces el *Skin Depth* (Tabla 3) y la profundidad de investigación para cada uno de los modelos iniciales fue de aproximadamente 76 m para la Estación 06a (resistividad del medio de $0.0023 \Omega \cdot m$), 420 m para la Estación 06b (resistividad del medio de $0.07 \Omega \cdot m$) y 1 km para la Estación 06c (resistividad del medio de $0.42 \Omega \cdot m$).

Tabla 3

Resistividad aparente de referencia para el calculo del Skin Depth y la profundidad de investigación Z_{max} para la Estacion 06 de Silva Benavides y Uribe Joya (2018).

Estación 06	$\rho_a [\Omega \cdot m]$	Skin Depth [m]	Z_{max} [m]	$Z_{max}/SkinDepth$
Estación 06a	0.0023	54.18	76.05	1.40
Estación 06b	0.0736	303.48	425.96	1.40
Estación 06c	0.4137	719.14	1009.38	1.40

El error RMSE para los diferentes casos de la Estación 06 (Figura 30), variando los parámetros de *smallness* α_s y de *smoothness* α_x cuando la resistividad del medio es mínima arrojaron un RMSE aproximado a 13.58; cuando se empleó el promedio de las resistividades medidas el menor RMSE de 21.85 se obtuvo con α_s máximo de 1.0 y α_x mínimo de 0.2, difiriendo de la tendencia observada en el Modelo Sintético A y Modelo Sintético B.

Cuando se consideró la resistividad del medio como el máximo valor medido, el menor RMSE fue de 43.17 y se obtuvo con un α_s mínimo de 0.2 y un α_x máximo de 1.0. Los modelos recuperados para las tres condiciones difirieron entre ellos.

Cuando se empleó una resistividad mínima (Figura 31) no se evidenció un contraste en las resistividades, mientras que los modelos que usaron resistividades promedio (Figura 33) y máximas (Figura 35) registró una variación en una capa de resistividad baja en profundidad, siendo esta mayor cuando se emplea una resistividad máxima para el medio.

La influencia del parámetro de regularización β para Φ_d y Φ_m en la Estación 06 es semejante a lo observado en el Modelo Sintético A y Modelo Sintético B; las curvas de los valores observados y calculados no evidencian un ajuste adecuado cuando se usa una resistividad del medio como mínima (Figura 32), media (Figura 34) o máxima (Figura 36) observada. La solución del mejor modelo bajo un análisis de la curva de Tikhonov y el criterio de la L-curve para la Estación 06 son las iteraciones 4 y 5 (Figura 37).

Los resultados de los datos tomados por Silva Benavides y Uribe Joya (2018) aplicando el método de la Transformada de Bostick en la Estación 06 evidencian valores bajos de resistividad aparente por lo que el *Skin Depth* y Z_{max} no alcanzan 1 km de profundidad. A su vez los modelos

recuperados con resistividad mínima o media presentan incertidumbre en el contexto geológico esperado, caso contrario cuando la profundidad del medio corresponde a la resistividad aparente máxima, pues se obtiene un modelo que conserva una correlación con el contexto geológico esperado en el área de estudio y lo reportado por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#).

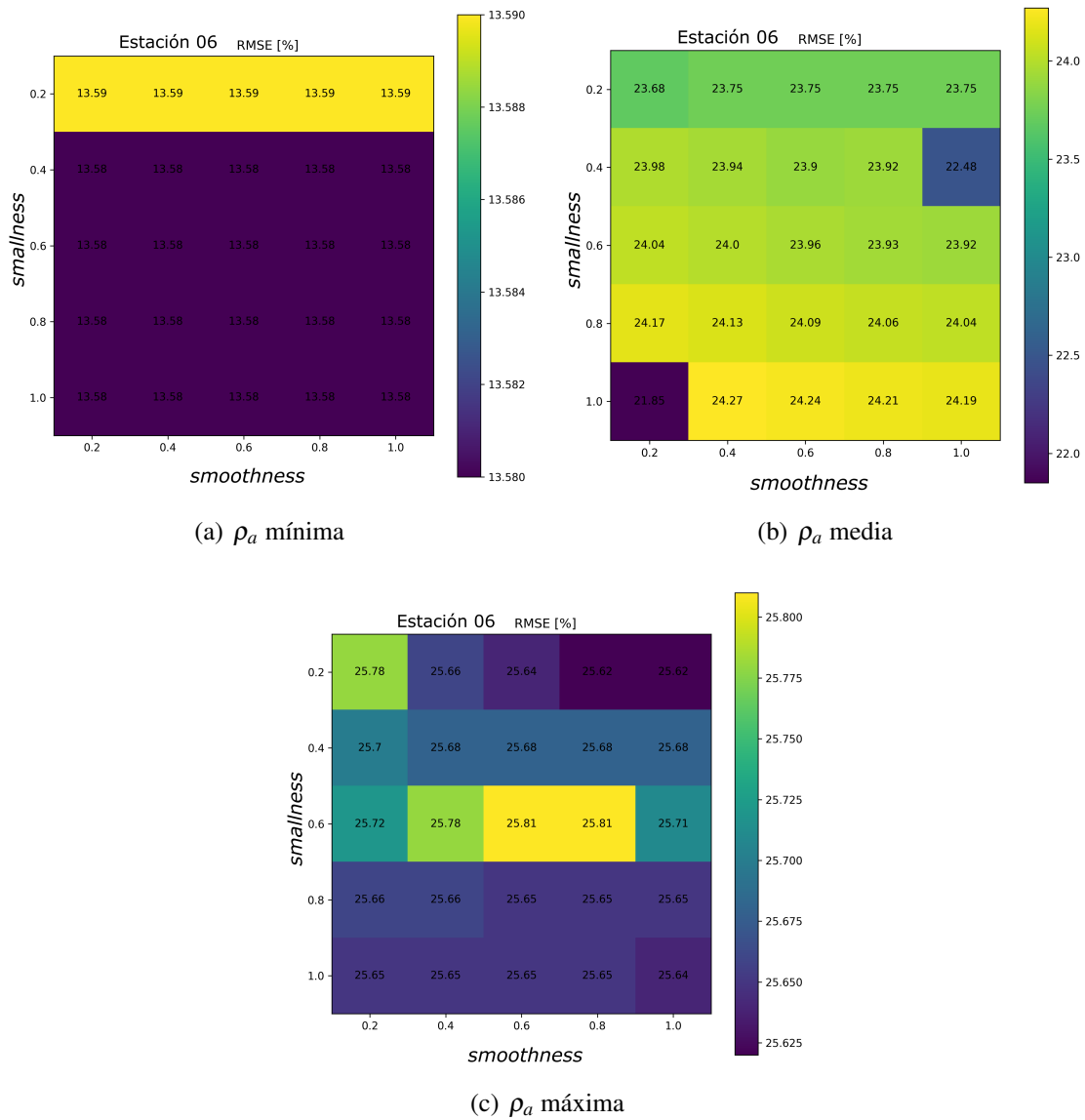
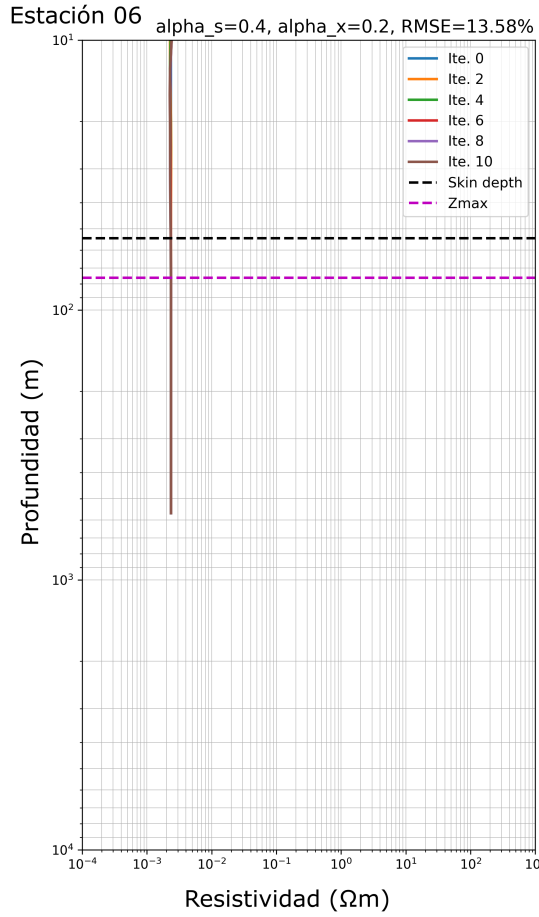
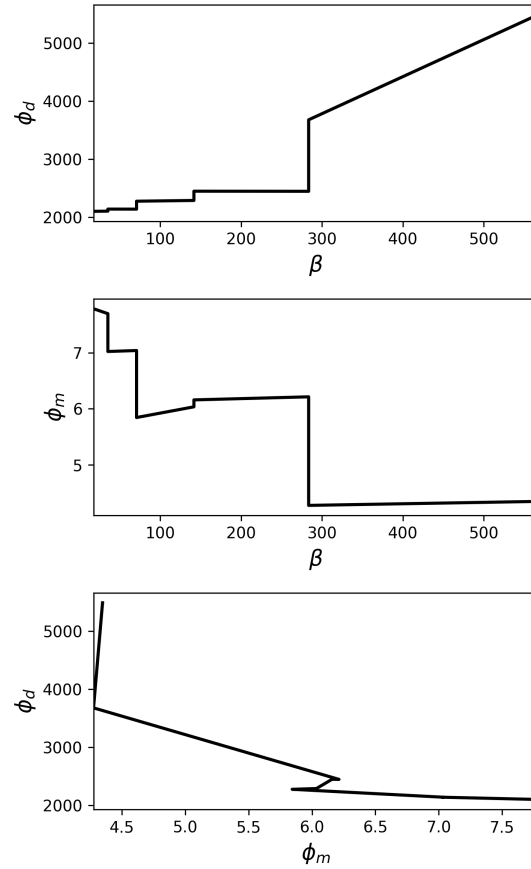


Figura 30. Matrices RMSE para la Estación 06, al variar los valores de los parametros $smallness$ α_s (eje de ordenadas o posición vertical) y $smoothness$ α_x (eje de abscisas o posición horizontal), considerando la resistividad del medio como la mínima para el Modelo 06 (a), la media para el Modelo 06 (b) y la máxima para el Modelo 06 (c).



(a) Modelos recuperados



(b) Curva de Tikhonov

Figura 31. (a) Modelo recuperado de la Estación 06 considerando la resistividad del medio como la mínima medida para el Estación 06a con $\alpha_s = 0,4$ y $\alpha_x = 0,2$. (b) Variación de Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m a través de la curva de Tikhonov (inferior).

