

Niveles de comprensión en el estudio de funciones lineales y cuadráticas a través del uso de problemas auténticos con la mediación de tecnologías digitales en undécimo grado

Diego Armando Romero Quiroga

Trabajo de Grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director:

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en matemáticas

Bucaramanga

2025

Tabla de Contenido

Introducción 11

1. Planteamiento de la Investigación 12

 1.1 Contexto y problemática de la investigación 12

 1.2 Justificación..... 16

 1.3 Pregunta de Investigación 17

 1.4 Objetivos de Investigación..... 18

 1.4.1 Objetivo General..... 18

 1.4.2 Objetivos Específicos 18

2. Antecedentes 18

 2.1 Modelación Matemática en la Educación Escolar 19

 2.2 Niveles de Comprensión en el Aprendizaje de las Funciones..... 24

 2.3 Enseñanza de Funciones mediante Modelación Matemática..... 25

 2.4 Tecnología y Representaciones Múltiples en la Modelación Matemática 28

3. Aspectos Teóricos y Conceptuales 35

 3.1 Modelación Matemática..... 35

 3.1.1 Situaciones auténticas..... 35

 3.2 Experimento de Enseñanza como investigación de diseño..... 38

 3.3 Niveles de Comprensión 39

 3.4 Enseñanza de las funciones en la educación secundaria 42

 3.5 Potencial didáctico de GeoGebra y Tracker en el estudio de funciones 44

4. Proceso Metodológico 46

 4.1 Enfoque Metodológico..... 46

 4.2 Población y Muestra..... 50

 4.3 Instrumentos de evaluación..... 51

 4.4 Actividades Didácticas 51

 4.4.1 Actividad 1: Consumo de batería en un teléfono móvil 52

 4.4.2 Actividad 2: Movimiento de una cabina de teleférico..... 54

 4.4.3 Actividad 3: El proyector en el aula 56

4.4.4	Actividad 4: El lanzamiento de una falta en baloncesto.	58
4.5	Análisis a priori de las Actividades	61
4.5.1	Actividad 1: Consumo de la carga de una batería en un teléfono móvil	63
4.5.2	Actividad 2: El teleférico del cerro del Santísimo.	73
4.5.3	Actividad 3: El proyector en el aula de clase: Modelando el área proyectada.	80
4.5.4	Actividad 4: El lanzamiento de un tiro libre en baloncesto.	89
4.6	Pilotaje y ajustes al diseño de intervención.....	96
4.6.1	Resultados por Competencias Clave	97
4.6.2	Resultados por Niveles de Comprensión (Contreras, 1994).....	98
4.6.3	Análisis por Actividad con Ajustes propuestos.....	100
4.6.4	Comparativa entre estudiantes.....	105
4.7	Caracterización del grupo y contexto de aplicación.....	105
4.8	Ajustes en la implementación del experimento de enseñanza.....	107
5.	Análisis e Interpretación de Resultados	108
5.1	Selección de casos.....	110
5.2	Análisis de la Actividad 1: Función Lineal	110
5.2.1	Tarea 1 – Identificación de magnitudes y su clasificación	111
5.2.2	Tarea 2 – Relación entre magnitudes y observación de regularidad	114
5.2.3	Tarea 3 – Representación gráfica y análisis de comportamiento.....	117
5.2.4	Tarea 4 – Expresión algebraica de la relación	121
5.2.5	Tarea 5 – Interpretación de cambios en el plano cartesiano	122
5.2.6	Tarea 6 – Relación entre pendiente y distancia	125
5.2.7	Tarea 7 – Interpretación numérica de la pendiente	128
5.2.8	Tarea 8 – Concepto de “pendiente”	131
5.2.9	Tarea 9 – Interpretación del parámetro ‘ b ’ en la función lineal	134
5.2.10	Tarea 10 – Planteamiento de la expresión algebraica.....	138
5.2.11	Tarea 11 – Comparación de expresiones y consumo de batería	142
5.2.12	Tarea 12 – Conjetura sobre la variación constante de la función	145
5.2.13	Tarea 13 – Restricción del dominio y recorrido	149
5.3	Conclusiones generales de la Actividad 1	153
5.4	Análisis de la Actividad 3: Función Cuadrática.....	157

5.4.1	Tarea 1 – Identificación de magnitudes variables y constantes	157
5.4.2	Tarea 2 – Relación entre las variables.....	160
5.4.3	Tarea 3 – Identificación de la regularidad entre variables	163
5.4.4	Tarea 4 – Variación del área proyectada	166
5.4.5	Tarea 5 – Interpretación gráfica y forma funcional	169
5.4.6	Tarea 6 – Propuesta de una expresión algebraica.....	172
5.4.7	Tarea 7 – Exploración del parámetro ' a ' en la función cuadrática.....	174
5.4.8	Tarea 8 – Exploración del parámetro b en la función cuadrática.....	177
5.4.9	Tarea 9 – Exploración del parámetro c	180
5.4.10	Tarea 10 – Combinación de parámetros a y b	183
5.4.11	Tarea 11 – Ajuste gráfico de la expresión algebraica.....	186
5.4.12	Tarea 12 – Evaluación del modelo en un nuevo valor de distancia.....	190
5.4.13	Tarea 13 – Cálculo de la distancia para un área proyectada dada	194
5.4.14	Tarea 14 – Análisis de intervalos y conjetura sobre la variación.....	197
5.4.15	Tarea 15 – Validación del modelo obtenido.....	198
5.5	Conclusiones generales de la Actividad 3	204
6.	Conclusiones Generales del Estudio	207
	Referencias Bibliográficas	211

Tabla de Figuras

Figura 1. Ciclo de modelación de Blum y Borromeo (2009) 37

Figura 2. Presentación Actividad 1 54

Figura 3. Presentación Actividad 2 56

Figura 4. Presentación Actividad 3 58

Figura 5. Presentación Actividad 4 60

Figura 6. Respuesta de Juliana a la tarea 1 Act. 1 112

Figura 7. Respuesta de Mateo a la tarea 1 Act. 1 113

Figura 8. Respuesta de Andrea a la tarea 1 Act. 1 113

Figura 9. Respuesta de Juliana a la tarea 2 Act. 1 114

Figura 10. Respuesta de Mateo a la tarea 2 Act. 1 115

Figura 11. Respuesta de Andrea a la tarea 2 Act. 1 116

Figura 12. Respuesta de Juliana a la tarea 3 Act. 1 118

Figura 13. Respuesta de Mateo a la tarea 3 Act. 1 119

Figura 14. Respuesta de Mateo a la tarea 3 Act. 1 119

Figura 15. Respuesta de Mateo a la tarea 4 Act. 1 122

Figura 16. Respuesta de Andrea a la tarea 4 Act. 1 122

Figura 17. Respuesta de Sofía a la tarea 5 Act. 1 123

Figura 18. Respuesta de Mateo a la tarea 5 Act. 1 124

Figura 19. Respuesta de Andrea a la tarea 5 Act. 1 124

Figura 20. Respuesta de Sofía a la tarea 6 Act. 1 126

Figura 21. Respuesta de Mateo a la tarea 6 Act. 1 126

Figura 22. Respuesta de Andrea a la tarea 6 Act. 1 128

Figura 23. Respuesta de Sofía a la tarea 7 Act. 1 129

Figura 24. Respuesta de Mateo a la tarea 7 Act. 1 130

Figura 25. Respuesta de Andrea a la tarea 7 Act. 1 131

Figura 26. Respuesta de Sofía a la tarea 8 Act. 1 132

Figura 27. Respuesta de Mateo a la tarea 8 Act. 1 133

Figura 28. Respuesta de Andrea a la tarea 8 Act. 1 133

Figura 29. Respuesta de Sofía a la tarea 9 Act. 1 135

Figura 30. Respuesta de Mateo a la tarea 9 Act. 1 136

Figura 31. Respuesta de Andrea a la tarea 9 Act. 1 137

Figura 32. Respuesta de Juliana a la tarea 10 Act. 1 139

Figura 33. Respuesta de Sofía a la tarea 10 Act. 1 140

Figura 34. Respuesta de Mateo a la tarea 10 Act. 1 140

Figura 35. Respuesta de Andrea a la tarea 10 Act. 1 141

Figura 36. Respuesta de Juliana a la tarea 11 Act. 1 143

Figura 37. Respuesta de Sofía a la tarea 11 Act. 1 143

Figura 38. Respuesta de Mateo a la tarea 11 Act. 1 144

Figura 39. Respuesta de Andrea a la tarea 11 Act. 1 144

Figura 40. Respuesta de Juliana a la tarea 12 Act. 1 147

Figura 41. Respuesta de Sofía a la tarea 12 Act. 1.....	147
Figura 42. Respuesta de Mateo a la tarea 12 Act. 1.....	148
Figura 43. Respuesta de Andrea a la tarea 12 Act. 1.....	148
Figura 44. Respuesta de Juliana a la tarea 13 Act. 1.....	150
Figura 45. Respuesta de Sofía a la tarea 13 Act. 1.....	150
Figura 46. Respuesta de Mateo a la tarea 13 Act. 1.....	151
Figura 47. Respuesta de Andrea a la tarea 13 Act. 1.....	151
Figura 48. Respuesta de Juliana a la tarea 1 Act. 3.....	158
Figura 49. Respuesta de Sofía a la tarea 1 Act. 3.....	159
Figura 50. Respuesta de Mateo a la tarea 1 Act. 3.....	159
Figura 51. Respuesta de Andrea a la tarea 1 Act. 3.....	160
Figura 52. Respuesta de Juliana a la tarea 2 Act. 3.....	161
Figura 53. Respuesta de Sofía a la tarea 2 Act. 3.....	161
Figura 54. Respuesta de Mateo a la tarea 2 Act. 3.....	162
Figura 55. Respuesta de Andrea a la tarea 2 Act. 3.....	162
Figura 56. Respuesta de Juliana a la tarea 3 Act. 3.....	164
Figura 57. Respuesta de Sofía a la tarea 3 Act. 3.....	164
Figura 58. Respuesta de Mateo a la tarea 3 Act. 3.....	165
Figura 59. Respuesta de Andrea a la tarea 3 Act. 3.....	165
Figura 60. Respuesta de Juliana a la tarea 4 Act. 3.....	166
Figura 61. Respuesta de Sofía a la tarea 4 Act. 3.....	167
Figura 62. Respuesta de Mateo a la tarea 4 Act. 3.....	167
Figura 63. Respuesta de Andrea a la tarea 4 Act. 3.....	168
Figura 64. Respuesta de Juliana a la tarea 5 Act. 3.....	170
Figura 65. Respuesta de Sofía a la tarea 5 Act. 3.....	170
Figura 66. Respuesta de Mateo a la tarea 5 Act. 3.....	171
Figura 67. Respuesta de Andrea a la tarea 5 Act. 3.....	171
Figura 68. Respuesta de Juliana a la tarea 6 Act. 3.....	172
Figura 69. Respuesta de Sofía a la tarea 6 Act. 3.....	173
Figura 70. Respuesta de Mateo a la tarea 6 Act. 3.....	173
Figura 71. Respuesta de Andrea a la tarea 6 Act. 3.....	174
Figura 72. Respuesta de Juliana a la tarea 7 Act. 3.....	175
Figura 73. Respuesta de Sofía a la tarea 7 Act. 3.....	176
Figura 74. Respuesta de Mateo a la tarea 7 Act. 3.....	176
Figura 75. Respuesta de Andrea a la tarea 7 Act. 3.....	177
Figura 76. Respuesta de Juliana a la tarea 8 Act. 3.....	178
Figura 77. Respuesta de Sofía a la tarea 8 Act. 3.....	179
Figura 78. Respuesta de Mateo a la tarea 8 Act. 3.....	179
Figura 79. Respuesta de Andrea a la tarea 8 Act. 3.....	180
Figura 80. Respuesta de Juliana a la tarea 9 Act. 3.....	181
Figura 81. Respuesta de Sofía a la tarea 9 Act. 3.....	181
Figura 82. Respuesta de Mateo a la tarea 9 Act. 3.....	182
Figura 83. Respuesta de Andrea a la tarea 9 Act. 3.....	182

Figura 84. Respuesta de Juliana a la tarea 10 Act. 3.....	184
Figura 85. Respuesta de Sofía a la tarea 10 Act. 3.....	185
Figura 86. Respuesta de Mateo a la tarea 10 Act. 3.....	185
Figura 87. Respuesta de Andrea a la tarea 10 Act. 3.....	186
Figura 88. Gráfica de Juliana en la tarea 11 Act. 3.....	188
Figura 89. Gráfica de Sofía en la tarea 11 Act. 3.....	189
Figura 90. Gráfica de Mateo en la tarea 11 Act. 3.....	189
Figura 91. Gráfica de Andrea en la tarea 11 Act. 3.....	190
Figura 92. Respuesta de Juliana a la tarea 12 Act. 3.....	191
Figura 93. Respuesta de Sofía a la tarea 12 Act. 3.....	191
Figura 94. Respuesta de Mateo a la tarea 12 Act. 3.....	193
Figura 95. Respuesta de Andrea a la tarea 12 Act. 3.....	194
Figura 96. Respuesta de Mateo a la tarea 13 Act. 3.....	196
Figura 97. Respuesta de Andrea a la tarea 13 Act. 3.....	197
Figura 98. Respuesta de Juliana a la tarea 15 Act. 3.....	199
Figura 99. Respuesta de Sofía a la tarea 15 Act. 3.....	201
Figura 100. Respuesta de Mateo a la tarea 15 Act. 3.....	201
Figura 101. Respuesta de Andrea a la tarea 15 Act. 3.....	203

Lista de Tablas

Tabla 1. Acciones y Reflexiones durante el Experimento de Enseñanza.....	47
Tabla 2. Análisis a priori Actividad 1	63
Tabla 3. Análisis a priori Actividad 2.....	73
Tabla 4. Análisis a priori Actividad 3.....	80
Tabla 5. Análisis a priori Actividad 4.....	89
Tabla 6. Comparativa entre estudiantes post pilotaje.....	105
Tabla 7. Resumen Global por tareas Act. 1	153
Tabla 8. Resumen Global por tareas Act. 3	204

Resumen

Título: Niveles de comprensión en el estudio de funciones lineales y cuadráticas a través del uso de problemas auténticos con la mediación de tecnologías digitales en undécimo grado *

Autor: Diego Armando Romero Quiroga **

Palabras Clave: Modelación matemática, tecnologías digitales, funciones.

Descripción:

Esta investigación tuvo como objetivo principal caracterizar los niveles de comprensión matemática alcanzados por estudiantes de undécimo grado mientras estudiaban los objetos matemáticos de función lineal y cuadrática, a través el proceso de modelación de situaciones auténticas mediado por herramientas digitales. El estudio se basa en dos referentes teóricos principales: el ciclo de modelación propuesto por Blum y Borromeo (2009), reorganizado en cuatro fases a partir de la explicación de Londoño y Muñoz (2011), y los niveles de comprensión definidos por Herscovics y Bergeron (1988), citados en Contreras (1994).

Se adoptó un enfoque cualitativo bajo la modalidad de experimento de enseñanza, en el cual se diseñaron e implementaron actividades contextualizadas que promovieron la exploración de situaciones auténticas, el análisis de la variación entre las magnitudes variables implicadas y la construcción de modelos funcionales con apoyo de GeoGebra. El análisis se centró en cuatro estudiantes, seleccionados intencionalmente, cuyas producciones e intervenciones fueron examinadas para identificar las formas en que se aproximaron a las tareas y los niveles de comprensión que alcanzaron.

Los resultados muestran que las respuestas de los estudiantes no siempre se ubicaron de manera fija en un solo nivel, por lo que se identificaron formas intermedias y transiciones entre niveles. Se observaron avances en la interpretación de gráficas, la representación algebraica de relaciones y la validación contextual de modelos. Asimismo, las actividades permitieron evidenciar procesos de argumentación y generalización vinculados al comportamiento funcional.

La modelación apoyada en recursos digitales mostró un impacto positivo en la comprensión progresiva de las funciones, al potenciar habilidades como el análisis crítico, la articulación entre representaciones y la interpretación contextual de fenómenos. En este sentido, la propuesta desarrollada en este estudio representa un aporte significativo para el diseño de secuencias didácticas que integren la modelación con el desarrollo del pensamiento funcional en la educación media.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Dr. Jorge Fiallo

Abstract

Title: Levels of Understanding in the Study of Linear and Quadratic Functions through the Use of Authentic Problems Mediated by Digital Technologies in Eleventh Grade *

Author: Diego Armando Romero Quiroga **

Keywords: Mathematical modeling, digital technologies, functions.

Description:

The main objective of this research was to characterize the levels of mathematical understanding achieved by eleventh-grade students while studying the mathematical objects of linear and quadratic functions through the modeling of authentic situations mediated by digital tools. The study is grounded in two main theoretical frameworks: the modeling cycle proposed by Blum and Borromeo (2009), reorganized into four phases based on the explanation by Londoño and Muñoz (2011), and the levels of understanding defined by Herscovics and Bergeron (1988), cited in Contreras (1994).

A qualitative approach was adopted under the teaching experiment methodology, in which contextualized activities were designed and implemented to promote the exploration of authentic situations, the analysis of variation among the involved magnitudes, and the construction of functional models with the support of GeoGebra. The analysis focused on four intentionally selected students, whose productions and interventions were examined to identify how they approached the tasks and the levels of understanding they achieved.

The results indicate that students' responses were not always fixed at a single level, revealing intermediate forms and transitions between levels. Advances were observed in the interpretation of graphs, the algebraic representation of relationships, and the contextual validation of models. Additionally, the activities allowed for evidence of reasoning and generalization processes linked to functional behavior.

Modeling supported by digital resources had a positive impact on the progressive understanding of functions by enhancing skills such as critical analysis, articulation between representations, and contextual interpretation of phenomena. In this sense, the proposal developed in this study represents a significant contribution to the design of instructional sequences that integrate modeling with the development of functional thinking in secondary education.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Dr. Jorge Fiallo

Introducción

El estudio de las funciones en la educación secundaria tradicionalmente se ha abordado mediante métodos centrados en procedimientos, donde los estudiantes aprenden fórmulas y técnicas de cálculo sin relacionarlas con situaciones reales. Este enfoque ha generado una comprensión parcial del concepto de función, reduciéndolo frecuentemente a operaciones algebraicas y al reconocimiento superficial de gráficas. Investigaciones recientes demuestran que, aunque los estudiantes son capaces resolver problemas genéricos, enfrentan dificultades importantes al intentar establecer una relación entre diferentes representaciones, identificar patrones generales o sustentar matemáticamente sus soluciones.

En este contexto, la modelación matemática surge como una estrategia pedagógica valiosa para promover la enseñanza de las funciones. Al vincular fenómenos de la vida cotidiana con herramientas matemáticas, esta estrategia permite a los estudiantes participar activamente en la construcción de conocimiento, desarrollar conjeturas, verificar sus planteamientos y descubrir la utilidad de las matemáticas en situaciones concretas. El uso de tecnologías digitales, como GeoGebra, puede fortalecer este proceso cuando se emplea estratégicamente en tareas que fomenten el trabajo con diversas representaciones y favorezcan la exploración dinámica de conceptos que, en un abordaje tradicional, permanecerían estáticos.

Este trabajo investigativo tuvo como objetivo principal analizar los niveles de comprensión logrados por estudiantes de undécimo grado mientras estudiaban los objetos matemáticos de función lineal y cuadrática mediante actividades de modelación con apoyo tecnológico. La propuesta se fundamentó en el ciclo de modelación de Blum y Borromeo, adaptado según la interpretación de Londoño y Muñoz, junto con los niveles de comprensión matemática descritos

por Herscovics y Bergeron. Sobre esta base teórica se crearon secuencias didácticas que guiaron a los participantes en la construcción gradual de modelos funcionales.

El documento presenta de manera integral el desarrollo de la investigación: los referentes conceptuales que la sustentan, las decisiones metodológicas adoptadas y los hallazgos más relevantes. Los resultados obtenidos ofrecen valiosas perspectivas para renovar la enseñanza de las funciones en el nivel medio, promoviendo enfoques que desarrollen el razonamiento matemático, establezcan relaciones con el mundo real e incorporen estratégicamente recursos digitales.

1. Planteamiento de la Investigación

En este capítulo se presentarán el contexto y problemática de la investigación, la pregunta y objetivos de la investigación.

1.1 Contexto y problemática de la investigación

El proceso de enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria enfrenta una variedad de desafíos, especialmente en la comprensión de conceptos claves como las funciones lineales y cuadráticas. En distintas oportunidades, los estudiantes abordan estos conceptos de forma mecánica y basados en procedimientos, lo que conlleva a su incapacidad para integrar las matemáticas con situaciones de la vida cotidiana y relacionar los diferentes tipos de representación que tienen las funciones.

