

**SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN
PARA MODELOS COSMOLÓGICOS
INHOMOGÉNEOS**

JENRRY ALONSO JAIMES PRADA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA**

2004

**SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN
PARA MODELOS COSMOLÓGICOS
INHOMOGÉNEOS**

JENRRY ALONSO JAIMES PRADA

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ VILLEGAS, Ph. D.

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FISICA**

2004

*A mi madre,
Hilda Prada de Jaimes.*

*A mi padre,
Pedro José Jaimes Castellanos.*

*A mi gran amor,
María del Mar Calderón Goyeneche.*

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos a:

Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas. Por haber aceptado ser mi director, por haberme brindado sus conocimientos y su amistad. Por los tintos y cigarrillos que acompañaron este trabajo.

Al Dr. José David Sanabria. Por su mente abierta ante cualquier visicitud, por siempre estar dispuesto a ir un poco más allá. Por su método mayeutico.

Al Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG). A Paolo Ospina a Antonio Gutierrez y en especial a mis amigos Framsol López y Jerson Reina que me acompañaron durante casi todo el proceso de la carrera...en la buenas y en las malas.

A la Universidad Industrial de Santander.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método mediante el cual se obtienen soluciones exactas simples de las ecuaciones de Einstein para modelos cosmológicos inhomogéneos. El método está basado en la introducción de funciones auxiliares que permiten escribir las ecuaciones de Einstein en forma tal que es posible integrarlo explícitamente y encontrar soluciones que se pueden expresar en términos de funciones simples de las coordenadas utilizadas.

Se considera el caso en el cual el fluido cósmico satisface la ecuación de estado $p = \rho$. Las ecuaciones resultantes se integran explícitamente y se encuentra una solución general acorde con las consideraciones hechas. La solución general se analiza posteriormente considerando en detalle las dos familias de soluciones particulares contenidas en ésta, restringiendo los valores de los parámetros a fin de obtener un comportamiento físicamente aceptable. El comportamiento de los modelos obtenidos se estudia mediante un análisis gráfico de las correspondientes densidades.

ABSTRACT

A method is presented to obtain exact simple solutions of Einstein equations corresponding to inhomogeneous cosmological models. The method is based in the introduction of auxiliary functions in order to cast the Einstein equations in such a way that can be explicitly integrated. Solutions can be obtained that are expressed in terms of simple functions of the used coordinates.

The case considered correspond to a cosmic fluid with state equation given by $p = \rho$. The resulting equations are explicitly integrated and a general solution is obtained agree with the assumed considerations. The general solution is then analyzed by considering the two specific families of particular solutions. The parameters are restricted in order to have a physically acceptable behaviour. The behaviour of the models is studied by means of a graphical analysis of the corresponding densities.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. MODELOS COSMOLÓGICOS INHOMOGENEOS	4
1.1. INTRODUCCIÓN	4
1.2. DINÁMICA DEL MODELO	5
1.3. FLUÍDO CÓSMICO IRROTACIONAL	7
2. SOLUCIÓN GENERAL DEL MODELO	10
2.1. INTRODUCCIÓN	10
2.2. LINEALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE EVOLUCIÓN	11
2.3. REDUCCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES	15
2.4. SOLUCIÓN GENERAL DEL MODELO	17
3. ALGUNOS MODELOS PARTICULARES	20

3.1. INTRODUCCIÓN	20
3.2. PRIMERA FAMILIA DE SOLUCIONES	21
3.3. SEGUNDA FAMILIA DE SOLUCIONES	22
CONCLUSIONES	30
BIBLIOGRAFÍA	32

LISTA DE FIGURAS

3.1. Gráficas de la densidad ρ en función del tiempo t para la primera familia de soluciones tomando $\kappa = 2$ y $k_2 = 1, 0.5, -0.5, -1$ y -2 , respectivamente.	23
3.2. Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = 0.05$	25
3.3. Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = 0.5$	26
3.4. Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = 2.5$	26
3.5. Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = 20$	27
3.6. Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = -0.05$	27
3.7. Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = -0.5$	28

3.8. Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = -5$	28
3.9. Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = -50$	29

INTRODUCCIÓN

Un problema importante en la teoría general de la relatividad es el de la obtención de soluciones exactas de las Ecuaciones de Einstein que correspondan a configuraciones físicamente aceptables [1]; ahora bien, dentro del estudio de dichas soluciones existen básicamente dos clases de problemas: la obtención de soluciones y la interpretación física de estas.

Debido a la naturaleza de las ecuaciones de Einstein, un sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales parciales, la obtención de soluciones exactas es un problema sorprendentemente complicado, el cual ha sido sólo resuelto en casos simples altamente simétricos; es por esto que el trabajo de investigación sobre el problema de la obtención de soluciones exactas se concreta básicamente, de una parte, en encontrar nuevas soluciones de las ecuaciones de Einstein y, de otra parte, en desarrollar técnicas de generación de soluciones exactas, las cuales no solo conllevan a importantes resultados ya conocidos, sino que también generan nuevas soluciones [2].

Desde su formación el Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG) ha dirigido sus esfuerzos a la obtención e interpretación de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein para el caso de espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos. La ventaja de considerar esta clase de soluciones

radica en que la simetría del tensor métrico garantiza que las Ecuaciones de Einstein constituyen un sistema completamente integrable de ecuaciones diferenciales parciales [3, 4]. Como resultado de este programa de investigación, se han obtenido resultados tanto en la obtención de soluciones exactas [5 - 13], como en la dirección de su interpretación en términos de modelos relativistas de discos [14 - 24].

Como consecuencia del trabajo realizado en el estudio de espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos, el GIRG ha adquirido una experiencia en el manejo de ciertos métodos necesarios para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente. Dichos métodos se basan en la introducción de algunas funciones auxiliares que permiten llevar el sistema de ecuaciones diferenciales a una forma tal que es posible integrarlo explícitamente y encontrar soluciones que pueden expresarse en términos de funciones simples de las coordenadas utilizadas.

El GIRG pretende actualmente utilizar esta experiencia para aplicar dichos métodos a otra clase de espacio-tiempos con otra clase de simetrías que satisfagan un sistema de ecuaciones diferenciales solucionable de un modo equivalente. Un caso de espacio-tiempos a los cuales pueden aplicarse dichos métodos son los correspondientes a los modelos cosmológicos inhomogéneos, construídos partiendo de una métrica tipo Einstein-Rosen [1], la cual es diagonal y sólo depende de las coordenadas t y r , donde t es una coordenada temporal y r toma valores en el rango $[0, \infty)$.

El objetivo principal de este trabajo es obtener soluciones exactas simples de las ecuaciones de Einstein para modelos cosmológicos inhomogéneos cuyo contenido de materia está descrito por un tensor de momentum-energía con ecuación de estado $\rho = p$. De acuerdo con esto, en el capítulo 1 se presenta la

forma específica de la métrica considerada y se expresan las ecuaciones dinámicas del modelo en su forma general. Posteriormente se introduce la suposición de irrotacionalidad del fluido y se obtienen las expresiones correspondientes para la densidad del fluido, las ecuaciones de evolución y las ecuaciones de Einstein como consecuencia de dicha suposición.

En el capítulo 2 se encuentra una solución general para el sistema de ecuaciones de Einstein mediante un procedimiento que permite simplificar dicho sistema de ecuaciones y obtener soluciones explícitas en términos de funciones simples. Igualmente se obtienen expresiones para el tensor de momentum y energía y las variables del fluido y se resuelve el sistema de ecuaciones de Einstein en forma general. A continuación, en el capítulo 3, se analiza la solución general considerando en detalle dos familias de soluciones particulares y restringiendo los valores de las constantes de tal manera que la densidad y la velocidad presenten un comportamiento físicamente aceptable.