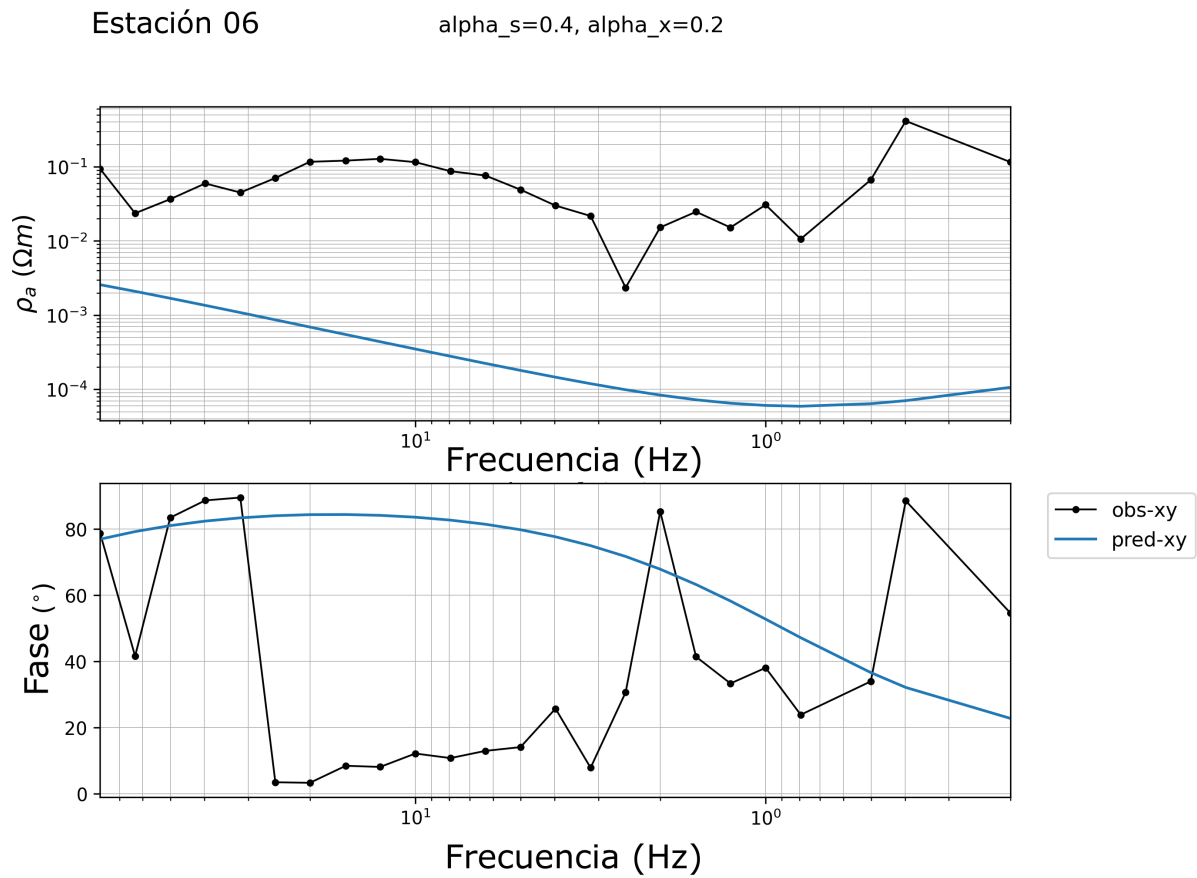
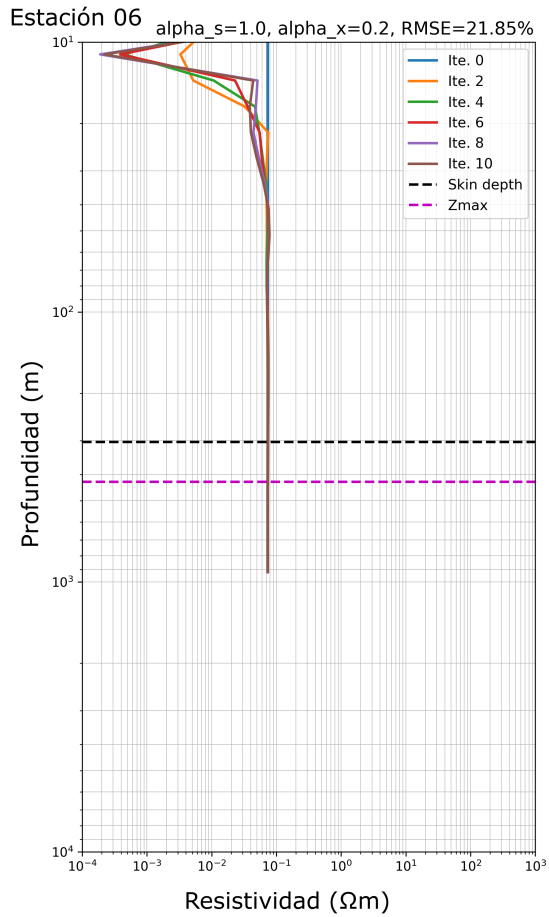
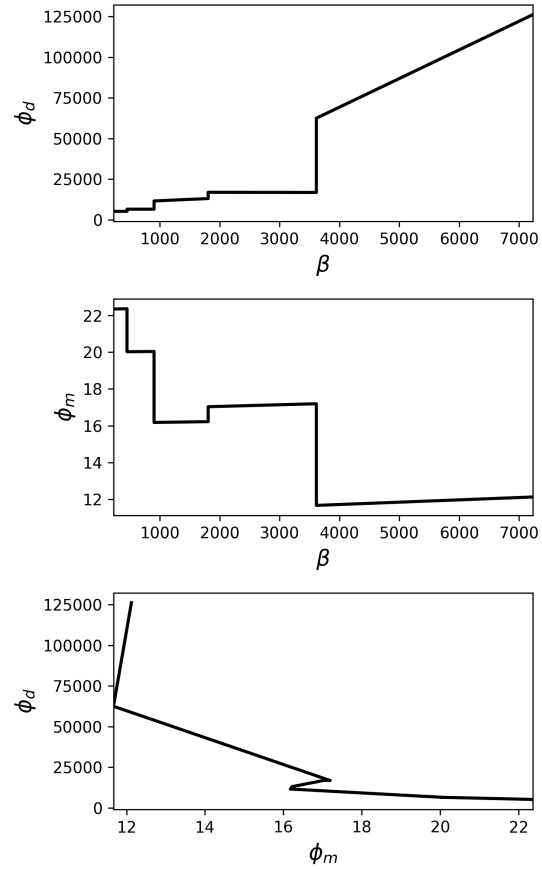


Figura 32. Datos observados y datos calculados para la Estación 06, correspondientes a los datos adquiridos por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en la estación denominada como Paipa 06 cerca del SGP, usando la resistividad mínima.



(a) Modelos recuperados



(b) Curva de Tikhonov

Figura 33. (a) Modelo recuperado de la Estación 06 considerando la resistividad del medio como la media medida para el Estación 06a con $\alpha_s = 1,0$ y $\alpha_x = 0,2$. (b) Variación de Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m a través de la curva de Tikhonov (inferior).

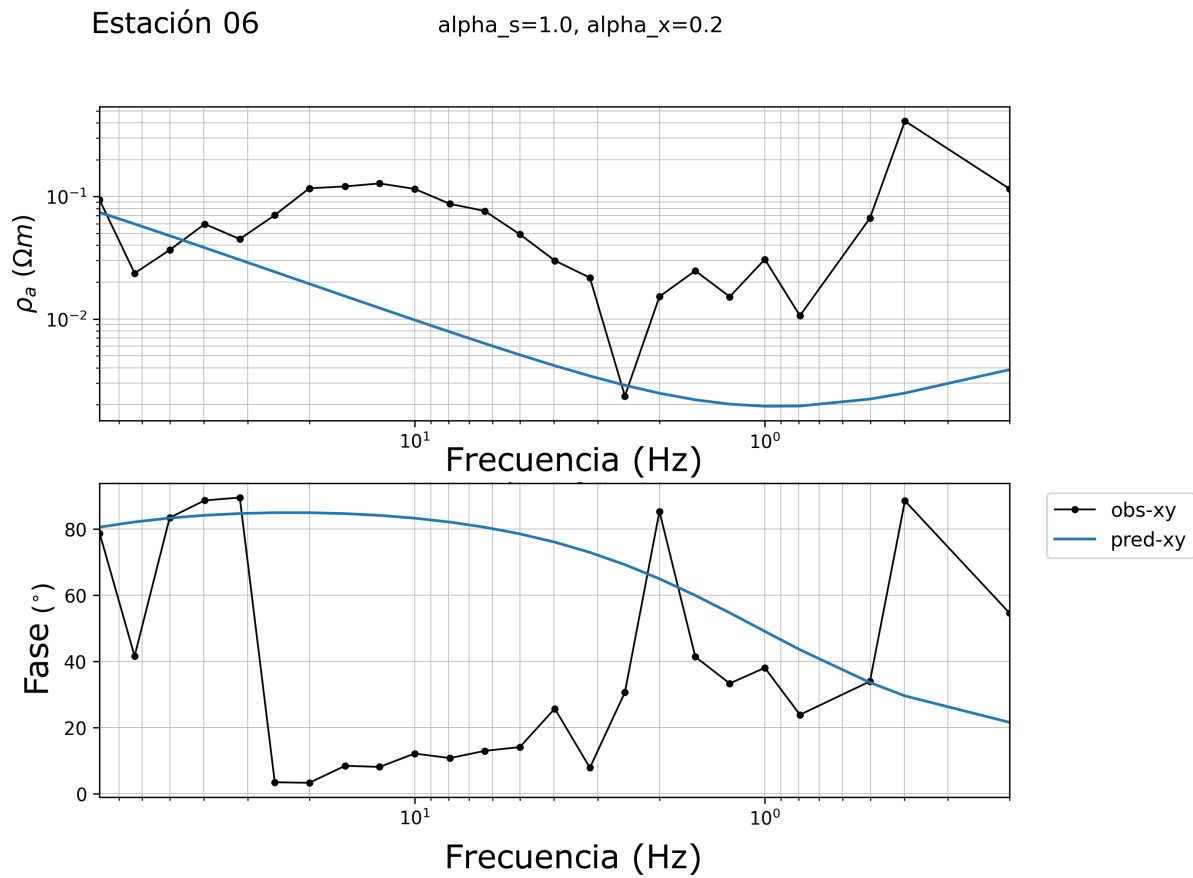
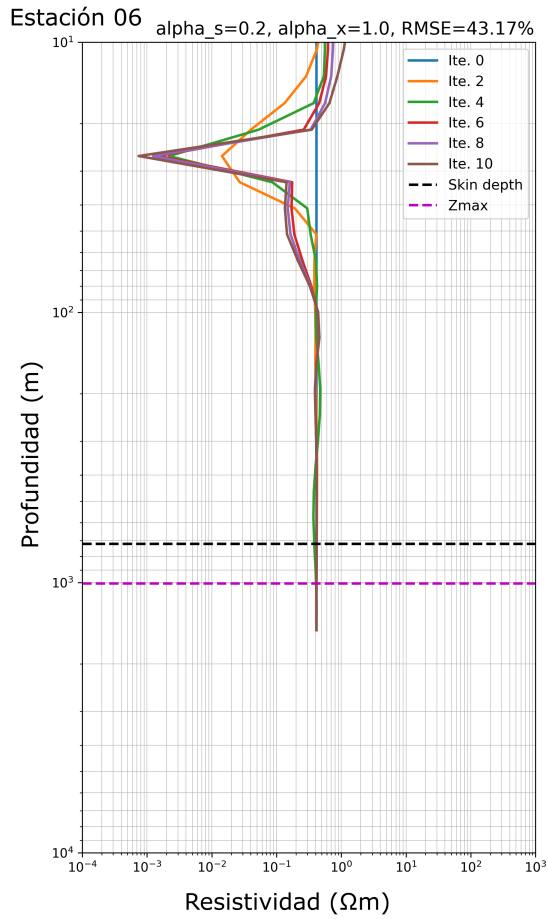
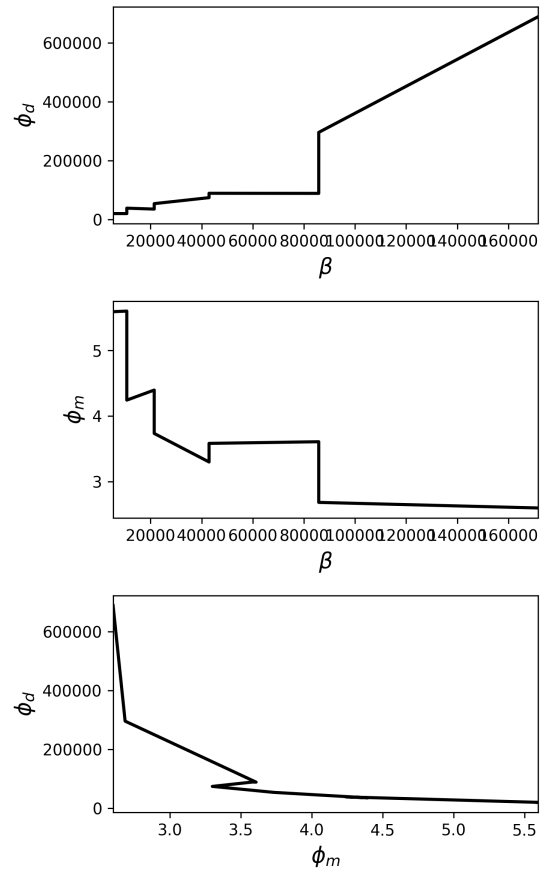


