

**DISEÑO DE APERTURAS CODIFICADAS DE  
FORMA ADAPTATIVA PARA MEJORAR LA CALIDAD  
DE RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES  
ADQUIRIDAS EN UNA ARQUITECTURA  
COMPRESIVA DE TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA  
DE RAYOS-X EN ABANICO**

ANDRÉS FELIPE JEREZ ARIZA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA  
BUCARAMANGA

2017

**DISEÑO DE APERTURAS CODIFICADAS DE  
FORMA ADAPTATIVA PARA MEJORAR LA CALIDAD  
DE RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES  
ADQUIRIDAS EN UNA ARQUITECTURA  
COMPRESIVA DE TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA  
DE RAYOS-X EN ABANICO**

ANDRÉS FELIPE JEREZ ARIZA

Trabajo de grado para optar por el título de:  
**Ingeniero de Sistemas**

Director:

HENRY ARGUELLO FUENTES

*Ph.D* Electrical and Computer Engineering

Codirector:

MIGUEL ÁNGEL MÁRQUEZ CASTELLANOS

Ingeniero de sistemas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA  
BUCARAMANGA

2017

*A la mujer que amo infinitamente, mi madre, por ser una mujer excepcional, luchadora y fuerte, por corregirme para formarme en lo humano, por enseñarme a que con esfuerzo, disciplina y dedicación es posible lograr grandes cosas, por brindarme su amor incondicional, por desempeñar un rol de amiga y madre al mismo tiempo.*

*A la segunda persona más importante de mi vida, mi padre, por su apoyo, por creer en mí, por brindarme lo mejor que ha podido, por enseñarme a ser fuerte, por ofrecerme su cariño y afecto casi inaccesible, por su nobleza e infinita humanidad.*

*Mis logros son sus logros.*

**ANDRÉS FELIPE JEREZ ARIZA**

## **AGRADECIMIENTOS**

El autor expresa su agradecimiento:

Al profesor Henry Arguello por permite formar parte de su grupo de investigación, por depositarme un voto de confianza, por sus recomendaciones tan acertadas.

Al ingeniero Miguel Márquez por su disponibilidad, dedicación y guía, por corregirme para lograr un buen trabajo, por sus significativos aportes que ayudaron a mi formación académica.

---

# CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>17</b>
<b>1 TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA</b>	<b>19</b>
1.1 RESEÑA HISTÓRICA . . . . .	19
1.2 EVOLUCIÓN DE LOS ESCÁNERES DE CT . . . . .	20
1.3 PRINCIPIOS FÍSICOS DE LOS RAYOS-X . . . . .	21
1.4 LEY DE LAMBERT-BEER . . . . .	24
1.4.1 Atenuación de los rayos-X en un medio homogéneo . . . . .	24
1.4.2 Atenuación de los rayos-X en un medio no homogéneo . . . . .	25
1.5 MODELO MATEMÁTICO DE CT . . . . .	26
1.6 DOSIS DE RADIACIÓN . . . . .	27
<b>2 MUESTREO COMPRESIVO EN TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA</b>	<b>30</b>
2.1 BAJA DENSIDAD . . . . .	30
2.2 INCOHERENCIA . . . . .	31
2.3 ESTRATEGIAS DE CS EN CT . . . . .	32
<b>3 MUESTREO COMPRESIVO EN TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA BASADO EN APERTURAS CODIFICADAS</b>	<b>34</b>
<b>4 MUESTREO ADAPTATIVO EN TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA</b>	<b>36</b>
<b>5 METODOLOGÍA PROPUESTA PARA LA ADQUISICIÓN Y RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES CT</b>	<b>38</b>
5.1 DISEÑO DE APERTURAS CODIFICADAS HOMOGÉNEAS . . . . .	39
5.2 DISEÑO DE APERTURAS CODIFICADAS DE FORMA ADAPTATIVA	45
<b>6 SIMULACIONES Y RESULTADOS</b>	<b>48</b>
6.1 BASE DE DATOS UTILIZADA . . . . .	48
6.2 PARÁMETROS SELECCIONADOS . . . . .	48
6.3 MÉTRICAS . . . . .	50
6.4 RECONSTRUCCIONES . . . . .	50
<b>7 CONCLUSIONES</b>	<b>63</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>64</b>



## LISTA DE FIGURAS

1	(a) Primer prototipo de CT construido para el estudio del cerebro instalado en el hospital de Atkinson Morley's en Londres. (b) Primera imagen clínica obtenida con el prototipo. . . . .	20
2	Generaciones de escáneres de CT. (a) Geometría de 1G. (b) Geometría de 2G. (c) Geometría de 3G. (d) Geometría de 4G. (S es la fuente de rayos-X y D es el detector). . . . .	22
3	Producción de radiación a partir de fenómenos extranucleares. (a) Radiación de frenado. (b) Radiación característica de los metales. (c) Radiación generada por el impacto de un electrón con el núcleo. . . . .	23
4	Atenuación de la intensidad de radiación al pasar a través de un medio homogéneo. . . . .	25
5	Atenuación de la intensidad de radiación al pasar a través de un medio no homogéneo, donde $\Delta s \simeq 0$ . . . . .	26
6	Geometría de un tomógrafo con haz de rayos-X en abanico y un arreglo de detectores curvo. . . . .	27
7	Dosis de radiación para diferentes procedimientos de CT en Reino Unido (UK, por su sigla en inglés) y Galas. . . . .	28
8	Gráfica de estudios realizados en Estados Unidos basados en la exposición a dosis de radiación según la edad y el género. (a) Número estimado de procedimientos de CT. (b) Número proyectado de casos de cáncer. . . . .	29
9	Esquema del proceso de CS estándar. . . . .	30
10	(a) Imagen de CT $x$ . (b) Imagen de CT $\tilde{x}$ con el 25% de sus coeficientes significativos. . . . .	31
11	Ejemplo de la correlación entre una base de representación coseno y una matriz de muestreo en CT. (a) Base de representación $\Psi$ . (b) Matriz de muestreo $\Phi$ . (c) Matriz de correlación entre $\Phi$ y $\Psi$ . . . . .	32
12	Esquema de la adquisición de datos en una arquitectura CT con haz de rayos-X en abanico. (a) Tradicional. (b) Con una estrategia de reducción de ángulos de visión. (c) Con una estrategia de modulación del haz de rayos-X. (S es la fuente de rayos-X y D es el arreglo de detectores). . . . .	33

---

13	Ejemplo de una apertura codificada en sus versiones matriciales (a) $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{UV \times UV}$ y (b) $\mathbf{\Xi} \in \mathbb{R}^{U \times V}$ , con $U = V = 16$ . . . . .	35
14	Reconstrucción de una imagen CT fantasma en una arquitectura de 1G. (a) Imagen original. (b) Imagen reconstruida por un método tradicional con 1792 proyecciones. (c) Imagen reconstruida por el método de muestreo adaptativo propuesto en [1] con 1630 proyecciones. . . .	36
15	Ejemplo del proceso de muestreo adaptativo en una arquitectura de CT de 1G. (a) Conjunto inicial de proyecciones. (b) Aproximación inicial del objeto. (c) Segundo muestreo adaptado según el análisis de la reconstrucción (b). (d) Reconstrucción del objeto a partir de las proyecciones captadas en (a) y (c). (e) Tercer muestreo adaptado según el análisis de la reconstrucción (d). (f) Reconstrucción según el conjunto de proyecciones captadas en (a), (c) y (e). (g) Cuarto muestreo adaptado según el análisis de la reconstrucción (f). (h) Reconstrucción final del objeto. . . . .	37
16	(a) Imagen original, donde la región encerrada indica el elemento con mayor atenuación. (b) Adquisición inicial con un pequeño número de proyecciones. (c) Reconstrucción inicial del objeto a partir de (b). (d) Versión binaria de la imagen reconstruida (c), que identifica la región de mayor atenuación. (e) Segunda adquisición de proyecciones, que convergen fuera de la región (d). (f) Reconstrucción final del objeto a partir de (e). . . . .	38
17	Proceso de adquisición y reconstrucción de imágenes CT mediante la metodología propuesta. . . . .	39
18	Análisis de proyecciones que deja pasar una apertura aleatoria y una diseñada, en un determinado ángulo de visión. (a) Apertura codificada aleatoria. (b) Apertura codificada diseñada. Aquí, P1, P2 y P3 representan las proyecciones que se dejan pasar en un ángulo de visión específico. (c) Trayectoria recorrida de las proyecciones de (a) en un ángulo de visión. (d) Trayectoria recorrida de las proyecciones de (b) en un ángulo de visión. . . . .	40

19	Análisis de proyecciones que deja pasar una apertura aleatoria y una diseñada, en una región específica. (a) Apertura codificada aleatoria. (b) Apertura codificada diseñada. Aquí, P1, P2, P3, P4, P5 y P6 representan las proyecciones que se dejan pasar en la región determinada. (c) Trayectoria recorrida de las proyecciones de (a) en la región indicada. (d) Trayectoria recorrida de las proyecciones de (b) en la región indicada. . . . .	41
20	Ejemplo de una matriz densa $\frac{\tau_1}{V} (\mathbf{D} - \bar{\mathbf{M}}_1)^T (\mathbf{D} - \bar{\mathbf{M}}_1)$ con $U = V = 16$ y $\tau_1 = 1$ . . . . .	44
21	(a) Distribución espacial de la estructura $\mathbf{E}$ . (b) Ejemplo de un filtro $\mathbf{E}$ con $r = 9$ y $\Delta_r = 1$ píxeles. . . . .	45
22	Proceso de adaptación de la apertura codificada. $\Xi_0$ , $\Xi$ , $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{K}$ , son representaciones matriciales de los vectores $\mathbf{g}$ , $\mathbf{h}$ , $\zeta$ y $\kappa$ , respectivamente. Por otra parte, $\bar{\mathbf{K}}$ es la versión matricial de $\mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}_0 > e)$ y $\hat{\mathbf{X}}_0 > e$ es la versión binaria de la reconstrucción inicial $\hat{\mathbf{X}}_0$ en un valor $e \in \mathbb{R}$ . Aquí, $N^2 = n$ . . . . .	47
23	Primer conjunto de imágenes CT de un tórax humano con 12 secciones transversales. . . . .	49
24	Segundo conjunto de imágenes CT de un tórax humano con 12 secciones transversales. . . . .	49
25	(a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 7, 8 y 9 de la figura 23, respectivamente, donde la región encerada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 75% de las medidas. . . . .	55
26	(a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 2, 3 y 8 de la figura 24, respectivamente, donde la región encerada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 75% de las medidas. . . . .	56

---

27	(a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 1, 3 y 11 de la figura 23, respectivamente, donde la región encerada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 100 % de las medidas. . . . .	57
28	(a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 1, 4 y 9 de la figura 24, respectivamente, donde la región encerada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 100 % de las medidas. . . . .	58
29	(a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 2, 4 y 5 de la figura 23, respectivamente, donde la región encerada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 75 % de las medidas y ruido agregado con $SNR = 10\text{dB}$ . . . . .	59
30	(a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 6, 10 y 12 de la figura 24, respectivamente, donde la región encerada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 75 % de las medidas y ruido agregado con $SNR = 10\text{dB}$ . . . . .	60
31	(a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 6, 10 y 12 de la figura 23, respectivamente, donde la región encerada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 100 % de las medidas y ruido agregado con $SNR = 10\text{dB}$ . . .	61

---

32 (a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 4, 7 y 11 de la figura 24, respectivamente, donde la región encerrada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 100 % de las medidas y ruido agregado con  $SNR = 10\text{dB}$ . . . 62

## LISTA DE TABLAS

1	Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 23 con el 75 % de las medidas. . . . .	51
2	Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 24 con el 75 % de las medidas. . . . .	51
3	Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 23 con el 100 % de las medidas. . . . .	52
4	Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 24 con el 100 % de las medidas. . . . .	52
5	Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 23 con el 75 % de las medidas y ruido agregado con $SNR = 10\text{dB}$ . 53	
6	Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 24 con el 75 % de las medidas y ruido agregado con $SNR = 10\text{dB}$ . 53	
7	Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 23 con el 100 % de las medidas y ruido agregado con $SNR = 10\text{dB}$ . 54	
8	Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 24 con el 100 % de las medidas y ruido agregado con $SNR = 10\text{dB}$ . 54	

---

## RESUMEN

**TÍTULO:** DISEÑO DE APERTURAS CODIFICADAS DE FORMA ADAPTATIVA PARA MEJORAR LA CALIDAD DE RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES ADQUIRIDAS EN UNA ARQUITECTURA COMPRESIVA DE TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA DE RAYOS-X EN ABANICO (\*)

**AUTOR:** ANDRÉS FELIPE JEREZ ARIZA (\*\*)

**PALABRAS CLAVE:** Tomografía computarizada, muestreo compresivo, aperturas codificadas, haz de rayos-X en abanico.

**DESCRIPCIÓN:** La tomografía computarizada (CT) es una técnica de exploración no invasiva que permite la detección y reconstrucción de la estructura interna de un objeto, a partir de proyecciones de rayos-X. En CT, el número de proyecciones requeridas para muestrear el objeto está determinado por el teorema de Nyquist. Sin embargo, la cantidad de proyecciones que establece este criterio es excesiva en algunas aplicaciones, debido a que, la alta dosis de radiación puede representar un riesgo en la salud del paciente o resultar destructivas para el objeto de estudio. Por lo tanto, la teoría de muestreo compresivo (CS) se implementa en CT, con el fin de adquirir y reconstruir una escena a partir de un número de proyecciones inferior al propuesto por este criterio. Por otra parte, la estrategia de CS en CT que mayor impacto ha generado en la comunidad científica es la modulación de rayos-X mediante aperturas codificadas. Tradicionalmente, estas aperturas codificadas se construyen a partir de una distribución aleatoria. De modo que, dichas aperturas no permiten aprovechar la información de la estructura interna del objeto. En este trabajo, se propone una estrategia de CS en una arquitectura de CT con haz de rayos-X en abanico y aperturas codificadas. Esta estrategia de CS en CT, se basa en la adaptación de la apertura codificada en función de la estimación inicial de la estructura interna del objeto para mejorar la calidad en las imágenes CT reconstruidas, específicamente, aquellas imágenes CT que contienen elementos de alta atenuación. Los resultados indican que el diseño de aperturas codificadas de forma adaptativa proporciona una ganancia en las imágenes CT reconstruidas con una compresión del 75 % y 100 % en las medidas, desde 1 dB hasta 10 dB, en términos de la Relación Señal a Ruido Pico (PSNR), comparado con las aperturas aleatorias.

---

(\*) Trabajo de Investigación.

(\*\*) Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática.  
Director: Henry Arguello Fuentes. Codirector: Miguel Ángel Márquez Castellanos.

---

## ABSTRACT

**TITLE:** ADAPTIVE CODED APERTURE DESIGN FOR IMPROVING THE QUALITY OF RECONSTRUCTION OF IMAGES ACQUIRED IN A COMPRESSIVE COMPUTED TOMOGRAPHY X-RAY FAN BEAM ARCHITECTURE (\*)

**AUTHOR:** ANDRÉS FELIPE JEREZ ARIZA (\*\*)

**KEYWORDS:** Computed tomography, compressive sampling, coded apertures, X-ray fan beam.

**DESCRIPTION:** Computed tomography (CT) is a non-invasive scanning technique that allows the detection and reconstruction of the internal structure of an object from X-ray projections. In CT, the number of projections required for object sampling is determined by the Nyquist theorem. However, the amount of projections that this criterion establishes can be excessive in some applications, due to the fact that the high dose of radiation can represent a risk to the patient's health or it can be destructive for the object of study. Therefore, the theory of compressive sampling (CS) is applied in CT in order to acquire and reconstruct a scene with a lower number of projections than the ones proposed by this criterion. On the other hand, the strategy of CS in CT that has generated the greatest impact in the scientific community is the modulation of X-rays through coded apertures. Traditionally, these coded apertures are constructed from a random distribution. Hence, these apertures do not permit to exploit the information of the internal structure of the object. In this work, it is proposed a strategy of CS in an X-ray fan beam CT architecture and coded apertures. This CS strategy in CT is based on the coded aperture adaptation from the internal structure of the object initial estimation to get a higher quality in CT reconstructed images, specifically, in those CT images that contains high attenuation elements. The results indicate that the adaptive coded apertures design makes a profit in the CT reconstructed images with a 75% and 100% compression in the measurements from 1 dB up to 10 dB in terms of Peak Signal to Noise Ratio (PSNR), compared to random apertures.

---

(\*) Research Work.

(\*\*) Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática.  
Director: Henry Arguello Fuentes. Codirector: Miguel Ángel Márquez Castellanos.

# INTRODUCCIÓN

La tomografía computarizada (CT, por su sigla en inglés) es un procedimiento no invasivo que permite clasificar y detectar la estructura interna de un objeto a partir de atenuaciones. Estas atenuaciones son adquiridas por escáneres de rayos-X, que emiten y detectan rayos-X en múltiples direcciones y ángulos de visión. Los rayos-X son atenuados en mayor o menor proporción según la trayectoria recorrida. Estas atenuaciones son captadas por un arreglo de detectores ubicado al lado opuesto de la fuente y están dadas por la ley de Lambert-Beer [2].

Por otro lado, el número de proyecciones requeridas para realizar la reconstrucción de una escena en CT está determinado por el criterio de Nyquist [3]. Sin embargo, en diversas aplicaciones comerciales y científicas, como por ejemplo, diagnóstico médico [4], el número de proyecciones establecidas por este criterio es excesivo, puesto que, las altas dosis de radiación pueden representar un riesgo en la salud del paciente o resultar destructivas para el objeto de interés [5], [6], [7]. Por este motivo, se buscan métodos de adquisición que disminuyan la exposición de un objeto a la radiación, sin sacrificar la calidad en las imágenes de tomografía reconstruidas.

La técnica de muestreo compresivo (CS, por su sigla en inglés) permite resolver este problema, debido a que, según el CS se puede adquirir y reconstruir una señal de forma eficiente con una tasa de muestreo inferior a la propuesta por el teorema de Nyquist, siempre y cuando se cumplan dos criterios fundamentales: baja densidad de la señal en algún dominio [8] e incoherencia del dominio de muestreo con el dominio en que la señal es de baja densidad [9].

Actualmente es posible implementar la teoría de CS en una configuración de CT utilizando aperturas codificadas [10], [11], [12], [13], que modulan las proyecciones generadas por una fuente de rayos-X antes de que lleguen al arreglo de detectores. Las aperturas codificadas corresponden a arreglos bidimensionales con patrones de materiales opacos a la luz, las secciones que no contienen material opaco definen su transmitancia, es decir, la fracción de luz que puede atravesarlas. La calidad de las imágenes de tomografía reconstruidas bajo este enfoque está ligada principalmente al diseño de estas aperturas. Tradicionalmente, los métodos de CS en CT incluyen aperturas codificadas a partir de una distribución aleatoria [10], por lo tanto, no se aprovecha eficientemente la información muestreada para reconstruir la estructura interna del objeto. Además, en recien-

---

tes trabajos [14], [15], [16], [17], [18], se ha demostrado que los elementos con alto coeficiente de atenuación en el interior del objeto, pueden causar pérdida de información y alto porcentaje de ruido en las imágenes CT reconstruidas. En este proyecto se propone una estrategia de CS en CT con haz de rayos-X en abanico, mediante aperturas codificadas que se adaptan en función de la estimación inicial del objeto para mejorar la calidad de las imágenes CT reconstruidas.

# 1. TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA

La tomografía computarizada es una técnica que permite estimar la estructura interna de un objeto de dimensión  $D$  a partir de un conjunto de proyecciones de dimensión  $(D - 1)$  [10]. Debido a que, la exploración mediante CT es un procedimiento no invasivo, ha sido implementado en diversas aplicaciones comerciales y científicas, tales como, diagnóstico médico [19], detección de sustancias peligrosas y explosivas [20], detección de drogas ilegales [21], control de calidad en la industria manufacturera [22], antropología [23], [24], [25], ciencias forenses [26], [27], arqueología [28], entre otras.