Capítulo 1

MODELOS COSMOLÓGICOS INHOMOGÉNEOS

1.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el formalismo necesario para obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein correspondientes a Modelos Cosmológicos Inhomogéneos. Tales modelos se obtienen considerando una métrica que represente un espacio-tiempo con dos vectores de Killing espaciales que conmutan [1] y tomando como fuente en las ecuaciones de Einstein un tensor de momentum-energía tipo fluido perfecto.

De acuerdo con lo anterior, en la sección 1.2, con base en la referencia [25], se presenta la forma específica de la métrica considerada y se expresan las ecuaciones dinámicas del modelo en su forma general para un fluido perfecto con ecuación de estado $p = \rho$. Posteriormente, en la sección 1.3, se introduce la suposición de irrotacionalidad del fluido y se obtienen las expresiones correspondientes para la densidad del fluido, las ecuaciones de evolución y las ecuaciones de Einstein como consecuencia de dicha suposición.

1.2. DINÁMICA DEL MODELO

Una métrica apropiada para el estudio de modelos cosmológicos inhomogéneos está dada, en coordenadas $x^\alpha = (t, r, \xi, \zeta)$, por (ver referencia [1])

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = e^{-2U} [e^{2\gamma} (-dt^2 + dr^2) + w^2 d\zeta^2] + e^{2U} d\xi^2, \quad (1.1)$$

donde las funciones U , γ y w dependen solamente de t y r . Las componentes del tensor métrico correspondiente pueden escribirse como:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -e^{2(\gamma-U)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(\gamma-U)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2U} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^2 e^{-2U} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

La naturaleza de las coordenadas es tal que r toma valores en el rango $[0, \infty)$, mientras que las coordenadas ξ y ζ toman valores en el intervalo finito $[0, 2\pi)$, como consecuencia de que las hipersuperficies $t = \text{const.}$ son compactas (ver referencia [1]).

El contenido de materia del universo se describe a través de un fluido perfecto cuyo tensor de momentum-energía puede escribirse como

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}, \quad (1.3)$$

donde ρ es la densidad del fluido, p su presión y u^α el vector velocidad, el cual satisface la condición de normalización

$$u^\alpha u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1. \quad (1.4)$$

La relación entre ρ y p está dada por una ecuación de estado general de la forma $p = p(\rho)$, de la cual sólo tomaremos el caso particular $p = \rho$, con el fin de obtener un sistema de ecuaciones fácilmente integrable, como veremos más adelante.

La dinámica del modelo cosmológico está determinada por las ecuaciones de Einstein,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}, \quad (1.5)$$

y las ecuaciones de evolución de la materia,

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad (1.6)$$

donde $R_{\alpha\beta}$ es el tensor de curvatura de Ricci, R es el escalar de curvatura y $(\)_{;\alpha}$ denota la derivada covariante con respecto a x^α . La ecuación (1.5) puede también escribirse en la forma equivalente

$$R_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T, \quad (1.7)$$

donde $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ es la traza del tensor de momentum-energía. Tomando el tensor de momentum-energía (1.3) se puede probar fácilmente que la ecuación (1.7) se reduce a

$$R_{\alpha\beta} = 2\rho u_\alpha u_\beta, \quad (1.8)$$

donde hemos tomado el caso particular $p = \rho$.

Las ecuaciones de evolución de la materia (1.6) pueden escribirse de una manera mas conveniente encontrando sus proyecciones en la dirección temporal y en la dirección espacial. La proyección en la dirección temporal se obtiene fácilmente multiplicando la ecuación (1.6) por el vector velocidad del fluido, u^α . Dado que

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 2\rho_{;\beta}u^\alpha u^\beta + 2\rho[u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta + u^\alpha u^\beta{}_{;\beta}] + \rho_{;\beta}g^{\alpha\beta}, \quad (1.9)$$

y teniendo en cuenta la condición de normalización (1.4), la proyección temporal de las ecuaciones de evolución toma la forma

$$\rho_{;\beta}u^\beta + 2\rho u^\beta{}_{;\beta} = 0; \quad (1.10)$$

esto es, la ecuación de continuidad relativista. Para obtener la proyección espacial de (1.6) introducimos el tensor de proyección espacial $h_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta}$, el cual satisface la condición $u_\alpha h^{\alpha\beta} = 0$. Multiplicando la expresión (1.9) por el tensor de proyección espacial, se obtiene

$$2\rho u^\beta u^\alpha{}_{;\beta} h^\mu_\alpha + \rho_{,\beta} g^{\beta\alpha} h^\mu_\alpha = 0, \quad (1.11)$$

la ecuación de Euler relativista.

1.3. FLUÍDO CÓSMICO IRROTACIONAL

Para la métrica (1.1), las componentes no nulas del tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$ son

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \gamma_{,rr} - \gamma_{,tt} + U_{,tt} - U_{,rr} - 2U_{,t}^2 \\ &\quad - w^{-1}(w_{,tt} - w_{,t}\gamma_{,t} - w_{,r}\gamma_{,r} - w_{,t}U_{,t} + w_{,r}U_{,r}), \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \gamma_{,tt} - \gamma_{,rr} + U_{,rr} - U_{,tt} - 2U_{,r}^2 \\ &\quad - w^{-1}(w_{,rr} - w_{,t}\gamma_{,t} - w_{,r}\gamma_{,r} + w_{,t}U_{,t} - w_{,r}U_{,r}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$R_{tr} = w^{-1}(w_{,r}\gamma_{,t} + w_{,t}\gamma_{,r} - w_{,tr}) - 2U_{,t}U_{,r}, \quad (1.14)$$

$$R_{\xi\xi} = e^{2(2U-\gamma)}[U_{,tt} - U_{,rr} + w^{-1}(w_{,t}U_{,t} - w_{,r}U_{,r})], \quad (1.15)$$

$$R_{\zeta\zeta} = we^{-2\gamma}[w_{,tt} - w_{,rr} + w(U_{,rr} - U_{,tt}) - w_{,t}U_{,t} + w_{,r}U_{,r}], \quad (1.16)$$

donde $()_{,\alpha}$ denota la derivada parcial con respecto a x^α .

De acuerdo con esto, las ecuaciones (1.8) implican que $u_\xi = u_\zeta = 0$; es

decir, que el vector velocidad del fluido toma la forma

$$u^\alpha = (u^t, u^r, 0, 0), \quad (1.17)$$

con u^t y u^r sujetos a la condición de normalización (1.4). Suponiendo entonces que el fluido es irrotacional, podemos introducir un potencial escalar Φ , el cual sólo depende de t y r , de tal manera que el vector velocidad del fluido se puede expresar como [25]

$$u_\alpha = \frac{\Phi_{,\alpha}}{(-\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})^{1/2}}, \quad (1.18)$$

de modo que satisface directamente la condición de normalización (1.4).