González y Castañeda (2023), afirman que el enfoque procedimental en la enseñanza de las matemáticas conlleva a que los estudiantes tengan una comprensión superficial de los conceptos. Así mismo, sostienen que, los estudiantes pueden tener habilidades para identificar patrones o aplicar reglas en contextos que les resulten comunes, pero no desarrollan las habilidades necesarias para sustentar los conceptos, así como aplicarlos en contextos con un mayor grado de dificultad. Best y Bikner-Ahsbahr (2017), citados por González y Castañeda (2023), aseguran que es importante desarrollar las habilidades necesarias para interpretar cualitativamente una función cuando se requiere de una comprensión integral del concepto. Duval (2006), citado por González y Castañeda (2023), afirma que es necesario que el estudiante comprenda el comportamiento de las gráficas, para de esta manera, relacionar y aplicar conocimientos sobre las funciones en sus distintas formas de representación.

Si bien la enseñanza tradicional ha priorizado la representación algebraica, integrar múltiples representaciones mediante herramientas digitales puede enriquecer la comprensión. Por ejemplo, la combinación de representaciones gráficas, tabulares, verbales y algebraicas permite a los estudiantes abordar las funciones desde perspectivas complementarias. Así mismo, la modelación matemática ofrece una alternativa al permitir que los estudiantes transiten entre estas diferentes representaciones a través de problemas auténticos. Este enfoque no solo promueve una comprensión integral de las funciones, sino que también facilita la conexión entre los conceptos matemáticos y situaciones reales, lo que resulta en un aprendizaje más significativo (González y Castañeda, 2023; Londoño y Muñoz, 2011).

Para abordar estas situaciones, es importante involucrar nuevas metodologías de enseñanza, que impulsen la conexión entre el conocimiento previo y los contenidos matemáticos en los estudiantes, permitiendo así que comprendan las funciones como conceptos aplicables en

diversos contextos y representaciones (González y Castañeda, 2023). La modelación matemática, tal como lo plantean Londoño y Muñoz (2011), fomenta el desarrollo de competencias matemáticas al establecer una relación entre el aprendizaje y los contextos reales. Este enfoque, inmerso en currículos educativos, se centra en procesos importantes como la construcción y validación de modelos matemáticos. Blum et al. (2007), citados por Londoño y Muñoz (2011), destacan que este método les permite a los estudiantes conectar la teoría matemática con situaciones prácticas, desarrollando habilidades de interpretación y argumentación.

Otra perspectiva interesante de modelación matemática es la de Blomhøj (2004), citado por Londoño y Muñoz (2011), quien afirma que este proceso establece conexiones entre la experiencia de vida diaria de los estudiantes y las matemáticas, lo cual motiva el aprendizaje de esta ciencia, genera un apoyo directo a las conceptualizaciones y la involucra en la cultura de los estudiantes, como recurso para explicar y comprender situaciones de la vida diaria.

Además de eso, es necesario dejar a un lado el uso de representaciones estáticas y limitadas, tal como lo afirman Tall y Sheath (1983), citados por Jácome (2019), quienes afirman que estas representaciones, además de ser las presentadas en los libros, estrechan la naturaleza dinámica de los objetos, lo que conlleva a incrementar una imagen restringida del concepto de función, y es por esto que se recomienda el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza de las matemáticas, ya que conceden una visualización dinámica de los conceptos matemáticos que no son posibles visualizar en la hoja. Tall (1997), citado por Jácome (2019), afirma que el uso de tecnologías computacionales (hoy día digitales), beneficia el avance del proceso de representación en su relación con situaciones de variación y cambio, favoreciendo de esta manera la idea de que las funciones describen el cambio de las cosas.

Para abordar esta problemática, el uso de herramientas digitales como Tracker y GeoGebra se muestra como una alternativa moderna que favorece en los estudiantes la visualización y manipulación de las funciones en tiempo real mientras se interactúa de manera directa con estas. Estos softwares proporcionan una visualización dinámica de diversas situaciones, lo que permite la exploración de las relaciones entre las distintas variables en situaciones que evidencian variación y cambio. Este tipo de interacción fomenta un aprendizaje más profundo, no solo debido a la manipulación de los elementos de una función, sino también porque ayuda a comprender e interpretar su comportamiento en situaciones reales. De manera general, estas herramientas tienen el poder de liberar a los estudiantes del enfoque tradicional de la enseñanza de las matemáticas y sumergirlos en un entorno realista donde puedan validar hipótesis y construir su propio conocimiento.

Se considera que una de las dificultades permanentes en el proceso de enseñanza de las matemáticas, es la falta de profundización en el análisis de la comprensión de los estudiantes frente a conceptos importantes como las funciones lineales y cuadráticas. Se ha observado en experiencias anteriores, que, en la mayoría de las ocasiones, los estudiantes son hábiles aplicando procedimientos mecánicos, pero se les dificulta establecer relaciones entre conceptos y avanzar hacia la generalización y la demostración. Bajo esta situación, se ve la necesidad de caracterizar los diferentes niveles de comprensión en los que se encuentran los estudiantes en las diferentes etapas de implementación, con el objetivo de diseñar estrategias didácticas consecuentes que les permita avanzar hacia los niveles más altos de comprensión y fortalecer su aprendizaje.

1.2 Justificación

Para lograr un aprendizaje significativo en el estudio de las funciones, es fundamental que los estudiantes comprendan tanto sus fundamentos teóricos como sus aplicaciones prácticas. Un enfoque que integre representaciones múltiples y contextos reales puede potenciar esta comprensión, permitiendo a los alumnos establecer conexiones más profundas con los conceptos. Así mismo, el uso de tecnologías digitales genera una dinámica interactiva que supera los métodos tradicionales de enseñanza, permitiéndoles a los estudiantes visualizar la relación entre las variables y comprender su interacción en situaciones de variación y cambio.

El presente estudio sugiere integrar herramientas tecnológicas como Tracker y GeoGebra en el proceso de enseñanza, aprovechando su potencial para representar de manera visual conceptos matemáticos. Estas herramientas no solo permiten una visualización dinámica de las funciones, sino que también facilitan la transición entre diferentes representaciones (gráfica, algebraica, tabular y verbal) a través de la modelación de problemas auténticos. Por ejemplo, GeoGebra permite a los estudiantes manipular gráficas en tiempo real, lo que les ayuda a comprender cómo los cambios en los parámetros afectan el comportamiento de una función. Por su parte, Tracker permite modelar fenómenos físicos, lo que favorece la conexión entre las matemáticas y situaciones del mundo real.

Este trabajo propone una metodología que integra el uso de herramientas digitales, en la que los objetos matemáticos se presentan de forma dinámica y manipulable, para la enseñanza de las funciones lineales y cuadráticas mediante situaciones auténticas. Además, caracteriza los niveles de comprensión que alcanzan los estudiantes durante su desarrollo y plantea ajustes a las actividades con base en los resultados obtenidos.

1.3 Pregunta de Investigación

Con la finalidad de entender cómo el proceso de modelación de fenómenos reales mediado por el uso de herramientas digitales impacta el aprendizaje de las funciones lineales y cuadráticas en los estudiantes de undécimo grado, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué niveles de comprensión alcanzan los estudiantes de undécimo grado en el estudio de las funciones lineales y cuadráticas a través de la modelación de fenómenos reales con la mediación de Tracker y GeoGebra?

Para dar respuesta a esta pregunta, se han planteado los siguientes objetivos de investigación:

1.4 Objetivos de Investigación

1.4.1 Objetivo General

Caracterizar los niveles de comprensión de los estudiantes de undécimo grado en el estudio de las funciones lineales y cuadráticas a través de la modelación de fenómenos reales con la mediación de Tracker y GeoGebra.

1.4.2 Objetivos Específicos

1. Diseñar una secuencia didáctica con la mediación de Tracker y GeoGebra para estudiar fenómenos de modelación lineal y cuadrática.
2. Implementar una secuencia didáctica con la mediación de Tracker y GeoGebra para estudiar fenómenos de modelación lineal y cuadrática.
3. Evaluar una secuencia didáctica para estudiantes de undécimo grado que integre Tracker y GeoGebra en la modelación de fenómenos reales, para la comprensión de las funciones lineales y cuadráticas.

2. Antecedentes

En este capítulo se presentan investigaciones previas que guardan relación con el presente estudio, organizadas en función de sus principales aportes temáticos. Se abordan antecedentes sobre la modelación matemática en contextos escolares, los niveles de comprensión en el aprendizaje de funciones, la enseñanza de funciones mediante procesos de modelación matemática, y el uso de tecnologías digitales y representaciones múltiples como mediadores en

estos procesos. Estos antecedentes permiten ubicar la investigación dentro del panorama actual de la educación matemática y aportan referentes conceptuales y metodológicos que fundamentan tanto el diseño como el análisis del experimento de enseñanza desarrollado.

2.1 Modelación Matemática en la Educación Escolar

Entre los estudios pioneros que han abordado este ámbito, destaca el trabajo de Werner Blum y Rita Borromeo Ferri (2009), el cual lleva por título “*Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt?*”, publicado en la Revista *Journal of Mathematical Modelling and Application*. En esta investigación, los autores querían verificar si la modelación matemática puede ser llevada a cabo en el aula de clase y cuáles son las condiciones que favorecen su aprendizaje. Para esto, se basaron en experiencias anteriores desarrolladas especialmente en Alemania a partir de dos grandes proyectos que fueron: DISUM (Desarrollo e Implementación de la Modelación en la Enseñanza de las Matemáticas) y COM² (Comparación de Modelación Matemática) en los que hicieron parte estudiantes de educación secundaria y se estudiaron procesos de aprendizaje y prácticas docentes reales.

Blum y Borromeo exponen como base estructural el ciclo de modelación matemática que consta de siete etapas, las cuales son: comprensión del problema del mundo real, estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación y comunicación de resultados. A partir de este, se elaboraron y desarrollaron actividades auténticas en ambientes escolares, como por ejemplo el problema de *los zapatos del gigante*, en el cual se les solicitaba a los estudiantes que debían hallar la altura de un gigante al cual le calzaran bien estos zapatos que se encontraban exhibidos en un polideportivo como monumento. A través de este tipo de problemas se pudo observar que los estudiantes planteaban diferentes formas para representar y proponer soluciones a estas situaciones contextualizadas. Según los autores, uno de los hallazgos más importantes es

que los estudiantes son capaces de aprender a modelar matemáticamente, pero para esto se requiere de orientación didáctica adecuada, tiempo suficiente y actividades que permitan la reflexión entre la interacción del contexto y el lenguaje matemático.

Ya en las conclusiones, los autores afirman que la modelación matemática es deseable como componente fundamental de una educación matemática moderna, al favorecer competencias como la comprensión de fenómenos, el pensamiento crítico y la autonomía. Así mismo, sostienen que los resultados son mejores cuando los docentes guían a los estudiantes en su proceso sin imponerles una sola forma de solución, respetando su estilo cognitivo. Esta investigación resulta ser importante para el presente estudio dado que ofrece una base teórica y práctica fuerte sobre cómo estructurar y analizar procesos de modelación matemática en el aula, especialmente en situaciones reales que permiten el uso de diversos tipos de representaciones.

En el contexto colombiano, Londoño y Muñoz (2011) retoman el ciclo de Blum y Borromeo para adaptarlo a las condiciones del aula escolar. Estos autores realizaron un estudio cualitativo con estudiantes undécimo grado que exploró el proceso de modelación matemática como estrategia para construir relaciones lineales entre dos variables a partir de contextos auténticos. Su trabajo se enmarca en la perspectiva realística de la modelación, buscando vincular los contenidos escolares con situaciones cercanas a la experiencia cotidiana de los estudiantes. Esta aproximación les permitió observar cómo los jóvenes interpretaban problemas reales, seleccionaban las variables relevantes, realizaban simplificaciones y ensayaban distintos modelos hasta construir una expresión algebraica que representara las relaciones identificadas.

Uno de los aportes centrales de este estudio fue la reorganización del ciclo de modelación propuesto por Blum y Borromeo (2009), en una secuencia de cuatro fases más manejables para el trabajo escolar: comprensión y estructuración del problema, matematización, trabajo matemático

y validación e interpretación. Esta reorganización fue propuesta no como una reducción conceptual del modelo, sino como una forma de adaptarlo didácticamente al contexto escolar, facilitando tanto el diseño de actividades como el análisis de los procesos seguidos por los estudiantes. La propuesta se consolidó a través de la observación de episodios de aula, análisis de producciones escritas y reflexiones compartidas entre estudiantes y docentes.

Este antecedente es especialmente pertinente para la presente investigación, ya que no solo aborda la modelación desde una perspectiva pedagógica cercana, sino que proporciona una estructura conceptual que ha sido adoptada como referencia para organizar las actividades diseñadas en este trabajo. A diferencia del estudio original, el presente trabajo no se centra únicamente en funciones lineales, sino que amplía el análisis a funciones cuadráticas y a los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes. Sin embargo, la organización del ciclo propuesta por Londoño y Muñoz ha servido como marco articulador del diseño y aplicación del experimento de enseñanza.

Mientras Londoño y Muñoz se centraron en la adaptación didáctica del ciclo de modelación, otros investigadores como Suárez y Cordero (2010) exploraron cómo la *modelación-graficación* puede darle sentido a los conceptos matemáticos desde una perspectiva socioepistemológica. El estudio estuvo centrado en comprender el rol del uso de las gráficas en la construcción del conocimiento matemático relacionado con el cambio, tomando como referente histórico el Tratado de Oresme sobre la Figuración de las Cualidades. A partir de esto, los autores proponen una epistemología escolar que involucra la modelación del movimiento con el uso de gráficas, considerando esta relación como un medio para generar nuevas formas de comprensión de los fenómenos de variación y cambio.

El trabajo se desarrolló a través una metodología cualitativa mediante una experiencia de laboratorio, en la cual se diseñó y aplicó una *Situación de Modelación del Movimiento* (SMM) compuesta de tres momentos: establecimiento de la forma del nuevo uso de las gráficas, construcción de argumentos sobre ese uso, y su puesta en funcionamiento. Las actividades diseñadas permitieron observar cómo los estudiantes representaban y explicaban situaciones relacionadas con el movimiento como lo son la posición, velocidad y aceleración a través del tránsito por diferentes modos de uso gráfico. Al realizar el análisis de estas interacciones, se pudieron identificar patrones de razonamiento que evidencian cómo la gráfica puede constituirse como un objeto de conocimiento en sí mismo y no solo como un medio de representación.

Entre los hallazgos más importantes, se resalta que en el contexto de modelación matemática, el uso de las gráficas permitió a los estudiantes establecer conexiones significativas entre lo gráfico y los fenómenos de estudio, incluso antes de tratar formalmente el concepto de función. Los autores concluyen que es posible estructurar situaciones de aprendizaje donde el razonamiento gráfico funcione como base para la comprensión de la variación, lo que se convierte en nuevos desafíos para el diseño curricular y didáctico en matemáticas. Este estudio resulta útil para investigaciones donde se aborde la enseñanza de funciones y el uso didáctico de representaciones gráficas en procesos de modelación.

Complementando estas aproximaciones teóricas, los investigadores Pantoja et al. (s.f.) demostraron de manera práctica cómo la integración de tecnologías digitales y trabajo colaborativo en actividades de modelación impacta positivamente el aprendizaje. Para desarrollar esta investigación, los autores plantearon dos actividades diferentes donde involucraron situaciones de la vida cotidiana de los estudiantes, así como el uso de tecnologías digitales. Las actividades elegidas fueron el movimiento de caída libre de un objeto y el lanzamiento de un tiro libre en

baloncesto, representando el uso de las funciones lineales y cuadráticas. En las dos actividades, se involucraron todos los estudiantes participantes, ya fuera realizando las actividades o grabando a sus compañeros. Posteriormente, los videos grabados fueron cargados en dos softwares distintos que permitieron modelar matemáticamente los fenómenos físicos, estos fueron Tracker y MathCad. La discusión de las actividades y sus razonamientos se dio en un aprendizaje colaborativo, donde fueron capaces de desechar razonamientos incorrectos, tomar decisiones y argumentar sus puntos de vista frente a diferentes planteamientos.

Pantoja et al. (s.f.), concluyen que, la integración del aprendizaje basado en problemas, el uso de las tecnologías digitales y el aprendizaje colaborativo permite a los estudiantes tomar un rol activo en su proceso de aprendizaje. Mediante su propia experiencia y la interacción con los compañeros, les permite fortalecer sus ideas, conocimientos y habilidades adquiridas en su proceso educativo. Además de eso, resaltan que, la elección sobre trabajar con situaciones problema en un entorno familiar para ellos, los motiva a aprender matemáticas de forma activa, ya que los aísla del entorno pasivo y algorítmico tradicional de la enseñanza de esta ciencia. Así mismo, aseguran que, la modelación matemática como proceso y recurso didáctico en clase de matemáticas, es una gran opción que permite que los alumnos discutan, expongan sus ideas y perspectivas de cada situación. Finalmente, hacen un llamado a los docentes, donde mencionan que el uso de las tecnologías digitales es responsabilidad directa de estos, ya que son quienes deben optar por trabajar con ellas, siendo conscientes de su importancia en el aprendizaje de los estudiantes.

Este estudio evidencia cómo la integración de situaciones auténticas, trabajo colaborativo y herramientas digitales puede favorecer la comprensión de fenómenos matemáticos reales. No obstante, para comprender con mayor profundidad cómo se construyen dichas comprensiones,

resulta necesario considerar enfoques analíticos más estructurados, como los niveles de comprensión, que se exploran en la siguiente sección.

2.2 Niveles de Comprensión en el Aprendizaje de las Funciones

Para analizar cómo los estudiantes construyen significado alrededor de las funciones, es importante incorporar aspectos teóricos que permitan caracterizar los niveles de comprensión alcanzados, justo el objetivo que se persigue en la presente investigación. En esta línea, el estudio de Pépin y Dionne (1997) expuesto en su artículo titulado *Compréhension d'élèves de quatrième secondaire (14–15 ans) de notions liées aux fonctions mathématiques*, Pépin y Dionne (1997) expone cómo estudiantes de secundaria comprenden diversas nociones fundamentales asociadas al concepto de función matemática, como lo son la relación entre variables, el significado de la pendiente, la forma algebraica de una función lineal y su representación gráfica. El estudio se llevó a cabo mediante un enfoque cualitativo basado en entrevistas clínicas individuales, en las que se les proponían a los estudiantes tareas orientadas a explorar su comprensión conceptual en diversos contextos, utilizando representaciones algebraicas, gráficas y tabulares.

Los autores organizaron su análisis a partir de los niveles de comprensión propuestos por Herscovics y Bergeron (1988), clasificando las respuestas de los estudiantes según diferentes dominios: lógico-matemático, lógico-físico y algebraico. Basados en esta estructura, se pudieron dar cuenta que un estudiante podía mostrar una comprensión más avanzada en un dominio y al mismo tiempo mostrar niveles más bajos en otro. Bajo este panorama, los autores afirmaron que la comprensión no es un proceso lineal, sino que depende del tipo de tarea, del contexto y de la representación utilizada. Así mismo, identificaron que muchos errores de los estudiantes no se daban por una falta total de comprensión, sino a una comprensión fragmentada o desarticulada entre las distintas representaciones de la función.

Uno de los aportes más importantes de la investigación es que pone en operación los niveles de comprensión que propusieron Herscovics y Bergeron en un contexto real de aula, demostrando cómo es posible categorizar con precisión las producciones de los estudiantes al trabajar con funciones. Esta categorización se convierte en una herramienta útil para el análisis didáctico, ya que permite identificar con mayor claridad los avances, dificultades y retrocesos en el aprendizaje de conceptos funcionales. En ese sentido, el artículo constituye un antecedente directo para investigaciones como la presente, en la cual se busca caracterizar el nivel de comprensión de los estudiantes al interactuar con tareas de modelación matemática centradas en el concepto de función.

2.3 Enseñanza de Funciones mediante Modelación Matemática

La modelación matemática no solo ha sido estudiada como objeto de investigación, sino también como estrategia didáctica. Un ejemplo es el trabajo de León (2015), en su tesis titulada *“Una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de funciones lineales”* cuyo punto de partida fue el problema de que en su país natal (México), los estudiantes que ingresaron a la universidad presentaron bajo desempeño en pruebas diagnósticas donde involucraba el concepto de función. Ella afirma que las funciones son el modelo matemático por excelencia de cualquier área de estudio. Así mismo, resalta que los docentes no utilizan estrategias adecuadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función, motivo por el cual justifica su trabajo, aludiendo al hecho de que los docentes deberían interesarse en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y utilizar las estrategias adecuadas que les permitan construir y consolidar bases sólidas ante su ingreso a la educación superior.

En la investigación, la autora sostiene que es importante crear ambientes de aprendizaje cuyo eje principal sea el estudiante, centrando este proceso en la interacción entre el objeto

matemático y el uso de tecnologías digitales, que le permitan construir una sólida comprensión del concepto de función lineal. Al igual que los autores antes mencionados, León busca crear un vínculo entre los fenómenos del mundo real y las matemáticas, fomentando la transición entre los diversos tipos de representaciones.