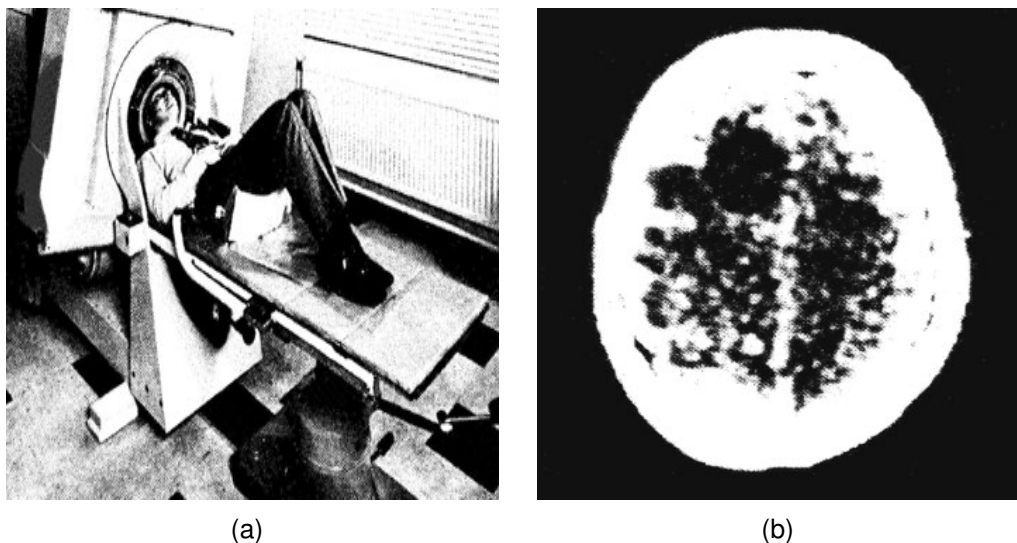
## 1.1. RESEÑA HISTÓRICA

El 8 de noviembre de 1895, el físico alemán Wilhelm Conrad Roentgen mediante experimentos de aceleración de electrones descubrió un nuevo tipo de radiación electromagnética, invisible para el ojo humano y con altos niveles de penetración sobre cuerpos opacos. Este fenómeno se denominó rayos-X, dado que, se desconocía su naturaleza. Hasta que, en 1912, el físico alemán Max von Laue mediante experimentos de cristalografía, (difracción de rayos-X por medio de cristales), confirmó el comportamiento ondulatorio de los rayos-X. Estos experimentos permitieron establecer que los rayos-X son una forma de luz de la misma naturaleza que las ondas de radio, las ondas de microondas, los rayos infrarrojos, la luz visible, los rayos ultravioleta y los rayos gamma.

Con base en los fundamentos propuestos por Roentgen y Laue, en 1917, el matemático austríaco Johann Radon describió matemáticamente la reconstrucción de la estructura interna de un objeto a partir de proyecciones de rayos-X [29]. Sin embargo, este proceso matemático requería un número infinito de proyecciones. Por lo tanto, el modelo continuo de Radon tuvo que reestructurarse conceptualmente. De manera que, en 1963, el físico norteamericano Allan MacLeod Cormak a partir de los trabajos propuestos por Radon, estableció e implementó un modelo matemático discreto para la reconstrucción de una imagen a partir de proyecciones de rayos-X [30]. No obstante, los estudios de Cormak no tuvieron un resultado práctico, debido a las limitaciones de la tecnología de su época. No fue sino hasta 1972, cuando el ingeniero electrónico inglés Godfrey Newbold Hounsfield de manera independiente a los estudios de Cormak, desarrolló e implementó el primer escáner de CT para uso clínico [31], figura 1a.

Este primer prototipo de CT estaba compuesto de una fuente de haz de rayos-X lineal y un único detector. La fuente producía proyecciones paralelas, debido a su movimiento de traslación en cada posición angular a lo largo del objeto, este proceso se repetía con pequeños incrementos rotacionales hasta recorrer  $180^\circ$  alrededor del objeto [32]. Dicho movimiento de traslación y rotación involucraba tiempos elevados de adquisición. Por consiguiente, una tomografía completa de un cerebro humano tardaba aproximadamente nueve horas [32]. Otro inconveniente

**Figura 1:** (a) Primer prototipo de CT construido para el estudio del cerebro instalado en el hospital de Atkinson Morley's en Londres. (b) Primera imagen clínica obtenida con el prototipo.



Fuente: Sir Godfrey Newbold Hounsfield y la tomografía computada, su contribución a la medicina moderna, 2004.

niente que presentaba este escáner de CT, se relacionaba con los errores en las medidas, debido a los movimientos voluntarios e involuntarios del paciente durante el tiempo de captación. En consecuencia, las imágenes CT, figura 1b, contenían un alto porcentaje de ruido. Asimismo, estas imágenes reconstruidas tenían una resolución espacial de  $80 \times 80$  píxeles. En contraste, tanto el ruido como la baja resolución espacial de las imágenes CT, no solo dependían de la geometría del sistema propuesto, sino también de los algoritmos de reconstrucción empleados [33]. Por esta razón, la CT se ha enfocado en el mejoramiento de técnicas de reconstrucción y el desarrollo de escáneres con mayor velocidad de adquisición.

## 1.2. EVOLUCIÓN DE LOS ESCÁNERES DE CT

Un escáner de CT está compuesto principalmente de una fuente de rayos-X y un detector o arreglo de detectores. Estas dos piezas han promovido el desarrollo tecnológico referente a la CT [34], por lo tanto, sus características definen cada generación. En general, una fuente de rayos-X produce radiación ionizante por medio de aceleración y desaceleración de electrones. Esta energía pasa a través del objeto y se atenúa en función de la densidad y estructura interna del objeto. Finalmente, las atenuaciones se miden en el conjunto de detectores, que se ubican al lado opuesto de la fuente. A continuación se describe la geometría correspondiente a cada generación de CT y se presentan sus principales aspectos.

- **Primera generación (1G):** Un escáner de 1G, figura 2a, involucra una fuen-

---

te que emite un haz de rayos-X restringido a una línea delgada, y un único detector. La fuente produce proyecciones lineales en paralelo a lo largo del objeto desde un mismo ángulo de visión. Tanto la fuente como el detector se trasladan simultáneamente. Posteriormente, la fuente y el detector rotan a una nueva posición angular para adquirir nuevas proyecciones, este proceso se realiza de forma sucesiva hasta barrer 180°. Una ventaja de este tipo de escáner es que el detector no capta radiación dispersa [35], es decir, la medida de atenuación en su mayoría es acertada. Sin embargo, el tiempo de adquisición se incrementa en función del número de proyecciones.

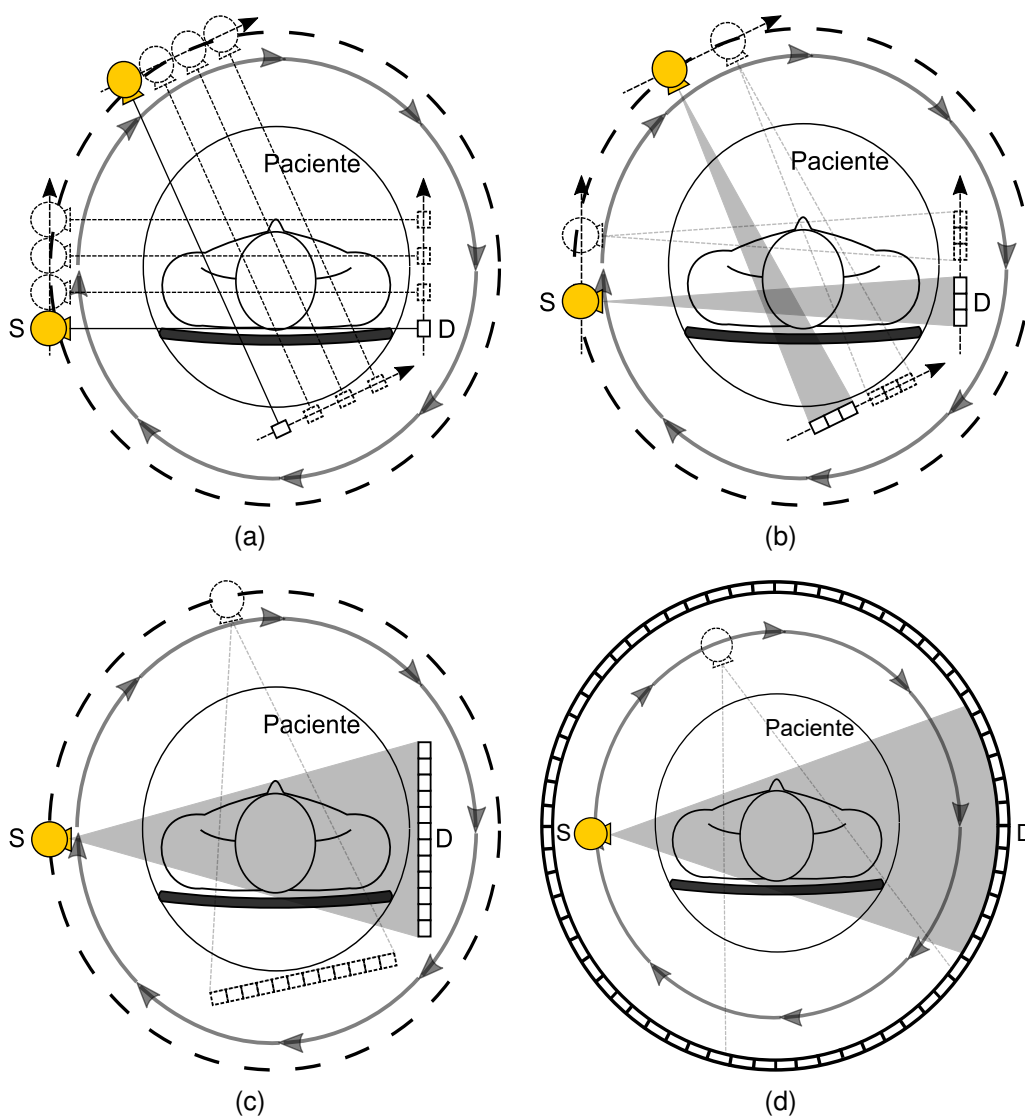
- **Segunda generación (2G):** Un escáner de 2G, figura 2b, está compuesto de una fuente de haz de rayos-X en forma de abanico con una apertura cercana a los 10° y un arreglo de detectores con aproximadamente 30 elementos. Esta configuración proporciona una mayor velocidad de adquisición en comparación con un escáner de 1G, debido a que, permite medir un mayor número de proyecciones desde una misma posición angular-espacial. Además, cada detector está restringido a medir la radiación desde la dirección correcta, con el fin de reducir los efectos de la dispersión [35]. En particular, un escáner de 2G funciona bajo un principio de traslación y rotación similar al de un escáner de 1G.
- **Tercera generación (3G):** Un escáner de 3G, figura 2c, consiste en una fuente que emite un haz de rayos-X en forma de abanico con apertura entre 40° a 60°, y un arreglo de detectores con un número de elementos entre 400 y 1000. A diferencia de las generaciones anteriores, un escáner de 3G permite cubrir toda la región de escaneo desde una misma posición angular. De esta manera, la fuente y el arreglo de detectores logran un desplazamiento netamente rotatorio, que conlleva a una disminución en el tiempo de adquisición. Cabe señalar que los detectores de esta generación deben estar restringidos como en la 2G para reducir los efectos de la dispersión [36].
- **Cuarta generación (4G):** Un escáner de 4G, figura 2d, emplea un anillo de detectores con aproximadamente 5000 elementos fijados alrededor del objeto. Esta configuración permite una adquisición eficiente, puesto que, el área de detección es más amplia. Sin embargo, esto conlleva a una mayor dispersión en las medidas, que se convierte en un gran problema para los escáneres de 4G [37]. En el caso de la fuente de rayos-X, esta conserva las características de la generación anterior.

### 1.3. PRINCIPIOS FÍSICOS DE LOS RAYOS-X

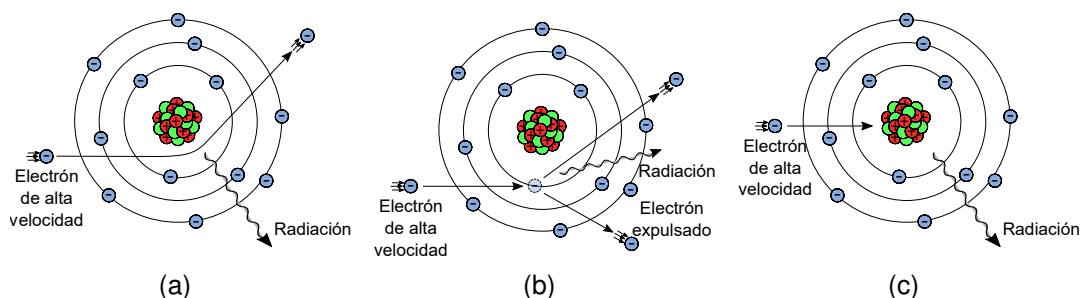
Los rayos-X son una forma de onda electromagnética con longitud entre 10 nanómetros y 10 picómetros. La energía  $E$  de cada fotón de rayos-X es proporcional a su frecuencia  $\nu$  y se describe matemáticamente como

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (1.1)$$

**Figura 2:** Generaciones de escáneres de CT. (a) Geometría de 1G. (b) Geometría de 2G. (c) Geometría de 3G. (d) Geometría de 4G. (S es la fuente de rayos-X y D es el detector).



**Figura 3:** Producción de radiación a partir de fenómenos extranucleares. (a) Radiación de frenado. (b) Radiación característica de los metales. (c) Radiación generada por el impacto de un electrón con el núcleo.



donde  $h$  es la constante de Planck ( $6.63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ ),  $c$  es la velocidad de la luz ( $3 \times 10^8 \text{m/s}$ ), y  $\lambda$  es la longitud de onda de los rayos-X. Los fotones de rayos-X con longitudes de onda más largas tienen mayor energía que los fotones con longitudes de onda más cortas. Generalmente, la energía de los rayos-X se expresa en la unidad eV ( $1 \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{J}$ ), que corresponde a la cantidad de energía cinética con la que se acelera un electrón a través de un potencial eléctrico de 1V. Dado que, los fotones de rayos-X se producen mediante el impacto de electrones de alta velocidad sobre un material, toda la energía cinética del electrón se transforma en radiación electromagnética. De modo que, la ecuación (1.1) se puede convertir a la unidad eV como

$$E = \frac{1.24 \times 10^3 \text{eV} \times \text{nm}}{\lambda}. \quad (1.2)$$

En particular, los rayos-X surgen de fenómenos extranucleares, a nivel de la órbita electrónica, fundamentalmente producidos por desaceleración de electrones, por ejemplo, cuando una partícula cargada eléctricamente con suficiente energía cinética es frenada rápidamente. Existen tres fenómenos extranucleares que generan rayos-X [29]:

- **Radiación de frenado:** este fenómeno sucede cuando un electrón de alta energía pasa cerca al núcleo y este se desvía debido a la interacción electromagnética. En consecuencia, el electrón pierde energía en forma de rayos-X, como se ilustra en la figura 3a.
- **Radiación característica de los metales:** este fenómeno ocurre cuando un electrón de alta energía produce la salida de un electrón cercano al núcleo, además, un electrón de la capa exterior con mayor energía ocupa la vacante. De esta manera, la diferencia de energía entre niveles se transforma en energía de rayos-X, como se ilustra en la figura 3b.
- **Radiación generada por el impacto de un electrón con el núcleo:** este fenómeno sucede cuando un electrón de alta velocidad impacta directamente con el núcleo de un átomo. De modo que, toda la energía cinética se convierte en energía de rayos-X, como se ilustra en la figura 3c.

---

## 1.4. LEY DE LAMBERT-BEER

En óptica, la ley de Lambert-Beer se aplica para todos los mecanismos físicos que conducen a la atenuación de la intensidad de radiación (reducción de fotones) de un haz de rayos-X que pasa a través de un objeto. En particular, la ley de Lambert-Beer permite relacionar la absorción de la luz con los coeficientes de atenuación  $\mu(\eta)$  del material atravesado. Matemáticamente, la intensidad de un haz de rayos-X después de pasar una distancia  $\Delta\eta$  a través de un objeto, se puede describir como

$$I(\eta + \Delta\eta) = I(\eta) - \mu(\eta)I(\eta)\Delta\eta. \quad (1.3)$$

Por simple reorganización, la ecuación (1.3) se puede expresar como el cociente

$$\frac{I(\eta + \Delta\eta) - I(\eta)}{\Delta\eta} = -\mu(\eta)I(\eta). \quad (1.4)$$

Posteriormente, se aplica el límite, cuando  $\Delta\eta$  tiende a cero, en ambos lados de la ecuación (1.4) y se obtiene

$$\lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{I(\eta + \Delta\eta) - I(\eta)}{\Delta\eta} = -\mu(\eta)I(\eta). \quad (1.5)$$

**1.4.1 Atenuación de los rayos-X en un medio homogéneo** En primer lugar, si se asume un medio homogéneo, es decir, una única constante de atenuación  $\mu(\eta) \equiv \mu$  a lo largo de toda la longitud de penetración del rayos-X, figura 4, entonces, la ecuación (1.5) se puede expresar como

$$\frac{dI}{d(\eta)} = -\mu I(\eta), \quad (1.6)$$

que corresponde a una ecuación diferencial de primer orden. Una forma de solucionar (1.6) es por medio de la separación de variables, de esta manera, se puede aplicar la integración en ambos lados de la ecuación [2]

$$\int \frac{dI}{I(\eta)} = -\mu \int d(\eta). \quad (1.7)$$

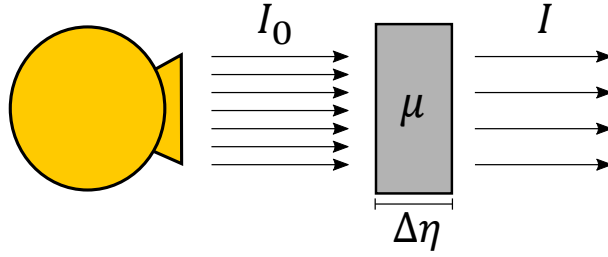
El resultado de (1.7) se puede escribir como

$$\ln |I| = -\mu\eta + C. \quad (1.8)$$

Debido al hecho físico de que la intensidad se define como una cantidad positiva, el valor absoluto  $|\cdot|$  se puede suprimir de la ecuación (1.8). Por otra parte, si se despeja  $I(\eta)$  bajo la condición  $I(0) = I_0$ , entonces, (1.8) se puede expresar como

$$I(\eta) = I_0 e^{-\mu\eta}. \quad (1.9)$$

**Figura 4:** Atenuación de la intensidad de radiación al pasar a través de un medio homogéneo.



donde  $I_0$  corresponde a la intensidad inicial del haz de rayos-X. La ecuación (1.9) se conoce como la ley de atenuación de Lambert-Beer para un medio homogéneo.

### 1.4.2 Atenuación de los rayos-X en un medio no homogéneo

En el caso de un medio no homogéneo, la atenuación de los rayos-X puede calcularse al considerar el objeto como la división de pequeños elementos homogéneos [38], [29], figura 5. Con base en el concepto de dividir el objeto en varios elementos homogéneos, la ecuación (1.9) se puede ajustar para un medio no homogéneo como

$$I(\eta) = I_0 e^{-\mu_0 \Delta \eta} e^{-\mu_1 \Delta \eta} \dots e^{-\mu_{n-1} \Delta \eta} = I_0 e^{-\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \Delta \eta}, \quad (1.10)$$

donde  $\Delta \eta$  representa la longitud de cada elemento,  $\mu_i$  es la constante de atenuación en el  $i$ -ésimo elemento y  $n$  corresponde al total de elementos en el que se divide el objeto no homogéneo. Si se divide por  $I_0$  y se aplica el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación (1.10), entonces, se obtiene

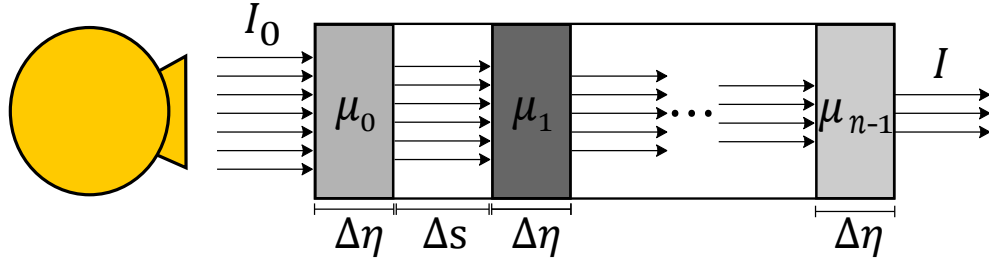
$$p = -\ln \left( \frac{I}{I_0} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i \Delta \eta. \quad (1.11)$$

Ahora, si se asume que el número de elementos que componen al objeto tiende a infinito y su longitud tiende a cero, la ecuación (1.11) se puede reescribir como

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta \eta \rightarrow 0} -\ln \left( \frac{I}{I_0} \right) = \int_L \mu(\eta) d\eta. \quad (1.12)$$

donde  $\int_L$  representa la integral de línea y  $L$  corresponde a la trayectoria de cada haz de rayos-X al pasar a través del objeto. La ecuación (1.12) corresponde a la fracción de luz transmitida a través del objeto, es decir que, representa una proyección unidimensional que se capta en un ángulo de visión.

**Figura 5:** Atenuación de la intensidad de radiación al pasar a través de un medio no homogéneo, donde  $\Delta s \simeq 0$ .



## 1.5. MODELO MATEMÁTICO DE CT

En la práctica, las imágenes CT son adquiridas por escáneres de CT, que están compuestos de una fuente de rayos-X y un arreglo de detectores que rotan simultáneamente. Por lo tanto, se define un sistema de rotación para modelar las proyecciones con base en la ecuación (1.12)

$$p(\varphi, \vartheta) = \int_{L(\varphi, \vartheta)} f(x, y) d\eta(x, y), \quad (1.13)$$

donde  $p(\varphi, \vartheta)$  es la función de atenuaciones, también denominada como sinograma de  $f(x, y)$ ,  $\vartheta$  es el ángulo entre el eje- $x$  y la posición en el detector a la que converge el rayo-X,  $\varphi$  es el ángulo entre el eje- $x$  y la fuente de rayos-X y  $L(\varphi, \vartheta) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y - x \frac{\sin(\varphi) - \sin(\vartheta)}{\cos(\varphi) - \cos(\vartheta)} = r \sin(\varphi) - r \cos(\varphi) \frac{\sin(\varphi) - \sin(\vartheta)}{\cos(\varphi) - \cos(\vartheta)} \right\}$  es una función que representa todos los puntos que recorre cada rayo-X, figura 6. Aquí,  $r$  es el radio del círculo que genera la rotación de la fuente y el arreglo de detectores alrededor del objeto, ( $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < r$ ).