La derivada covariante del vector velocidad se puede escribir entonces en términos del potencial escalar Φ como

$$u_{;\beta}^\alpha = \left[\frac{\Phi_{,\alpha}}{(-\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})^{1/2}} \right]_{;\beta} = \frac{\Phi_{;\beta}^\alpha}{(-\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})^{1/2}} + \frac{\Phi_{,\alpha}(\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})_{,\beta}}{2(-\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})^{3/2}}, \quad (1.19)$$

de modo que, reemplazando en la ecuación (1.10), y teniendo en cuenta que $u_\alpha h^{\alpha\beta} = 0$ implica que $\Phi_{,\alpha} h^{\alpha\beta} = 0$, se obtiene

$$\frac{2\rho\Phi^{,\beta}\Phi_{,\alpha;\beta}h^{\mu\alpha}}{\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu}} = \rho_{,\beta}h^{\mu\beta}. \quad (1.20)$$

Ahora bien, dado que el fluido es irrotacional, $\Phi_{,\alpha;\beta} - \Phi_{,\beta;\alpha} = 0$, se cumple que $\Phi^{,\alpha}\Phi_{,\alpha;\beta} = \Phi^{,\beta}\Phi_{,\beta;\alpha}$ y, por lo tanto,

$$u^{\beta}u_{\beta;\alpha} = \frac{\Phi^{,\beta}}{(-\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})^{1/2}} \left[\frac{\Phi_{,\beta;\alpha}}{(-\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})^{1/2}} + \frac{\Phi_{,\beta}(\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})_{,\alpha}}{2(-\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})^{3/2}} \right]; \quad (1.21)$$

así entonces, la ecuación (1.20) se puede escribir finalmente como

$$\frac{\rho(\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})_{,\alpha}h_\mu^\alpha}{(\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})} = \rho_{,\alpha}h_\mu^\alpha, \quad (1.22)$$

que corresponde a la parte temporal de la ecuación de evolución.

Es fácil ver que la ecuación (1.22) se satisface idénticamente tomando (ver [25]),

$$\rho = -\frac{1}{2}(\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu})F(\Phi), \quad (1.23)$$

donde $F(\Phi)$ es una función arbitraria del potencial escalar Φ . Tomando entonces la derivada covariante de esta expresión, tenemos

$$\rho_{,\beta} = -\frac{1}{2} \left[F'(\Phi) \Phi_{,\beta} (\Phi_{,\mu} \Phi^{,\mu}) + F(\Phi) (\Phi_{,\mu} \Phi^{,\mu})_{,\beta} \right], \quad (1.24)$$

y así, usando (1.19) y haciendo un poco de álgebra, podemos reescribir la ecuación (1.10) como:

$$2F(\Phi) \Phi_{;\alpha}^{\alpha} + F'(\Phi) (\Phi_{,\mu} \Phi^{,\mu}) = 0. \quad (1.25)$$

Ahora bien, usando (1.23), el tensor de momentum-energía puede escribirse como

$$T_{\alpha\beta} = F(\Phi) \left[\Phi_{,\alpha} \Phi_{,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \Phi_{,\mu} \Phi^{,\mu} \right], \quad (1.26)$$

de modo que

$$T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T = F(\Phi) \Phi_{,\alpha} \Phi_{,\beta}. \quad (1.27)$$

Usando entonces este último resultado, o equivalentemente la ecuación (1.8), las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$R_{\alpha\beta} = F(\Phi) \Phi_{,\alpha} \Phi_{,\beta}, \quad (1.28)$$

donde los $R_{\alpha\beta}$ están dados por las expresiones (1.12) - (1.16).

Capítulo 2

SOLUCIÓN GENERAL DEL MODELO

2.1. INTRODUCCIÓN

Vamos ahora a encontrar, en este capítulo, una solución general para el sistema de ecuaciones de Einstein mediante un procedimiento que permite simplificar dicho sistema de ecuaciones y obtener soluciones explícitas en términos de funciones simples. De acuerdo con esto, en la sección 2.2 se introduce un potencial escalar auxiliar que permite linealizar la proyección temporal de la ecuación de evolución. Igualmente se obtienen expresiones para el tensor de momentum y energía y las variables del fluido en términos de dicho potencial. En dicha sección se reescribe también el sistema de ecuaciones de Einstein utilizando el potencial escalar auxiliar para simplificar dicho sistema.

A continuación, en la sección 2.3, se obtiene una solución general para la ecuación de onda clásica que permite reducir el sistema de ecuaciones de Einstein a un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales acopladas, cuya solución está garantizada dado que las condiciones de integrabilidad del sistema

están expresadas en términos de la ecuación de onda. Finalmente, en la sección 2.4, se resuelve el sistema anterior por medio del método de separación de variables y se obtienen las expresiones generales para la densidad y la velocidad del fluido.

2.2. LINEALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE EVOLUCIÓN

En términos de la métrica (1.1), la norma del gradiente de Φ está dada por

$$\Phi_{,\mu}\Phi^{,\mu} = e^{-2(\gamma-U)}(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,t}^2), \quad (2.1)$$

mientras que la derivada covariante del gradiente de Φ se expresa como

$$\Phi_{;\mu}^{\alpha} = e^{2(U-\gamma)}\{\Phi_{,rr} - \Phi_{,tt} - w^{-1}w_{,t}\Phi_{,t} + w^{-1}w_{,r}\Phi_{,r}\}; \quad (2.2)$$

por lo tanto, la ecuación (1.10) finalmente toma la forma

$$\Phi_{,rr} - \Phi_{,tt} + w^{-1}(w_{,r}\Phi_{,r} - w_{,t}\Phi_{,t}) + \frac{F'(\Phi)}{F(\Phi)}(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,t}^2) = 0; \quad (2.3)$$

una ecuación diferencial parcial no lineal para el potencial escalar Φ .

Con el fin de simplificar la ecuación anterior, vamos a eliminar el término cuadrático en las primeras derivadas del potencial Φ . Para tal fin, supongamos que $\Phi = \Phi(\psi)$, donde ψ es un nuevo potencial escalar, de modo que

$$\Phi_{,\alpha} = \Phi' \psi_{,\alpha}$$

y

$$\Phi_{,\alpha\alpha} = \Phi' \psi_{,\alpha\alpha} + \Phi'' \psi_{,\alpha}^2$$

con lo cual la ecuación (2.3) toma la forma

$$\psi_{,rr} - \psi_{,tt} + w^{-1}(w_{,r}\psi_{,r} - w_{,t}\psi_{,t}) + \left[\frac{\Phi''}{\Phi'} + \frac{F'(\Phi)}{F(\Phi)}\Phi' \right] (\psi_{,r}^2 - \psi_{,t}^2) = 0; \quad (2.4)$$

así, con el fin de linealizar esta ecuación, se debe escoger la función $\Phi(\psi)$ de tal manera que el término entre corchetes sea cero. Usando entonces este resultado, la ecuación (2.4) toma la forma

$$\psi_{,rr} - \psi_{,tt} + w^{-1}(w_{,r}\psi_{,r} - w_{,t}\psi_{,t}) = 0, \quad (2.5)$$

que puede escribirse de manera compacta como

$$(w\psi_{,r})_{,r} - (w\psi_{,t})_{,t} = 0. \quad (2.6)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$\frac{dF}{d\psi} = \frac{dF}{d\Phi} \frac{d\Phi}{d\psi} = F'(\Phi)\Phi',$$

la condición de linealización de la ecuación (2.4) toma la forma

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} + \frac{1}{F} \frac{dF}{d\psi} = 0, \quad (2.7)$$

una ecuación diferencial ordinaria que puede resolverse fácilmente mediante separación de variables. La ecuación anterior puede escribirse como

$$\frac{d\Phi'}{\Phi'} + \frac{dF}{F} = 0; \quad (2.8)$$

es decir,

$$d\ln(\Phi'F) = 0, \quad (2.9)$$

lo que implica que $\Phi'F = a$, donde a es una constante arbitraria, diferente de cero.