Figura 34. Datos observados y datos calculados para la Estación 06, correspondientes a los datos adquiridos por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en la estación denominada como Paipa 06 cerca del SGP, usando la resistividad media.



(a) Modelos recuperados



(b) Curva de Tikhonov

Figura 35. (a) Modelo recuperado de la Estación 06 considerando la resistividad del medio como la máxima medida para el Estación 06a con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 1,0$. (b) Variación de Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m a través de la curva de Tikhonov (inferior).

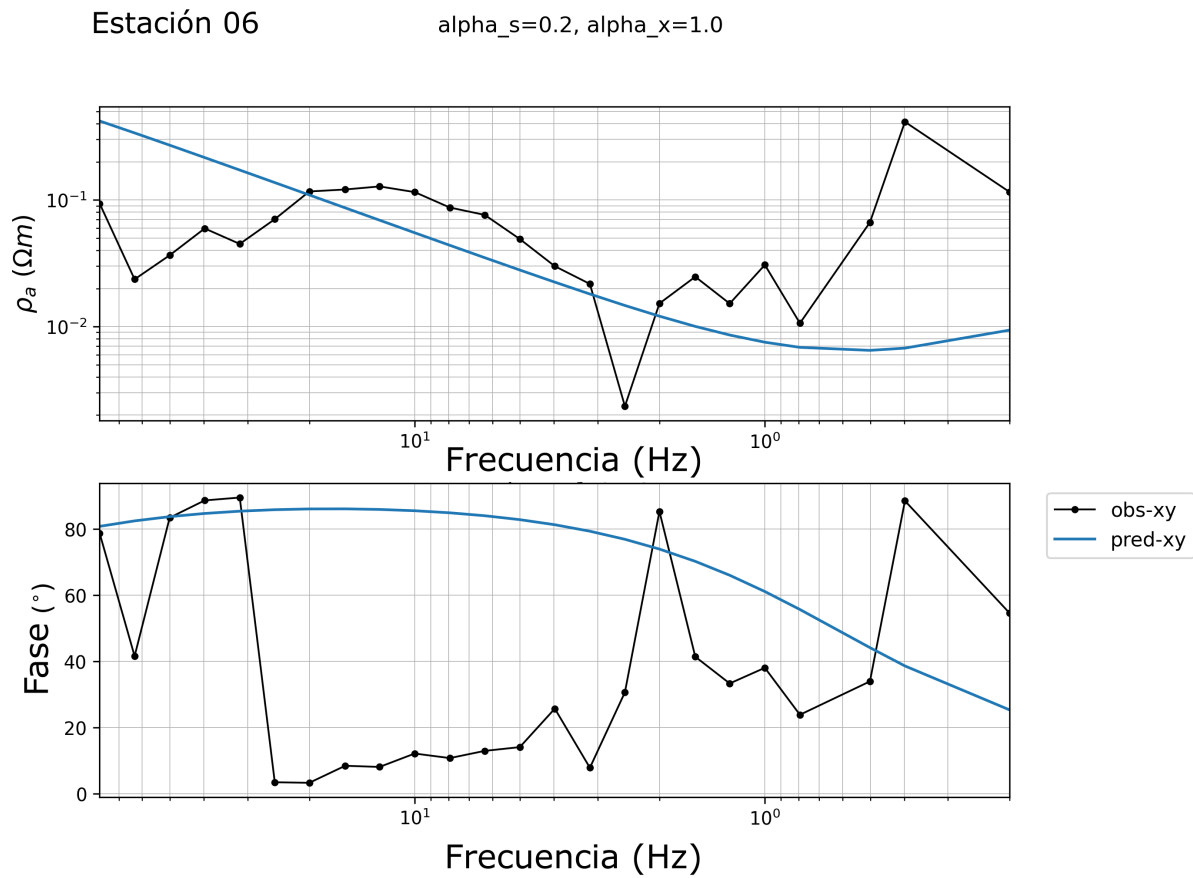


Figura 36. Datos observados y datos calculados para la Estación 06, correspondientes a los datos adquiridos por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en la estación denominada como Paipa 06 cerca del SGP, usando la resistividad máxima.

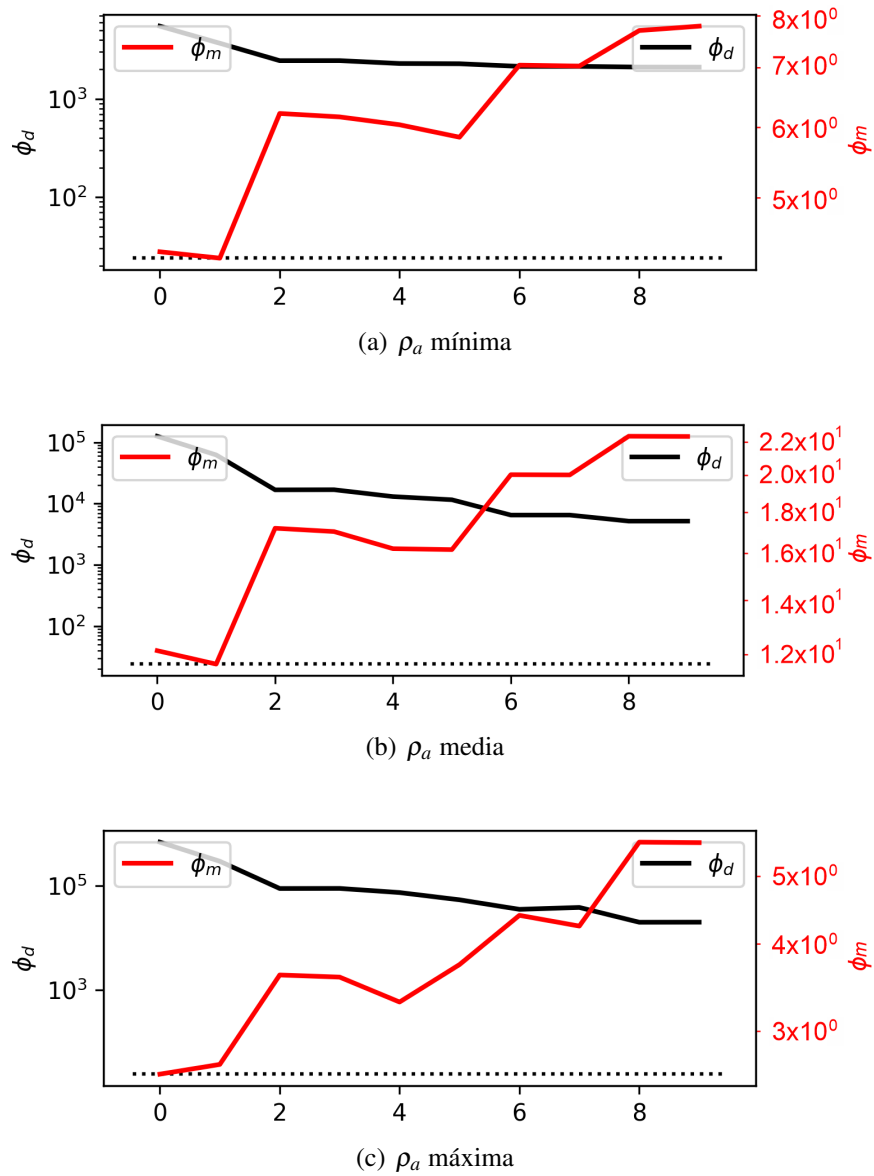


Figura 37. Variación del Φ_d y Φ_m en cada iteración para las diferentes condiciones iniciales de la resistividad del medio en la Estación 06, donde se observa la disminución del Φ_d en cada nueva iteración, pero un incremento en el valor del Φ_m , considerando el criterio de la L-curve en la curva de Tikhonov se puede estimar la iteración que mejor soluciona el problema.

4.3.1. Estaciones Perfil B-B'. La Estación 06 hace parte del Perfil B-B' (Figura 4) de Silva Benavides y Uribe Joya (2018), donde también se localizan las estaciones Paipa 04, Paipa 05 y Paipa 07, por lo que se realizó la inversión de estos datos renombrando los resultados como Estación 04, Estación 05 y Estación 07 respectivamente; se considero la resistividad máxima medida como referencia para la estimación de la profundidad de investigación (Z_{max}). La matriz de RMSE para las Estaciones 04 y 07 del Perfil B-B' (Figura 38) conserva la tendencia de valores bajos en el error cuando el parámetro α_s es mínimo y el parámetro α_x máximo, para la Estación 05 (Figura 38) se presentan múltiples modelos con valores mínimos similares. Los modelos recuperados para la Estación 04 (Figura 39), Estación 05 (Figura 41) y Estación 07 (Figura 43) generalizan un modelo de tres capas donde la capa del medio o central presenta valores bajos de resistividad respecto a la suprayacente e infrayacente, semejante a lo obtenido en la Estación 06, con variaciones en la profundidad de la capa intermedia. Al evaluar las curvas de los datos observados y calculados de la Estación 04 (Figura 40), Estación 05 (Figura 42) y Estación 07 (Figura 44), no se evidenció un ajuste adecuado.