El proceso de adquisición de proyecciones  $p(\varphi, \vartheta)$  de las imágenes CT para el  $i$ -ésimo ángulo de visión  $V \in \mathbb{R}$ , con  $i = 0, \dots, V - 1$ , se puede expresar matricialmente como

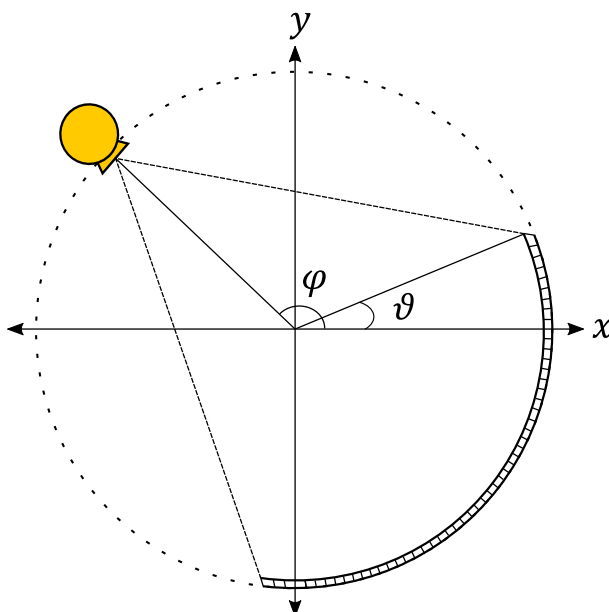
$$\mathbf{y}_i = \mathbf{W}_i \mathbf{x}, \quad (1.14)$$

donde  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^U$  representa las medidas,  $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^{U \times n}$  la matriz que modela la geometría del sistema,  $U \in \mathbb{R}$  corresponde al total de detectores y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es la versión discreta del objeto. La información que se obtiene en un solo ángulo de visión no es suficiente para determinar la distribución espacial de la estructura interna de un objeto. Por esta razón, es necesario irradiar el objeto de interés en múltiples ángulos de visión. Con base en la ecuación (1.14), el proceso de adquisición de imágenes CT a partir de múltiples ángulos de visión se puede expresar matricialmente como

$$\mathbf{y} = \mathbf{W} \mathbf{x}, \quad (1.15)$$

donde  $\mathbf{W} = [\mathbf{W}_0^T, \mathbf{W}_1^T, \dots, \mathbf{W}_{V-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_0^T, \mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_{V-1}^T]^T \in \mathbb{R}^m$  representa la matriz de muestreo y las proyecciones adquiridas en múltiples ángulos de visión, respectivamente. Según esta perspectiva, la CT es una metodología que combina una secuencia de imágenes distribuidas en un arreglo de detecto-

**Figura 6:** Geometría de un tomógrafo con haz de rayos-X en abanico y un arreglo de detectores curvo.



res de dimensión  $(D - 1)$  para producir una imagen de dimensión  $D$ .

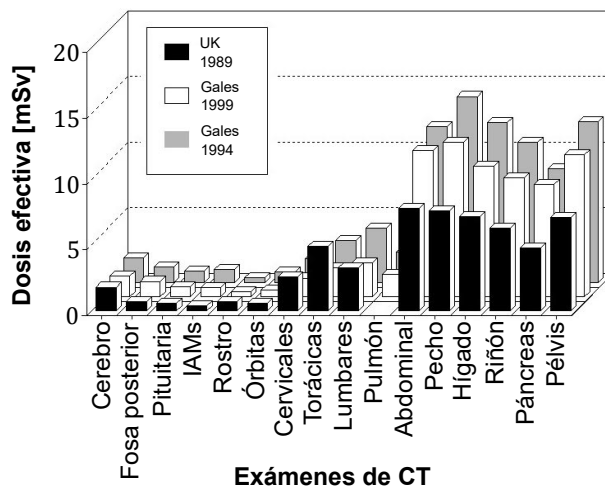
Debido a que, las imágenes CT permiten clasificar y determinar la estructura interna de un objeto, su uso en procedimientos médicos ha sido de gran interés [4]. Sin embargo, recientes estudios [5], [6], [7] han demostrado que la exposición prolongada a dosis de radiación de alta energía puede ocasionar alteraciones en el ADN o cáncer.

## 1.6. DOSIS DE RADIACIÓN

El uso de procedimientos de CT se ha convertido en uno de los métodos de diagnóstico por imágenes más utilizado en rutinas médicas, debido a que permite la exploración no invasiva del interior del cuerpo. De modo que, se requiere de imágenes CT con suficiente calidad para una interpretación precisa. En particular, el nivel de ruido de una imagen CT está relacionado con el diseño y rendimiento del escáner, y la dosis de radiación implicada en la adquisición. De esta manera, a menor tiempo de adquisición, menor porcentaje de ruido en las imágenes CT. Asimismo, a mayor número de proyecciones captadas, se obtiene mayor calidad de reconstrucción [39]. La figura 7 ilustra el aumento de dosis de radiación en 1989, 1994 y 1999 para diferentes exámenes de CT en Reino Unido y Gales. No obstante, el aumento del número de proyecciones implica una mayor exposición a la radiación, que puede resultar cancerígena [6].

En [40], se estima los futuros riesgos de cáncer derivados del uso de procedimientos de CT en Estados Unidos, según la edad, el género y el tipo de exploración. Este estudio encontró una proporcionalidad directa entre la frecuencia de exámenes de CT, figura 8a, y el número de casos futuros de cáncer, figura 8b,

**Figura 7:** Dosis de radiación para diferentes procedimientos de CT en Reino Unido (UK, por su sigla en inglés) y Galas.

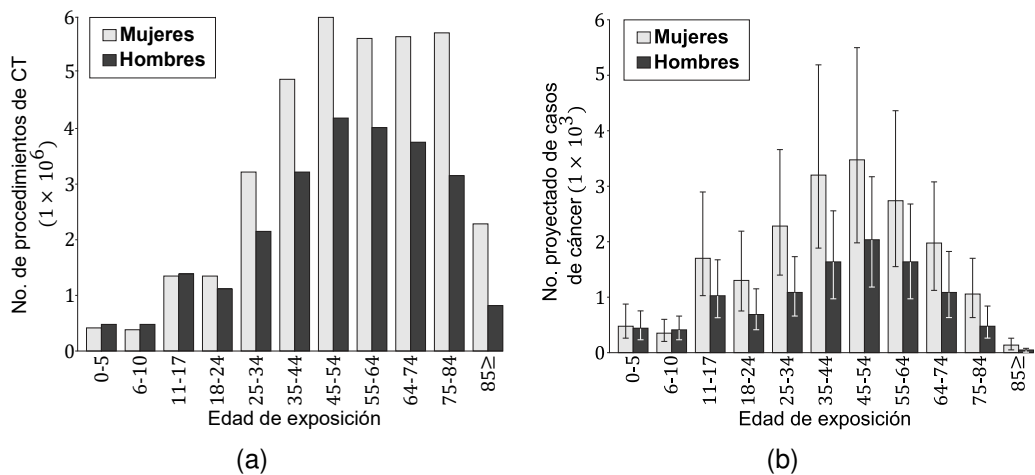


Fuente: Modificado de *A survey of patient dose and image quality for computed tomography scanners in Wales, 2001*.

según el género y la edad exposición. De igual manera, se determinó que los órganos con mayor riesgo de cáncer se relaciona con su alta frecuencia de exposición, por ejemplo, el colon con la CT de pelvis y abdominal, y el pulmón con la CT torácica. Dichos exámenes de CT presentan altos niveles de radiación [41], que contribuyen al aumento del riesgo de cáncer [42].

Por lo tanto, se han estudiado diferentes estrategias para la adquisición de imágenes CT que impliquen bajas dosis de radiación, sin sacrificar la calidad en las imágenes reconstruidas [13], [43]. Entre las cuales, la estrategia que mayor impacto ha causado dentro de la comunidad científica, ha sido la implementación de la teoría de muestreo compresivo en CT.

**Figura 8:** Gráfica de estudios realizados en Estados Unidos basados en la exposición a dosis de radiación según la edad y el género. (a) Número estimado de procedimientos de CT. (b) Número proyectado de casos de cáncer.



Fuente: Modificado de *Projected Cancer Risks From Computed Tomographic Scans Performed in the United States in 2007, 2009*.

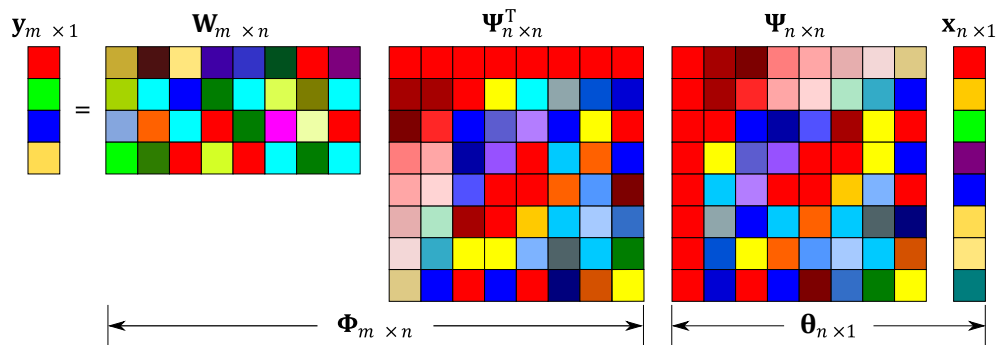
## 2. MUESTREO COMPRESIVO EN TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA

El muestreo compresivo en tomografía computarizada es una metodología que permite adquirir y reconstruir una imagen  $\mathbf{x}$ , a partir de un número de proyecciones menor al establecido en el criterio de Shannon-Nyquist [3]. Con base en la ecuación (1.15), el muestreo compresivo de imágenes CT se puede expresar matricialmente como

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\Psi^T\Psi\mathbf{x} = \Phi\boldsymbol{\theta}, \quad (2.1)$$

donde  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una base de representación,  $\Phi = \mathbf{W}\Psi^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de muestreo compresivo en CT, con  $m \ll n$  y  $\boldsymbol{\theta} = \Psi\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es la representación de  $\mathbf{x}$  en el dominio  $\Psi$ . Aquí,  $\Psi^{-1} = \Psi^T$  y  $\Psi^T\Psi = \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz identidad. La teoría de CS establece que para reconstruir una imagen a partir de medidas obtenidas según la ecuación (2.1), se deben satisfacer dos criterios fundamentales: baja densidad de la señal en una base de representación [8] e incoherencia de la matriz de medición con el dominio en que la señal es de baja densidad [9]. La figura 9 muestra la representación gráfica de la ecuación (2.1).

Figura 9: Esquema del proceso de CS estándar.



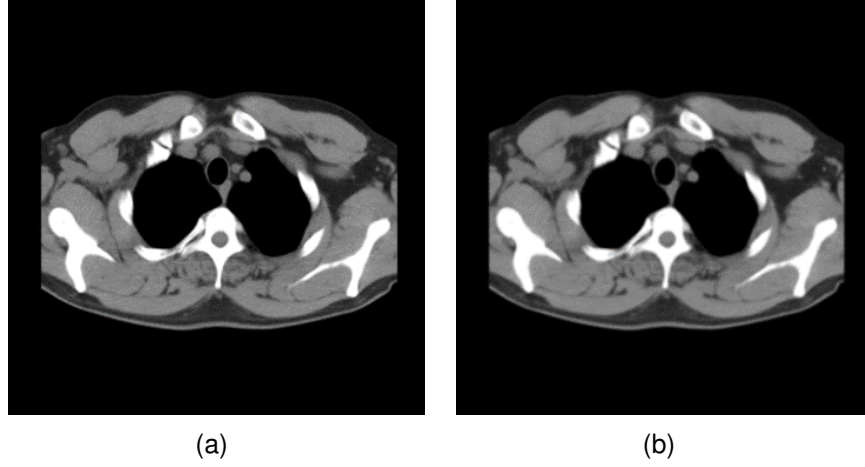
### 2.1. BAJA DENSIDAD

Este concepto expresa la idea de que una señal puede representarse en una base apropiada  $\Psi$ , con un menor número de coeficientes [8], como se ilustra en la figura 10. De manera que, la baja densidad implica que los coeficientes más pequeños de una señal, en alguna base de representación, pueden ser excluidos, en otras palabras, se pueden convertir a cero sin tener pérdidas significativas en la señal reconstruida. Este concepto se puede expresar matemáticamente como

$$\|\mathbf{x} - \Psi G(\mathbf{x}, \tau)\|_2^2 < \varepsilon, \quad (2.2)$$

donde  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  es un parámetro de tolerancia al error y  $G(\cdot)$  es un operador que descarta un porcentaje  $\tau \in \mathbb{R}$  de los coeficientes más pequeños de la señal  $\mathbf{x}$  en

**Figura 10:** (a) Imagen de CT  $\mathbf{x}$ . (b) Imagen de CT  $\tilde{\mathbf{x}}$  con el 25% de sus coeficientes significativos.



el dominio de  $\Psi$ . Por otra parte, la ecuación (2.2) se puede reescribir como

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 < \varepsilon, \quad (2.3)$$

donde  $\tilde{\mathbf{x}} = \Psi \tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n$  con  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = G(\mathbf{x}, \tau)$ . Si  $\mathbf{x}$  es una señal de baja densidad en el dominio de  $\Psi$ , entonces,  $\mathbf{x}$  es aproximadamente igual a su versión  $\tilde{\mathbf{x}}$ , de modo que,  $\varepsilon$  es pequeño.

## 2.2. INCOHERENCIA

El concepto de incoherencia mide la correlación entre los elementos de las matrices  $\Phi$  y  $\Psi$ , como se ilustra en la figura 11. CS en CT se basa principalmente en problemas de reconstrucción con matrices de muestreo de baja coherencia. Para determinar la incoherencia de la matriz de medición  $\mathbf{W}$  y la base de representación  $\Psi$ , E. Candès establece una función de correlación que se expresa matemáticamente como [8]

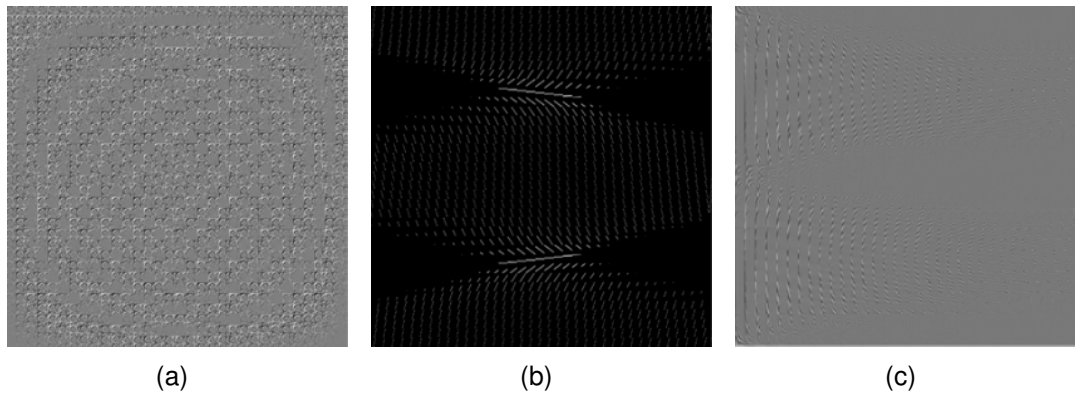
$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq k, j \leq n} |\langle \boldsymbol{\phi}_k, \boldsymbol{\psi}_j \rangle|, \quad (2.4)$$

donde  $|\cdot|$  representa la función valor absoluto,  $\langle \cdot \rangle$  representa el producto punto entre los vectores  $\boldsymbol{\phi}_k$  y  $\boldsymbol{\psi}_j$ , y  $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{n}]$  corresponde a la función de correlación entre dos matrices. La constante  $\mu$  determina la correlación entre las matrices  $\Phi$  y  $\Psi$ , si dichas matrices contienen elementos correlacionados, la coherencia es alta, en caso contrario es baja. Por lo tanto, para que la señal  $\mathbf{x}$  sea recuperada a partir de  $m$  medidas con alta probabilidad, se debe cumplir la relación

$$m \geq C \cdot S \cdot \log(n) \cdot \mu^2(\Phi, \Psi), \quad (2.5)$$

donde  $C \in \mathbb{R}$  es alguna constante positiva, y  $S \in \mathbb{R}$  representa el total de coeficientes diferentes de cero en  $\boldsymbol{\theta}$ . Un ejemplo de bases incoherentes es *wave-*

**Figura 11:** Ejemplo de la correlación entre una base de representación coseno y una matriz de muestreo en CT. (a) Base de representación  $\Psi$ . (b) Matriz de muestreo  $\Phi$ . (c) Matriz de correlación entre  $\Phi$  y  $\Psi$ .



lets con *noiselets* [8]. Por otro lado, las matrices aleatorias son en gran medida incoherentes con cualquier base fija  $\Psi$ . Si  $\Psi$  es una base ortonormal uniformemente aleatoria con alta probabilidad, entonces, la coherencia entre  $\Phi$  y  $\Psi$  es alrededor de  $\sqrt{\log(n)}$ .

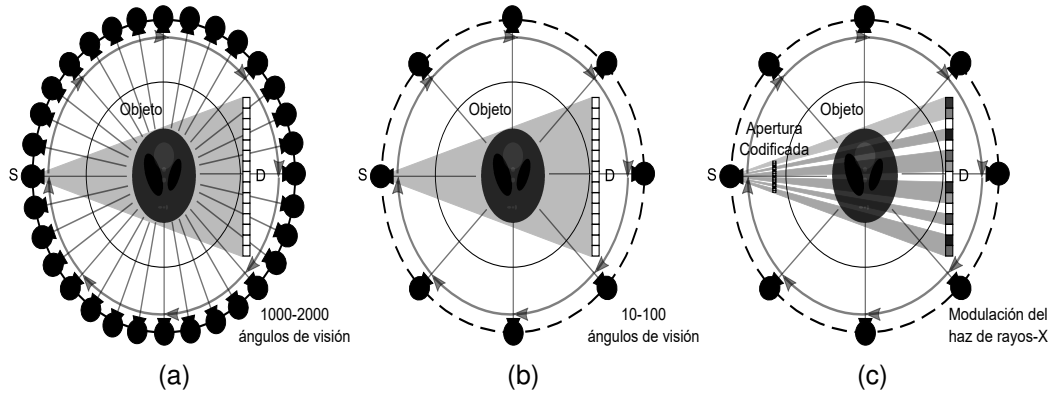
### 2.3. ESTRATEGIAS DE CS EN CT

El uso de técnicas de muestreo compresivo en CT ha producido un gran impacto en el área de la medicina, dado que, permite obtener imágenes CT a partir de menos dosis de radiación que los métodos tradicionales de muestreo. Debido a esto, se ha generado un gran interés en el desarrollo, optimización e implementación de estrategias de CS en CT. Entre las cuales se destacan:

- **Reducción de ángulos de visión [44]:** esta estrategia de CS en CT se enfoca en obtener proyecciones en menos de 100 posiciones angulares predeterminadas, como se ilustra en la figura 12b. Cabe aclarar que en una adquisición CT tradicional, con una arquitectura CT con haz de rayos-X en abanico, las proyecciones son adquiridas en 1000-2000 ángulos de visión alrededor del objeto, como se ilustra en la figura 12a.
- **Modulación del haz de rayos-X [10]:** esta estrategia de CS en CT se enfoca en la implementación de aperturas codificadas, que se ubican en frente de la fuente de rayos-X para permitir o bloquear el paso del haz de rayos-X a través del objeto, como se ilustra en la figura 12c.

Sin embargo, en [45], se plantea que la reducción de los ángulos de visión presenta un problema inverso mal condicionado, sensible a la medición y con errores de modelado que afectan la calidad de las imágenes CT reconstruidas. De modo que, la modulación del haz de rayos-X mediante la inclusión de aperturas codificadas [10] es un enfoque que permite superar dichas limitaciones, debido a que, reduce la dosis de radiación, sin sacrificar la calidad de las imágenes CT

**Figura 12:** Esquema de la adquisición de datos en una arquitectura CT con haz de rayos-X en abanico. (a) Tradicional. (b) Con una estrategia de reducción de ángulos de visión. (c) Con una estrategia de modulación del haz de rayos-X. (S es la fuente de rayos-X y D es el arreglo de detectores).



reconstruidas.