Integrando ahora la ecuación $d\Phi/d\psi = a/F$, obtenemos finalmente

$$\int F(\Phi)d\Phi = a\psi, \quad (2.10)$$

donde la constante de integración arbitraria se toma igual a cero. Ahora bien, dado que $F(\Phi)$ es arbitraria, vamos a considerar la posibilidad mas simple

con el fin de que las ecuaciones diferenciales que obtendremos mas adelante puedan resolverse fácilmente. De acuerdo con esto, vamos a tomar el caso en que $F(\Phi) = (a/b)$, donde b es una constante arbitraria, diferente de cero, de tal manera que la ecuación (2.10) implica que

$$\Phi(\psi) = b\psi; \quad (2.11)$$

es decir, tomamos los dos potenciales escalares proporcionales.

Finalmente, podemos expresar el tensor de momentum y energía y la densidad del fluido en términos de las funciones auxiliares Φ y ψ de la forma

$$T_{\alpha\beta} = ab \left\{ \psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} \right\}, \quad (2.12)$$

y

$$\rho = - \left(\frac{ab}{2} \right) \psi_{,\mu}\psi^{,\mu}. \quad (2.13)$$

Igualmente, el vector velocidad del fluido se expresa como

$$u_{\alpha} = \frac{\psi_{,\alpha}}{\sqrt{-\psi_{,\mu}\psi^{,\mu}}}. \quad (2.14)$$

De acuerdo con lo anterior, la velocidad espacial del fluido, definida como $v = u^r/u^t$, está dada por

$$v = - \frac{\psi_{,r}}{\psi_{,t}}, \quad (2.15)$$

como se puede ver fácilmente usando la métrica (1.1) y la expresión (2.14) para u_{α} .

Ahora bien, de acuerdo con (2.14),

$$F(\Phi)\Phi_{,\alpha}\Phi_{,\beta} = ab\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta}, \quad (2.16)$$

y así, usando (2.10), podemos escribir las ecuaciones de Einstein como

$$R_{\alpha\beta} = ab\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta}. \quad (2.17)$$

Usando entonces las expresiones (1.13) - (1.16) para las componentes no nulas del tensor de Ricci, las ecuaciones de Einstein y la ecuación de evolución son equivalentes al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{aligned} \gamma_{,t}w_{,t} + \gamma_{,r}w_{,r} &= w(U_{,t}^2 + U_{,r}^2) + \\ &\frac{1}{2} [abw(\psi_{,t}^2 + \psi_{,r}^2) + (w_{,tt} + w_{,rr})], \end{aligned} \quad (2.18a)$$

$$\gamma_{,t}w_{,r} + \gamma_{,r}w_{,t} = 2wU_{,t}U_{,r} + abw\psi_{,t}\psi_{,r} + w_{,tr}, \quad (2.18b)$$

$$(wU_{,r})_{,r} - (wU_{,t})_{,t} = 0, \quad (2.18c)$$

$$(w\psi_{,r})_{,r} - (w\psi_{,t})_{,t} = 0, \quad (2.18d)$$

$$w_{,rr} - w_{,tt} = 0. \quad (2.18e)$$

Como se puede observar, la ecuación (2.18e) es la ecuación de onda clásica unidimensional. Por otro lado, las ecuaciones (2.18c) y (2.18d) son equivalentes, de modo que las soluciones de (2.18d) serán también soluciones de (2.18c); es decir, podemos suponer que $U(t, r) = \psi(t, r)$, reduciendo así el sistema a cuatro ecuaciones diferenciales parciales no-lineales acopladas.

Ahora bien, dada una solución para $w(t, r)$, la ecuación (2.18d) puede expresarse apropiadamente de forma tal que sus soluciones pueden obtenerse mediante el método de separación de variables. Finalmente, es fácil ver que las condiciones de integrabilidad del sistema sobre-determinado (2.18a) - (2.18b) están dadas por las ecuaciones (2.18c) - (2.18e), lo cual garantiza la existencia de soluciones del sistema completo de ecuaciones de Einstein.

2.3. REDUCCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (2.18) tomaremos inicialmente la solución de la ecuación de ondas clásica unidimensional (2.18e) expresada en términos de la solución de D'Alembert

$$w(t, z) = \alpha(t + r) \pm \beta(t - r), \quad (2.19)$$

donde α y β son funciones arbitrarias. Dos casos simples particularmente interesantes de la solución anterior se obtienen tomando

$$\alpha(t + r) = \frac{(t + r)}{2}, \quad (2.20a)$$

$$\beta(t - r) = \frac{(t - r)}{2}, \quad (2.20b)$$

lo cual conduce a las dos soluciones independientes

$$w(t, z) = t, \quad (2.21a)$$

$$w(t, r) = r. \quad (2.21b)$$

A pesar de su simplicidad, estas dos soluciones son de interés y han sido estudiadas por diferentes autores, ver por ejemplo las referencias [1, 25, 26].

Considerando inicialmente el caso (2.21a) y tomando $U(t, r) = \psi(t, r)$, las ecuaciones (2.18a) - (2.18e) se reducen al sistema

$$\psi_{,rr} - \psi_{,tt} - \frac{1}{t}\psi_{,t} = 0. \quad (2.22a)$$

$$\gamma_{,t} = t \left[1 + \frac{ab}{2} \right] (\psi_{,t}^2 + \psi_{,r}^2), \quad (2.22b)$$

$$\gamma_{,r} = 2t \left[1 + \frac{ab}{2} \right] \psi_{,t}\psi_{,r}, \quad (2.22c)$$

Considerando ahora el caso (2.21b), y tomando igualmente $U(t, r) = \psi(t, r)$, las ecuaciones (2.18a) - (2.18e) se reducen al sistema

$$\psi_{,tt} - \psi_{,rr} - \frac{1}{r}\psi_{,r} = 0. \quad (2.23a)$$

$$\gamma_{,r} = r \left[1 + \frac{ab}{2} \right] (\psi_{,t}^2 + \psi_{,r}^2), \quad (2.23b)$$

$$\gamma_{,t} = 2r \left[1 + \frac{ab}{2} \right] \psi_{,t}\psi_{,r}, \quad (2.23c)$$

Vemos entonces que en los dos casos obtenemos sistemas de ecuaciones diferenciales equivalentes, en los cuales las ecuaciones (2.22a) y (2.23a) constituyen la condición de integrabilidad de los subsistemas (2.22b) - (2.22c) y (2.23b) - (2.23c), lo cual garantiza la existencia de soluciones para el sistema completo de ecuaciones.

De acuerdo con lo anterior, podemos escribir los dos sistemas de ecuaciones anteriores en la forma general

$$\psi_{,yy} - \psi_{,xx} - \frac{1}{x}\psi_{,x} = 0, \quad (2.24a)$$

$$\gamma_{,x} = \kappa x (\psi_{,x}^2 + \psi_{,y}^2), \quad (2.24b)$$

$$\gamma_{,y} = 2\kappa x \psi_{,x}\psi_{,y}, \quad (2.24c)$$

donde $\kappa = 1 + (ab)/2 \neq 1$, de tal manera que el sistema de ecuaciones (2.22) se obtiene tomando $(x, y) = (t, r)$ y el sistema de ecuaciones (2.23) se obtiene

tomando $(x, y) = (r, t)$. Con el fin de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (2.24) se debe en primer lugar resolver la ecuación (2.24a), lo cual se puede hacer fácilmente mediante el método de separación de variables, y posteriormente utilizar la solución correspondiente para integrar el sistema de ecuaciones (2.24b) - (2.24c).