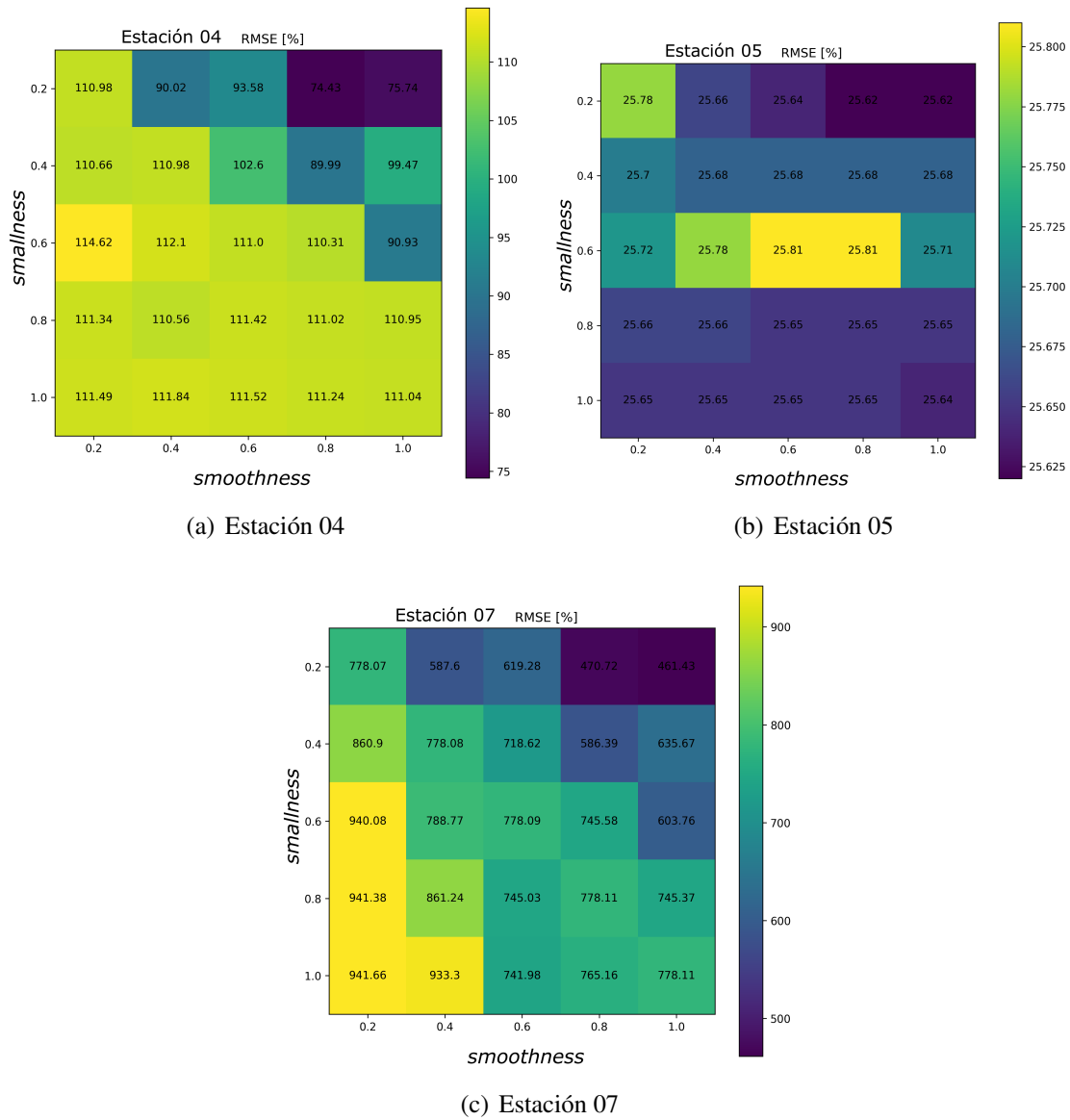


Figura 38. Matrices RMSE para la Estación 04, Estación 05 y Estación 07, al variar los valores de los parámetros $smallness$ α_s (eje de ordenadas o posición vertical) y $smoothness$ α_x (eje de abscisas o posición horizontal), considerando la resistividad medida máxima.

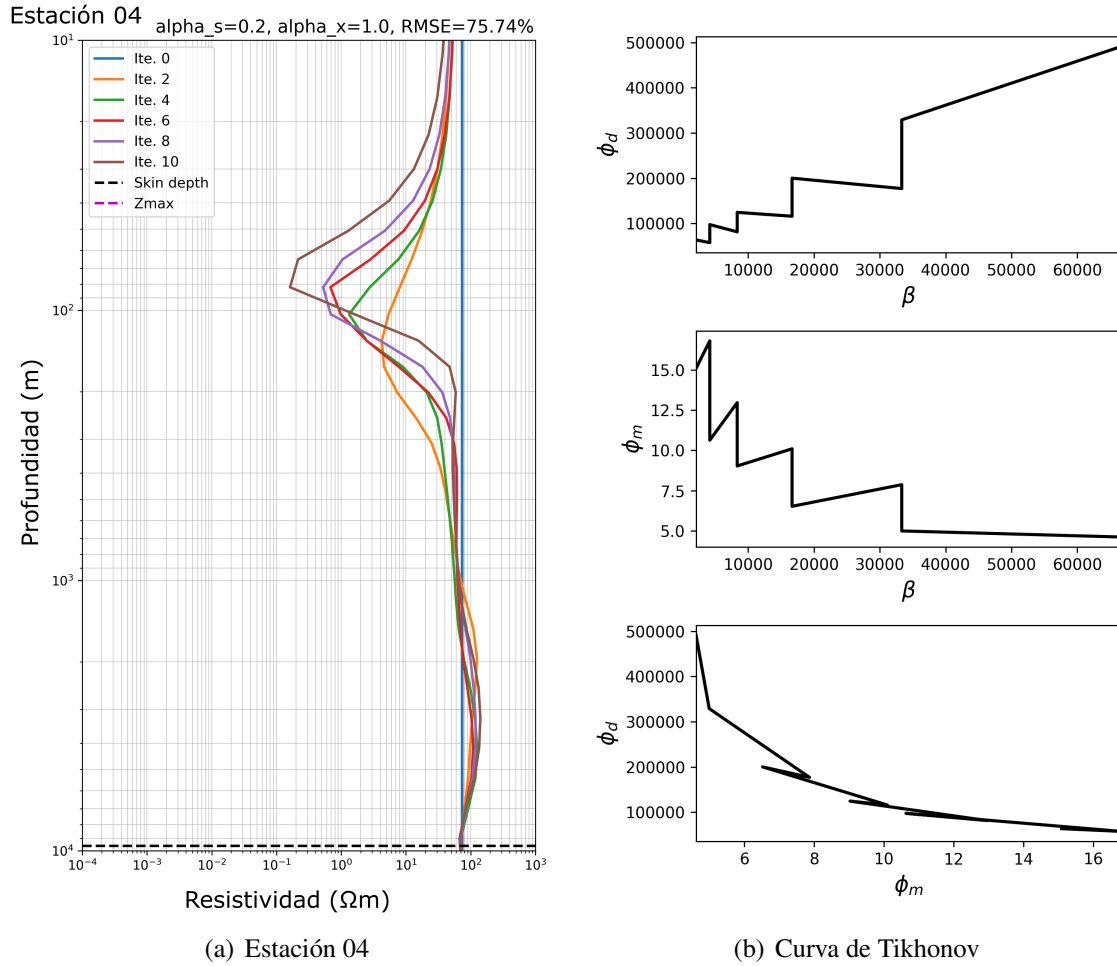


Figura 39. (a) Modelo recuperado de la Estación 04 (correspondiente a Paipa 04 de [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#)) localizada en el Perfil B-B', considerando la resistividad del medio como la máxima observada con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 1,0$. (b) Variación de Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m a través de la curva de Tikhonov (inferior).

Estación 04

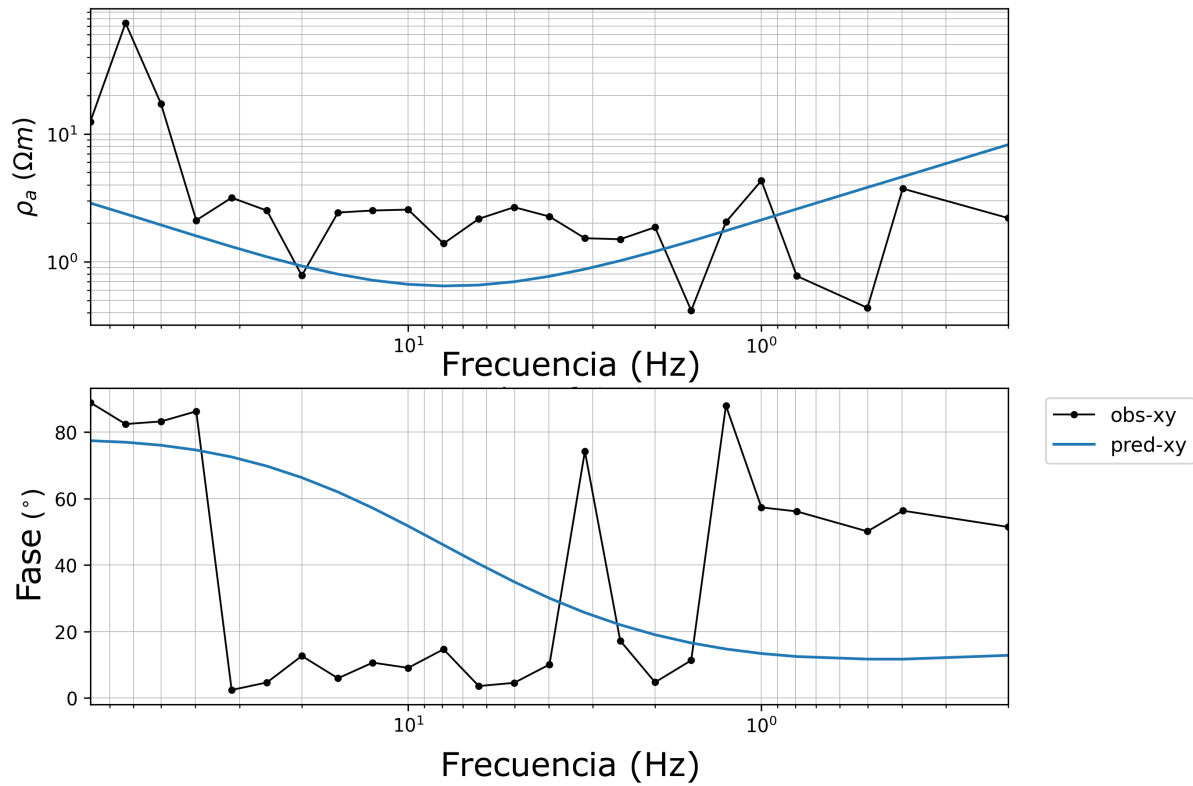
 $\alpha_s=0.2$, $\alpha_x=1.0$ 

Figura 40. Datos observados y datos calculados para la Estación 04, correspondientes a los datos adquiridos por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en la estación denominada como Paipa 04 cerca del SGP, usando la resistividad máxima.