En la tesis, la autora plantea una secuencia de actividades, a las cuales denomina: visualización de cambios en el parámetro a , actividad del plan telefónico, actividad de conversión de temperaturas y las corredoras. En la primera actividad, se buscaba que los estudiantes graficaran funciones lineales del tipo $f(x) = ax$, tanto a lápiz y papel como en GeoGebra. El objetivo era explorar la variación del parámetro a en diversas funciones, y se buscaba que los estudiantes reflexionaran sobre el efecto que éste generaba en la función, y comprender cómo cambiaba la inclinación de la recta según variaba este valor, además de visualizar la relación entre las variables. En la segunda actividad, los estudiantes trabajaron con una situación real, en donde debían evaluar el costo de un plan telefónico en función del número de llamadas realizadas. El objetivo era que, mediante preguntas directas, el estudiante identificara y expresara algebraicamente la relación entre las variables, de manera que pudiera responder a diferentes interrogantes planteados dentro del contexto de la actividad. Para cumplir con el objetivo, los estudiantes utilizaron GeoGebra para graficar la función a partir de datos tabulados. La tercera actividad se basó en la relación entre las escalas de temperatura y la función lineal, donde a través de datos tabulados se esperaba que los estudiantes encontraran esta relación entre los grados Celsius y Fahrenheit, que pudieran observar cómo el cambio de una variable afectaba la otra, y cómo se daba la tasa de cambio. En la última actividad, se les propuso una situación que trataba sobre una carrera entre dos corredoras, donde se involucraron variables como la distancia, el tiempo y la velocidad. El objetivo de esta situación se centró en que los estudiantes pudieran representar gráficamente las funciones que modelaban el

recorrido de cada corredora, y a partir de allí responder preguntas claves como: ¿cuál es la variable independiente y la dependiente?, ¿qué significa el punto de corte entre las dos gráficas?, entre otras preguntas, lo que les permitió analizar las gráficas y obtener información clave de allí. Es importante mostrarles a los estudiantes el sentido de las matemáticas, y esta es una forma de lograrlo.

Dentro de los resultados de esta investigación, se resalta el hecho de que los estudiantes que optaron por darle uso a la herramienta digital de GeoGebra tuvieron un mayor desempeño en el desarrollo de las actividades y en la comprensión de las funciones lineales, ya que la estructura dinámica de estas tecnologías les permite visualizar información que a lápiz y papel es poco probable que se vea. Así mismo, la investigación concluye que las tecnologías digitales como mediadoras entre el objeto matemático de función lineal y las situaciones presentadas, permitieron aclarar la comprensión del objeto estudiado. Las actividades fueron un punto a favor en el factor motivacional de los estudiantes, lo que permitió facilitar el tránsito entre las representaciones gráficas y algebraicas, evidenciando así que las funciones lineales modelan fenómenos y situaciones del mundo real.

La investigación de León refuerza la importancia de crear ambientes de aprendizaje significativos a partir de situaciones reales, tecnología y modelación. Este planteamiento establece relación con otras propuestas que, aunque centradas en otros temas del cálculo, también destacan el papel de la tecnología en el tránsito entre representaciones funcionales, como se verá a continuación.

2.4 Tecnología y Representaciones Múltiples en la Modelación Matemática

Algunos de los autores anteriores, demostraron el poder de las tecnologías para facilitar la enseñanza y el aprendizaje, especialmente en relación con el concepto de función. Estudios posteriores extendieron el uso de herramientas digitales a conceptos más avanzados del cálculo, como es el caso de Jácome (2019), a través de su investigación titulada “*Matematización del Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de tecnologías digitales*” investiga cómo a partir de situaciones realistas los estudiantes son capaces de desarrollar habilidades para identificar patrones, modelar fenómenos y conectar los diferentes tipos de representaciones de las funciones con el Teorema Fundamental del Cálculo. Este trabajo es relevante para la presente investigación, ya que demuestra cómo el uso de tecnologías digitales, como GeoGebra y Tracker, puede facilitar la transición entre representaciones y promover una comprensión más profunda de conceptos matemáticos complejos. Además, este estudio resalta la importancia de la modelación matemática como un proceso que permite a los estudiantes relacionar las matemáticas con situaciones del mundo real, lo que refuerza la necesidad de abordar el estudio de funciones lineales y cuadráticas desde esta perspectiva. En cada una de las situaciones planteadas, la autora diseñó una secuencia de tareas organizadas en diferentes niveles de matematización, donde involucró contextos físicos y geométricos como es el caso de la Caída Libre y situaciones de área y perímetro. Para el desarrollo de las tareas, Jácome incorpora el uso de tecnologías digitales, más exactamente Tracker y GeoGebra.

Jácome concluye que las tareas diseñadas ayudaron a que los estudiantes pudieran visualizar el comportamiento de las variables en situaciones de variación y cambio, a través del tránsito entre las representaciones gráficas y algebraicas. Así mismo, resalta que el uso de las tecnologías digitales fortaleció el proceso de aprendizaje, al permitirles a los estudiantes la

manipulación y validación de los modelos que propusieron, y de esta manera se produjo una comprensión más profunda del Teorema Fundamental del Cálculo. Finalmente, enfatiza en que las interacciones sociales en el aula, mediante la discusión guiada de los diversos resultados y conjeturas propuestos por los estudiantes, ayudan a fortalecer sus aprendizajes alrededor de los conceptos importantes del cálculo integral.

Al igual que Jácome, Toloza (2022) exploró el potencial de la modelación con tecnología a través de su tesis titulada “*Contribuciones de la Modelación Matemática al estudio del concepto de integral*” en la cual tenía como objetivo reconocer las contribuciones de este proceso matemático en problemas auténticos, mientras se estudiaba el concepto de integral. Para lograr el objetivo, la autora diseñó una serie de actividades mediadas por el uso de GeoGebra, las cuales denominó: descarga de un archivo, comportamiento de transmisión de un virus y modelación del área bajo la curva de una función potencia. En todas estas situaciones involucró el concepto de integral, además de contextualizarlas con la vida cotidiana de los estudiantes.

En cada una de estas actividades se les presentó a los estudiantes un archivo de GeoGebra con la simulación de cada situación, donde se les permitía manipular, realizar el proceso de modelación y extraer significados y aprendizajes.

Los instrumentos de recolección de información que usó la autora fueron entrevistas estructuradas grabadas en audio video, a través de la plataforma Microsoft Teams, dado el tiempo de pandemia, así como el uso de talleres y el aula virtual de GeoGebra, donde se realizaron encuentros sincrónicos con los estudiantes durante algunos días, con sesiones entre 4 a 5 horas diarias. Las respuestas dadas por los estudiantes fueron socializadas con el objetivo de fortalecer su proceso de aprendizaje.

Finalmente, Toloza (2022), concluye que, a partir del trabajo realizado con los estudiantes y el análisis de los datos, fueron identificados cuatro aportes principales del proceso de modelación matemática en el estudio del concepto de integral. En primer lugar, el uso de la modelación de problemas auténticos conllevó a la motivación de los estudiantes, ya que estos mostraron compromiso al enfrentarse a las situaciones planteadas. En segundo lugar, estos problemas también sirvieron para desencadenar modelos matemáticos, particularmente en la representación de área bajo la curva para comprender la integral. En tercer lugar, pudieron asociar conceptos claves con el de la integral, viéndola como acumulación y como antiderivada. Por último, se resaltó el uso de las tecnologías digitales durante el proceso de modelación, las cuales ayudaron a visualizar y profundizar en los conceptos implicados.

Mientras Toloza se centró en el estudio del concepto de integral mediado por tecnologías digitales, otros trabajos anteriores también han explorado cómo las tecnologías permiten a los estudiantes interpretar fenómenos reales desde una perspectiva gráfica. Este es el caso del estudio de Torres Bezaury (2004) quien en su tesis titulada "*La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*" ofrece un valioso punto de partida para comprender cómo los estudiantes construyen significado matemático cuando interactúan con herramientas tecnológicas. Las actividades fueron desarrolladas con jóvenes de nivel medio superior en el IPN (Instituto Politécnico Nacional). Allí, la autora exploró cómo el uso de sensores y calculadoras graficadoras transformaba su manera de interpretar fenómenos reales, como el movimiento de una persona. Lo más revelador fue observar que, al enfrentarse a problemas contextualizados, los estudiantes no solo aprendieron a realizar gráficas, sino que desarrollaron una comprensión más profunda de conceptos como velocidad y pendiente, al vincularlos con experiencias concretas. Esto sugiere que

la modelación, cuando se apoya en tecnología, crea un vínculo entre las matemáticas abstractas y el mundo que los rodea.

Uno de los hallazgos importantes fue que los estudiantes lograron transitar entre diferentes representaciones, desde lo verbal hasta lo gráfico, sin quedarse atrapados en procedimientos mecánicos. Por ejemplo, al simular el recorrido de Valentina, quien debía llegar a la biblioteca y regresar en un tiempo límite, los jóvenes no solo hallaron distancias, sino que discutieron cómo los cambios en la inclinación de las gráficas reflejaban aceleraciones o pausas en el movimiento. Este proceso les permitió identificar patrones, argumentar sus ideas y, sobre todo, darle sentido a las matemáticas. La tecnología, en este caso, no fue solo una herramienta de cálculo, sino un medio de exploración donde los errores y ajustes formaron parte natural del aprendizaje.

Las conclusiones de este trabajo resaltan la importancia de diseñar actividades que integren la modelación con tecnología, pues favorecen una comprensión dinámica y multidimensional de las funciones. Los estudiantes no se limitaron a memorizar fórmulas, sino que aprendieron a leer gráficas como narrativas de fenómenos reales, conectando conceptos matemáticos con sus propias experiencias. Esto abre una ruta prometedora para la educación matemática actual: si queremos que los estudiantes alcancen niveles de comprensión más profundos, necesitamos problemas que los inviten a modelar, debatir y reflexionar, usando la tecnología no como un fin, sino como un aliado para pensar.

La relación entre tecnología y pensamiento variacional también fue explorada por Fiallo y Parada (2014), quienes desarrollaron un curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. Este se encuentra sustentado en el artículo que lleva el mismo nombre. Esta investigación, surgió como una alternativa que buscaba combatir la deserción y repitencia en los cursos de cálculo diferencial en la Universidad Industrial de Santander. Los

autores mencionan que esto se debe a la falta de comprensión de los conceptos previos necesarios para tomar el curso, dado que, de manera general, en las instituciones del país, estos conceptos son restringidos a la manipulación algebraica y al carácter estático de las representaciones de los objetos matemáticos. Adicionalmente, afirman que los docentes han venido centrando los procesos de enseñanza y aprendizaje alrededor de los contenidos y algoritmos para la solución de ejercicios, y no en los procesos matemáticos como lo mencionan el Ministerio de Educación Nacional en Colombia, y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas a nivel internacional.

Con el objetivo de promover un carácter dinámico de las representaciones de los objetos matemáticos y combatir la situación expuesta, los autores diseñaron e implementaron unas actividades en un selecto grupo de estudiantes con necesidades académicas. Estos talleres tenían el objetivo de favorecer la construcción de conceptos matemáticos mediante el análisis de fenómenos de variación y cambio. Los estudiantes se enfrentaron a situaciones particulares, donde se esperaba que desarrollaran habilidades para interpretar y establecer relaciones funcionales a través de la conexión entre las diversas formas de representación del objeto matemático abordado. Así mismo, se promovió la formulación de conjeturas y su posterior validación mediante argumentos matemáticos.

Como conclusión general, Fiallo y Parada destacan que, aunque si bien se busca que estas actividades contribuyan a la construcción del conocimiento matemático, este curso debe visualizarse más como un acercamiento empírico e intuitivo a los conceptos matemáticos, dado que no es fácil llenar los vacíos conceptuales que traen los estudiantes de años de estudio. Los autores sugieren a que, a través de estas actividades, se debe sacar provecho de las preguntas e inquietudes que tengan los estudiantes para abordar los conceptos que son fundamentales para iniciar el curso de cálculo diferencial. Así mismo, insisten en que los estudiantes deben entender

el cambio y la variación, la identificación de variables, el uso de las representaciones y sus conexiones, así como la importancia de la comunicación y el razonamiento y la demostración mediado por el uso de las tecnologías digitales, las cuales permiten explorar, conjeturar y comprobar las ideas matemáticas, así como la idea del carácter dinámico de las matemáticas.

Además de los trabajos anteriores centrados en cálculo, otras investigaciones recientes se han enfocado en el uso de tecnologías y modelación en la enseñanza de funciones lineales desde una perspectiva inclusiva, como en el caso de Arciniegas H. (2022), con su tesis titulada “*Aula inclusiva de matemáticas: Un estudio de situaciones de variación y cambio*”, en la cual se centra en la exploración de estrategias para promover las prácticas variacionales en un grupo diverso de estudiantes. Esta investigación se enmarca en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), la cual considera que el conocimiento matemático surge como una construcción social y resalta la importancia del contexto en el aprendizaje. Desde este enfoque, la autora sugiere que los estudiantes deben relacionarse con las distintas representaciones matemáticas (gráfica, tabular, algebraica y verbal) con el objetivo de mejorar su comprensión de los conceptos a tratar.

Para abordar la inclusión, Arciniegas propone una estrategia metodológica basada en la caracterización del grupo y la adaptación de las actividades para atender las necesidades de los estudiantes con diferentes ritmos de aprendizaje. Destaca la importancia del uso de las tecnologías como mediador en el proceso de aprendizaje y la importancia de fomentar diferentes formas de motivación, expresión y representación. La autora propone el uso de situaciones auténticas mediada por GeoGebra como herramienta digital, con el objetivo de fomentar la exploración matemática y el tratamiento de datos para promover la construcción del conocimiento matemático.

Así mismo, resalta la importancia del trabajo colaborativo, donde se busca a través de la discusión entre pares incentivar la construcción del conocimiento en conjunto.

Arciniegas, plantea la enseñanza de la función lineal mediada por una situación auténtica, a través de una actividad basada en el uso de aplicaciones móviles como WhatsApp, Facebook y Netflix, cuyo objetivo es determinar el consumo de datos por medio de otra aplicación denominada “tu móvil”. La actividad se desarrolla en cuatro momentos diferentes, donde el enfoque radica en relacionar las representaciones gráfica, algebraica y tabular. Así mismo, la autora buscaba que los estudiantes identificaran patrones y regularidades, los generalizaran y dieran uso a las herramientas digitales para finalmente poder caracterizar los ritmos de aprendizaje de cada estudiante, así como el proceso de Construcción del Conocimiento Matemático en el desarrollo de las Prácticas Variacionales.

En el análisis de los resultados, Arciniegas enfatiza en la importancia de conectar las representaciones gráfica, algebraica y tabular, con el objetivo de que los estudiantes construyan conocimiento matemático. Así mismo, evidencia el favorecimiento del uso de las tecnologías digitales cuando se trabajan con situaciones que implican variación, y en este caso particular, fomentando la comprensión de la pendiente como un valor constante. Por último, resalta que las actividades no solo deben incluir el uso de representaciones múltiples y tecnologías digitales, sino que se les debe permitir a los estudiantes formular conjeturas y comprobar hipótesis.

3. Aspectos Teóricos y Conceptuales

Los estudios revisados evidencian que la modelación matemática y el uso de tecnologías digitales favorecen la comprensión en el estudio del concepto de función. Sin embargo, estas investigaciones no profundizan en cómo caracterizar los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes durante su interacción con dichas herramientas. Para abordar esta pregunta, el presente estudio se sustenta en tres pilares teóricos: (1) la modelación matemática como proceso de aula (Kaiser y Schwarz, 2010), (2) los niveles de comprensión de Herscovics y Bergeron (Contreras, 1994), y (3) el rol de las representaciones múltiples en el aprendizaje de funciones (Duval, 2006). A continuación, se detallan estos fundamentos.

3.1 Modelación Matemática

En los Congresos del CERME, ICME y PRIMAS-Projet (2007–2013), citados por Toloza (2022), se afirmó que muchos investigadores sostienen que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben estar estrechamente relacionados con procesos de modelación matemática. Esta línea de trabajo es recurrente en propuestas didácticas innovadoras, aunque no existe una única definición del concepto, como lo expresan Kaiser y Sriraman (2006), citados por Toloza (2022). Por esta razón, en el presente estudio se adopta el enfoque de la modelación matemática como un proceso implementado dentro del aula, basado en situaciones auténticas.

3.1.1 Situaciones auténticas

Toloza (2022) plantea que trabajar la modelación en el aula ayuda a relacionar situaciones de la vida real con herramientas matemáticas. Además, menciona que es importante que esas

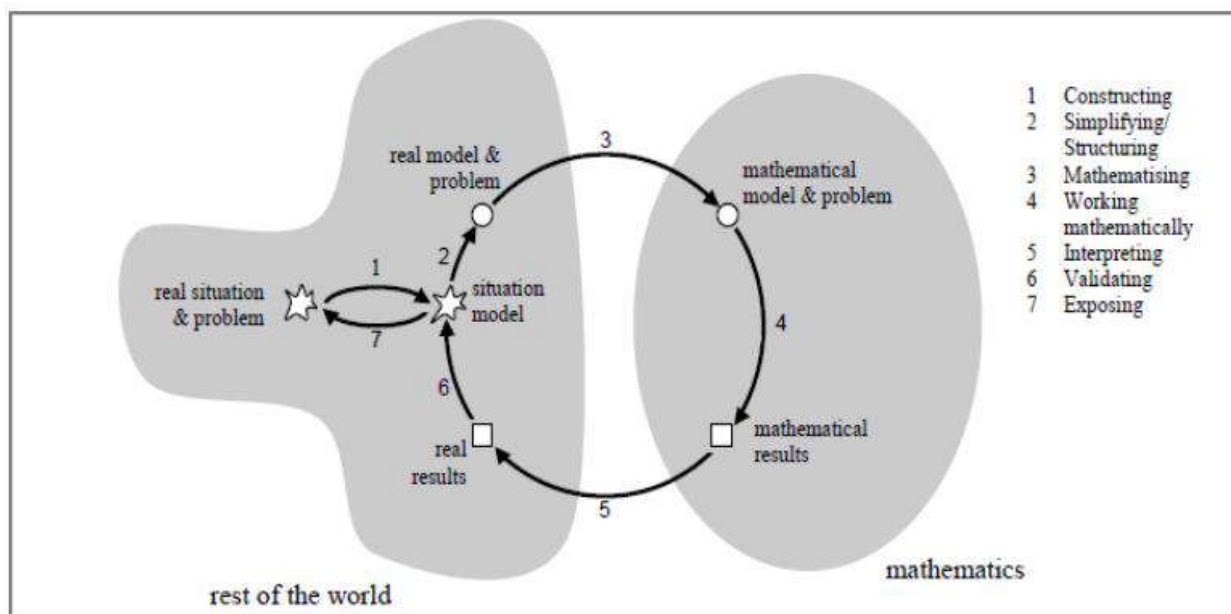
situaciones estén bien pensadas y tengan sentido para los estudiantes, evitando usar problemas que parezcan forzados o muy alejados de su realidad. En esa misma línea, Kaiser y Schwarz (2010), citados por Toloza, proponen lo que llaman “*problemas auténticos*”, es decir, situaciones que resulten cercanas, interesantes y que despierten el interés de los estudiantes.

Toloza (2022) afirma que este tipo de situaciones permite que los estudiantes construyan activamente un modelo, ya que un mismo fenómeno puede representarse de distintas maneras. Así mismo afirma que, lo más importante no es solamente encontrar una solución, sino utilizar las matemáticas para entender mejor lo que está ocurriendo en ese contexto.

Autores como Blum y Leiss (2007), Borromeo-Ferri (2006) y Blum y Borromeo (2009), citados por Toloza (2022), han trabajado el ciclo de modelación desde diferentes enfoques. En la figura 1 se presenta el ciclo de modelación como lo propusieron estos últimos autores mencionados.

Figura 1

Ciclo de modelación de Blum y Borromeo (2009)



Nota. Tomado de Blum y Borromeo (2009)

Por su parte, Londoño y Muñoz (2011) sustentan este ciclo de manera más precisa y resumida, donde afirman que el proceso inicia con la comprensión del problema en su contexto real, etapa en la cual se seleccionan y estructuran las variables relevantes. A esto le sigue una fase de matematización, en la que los elementos del problema se trasladan a un lenguaje matemático. Luego, se realiza un trabajo matemático que incluye la aplicación de procedimientos y técnicas para operar sobre el modelo. Finalmente, se interpretan los resultados obtenidos y se comparan con el contexto original, permitiendo evaluar la pertinencia del modelo y, si es necesario, retroalimentar el ciclo.