### 3. MUESTREO COMPRESIVO EN TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA BASADO EN APERTURAS CODIFICADAS

El uso de aperturas codificadas como estrategia de CS en CT fue propuesto por D. Brady [10]. Particularmente, estas aperturas corresponden a arreglos bidimensionales que se encargan de modular la energía producida por el haz de rayos-X antes de que llegue al arreglo de detectores. Con base en la ecuación (2.1), el proceso de adquisición de proyecciones en una arquitectura CS en CT usando aperturas codificadas, se puede expresar matemáticamente como

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{x}, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{H} = \text{diag}(\mathbf{h}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz diagonal que representa la modulación de la apertura codificada. Aquí,  $\mathbf{h} = [\mathbf{h}_0^T, \mathbf{h}_1^T, \dots, \mathbf{h}_{V-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{UV}$  contiene la concatenación de la representación vectorial de las aperturas codificadas  $\mathbf{h}_i \in \mathbb{R}^U$  en cada ángulo de visión. Formalmente, la estructura  $\mathbf{H}$  se puede expresar como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{h}_0) & \mathbf{0}_{U \times U} & \dots & \mathbf{0}_{U \times U} \\ \mathbf{0}_{U \times U} & \text{diag}(\mathbf{h}_1) & \dots & \mathbf{0}_{U \times U} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{U \times U} & \mathbf{0}_{U \times U} & \dots & \text{diag}(\mathbf{h}_{V-1}) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

donde  $\text{diag}(\mathbf{h}_i)$  es una matriz diagonal de tamaño  $U \times U$ , cuyas entradas son los elementos de la apertura codificada vectorizada  $\mathbf{h}_i$ , como se ilustra en la figura 13a, y  $\mathbf{0}_{U \times U}$  es una matriz de ceros de tamaño  $U \times U$ . Otra representación de la apertura codificada planteada en (3.2), se puede expresar matemáticamente como

$$\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} (h_0)_0 & (h_0)_1 & \dots & (h_0)_{V-1} \\ (h_1)_0 & (h_1)_1 & \dots & (h_1)_{V-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (h_{U-1})_0 & (h_{U-1})_1 & \dots & (h_{U-1})_{V-1} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

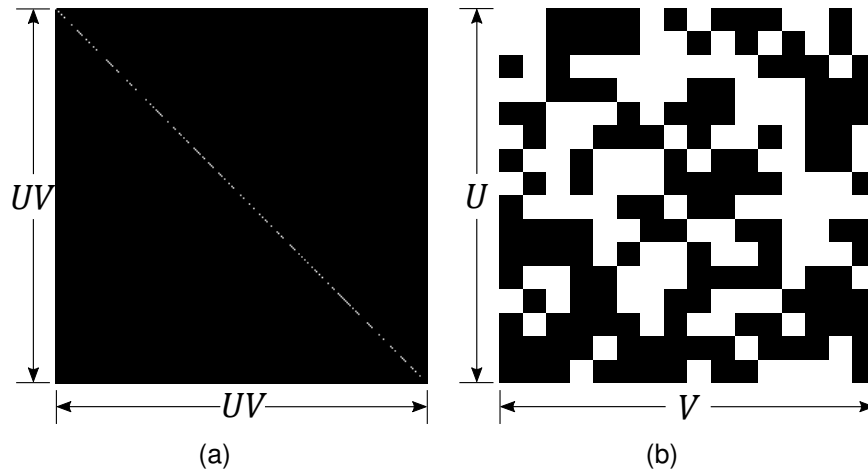
donde  $\mathbf{\Xi} \in \mathbb{R}^{U \times V}$  es una representación matricial de la apertura codificada, como se ilustra en la figura 13b, que permite realizar diferentes análisis cualitativos y cuantitativos. Con el fin de reconstruir  $\mathbf{x}$  a partir de  $\mathbf{y}$ , tradicionalmente se plantea un problema de minimización que se puede expresar matemáticamente como

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{x}\|_2^2 + \sum_{\ell=2}^L g_\ell(\mathbf{A}^{(\ell)}\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  es la imagen CT reconstruida,  $g_\ell : \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  son funciones de regularización convexas cerradas y propias y  $\mathbf{A}^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  son matrices arbitrarias. Sin embargo, en [46], se demostró que la calidad de reconstrucción de imágenes CT, a partir de problemas de minimización de la forma (3.4), está li-

---

**Figura 13:** Ejemplo de una apertura codificada en sus versiones matriciales (a)  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{UV \times UV}$  y (b)  $\mathbf{\Xi} \in \mathbb{R}^{U \times V}$ , con  $U = V = 16$ .



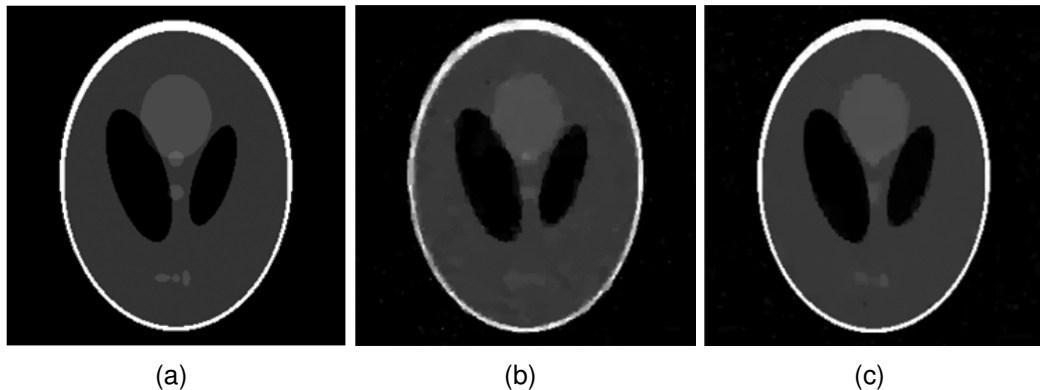
mitada por la estructura de las aperturas codificadas. Tradicionalmente, estas aperturas codificadas son generadas a partir de una distribución aleatoria para garantizar la incoherencia entre las proyecciones. En recientes trabajos, como en espectroscopia [47], [48] [49] [50], se ha demostrado que el diseño de aperturas codificadas teniendo en cuenta la estructura de la escena permite obtener mayor calidad de reconstrucción. Por lo tanto, el desarrollo de nuestro adaptativo en CT es un área que ha despertado interés en la comunidad científica [1].

## 4. MUESTREO ADAPTATIVO EN TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA

En [1], se propuso un sistema de muestreo adaptativo en una arquitectura de CT de 1G, que permite mejorar la calidad de reconstrucción de la escena, como se ilustra en la figura 14. Este modelo estima una aproximación inicial de la escena a partir de la adquisición previa de un conjunto de proyecciones. Posteriormente, el sistema de adquisición se adapta en función de la aproximación obtenida de la escena, dando prioridad a los bordes que conforman su estructura interna. Este proceso se realiza de forma iterativa, como se ilustra en la figura 15.

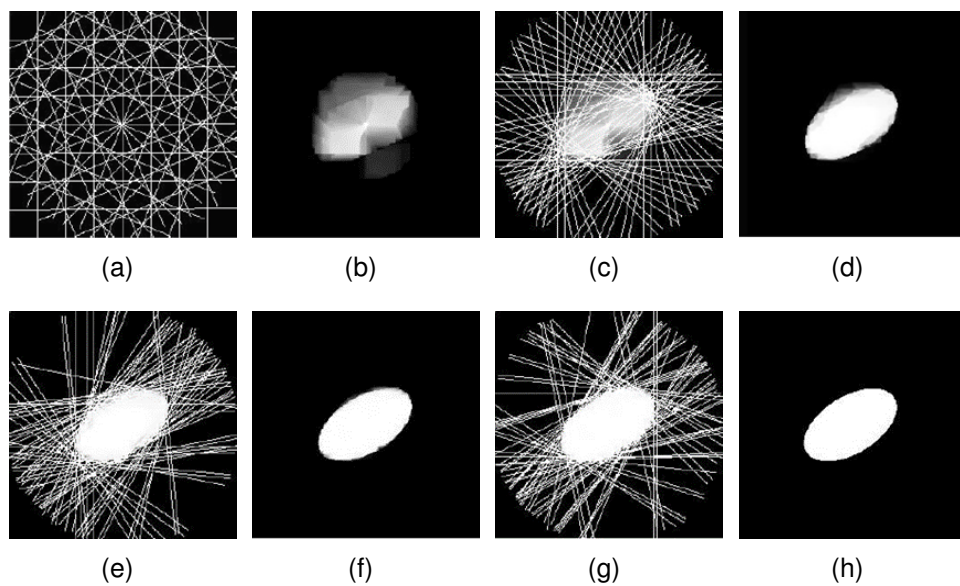
Debido a que, el muestreo en un escáner de CT de 1G requiere un desplazamiento de la fuente en cada posición angular-espacial, los tiempos de adquisición se incrementan en función del número de proyecciones. En consecuencia, los tiempos prolongados de adquisición en procedimientos médicos generan un mayor error en las medidas, debido a los movimientos voluntarios e involuntarios del paciente [51]. Actualmente no se han propuesto estrategias de muestreo adaptativo mediante aperturas codificadas en arquitecturas de CT con mayor velocidad de captación, como por ejemplo, una geometría de CT con haz de rayos-X en abanico.

**Figura 14:** Reconstrucción de una imagen CT fantasma en una arquitectura de 1G. (a) Imagen original. (b) Imagen reconstruida por un método tradicional con 1792 proyecciones. (c) Imagen reconstruida por el método de muestreo adaptativo propuesto en [1] con 1630 proyecciones.



Fuente: *Adaptive compressed tomography sensing*, 2013.

**Figura 15:** Ejemplo del proceso de muestreo adaptativo en una arquitectura de CT de 1G. (a) Conjunto inicial de proyecciones. (b) Aproximación inicial del objeto. (c) Segundo muestreo adaptado según el análisis de la reconstrucción (b). (d) Reconstrucción del objeto a partir de las proyecciones captadas en (a) y (c). (e) Tercer muestreo adaptado según el análisis de la reconstrucción (d). (f) Reconstrucción según el conjunto de proyecciones captadas en (a), (c) y (e). (g) Cuarto muestreo adaptado según el análisis de la reconstrucción (f). (h) Reconstrucción final del objeto.

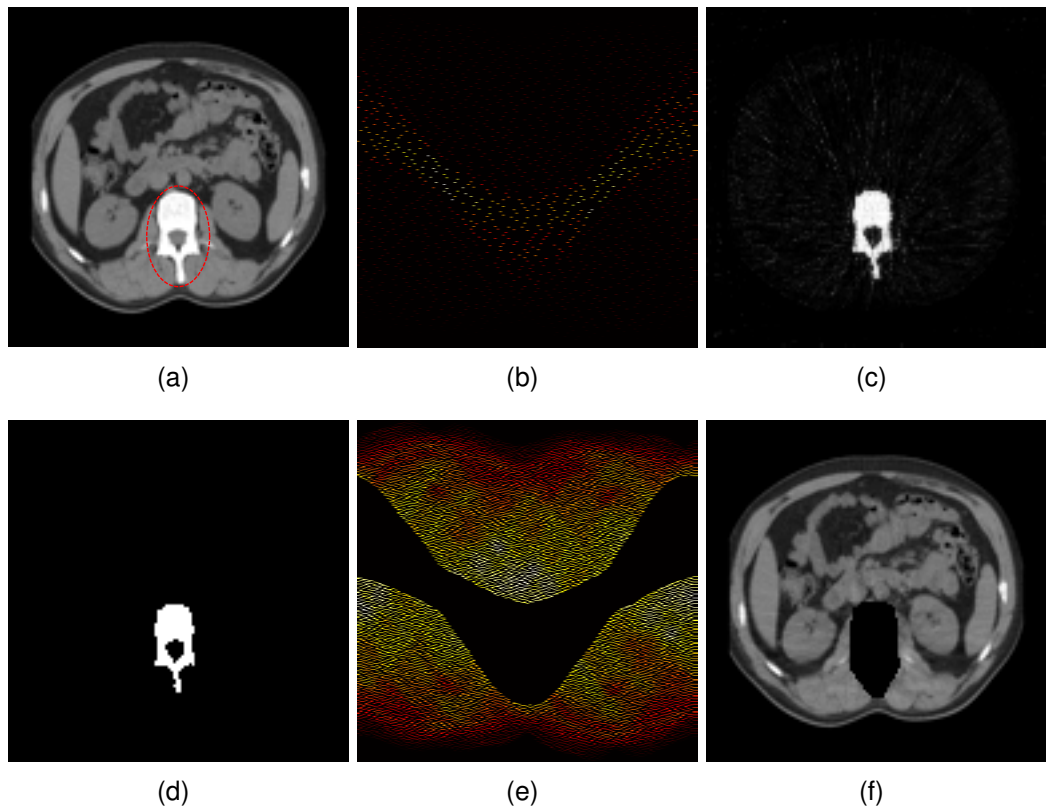


Fuente: *Adaptive compressed tomography sensing*, 2013.

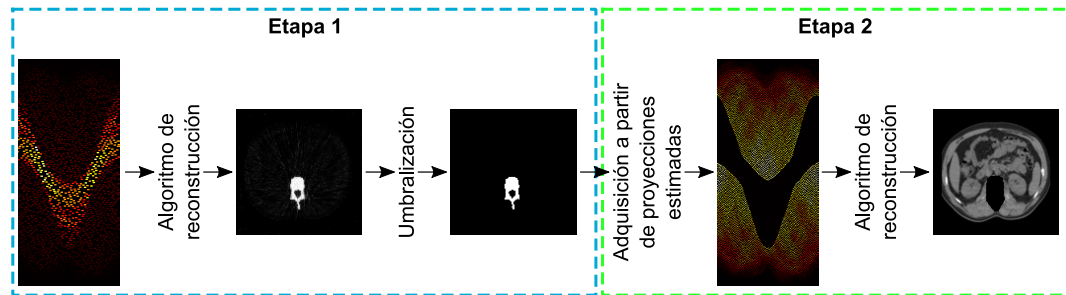
## 5. METODOLOGÍA PROPUESTA PARA LA ADQUISICIÓN Y RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES CT

Con base en el trabajo de CS en CT desarrollado en [1], el cual fue analizado en la sección 4, se propone una metodología de muestreo compresivo adaptativo para una arquitectura con haz de rayos-X en abanico y con aperturas codificadas. Esta metodología se enfoca en cuerpos que contienen elementos con un alto coeficiente de atenuación, figura 16a, dado que, en diferentes trabajos [14], [15], [16], [17], [18], se ha demostrado que estos elementos producen un alto porcentaje de ruido y pérdidas de información en las imágenes CT reconstruidas. La metodología propuesta se divide en dos etapas principales: (1) adquisición y reconstrucción inicial del objeto y (2) adquisición y reconstrucción final del objeto, figura 17.

**Figura 16:** (a) Imagen original, donde la región encerrada indica el elemento con mayor atenuación. (b) Adquisición inicial con un pequeño número de proyecciones. (c) Reconstrucción inicial del objeto a partir de (b). (d) Versión binaria de la imagen reconstruida (c), que identifica la región de mayor atenuación. (e) Segunda adquisición de proyecciones, que convergen fuera de la región (d). (f) Reconstrucción final del objeto a partir de (e).



**Figura 17:** Proceso de adquisición y reconstrucción de imágenes CT mediante la metodología propuesta.



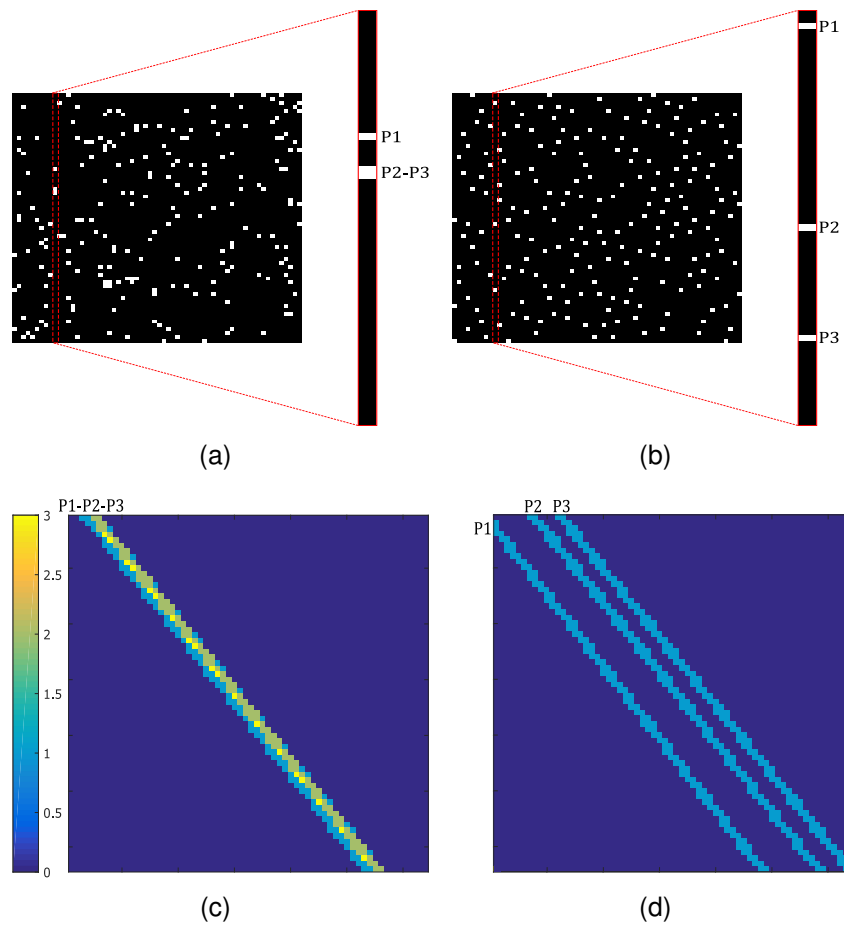
En la primera etapa, se realiza un muestreo inicial del objeto con un pequeño número de proyecciones, figura 16b. Posteriormente, se obtiene una estimación inicial del objeto a partir de las medidas adquiridas, figura 16c. Además, se realiza la umbralización de la reconstrucción inicial, figura 16d, con el fin de identificar los elementos con alto coeficiente de atenuación, figura 16d, donde 1 indica el elemento con mayor atenuación y 0 los demás elementos del objeto. En la siguiente etapa, se realiza un segundo muestreo del objeto, figura 16e, a partir de la estimación de proyecciones que convergen fuera de los elementos identificados en la etapa descrita anteriormente. Finalmente, se obtiene una reconstrucción del objeto mediante el conjunto de medidas captado, figura 16f.

Por otra parte, en [52], se estableció que el uso de aperturas codificadas con distribución aleatoria tiende a no muestrear uniformemente los píxeles del objeto. Con el fin de verificar este hecho, se realiza un análisis de como la distribución de la apertura codificada afecta el muestreo de los píxeles del objeto. Por esta razón, se analiza la distribución de los elementos de paso en un ángulo de visión, figura 18, y en un vecindario, figura 19, de una apertura aleatoria y una apertura diseñada. Si se analiza las proyecciones que pasan en un ángulo de visión, se obtiene que un mismo píxel del objeto puede muestrearse hasta 3 veces más con una apertura aleatoria, figura 18c, que con una apertura diseñada, figura 18d. Asimismo, si se analiza las proyecciones que pasan en una región, se obtiene que un mismo píxel puede muestrearse hasta 3 veces menos con una apertura diseñada, figura 19d, que con una apertura aleatoria, figura 19c. Con base en lo anterior, se concluye que el diseño de aperturas codificadas permite lograr un muestreo uniforme de los píxeles del objeto, a diferencia de las aperturas aleatorias. Por lo tanto, en este trabajo se propone el diseño de aperturas codificadas utilizadas tanto en la adquisición inicial como en la captación final de la estructura interna del objeto.

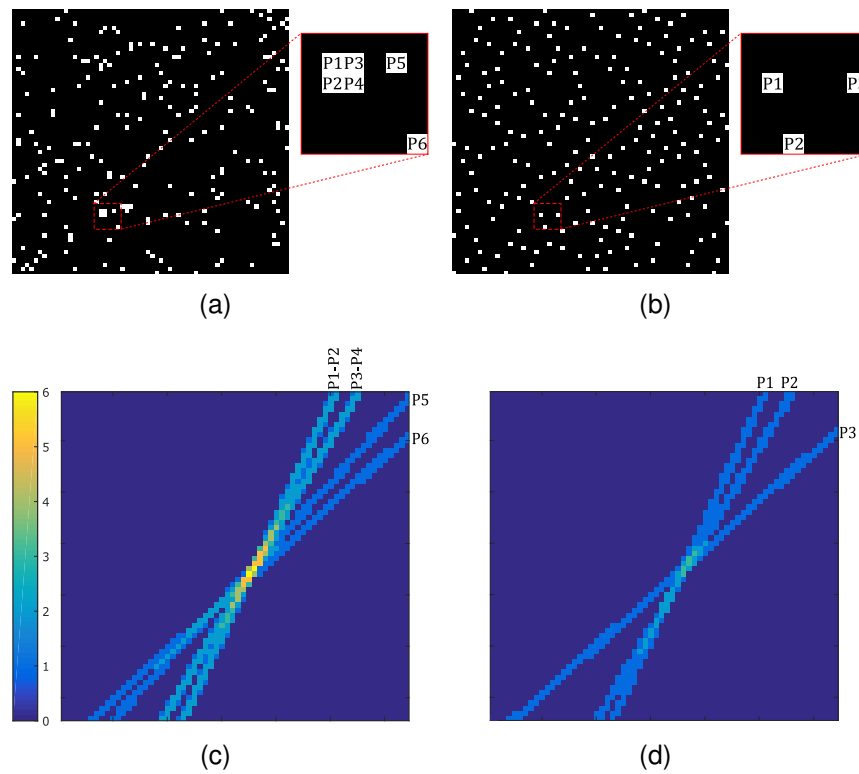
## 5.1. DISEÑO DE APERTURAS CODIFICADAS HOMOGÉNEAS

En [52], se estableció la optimización de aperturas codificadas a partir de la geometría fija de un sistema de CT. Estas aperturas proporcionan una detección uniforme con mediciones incoherentes y muestreo no redundante. Con base en

**Figura 18:** Análisis de proyecciones que deja pasar una apertura aleatoria y una diseñada, en un determinado ángulo de visión. (a) Apertura codificada aleatoria. (b) Apertura codificada diseñada. Aquí, P1, P2 y P3 representan las proyecciones que se dejan pasar en un ángulo de visión específico. (c) Trayectoria recorrida de las proyecciones de (a) en un ángulo de visión. (d) Trayectoria recorrida de las proyecciones de (b) en un ángulo de visión.