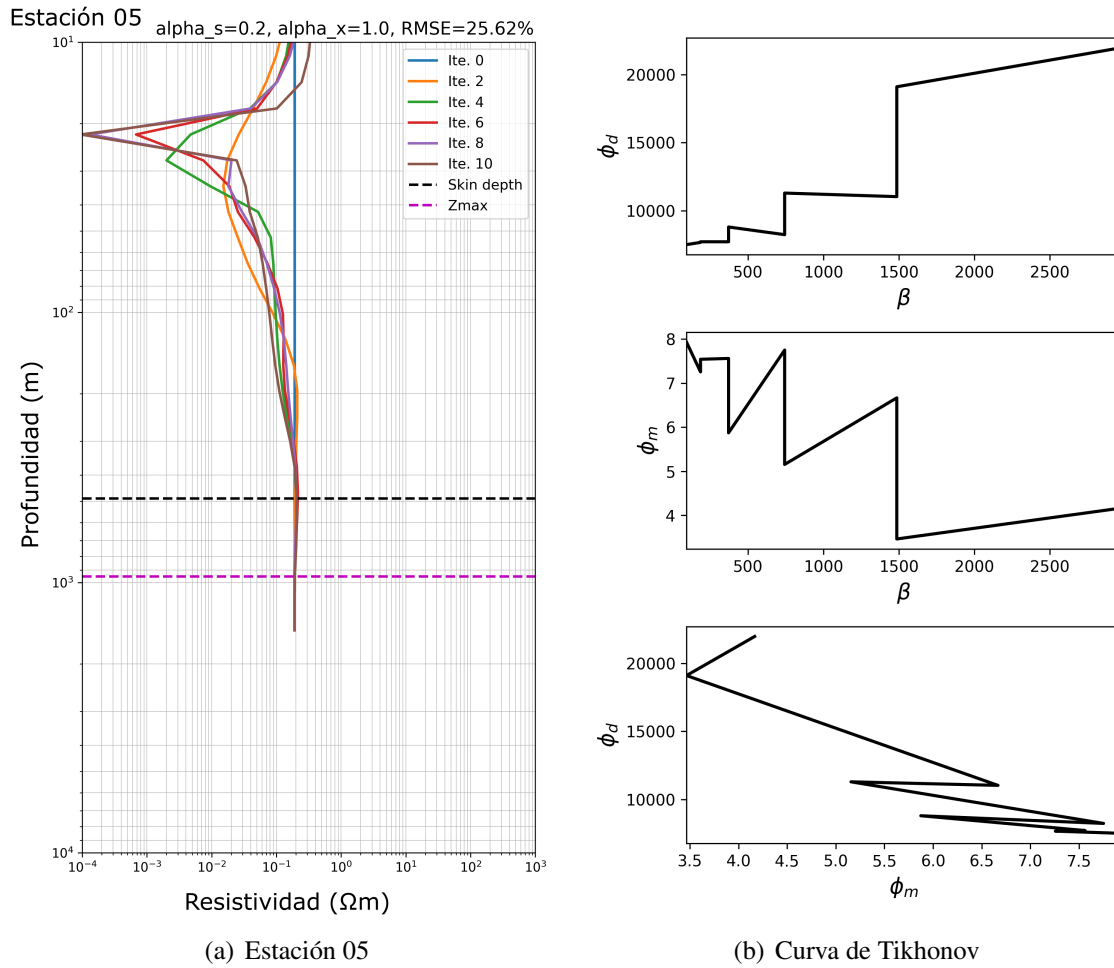


Figura 41. (a) Modelo recuperado de la Estación 05 (correspondiente a Paipa 05 de [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#)) localizada en el Perfil B-B', considerando la resistividad del medio como la máxima observada con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 1,0$. (b) Variación de Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m a través de la curva de Tikhonov (inferior).

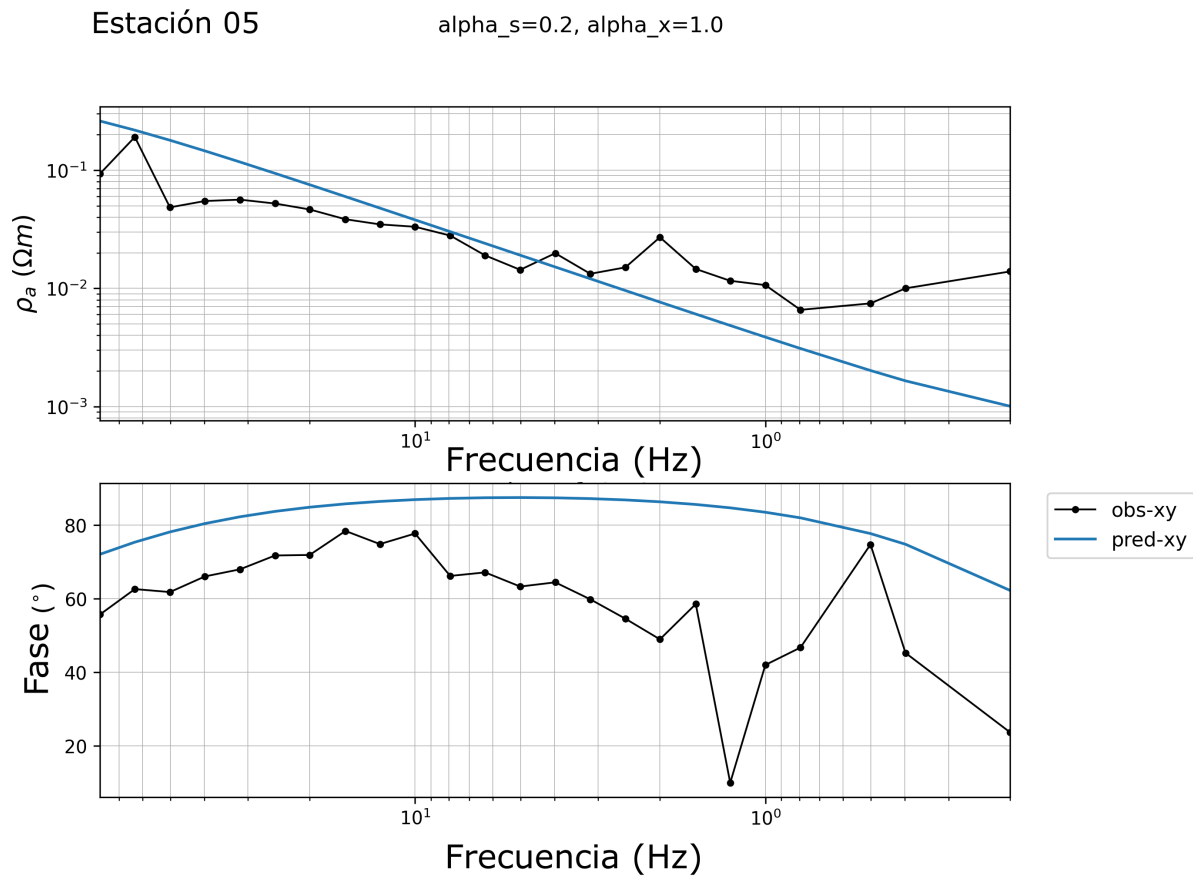


Figura 42. Datos observados y datos calculados para la Estación 04, correspondientes a los datos adquiridos por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en la estación denominada como Paipa 05 cerca del SGP, usando la resistividad máxima.

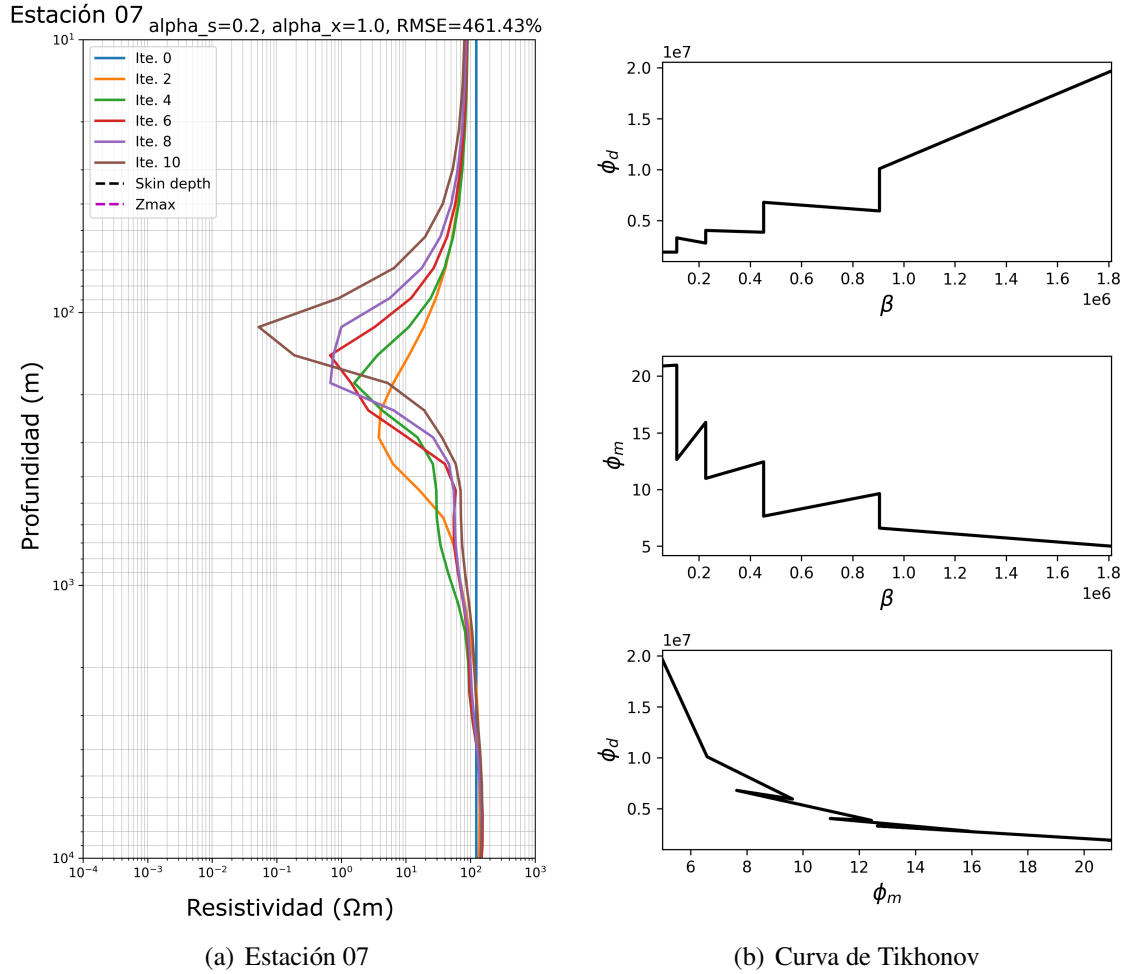


Figura 43. (a) Modelo recuperado de la Estación 07 (correspondiente a Paipa 07 de [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#)) localizada en el Perfil B-B', considerando la resistividad del medio como la máxima observada con $\alpha_s = 0,2$ y $\alpha_x = 1,0$. (b) Variación de Φ_d (superior) y Φ_m (centro) en función del parámetro de regularización β . Relación de Φ_d y Φ_m a través de la curva de Tikhonov (inferior).