Para efectos de esta investigación, se usará como guía el ciclo de modelación desde la explicación dada por Londoño y Muñoz (2011). De esta manera, se organizaron las etapas del ciclo descrito por Blum y Borromeo (2009) en **cuatro fases generales**. Esta estructura será utilizada

tanto para el diseño de las tareas como para el análisis de las producciones de los estudiantes. Las fases consideradas son:

1. **Comprensión y estructuración:** identificación del problema real, simplificación del contexto y definición de variables clave mediante observación y recolección de datos.
2. **Matematización:** traducción de la situación real a un modelo matemático, por medio de representaciones algebraicas, gráficas o tabulares.
3. **Trabajo matemático:** aplicación de procedimientos matemáticos para operar con el modelo construido.
4. **Validación e interpretación:** contrastación de los resultados con el contexto original para verificar su coherencia y utilidad, con posibilidad de volver a ajustar el modelo si es necesario (Blum & Borromeo-Ferri, 2009; Londoño y Muñoz, 2011).

Esta organización del ciclo de modelación facilitará su aplicación didáctica en el aula, ya que permite planear las actividades de manera coherente y analizar el progreso de los estudiantes en su tránsito entre el contexto real y la estructura matemática de las funciones.

3.2 Experimento de Enseñanza como investigación de diseño

Molina et al. (2011), sustentan que dada la aspiración de docentes e investigadores por entender lo que sucede en el aula cuando los estudiantes obtienen conocimiento, ha conllevado a encontrar metodologías pertinentes que logren obtener información clave dentro de los entornos de enseñanza y aprendizaje, con el objetivo de adquirir significancia en la investigación práctica. Los autores afirman que esta situación ha permitido la aparición de metodologías alternativas a las que ya existen, las cuales surgen en muchos casos, de la planificación de prácticas que se han realizado sin la consecución de un modelo concreto. Allí, nace la investigación de diseño, la cual

busca entender y renovar los procesos educativos actuales, al considerar entornos reales en toda su complejidad, entre tanto se desarrolla y analiza al mismo tiempo un plan de enseñanza previamente diseñado.

Los experimentos de enseñanza se ubican dentro del modelo de la investigación de diseño. De manera general, este modelo consta de una serie de secciones de enseñanza, donde los participantes son generalmente un investigador-docente, mínimo un estudiante y mínimo un investigador-observador, como lo afirman Steffe y Thompson (2000) citados por Molina et al. (2011). La duración del experimento puede variar, desde un par de horas hasta algunos años y el lugar de trabajo pueden ser pequeños aposentos – laboratorio para realizar entrevistas, sesiones de clase completas o también espacios de aprendizaje con mayor capacidad. Estos estudios se caracterizan principalmente por el rompimiento de la diferencia entre docente e investigador, ya que el objetivo de los investigadores es examinar activamente el aprendizaje y razonamiento de los estudiantes, afirman Kelly y Lesh (2000); Steffe y Thompson (2000) citados por Molina et al. (2011). En este tipo de modelo, es uno de los investigadores quien realiza las intervenciones y no el docente titular, a menos que éste quiera participar completamente en el estudio. Kelly y Lesh (2000), citados por Molina et al. (2011), afirman que es importante resaltar que estas intervenciones deben estar plenamente definidas y basadas en los objetivos de la investigación, por lo tanto, deben priorizarse por encima de lo que el docente titular pueda considerar más correcto para los estudiantes (Molina et al., 2011).

3.3 Niveles de Comprensión

Araya et al. (2007) afirman que se han realizado varios intentos para definir qué significa comprender un concepto matemático y si es posible hablar de distintos niveles de comprensión. Existen diversas aproximaciones al tema. Por ejemplo, Johnson y Johnson (1989) señalan que

comprender tiene que ver con cómo las personas se relacionan con el mundo a partir del lenguaje, la cultura y la experiencia. Van Hiele (1957), en sus estudios sobre la enseñanza de la geometría, sostiene que comprender implica ser capaz de explicar paso a paso lo que se está haciendo y actuar correctamente ante situaciones no enseñadas directamente. Por su parte, Gardner (1993, citado en Barquero, 2002) plantea que la comprensión consiste en adquirir conocimientos, habilidades y saber aplicarlos de manera adecuada en diferentes contextos.

En el campo específico de las matemáticas, algunos autores han propuesto clasificaciones o niveles de comprensión. Entre ellos, Gómez (s.f.) presenta una tipología basada en el desempeño de los estudiantes, que incluye tres niveles:

- *Comprensión instrumental*: la persona es capaz de aplicar reglas o procedimientos, pero sin entender del todo por qué funcionan.
- *Comprensión relacional*: además de aplicar correctamente los procedimientos, se logran establecer relaciones entre estos y los principios matemáticos que los sustentan.
- *Comprensión integral*: se trata de reconstruir el proceso, justificarlo y comprender a fondo tanto los procedimientos como las ideas matemáticas que los respaldan.

Otra propuesta relevante es la presentada por Contreras (1994), basada en el trabajo de Herscovics y Bergeron (1988). Esta tipología incluye cuatro niveles de comprensión que permiten observar el tránsito desde un pensamiento más informal hacia formas más abstractas y estructuradas:

- *Comprensión intuitiva*: se caracteriza por asociaciones informales entre conceptos matemáticos. Por ejemplo, entender que una línea que sube “va aumentando” o que una superficie

“representa un área”, sin explicarlo con base en definiciones o propiedades matemáticas. Se centra especialmente en una percepción inicial.

- *Comprensión de procedimientos:* aquí los estudiantes logran desarrollar ciertos pasos o técnicas correctamente, muchas veces sin justificar del todo el porqué, pero mostrando una conexión inicial entre los procedimientos y el conocimiento previo.
- *Abstracción matemática:* el estudiante comienza a generalizar ideas, identificar patrones y reconocer relaciones matemáticas más allá de ejemplos particulares.
- *Formalización:* en este nivel se logra trabajar con definiciones formales, estructuras simbólicas y justificar con claridad lo que se hace, utilizando argumentación lógica o demostrativa.

Para enriquecer el análisis de estos niveles, se consideró también el trabajo desarrollado por Pépin y Dionne (1997), quienes al igual que Contreras (1994) toman como base los niveles de comprensión propuestos por Herscovics y Bergeron (1988). Allí profundizan en cómo se manifiesta la comprensión en distintos tipos de tareas (matemáticas puras, físico-matemáticas o de aplicación contextual). Aunque su clasificación es más detallada y específica por áreas, aporta características importantes que permiten ampliar el enfoque planteado por Contreras (1994). En su estudio, los autores afirman que estos niveles no deben interpretarse como una secuencia rígida ni como etapas que todos los estudiantes recorren de la misma manera. Por el contrario, reconocen que el pensamiento de un estudiante puede ubicarse en distintos niveles dependiendo del tipo de tarea que se le proponga.

A pesar de haber considerado esta propuesta más extensa, para efectos de esta investigación se opta por trabajar con la tipología de Herscovics y Bergeron (1988), tal como fue presentada por Contreras (1994), ya que permite una clasificación más clara y operativa en el análisis de las

producciones escritas y orales de los estudiantes. No obstante, para describir con mayor claridad cada nivel, se tomaron algunos elementos y ejemplos aportados por Pépin y Dionne, con el fin de hacer más comprensible la manera en que se manifiesta la comprensión en contextos reales y variados.

De este modo, cuando en los análisis posteriores se categorice una respuesta como perteneciente a alguno de estos niveles, se mantendrá la cita original (*Herscovics & Bergeron, citados en Contreras, 1994*), ya que esta tipología es la base de la clasificación, aunque sus descripciones hayan sido enriquecidas para hacerlas más claras y aplicables al contexto escolar trabajado en este estudio.

3.4 Enseñanza de las funciones en la educación secundaria

El concepto de función ha venido siendo transformado desde la antigüedad. Boyer (1986), citado por Almonacid (2018), indica que los primeros pasos de la noción de función se relacionan con la sensación de variación en el medio, como el hecho de diferenciar entre pocos o muchos elementos, lo que conllevó a que fuera vital para la subsistencia de la raza humana. Así mismo, resalta que, en Egipto y la antigua Mesopotamia, los matemáticos ya se involucraban con situaciones de variación. Un ejemplo de esto es el “Papiro de Moscú” (1850 a.C.), el cual explica el proceso para hallar el volumen de una pirámide truncada a través de una ecuación expresada verbalmente, lo cual evidencia una idea primitiva de relación de magnitudes. Otra idea importante que menciona Boyer es que personajes como Apolonio se dedicaron al estudio de las cónicas (elipse, parábola, hipérbola), implementando relaciones geométricas que evidenciaban las propiedades de esas curvas. El autor afirma que la idea de función como una relación entre variables, fue desarrollada en gran parte por figuras como Nicole Oresme en el siglo XIV, el cual

representó gráficamente fenómenos físicos, como es el caso de la velocidad de un objeto en movimiento.

Hoy día no somos ajenos al concepto de función como una relación entre variables, donde una de ellas depende de una o más variables. Esta concepción permite modelar situaciones del mundo que nos rodea. Stewart et al. (2012), citados por Almonacid (2018), exponen que algunos ejemplos que evidencian la dependencia de una variable sobre otras son los modelos físicos como el de caída libre, que fue establecido por Galileo en el siglo XVII, además de ejemplos cotidianos como la variación de la estatura con respecto a la edad, la temperatura varía con respecto al paso de las horas y el costo del envío de un paquete respecto a su peso.

En términos generales, el concepto de función es fundamental en múltiples disciplinas, como lo son la física, la farmacología, la medicina, la economía, la ingeniería, entre otras. El hecho de que este concepto permita establecer relaciones entre variables en diferentes contextos, lo transforma en uno de los objetos matemáticos más importantes que permite el trabajo interdisciplinario.

Además, es importante mencionar que la relación entre las distintas variables no siempre se da de la misma manera, esta puede ser lineal o no lineal. Una función es lineal cuando la tasa de cambio entre las variables es constante, es decir, cuando la variación en la variable dependiente es proporcional a la variación en la variable independiente. Esto se expresa matemáticamente como $y = mx \pm b$, donde m es la pendiente (tasa de cambio constante) y b es el término independiente. Es importante destacar que no todas las funciones lineales son proporcionales, específicamente cuando la función lineal es afín, es decir, cuando el término independiente es distinto de cero ($b \neq 0$). Así mismo, en el caso de una relación de proporcionalidad directa, la ecuación adopta la forma $y = kx$, donde k es una constante positiva ($k > 0$) que representa la tasa

de cambio, dado que un incremento en la variable independiente produce un incremento proporcional en la variable dependiente. Ahora, una función es cuadrática cuando la relación entre las variables no es constante, esta varía de manera creciente y/o decreciente. Un ejemplo de este tipo de función es el experimento del lanzamiento de una pelota al aire, al inicio sube rápidamente, pero a medida que va alcanzando su punto más alto, su velocidad va disminuyendo, al punto que se hace cero y la pelota comienza a caer. Este tipo de función tiene como característica principal que su representación gráfica es una parábola.

Así mismo, es importante mencionar que el estudio del concepto de función es fundamental en la educación matemática, dado que permite a los estudiantes comprender las relaciones de dependencia entre variables y analizar fenómenos de variación y cambio. Según Mesa y Villa (2008), la modelación de fenómenos que implican variación es vital para construir el concepto de función cuadrática, por lo cual los estudiantes deben entender cómo una variable cambia en función de otra y cómo se representan matemáticamente estas variaciones. A su vez, Martínez et al. (2018) resaltan el valor que tiene la variación en el concepto de función, donde destacan que comprender cómo se da la variación en las funciones reales es vital para el aprendizaje de las matemáticas en niveles superiores. De esta manera, es importante que los estudiantes no solo perciban la relación entre variables, así mismo deben comprender la naturaleza de la variación, es decir, cómo se está dando la variación, lo que les permitirá interpretar y modelar situaciones reales de manera adecuada.

3.5 Potencial didáctico de GeoGebra y Tracker en el estudio de funciones

GeoGebra y Tracker son herramientas digitales con un alto potencial didáctico para la enseñanza de funciones lineales y cuadráticas, ya que permiten conectar representaciones múltiples (gráficas, algebraicas, tabulares) y vincularlas con fenómenos reales. GeoGebra, por un

lado, facilita la exploración dinámica de conceptos matemáticos mediante la manipulación interactiva de variables. Por ejemplo, los estudiantes pueden variar los coeficientes de una función cuadrática ($ax^2 + bx + c$) a través del uso de deslizadores y observar en tiempo real cómo cambian la concavidad, el vértice o las raíces de la parábola (Hohenwarter y Jones, 2020). Este tipo de actividades fomenta la formulación de conjeturas y la validación de hipótesis, procesos clave dentro de esta investigación.

Por otro lado, Tracker posibilita la modelación de fenómenos físicos (por ejemplo, el movimiento de un teleférico o la trayectoria de un balón) mediante el análisis de videos a través de fotogramas, y con ayuda de una medida real suministrada el software está en la capacidad de generar datos reales de las distintas variables implícitas en el fenómeno de estudio. Al contrastar estos datos con modelos matemáticos, los estudiantes identifican patrones, ajustan funciones y discuten la validez de sus predicciones, procesos clave en la modelación matemática (Blum & Borromeo, 2009). La combinación de ambas herramientas, GeoGebra para la abstracción teórica y Tracker para la conexión con contextos reales, crea un entorno de aprendizaje que supera las limitaciones de las representaciones estáticas tradicionales (Tall, 1997), promoviendo así niveles de comprensión más profundos.

Este potencial entrará en operación en las actividades descritas en el Capítulo 4, donde GeoGebra y Tracker mediarán la transición entre los niveles de comprensión.

4. Proceso Metodológico

Los fundamentos teóricos expuestos: modelación basada en problemas auténticos, niveles de comprensión y representaciones múltiples, demandan un enfoque metodológico que permita observar cómo los estudiantes construyen conocimiento en contextos reales. Por ello, esta investigación adopta el experimento de enseñanza (Molina et al., 2011), ya que posibilita analizar, en tiempo real, cómo las actividades mediadas por GeoGebra y Tracker promueven tránsitos entre niveles de comprensión. A continuación, se describe el diseño de estas actividades y los instrumentos para recoger evidencias.

4.1 Enfoque Metodológico

El presente trabajo de investigación estará soportado por una metodología cualitativa, basada en el objetivo que se persigue de reconocer los niveles de comprensión que presentan los estudiantes de undécimo grado cuando estudian los objetos matemáticos de función lineal y cuadrática, mediado por el uso de la modelación de situaciones reales y herramientas digitales. Este enfoque es pertinente para la investigación de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el contexto escolar, dado que intenta lograr amplias caracterizaciones sobre interrelación de los estudiantes con los objetos matemáticos basado en situaciones reales.

Para llevar a cabo la investigación, se implementará un experimento de enseñanza, metodología que se enmarca dentro de las investigaciones de diseño. Este modelo permite la observación directa del proceso de aprendizaje de los estudiantes mientras interactúan con las actividades propuestas, siguiendo un ciclo que consta de tres etapas: preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo de los datos. Según Molina et al. (2011), este enfoque

facilita el ajuste constante de las intervenciones didácticas, basándose en las necesidades identificadas durante cada fase de aplicación.

La estructura del experimento sigue tres etapas principales, adaptadas a partir del modelo de Molina et al. (2011): la planeación, donde se diseñan actividades para promover competencias matemáticas; la implementación, que integra situaciones auténticas y tecnologías digitales; y la evaluación, orientada al análisis reflexivo de los resultados. Estas fases, aunque inspiradas en el esquema original (preparación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo), fueron redefinidas para alinearse con los objetivos específicos del estudio. A continuación, se describen las acciones y reflexiones clave desarrolladas en cada una de ellas.

Tabla 1

Acciones y Reflexiones durante el Experimento de Enseñanza

Fase	Descripción de la acción	Reflexión en el contexto del experimento
Planeación	- Selección de problemas auténticos y contextos que les resultan familiares para modelar funciones lineales y cuadráticas. - Diseño de actividades que permitan la observación de la variación de las magnitudes implicadas y la conexión entre las distintas representaciones del objeto matemático a través de estos fenómenos.	Es importante involucrar situaciones que permitan identificar cómo varían las magnitudes involucradas. Por ejemplo, la descarga de una batería sin aplicaciones en segundo plano debe mostrar una variación constante, mientras que el salto de un motociclista exhibe una variación que cambia con el tiempo. Este enfoque asegura que los estudiantes se enfrenten a fenómenos diversos.

	<p>- Establecimiento de los objetivos específicos para cada actividad, enfatizando en el análisis de los datos recolectados y su ajuste a diferentes modelos matemáticos.</p>	<p>Reflexionar sobre la conexión entre los datos recolectados y los modelos propuestos permitirá a los estudiantes comprender que no se trata solo de encontrar una expresión algebraica, sino de justificar por qué ese modelo es adecuado para describir el fenómeno.</p>
<p>Implementación</p>	<p>- Introducción de las herramientas digitales necesarias para analizar y manipular los datos, como Tracker y GeoGebra. - Realización de las actividades diseñadas, enfocándose en guiar a los estudiantes en la recolección y organización de los datos.</p>	<p>Esta etapa necesita garantizar que los estudiantes interactúen activamente con las herramientas, permitiéndoles observar la variación de cada magnitud. Reflexionar sobre cómo las tecnologías pueden apoyar la visualización de fenómenos matemáticos es clave para conectar las representaciones algebraicas y gráficas con la realidad.</p>
	<p>Facilitación de la construcción de modelos matemáticos (lineales y cuadráticos) que representen los fenómenos estudiados, promoviendo la discusión grupal sobre las diferencias entre los modelos ajustados.</p>	<p>Reflexionar sobre cómo los estudiantes justifican su elección de un modelo matemático frente a otro les ayudará a entender la importancia de analizar la relación entre los datos y los modelos. Este paso promueve la habilidad de evaluar críticamente la adecuación de un modelo matemático para un conjunto de datos.</p>
<p>Evaluación</p>	<p>- Análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes, incluyendo gráficas, representaciones</p>	<p>Reflexionar sobre cómo los estudiantes identifican las limitaciones de los modelos utilizados y si son capaces de</p>

algebraicas y justificaciones escritas. proponer mejoras es crucial. Este análisis final permite evaluar no solo

- Discusión de las limitaciones de los modelos ajustados y de las alternativas posibles para mejorar su precisión. la comprensión del contenido matemático, sino también su habilidad para relacionarlo con situaciones auténticas y justificar sus elecciones.

- Elaboración de conclusiones sobre la pertinencia del uso de modelos lineales o cuadráticos en diferentes contextos, destacando las diferencias en las variaciones que representan. En esta etapa, los estudiantes deben demostrar que comprenden que los modelos matemáticos no son solo herramientas de cálculo, sino también representaciones que permiten analizar fenómenos reales. Reflexionar sobre los aprendizajes logrados y cómo estos se conectan con los objetivos planteados al inicio del experimento.

Nota. Acciones y reflexiones basadas en el modelo de Molina et al. (2011)

Así mismo, la investigación se desarrollará en una institución educativa del área metropolitana de Bucaramanga con estudiantes de undécimo grado. En las actividades diseñadas, los estudiantes emplearán Tracker y GeoGebra no solo para representar funciones lineales y cuadráticas, sino también para analizar los datos obtenidos en contextos auténticos y contrastar modelos matemáticos. Este enfoque permitirá vincular la exploración dinámica de las funciones con la validación de los modelos propuestos.

Es por esto que, el objetivo general de este estudio es caracterizar los niveles de comprensión de los estudiantes de undécimo grado cuando estudian las funciones lineales y

cuadráticas, evaluando cómo la actividad conjunta entre el proceso de modelación de situaciones reales y el uso de las tecnologías digitales, permite a los estudiantes desarrollar habilidades más allá de lo algebraico y alcanzar niveles de comprensión más altos.

4.2 Población y Muestra

Para desarrollar la investigación, se ha planteado realizar un experimento de enseñanza con estudiantes de un curso de undécimo grado de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander, ubicada en Bucaramanga, el cual cuenta con 22 estudiantes matriculados. La elección de este grado se debe a que, para este momento de la educación media, los estudiantes han adquirido herramientas matemáticas que les permiten abordar de mejor manera las actividades propuestas. En grados anteriores, específicamente en noveno, se introduce por primera vez el concepto de función; por lo tanto, al llegar a undécimo cuentan con una base que, aunque puede ser superficial, sirve para profundizar en funciones lineales y cuadráticas.

Si bien los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del MEN (2006) para grados décimo y undécimo se orientan hacia el análisis de funciones polinómicas y racionales, así como de sus derivadas, este trabajo busca afianzar las nociones de variación y cambio en un nivel previo, fortaleciendo sus competencias para la educación superior, fomentando un aprendizaje significativo y la comprensión de la utilidad de las matemáticas en contextos reales. A través de diversas intervenciones, se recolectará información que permita implementar, observar, retroalimentar, ajustar y evaluar la interacción de los estudiantes con las actividades, con el fin de caracterizar sus niveles de comprensión.