**Figura 19:** Análisis de proyecciones que deja pasar una apertura aleatoria y una diseñada, en una región específica. (a) Apertura codificada aleatoria. (b) Apertura codificada diseñada. Aquí, P1, P2, P3, P4, P5 y P6 representan las proyecciones que se dejan pasar en la región determinada. (c) Trayectoria recorrida de las proyecciones de (a) en la región indicada. (d) Trayectoria recorrida de las proyecciones de (b) en la región indicada.



este enfoque, se diseñan las aperturas codificadas homogéneas, que se utilizan en la captación inicial de la estructura interna del objeto bajo los siguientes criterios:

- **Criterio 1** *muestreo uniforme en los ángulos de visión*: cada ángulo de visión debe emitir aproximadamente la misma cantidad de proyecciones. Por consiguiente, la varianza  $\sigma_1^2 \in \mathbb{R}$  de las proyecciones adquiridas en cada ángulo de visión debe minimizarse. Esta varianza puede determinarse mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{V} \sum_{r_1=0}^{V-1} \left( \sum_{t_1=0}^{U-1} (\mathbf{h}_{t_1})_{r_1} - \bar{m}_1 \right)^2, \quad (5.1)$$

donde  $\bar{m}_1 = \frac{1}{V} \sum_{r_2=0}^{V-1} \sum_{t_2=0}^{U-1} (\mathbf{h}_{t_2})_{r_2}$  representa la media de la cantidad de proyecciones en cada ángulo de visión.

- **Criterio 2** *muestreo uniforme del objeto*: cada píxel del objeto debe muestrearse aproximadamente igual. Para lograr este propósito, se define la matriz  $\Omega \in \mathbb{R}^{UV \times n}$  como una versión binaria de la matriz de muestreo  $\mathbf{W}$ , donde  $\Omega = [\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_{n-1}]^T$  con  $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathbb{R}^{UV}$ . Por lo tanto, la varianza  $\sigma_2^2 \in \mathbb{R}$  de la cantidad de veces que se mide cada píxel del objeto debe minimizarse. Esta varianza puede determinarse a partir de la siguiente expresión:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{K} \sum_{r_1=0}^{n-1} b_{r_1} (\boldsymbol{\omega}_{r_1}^T \mathbf{h} - \bar{m}_2)^2, \quad (5.2)$$

donde  $K = \sum_{i=0}^{n-1} b_i$  representa la cantidad de píxeles dentro de la zona de mayor muestreo  $\mathbf{b}$ ,  $\bar{m}_2 = \frac{1}{K} \sum_{r_2=0}^{n-1} b_{r_2} \boldsymbol{\omega}_{r_2}^T \mathbf{h}$  corresponde a la media del número de veces que se mide cada píxel dentro de dicha zona,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  es una versión binaria de  $\Omega^T \mathbf{1}_{UV}$ . Aquí, el máximo de  $\Omega^T \mathbf{1}_{UV}$  corresponde al umbral de la binarización y  $\mathbf{1}_{UV}$  es un vector de unos de tamaño  $UV$ .

Con base en las ecuaciones (5.1) y (5.2) el problema de minimización para una apertura codificada homogénea se puede expresar como

$$\arg \min_{\mathbf{h}} \frac{1}{V} \sum_{r_1=0}^{V-1} \left( \sum_{t_1=0}^{U-1} (\mathbf{h}_{t_1})_{r_1} - \bar{m}_1 \right)^2 + \frac{1}{K} \sum_{r_1=0}^{n-1} b_{r_1} (\boldsymbol{\omega}_{r_1}^T \mathbf{h} - \bar{m}_2)^2. \quad (5.3)$$

Por otra parte, una representación matricial de la ecuación (5.1) puede describirse como

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{V} (\mathbf{D}\mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_1 \mathbf{h})^T (\mathbf{D}\mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_1 \mathbf{h}) = \frac{1}{V} \|\mathbf{D}\mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_1 \mathbf{h}\|_2^2, \quad (5.4)$$

donde  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{V \times UV}$  es una matriz de submuestreo ( $\mathbf{D} = \mathbf{I}_{V \times V} \otimes \mathbf{1}_U^T$ , donde  $\mathbf{I}_{V \times V} \in \mathbb{R}^{V \times V}$  es una matriz identidad y  $\mathbf{1}_U$  es un vector de tamaño  $U$ ) y  $\bar{\mathbf{M}}_1 = \frac{\mathbf{1}_{V \times V} \mathbf{D}}{V}$ , ( $\mathbf{1}_{V \times V}$  es una matriz de unos de tamaño  $V \times V$ ). Además, la ecuación (5.2) puede

escribirse de forma matricial como

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{\mathbf{1}_n^T \mathbf{b}} (\mathbf{B}\Omega^T \mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{h})^T (\mathbf{B}\Omega^T \mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{h}) = \frac{1}{\mathbf{1}_n^T \mathbf{b}} \|\mathbf{B}\Omega^T \mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{h}\|_2^2, \quad (5.5)$$

donde  $\mathbf{B} = \text{diag}(\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal cuyas entradas son los elementos del vector  $\mathbf{b}$  y  $\bar{\mathbf{M}}_2 = \frac{\mathbf{1}_{n \times n} \mathbf{B}\Omega^T}{\mathbf{1}_n^T \mathbf{b}}$ , ( $\mathbf{1}_{n \times n}$  es una matriz de unos de tamaño  $n \times n$ ). De esta manera, el problema de minimización (5.3) se puede reescribir matricialmente como

$$\arg \min_{\mathbf{h}} \frac{1}{V} \|\mathbf{D}\mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_1 \mathbf{h}\|_2^2 + \frac{1}{\mathbf{1}_n^T \mathbf{b}} \|\mathbf{B}\Omega^T \mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{h}\|_2^2, \quad (5.6)$$

A fin de descartar la solución trivial,  $\mathbf{h} = 0$ , se introduce un tercer término al problema de optimización (5.6), que indica la cantidad  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  de proyecciones en la apertura  $\mathbf{h}$

$$\arg \min_{\mathbf{h}} \frac{\tau_1}{V} \|\mathbf{D}\mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_1 \mathbf{h}\|_2^2 + \frac{\tau_2}{\mathbf{1}_n^T \mathbf{b}} \|\mathbf{B}\Omega^T \mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{h}\|_2^2 + \tau_3 \|\mathbf{1}_{UV}^T \mathbf{h} - \alpha\|_2^2, \quad (5.7)$$

donde  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$  son parámetros de regularización.

Una forma de resolver el problema de optimización (5.7) es mediante una matriz pseudoinversa. En primer lugar, se obtiene la derivada de la función objetivo

$$f_0(\mathbf{h}) = \frac{\tau_1}{V} \|(\mathbf{D} - \bar{\mathbf{M}}_1) \mathbf{h}\|_2^2 + \frac{\tau_2}{\mathbf{1}_n^T \mathbf{b}} \|(\mathbf{B}\Omega^T - \bar{\mathbf{M}}_2) \mathbf{h}\|_2^2 + \tau_3 \|\mathbf{1}_{UV}^T \mathbf{h} - \alpha\|_2^2, \quad (5.8)$$

respecto a la variable  $\mathbf{h}$  y se iguala a cero

$$\begin{aligned} \frac{df_0(\mathbf{h})}{d\mathbf{h}} &= \frac{\tau_1}{V} (\mathbf{D} - \bar{\mathbf{M}}_1)^T (\mathbf{D} - \bar{\mathbf{M}}_1) \mathbf{h} + \frac{\tau_2}{\mathbf{1}_n^T \mathbf{b}} (\mathbf{B}\Omega^T - \bar{\mathbf{M}}_2)^T (\mathbf{B}\Omega^T - \bar{\mathbf{M}}_2) \mathbf{h} \\ &+ \tau_3 \mathbf{1}_{UV} (\mathbf{1}_{UV}^T \mathbf{h} - \alpha) = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Finalmente,  $\mathbf{h}$  se puede expresar como

$$\mathbf{h} = \tau_3 \alpha \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{1}_{UV}, \quad (5.10)$$

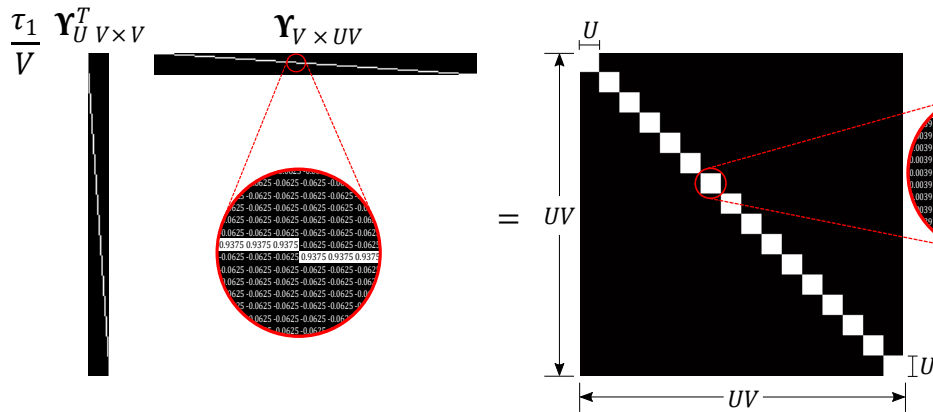
donde  $\mathbf{\Lambda}^{-1} \in \mathbb{R}^{UV \times UV}$  es la matriz pseudoinversa de  $\mathbf{\Lambda}$ , que se describe matricialmente como

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{\tau_1}{V} (\mathbf{D} - \bar{\mathbf{M}}_1)^T (\mathbf{D} - \bar{\mathbf{M}}_1) + \frac{\tau_2}{\mathbf{1}_n^T \mathbf{b}} (\mathbf{B}\Omega^T - \bar{\mathbf{M}}_2)^T (\mathbf{B}\Omega^T - \bar{\mathbf{M}}_2) + \tau_3 \mathbf{1}_{UV \times UV}, \quad (5.11)$$

donde  $\mathbf{1}_{UV \times UV}$  es una matriz de unos de tamaño  $UV \times UV$ .

Por ejemplo, si se analiza el tercer término de (5.11), se puede inferir que este término representa una matriz densa, dado que, todos sus elementos son equivalentes a la constante  $\tau_3$ . En el caso del primer término, la diferencia entre  $\mathbf{D}$  y  $\bar{\mathbf{M}}_1$  da como resultado una matriz densa  $\Upsilon$ . De igual modo, el producto entre

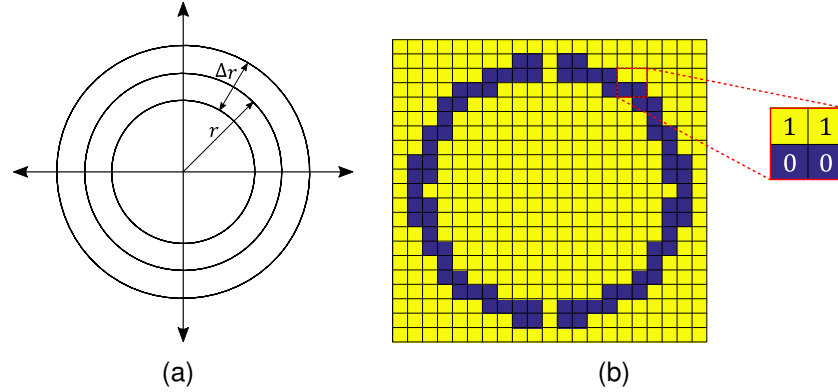
**Figura 20:** Ejemplo de una matriz densa  $\frac{\tau_1}{V} (\mathbf{D} - \bar{\mathbf{M}}_1)^T (\mathbf{D} - \bar{\mathbf{M}}_1)$  con  $U = V = 16$  y  $\tau_1 = 1$ .



$\Upsilon^T$  y  $\Upsilon$  es una matriz densa, como se ilustra en la figura 20. En definitiva,  $\Lambda$  se comporta como una matriz densa. Por lo tanto, la complejidad computacional para calcular  $\Lambda^{-1}$ , aumenta en función de  $U$  y  $V$ , es decir que se requiere de un mayor almacenamiento en memoria a medida que  $U$  y  $V$  se hacen más grandes.

Con el propósito de obtener aperturas codificadas homogéneas que satisfagan el problema de minimización (5.7), se desarrolla un algoritmo iterativo (1). En este algoritmo se calcula una matriz de pesos  $\Gamma \in \mathbb{R}^{U \times V}$ , que se obtiene al evaluar la versión vectorial de  $\Xi$  en una función de costos. La matriz  $\Xi$  se inicializa como una matriz con valores de 0 en todos sus elementos y en cada iteración se adiciona un valor de 1 en la misma posición donde se ubica el valor mínimo de la matriz  $\Gamma$ . Si diferentes posiciones en  $\Gamma$  corresponden a su valor mínimo, entonces, se agrega aleatoriamente un 1 a la matriz  $\Xi$  en alguna de estas posiciones. Dado que la segunda restricción del problema de minimización (5.7) requiere de un alto costo computacional, esta condición se adapta y relaja mediante la implementación de un filtro  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{e \times e}$ , figura 21. Este filtro se diseña a partir de la teoría de *blue-noise*. Esta teoría establece que si un elemento de paso está ubicado en el centro del filtro circular, entonces, el siguiente elemento debe estar posicionado en algún punto de su órbita, es decir, se debe cumplir la condición  $\|\mathbf{F}\mathbf{h}\|_2^2 = 0$  para garantizar la equidistancia de las proyecciones distribuidas en la apertura codificada, donde  $\mathbf{F}$  corresponde a la matriz de filtrado.

**Figura 21:** (a) Distribución espacial de la estructura  $\mathbf{E}$ . (b) Ejemplo de un filtro  $\mathbf{E}$  con  $r = 9$  y  $\Delta_r = 1$  píxeles.




---

**Algoritmo 1** Optimización de aperturas codificadas homogéneas.

---

**Entrada:**  $U \in \mathbb{N}$ ,  $V \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\tau \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{UV \times UV}$   
**Salida:**  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{UV}$

---

- 1: Inicialización  $\mathbf{\Xi} \leftarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{U \times V}$ ;
  - 2:  $S = \{(q, r) | (q, r) \in \mathbb{N}, q \leq U - 1, r \leq V - 1\}$ ;
  - 3:  $s^* = \{s | \mathcal{E}_s = \text{Inf}(\mathbf{\Xi}), s \subseteq S\}$ ;
  - 4:  $z \leftarrow$  Se elige una tupla  $s^*$  de forma aleatoria;
  - 5:  $\mathcal{E}_z = 1$ ;
  - 6: **para**  $i = 1$  hasta  $\alpha$  **hacer**
  - 7:    $\mathbf{h} \leftarrow$  Versión vectorizada de  $\mathbf{\Xi}$ ;
  - 8:    $\gamma_1 = (\mathbf{Dh}) \otimes \mathbf{1}_U$ ;
  - 9:    $\gamma_2 = \mathbf{Fh}$ ;
  - 10:    $\gamma = \frac{\gamma_1}{\text{Sup}(\gamma_1)} + \frac{\gamma_2}{\text{Sup}(\gamma_2)} + \tau \mathbf{h}$ ;
  - 11:    $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{U \times V} \leftarrow$  Versión matricial de  $\gamma$ ;
  - 12:    $s^* = \{s | \Gamma_s = \text{Inf}(\mathbf{\Gamma}), s \subseteq S\}$ ;
  - 13:    $z \leftarrow$  Se elige una tupla  $s^*$  de forma aleatoria;
  - 14:    $\mathcal{E}_z = 1$ ;
  - 15: **fin para**
- 

## 5.2. DISEÑO DE APERTURAS CODIFICADAS DE FORMA ADAPTATIVA

Las aperturas codificadas de forma adaptativa se utilizan en el segundo muestreo del objeto. Con base en los criterios descritos en el problema de minimización (5.7), se puede expresar la optimización de aperturas codificadas de forma

adaptativa como

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{h}} & \frac{\tau_1}{V} \|\mathbf{D}\mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_1\mathbf{h}\|_2^2 + \frac{\tau_2}{\mathbf{1}_n^T \mathbf{b}} \|\mathbf{B}\Omega^T \mathbf{h} - \bar{\mathbf{M}}_2\mathbf{h}\|_2^2 + \tau_3 \|\mathbf{1}_{UV}^T \mathbf{h} - \alpha\|_2^2 \\ \text{s.t.} & \quad \mathbf{h}^T \boldsymbol{\zeta} = 0 \\ & \quad \mathbf{h}^T \mathbf{g} - \mathbf{1}_{UV}^T \mathbf{g} = 0 \end{aligned}, \quad (5.12)$$

donde  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{UV}$  corresponde a la apertura utilizada en la adquisición inicial,  $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{UV}$  representa la zona de mayor atenuación en el sinograma sin las proyecciones iniciales, es decir,  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa} \circ \mathbf{g}$ . Aquí,  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{UV}$  es la umbralización de  $\mathbf{W}(\hat{\mathbf{x}}_0 > e)$ , donde  $\hat{\mathbf{x}}_0$  es la reconstrucción inicial y  $e \in \mathbb{R}$  el valor de umbral. La figura 22 ilustra el proceso de adaptación de la apertura codificada. Para obtener aperturas codificadas de forma adaptativa que satisfagan el problema de minimización (5.12), se desarrolla un algoritmo iterativo (2) basado en el algoritmo (1).

---

**Algoritmo 2** Optimización de aperturas codificadas de forma adaptativa.

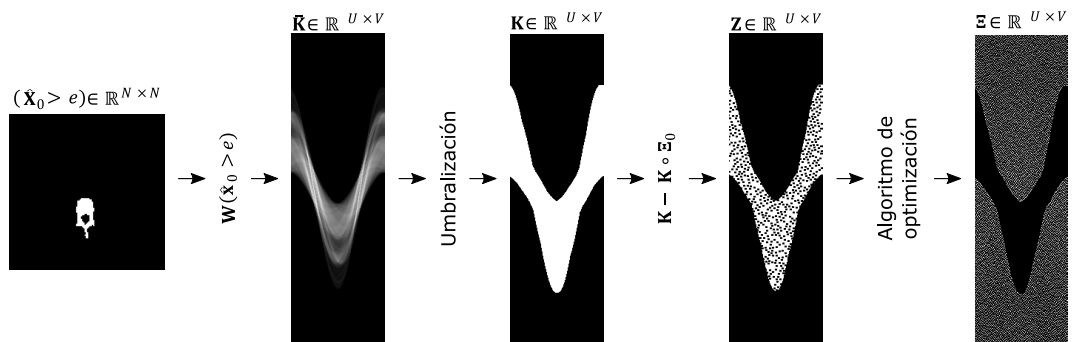
---

**Entrada:**  $U \in \mathbb{N}, V \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}, \tau \in \mathbb{N}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{UV \times UV}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{UV}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{UV}, \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{UV}$   
**Salida:**  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{UV}$

---

- 1:  $\Xi_0 \in \mathbb{R}^{U \times V} \leftarrow$  Versión matricial de  $\mathbf{g}$ ;
  - 2: Inicialización  $\Xi \leftarrow \Xi_0$ ;
  - 3:  $S = \{(q, r) | (q, r) \in \mathbb{N}, q \leq U - 1, r \leq V - 1\}$ ;
  - 4: **para**  $i = 1$  hasta  $\alpha$  **hacer**
  - 5:    $\mathbf{h} \leftarrow$  Versión vectorizada de  $\Xi$ ;
  - 6:    $\boldsymbol{\gamma}_1 = (\mathbf{D}\mathbf{h}) \otimes \mathbf{1}_U$ ;
  - 7:    $\boldsymbol{\gamma}_2 = \mathbf{F}\mathbf{h}$ ;
  - 8:    $\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\gamma}_1}{\text{Sup}(\boldsymbol{\gamma}_1)} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_2}{\text{Sup}(\boldsymbol{\gamma}_2)} + \tau(\mathbf{h} + \boldsymbol{\zeta})$ ;
  - 9:    $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{U \times V} \leftarrow$  Versión matricial de  $\boldsymbol{\gamma}$ ;
  - 10:    $s^* = \{s | \Gamma_s = \text{Inf}(\boldsymbol{\Gamma}), s \subseteq S\}$ ;
  - 11:    $z \leftarrow$  Se elige una tupla  $s^*$  de forma aleatoria;
  - 12:    $\Xi_z = \mathbf{1}$ ;
  - 13: **fin para**
  - 14:  $\mathbf{h} = \mathbf{h} \circ (\mathbf{1}_{UV} - \boldsymbol{\kappa})$ ;
-

**Figura 22:** Proceso de adaptación de la apertura codificada.  $\Xi_0$ ,  $\Xi$ ,  $Z$  y  $K$ , son representaciones matriciales de los vectores  $g$ ,  $h$ ,  $\zeta$  y  $\kappa$ , respectivamente. Por otra parte,  $\bar{K}$  es la versión matricial de  $W(\hat{x}_0 > e)$  y  $\hat{X}_0 > e$  es la versión binaria de la reconstrucción inicial  $\hat{X}_0$  en un valor  $e \in \mathbb{R}$ . Aquí,  $N^2 = n$ .