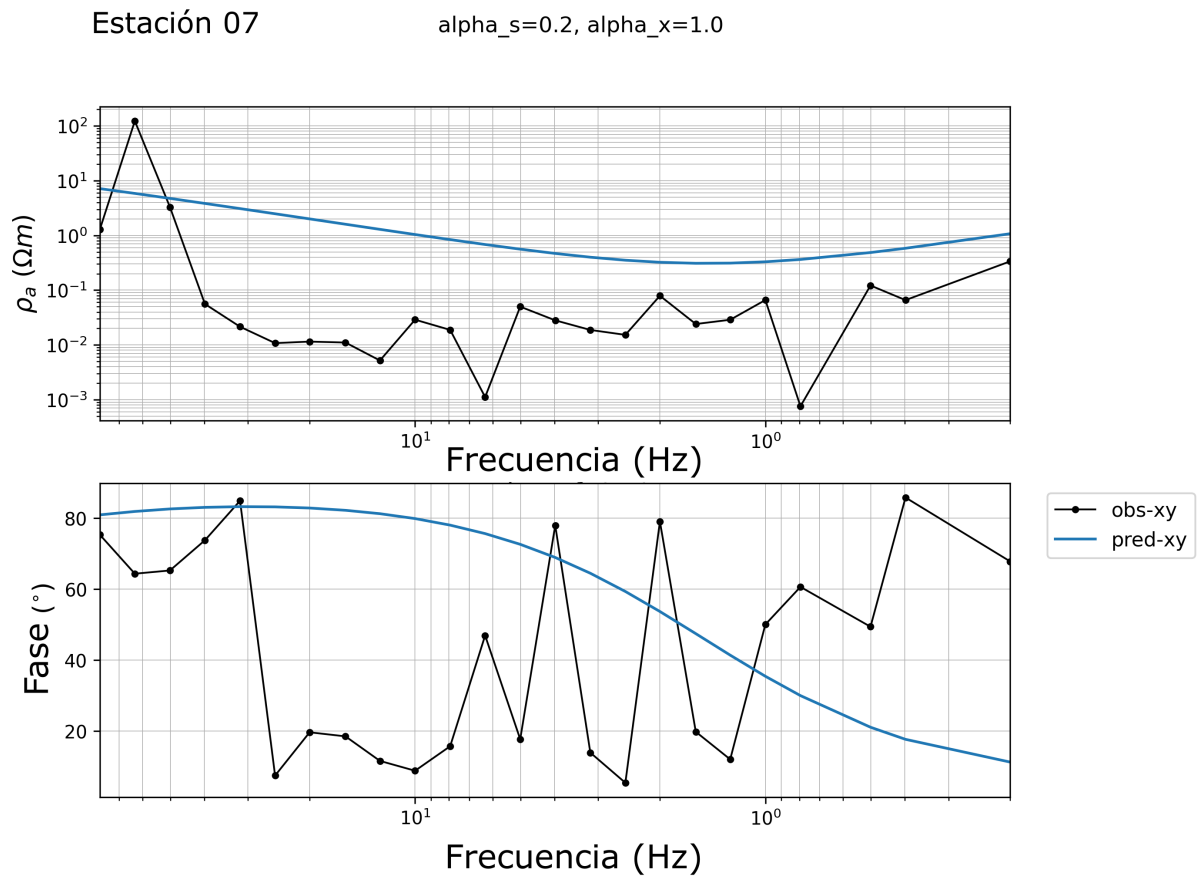


Figura 44. Datos observados y datos calculados para la Estación 07, correspondientes a los datos adquiridos por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en la estación denominada como Paipa 07 cerca del SGP, usando la resistividad máxima.

4.3.2. Inversión 1D Transformada de Bostick. La inversión unidimensional realizada por la Transformada de Bostick se considera como un esquema de inversión heurística y es uno de los métodos más simples para invertir datos MT, el cual promedia el ajuste entre los datos de modo TE y TM ([Abdelzaher et al., 2012](#)), generalmente la profundidad de penetración es mayor para el modo TM comparado con el modo TE ([dos Santos et al., 2013b](#)). El equipo Strata-gem permite realizar un análisis 1D en campo de la curva del sondeo realizado, implementando la Transformada de Bostick. [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) obtienen en Paipa 06 (Figura 45) valores de resistividad entre los $8\text{-}12 \Omega \cdot m$ los primeros metros, a una profundidad de 800 metros indican una disminución en la resistividad; a profundidades mayores de los 1200 metros registra resistividades de $20 \Omega \cdot m$. Los valores de resistividad real obtenidos por medio de la Transformada de Bostick (Paipa 06) son significativamente superiores a los obtenidos con la inversión realizada haciendo uso de SimPEG (Estación 06), las cuales son inferiores a $1 \Omega \cdot m$.

El equipo Stratagem no visualiza los datos a manera de capas en campo, sino una representación de puntos en una gráfica de profundidad contra resistividad real. Los resultados de [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en las estaciones localizadas sobre el perfil perfil B-B' (Figura 4) presentan diferencias en la cantidad de datos visualizados en cada estación. Esto se puede asociar en la sensibilidad de la Transformada de Bostick a datos con ruido. [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) identificaron ruido en los datos en algunas de las estaciones, lo cual evidencio una dificultad para recuperar el modelo de inversión. [Gomez-Treviño \(1996\)](#) concluye que se deben definir adecuadamente las propiedades del modelo antes de dar inicio a la solución y que la transformación

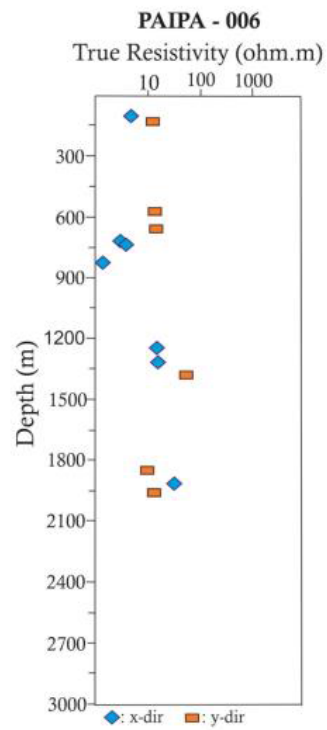


Figura 45. Resultados de la inversión en campo realizada por el equipo Stratagem implementando la Transformada de Bostick para Paipa 06. Tomado de [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#).

es inestable para datos ruidosos.

Los resultados obtenidos por [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#) en Paipa 04 (Figura 4) mostraron una tendencia y continuidad para la representación de las resistividades reales del modelo, visualmente se evidencia en Paipa 07 que en valores de profundidad someros se obtienen diferentes valores de resistividad real. En Paipa 05 y 06 la cantidad de puntos visualizados es inferior respecto a las otras dos estaciones en el perfil B-B'; esto esta asociado a la inexistencia de un flujo de procesamiento por parte del equipo Stratagem para hacer filtrados y ajustes a los datos adquiridos. Aun así, es un método de inversión que permite obtener y visualizar un primer modelo para un control y seguimiento geológico junto con el aporte en la toma de decisiones durante la campaña geofísica.

[Rodríguez et al. \(2010\)](#) resaltan las características básicas donde se establece la física en la transformada de Bostick como una forma integral simple que relaciona los datos directamente con una distribución de conductividad arbitraria y se basa en la teoría de un semiespacio homogéneo sin necesidad de un modelo inicial o de referencia. Se debe considerar que la profundidad de penetración implica un factor de atenuación de aproximadamente $1/2$, en lugar del factor de atenuación $1/e$ comúnmente utilizado para el *Skin Depth* ([dos Santos et al., 2013b](#)).

4.3.3. Inversión 1D Algoritmo de Occam. El algoritmo de Occam obtiene modelos suavizados con el fin de evitar una sobre interpretación de los datos, considerando la rugosidad R_1 , integral del cuadrado de la derivada de las resistividades respecto a la profundidad (Rojas Sarmiento, 2014) ampliamente usado en geofísica, razón por la cual fueron procesados los datos crudos de Paipa 06 con este método (Figura 46) usando la herramienta PyGMI. El problema inverso se resuelve buscando el modelo de resistividades mas suavizado posible minimizando R_1 mediante el método de los multiplicadores de Lagrange (Rojas Sarmiento, 2014). Esta inversión discretiza el medio en 1D, es decir la resistividad solo cambia con la profundidad, utilizando capas con resistividad homogénea (Salas Ariza, 2012).

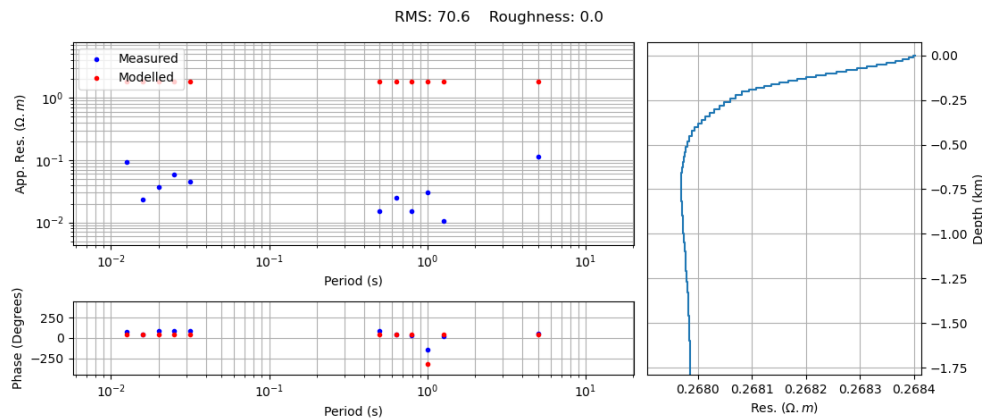


Figura 46. Resultados de la inversión empleando el Algoritmo de Occam para los datos crudos de Paipa 06 tomados por (Silva Benavides y Uribe Joya, 2018) en cercanías del SGP.

El algoritmo de Occam discretiza el modelo inicial en una cantidad de capas definidas al inicio del proceso de inversión y permite generar modelos suavizados incrementando la cantidad de capas ingresadas. Al igual que la inversión realizada por SimPEG emplea una resistividad inicial de referencia, la cual se va ajustando en cada iteración para cada capa generada, sin embargo, el

algoritmo de Occam no evalúa el modelo recuperado con el modelo de referencia. No obstante, el modelo recuperado para Paipa 06 mediante el algoritmo de Occam presenta valores de resistividad inferiores a $1 \Omega \cdot m$, similar a lo obtenido usando SimPEG (Estación 06), con una diferencia en la caída de los valores de resistividad en los primeros 750 metros. Posterior a ello se presenta una resistividad constante para el modelo obtenido por SimPEG (Estación 06), donde se evidencia un decaimiento en los valores de resistividad los primeros metros, después un incremento y a partir de los 100 metros la resistividad se mantiene constante.