4.3 Instrumentos de evaluación

Para evaluar el desarrollo de las actividades mencionadas, se utilizarán varios instrumentos. En primer lugar, se aplicarán cuestionarios con tareas asignadas en un libro de GeoGebra con la interacción de applets y análisis de videos en Tracker. Estos libros permiten tener acceso en tiempo real a los razonamientos que presentan los estudiantes por escrito y la opción de detener las actividades en momentos específicos para analizar, aclarar o revisar los resultados. Así mismo, se realizarán discusiones grupales, y se debatirá alrededor de los razonamientos expuestos frente a las soluciones propuestas. Durante el desarrollo de las actividades, se realizará una observación directa, complementada con la recolección de evidencias mediante audios, imágenes o videos, lo que permitirá analizar las interacciones y el razonamiento de los estudiantes de forma más detallada. Con este conjunto de herramientas, se espera adquirir una base sólida de información que nos permita caracterizar los niveles de comprensión de los estudiantes cuando trabajan con funciones lineales y cuadráticas.

4.4 Actividades Didácticas

En esta sección se presentan las actividades diseñadas para la enseñanza y aprendizaje de funciones lineales y cuadráticas en el marco del experimento de enseñanza. Cada actividad ha sido cuidadosamente estructurada para promover la comprensión de conceptos matemáticos a través de contextos auténticos, favoreciendo la exploración, la argumentación y la formalización de ideas matemáticas.

Las actividades están alineadas con los cinco procesos matemáticos fundamentales:

- *Modelación matemática*: Los estudiantes plantean, estructuran y validan modelos matemáticos basados en situaciones reales.

- *Razonamiento:* Se fomenta la identificación de patrones y regularidades, el planteamiento de conjeturas y la justificación y explicación de resultados.
- *Representación:* Se integran diferentes formas de representación de funciones (gráfica, algebraica, tabular).
- *Comunicación:* Se promueve la expresión oral y escrita de ideas matemáticas, favoreciendo la interpretación y explicación de resultados.
- *Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos:* Se desarrollan habilidades algebraicas y de manipulación simbólica mientras se realiza la exploración conceptual.

Las actividades diseñadas materializan los principios teóricos y metodológicos expuestos: cada una parte de un problema auténtico (ej. consumo de batería, movimiento del teleférico), integra representaciones gráficas, algebraicas y tabulares mediante GeoGebra y Tracker, e incluye momentos de exploración, modelación y formalización para observar posibles tránsitos entre niveles de comprensión (intuitivo, procedimental, abstracción, formalización). A continuación, se detallan las cuatro actividades centrales del estudio.

4.4.1 Actividad 1: Consumo de batería en un teléfono móvil

El objetivo de esta actividad es explorar y analizar la relación entre el consumo de la carga de una batería en un teléfono móvil y el tiempo de uso en dos actividades diferentes (ver videos y jugar videojuegos). Allí, los estudiantes identifican las variables implicadas y los patrones de variación, construyen modelos matemáticos, los validan, establecen la transición entre las distintas representaciones de la función y generalizan el comportamiento observado. A través de este proceso, se fomenta la comunicación de ideas matemáticas y el desarrollo de habilidades matemáticas. La actividad se presenta en tres momentos, donde el primero y el último están contextualizados bajo la modelación del consumo de la carga de la batería, y el momento

intermedio se basa en la exploración e identificación del concepto de pendiente y su complemento en la función lineal bajo un contexto diferente, con el objetivo de consolidar su comprensión del objeto matemático abordado.

Objetivos de la Actividad:

- Analizar la relación entre el porcentaje de carga de la batería y el tiempo transcurrido y determinar el tipo de variación.
- Explorar la tasa de cambio entre las variables y comprender el concepto de variación constante.
- Relacionar la tasa de cambio con el concepto de función lineal.
- Transitar entre distintos tipos de representación (tabular, algebraica, gráfica y verbal).
- Plantear, justificar y formalizar la relación matemática observada en el fenómeno.

Presentación al estudiante:

La actividad se propone mediante un recurso interactivo en GeoGebra que incluye un enunciado contextualizado, instrucciones claras y elementos visuales para manipular el tiempo y observar el consumo de batería en dos escenarios: ver videos y jugar videojuegos. El diseño permite que los estudiantes exploren la relación entre las variables, registren datos y comparen el comportamiento en cada caso, promoviendo la formulación y validación de modelos matemáticos.

A continuación, se muestra una captura del recurso tal como fue presentado a los estudiantes:

Figura 2

Presentación Actividad 1

Descarga de una batería en un teléfono móvil - Parte 1

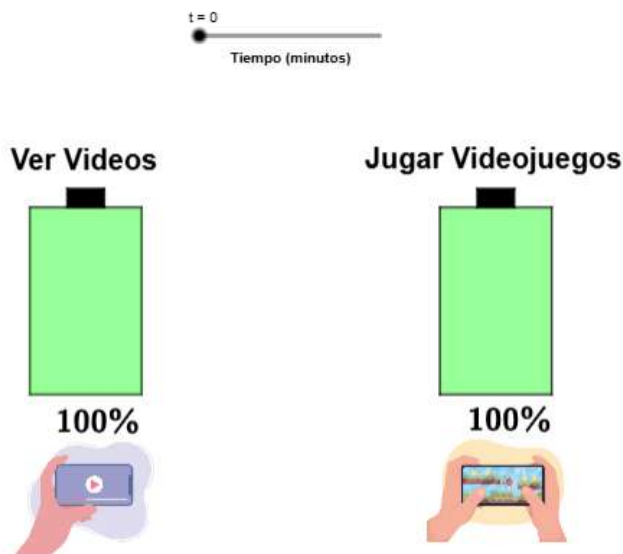
Autor: Diego Armando Romero Quiroga

Un grupo de estudiantes se reúne en su descanso del colegio y deciden usar su teléfono móvil. Algunos de ellos deciden ver videos, mientras que otros quieren jugar videojuegos, sin aplicaciones abiertas en segundo plano. Al cabo de un rato, al observar que la carga de sus teléfonos ha disminuido se preguntan:

¿Cuál de las dos actividades consume más batería?

¿Existe una forma de predecir cuánto durará la batería en cada caso?

Para analizar esta situación, vas a explorar el siguiente applet de GeoGebra. Deberás mover el deslizador de tiempo y con ayuda de las flechas izquierda y derecha del teclado podrás mover el deslizador lentamente, allí podrás observar cómo la carga de la batería de cada teléfono se va reduciendo con el tiempo.



4.4.2 Actividad 2: Movimiento de una cabina de teleférico

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes exploren y analicen la relación entre la distancia recorrida por la cabina y el tiempo que transcurre, identificando la variación constante en su movimiento. Se hace énfasis en la exploración del significado de la pendiente y su interpretación en el contexto de la situación. Como en la actividad anterior, se fomenta la transición entre las distintas representaciones para consolidar la comprensión del objeto matemático abordado.

Objetivos de la Actividad:

- Identificar el tipo de variación en la relación entre la distancia recorrida y el tiempo.
- Interpretar el significado de la pendiente como la tasa de cambio entre las dos variables en el contexto del problema.
- Comparar y transitar de un tipo de representación a otra y consolidar la comprensión del concepto de función lineal.
- Justificar el modelo utilizado y validarlo mediante su coherencia con la situación.

Presentación al estudiante:

La actividad se propone mediante un recurso interactivo que presenta un enunciado contextualizado en el teleférico del Cerro del Santísimo, acompañado de un video real para ser analizado con el software Tracker. El material contiene instrucciones claras y un escenario visual que permite a los estudiantes identificar variables, registrar datos y modelar la relación entre distancia y tiempo, facilitando la comprensión del concepto de variación constante.

A continuación, se presenta una captura del recurso tal como fue propuesto a los estudiantes:

Figura 3*Presentación Actividad 2***El teleférico del Cerro del Santísimo: ¿Cómo se mueve?**

Autor: Diego Armando Romero Quiroga

El teleférico del Cerro del Santísimo, ubicado en Floridablanca, Santander, es una de las atracciones turísticas más emblemáticas de la región. Imagina que eres parte de un equipo de ingenieros que está analizando el movimiento del teleférico para asegurar que funciona de manera eficiente y segura. Para ello, necesitas estudiar cómo varía la distancia recorrida por el teleférico en función del tiempo y determinar si su velocidad es constante.

En esta actividad, utilizarás el software Tracker para analizar un video real de una cabina de teleférico en movimiento.

**4.4.3 Actividad 3: El proyector en el aula**

El objetivo de esta actividad es introducir la función cuadrática explorando y analizando la variación del área proyectada respecto a la distancia del proyector desde el tablero. Se utiliza GeoGebra para explorar cómo el área proyectada varía de manera no lineal con la distancia. Los estudiantes pueden ajustar manualmente la posición del proyector y observar cómo los cambios en los coeficientes de la función cuadrática afectan la gráfica, reforzando así su comprensión de la relación entre parámetros y comportamiento gráfico. Se busca que a través de la exploración y análisis de la relación logren ajustar un modelo matemático que represente la situación y transitar entre las distintas representaciones. Así como en la actividad 1, esta actividad contiene un

momento intermedio en el cual se busca que los estudiantes manipulen los parámetros de la función cuadrática y puedan identificar la función que cumple cada uno individualmente y en conjunto, con el objetivo de consolidar la comprensión del objeto matemático abordado.

Objetivos de la Actividad:

- Explorar y analizar la relación entre el área proyectada y la distancia de este, comprendiendo que la variación no es constante.
- Comparar la variación en intervalos iguales de distancia para evidenciar que la función presenta un crecimiento acelerado.
- Establecer una relación entre los coeficientes de la función cuadrática y su efecto en la gráfica de esta.
- Validar el modelo matemático encontrado a partir de la coherencia con los datos tomados.

Presentación al estudiante:

La actividad se plantea a través de un recurso interactivo que simula un aula de clase en la que un proyector se desplaza sobre un soporte móvil por el aula de clase. El estudiante puede modificar la distancia del proyector al tablero y observar cómo cambia el área proyectada, midiendo y registrando los datos necesarios para modelar la relación. El material combina un contexto visual realista con controles interactivos para facilitar la identificación de variables, el análisis de la variación y el ajuste de un modelo cuadrático que explique el fenómeno.

A continuación, se presenta una captura del recurso tal como fue propuesto a los estudiantes:

Figura 4

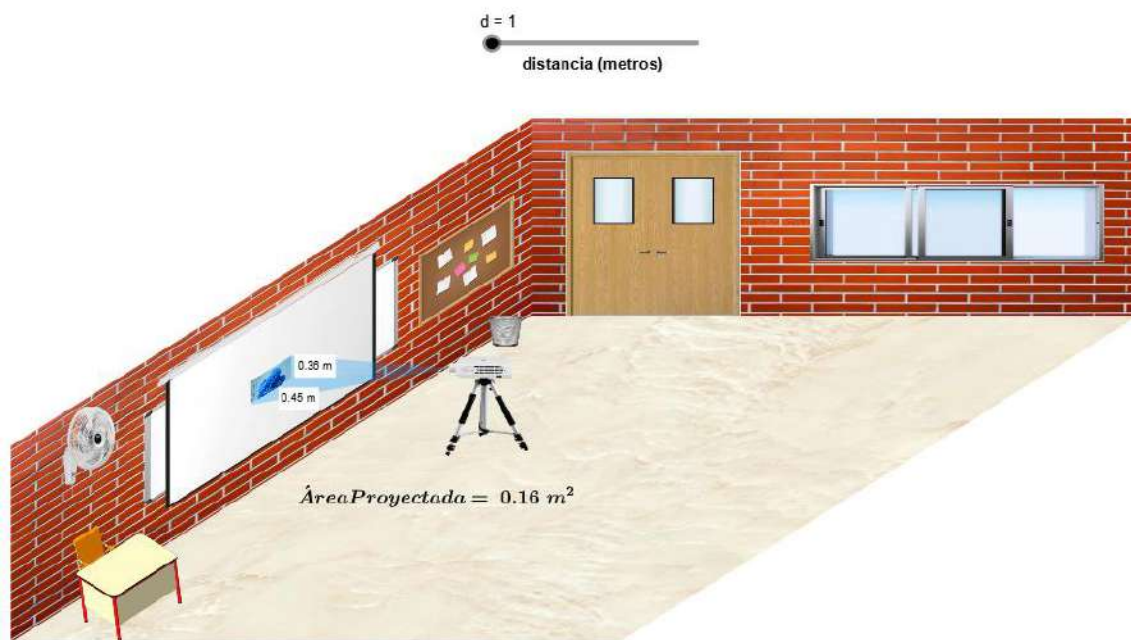
Presentación Actividad 3

El proyector en el aula: Modelando el área proyectada

Autor: Diego Armando Romero Quiroga

Imagina que estás en un aula de clase donde el proyector está montado sobre un soporte móvil. A medida que el proyector se aleja del tablero, el área de la imagen proyectada aumenta.

En esta actividad, explorarás la variación del área proyectada con respecto a la distancia del proyector al tablero.



4.4.4 Actividad 4: El lanzamiento de una falta en baloncesto

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes exploren y analicen la trayectoria de un tiro libre en baloncesto utilizando la herramienta digital Tracker. A través del reconocimiento de la forma parabólica generada al relacionar la altura con el tiempo, se busca que la asocien con la función cuadrática más fácilmente que en la actividad anterior, y que establezcan un modelo matemático que describa el comportamiento de ambas variables. Así mismo, se hace énfasis en la formalización de la variación acelerada en este tipo de función.

Objetivos de la Actividad:

- Identificar la forma parabólica de la trayectoria resultante y establecer su relación con la función cuadrática.
- Analizar la variación presentada entre las variables, reconociendo el cambio acelerado.
- Estudiar el modelo matemático generado por Tracker y compararlo con el propuesto por cada uno.
- Justificar la validez del modelo basado en la coherencia con la situación real.

Presentación al estudiante:

La actividad se introduce con un recurso audiovisual que muestra el lanzamiento de una falta en un partido de baloncesto profesional. Los estudiantes, usando Tracker, registran y analizan los datos de la trayectoria del balón, identificando su forma parabólica y la relación entre la altura y el tiempo. Este material permite contextualizar el concepto de función cuadrática en un entorno deportivo, favoreciendo la interpretación de la variación acelerada y la validación del modelo matemático a partir de datos reales.

A continuación, se presenta una captura del recurso tal como fue propuesto a los estudiantes:

Figura 5*Presentación Actividad 4***Actividad 4: El lanzamiento de una falta en baloncesto**

Autor: [Diego Armando Romero Quiroga](#)

Imagina que eres parte de un equipo de análisis deportivo que está estudiando la trayectoria de una pelota de baloncesto durante el lanzamiento de una falta. Para ello, utilizarás el software **Tracker** para analizar el siguiente video.

**Enfoque Metodológico**

Las actividades están estructuradas en tres fases:

1. **Exploración y estudio de la variación:** Los estudiantes observan y describen cómo varían las variables implicadas en cada fenómeno.
2. **Modelación del fenómeno:** Se ajustan modelos matemáticos utilizando herramientas digitales y cálculos algebraicos y se validan a través de las observaciones iniciales.
3. **Formalización:** Se prueba teóricamente que se cumple que la variación es constante y/o acelerada en cada tipo de función respectivamente.

A través de esta propuesta, se espera que los estudiantes no solo desarrollen habilidades en modelación matemática, sino que también fortalezcan su capacidad para interpretar y justificar fenómenos del mundo real desde una perspectiva matemática estructurada.

4.5 Análisis a priori de las Actividades

El análisis a priori es una herramienta fundamental en esta investigación, dado que permite prever el comportamiento de los estudiantes al momento de participar en las actividades diseñadas y anticipar sus posibles respuestas. El propósito de este análisis es disponer de un marco de referencia que dirija la interpretación de los niveles de comprensión que se evidencien en sus respuestas, aportando de esta manera al análisis de los datos.

En esta investigación, el análisis a priori se realiza sobre las actividades y tareas diseñadas para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos de función lineal y cuadrática, con el propósito de que los estudiantes exploren y visualicen la relación que se establece entre las variables implicadas en cada situación auténtica, así como la conexión entre las distintas formas de representación de estos dos conceptos matemáticos. Se evalúan las posibles respuestas, las dificultades conceptuales y estrategias de razonamiento que podrían presentar los estudiantes, teniendo en cuenta también las preguntas propuestas y contrapreguntas que se les pueda realizar con el objetivo de profundizar en su nivel de comprensión. Este análisis está estructurado en cuatro secciones correspondientes a cada actividad.

Las siguientes tablas, organizadas por actividades, presentan las posibles respuestas esperadas por parte de los estudiantes a cada pregunta, las dificultades que se les podría presentar en su proceso de justificación y las contrapreguntas que se les puede formular con el objetivo de guiar su proceso de comprensión del concepto matemático y aportar en la construcción del

conocimiento. Así mismo, se establece una relación entre cada pregunta y uno o más niveles de comprensión bajo la clasificación presentada por Contreras (1994) y propuesta por Herscovics y Bergeron, con el objetivo de categorizarlas y ubicar las respuestas de los estudiantes dentro de alguno de estos niveles.

4.5.1 *Actividad 1: Consumo de la carga de una batería en un teléfono móvil*

Tabla 2

Análisis a priori Actividad 1

Pregunta	Posibles respuestas esperadas	Nivel de comprensión asociado (Contreras, 1994)	Dificultades potenciales	Contrapreguntas para profundizar
MOMENTO 1				
a) ¿Cuáles son las magnitudes involucradas en esta situación? ¿Son variables o constantes? Justifica tu respuesta.	<ul style="list-style-type: none"> Las magnitudes involucradas son el tiempo y la carga de la batería. El tiempo es una variable independiente porque aumenta de manera constante, y la carga de la batería es una variable dependiente porque depende del tiempo. Las magnitudes son el tiempo y la batería, pero no sé cuál es variable y cuál es constante. Las magnitudes son el teléfono y la batería, y ambas son constantes. 	Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes pueden confundir las magnitudes o no entender la diferencia entre variables y constantes. Pueden no relacionar las magnitudes con el contexto del problema. 	<ul style="list-style-type: none"> ¿Qué magnitud cambia a medida que pasa el tiempo? ¿Cómo lo sabes? ¿Qué magnitud depende de la otra? ¿Por qué?
b) ¿Qué relación existe entre las magnitudes implicadas? Describe tu observación tanto para ver	<ul style="list-style-type: none"> La relación entre el tiempo y la carga de la batería es lineal inversa. En los videos, la batería baja un 20% cada 60 minutos, y en los videojuegos, baja un 25% cada 60 minutos. Esto se puede ver en el applet cuando acomodas el tiempo cada 60 minutos, lo que sugiere que son líneas rectas. 	Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes pueden no notar que la relación es lineal inversa y confundirla con una relación proporcional o 	<ul style="list-style-type: none"> ¿Cómo describirías la forma de las gráficas? ¿Son líneas rectas o tienen curvas? ¿Qué actividad consume más batería? ¿Cómo lo sabes?

<p>videos como para jugar videojuegos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La batería baja más rápido en los videojuegos que en los videos, pero no sé exactamente cuánto. • La relación es inversamente proporcional porque mientras el tiempo aumenta, la carga de la batería disminuye. 		<p>inversamente proporcional.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Pueden no comparar correctamente las dos actividades. 	
<p>c) Completa la información de la siguiente tabla para distintos valores de tiempo con ayuda del applet y luego responde: ¿Observas alguna regularidad en los datos? Explica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Sí, hay una regularidad. En los videos, la batería baja un 20% cada 60 minutos, y en los videojuegos, baja un 25% cada 60 minutos. Esto se puede ver en la tabla porque los valores disminuyen de manera constante. • La batería baja de manera constante, pero no sé exactamente cuánto, según mi percepción parece ser que disminuye regularmente. • Considero que no hay ninguna regularidad, observo que la batería está disminuyendo al aumentar el tiempo, pero no sabría cómo determinar esa regularidad de la que me preguntan. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes pueden no saber cómo completar la tabla correctamente. • Pueden no notar que la disminución de la batería sigue un patrón constante. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo cambia la carga de la batería en cada intervalo de tiempo? • ¿Qué patrón observas en los datos de la tabla?
<p>d) Utilizando los valores obtenidos, grafica la relación entre el tiempo y la batería restante para ambas actividades en</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ambas gráficas son líneas rectas, lo que indica que la relación es lineal. La diferencia es que la gráfica de los videojuegos tiene una pendiente más pronunciada, lo que significa que la batería baja más rápido que en los videos. • Las dos gráficas son líneas rectas, veo que una es más larga que otra. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes pueden no saber cómo ubicar los puntos en el plano cartesiano correctamente. • Pueden identificar que las dos son líneas rectas, pero 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué representa la pendiente de cada gráfica? • ¿Cómo puedes comparar las dos gráficas?

el plano cartesiano. ¿Qué similitudes y diferencias observas entre las dos gráficas? Describe detalladamente tu observación.

no observar la diferencia en términos de la pendiente.

e) Observa las gráficas que construiste, ¿existe una regularidad en la forma en que disminuye la carga de la batería? Explica qué observas y si puedes encontrar una relación entre los valores.