2.4. SOLUCIÓN GENERAL DEL MODELO

Vamos a resolver ahora la ecuación (2.24a), la cual puede escribirse convenientemente en la forma

$$\psi_{,yy} = \psi_{,xx} + \frac{1}{x}\psi_{,x}, \quad (2.25)$$

y es equivalente a la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas para un sistema con simetría axial. Con el fin de resolver la ecuación anterior suponemos que la función $\psi(x, y)$ puede escribirse en la forma

$$\psi(x, y) = A(x) + B(y), \quad (2.26)$$

de tal manera que $A(x)$ y $B(y)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$A''(x) + \frac{A'(x)}{x} = k_1, \quad (2.27)$$

$$B''(y) = k_1, \quad (2.28)$$

donde k_1 es una constante de separación arbitraria.

De acuerdo con lo anterior, la solución de la ecuación (2.25) está dada por

$$\psi(x, y) = \frac{k_1}{4}(x^2 + 2y^2) + k_2 \ln x + k_3 y, \quad (2.29)$$

donde k_2 y k_3 son constantes de integración y la constante de integración adicional la hemos tomado igual a cero. Usando entonces esta solución para

$\psi(x, y)$, el sistema de ecuaciones (2.24b) - (2.24c) se puede integrar fácilmente, de tal manera que la solución está dada por

$$\begin{aligned} \gamma(x, y) = & \frac{\kappa}{2}(k_1x^2 + 2k_2)(k_1y^2 + 2k_3y) + \frac{\kappa k_1^2 x^4}{16} \\ & + (k_1k_2 + k_3)\frac{\kappa x^2}{2} + \kappa k_2^2 \ln x. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Las ecuaciones (2.29) y (2.30), junto con las soluciones (2.21a) y (2.21b) y la identificación $U(t, r) = \psi(t, r)$, determinan completamente el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, de acuerdo con la ecuación (1.2).

Teniendo entonces la solución para $\psi(x, y)$, podemos obtener la densidad del fluido mediante la ecuación (2.13), que en términos de las variables (x, y) toma la forma

$$\rho = \pm (\kappa - 1) (\psi_{,x}^2 - \psi_{,y}^2) e^{2(\psi-\gamma)}, \quad (2.31)$$

donde el signo positivo corresponde al caso en que $(x, y) = (t, r)$, mientras que el signo negativo al caso en que $(x, y) = (r, t)$. Utilizando la expresión (2.29) para $\psi(x, y)$, tenemos

$$\rho = \pm (\kappa - 1) e^{2(\psi-\gamma)} \left[\frac{k_1^2 x^2}{4} + \frac{k_2^2}{x^2} - k_1 (k_1 y^2 + 2k_3 y) + k_1 k_2 - k_3^2 \right], \quad (2.32)$$

donde el factor exponencial está dado por

$$\begin{aligned} e^{2(\psi-\gamma)} = & x^{2k_2(1-\kappa k_2)} \exp \left\{ 4(k_1 - 2k_1 k_2 - 2k_3) x^2 - \kappa k_1^2 x^4 \right. \\ & \left. + 8(k_1 y + 2k_3)(1 - 2\kappa k_2 - \kappa k_1 x^2) y \right\} / 16, \end{aligned}$$

quedando así completamente especificada la densidad ρ en términos de las variables (x, y) .

El vector velocidad del fluido, u_α , puede calcularse entonces utilizando la

ecuación (2.14), la cual puede escribirse convenientemente como

$$u_\alpha = \left[\frac{\kappa - 1}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \psi_{,\alpha}, \quad (2.33)$$

de tal manera que queda expresado en términos de la densidad ρ y las derivadas del potencial escalar ψ . Así entonces,

$$u_x = \left[\frac{\kappa - 1}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_1 x}{2} + \frac{k_2}{x} \right), \quad (2.34a)$$

$$u_y = \left[\frac{\kappa - 1}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} (k_1 y + k_3), \quad (2.34b)$$

con ρ dado por la ecuación (2.32).

Finalmente, la velocidad espacial v se puede obtener usando la ecuación (2.15), obteniéndose las expresiones

$$v = - \frac{2x(k_1 y + k_3)}{k_1 x^2 + 2k_2}, \quad (2.35)$$

$$v = - \frac{k_1 x^2 + 2k_2}{2x(k_1 y + k_3)}, \quad (2.36)$$

donde el primer caso corresponde a tomar $(x, y) = (t, r)$ y el segundo caso a tomar $(x, y) = (r, t)$. Con esto quedan finalmente determinadas, de manera general, todas las cantidades que caracterizan el modelo cosmológico estudiado. En el siguiente capítulo consideraremos casos particulares de esta solución general y analizaremos su comportamiento.

Capítulo 3

ALGUNOS MODELOS PARTICULARES

3.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo vamos a analizar la solución general encontrada en el capítulo anterior, considerando en detalle los dos casos correspondientes a tomar $(x, y) = (t, r)$ y $(x, y) = (r, t)$. En la sección 3.2 consideramos la primera familia de soluciones, obtenida tomando $(x, y) = (t, r)$, y expresamos todas las cantidades que caracterizan esta familia de soluciones. A continuación restringimos los valores de las constantes de tal manera que la densidad y la velocidad presenten un comportamiento físicamente aceptable. Posteriormente, en la sección 3.3, consideramos la segunda familia de soluciones, obtenida tomando $(x, y) = (r, t)$, y nuevamente expresamos todas las cantidades que caracterizan esta familia de soluciones. Igualmente restringimos el valor de las constantes exigiendo un comportamiento físicamente aceptable para la densidad y la velocidad. Para ambas familias de soluciones realizamos un análisis gráfico del comportamiento de la densidad.

3.2. PRIMERA FAMILIA DE SOLUCIONES

Vamos a considerar inicialmente la familia de soluciones obtenida tomando $(x, y) = (t, r)$ en la solución general (2.29) y (2.30). De acuerdo con esto, las funciones $U(t, r)$ y $\gamma(t, r)$ toman la forma

$$U(t, r) = \frac{k_1}{4} (t^2 + 2r^2) + k_2 \ln t + k_3 r, \quad (3.1a)$$

$$\begin{aligned} \gamma(t, r) = & \frac{\kappa}{2} (k_1 t^2 + 2k_2)(k_1 r^2 + 2k_3 r) + \frac{\kappa k_1^2 t^4}{16} \\ & + (k_1 k_2 + k_3) \frac{\kappa t^2}{2} + \kappa k_2^2 \ln t, \end{aligned} \quad (3.1b)$$

donde hemos tomado $U(t, r) = \psi(t, r)$.

De igual manera, la densidad ρ se expresa como

$$\rho = (\kappa - 1) e^{2(U-\gamma)} \left[\frac{k_1^2 t^2}{4} + \frac{k_2^2}{t^2} - k_1 (k_1 r^2 + 2k_3 r) + k_1 k_2 - k_3^2 \right], \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} e^{2(U-\gamma)} = & t^{2k_2(1-\kappa k_2)} \exp \left\{ 4 (k_1 - 2k_1 k_2 - 2k_3) t^2 - \kappa k_1^2 t^4 \right. \\ & \left. + 8 (k_1 r + 2k_3) (1 - 2\kappa k_2 - \kappa k_1 t^2) r \right\} / 16, \end{aligned}$$

mientras que las componentes del vector velocidad son

$$u_t = \left[\frac{\kappa - 1}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_1 t}{2} + \frac{k_2}{t} \right), \quad (3.3a)$$

$$u_r = \left[\frac{\kappa - 1}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} (k_1 r + k_3), \quad (3.3b)$$

de modo que la velocidad espacial v está dada por

$$v = - \frac{2t(k_1 r + k_3)}{k_1 t^2 + 2k_2}, \quad (3.4)$$

quedando así determinadas todas las cantidades que caracterizan esta familia de soluciones.