Tanto el algoritmo de Occam como la inversión realizada por SimPEG consideran en su expresión matemática un modelo a partir de los datos observados, el cual se considera homogéneo. La inversión por SimPEG (Estación 06) incluye una expresión asociada al modelo de referencia que considera el principio del *half-space* y evalúa el error respecto a este modelo de referencia, caso contrario a lo ocurrido en el algoritmo de Occam el cual solo considera el error respecto a los datos observados, razón por la cual pueden presentarse diferencias en los últimos metros para los dos modelos recuperados.

WinGLink ([Geosystem SRL, 2008](#)) es un software multidisciplinario que principalmente procesa y modela datos magnetotelúricos; por lo que fue utilizado en la presente tesis para realizar una inversión de los datos adquiridos en Paipa 06 (Figura 47), obteniendo un modelo con resistividades similares a las obtenidas por SimPEG, con una profundidad inferior a los 100 metros.

Los modelos de Occam y de Bostick son modelos de resistividades muy suavizados (Figura 48), lo cual pueden o no corresponder a una distribución geológica real o de geología compleja ([Rojas Sarmiento, 2014](#)). Los resultados obtenidos por el algoritmo de Occam son una aproximación

mas suavizada respecto a la transformada de Bostick, las implicaciones respecto a la distribución geológica se ven limitadas en la etapa de interpretación y del conocimiento geológico previo de la zona de estudio. A pesar de esta consideración los resultados obtenidos pueden satisfacer la necesidad de la interpretación y generación de modelos. La inversión realizada por SimPEG al considerar el modelo de referencia puede llegar a considerarse como el modelo de partida y ser planteado en función de la geología conocida en el área, permitiendo un mayor control geológico del área en la etapa de inversión; quedando a consideración y ajuste de los parámetros de inversión óptimos, lo cual se ha podido realizar de manera iterativa y automática, generando múltiples modelos que permitan obtener el error mínimo con una coherencia geológica.

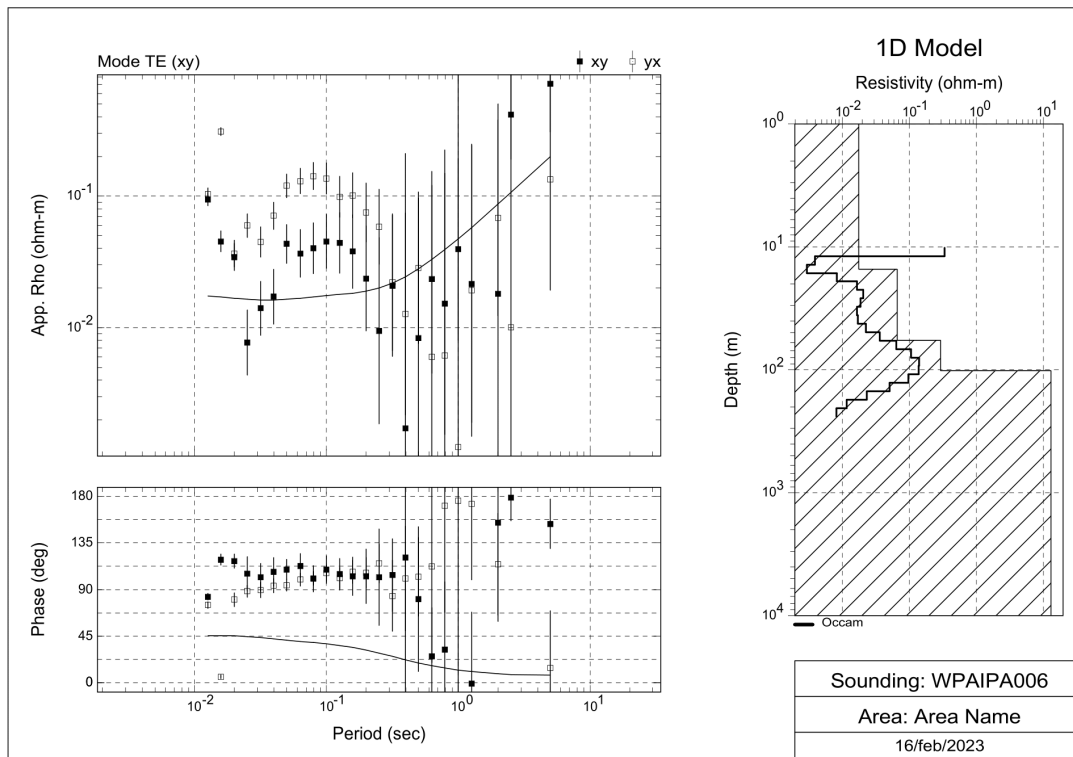


Figura 47. Resultado inversión 1D, usando el Software WinGLink, de los datos crudos de Paipa 06 tomados por (Silva Benavides y Uribe Joya, 2018) en cercanías del SGP.

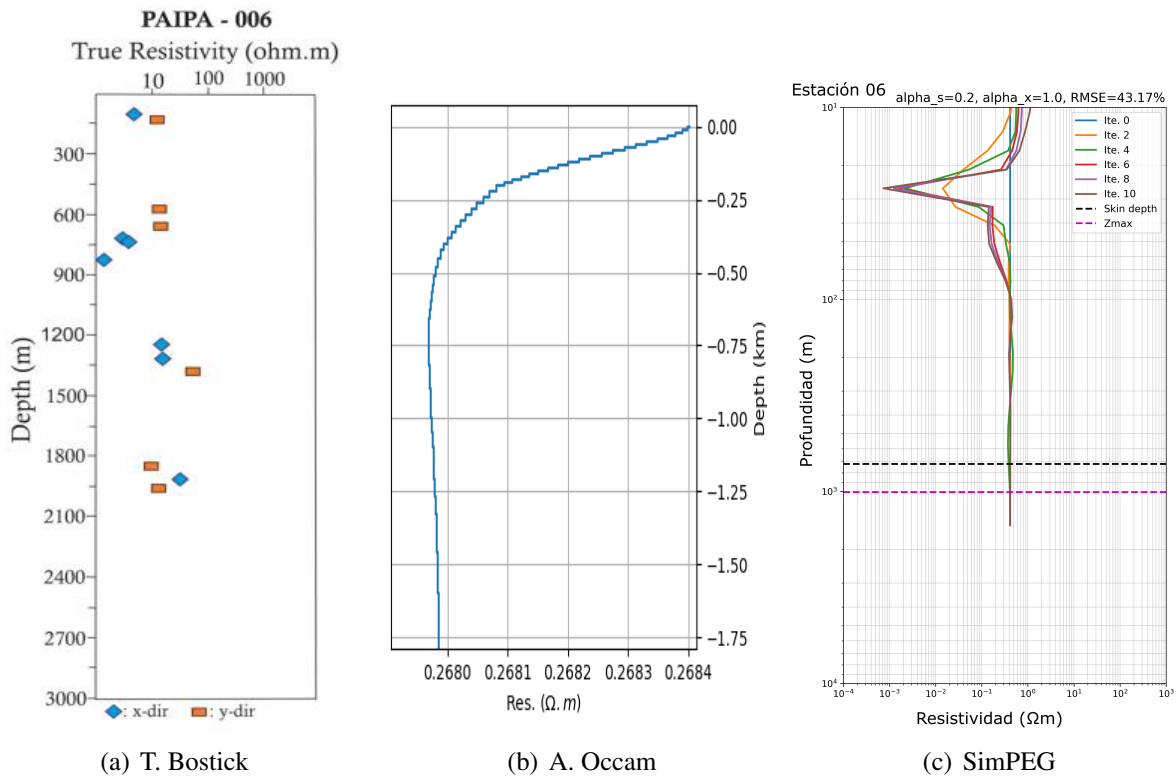


Figura 48. Modelos recuperados para la Transformada de Bostick (a), Algoritmo de Occam (b) e Inversión con SimPEG (c) para la Estacion 06 de [Silva Benavides y Uribe Joya \(2018\)](#).

5. Conclusiones

Se determinaron modelos de resistividad para dos modelos sintéticos, el Modelo Sintético A consideró una capa intermedia de alta resistividad entre dos capas de baja resistividad y el Modelo Sintético B corresponde a la interpretación geológica del Sistema Geotérmico de Paipa (SGP). Además, se obtuvieron modelos de resistividad para datos reales adquiridos en campo en cercanías del SGP. Los modelos sintéticos 1D evaluados mediante SimPEG presentan errores RMSE inferiores al 3 %, hacer uso de modelos sintéticos permite evaluar una respuesta previa a un contexto geológico planteado y la influencia de los parámetros de inversión para dicho contexto geológico, obteniendo de esta manera un error RMSE mínimo y con ello una idea generalizada del punto de partida para la inversión de datos reales.

Al evaluar los parámetros de inversión en los modelos sintéticos se encontró que el error RMSE en general es bajo cuando el parámetro de *smallness* α_s tiende a ser mínimo y el parámetro de *smoothness* α_x máximo, esta tendencia se ve afectada cuando se incrementa el número de iteraciones máximas para la inversión, por lo que diversos modelos pueden llegar a un error RMSE mínimo similar. La profundidad de los modelos recuperados esta influenciada por la resistividad del medio usada, una mayor resistividad del medio corresponde a una mayor profundidad de investigación. El modelo de referencia es controlado por el parámetro de regularización β , el cual puede dar mayor o menor peso al modelo.

La inversión de SimPEG variando los parámetros, la profundidad de investigación y haciendo uso del criterio de la L-curve permitió determinar un rango de iteraciones en la curva de

Tikhonov que solucionen el problema cuando la función Φ_d y Φ_m sean mínimos. Para el caso de los modelos sintéticos, los datos calculados se ajustaron a los datos observados; la inversión de SimPEG con los datos reales del SGP no presento un ajuste óptimo entre los datos calculados y los observados. El código obtenido tiene la versatilidad de evaluar múltiples valores para α_s y α_x y recuperar los resultados de manera gráfica para posteriormente ser analizados y evaluados de acuerdo al contexto geológico.

La comparación de los resultados de inversión de datos magnetotelúricos mediante SimPEG, la transformada de Bostick y el algoritmo de Occam demostró que los resultados obtenidos por el algoritmo de Occam presentan una aproximación mas suavizada respecto a la transformada de Bostick. Para la transformada de Bostick y el algoritmo de Occam los resultados obtenidos satisfacen la necesidad de interpretación y generación de modelos. El incluir un modelo de referencia en la inversión realizada con SimPEG permite un mayor control geológico del área en la etapa de inversión, quedando a consideración y ajuste los parámetros de inversión óptimos, lo cual se ha podido realizar de manera iterativa y automática, generando múltiples modelos que permitan obtener el error mínimo con una coherencia geológica.