- Sí, existe una regularidad. La carga de la batería disminuye de manera constante en ambas actividades. En los videos, la batería baja un 20% cada 60 minutos, y en los videojuegos, baja un 25% cada 60 minutos.
- Observo dos líneas rectas que inician en un mismo punto, y que finalizan en puntos distintos en el plano.
- Se forman dos rectas, una para cada actividad, una un poco más larga que la otra. La regularidad que observo es que ambas son rectas.

Comprensión intuitiva /
Comprensión de procedimientos /
Abstracción matemática.

- Los estudiantes pueden no notar que la disminución de la batería sigue un patrón constante.
- Pueden no comprender lo que significa regularidad o patrón.

- ¿Cómo cambia el porcentaje de batería en cada intervalo de tiempo (60 minutos)?
- ¿Cuál es la diferencia entre la variación del porcentaje de batería entre 0 y 60 minutos en cada actividad? ¿Y entre 60 y 120 minutos? ¿Observas alguna similitud?

f) Si el consumo de batería sigue un comportamiento regular, ¿cómo podrías

- Si observa la tabla, noto que la batería disminuye una cantidad constante en cada intervalo de 60 minutos. Esto significa que la relación entre el tiempo y la batería es constante y que el teléfono se

Comprensión intuitiva /
Comprensión de procedimientos /
Abstracción matemática.

- Los estudiantes podrán recordar la forma canónica de la función lineal pero no saber cómo hallar la

- ¿Qué representa el número que multiplica a t en la ecuación?
- ¿Cómo puedes calcular la tasa de cambio de la batería?

expresarlo en términos matemáticos? descarga de manera uniforme en ambas actividades, pero con diferente rapidez.

Plantea una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la batería restante en cada actividad. **Cálculo para ver videos**
 Iniciando por determinar el valor de la pendiente, tomaré dos puntos de la gráfica, por ejemplo, A= (0, 100) y B= (60, 80). Para llegar de A a B, es necesario movernos 60 unidades hacia la derecha y 20 unidades hacia abajo, lo que indica que los movimientos hacia la derecha tienen signo positivo y hacia abajo signo negativo. Luego, la pendiente está dada por la variación en el eje y sobre la variación en el eje x, luego la pendiente obtenida es de $m = -\frac{20}{60} = -\frac{1}{3}$. Así mismo, tiene un complemento, que es el corte con el eje y, el cual se da en 100, por tanto, la expresión es $f(t) = -\frac{1}{3}t + 100$.

Cálculo para jugar videojuegos

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, pero con los videojuegos, se obtiene que la expresión es $f(t) = -\frac{5}{12}t + 100$.

- La expresión es algo como $f(t) = 100 - mx$, pero no sé cómo hallar el valor de m .
- Es una ecuación de la forma $f(x) = mx + b$ por ser una línea recta, recuerdo haberlo visto antes pero no sé cómo determinar esos valores.

expresión algebraica correcta.

- Es posible que solo sepan realizar el procedimiento si les dan dos puntos explícitos y realizarlo únicamente de manera algebraica.

MOMENTO 2

<p>a) ¿Qué representa el cambio vertical (calles) y el cambio horizontal (carreras) de este contexto en el plano cartesiano? Explica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • El movimiento a través de las calles hace referencia a la distancia que se recorre en el eje y, y el movimiento a través de las carreras hace referencia a la distancia que se recorre en el eje x. • Es la cantidad de pasos o distancia que se recorre de un lado a otro. • Los pasos que se deben caminar. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes pueden identificar lo que significa en el contexto, pero no lo asocian con el plano cartesiano. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué similitudes encuentras entre los movimientos entre las calles y carreras y los movimientos en el plano cartesiano?
<p>b) ¿Cómo se relaciona la pendiente con la distancia entre los lugares? Justifica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Al igual que la distancia entre los lugares, donde no se puede ir directamente en diagonal, sino movernos horizontal y verticalmente, así funciona la pendiente, relacionamos los movimientos en el eje x con los del eje y para obtener el valor de la pendiente. • Sé que la pendiente es ese triángulo que se forma debajo de la gráfica porque recuerdo que así nos lo enseñaron. • La pendiente se calcula con dos puntos que nos den y se usa la fórmula que nos dieron para restar las y con las y, y las x con las x. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No ver la pendiente como una relación entre los movimientos en los dos sentidos. • Limitarse a que la pendiente solo se halla mediante una fórmula y no visualizarla en este contexto. 	<ul style="list-style-type: none"> • Si ubicas el punto A y B en dos lugares distintos y viajas a través de las calles y carreras, ¿podrías identificar una relación? Justifica tu respuesta. • ¿Podrías asociar esa relación que notaste con la fórmula de pendiente que te sabes? Justifica tu respuesta.
<p>c) En este contexto, ¿qué significa que la</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Si la pendiente es de 3, significa que para dirigirme de un punto a otro debo caminar una cuadra hacia la derecha 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Podrían confundirse con la 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué representan los valores que están en el

función tenga una pendiente de 3? ¿una de $\frac{3}{5}$? ¿y una de $-\frac{1}{2}$? Explica detalladamente tus respuestas.

y 3 cuadras hacia arriba, o una cuadra hacia la izquierda y tres hacia abajo. En la de tres quintos indica que debo caminar 5 cuadras a la derecha (o izquierda) y 5 hacia arriba (o abajo). Y para la de menos un medio debo caminar dos cuadras a la derecha (o izquierda) y 1 hacia abajo (o arriba).

- La pendiente de 3 significa que por cada 3 pasos que doy en y, doy 1 en x, la otra que por cada 3 pasos en y son 5 en x, y la última, por cada paso en y doy dos en x.
- Creo que por ejemplo en la de tres quintos si camino cinco cuadras en una dirección debería recorrer 3 cuadras hacia la otra dirección, pienso que es así.

d) Después de responder las preguntas anteriores, ¿qué entiendes por “pendiente” de una función? Justifica tu respuesta.

- La pendiente es la relación que existe entre los movimientos en el eje y con respecto a los movimientos del eje x, más específicamente, es la tasa de cambio entre las variables implicadas.
- Son los pasos que doy para ir de un punto a otro, por ejemplo, 3 pasos en x y 4 pasos en y.
- Creo que es el nivel de inclinación de la recta, si es más larga es menos inclinada.

procedimientos / Abstracción matemática.

dirección de los movimientos.

- Invertir la situación, es decir, si la pendiente es tres quintos, pensar que caminan 3 cuadras en calles y 5 en carreras.

numerador y denominador de la pendiente?

- Si la pendiente es un número entero, ¿cómo se da el movimiento?

Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.

- Es posible que tengan una idea muy superficial o básica, pero no comprender completamente el concepto.
- Limitarse a responder bajo las ideas que poseen con antelación, sin relacionarla con las preguntas anteriores.

- Basándote en la actividad del applet y su manipulación, ¿qué entiendes por “pendiente” de una función lineal, en este caso?

- Cuando estudias los movimientos en los sentidos diferentes, ¿puedes establecer una relación?

- Si tomas otros dos puntos en la misma recta, o solo cambias uno, ¿se sigue manteniendo esa relación?

e) Sabiendo que la forma canónica de la función lineal está dada por $f(x) = mx \pm b$, ¿qué representa el valor de b en la función lineal? Justifica tu respuesta.

- Explorando nuevamente el applet me doy cuenta de que ese valor es el punto C que aparece allí, dado que al mover los puntos A y B la ecuación que aparece en pantalla cambia y ese valor viene siendo el punto donde la recta se cruza con el eje vertical.
- Creo que es punto C que está en la gráfica porque siempre que cambio los puntos se está moviendo y la forma canónica se parece a la que está en el applet.
- No estoy seguro, pero creo que debe ser un punto intermedio en la función, por ejemplo, si tomo A y B, entonces debería ser un punto en la mitad de A y B.

Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.

- No asimilar la forma canónica de la función lineal con la presentada en el applet.
- No saber justificar ese valor como punto de corte con el eje y.

- Observa el applet y la función lineal en su representación algebraica que aparece allí y relaciónala con la forma canónica de la función lineal, ¿se parecen? Justifica tu respuesta.
- Ya que identificaste la similitud, revisa el valor variante e identificalo en la gráfica, ¿podrías explicar qué representa ese valor? Justifica tu respuesta.

MOMENTO 3

a) Ahora que comprendes lo que significa la pendiente y el complemento en una función lineal, plantea una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la batería restante en cada actividad.

- Para ver videos, la expresión algebraica es $f(t) = -\frac{1}{3}t + 100$. Para jugar videojuegos, la expresión es $f(t) = -\frac{5}{12}t + 100$. Esto se obtiene calculando la pendiente (m) como la variación en la carga de la batería sobre la variación en el tiempo, y el corte con el eje y (b) es 100, que es la carga inicial de la batería.
- Creo que la expresión es algo como $f(t) = mt + 100$, pero no estoy seguro de cómo calcular el valor de m . Sé que es la pendiente, pero no recuerdo bien cómo se calcula.

Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.

- Los estudiantes pueden confundir cómo calcular la pendiente (m) o no recordar tan solo una fórmula para hacerlo.
- Pueden tener dificultad para identificar el valor de b (corte con el eje y) como la carga inicial de la batería.

- ¿Cómo calculaste la pendiente? ¿Podrías explicar el procedimiento paso a paso?
- ¿Qué representa el valor de b en la expresión algebraica? ¿Cómo lo obtuviste?
- Si la batería disminuye más rápido en una actividad que en otra, ¿cómo se refleja eso en la expresión algebraica?

	<ul style="list-style-type: none"> No estoy seguro, pero creo que la expresión es $f(t) = 100 - t$. Creo que la batería disminuye de manera constante, pero no sé cómo expresarlo matemáticamente. 		<ul style="list-style-type: none"> Algunos pueden no entender cómo relacionar la pendiente con la tasa de cambio de la batería. 	
<p>b) Compara las expresiones algebraicas que propusiste para ver videos y jugar videojuegos. ¿Qué diferencias notas? ¿Qué significa eso en términos del consumo de batería? Justifica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> La pendiente en la expresión para ver videos es $-\frac{1}{3}$, mientras que para jugar videojuegos es $-\frac{5}{12}$. Esto significa que la batería disminuye más rápido cuando se juegan videojuegos, ya que $-\frac{5}{12}$ es mayor en valor absoluto que $-\frac{1}{3}$. Por lo tanto, jugar videojuegos consume más batería que ver videos. La pendiente es diferente en ambas expresiones. Creo que la pendiente más grande significa que la batería se consume más rápido, pero no estoy seguro de cómo comparar $-\frac{1}{3}$ y $-\frac{5}{12}$. Las dos expresiones son prácticamente iguales, solo cambia el número que multiplica a la t. No sé qué significa eso en términos de consumo de batería. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes pueden no saber cómo comparar fracciones negativas o no entender qué significa una pendiente más pronunciada en términos de consumo de batería. Podrían confundir la pendiente con el corte con el eje y (b). Algunos pueden no relacionar la pendiente con la tasa de cambio de la batería. 	<ul style="list-style-type: none"> ¿Cómo comparas las pendientes $-\frac{1}{3}$ y $-\frac{5}{12}$? ¿Cuál es mayor en valor absoluto? Justifica tu respuesta. ¿Qué significa que una pendiente sea más grande en términos de consumo de batería? Justifica tu respuesta. Si la pendiente fuera cero, ¿qué pasaría con el consumo de batería? Justifica tu respuesta.
<p>c) Al observar los valores obtenidos en la tabla, la gráfica y la relación entre el tiempo y la carga</p>	<ul style="list-style-type: none"> Para justificar que la relación entre el tiempo y la carga restante se mantiene en cualquier punto del tiempo, primero observamos que la relación es lineal, es decir, sigue la forma $y = mx + b$. Usamos dos puntos de la tabla, por 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática / Formalización.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes pueden no entender por qué se restan las dos ecuaciones y cómo esto les ayuda a eliminar b y aislar m. 	<ul style="list-style-type: none"> ¿Por qué es importante que la pendiente (m) sea constante en una función lineal? ¿Qué pasaría si no lo fuera? Justifica tu respuesta.

restante, ¿cómo podrías justificar que esta relación se mantiene en cualquier punto del tiempo? Justifica matemáticamente tu respuesta.

ejemplo (60, 80) y (120, 60) para calcular la pendiente:

$$m = \frac{60 - 80}{120 - 60} = -\frac{20}{60} = -\frac{1}{3}$$

Esto significa que, por cada 60 minutos, la carga de la batería disminuye un 20%. Como la pendiente es constante, la relación entre el tiempo y la carga restante es la misma en cualquier punto del tiempo. Por lo tanto, la relación se mantiene en cualquier punto del tiempo.

Justificación matemática:

Tomamos dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la gráfica de la función lineal. Aplicamos la forma canónica a ambos puntos:

$$y_1 = mx_1 + b \text{ y } y_2 = mx_2 + b$$

Restamos las dos ecuaciones:

$$y_2 - y_1 = (mx_2 + b) - (mx_1 + b)$$

Simplificamos:

$$y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1$$

Factorizamos m :

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Despejamos m :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como m depende solo de la diferencia entre los valores de y y x , y no de los valores específicos de x o y , la pendiente es constante en toda la función lineal. Esto demuestra que la relación entre el tiempo y la carga de la batería se mantiene en cualquier punto del tiempo.

- Los estudiantes pueden tener problemas para simplificar las ecuaciones y factorizar m .
- Los estudiantes pueden no entender por qué la pendiente es la misma para cualquier par de puntos en la gráfica.
- Tal vez logren visualizar que la pendiente es la misma en toda la función, pero pasar a la formalización les resulte imposible.
- Si tomas otros dos puntos en la gráfica, ¿cómo puedes asegurar que la pendiente sigue siendo la misma? ¿Qué pasaría si la pendiente calculada con otros puntos fuera diferente? Justifica tu respuesta.
- ¿Cómo podrías explicar, usando la expresión algebraica $y = mx + b$, por qué la relación entre el tiempo y la carga de la batería se mantiene en cualquier punto del tiempo? Justifica tu respuesta.

- Creo que la relación se mantiene porque la pendiente es constante, pero no sé cómo demostrarlo matemáticamente. Sé que la pendiente se calcula como $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, pero no sé cómo justificar que es constante para cualquier punto.
- No estoy seguro, pero creo que la relación se mantiene porque la gráfica es una línea recta. No sé cómo justificarlo matemáticamente.

d) La función que representa esta situación se extiende indefinidamente, pero en la realidad, ¿hasta qué punto tiene sentido? ¿Debemos hacerle alguna restricción al dominio o al recorrido? Justifica tu respuesta con base en el contexto.

- El modelo tiene sentido solo dentro del intervalo de tiempo en que el celular tiene batería, por ejemplo, de 0 a 240 minutos al ver videos, o hasta 300 minutos al jugar videojuegos. Por tanto, el dominio debe restringirse a ese intervalo. También se debe restringir el recorrido entre 0 y 100% de batería, ya que no puede ser negativa ni superar ese valor.
- La función solo sirve mientras se descarga la batería, pero no sé bien cómo restringirla.
- Por lo que entendí sería quitarle un pedazo, pero no recuerdo bien qué significa eso de dominio y recorrido.

Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.

- No comprender la relación entre modelo y realidad; dificultad para justificar las restricciones con base en el contexto.
- No comprender la pregunta al poseer dificultades con los conceptos de dominio y recorrido.

- ¿Tiene sentido que el porcentaje de batería o el tiempo sean negativos? Justifique su respuesta.
- ¿Cuáles son los valores mínimos y máximos utilizados en el contexto tanto para el tiempo como para la carga de la batería? Justifique su respuesta.

4.5.2 *Actividad 2: El teleférico del cerro del Santísimo*

Tabla 3

Análisis a priori Actividad 2

Pregunta	Posibles respuestas esperadas	Nivel de comprensión asociado (Contreras, 1994)	Dificultades potenciales	Contrapreguntas para profundizar
MOMENTO 1				
a) ¿Qué magnitudes consideras que están implicadas en este fenómeno? ¿Cuáles son variables y cuáles permanecen constantes? Menciona todas las que consideres.	<ul style="list-style-type: none"> Las magnitudes involucradas considero que son la distancia, el tiempo, la velocidad, tal vez la velocidad del aire y las medidas de la cabina del teleférico. La distancia y el tiempo son variables, ya que cambian a medida que el teleférico se mueve. La velocidad es constante, ya que el teleférico se mueve a una velocidad uniforme. Las magnitudes implicadas son la distancia, el tiempo y la velocidad. Creo que la distancia y el tiempo son variables, pero no estoy seguro de si la velocidad es constante. Las magnitudes son la distancia y el tiempo, pero no sé si son variables o constantes. 	Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática	<ul style="list-style-type: none"> Pueden no entender la relación entre las magnitudes. Podrían no comprender qué es una magnitud o no reconocer cuál es variable o constante. 	<ul style="list-style-type: none"> ¿Qué observas que está variando en el video? Justifica tu respuesta. ¿Existe alguna variable que pueda ser medida en el video? Justifica tu respuesta.
b) Observa la gráfica de la distancia en función del	<ul style="list-style-type: none"> La gráfica tiene forma de línea recta. Esto nos dice que la distancia recorrida por el teleférico aumenta de manera constante con el tiempo, lo que 	Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos /	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes podrían relacionar la forma de la gráfica con el 	<ul style="list-style-type: none"> ¿Cómo se relaciona la forma de la gráfica con el movimiento

<p>tiempo generada por Tracker. ¿Qué forma tiene? ¿Qué puedes inferir sobre el movimiento del teleférico a partir de esta gráfica? Justifica tu respuesta.</p>	<p>indica que el teleférico se mueve a una velocidad constante.</p> <ul style="list-style-type: none"> • La gráfica es una línea recta, pero no sé qué significa eso, tal vez porque el movimiento es lineal, ya que el teleférico se mueve en línea recta por el cable. • La gráfica pareciera ser una línea recta, pero también tiene forma de curva, lo que podría significar que el teleférico se mueve más rápido con el tiempo. 	<p>Abstracción matemática.</p>	<p>movimiento en línea recta del teleférico por el cable.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Podrían pensar que no es una línea recta dado el margen mínimo de error en la medición del movimiento de la cabina. 	<p>del teleférico? Justifica tu respuesta.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si la gráfica fuera una curva, ¿qué significaría eso sobre el movimiento del teleférico? Justifica tu respuesta. • ¿Cómo podrías calcular la velocidad del teleférico a partir de la gráfica? Justifica tu respuesta.
<p>c) ¿Cómo varía la distancia recorrida por el teleférico en función del tiempo? Describe detalladamente lo que observas, puedes ayudarte tanto de la gráfica como de la tabla.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La distancia recorrida por el teleférico aumenta de manera constante con el tiempo. Esto se puede ver en la gráfica, que es una línea recta o casi recta, y en la tabla, donde la distancia aumenta aproximadamente en la misma cantidad por cada intervalo de tiempo. • Se observa que a medida que el tiempo aumenta, la distancia también aumenta, por lo tanto, es una función creciente. • Según los datos de la gráfica y la tabla de observa que ambas variables aumentan. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes pueden tener dificultades para identificar patrones en los datos. • Se les podría dificultar relacionar los datos con la gráfica. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo describirías la relación entre la distancia y el tiempo según los datos de la tabla? ¿Ocurre de manera constante? Justifica tus respuestas. • Si comparas dos momentos distintos en el tiempo, ¿cómo cambia la distancia recorrida por el teleférico? Justifica tu respuesta.
<p>d) ¿Qué tipo de función consideras que mejor modela este comportamiento</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La función que mejor modela este comportamiento es una función lineal, ya que la gráfica es muy similar a una línea recta y la distancia aumenta de manera constante con el tiempo. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes podrían no estar seguros si realmente es una función lineal dado el pequeño margen de 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo podrías verificar que la función es lineal? Justifica tu respuesta. • ¿Por qué debería ser una función lineal y no

o? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

- Creo que es una función lineal, eso es lo que observo en el programa.
- Es una función lineal la que mejor representa la situación, el programa lo muestra y es evidente porque el teleférico se está moviendo en línea recta.

e) A partir de los datos de la tabla y la gráfica, propón una expresión algebraica que modele la relación entre la distancia recorrida por la cabina y el tiempo. Justifica cómo llegaste a esta expresión.

- Al considerar que es una función lineal procederé de esa manera. Tomaré dos puntos de la tabla que me resulten ideales para realizar el procedimiento, estos son (0.99, 4.677) y (1.99, 9.19) los cuales aproximaré a (1, 4.7) y (2, 9.2) respectivamente. Para ir de 1 a 2 en el eje x me he desplazado una unidad hacia la derecha, y para ir de 4.7 a 9.2 en el eje y me he desplazado 4.5 unidades hacia arriba. La pendiente de la función lineal está determinada por la relación entre la variación en el eje y con respecto al eje x, por lo cual dividimos 4.5 entre 1 y obtenemos que la pendiente es aproximadamente 4.5. Ahora, el corte con el eje y debería ser en cero, ya que en el tiempo cero se supone que el teleférico va a iniciar su movimiento, por lo cual debería partir del origen, de esta forma resultado que la expresión algebraica que representa la función del movimiento del teleférico con respecto al tiempo es $d(t) = 4.5t$.