## 6. SIMULACIONES Y RESULTADOS

En esta sección se realiza un análisis cuantitativo y cualitativo de las imágenes CT reconstruidas a partir de medidas compresivas, que se adquieren en una arquitectura de CT con haz de rayos-X en abanico con aperturas codificadas aleatorias y optimizadas.

### 6.1. BASE DE DATOS UTILIZADA

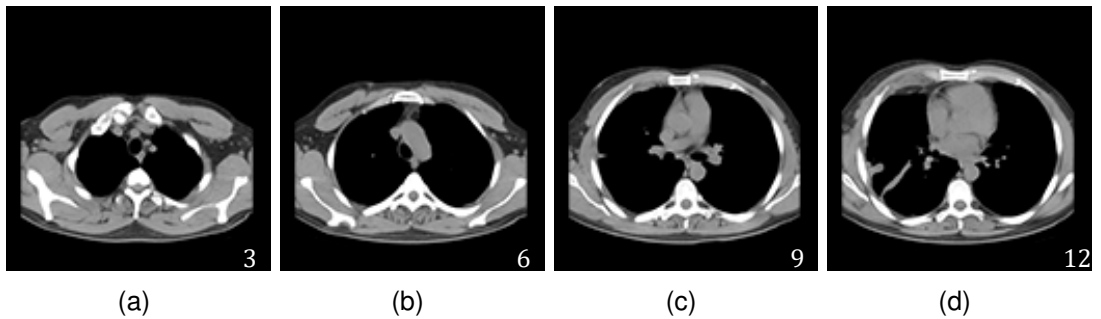
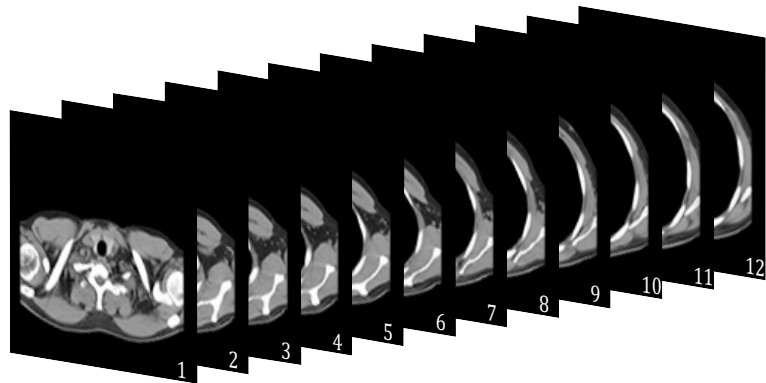
Con el fin de evaluar el desempeño de las aperturas codificadas de forma adaptativa, se reconstruyen 24 imágenes CT, que corresponden a dos tórax humanos, figuras 23 y 24, cada uno con 12 secciones transversales y dimensión espacial de  $128 \times 128$  píxeles. Estas imágenes CT se obtuvieron de un banco de datos llamado *dir lab*, que a su vez fueron adquiridas con un escáner *General Electric Discovery ST PET/CT*. Por otra parte, las simulaciones se ejecutaron sobre Matlab R2015a en un computador de escritorio con arquitectura compuesta por dos procesadores Dual Intel Xeon de 2.6GHz y memoria RAM de 192GB.

### 6.2. PARÁMETROS SELECCIONADOS

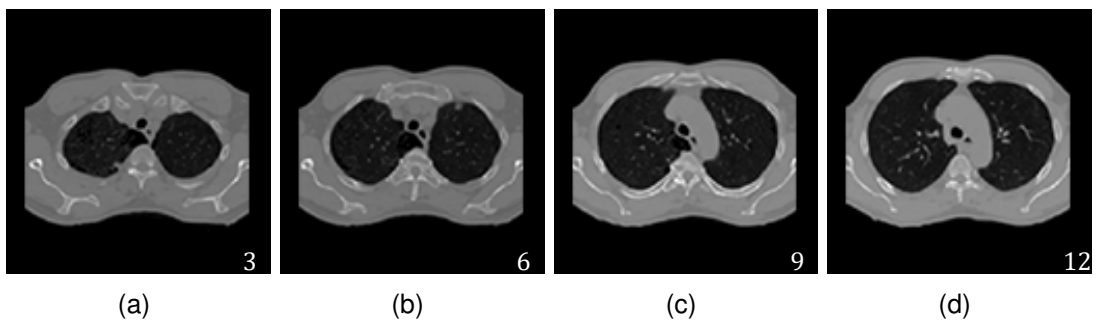
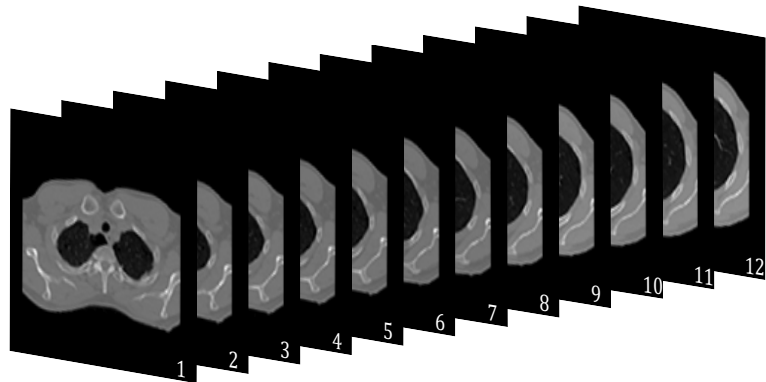
El proceso de adquisición de proyecciones se simula con un paquete software de código abierto llamado ASTRA (*All Scale Tomographic Reconstruction Antwerp*) [53], que permite simular la geometría  $W$  de un escáner de CT con haz de rayos-X en abanico. Aquí, los parámetros definidos en ASTRA son el tamaño de los detectores de 0.377[mm], la distancia de la fuente de rayos-X al objeto de 484.6[mm], la distancia del arreglo de detectores al objeto de 290.6[mm], el número de detectores  $U = 512$ , el número de ángulos de visión  $V = 127$  distribuidos de forma equidistante  $360^\circ$  alrededor del objeto y el tamaño del objeto de  $128 \times 128$  píxeles.

Por otra parte, el proceso de reconstrucción se realiza con un algoritmo llamado C-SALSA (*Constrained Split Augmented lagrangian Shrinkage*) [54]. En este caso, los parámetros establecidos en C-SALSA son la matriz de medidas compresivas  $\Phi$ , la imagen CT original, el número de iteraciones 2000 y el valor del regularizador  $\tau$ . En particular,  $\tau$  se estima para obtener una mejor aproximación de la imagen original. Este parámetro varía según el número de proyecciones adquiridas. En este trabajo se ejecutaron 5 pruebas para cada reconstrucción y sus valores promedios fueron calculados y representados.

**Figura 23:** Primer conjunto de imágenes CT de un tórax humano con 12 secciones transversales.



**Figura 24:** Segundo conjunto de imágenes CT de un tórax humano con 12 secciones transversales.



---

### 6.3. MÉTRICAS

La calidad de las imágenes CT reconstruidas, mediante proyecciones compresivas obtenidas con aperturas aleatorias y optimizadas se mide con las siguientes métricas:

- **Error cuadrático medio:** (MSE, por su sigla en inglés) permite calcular el error que se presenta entre la imagen original  $\mathbf{x}$  y la imagen reconstruida  $\hat{\mathbf{x}}$ , este concepto se puede escribir matemáticamente como

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{x}_i - x)^2. \quad (6.1)$$

- **Relación Pico de Señal Ruido:** (PSNR, por su sigla en inglés) permite medir la calidad de la imagen reconstruida  $\hat{\mathbf{x}}$  a partir de la imagen original  $\mathbf{x}$ , este concepto se puede escribir matemáticamente como

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{\max(\mathbf{x})}{MSE} \right), \quad (6.2)$$

donde  $\max(\mathbf{x})$  representa el valor máximo en la imagen CT original. Si el MSE entre señal reconstruida y la original tiende a 0, entonces, su PSNR tiende a infinito, por lo tanto, a mayor PSNR se obtiene mejor calidad de reconstrucción.

### 6.4. RECONSTRUCCIONES

Las aperturas codificadas de forma adaptativa se comparan con las aperturas aleatorias para el 70 % y 100 % de las medidas. La reconstrucción inicial utilizada en la adaptación de la apertura codificada de todas las pruebas obtenidas, se realiza con el 12.5 % de las medidas, este porcentaje permite la identificación del elemento de mayor atenuación en el objeto. Los cuadros 1, 2, 3 y 4 resumen el promedio de las métricas PSNR y MSE de 5 pruebas de reconstrucciones con aperturas aleatorias y optimizadas. De igual forma, los cuadros 5, 6, 7 y 8 presentan el análisis cuantitativo con un ruido gaussiano de 10 dB. Con base en estos resultados, se puede decir que la metodología propuesta para la adquisición y reconstrucción de imágenes CT con aperturas codificadas de forma adaptativa, permite obtener desde 1 dB hasta 10 dB de ganancia en términos de PSNR en medidas sin ruido. Además, se conserva una ganancia desde 2 dB hasta 8 dB con una compresión del 75 % de las medidas para un nivel de ruido de 10 dB. En el caso del 100 % de las proyecciones adquiridas se conserva una ganancia desde 3 dB hasta 9 dB. Por otra lado, en las figuras 25 y 27 se presentan algunas reconstrucciones con el 75 % y 100 % de compresión, respectivamente, para el primer conjunto de imágenes de un tórax, figura 23. Asimismo, las figuras 26, 28 corresponden a las reconstrucciones con el 75 % y 100 % de las medidas cap-

tadas para las imágenes del segundo tórax humano, figura 24. Por último, las figuras 29, 30, 31 y 32 muestran las reconstrucciones obtenidas con un nivel de ruido de 10 dB.

**Tabla 1:** Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 23 con el 75 % de las medidas.

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		1	2	3	4	5	6
Tradicional	PSNR	31.51	32.41	32.54	31.99	32.62	33.19
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	5.86	4.75	4.61	5.23	4.53	3.96
Propuesto	PSNR	<b>42.13</b>	<b>33.55</b>	<b>34.88</b>	<b>36.89</b>	<b>34.88</b>	<b>36.39</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	0.51	3.54	2.69	1.69	2.70	1.90

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		7	8	9	10	11	12
Tradicional	PSNR	32.59	32.91	32.37	32.61	32.33	32.36
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	4.56	4.23	4.79	4.53	4.83	4.80
Propuesto	PSNR	<b>35.03</b>	<b>37.00</b>	<b>35.97</b>	<b>40.80</b>	<b>42.86</b>	<b>35.04</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	2.59	1.65	2.10	0.69	0.43	2.62

**Tabla 2:** Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 24 con el 75 % de las medidas.

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		1	2	3	4	5	6
Tradicional	PSNR	34.61	34.80	35.09	35.94	35.50	35.53
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	2.97	2.87	2.68	2.17	2.39	2.40
Propuesto	PSNR	<b>40.35</b>	<b>40.00</b>	<b>38.44</b>	<b>40.25</b>	<b>39.46</b>	<b>38.16</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	0.80	0.87	1.24	8.12	0.10	1.31

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		7	8	9	10	11	12
Tradicional	PSNR	35.14	35.04	34.45	34.65	35.15	34.28
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	2.56	2.26	2.32	2.34	1.94	2.21
Propuesto	PSNR	<b>39.08</b>	<b>38.00</b>	<b>37.20</b>	<b>39.57</b>	<b>38.86</b>	<b>36.93</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	1.03	1.14	1.23	0.76	0.82	1.20

**Tabla 3:** Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 23 con el 100 % de las medidas.

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		1	2	3	4	5	6
Tradicional	PSNR	32.43	32.95	32.98	32.68	33.06	33.46
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	4.72	4.19	4.16	4.46	4.09	3.73
Propuesto	PSNR	<b>42.78</b>	<b>34.11</b>	<b>36.71</b>	<b>38.10</b>	<b>35.94</b>	<b>37.23</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	0.44	3.21	1.78	1.28	2.11	1.59

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		7	8	9	10	11	12
Tradicional	PSNR	32.88	33.15	32.59	32.92	32.83	32.67
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	4.26	4.00	4.56	4.22	4.31	4.47
Propuesto	PSNR	<b>35.36</b>	<b>37.90</b>	<b>36.69</b>	<b>42.17</b>	<b>43.78</b>	<b>36.53</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	2.41	1.34	1.80	0.51	0.35	1.94

**Tabla 4:** Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 24 con el 100 % de las medidas.

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		1	2	3	4	5	6
Tradicional	PSNR	35.37	35.58	35.91	36.54	36.03	36.11
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	2.49	2.40	2.21	1.89	2.11	2.10
Propuesto	PSNR	<b>41.38</b>	<b>41.96</b>	<b>40.57</b>	<b>42.60</b>	<b>42.14</b>	<b>40.36</b>
	MSE ( $\times 10^{-07}$ )	6.26	5.52	7.59	4.70	5.17	7.90

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		7	8	9	10	11	12
Tradicional	PSNR	36.00	35.51	34.98	35.29	35.67	34.87
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	2.08	2.03	2.06	2.02	1.72	1.93
Propuesto	PSNR	<b>39.08</b>	<b>38.00</b>	<b>41.11</b>	<b>39.28</b>	<b>38.43</b>	<b>39.33</b>
	MSE ( $\times 10^{-07}$ )	6.42	8.56	9.29	8.03	4.84	7.50

**Tabla 5:** Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 23 con el 75 % de las medidas y ruido agregado con  $SNR = 10\text{dB}$ .

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		1	2	3	4	5	6
Tradicional	PSNR	25.90	25.68	26.46	25.71	26.33	26.12
	MSE ( $\times 10^{-05}$ )	2.12	2.23	1.87	2.22	1.92	2.02
Propuesto	PSNR	<b>32.11</b>	<b>28.38</b>	<b>29.74</b>	<b>30.46</b>	<b>29.19</b>	<b>29.27</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	5.09	12.3	8.78	7.44	9.97	9.79

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		7	8	9	10	11	12
Tradicional	PSNR	26.44	26.52	26.14	26.21	26.09	25.80
	MSE ( $\times 10^{-05}$ )	1.88	1.84	2.01	1.98	2.03	2.18
Propuesto	PSNR	<b>29.27</b>	<b>30.89</b>	<b>31.59</b>	<b>34.33</b>	<b>33.52</b>	<b>29.05</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	9.33	6.73	5.74	3.05	3.67	10.4

**Tabla 6:** Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 24 con el 75 % de las medidas y ruido agregado con  $SNR = 10\text{dB}$ .

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		1	2	3	4	5	6
Tradicional	PSNR	28.03	28.27	28.13	28.74	28.25	27.71
	MSE ( $\times 10^{-05}$ )	1.35	1.29	1.33	1.14	1.27	1.45
Propuesto	PSNR	<b>32.42</b>	<b>32.17</b>	<b>31.39</b>	<b>33.89</b>	<b>31.42</b>	<b>30.33</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	4.92	5.25	6.27	3.48	6.11	7.94

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		7	8	9	10	11	12
Tradicional	PSNR	27.97	27.96	27.11	27.72	27.63	27.19
	MSE ( $\times 10^{-05}$ )	1.32	1.15	1.26	1.16	1.09	1.13
Propuesto	PSNR	<b>31.30</b>	<b>30.00</b>	<b>31.01</b>	<b>31.30</b>	<b>31.96</b>	<b>31.09</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	6.14	9.21	5.12	5.34	4.04	4.60

**Tabla 7:** Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 23 con el 100 % de las medidas y ruido agregado con  $SNR = 10\text{dB}$ .

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		1	2	3	4	5	6
Tradicional	PSNR	26.31	25.84	26.61	25.84	26.37	26.04
	MSE ( $\times 10^{-05}$ )	1.93	2.15	1.80	2.15	1.90	2.06
Propuesto	PSNR	<b>33.07</b>	<b>30.70</b>	<b>31.54</b>	<b>31.79</b>	<b>31.28</b>	<b>30.29</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	4.08	7.04	5.80	5.47	6.15	7.73

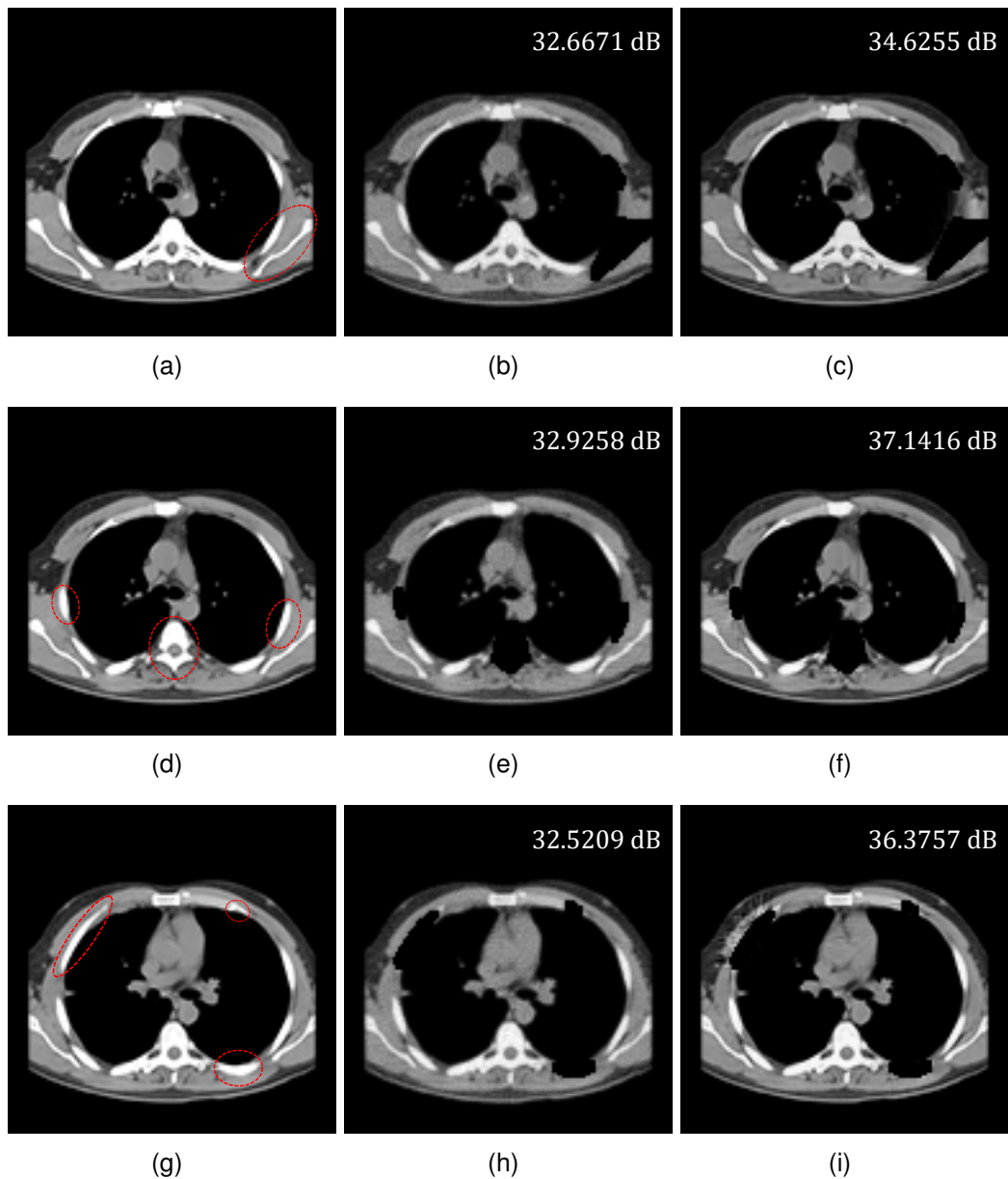
Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		7	8	9	10	11	12
Tradicional	PSNR	26.46	26.55	26.18	26.15	26.13	25.85
	MSE ( $\times 10^{-05}$ )	1.87	1.83	1.99	2.01	2.02	2.15
Propuesto	PSNR	<b>32.00</b>	<b>32.66</b>	<b>33.10</b>	<b>35.19</b>	<b>34.58</b>	<b>31.74</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	5.23	4.48	4.05	2.50	2.88	5.54

**Tabla 8:** Métricas de las reconstrucciones de cada sección transversal de la figura 24 con el 100 % de las medidas y ruido agregado con  $SNR = 10\text{dB}$ .