El uso del algoritmo de inversión generado con SimPEG en datos reales en cuatro estaciones asociadas al SGP permitió generar modelos 1D, donde se generalizó la presencia de tres capas en los cuatro sondeos analizados. En futuros proyectos de investigación se recomienda realizar el proceso de filtrado o ajuste de la calidad de los datos crudos con el objetivo de obtener modelos de mayor calidad y con ello disminuir la presencia de ruido excesivo que genere incertidumbre.

Referencias Bibliográficas

- Abdelzaher, M., Nishijima, J., Saibi, H., El-Qady, G., Massoud, U., Soliman, M., Younis, A., y Ehara, S. (2012). A Coastal Aquifer Study Using Magnetotelluric and Gravity Methods in Abo Zenema, Egypt. *Pure and Applied Geophysics*, 169(9):1679–1692, URL: <http://link.springer.com/10.1007/s00024-011-0407-y>, doi:10.1007/s00024-011-0407-y.
- Aparicio Monjarás, O. R. J. y Canjura Guzmán, R. A. (2017). *Elaboración y comparación de los Modelos Resistivos MT 1D, 2D y 3D de un área geotérmica de alta temperatura*. Diplomado en geotermia para américa latina edición 2017, Universidad de el Salvador.
URL: <https://ri.ues.edu.sv/id/eprint/15973/>.
- Aster, R. C., Borchers, B., y Thurber, C. H. (2013a). Chapter one - introduction. In Aster, R. C., Borchers, B., y Thurber, C. H., editors, *Parameter Estimation and Inverse Problems (Second Edition)*, pages 1–23. Academic Press, Boston, second edition, URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B978012385048500001X>, doi:<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385048-5.00001-X>.
- Aster, R. C., Borchers, B., y Thurber, C. H. (2013b). Chapter two - linear regression. In Aster, R. C., Borchers, B., y Thurber, C. H., editors, *Parameter Estimation and Inverse Problems (Second Edition)*, pages 25–53. Academic Press, Boston, second edition, URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123850485000021>, doi:<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385048-5.00002-1>.

- Borah, U. K. y Patro, P. K. (2019). Estimation of the depth of investigation in the magnetotelluric method from the phase. *Geophysics*, 84(6):E377—E385, URL: <https://library.seg.org/doi/abs/10.1190/geo2018-0124.1>, doi:10.1190/geo2018-0124.1.
- Bostick, F. X. (1977). A simple almost exact method of mt analysis. In *Workshop on Electrical Methods in Geothermal Exploration*, volume 359, pages 174–183. US Geological Survey.
- Campanyà, J. (2012). *Innovation of the Magnetotelluric method and its application to the characterization of the Pyrenean lithosphere*. PhD thesis, Universitat de Barcelona.
URL: https://www.researchgate.net/publication/237112060_Innovation_of_the_Magnetotelluric_method_and_its_application_to_the_characterization_of_the_Pyrenean_lithosphere.
- Cockett, R., Kang, S., Heagy, L. J., Pidlisecky, A., y Oldenburg, D. W. (2015). SimPEG: An open source framework for simulation and gradient based parameter estimation in geophysical applications. *Computers and Geosciences*, 85:142–154, URL: <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2015.09.015>, doi:10.1016/j.cageo.2015.09.015.
- Constable, S. C., Parker, R. L., y Constable, C. G. (1987). Occam's inversion: a practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 52(3):289–300, URL: <https://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.1442303>, doi:10.1190/1.1442303.

- Corbo, F. (2006). *Modelo geofísico del acuífero guaraní: zona comprendida entre Uruguay y Argentina*. Tesis de maestría en geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Delgado-Rodríguez, O., Campos-Enríquez, O., Urrutia-Fucugauchi, J., y Arzate, J. (2013). Occam and Bostick 1-D inversion of magnetotelluric soundings in the Chicxulub Impact Crater, Yucatán, Mexico. *undefined*.
- dos Santos, A. C. L., Padilha, A. L., Vitorello, I., de Pádua, M. B., y Pires, A. C. B. (2013a). Methodology to estimate the maximum depth of reliability of two-dimensional geoelectrical models derived from magnetotelluric data. *Revista Brasileira de Geofísica*, 31(1):97–107, doi:[10.22564/rbgf.v31i1.249](https://doi.org/10.22564/rbgf.v31i1.249).
- dos Santos, A. C. L., Padilha, A. L., Vitorello, Í., de Pádua, M. B., y Pires, A. C. B. (2013b). Methodology to estimate the maximum depth of reliability of two-dimensional geoelectrical models derived from magnetotelluric data. *Revista Brasileira de Geofísica*, 31(1):97, URL: <http://sbgf.org.br/revista/index.php/rbgf/article/view/249>, doi:[10.22564/rbgf.v31i1.249](https://doi.org/10.22564/rbgf.v31i1.249).
- Escalas, M., Queralt, P., Ledo, J., y Marcuello, A. (2013). Polarisation analysis of magnetotelluric time series using a wavelet-based scheme: A method for detection and characterisation of cultural noise sources. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 218:31–50, doi:[10.1016/j.pepi.2013.02.006](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2013.02.006).

Everett, M. E. (2013). *Near-surface applied geophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, England.

Geometrics, INC. (2011). *StrataGem EH-4*. 2190 Fortune Drive, San Jose, CA 95131, USA.

Geosystem SRL (2008). *WinGLink User's Guide, Release 2.20.02.01*. Via Clericetti 42a, 20133 Milan, Italy.

Gomez-Treviño, E. (1996). Approximate depth averages of electrical conductivity from surface magnetotelluric data. *Geophysical Journal International*, 127(3):762–772, URL: <https://academic.oup.com/gji/article-lookup/doi/10.1111/j.1365-246X.1996.tb04055.x>, doi:10.1111/j.1365-246X.1996.tb04055.x.

Hall, M. (2016). A user guide to the geophysical tutorials. *The Leading Edge*, 35(2):190–191, URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/tle35020190.1>, doi:10.1190/tle35020190.1.

Huang, H. (2005). Depth of investigation for small broadband electromagnetic sensors. *Geophysics*, 70(6), doi:10.1190/1.2122412.

Kang, S., Heagy, L. J., Cockett, R., y Oldenburg, D. W. (2017). Exploring nonlinear inversions: A 1D magnetotelluric example. *The Leading Edge*, 36(8):696–699, URL: <http://library.seg.org/doi/10.1190/tle36080696.1>, doi:10.1190/tle36080696.1.

Kearey, P., Brooks, M., y Hill, I. (2002). *An introduction to geophysical exploration - Third Edition*. Blackwell Science Ltd.

- Martí, A., Queralt, P., Marcuello, A., Ledo, J., Rodríguez-Escudero, E., Martínez-Díaz, J. J., Campaña, J., y Meqbel, N. (2020). Magnetotelluric characterization of the Alhama de Murcia Fault (Eastern Betics, Spain) and study of magnetotelluric interstation impedance inversion. *Earth, Planets and Space*, 72(1):16, URL: <https://earth-planets-space.springeropen.com/articles/10.1186/s40623-020-1143-2>, doi:10.1186/s40623-020-1143-2.
- Martí i Castells, A. (2006). *Magnetotelluric Investigation of Geoelectrical Dimensionality and Study of the Central Betic Crustal Structure*. PhD thesis, Universidad de Barcelona.
- Mosegaard, K. y Tarantola, A. (2002). Probabilistic approach to inverse problems. *International Geophysics*, 81:237–265.
- Moyano Nieto, I. E. (2014). *Modelamiento de estructuras geotérmica ocultas a partir de la interpretación de anomalías magnetotelúricas de resistividad en la región de Paipa, Boyacá, Colombia*. Tesis de investigación presentada como requisito parcial para optar al título de: Magister en ciencias-geofísica, Universidad Nacional de Colombia.
- Muttaqien, I. y Nurjaman, J. (2021). Two-dimensional inversion modeling of magnetotelluric (MT) synthetic data of a graben structure using SimPEG. *RISSET Geologi dan Pertambangan*, 31(1):1, URL: <https://jrisetgeotam.lipi.go.id/index.php/jrisgeotam/article/view/1121>, doi:10.14203/risetgeotam2021.v31.1121.
- Niblett, E. R. y Sayn-Wittgenstein, C. (1960). Variation of electrical conductivity with depth

by the magneto-telluric method. *Geophysics*, 25(5):998–1008, URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1438799>, doi:10.1190/1.1438799.

Nurjaman, J. (2019). *Modelado e inversión bidimensional de datos magnetotelúricos en La Cuenca de Banymas*. Tesis presentada como uno de los requisitos para obtener una licenciatura en ciencias, Universidad Estatal Islámica de Sunan Gunung Djati.

URL: <http://digilib.uinsgd.ac.id/26830/>.

Oldenburg, D. W. y Li, Y. (2005). 5. Inversion for Applied Geophysics: A Tutorial. In *Near-Surface Geophysics*, pages 89–150. Society of Exploration Geophysicists, doi:10.1190/1.9781560801719.ch5.

Rodríguez, J., Esperanza, F., y Gómez, E. (2010). 2-D Niblett-Bostick magnetotelluric inversion. *Geologica Acta*, 8(1), doi:10.1344/105.000001513.

Rojas Sarmiento, O. E. (2012). *Contribución al modelo geotérmico asociado al sistema volcánico Nevado del Ruiz Colombia, por medio del análisis de la relación entre la susceptibilidad magnética, conductividad eléctrica y térmica del sistema*. Trabajo de grado para optar por el título de geólogo, Universidad Nacional de Colombia.

Rojas Sarmiento, O. E. (2014). Aplicación de una metodología de procesamiento e interpretación de información magnetotelúrica sobre varios perfiles localizados en la zona occidental del Volcán Nevado del Ruiz - Colombia. *Boletín de Geología*, 36:57 – 70, URL: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0120-02832014000100004&nrm=iso.

- Salas Ariza, J. J. (2012). *Estudio magnetotelúrico en la cuenca La Purísima, Baja California Sur, México*. Tesis que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de maestro en ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Silva Benavides, L. A. y Uribe Joya, D. L. (2018). *Aplicación del método geofísico magnetotelúrico en una zona ubicada al sur del municipio de Paipa, Boyacá. Aporte a la exploración geotérmica*. Trabajo de grado en modalidad de investigación para optar por el título de geólogo, Universidad Industrial de Santander.
- Simpson, F. y Bahr, K. (2005). *Practical Magnetotellurics*. Cambridge University Press, URL: <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9780511614095/type/book>, doi:10.1017/CB09780511614095.
- Tikhonov, A. N. y Arsenin, V. I. (1977). *Solutions of ill-posed problems / Andrey N. Tikhonov and Vasiliy Y. Arsenin ; translation editor, Fritz John*. Winston ; distributed solely by Halsted Press Washington : New York.
- Vozoff, K. (1972). The magnetotelluric method in the exploration of sedimentary basins. *GEOPHYSICS*, 37(1):98–141, URL: <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.1440255>, doi:10.1190/1.1440255.
- Zhdanov, M. S. (2009). *Geophysical electromagnetic theory and methods*. Elsevier.