Ahora bien, con el fin de tener una distribución de materia físicamente razonable, se debe tener que $\rho \geq 0$. Esta condición, combinada con las ecuaciones (3.3a) y (3.3b), implica que $\kappa > 1$. Analizando entonces la expresión (3.2), vemos que si se impone la condición

$$k_1 = k_3 = 0, \quad (3.5)$$

se garantiza que $\rho \geq 0$ para todo valor de t y r . Así entonces, la densidad toma la forma

$$\rho = k_2^2(\kappa - 1)t^{2(k_2 - \kappa k_2^2 - 1)}, \quad (3.6)$$

mientras que la velocidad espacial es $v = 0$, lo cual garantiza que el marco de referencia es comovil con el fluido. Ahora bien, dado que $(k_2 - 1)/k_2^2 < 1 < \kappa$, entonces el exponente de t en la expresión (3.6) será negativo para todo valor de k_2 , lo cual implica que existe una “singularidad inicial” y luego la densidad decrece monotonamente hasta anularse cuando $t \rightarrow \infty$.

Con el fin de ilustrar el comportamiento de la presente familia de soluciones, en la figura 3.1 se presentan algunas gráficas de la densidad ρ en función del tiempo t para las soluciones obtenidas tomando $\kappa = 2$ y $k_2 = 1, 0.5, -0.5, -1$ y -2 , respectivamente. Como se puede observar, la densidad decae muy rápidamente, independientemente del valor de las constantes escogidas.

3.3. SEGUNDA FAMILIA DE SOLUCIONES

Consideremos ahora la segunda familia de soluciones, la cual se obtiene tomando $(x, y) = (r, t)$ en la solución general (2.29) y (2.30). De acuerdo con

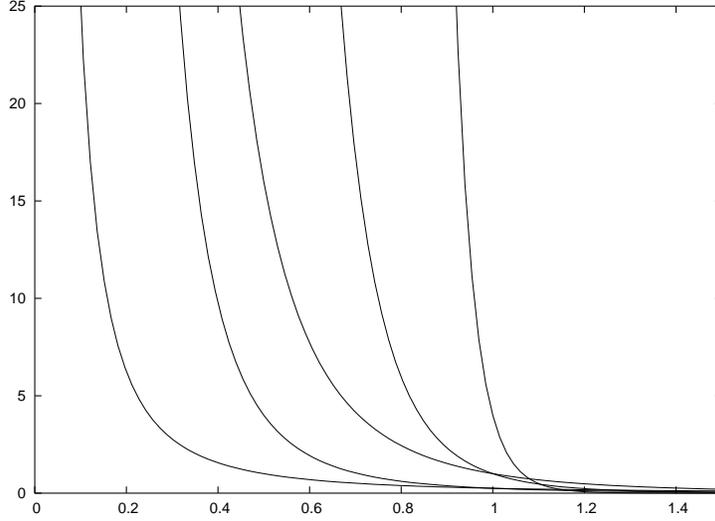


Figura 3.1: Gráficas de la densidad ρ en función del tiempo t para la primera familia de soluciones tomando $\kappa = 2$ y $k_2 = 1, 0.5, -0.5, -1$ y -2 , respectivamente.

esto, las funciones $U(t, r)$ y $\gamma(t, r)$ toman la forma

$$U(t, r) = \frac{k_1}{4} (r^2 + 2t^2) + k_2 \ln r + k_3 t, \quad (3.7a)$$

$$\begin{aligned} \gamma(t, r) = & \frac{\kappa}{2} (k_1 r^2 + 2k_2) (k_1 t^2 + 2k_3 t) + \frac{\kappa k_1^2 r^4}{16} \\ & + (k_1 k_2 + k_3) \frac{\kappa r^2}{2} + \kappa k_2^2 \ln r, \end{aligned} \quad (3.7b)$$

donde, como en el caso anterior, hemos tomado $U(t, r) = \psi(t, r)$.

Al igual que en el caso anterior, la densidad ρ se expresa como

$$\rho = (\kappa - 1) e^{2(U-\gamma)} \left[k_1 (k_1 t^2 + 2k_3 t) - \frac{k_1^2 r^2}{4} - \frac{k_2^2}{r^2} - k_1 k_2 + k_3^2 \right], \quad (3.8)$$

donde

$$e^{2(U-\gamma)} = r^{2k_2(1-\kappa k_2)} \exp \left\{ 4(k_1 - 2k_1k_2 - 2k_3)r^2 - \kappa k_1^2 r^4 \right. \\ \left. + 8(k_1t + 2k_3)(1 - 2\kappa k_2 - \kappa k_1 r^2)t \right\} / 16,$$

mientras que las componentes del vector velocidad son

$$u_t = \left[\frac{\kappa - 1}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} (k_1t + k_3), \quad (3.9a)$$

$$u_r = \left[\frac{\kappa - 1}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_1r}{2} + \frac{k_2}{r} \right), \quad (3.9b)$$

de modo que la velocidad espacial v está dada por

$$v = - \frac{k_1r^2 + 2k_2}{2r(k_1t + k_3)}, \quad (3.10)$$

quedando así determinadas todas las cantidades que caracterizan esta segunda familia de soluciones.

Ahora bien, con el fin de tener una distribución de materia físicamente razonable, al igual que con la familia de soluciones anterior, se debe tener que $\rho \geq 0$. Esta condición, combinada igualmente con las ecuaciones (3.9a) y (3.9b), implica nuevamente que $\kappa > 1$. Analizando entonces la expresión (3.8), vemos que si se impone la condición

$$k_1 = k_2 = 0, \quad (3.11)$$

se garantiza que $\rho \geq 0$ para todo valor de t y r . Así entonces, la densidad toma la forma

$$\rho = \frac{k_3^2(\kappa - 1)}{16} e^{8k_3(2t - r^2)}, \quad (3.12)$$

mientras que la velocidad espacial nuevamente es $v = 0$, garantizando así la naturaleza comovil del marco de referencia.

La expresión (3.12) puede escribirse convenientemente como

$$\rho = \rho_o e^{8k_3(2t-r^2)}, \quad (3.13)$$

donde

$$\rho_o = \frac{k_3^2(\kappa - 1)}{16} \quad (3.14)$$

es el valor de la densidad cuando $(t, r) = (0, 0)$. De acuerdo con esto, el comportamiento cualitativo de la densidad sólo depende del factor exponencial; esto es, del valor de la constante k_3 . Con el fin de analizar el comportamiento de la densidad para diferentes valores de la constante k_3 , podemos graficar $\tilde{\rho} = \rho/\rho_o$ en función de t y r . En las figuras 3.2 - 3.9 se presentan las gráficas de la densidad ρ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = 0.05, 0.5, 2.5, 20, -0.05, -0.5, -5$ y -50 , respectivamente, donde se puede apreciar claramente el comportamiento cualitativo de la densidad.