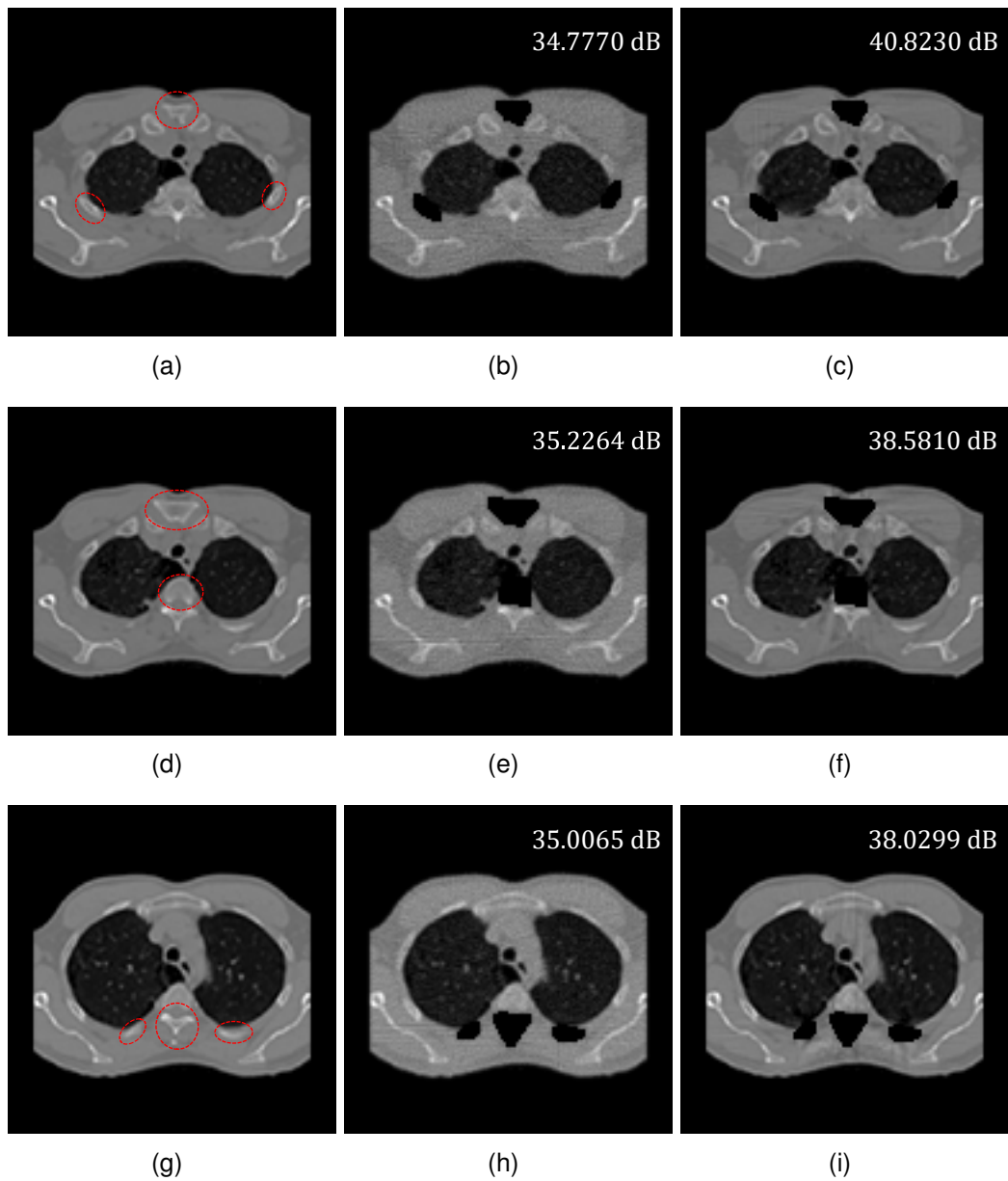
Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		1	2	3	4	5	6
Tradicional	PSNR	28.65	28.73	28.60	29.21	28.65	27.94
	MSE ( $\times 10^{-05}$ )	1.17	1.16	1.19	1.02	1.16	1.38
Propuesto	PSNR	<b>33.11</b>	<b>33.42</b>	<b>32.81</b>	<b>34.58</b>	<b>32.68</b>	<b>31.03</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	4.20	3.93	4.52	2.91	4.57	6.76

Método	Métrica	Sección transversal reconstruida					
		7	8	9	10	11	12
Tradicional	PSNR	28.27	28.25	27.46	28.03	27.99	27.47
	MSE ( $\times 10^{-05}$ )	1.23	1.08	1.16	1.07	1.01	1.06
Propuesto	PSNR	<b>32.33</b>	<b>33.02</b>	<b>31.72</b>	<b>31.40</b>	<b>33.45</b>	<b>32.26</b>
	MSE ( $\times 10^{-06}$ )	4.84	3.60	4.40	7.52	2.87	3.52

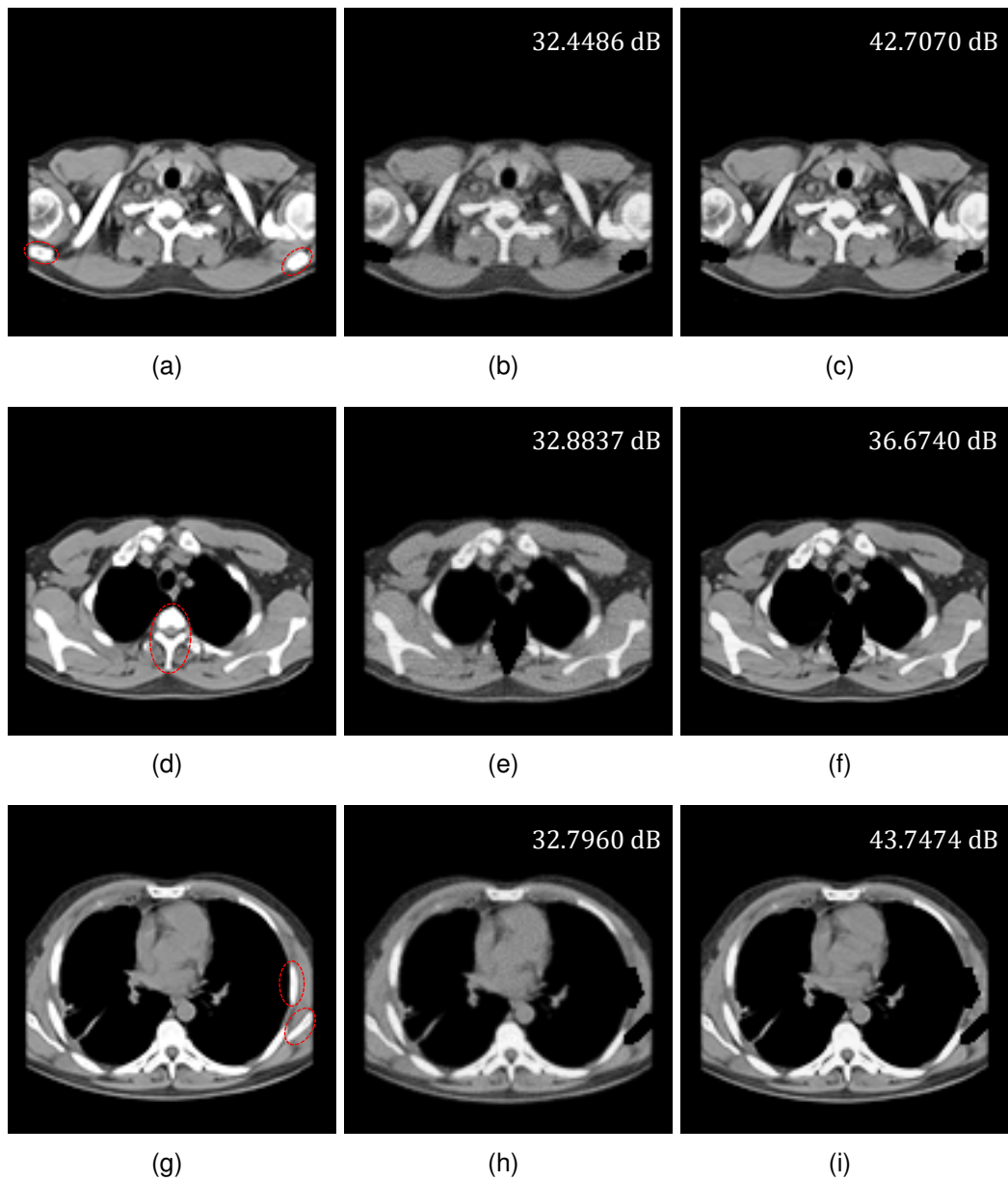
**Figura 25:** (a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 7, 8 y 9 de la figura 23, respectivamente, donde la región encerrada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 75 % de las medidas.



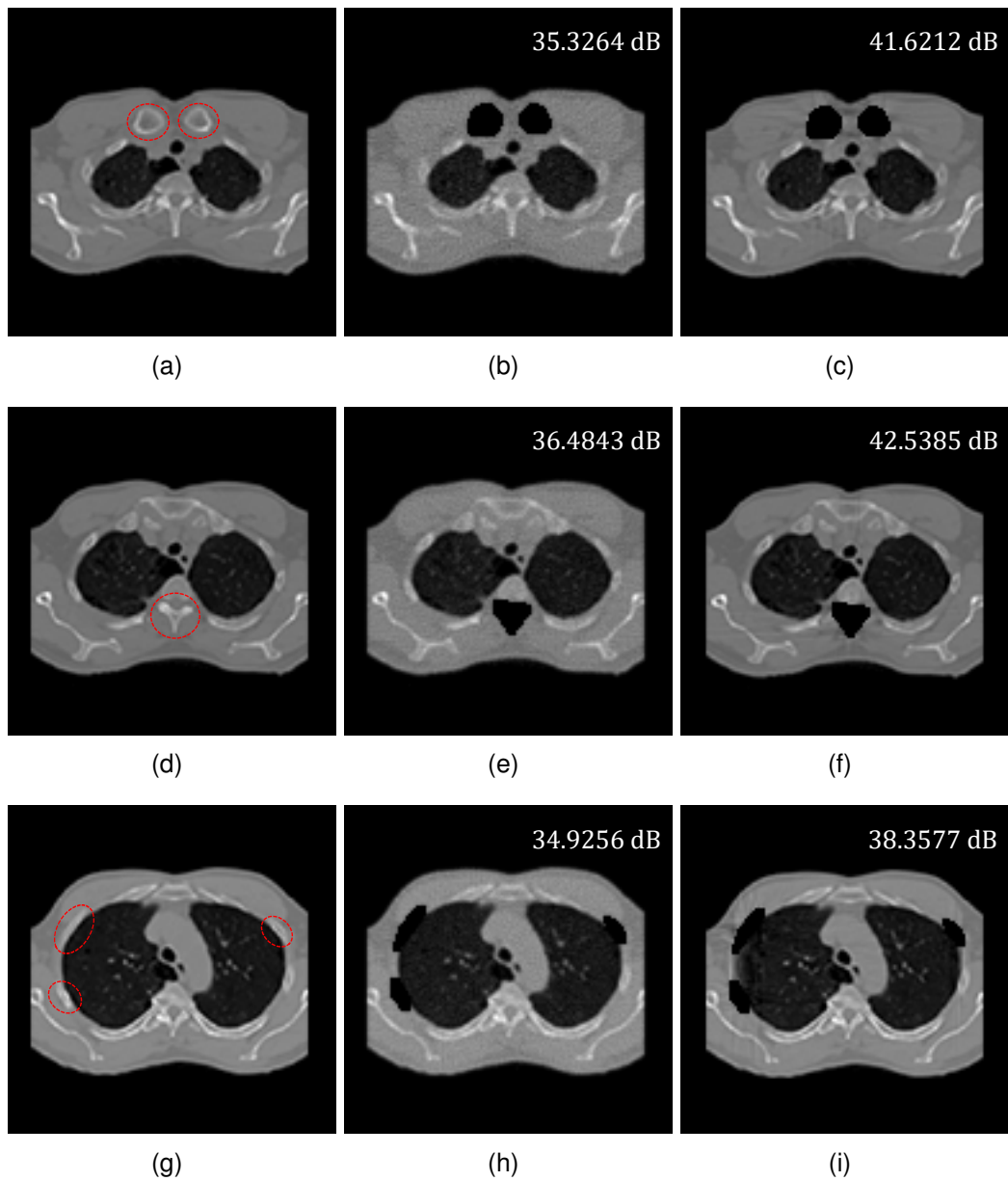
**Figura 26:** (a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 2, 3 y 8 de la figura 24, respectivamente, donde la región encerrada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 75 % de las medidas.



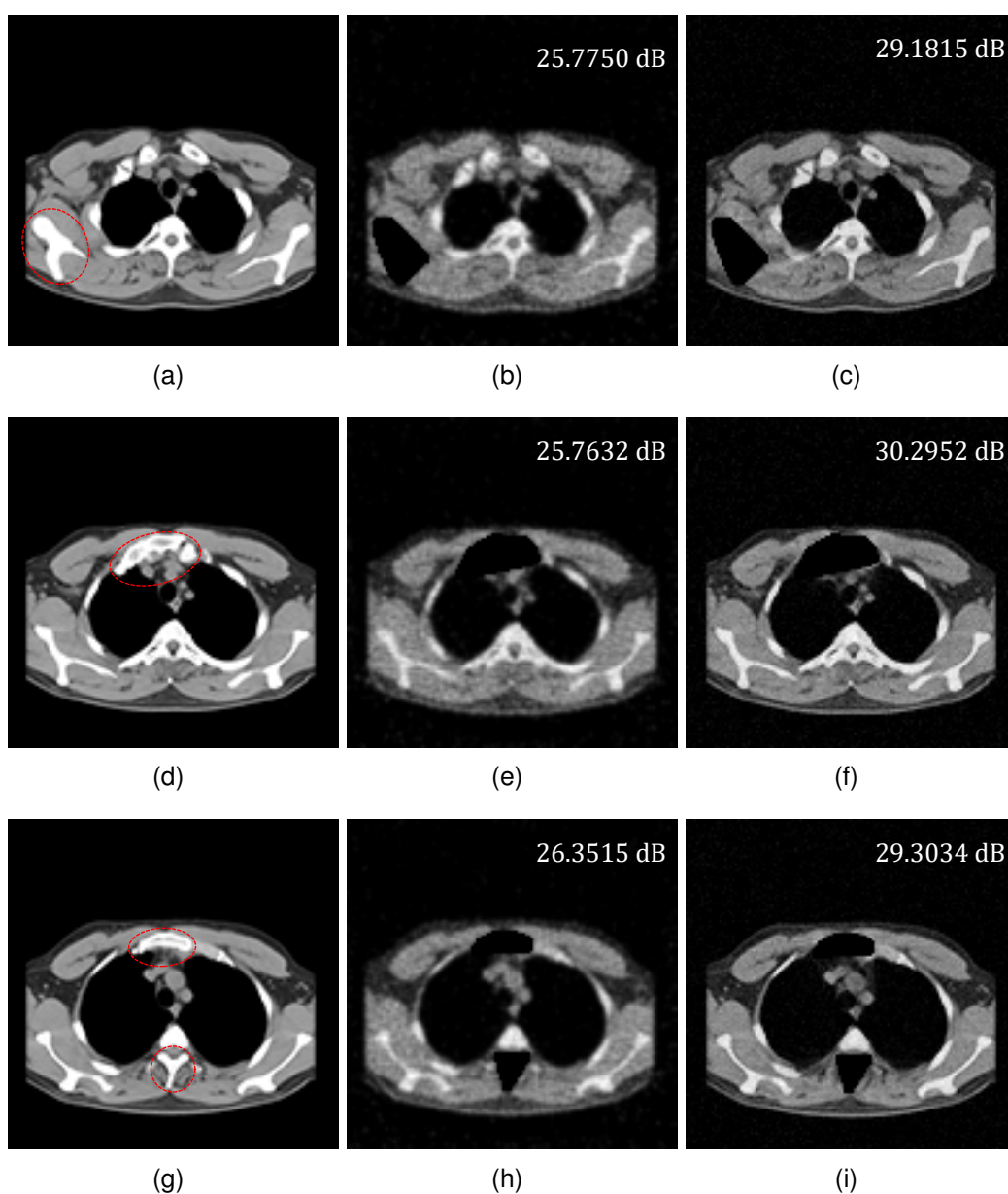
**Figura 27:** (a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 1, 3 y 11 de la figura 23, respectivamente, donde la región encerrada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 100 % de las medidas.



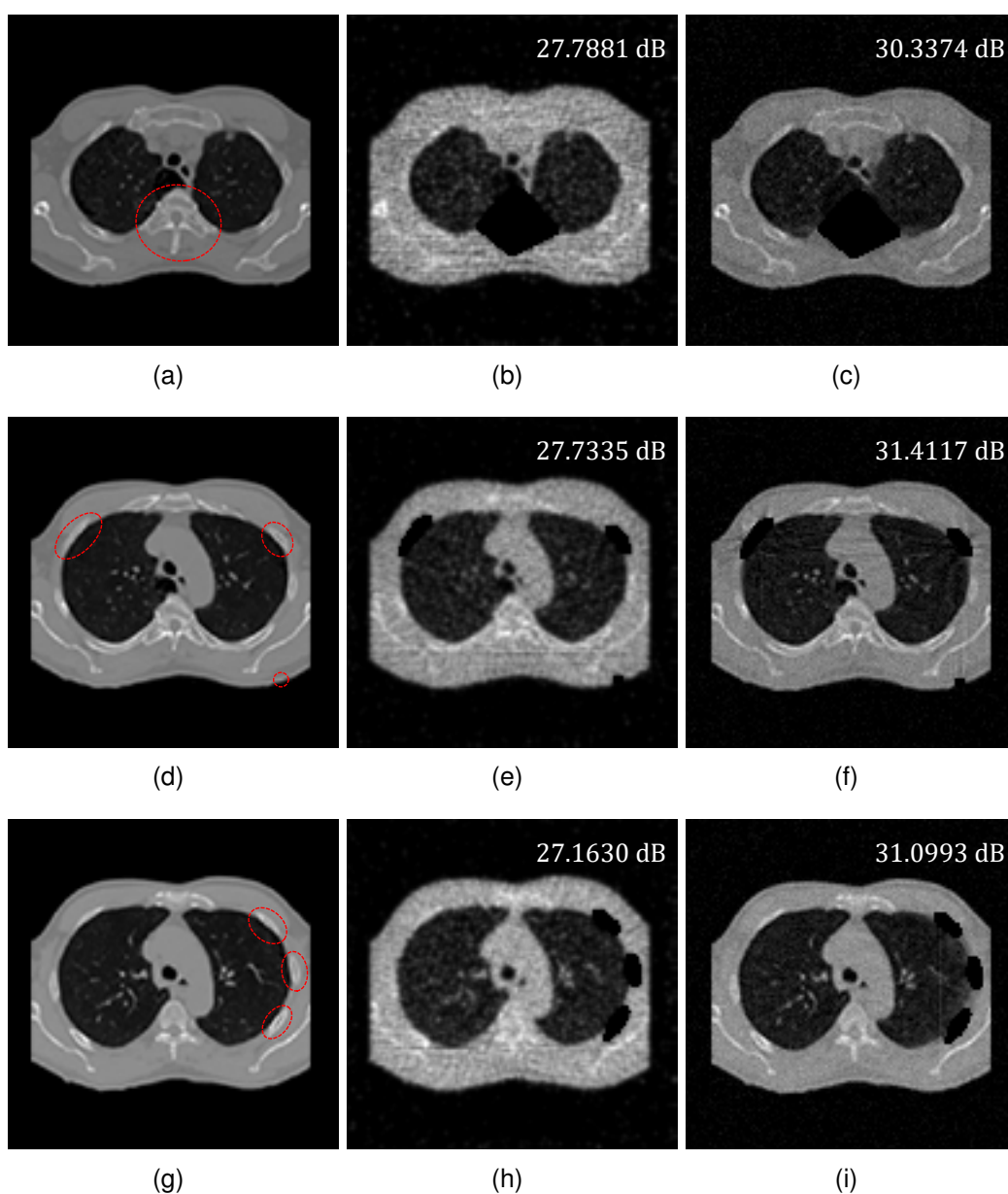
**Figura 28:** (a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 1, 4 y 9 de la figura 24, respectivamente, donde la región encerrada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 100 % de las medidas.