Comprensión intuitiva /
Comprensión de procedimientos /
Abstracción matemática.

error en la toma de los datos.

- Podrían identificar que es una función lineal por la ayuda visual del software, pero no saber justificarlo.

- Podrían confundir que la pendiente está dada por la variación en el eje y respecto a la variación en el eje x, y no al contrario.

- Podrían no recordar cómo se determina el valor del complemento de la función, aunque en este caso específico sea cero.

- Podrían estar muy limitados al uso reiterado de una fórmula para determinar el valor de la pendiente.

- Se les podría dificultar elegir puntos representativos y

de otro tipo? Justifica tu respuesta.

- ¿Cómo se relaciona la expresión algebraica con la gráfica? Justifica tu respuesta.

- Si cambias el valor de la pendiente, ¿cómo afecta eso a la gráfica de la función? Justifica tu respuesta.

- ¿Cómo podrías hallar el valor de la pendiente y el corte con el eje y usando dos puntos de la gráfica y sin utilizar fórmulas? Justifica tu respuesta.

- Estaba revisando la tabla y observo que cuando ha pasado 1 segundo el teleférico se ha desplazado casi 5 metros, pero cuando han pasado 2 segundos ya se ve más abajo del 10, como un 9 o un poco más, luego en 3 segundos se ve como en 14 metros, algo así, en todo caso pareciera que la pendiente estuviera cerca de ser 5 m/s, y en cuanto al complemento no estoy seguro cual podría ser.
- No recuerdo muy bien como aplicar la fórmula de la pendiente, creo que se toman dos puntos, pero no se cuáles. Noto que en 1 segundo se ha movido 5 metros, y según recuerdo de la actividad anterior creo que la pendiente sería $\frac{1}{5}$.

realizar mal los cálculos.

- Podrían basarse únicamente en la gráfica y no relacionar muy bien la escala de la gráfica con los valores reales.

<p>f) ¿Qué representa el valor de la pendiente en tu expresión algebraica? ¿Cómo se relaciona con el movimiento del teleférico? Justifica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La pendiente (m) representa la velocidad en la que se desplaza el teleférico. En este contexto, la pendiente nos dice cuánto aumenta la distancia recorrida por el teleférico por cada unidad de tiempo. Por ejemplo, si la pendiente fuera 2, significa que, por cada minuto, el teleférico recorre 2 metros. • Creo que representa la velocidad porque estamos relacionando metros con segundos. • Debe ser la cantidad de metros que recorre en cierto momento. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes pueden no entender cómo la pendiente se relaciona con la velocidad. • Pueden confundir la pendiente con otros elementos de la función lineal. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo se relaciona la pendiente con la velocidad del teleférico? Justifica tu respuesta. • Si la pendiente fuera mayor, ¿cómo afectaría eso al movimiento del teleférico? Justifica tu respuesta.
---	--	--	--	--

MOMENTO 2

<p>a) Utiliza la herramienta de análisis de datos de Tracker para obtener la expresión algebraica que modela el movimiento del teleférico. Compara esta expresión con la que propusiste. ¿Son similares? ¿Qué diferencias observas? Justifica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Sí, son muy similares, a mí me resultó aproximadamente 4.5 y al software le resultó aproximadamente 4.6, y en cuanto al complemento el software arroja el valor de casi cero, y a para mi es cero, ambas situaciones se deben al margen de error en la toma de datos. • Aunque el valor está relativamente cerca, creo que, si me desfasé un poco, creo que fue porque estimé mal el valor de la pendiente bajo la gráfica. Yo puse que era 5 y el programa dice que es 4.6, y en cuanto al complemento no estaba seguro, pero si creo que es cero o muy cercano a cero. • Me quedó mal la pendiente, yo puse que era 1/5 pero resultó ser 4.6, no sé que sucedió o si fue que entendí mal. 	<p>Comprensión intuitiva Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes podrían no leer bien los datos arrojados por la herramienta análisis de datos del programa. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué significa ese valor que arroja el software, por ejemplo 4.6 ± 0.03? Explica tu respuesta. • ¿Por qué sucede lo anterior y simplemente no se limita a arrojar un valor exacto? Justifica tu respuesta.
<p>b) Si hay diferencias entre las dos expresiones, ¿a qué crees que se deban? ¿Cómo podrías ajustar tu modelo para que sea más preciso?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Las diferencias entre las dos expresiones pueden deberse a errores de medición o calibración en el software. Para ajustar mi modelo y hacerlo más preciso, puedo usar más puntos de datos y verificar la calibración del software, ya que considero que el software hace un cálculo promedio y yo solo tomé dos puntos. 	<p>Comprensión intuitiva Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Pueden confundir errores de medición con errores de cálculo del software. • Podrían no saber cuál es la mejor opción para ajustar el modelo. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué ideas tienes para ajustar mejor tu modelo propuesto con el que arroja el software? Justifica tu respuesta.

- Explica tu respuesta.
- Las diferencias pueden deberse a errores, pero no sé cómo ajustar el modelo.
 - No estoy seguro, pero creo que las diferencias no son representativas ya que son mínimas.

c) Observa la gráfica y la expresión algebraica. ¿Cómo puedes justificar matemáticamente que la relación entre la distancia y el tiempo representada por una función lineal es constante? Explica detalladamente tu razonamiento.

• Para justificar que la relación entre el tiempo y la distancia se mantiene en cualquier punto del tiempo, primero observamos que la relación es lineal, es decir, sigue la forma $y = mx + b$. Usamos dos puntos de la tabla, por ejemplo (1, 4.7) y (2, 9.2), y para calcular la pendiente:

$$m = \frac{9.2 - 4.7}{2 - 1} = 4.5$$

Esto significa que, por cada segundo que pasa, el teleférico ha recorrido aproximadamente 4.5 metros. Como la pendiente es constante, la relación entre el tiempo y la distancia recorrida debería ser la misma en cualquier punto del tiempo. Por lo tanto, la relación se mantiene en cualquier punto del tiempo.

Justificación matemática:
Tomamos dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la gráfica de la función lineal. Aplicamos la forma canónica a ambos puntos:

$$y_1 = mx_1 + b \text{ y } y_2 = mx_2 + b$$

Restamos las dos ecuaciones:

$$y_2 - y_1 = (mx_2 + b) - (mx_1 + b)$$

Simplificamos:

Comprensión intuitiva /
Comprensión de procedimiento /
Abstracción matemática /
Formalización.

• Los estudiantes podrían no entender por qué se restan las dos ecuaciones y cómo esto les ayuda a eliminar b y aislar m .

• Los estudiantes podrían tener inconvenientes para simplificar las ecuaciones y factorizar m .

• Los estudiantes podrían no comprender por qué la pendiente es la misma para cualquier par de puntos en la gráfica.

• Tal vez logren visualizar que la pendiente es la misma en toda la función, pero pasar a la formalización les resulte imposible.

• ¿Por qué es importante que la pendiente (m) sea constante en una función lineal? ¿Qué pasaría si no lo fuera? Justifica tu respuesta.

• ¿De qué manera podrías justificar que aunque el valor de la pendiente en esta actividad no es el mismo estamos suponiendo que lo es?

$$y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1$$

Factorizamos m :

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Despejamos m :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como m depende solo de la diferencia entre los valores de y y x , y no de los valores específicos de x o y , la pendiente es constante en toda la función lineal. Esto demuestra que la relación entre el tiempo y la distancia recorrida se mantiene en cualquier punto del tiempo.

- Creo que la relación se mantiene porque la pendiente es constante, pero no sé cómo demostrarlo matemáticamente. Sé que la pendiente se calcula como $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, pero no sé cómo justificar que es constante para cualquier punto.
- No estoy seguro, pero creo que la relación se mantiene porque la gráfica es una línea recta. No recuerdo bien cómo es que se debe demostrar algo así.

4.5.3 Actividad 3: El proyector en el aula de clase: Modelando el área proyectada

Tabla 4

Análisis a priori Actividad 3

Pregunta	Posibles respuestas esperadas	Nivel de comprensión asociado (Contreras, 1994)	Dificultades potenciales	Contrapreguntas para profundizar
MOMENTO 1				
a) ¿Qué magnitudes están implicadas en esta situación? ¿Cuáles son variables y cuáles permanecen constantes? Justifica tu respuesta.	<ul style="list-style-type: none"> Las magnitudes implicadas son la distancia del proyector al tablero (d), el área proyectada (a), la altura y la base del área proyectada como variables. Ahora, las magnitudes constantes en esta situación son la altura del proyector y el ángulo de proyección, que no cambian. Las magnitudes son la distancia y el área proyectada, veo que van variando al moverse el deslizador. Son la distancia y el área proyectada, creo que son variables, aún tengo esa duda. 	Comprensión intuitiva Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática	<ul style="list-style-type: none"> Podrían tener dudas aun sobre la diferencia entre magnitudes variables y constantes. Podrían no identificar algunas magnitudes constantes. 	• ¿Qué otras magnitudes podrían estar implicadas en esta situación? Justifica tu respuesta.
b) ¿Observas alguna relación entre las variables implicadas?	<ul style="list-style-type: none"> Sí, hay una relación entre la distancia y el área proyectada. A medida que el proyector se aleja del tablero, el área proyectada aumenta, aunque considero que no es una relación lineal. 	Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos /	<ul style="list-style-type: none"> No visualizar la dependencia del área proyectada sobre la distancia. 	• ¿Observas dependencia entre las variables implicadas, es decir, crees que hay alguna variable que

<p>Describe toda tu observación.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La relación es que el área aumenta con la distancia. • El área se hace más grande cuando la base y la altura del rectángulo son grandes. 	<p>Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Considerar que el área proyectada depende de las dimensiones del rectángulo proyectado. 	<p>dependa de la otra? Justifica tu respuesta.</p>
<p>c) Observa los datos de la tabla que construiste. ¿Qué regularidad encuentras en los valores de distancia y área proyectada? Explica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • En los datos, observo que el área proyectada aumenta de manera no lineal con la distancia. Digo que no es lineal porque ya no sucede que la variación entre intervalos iguales sea constante, pues se nota un aumento acelerado. • El área aumenta con la distancia, se presenta una relación directa, pero no sabría describir bien cómo se da ese aumento. • Veo que las variables son directamente proporcionales, ya que mientras una aumenta, la otra también. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Podrían tener conceptos previos erróneos como el de magnitudes directamente proporcionales. • Se les podría dificultar ver más allá de una relación lineal. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo describirías la relación entre la distancia y el área en la tabla? ¿Ocurre de manera constante? Justifica tus respuestas. • Si comparas dos distancias distintas, ¿cómo cambia el área proyectada? Justifica tu respuesta.
<p>d) ¿Cómo cambia el área proyectada a medida que el proyector se aleja del tablero? Describe detalladamente lo que observas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • El área proyectada aumenta de manera no lineal a medida que el proyector se aleja del tablero. Esto se debe a que el área de la imagen proyectada depende de las dimensiones de los lados, que a su vez dependen de la distancia. Por ejemplo, si la distancia se duplica, el área se cuadruplica. • El área aumenta con la distancia, pero no sé cómo describirlo bien. • El área va cambiando cuando el proyector se aleja del tablero, se hace cada vez más grande. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No percibir que el cambio de una variable con respecto a la otra crece aceleradamente. • Mencionar sobre un cambio, pero no especificar si la magnitud está aumentando o disminuyendo 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo cambia el área proyectada al comparar distancias cercanas y lejanas? ¿Cambian de la misma forma? Justifica tu respuesta.

e) ¿Qué forma crees que se genera al seguir el rastro de los puntos? ¿Qué tipo de función podría representar estos datos? Justifica tu respuesta.

- Al seguir el rastro de los puntos, se genera una curva que sugiere una relación cuadrática. Esto se debe a que observo que el área proyectada aumenta como si eleváramos al cuadrado la distancia. Por lo tanto, la función que mejor representa estos datos es una función cuadrática.
- Se forma una curva, pero no sé qué tipo de función la podría representar.
- Sé que no es una línea recta, es algo curvo, mas no sabría especificar algo porque no conozco otros tipos de funciones o no las recuerdo.

Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.

- Tener conocimiento limitado sobre distintos tipos de funciones.

- ¿Qué tipos de funciones conoces? Mencionalas.
- ¿Con cuál de todas las mencionadas podrías asociar el rastro de los puntos y por qué? Justifica tu respuesta.

f) A partir de los datos de la tabla y la gráfica, propón una expresión algebraica que modele la relación entre la distancia del proyector al tablero y el área proyectada. Justifica cómo llegaste a esta expresión.

- Necesito tomar tres puntos y formar tres ecuaciones con tres incógnitas para lograrlo. Como la función cuadrática es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, debemos hallar el valor de a, b y c, por esa razón necesitamos tres ecuaciones para lograrlo. Tomaré los puntos (1, 0.16), (2, 1.45), (3, 4.04) por comodidad en los cálculos. Entonces, al reemplazar estos valores obtenemos:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0.16 & (1) \\ 4a + 2b + c &= 1.45 & (2) \\ 9a + 3b + c &= 4.04 & (3) \end{aligned}$$

Por el método de eliminación, usaremos (1) y (2), multiplicando (1) por -2.

$$\begin{array}{r} -2a - 2b - 2c = -0.32 \\ 4a + 2b + c = 1.45 \\ \hline 2a - c = 1.13 \quad (4) \end{array}$$

Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática

- Poco conocimiento en el uso de herramientas digitales como GeoGebra como recurso de ayuda.
- No pensar en utilizar un procedimiento algebraico para lograrlo.

- Si tienes la forma canónica de la función cuadrática y sabes que necesitas determinar los valores de a, b y c, ¿qué podrías realizar para lograrlo? Explica tu respuesta.
- ¿Cómo podrías encontrar la representación algebraica de la función con la ayuda de GeoGebra? Justifica tu respuesta.

Ahora, usaremos (1) y (3), multiplicando (1) por -3.

$$\begin{array}{r} -3a - 3b - 3c = -0.48 \\ 9a + 3b + c = 4.04 \\ \hline \end{array}$$

$$6a - 2c = 3.56 \quad (5)$$

De esta forma hemos obtenido las ecuaciones (4) y (5), habiendo pasado de un sistema 3x3 a uno 2x2, y nuevamente aplicamos eliminación con las dos ecuaciones resultantes, multiplicando (4) por -2.

$$\begin{array}{r} -4a + 2c = -2.26 \\ 6a - 2c = 3.56 \\ \hline \end{array}$$

$$2a = 1.3$$

Luego, $a = 0.65$

Reemplazo a en (4) y obtengo el valor de c .

$$\begin{array}{r} 2(0.65) - c = 1.13 \\ 1.3 - c = 1.13 \\ 1.3 - 1.13 = c \\ c = 0.17 \end{array}$$

Finalmente, reemplazo a y c en (1) y obtengo el valor de b .

$$\begin{array}{r} 0.65 + b + 0.17 = 0.16 \\ 0.82 + b = 0.16 \\ b = 0.16 - 0.82 \\ b = -0.66 \end{array}$$

Obteniendo así la ecuación cuadrática que representa el fenómeno:

$$A(d) = 0.65d^2 - 0.66d + 0.17$$

- Para obtener la expresión algebraica de una función cuadrática sería

ideal realizarlo con GeoGebra, creo que una vez el profesor nos explicó algo de que se podía con una herramienta, pero no recuerdo cómo es.

- La verdad no sabría cómo hacerlo, ni siquiera logro visualizar qué tipo de función podría ser.

MOMENTO 2

a) ¿Qué efecto tiene el parámetro "a" en la gráfica? ¿Qué sucede si a es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.

- El parámetro a determina la concavidad de la parábola. Si a es positivo, la parábola se abre hacia arriba; si es negativo, se abre hacia abajo. Si $a = 0$, la gráfica deja de ser una parábola y se convierte en una línea recta. Esto se debe a que el término cuadrático desaparece y la función se reduce a una función lineal.
- Cuando a es positivo, la parábola apunta hacia arriba; cuando es negativo, apunta hacia abajo. Si $a = 0$, no hay parábola.
- El parámetro a hace que la parábola sea más grande o pequeña.

Comprensión intuitiva /
Comprensión de procedimientos /
Abstracción matemática.

- Confundir la relación entre a y la concavidad.
- No justificar por qué la parábola cambia su dirección.
- No notar que cuando $a = 0$, la función deja de ser cuadrática.

- ¿Cómo afecta el valor absoluto de a al tamaño de la parábola?
- Si a es un número muy pequeño (por ejemplo, 0.1), ¿cómo se ve la parábola en comparación con una en la que $a = 5$?

b) ¿Qué efecto tiene el parámetro "b" en la gráfica? ¿Cómo cambia la posición de la parábola cuando varías b? ¿Qué sucede si b es positivo,

- El parámetro b afecta la posición del vértice de la parábola en el eje horizontal. Cuando b varía, la parábola se desplaza a la izquierda o a la derecha, y la simetría respecto al eje y cambia. Si $b = 0$, el vértice de la parábola está alineado con el eje y .

Comprensión intuitiva /
Comprensión de procedimientos /
Abstracción matemática.

- No identificar que b modifica la posición del vértice de la parábola.
- Creer erróneamente que b cambia la concavidad.

- ¿Cómo puedes encontrar la coordenada en x del vértice a partir del parámetro b ?
- Si comparas dos funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = x^2 + 4x + 3$, ¿qué observas en sus vértices?

negativo o cero? Justifica tu respuesta.

- Si b cambia, la parábola se mueve hacia los lados y como formando una curva hacia abajo.
- El parámetro b hace que la parábola se agrande o se achique.

c) ¿Qué efecto tiene el parámetro "c" en la gráfica? ¿Cómo se relaciona con la intersección de la parábola con el eje vertical? Justifica tu respuesta.

- El parámetro c representa el término independiente de la ecuación y es la intersección de la parábola con el eje y , es decir, el valor de $f(0)$. Cambiar c mueve la parábola hacia arriba o hacia abajo sin alterar su forma.
- El parámetro c hace que la parábola suba o baje en el plano.
- El parámetro c cambia la forma de la parábola.

Comprensión intuitiva /
Comprensión de procedimientos /
Abstracción matemática.

- No entender que c solo afecta la traslación vertical, pero no la forma de la parábola.
- No identificar que c es la ordenada al origen ($f(0)$)

- Si $c = 5$ y luego cambia a $c = 3$ ¿qué sucede con la gráfica? Justifica tu respuesta.
- ¿Cómo puedes encontrar la intersección con el eje y sin graficar? Justifica tu respuesta.

d) ¿Qué sucede cuando combinas diferentes valores de a y b ? Por ejemplo, ¿cómo cambia la gráfica si a es positivo y b es negativo, o viceversa? Justifica tu respuesta.

- Cuando a y b tienen diferentes signos, el vértice de la parábola se mueve hacia un cuadrante específico del plano cartesiano. Si a es positivo y b es negativo, el vértice estará en el cuadrante II. Si a es negativo y b es positivo, el vértice estará en el cuadrante IV.
- Cuando a y b cambian de signo, la parábola se mueve de un lado a otro, pero no sé cómo exactamente.
- Cuando a y b cambian, la parábola se hace más grande o más pequeña.

Comprensión intuitiva /
Comprensión de procedimientos /
Abstracción matemática.

- No comprender la relación entre los coeficientes y el desplazamiento del vértice.
- Confundir el efecto de a y b , creyendo que ambos afectan la apertura de la parábola cuando en realidad a determina la apertura y b solo cambia la posición del vértice.

- ¿Cómo puedes encontrar el vértice de la parábola usando a y b ? Justifica tu respuesta.
- Si $a = 2$ y $b = -4$, ¿dónde estaría el vértice de la parábola? Justifica tu respuesta.

MOMENTO 3

<p>a) Compara la gráfica que realizaste del área proyectada en función de la distancia (ya sea en tu hoja de trabajo o en GeoGebra) en la parte 1 de la actividad con la gráfica resultante anterior. ¿Son similares? ¿Qué diferencias observas? Justifica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Las gráficas son iguales, dado que modelé los datos desde el inicio con una función cuadrática, aunque en mi función realicé la restricción en el dominio desde 1 hasta 3. • No se parecen, no se me ocurrió que una función cuadrática pudiera ser la ideal, pensé más en una exponencial tal vez. • No se parecen, pues yo inicialmente puse una función lineal por pedazos, pensé que era así y no que era una curva. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Tener una idea errónea de que si los puntos no forman una parábola no podría ser una función cuadrática. • Gráficamente podría ser correcta la función, pero el estudiante no identifica el tipo de función. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Consideras que una función cuadrática si pudiese modelar la situación? Justifica tu respuesta.
<p>b) Si el proyector se alejara a 4 metros del tablero, ¿cuál sería el área proyectada según tu modelo? ¿Tiene sentido este resultado en el contexto real?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Para encontrar el área proyectada cuando el proyector está a 4 metros, sustituyo $d = 4$ en la ecuación del modelo cuadrático. Si el valor obtenido es coherente con los datos previos y no contradice el comportamiento esperado del fenómeno, entonces el resultado tiene sentido en el contexto real. • Sustituyo en la ecuación y obtengo un valor. Si es similar a la tendencia de los anteriores, entonces tiene sentido. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No interpretar si el resultado tiene sentido en la realidad. • No verificar si el valor obtenido sigue la tendencia del modelo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Si en lugar de 4 metros fuera 10 metros, ¿crees que el modelo seguiría funcionando? Revisa la situación y justifica tu respuesta. • ¿Podría el área proyectada disminuir en algún punto? ¿Por qué?