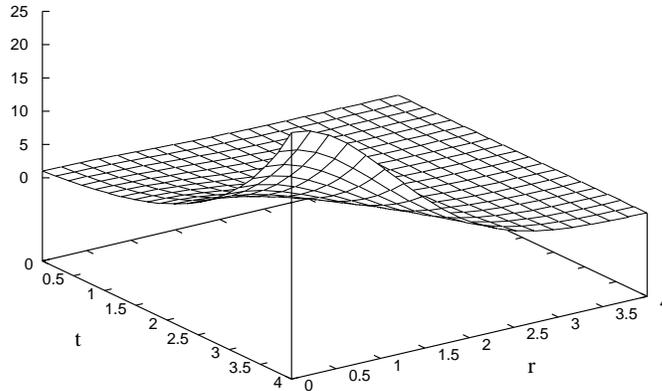


Figura 3.2: Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = 0.05$.

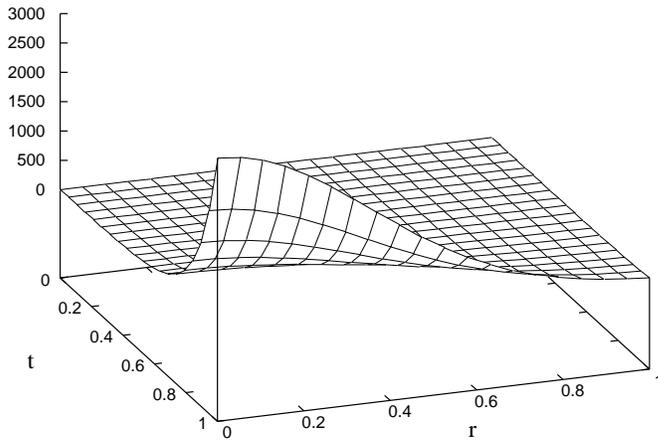


Figura 3.3: Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = 0.5$.

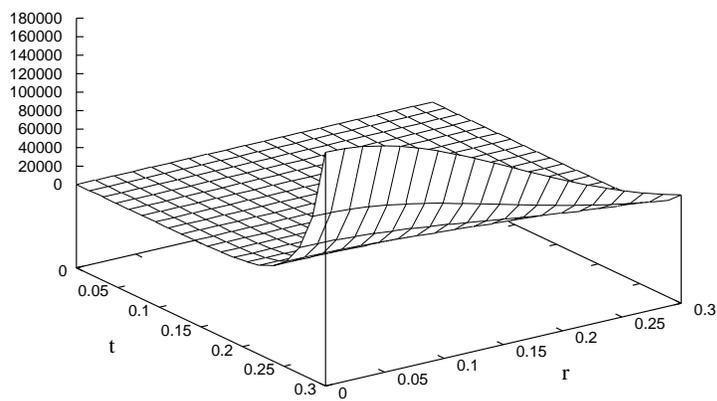


Figura 3.4: Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = 2.5$.

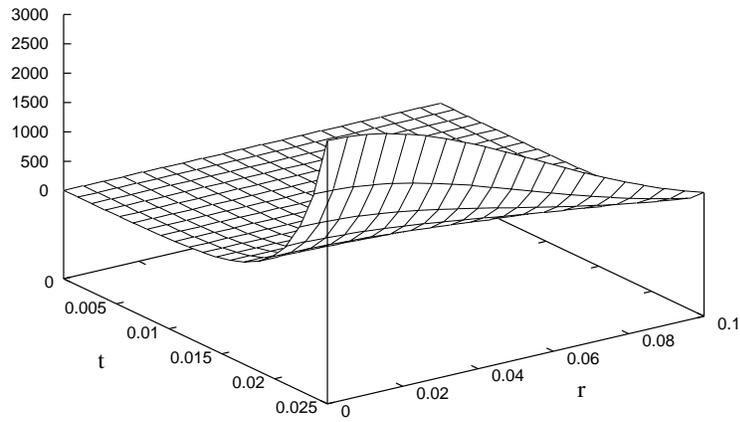


Figura 3.5: Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = 20$.

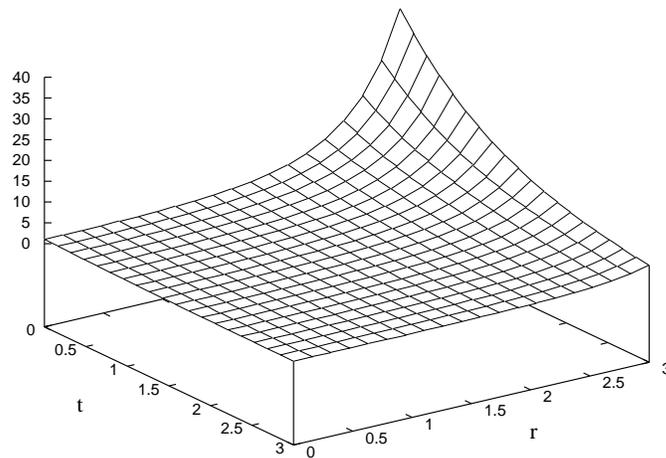


Figura 3.6: Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = -0.05$.

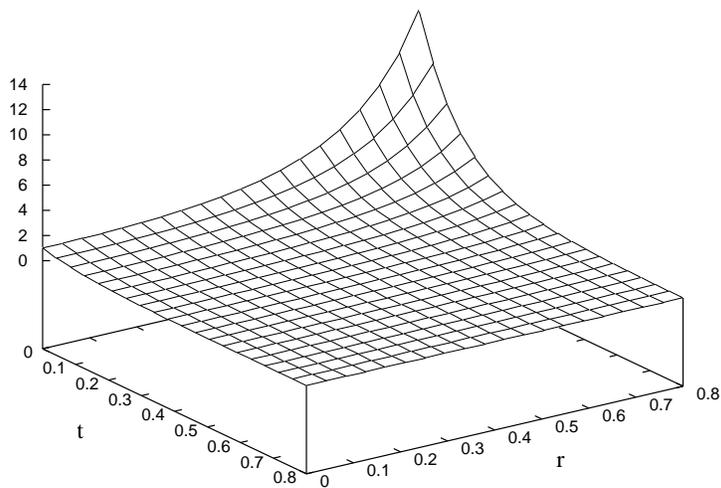


Figura 3.7: Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = -0.5$.

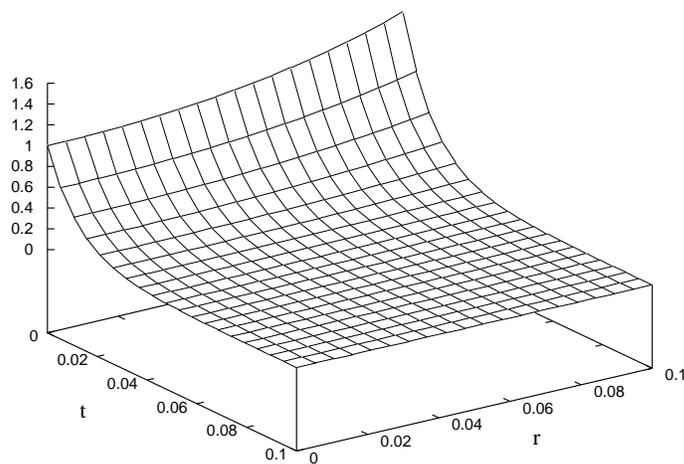


Figura 3.8: Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = -5$.