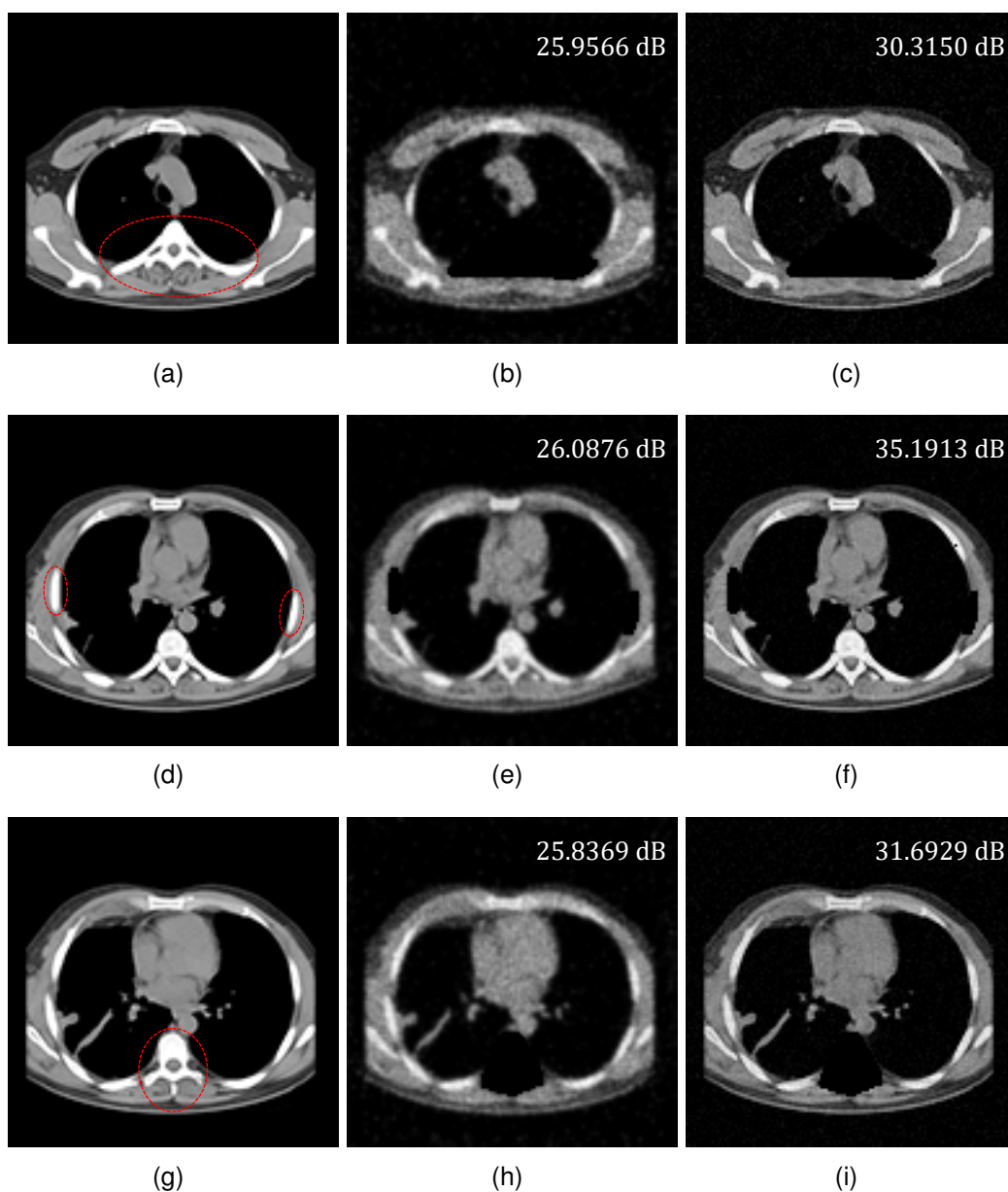
**Figura 29:** (a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 2, 4 y 5 de la figura 23, respectivamente, donde la región encerrada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 75% de las medidas y ruido agregado con  $SNR = 10\text{dB}$ .



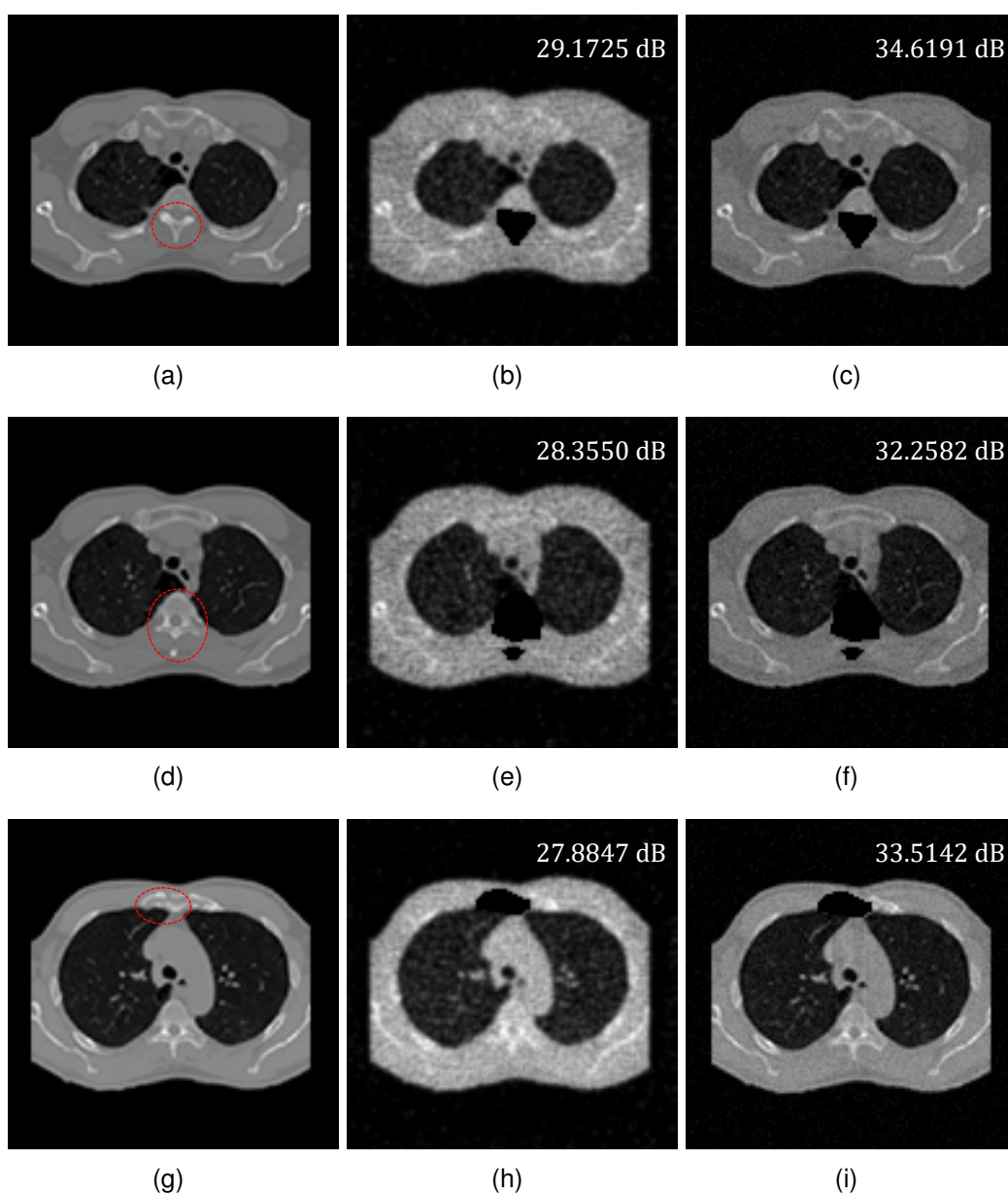
**Figura 30:** (a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 6, 10 y 12 de la figura 24, respectivamente, donde la región encerada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 75% de las medidas y ruido agregado con  $SNR = 10\text{dB}$ .



**Figura 31:** (a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 6, 10 y 12 de la figura 23, respectivamente, donde la región encerada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 100% de las medidas y ruido agregado con  $SNR = 10\text{dB}$ .



**Figura 32:** (a), (d) y (g) representan las imágenes originales de las secciones transversales 4, 7 y 11 de la figura 24, respectivamente, donde la región encerada indica el objeto con alta densidad. (b), (e) y (h) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método tradicional. (c), (f) e (i) corresponden a las imágenes reconstruidas con el método propuesto. Cabe aclarar que estas imágenes reconstruidas se obtuvieron con el 100% de las medidas y ruido agregado con  $SNR = 10\text{dB}$ .



## 7. CONCLUSIONES

- Con una adquisición de solo el 12.5 % de las proyecciones es posible identificar los elementos de mayor atenuación en el objeto.
- La metodología propuesta permite obtener una ganancia desde 1 dB hasta 10 dB con una compresión del 75 % y 100 % en las medidas sin ruido, comparado con las aperturas codificadas aleatorias.
- La metodología propuesta conserva una ganancia desde 2 dB hasta 8 dB con una compresión del 75 % y 100 % en las medidas para un nivel de ruido de 10 dB, comparado con aperturas codificadas aleatorias.
- El problema de optimización planteado permite encontrar aperturas codificadas que mejoran la calidad de las imágenes CT reconstruidas.
- El diseño de aperturas codificadas basado en la distribución uniforme de los elementos de paso permite obtener imágenes CT con mejor calidad de reconstrucción que las aperturas aleatorias.

## REFERENCIAS

- [1] O. Barkan, J. Weill, A. Averbuch, and S. Dekel. Adaptive compressed tomography sensing. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 2195–2202, 2013.
- [2] T. M. Buzug. *Computed tomography: from photon statistics to modern cone-beam CT*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [3] M. A. Davenport, P. T. Boufounos, M. B. Wakin, and R. G. Baraniuk. Signal processing with compressive measurements. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 4(2):445–460, 2010.
- [4] M P. Heilbrun, T. S. Roberts, M. L. Apuzzo, T. H. Wells, and J. K. Sabshin. Preliminary experience with brown-roberts-wells (brw) computerized tomography stereotaxic guidance system. *Journal of neurosurgery*, 59(2):217–222, 1983.
- [5] R. Smith-Bindman, J. Lipson, R. Marcus, K. Kim, M. Mahesh, R. Gould, A. B. De González, and D. L. Miglioretti. Radiation dose associated with common computed tomography examinations and the associated lifetime attributable risk of cancer. *Archives of internal medicine*, 169(22):2078–2086, 2009.
- [6] National Research Council et al. *Health risks from exposure to low levels of ionizing radiation: BEIR VII phase 2*, volume 7. National Academies Press, 2006.
- [7] D. J. Brenner, C. D. Elliston, E. J. Hall, and W. E. Berdon. Estimated risks of radiation-induced fatal cancer from pediatric ct. *American journal of roentgenology*, 176(2):289–296, 2001.
- [8] E. J. Candès and M. B. Wakin. An introduction to compressive sampling. *IEEE signal processing magazine*, 25(2):21–30, 2008.
- [9] D. L. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Transactions on information theory*, 52(4):1289–1306, 2006.
- [10] D. J. Brady, A. Mrozack, K. MacCabe, and P. Llull. Compressive tomography. *Advances in Optics and Photonics*, 7(4):756–813, 2015.
- [11] K. Choi and D. J. Brady. Coded aperture computed tomography. In *SPIE Optical Engineering+ Applications*, pages 74680B–74680B. International Society for Optics and Photonics, 2009.
- [12] D. J. Brady, D. L. Marks, K. P. MacCabe, and J. A. O’Sullivan. Coded apertures for x-ray scatter imaging. *Applied optics*, 52(32):7745–7754, 2013.
- [13] Y. Kaganovsky, D. Li, A. Holmgren, H. Jeon, K. P. MacCabe, D. G. Politte, J. A. O’Sullivan, L. Carin, and D. J. Brady. Compressed sampling strategies for tomography. *JOSA A*, 31(7):1369–1394, 2014.

- 
- [14] J. Hsieh. Adaptive streak artifact reduction in computed tomography resulting from excessive x-ray photon noise. *Medical Physics*, 25(11):2139–2147, 1998.
- [15] J. M. Verburg and J. Seco. Ct metal artifact reduction method correcting for beam hardening and missing projections. *Physics in medicine and biology*, 57(9):2803, 2012.
- [16] H. Suk Park, D. Hwang, and Jin K. Seo. Metal artifact reduction for polychromatic x-ray ct based on a beam-hardening corrector. *IEEE transactions on medical imaging*, 35(2):480–487, 2016.
- [17] L. Gjestebj, B. De Man, Y. Jin, H. Paganetti, J. Verburg, D. Giantsoudi, and G. Wang. Metal artifact reduction in ct: Where are we after four decades? *IEEE Access*, 4:5826–5849, 2016.
- [18] T. Humphries and A. Faridani. Reconstruction of ct images from sparse-view polyenergetic data using total variation minimization. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2015 IEEE*, pages 1–5. IEEE, 2015.
- [19] G. L. Raff, M. J. Gallagher, W. W. O’Neill, and J. A. Goldstein. Diagnostic accuracy of noninvasive coronary angiography using 64-slice spiral computed tomography. *Journal of the American College of Cardiology*, 46(3):552–557, 2005.
- [20] H. Strecker. Automatic detection of explosives in airline baggage using elastic x-ray scatter. *Medicamundi*, 42:30–33, 1998.
- [21] F. H. Chung and D. K. Smith. *Industrial applications of X-ray diffraction*. CRC Press, 1999.
- [22] S. Pani, E. Cook, J. Horrocks, L. George, S. Hardwick, and R. Speller. Modelling an energy-dispersive x-ray diffraction system for drug detection. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 56(3):1238–1241, 2009.
- [23] S. Blau, S. Robertson, and M. Johnstone. Disaster victim identification: new applications for postmortem computed tomography. *Journal of forensic sciences*, 53(4):956–961, 2008.
- [24] G. A. Borkan, D. E. Hulst, S. G. Gerzof, A. H. Robbins, and C. K. Silbert. Age changes in body composition revealed by computed tomography. *Journal of gerontology*, 38(6):673–677, 1983.
- [25] R. Fajardo and R. Müller. Three-dimensional analysis of nonhuman primate trabecular architecture using micro-computed tomography. *American journal of physical anthropology*, 115(4):327–336, 2001.
- [26] M. J. Thali, U. Taubenreuther, M. Karolczak, M. Braun, W. Brueschweiler, W. A. Kalender, and R. Dirnhofer. Forensic microradiology: micro-computed

- 
- tomography (micro-ct) and analysis of patterned injuries inside of bone. *Journal of forensic sciences*, 48(6):1336–1342, 2003.
- [27] M. J. Thali, K. Yen, W. Schweitzer, P. Vock, C. Ozdoba, and R. Dirnhofer. Into the decomposed body—forensic digital autopsy using multislice-computed tomography. *Forensic science international*, 134(2):109–114, 2003.
- [28] M. Uda, G. Demortier, and I. Nakai. *X-rays for Archaeology*. Springer, 2005.
- [29] J. Hsieh. *Computed tomography: principles, design, artifacts, and recent advances*, volume 114. SPIE press, 2003.
- [30] A. M. Cormack. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. *Journal of applied physics*, 34(9):2722–2727, 1963.
- [31] G. N. Hounsfield. Method of and apparatus for examining a body by radiation such as x or gamma radiation. Technical report, 1975.
- [32] J. C. Ramírez, C. Arboleda, and C. H. McCollough. Tomografía computarizada por rayos x: fundamentos y actualidad. *Revista Ingeniería Biomédica*, 2(4):54–66, 2008.
- [33] S. G. Uribarri. Principios matemáticos de la reconstrucción de imágenes tomográficas. *CIENCIA ergo-sum*, 10(3):271–281, 2003.
- [34] E. Shefer, A. Altman, R. Behling, R. Goshen, L. Gregorian, Y. Roterman, I. Uman, N. Wainer, Y. Yagil, and O. Zarchin. State of the art of ct detectors and sources: a literature review. *Current Radiology Reports*, 1(1):76–91, 2013.
- [35] S Webb. A review of physical aspects of x-ray transmission computed tomography. *IEE Proceedings A (Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education, Reviews)*, 134(2):126–135, 1987.
- [36] Ó. J. Espitia, Y. H. Mejía, and H. Arguello. Tomografía computarizada: proceso de adquisición, tecnología y estado actual. *Revista Tecnura*, 20(47):119–135, 2016.
- [37] J. L. Prince and J. M. Links. *Medical imaging signals and systems*. Pearson Prentice Hall Upper Saddle River, New Jersey, 2006.
- [38] A. C. Kak and M. Slaney. *Principles of computerized tomographic imaging*. SIAM, 2001.
- [39] P. A. Hiles, S. E. Brennen, S. A. Scott, and J. H. Davies. A survey of patient dose and image quality for computed tomography scanners in wales. *Journal of Radiological Protection*, 21(4):345, 2001.

- 
- [40] A. B. González, M. Mahesh, K. Kim, M. Bhargavan, R. Lewis, F. Mettler, and C. Land. Projected cancer risks from computed tomographic scans performed in the united states in 2007. *Archives of internal medicine*, 169(22):2071–2077, 2009.
- [41] D. J. Brenner and E. J. Hall. Computed tomography—an increasing source of radiation exposure. *New England Journal of Medicine*, 357(22):2277–2284, 2007.
- [42] J. D. Mathews, A. V. Forsythe, Z. Brady, M. W. Butler, S. K. Goergen, G. B. Byrnes, G. Giles, A. B. Wallace, P. R. Anderson, T. A. Guiver, et al. Cancer risk in 680 000 people exposed to computed tomography scans in childhood or adolescence: data linkage study of 11 million australians. *Bmj*, 346:f2360, 2013.
- [43] K. Choi, J. Wang, L. Zhu, T. Suh, S. Boyd, and L. Xing. Compressed sensing based cone-beam computed tomography reconstruction with a first-order method. *Medical physics*, 37(9):5113–5125, 2010.
- [44] J. Bian, J. H. Siewerdsen, X. Han, E. Y Sidky, J. L. Prince, C. A. Pelizzari, and X. Pan. Evaluation of sparse-view reconstruction from flat-panel-detector cone-beam ct. *Physics in medicine and biology*, 55(22):6575, 2010.
- [45] A. P. Cuadros, G. .R Arce, and H. Arguello. Coded aperture design in compressive x-ray tomography. In *Signal and Information Processing (Global-SIP), 2014 IEEE Global Conference on*, pages 656–659. IEEE, 2014.
- [46] A. Cuadros, K. Wang, C. Peitch, H. Arguello, and G. Arce. Coded aperture design for compressive x-ray tomosynthesis. In *Computational Optical Sensing and Imaging*, pages CW2F–2. Optical Society of America, 2015.
- [47] N. Diaz, H. Rueda, and H. Arguello. High-dynamic range compressive spectral imaging by adaptive filtering. In *Compressed Sensing Theory and its Applications to Radar, Sonar and Remote Sensing (CoSeRa), 2015 3rd International Workshop on*, pages 89–93. IEEE, 2015.
- [48] D. Kittle, K. Choi, A. Wagadarikar, and D. J. Brady. Multiframe image estimation for coded aperture snapshot spectral imagers. *Applied optics*, 49(36):6824–6833, 2010.
- [49] S. K. Nayar and V. Branzoi. Adaptive dynamic range imaging: Optical control of pixel exposures over space and time. In *ICCV*, pages 1168–1175, 2003.
- [50] N. Diaz, H. Rueda, and H. Arguello. Adaptive uniform grayscale coded aperture design for high dynamic range compressive spectral imaging. In *SPIE Commercial+ Scientific Sensing and Imaging*, pages 98600A–98600A. International Society for Optics and Photonics, 2016.
- [51] L. W. Goldman. Principles of ct and ct technology. *Journal of nuclear medicine technology*, 35(3):115–128, 2007.

- 
- [52] A. Cuadros, C. Peitsch, H. Arguello, and G. Arce. Coded aperture optimization for compressive x-ray tomosynthesis. *Optics express*, 23(25):32788–32802, 2015.
- [53] W. Jan. Palenstijn, K. J. Batenburg, and J. Sijbers. The astra tomography toolbox. In *13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE*, volume 2013, 2013.
- [54] M. V. Afonso, J. M. Bioucas, and M. Figueiredo. A fast algorithm for the constrained formulation of compressive image reconstruction and other linear inverse problems. In *Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP), 2010 IEEE International Conference on*, pages 4034–4037. IEEE, 2010.

## BIBLIOGRAFÍA

- BARANIUK, Richard G. Compressive sensing. IEEE signal processing magazine, 2007, vol. 24, no 4.
- BARKAN, Oren, et al. Adaptive compressed tomography sensing. En Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2013. p. 2195-2202.
- BRADY, David J., et al. Coded apertures for x-ray scatter imaging. Applied optics, 2013, vol. 52, no 32, p. 7745-7754.
- BRADY, David J., et al. Compressive tomography. Advances in Optics and Photonics, 2015, vol. 7, no 4, p. 756-813.
- BUZUG, Thorsten M. Computed tomography: from photon statistics to modern cone-beam CT. Springer Science & Business Media, 2008.
- CANDÈS, Emmanuel J.; WAKIN, Michael B. An introduction to compressive sampling. IEEE signal processing magazine, 2008, vol. 25, no 2, p. 21-30.
- CHOI, Kerkil; BRADY, David J. Coded aperture computed tomography. En SPIE Optical Engineering+ Applications. International Society for Optics and Photonics, 2009. p. 74680B-74680B-10.
- CUADROS, Angela P.; ARCE, Gonzalo R.; ARGUELLO, Henry. Coded aperture design in compressive X-ray tomography. En Signal and Information Processing (GlobalSIP), 2014 IEEE Global Conference on. IEEE, 2014. p. 656-659.
- DONOHO, David L. Compressed sensing. IEEE Transactions on information theory, 2006, vol. 52, no 4, p. 1289-1306.
- HSIEH, Jiang. Computed tomography: principles, design, artifacts, and recent advances. SPIE press, 2003.
- KAGANOVSKY, Yan, et al. Compressed sampling strategies for tomography. JO-SA A, 2014, vol. 31, no 7, p. 1369-1394.
- PARK, Hyoung Suk; HWANG, Dosik; SEO, Jin Keun. Metal artifact reduction for polychromatic x-ray CT based on a beam-hardening corrector. IEEE transactions on medical imaging, 2016, vol. 35, no 2, p. 480-487.