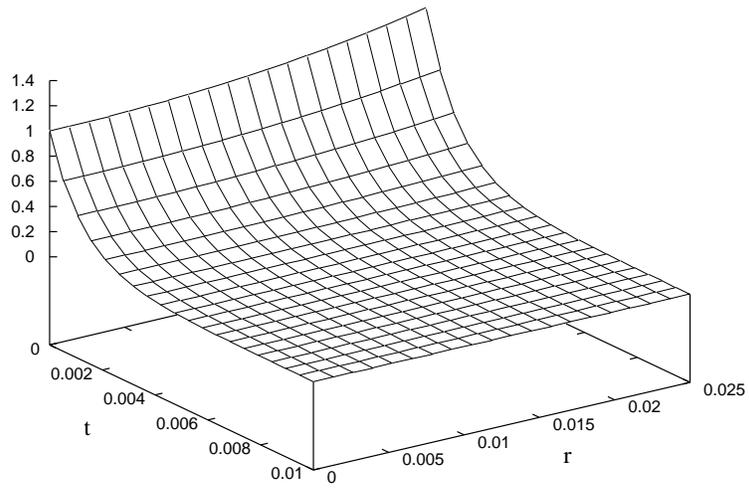


Figura 3.9: Gráficas de la densidad $\tilde{\rho}$ en función de t y r para la segunda familia de soluciones tomando $k_3 = -50$.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presento un método mediante el cual se obtuvieron soluciones exactas simples de las ecuaciones de Einstein para modelos cosmológicos inhomogéneos. El método está basado en la introducción de funciones auxiliares que permiten escribir las ecuaciones de Einstein en forma tal que es posible integrarlo explícitamente y encontrar soluciones que se pueden expresar en términos de funciones simples de las coordenadas utilizadas.

En este trabajo se consideró sólo el caso en el cual el fluido cósmico satisface la ecuación de estado $p = \rho$, lo cual simplifica en gran medida el proceso de integración de las ecuaciones. Las ecuaciones resultantes se integraron entonces explícitamente y se encontró una solución general acorde con las consideraciones hechas. La solución general se analizó posteriormente considerando en detalle las dos familias de soluciones particulares contenidas en ésta, restringiendo los valores de los parámetros a fin de obtener un comportamiento físicamente aceptable. El comportamiento de los modelos obtenidos se estudio mediante un análisis gráfico de las correspondientes densidades.

Los modelos obtenidos mediante la primera familia de soluciones presentan una “singularidad inicial” y luego la densidad decrece monótonamente hasta anularse cuando $t \rightarrow \infty$. Para estos modelos la densidad es independiente de la coordenada espacial r y su decaimiento en el tiempo es muy rapido. Por otro

lado, los modelos obtenidos utilizando la segunda familia de soluciones poseen una densidad que depende en forma exponencial tanto del tiempo t como de la coordenada espacial r , la cual puede crecer o decrecer dependiendo del signo de la constante k_3 en el factor exponencial. En ambos modelos se encontró que la velocidad espacial es cero, $v = 0$, lo cual garantiza que el marco de referencia utilizado es comovil con el fluido cósmico.

El presente trabajo constituye el primer paso en el estudio de la obtención de soluciones exactas para modelos cosmológicos inhomogéneos. Los resultados obtenidos en este trabajo pueden posteriormente generalizarse considerando modelos cosmológicos con ecuaciones de estado mas generales, de la forma $p = p(\rho)$, las cuales pueden llevar a modelos con comportamientos físicamente mas interesantes. Igualmente, pueden considerarse soluciones más complejas que las obtenidas utilizando soluciones más generales para la función $w(t, r)$ o utilizando separación de variables mediante productos para la función $\psi(t, r)$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Bičák. *Selected solutions of Einstein's field equations: their role in general relativity and astrophysics*, in “Einstein's Field Equations and Their Phys. Implications”, ed. B. G. Schmidt, Lecture Notes in Physics, Vol. 540, (Springer Verlag, 2000).
- [2] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum, *Exact Solutions of Einsteins's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1980).
- [3] V. A. Belinsky and V. E. Zakharov, Zh. Eksp. Teor. Fis. 75, 1955 – 1971, (1978) [Sov. Phys. JETP 48, 985–994, (1978)].
- [4] V. A. Belinsky and V. E. Zakharov, Zh. Eksp. Teor. Fis. 77, 3 – 19, (1979) [Sov. Phys. JETP 50, 1 – 9, (1979)].
- [5] J. F. Ramos y G. A. González, *Soluciones de las Ecuaciones de Einstein para espacio-tiempos de Weyl en coordenadas esferoidales generalizadas*, Revista Integración, Vol. 18, No 1. pp 1-8, 2000.
- [6] G. A. González y J. F. Ramos, *Solución general estática axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío en coordenadas esferoidales generalizadas*, Revista Colombiana de Física, **33**, 118-121, 2001.

- [7] A. C. Gutierrez, G. García y G. A. González, *Static solution type Papapetrou of Einstein-Maxwell equations*, Revista Colombiana de Física, **35**, 240-242, 2003
- [8] G. A. González, *Construção de Soluções Solitônicas das Equações de Einstein*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.
- [9] G. A. González, *Soluciones de las Ecuaciones de Einstein Mediante el Procedimiento de Papapetrou*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.
- [10] G. García y G. A. González, *Equivalencia entre soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein y de Einstein-Maxwell*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.
- [11] J. F. Ramos y G. A. González, *Soluciones estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein en el vacío, mediante el formalismo de Ernst*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.
- [12] A. C. Gutierrez, G. García y G. A. González, *Campos de Einstein-Maxwell estacionarios axialmente simétricos*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.
- [13] A. C. Gutierrez, y G. A. González, *Soluciones tipo Papapetrou de las Ecuaciones de Campo de Einstein-Maxwell*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.
- [14] G. A. González y P. S. Letelier, *Relativistic static thin disks with radial stress support*, Class. Quantum Grav. **16**, 479-494, 1999.
- [15] G. A. González y P. S. Letelier, *Rotating Relativistic thin disks*, Phys. Rev. D **62**, 064025, 2000.

- [16] G. A. González, *Camadas finas e discos em Relatividade geral*, Revista Integración, **18**, 19-31, 2000.
- [17] O. A. Espitia y G. A. González, *Relativistic counter-rotating disks with nonzero radial pressure*, Revista Colombiana de Física, **33**, 507-509, 2001.
- [18] G. García y G. A. González, *Electrovac rotating relativistic thin disks with nonzero radial pressure*, Revista Colombiana de Física, **35**, 210-213, 2003.
- [19] G. A. González y O. A. Espitia, *Relativistic static thin disks: The counterrotating model*, Phys. Rev. D, **68**, 104028, 2003.
- [20] G. A. González y P. S. Letelier, *Exact general relativistic thick disks*, Phys. Rev. D **69**, 044013, 2004.
- [21] O. A. Espitia y G. A. González, *Counter-rotating relativistic static thin disks*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.
- [22] F. Cala, G. García y G. A. González, *Discos relativistas magnetostáticos contra-rotantes*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.
- [23] G. García y G. A. González, *Electrovacuum static counterrotating relativistic dust disks*, Aceptado para publicación en Phys. Rev. D.
- [24] G. A. González, *Rotating relativistic thin disks as sources of the Taub-NUT solution*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.
- [25] P. S. Letelier, *Solitary waves of matter in general relativity*, Phys. Rev. D **26**, 2623. 1982.
- [26] P. S. Letelier, *Cylindrically symmetric solitary wave solutions to the Einstein equations*, J. Math. Phys. **25**, 2675. 1984.