<p>Justifica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Sería revisar la gráfica y buscar en el plano cartesiano el valor de 4 a ver con qué valor se relaciona. 			
<p>c) ¿Qué distancia debería tener el proyector para que el área proyectada sea de 10 m²? Justifica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Para encontrar la distancia, debo resolver la ecuación cuadrática. Esto implica despejar en la ecuación del modelo. Dependiendo de la función, pueden existir una o dos soluciones, y debo interpretar cuál tiene sentido en el contexto. • Sustituyo valores hasta que encuentre un que haga que el área sea 10. • Creo que lo más lógico es usar la gráfica, busco el valor de 10 y miro qué valor toma la otra variable. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No comprender que resolver implica trabajar con una ecuación cuadrática. • No considerar que pueden existir dos soluciones y escoger la que no es adecuada. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Podría haber dos distancias que generen el mismo área? ¿Por qué? Compáralo con el contexto de la función cuadrática. • Si no conocieras la ecuación, ¿cómo podrías estimar la distancia? Justifica tu respuesta.
<p>d) Dada la función cuadrática que modela el área proyectada (A) en función de la distancia (d): $A(d) = ad^2 + bd + c$ $A(d+h) = a(d+h)^2 + b(d+h) + c$ Demuestra matemáticamente que la variación del área proyectada respecto a la distancia es acelerada.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Tomamos dos distancias d y $d + h$, donde h es un intervalo de tiempo constante. Calculamos la altura en estos tiempos: $A(d) = ad^2 + bd + c$ $A(d+h) = a(d+h)^2 + b(d+h) + c$ Desarrollamos $A(d+h)$ Calculamos la diferencia $\Delta A = A(d+h) - A(d)$ Luego de realizar esos cálculos, los cuales se pueden hacer en calculadoras online, se obtiene: $\Delta A = h(2ad + ah + b)$ Ahora, debemos tomar otro intervalo: $d + h$ y $h + 2h$: 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática / Formalización.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No reconocer que la variación del área no es constante. • No identificar la relación entre el crecimiento del área y la estructura cuadrática. • No aplicar el método de comparación de diferencias sucesivas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Si calculas la diferencia de áreas entre valores consecutivos de distancia, ¿siguen un patrón? Justifica tu respuesta. • ¿Podrías predecir cómo cambiaría el área si sigues aumentando la distancia? Justifica tu respuesta.

Justifica tu respuesta. Reemplazamos y calculamos la diferencia:

$$\Delta A' = A(d + 2h) - A(d + h)$$

Resultando así:

$$\Delta A' = h(2ahd + 3ah + b)$$

Y finalmente, observamos que $\Delta A' > \Delta A$, ya que así esas variables tomen valores negativos, positivos o cero, siempre se cumple esa condición, lo que nos indica que evidentemente no se mantiene una variación constante, resultando así en una variación acelerada.

- Para comprobar que la variación del área proyectada es acelerada, tomamos la imagen del área para un valor d , luego calculamos la diferencia con el área en $d + h$ y después con el área en $d + 2h$. Si estas diferencias aumentan progresivamente, significa que la variación del área no es constante sino acelerada, lo cual es característico de una función cuadrática.
- El área cambia porque la imagen se ve más grande en la pared.

e) ¿Cómo puedes asegurar que el modelo matemático que propusiste es válido para describir el comportamiento

- La función cuadrática describe correctamente el fenómeno porque sigue la tendencia observada en los datos y se ajusta de manera consistente a los puntos graficados. Además, este tipo de función tiene sentido teórico en el contexto del problema, ya que el área proyectada varía de forma no lineal con la distancia. Para

Comprensión intuitiva /
Comprensión de procedimientos /
Abstracción matemática.

- Confundir que cualquier función que pase por los puntos es válida.
- No justificar por qué la función cuadrática es la mejor

- ¿Qué características tiene la función cuadrática que la hacen adecuada para este fenómeno? Justifica tu respuesta.
- Si otro modelo también pasara por los

o del área proyectada? Justifica tu respuesta.

verificar si otro modelo es adecuado, se podrían comparar diferentes funciones y evaluar cuál se ajusta mejor.

- El modelo es válido porque la función cuadrática pasa por los puntos que obtuvimos. Si otra función también pasa por los puntos, entonces también podría ser válida.
- El modelo es válido porque en GeoGebra salió bien y la curva se ve parecida.

opción en este contexto.

- No considerar otras formas de verificar la validez del modelo más allá de la gráfica.

puntos, ¿cómo podrías decidir cuál representa mejor el fenómeno? Justifica tu respuesta.

4.5.4 Actividad 4: El lanzamiento de un tiro libre en baloncesto

Tabla 5

Análisis a priori Actividad 4

Pregunta	Posibles respuestas esperadas	Nivel de comprensión asociado (Contreras, 1994)	Dificultades potenciales	Contrapreguntas para profundizar
MOMENTO 1				
a) ¿Qué magnitudes están implicadas en este fenómeno? ¿Cuáles son variables y cuáles permanecen	<ul style="list-style-type: none"> • Las magnitudes involucradas en el movimiento de la pelota son la altura, el tiempo, la distancia, la velocidad y la aceleración. La altura y el tiempo son variables porque cambian durante el lanzamiento. La aceleración debido a la gravedad permanece constante en todo el movimiento. 	Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática	<ul style="list-style-type: none"> • No identificar correctamente las magnitudes físicas involucradas. • Creer que la velocidad es constante en todo el movimiento. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿La velocidad de la pelota es siempre la misma? ¿Por qué? • Si la aceleración de la gravedad cambiara, ¿cómo afectaría al movimiento de la pelota? Justifica tu respuesta.

<p>constantes? Justifica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La pelota sube y baja, entonces la altura y el tiempo cambian. También hay velocidad, pero no sé si es constante. • La distancia y el tiempo creo que son las magnitudes en el problema. 		<ul style="list-style-type: none"> • No reconocer que la aceleración gravitacional es constante. 	
<p>b) Observa la gráfica de la altura en función del tiempo generada por Tracker. ¿Qué forma tiene? ¿Qué puedes inferir sobre el movimiento de la pelota a partir de esta gráfica? Justifica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La gráfica tiene forma de parábola invertida. Esto indica que el movimiento de la pelota es primero ascendente y luego descendente, lo que es característico de un movimiento bajo la influencia de la gravedad. • La gráfica tiene forma de curva y muestra cómo la pelota sube y baja. • Se forma un arco, que es el mismo movimiento que sigue el balón al ser lanzado. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No reconocer que la gráfica es una parábola invertida. • No identificar que la gráfica representa un cambio en la velocidad de la pelota. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo cambia la inclinación de la gráfica a medida que el tiempo avanza? Justifica tu respuesta. • Si la pelota siguiera subiendo indefinidamente, ¿qué tipo de gráfica tendríamos? Justifica tu respuesta.
<p>c) ¿Cómo varía la altura de la pelota en función del tiempo? Describe detalladamente lo que observas, utilizando tanto la gráfica como la tabla.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • La altura aumenta al inicio, pero cada vez más lentamente hasta alcanzar un punto máximo. Luego empieza a disminuir de manera acelerada. Esto significa que la velocidad inicial de la pelota se reduce hasta ser cero en la cima y luego aumenta en la fase de caída debido a la gravedad. • La pelota sube y luego baja, aunque creo que no a la misma velocidad en ambas partes. • Al inicio la altura aumenta y luego de un momento empieza a bajar. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No notar que la altura no cambia a un ritmo constante. • No reconocer que la velocidad disminuye hasta que la pelota alcanza su punto más alto. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿La diferencia entre los valores de altura en la tabla es siempre la misma? ¿Por qué? Justifica tu respuesta. • ¿Qué sucede con la velocidad de la pelota cuando alcanza su punto más alto? Justifica tu respuesta.

<p>d) ¿Qué tipo de función consideras que mejor modela este comportamiento? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • El comportamiento de la altura en función del tiempo se modela mejor con una función cuadrática, porque la aceleración debida a la gravedad es constante y eso genera un cambio de altura con variación no uniforme. • Pienso que es una parábola porque la pelota sube y baja en forma de curva. • Podría ser una función de arco y después una lineal porque la pelota seguirá cayendo. 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No justificar matemáticamente por qué una función cuadrática es adecuada. • Creer que cualquier función que se parezca a la curva es válida sin una razón física detrás. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Si la relación entre altura y tiempo fuera constante, qué forma tendría la gráfica? Justifica tu respuesta. • ¿Cómo puedes verificar que una función cuadrática es el mejor modelo? Justifica tu respuesta.
<p>e) A partir de los datos de la tabla y la gráfica, propon una expresión algebraica que modele la relación entre la altura de la pelota y el tiempo. Justifica cómo llegaste a esta expresión.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Necesito tomar tres puntos y formar tres ecuaciones con tres incógnitas para lograrlo. Como la función cuadrática es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, debemos hallar el valor de a, b y c, por esa razón necesitamos tres ecuaciones para lograrlo. Tomaré los puntos (0, 0), (0.6, 1.43), (1, 1.64) por comodidad en los cálculos. Entonces, al reemplazar estos valores obtenemos: $c = 0 \quad (1)$ $0.36a + 0.6b + c = 1.43 \quad (2)$ $a + b + c = 1.64 \quad (3)$ De esta manera el sistema se reduce a un sistema 2x2. $0.36a + 0.6b = 1.43$ $a + b = 1.64$ Ahora, usaremos las nuevas ecuaciones, que llamaremos (4) y (5) respectivamente y aplicaremos el método de eliminación, multiplicando (5) por -0.6. $0.36a + 0.6b = 1.43$ 	<p>Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No identificar que la ecuación tiene la forma $h(t) = at^2 + bt + c$. • No sabes cómo ajustar la ecuación a los datos. • No saber cómo encontrar la expresión de manera algebraica a partir de los datos que se tienen. 	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo podrías encontrar los valores de a, b y c partir de los datos de la tabla? Justifica tu respuesta. • ¿Qué pasaría si los coeficientes fueran negativos? ¿Cómo afectaría eso a la trayectoria? Justifica tu respuesta.

$$-0.6a - 0.6b = -0.98$$

$$-0.24a = 0.45 \quad (5)$$

$$a = -1.87$$

Luego, $a = -1.87$

Reemplazo a en (5) y obtengo el valor de b :

$$-1.87 + b = 1.64$$

$$b = 1.64 + 1.87$$

$$b = 3.51$$

Luego, la ecuación final es:

$$h(t) = -1.87t^2 + 3.51t$$

- Sé que debo escoger tres puntos entre los que arroja el software y crear un sistema de ecuaciones, pero no recuerdo cómo se realizan esos cálculos, o tal lo mejor sea realizarlo de manera exploratoria con GeoGebra.
- Me confunde mucho esta parte, no sabría bien cómo hacerlo, tal vez con GeoGebra sea la mejor opción.

f) Utiliza la herramienta de análisis de datos de Tracker para obtener la expresión algebraica que modela el movimiento del teleférico. Compara esta

• Comparando la ecuación obtenida con Tracker y la que calculé manualmente, ambas son similares en estructura, pero los parámetros no se parecen, están un poco lejos, considero que se debe a que el software no tomó el punto inicial como el origen, dado a errores de medición, cosa que, si es cierta que partimos del origen, y creo que ese descuadre hace que las gráficas difieran. Esto lo he comprobado graficando ambas funciones y puedo notar que se cruzan en

Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática

- No entender por qué la ecuación generada por Tracker puede diferir de la obtenida manualmente.
- Creer que la ecuación de Tracker es siempre más precisa sin evaluar su significado.

- ¿Qué método usa Tracker para encontrar la ecuación? Justifica tu respuesta.
- Si los coeficientes obtenidos en Tracker son distintos a los tuyos, ¿qué puede estar causando la diferencia? Justifica tu respuesta.

expresión con los puntos que escogí, pero la del software la que no pasa por el origen, lo cual hace que sea más achatada que la que yo calculé.
 ¿Son similares? • Las ecuaciones son parecidas, pero tienen números diferentes.
 ¿Qué diferencias observas? • No pude plantear una expresión, pero comprobé que es una función cuadrática o de parábola,
 Justifica tu respuesta.

- No reconocer que pequeñas diferencias en los coeficientes pueden afectar la predicción de la trayectoria.

MOMENTO 2

a) ¿Cómo puedes asegurar que el modelo matemático que propusiste es válido para describir el comportamiento de la trayectoria de la pelota? Justifica tu respuesta.
 • El modelo es válido si los valores obtenidos a partir de la ecuación ajustada coinciden con los datos experimentales o están muy cerca. Además, debe representar la forma esperada de la trayectoria, que en este caso es parabólica, ya que la pelota está sometida a la aceleración de la gravedad. También se puede comparar el modelo con el que arroja el software.
 • Si la ecuación me da valores cercanos a los datos de la tabla, entonces el modelo es válido.
 • El modelo es válido porque la ecuación se parece a la trayectoria que se ve en Tracker.

Comprensión intuitiva /
 Comprensión de procedimientos /
 Abstracción matemática.

- No entender que la validez del modelo se basa en la coherencia matemática y física, no solo en el ajuste gráfico.
- No considerar que un buen modelo debe permitir predicciones confiables.

• Si tu modelo y el de Tracker tienen ecuaciones diferentes, ¿cómo decidirías cuál es más preciso? Justifica tu respuesta.
 • ¿Podría una función que no sea cuadrática representar este fenómeno? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuál es el dominio de la función resultante? ¿Es el mismo dominio que requiere la

Comprensión intuitiva /
 Comprensión de procedimientos /
 Abstracción matemática

- No comprender que el dominio debe ajustarse al contexto del problema.

• ¿Podría el modelo predecir valores de altura para tiempos negativos? ¿Serían válidos? Justifica tu respuesta.

función que modela el lanzamiento de la falta? En caso de no serlo, ajústalo y explica qué representa en el fenómeno estudiado.

tienen sentido físico en este contexto. Luego, el dominio de la función resultante es los reales, pero para este contexto, el dominio debe restringirse y va desde 0 hasta 1.335 segundos.

- El dominio es el conjunto de valores de tiempo que aparecen en la tabla de datos.
- El dominio es cualquier número porque la ecuación funciona para cualquier valor de tiempo.

c) Dada la función cuadrática que modela la altura de la pelota (h) en función del tiempo (t):

$$h(t) = at^2 + bt + c$$

Demuestra matemáticamente que la variación de la altura respecto al tiempo es acelerada.

Justifica tu respuesta.

- Tomamos dos tiempos t y $t + k$, donde k es un intervalo de tiempo constante. Calculamos la altura en estos tiempos:

$$h(t) = at^2 + bt + c$$

$$h(t + k) = a(t + k)^2 + b(t + k) + c$$

Desarrollamos $h(t + k)$

Calculamos la diferencia $\Delta h = h(t + k) - h(t)$

$$\Delta h = k(2at + ak + b)$$

Luego de realizar esos cálculos, los cuales se pueden hacer en calculadoras online, se obtiene:

Ahora, debemos tomar otro intervalo: $t + k$ y $t + 2k$:

Reemplazamos y calculamos la diferencia:

$$\Delta h' = k(t + 2k) - h(t + k)$$

Resultando así:

Comprensión intuitiva / Comprensión de procedimientos / Abstracción matemática / Formalización.

- No identificar que los valores negativos de tiempo no tienen sentido en este caso.

- No reconocer que la variación de la altura no es constante.
- No identificar la relación entre el aumento de la altura con respecto al tiempo y la estructura cuadrática.
- No aplicar el método de comparación de diferencias sucesivas.

- Si la ecuación da soluciones para tiempos después de que la pelota toca el suelo, ¿qué interpretación tendrían esos valores? Justifica tu respuesta.

- Si calculas la diferencia de alturas entre valores consecutivos de tiempo, ¿siguen un patrón? Justifica tu respuesta.
- ¿Podrías predecir cómo cambiaría la altura si sigues aumentando el tiempo? Justifica tu respuesta.

$$\Delta h' = k(2akt + 3ak + b)$$

Y finalmente, observamos que $\Delta h' > \Delta h$, ya que así esas variables tomen valores negativos, positivos o cero, siempre se cumple esa condición, lo que nos indica que evidentemente no se mantiene una variación constante, resultando así en una variación acelerada.

- Para comprobar que la variación del área proyectada es acelerada, tomamos la imagen del área para un valor d , luego calculamos la diferencia con el área en $t + k$ y después con el área en $t + 2k$. Si estas diferencias aumentan progresivamente, significa que la variación del área no es constante sino acelerada, lo cual es característico de una función cuadrática.
- El área cambia porque la imagen se ve más grande en la pared.

4.6 Pilotaje y ajustes al diseño de intervención

Con el objetivo de evaluar la claridad, pertinencia y dificultad de las actividades diseñadas, se desarrolló un pilotaje con la participación de dos estudiantes de Licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Durante este proceso, se identificaron dificultades conceptuales y metodológicas, así como el grado de pertinencia de las preguntas propuestas con el objetivo de guiar a los estudiantes en la evolución de los niveles de comprensión según Contreras (1994), propuestos por Herscovics y Bergeron. El análisis de este pilotaje servirá como fundamento para realizar las adecuaciones pertinentes en la configuración de las actividades antes de su puesta en acción con estudiantes de undécimo grado.

Los resultados obtenidos fueron contrastados con las respuestas esperadas en cada actividad, evidenciando así dificultades comunes, posibles mejoras en el planteamiento de las preguntas y estimar la efectividad de las estrategias de modelación planteadas. En este apartado, se presentan las novedades del pilotaje y los ajustes propuestos para mejorar la intervención didáctica.

Como ya se mencionó, el pilotaje fue desarrollado con dos estudiantes de Licenciatura en matemáticas, los cuales se encuentran matriculados en el curso de Cálculo 1 y cuentan con perfiles diferenciados:

- **Estudiante 1:** Se encuentra cursando cálculo 1 por primera vez.
- **Estudiante 2:** Se encuentra cursando cálculo 1 por tercera vez.

El proceso se desarrolló durante cinco sesiones de 2 horas diarias cada una (10 horas en total), con la siguiente distribución:

- **Actividades 1 y 2:** Participación de ambos estudiantes (6 horas).

- **Actividades 3 y 4:** Participación exclusiva del estudiante 1 (4 horas).

La metodología de análisis del pilotaje se basó en la evaluación de:

1. Productos escritos de los estudiantes en los libros de GeoGebra.
2. Manuscritos gráficos y algebraicos.
3. Registros de las interacciones en algunos momentos específicos.
4. Notas de retroalimentación.

Además de lo anterior, este análisis buscaba identificar:

- Fortalezas en la comprensión de conceptos.
- Dificultades recurrentes.
- Efectividad en el uso de las tecnologías digitales.
- Tiempos demandados por actividad.

4.6.1 Resultados por Competencias Clave

1. Comprensión Conceptual

Fortalezas:

- En general, ambos estudiantes identificaron las magnitudes implicadas y relaciones básicas.
- El estudiante 2 evidenció mayor competencia para detallar dependencias entre variables.
- Hubo buen reconocimiento de patrones en datos tabulares principalmente.

Dificultades:

- Transición limitada entre representaciones (de gráfica a algebraica).
- Confusión entre crecimiento lineal y cuadrático (estudiante 1).
- Dificultad para interpretar parámetros en situaciones reales.

2. Modelación Matemática**Fortalezas:**

- Manejo adecuado de Tracker en la recolección de datos.
- Buena construcción de gráficas en lápiz y papel.
- Identificación de tendencias generales.

Dificultades:

- Construcción de expresiones algebraicas muy limitada.
- Dificultad para seleccionar puntos adecuados al realizar cálculos.
- Diferencias entre modelos manuales y generados por software.

4.6.2 Resultados por Niveles de Comprensión (Contreras, 1994)**1. Comprensión Intuitiva (Nivel 1)****Fortalezas:**

- Identificación clara de magnitudes constantes y variables y relaciones cualitativas a partir de la actividad 2,

Ejemplo (Estudiante 1, Actividad 2): “la velocidad es constante, la altura es variable, el tiempo es variable y la distancia es variable” .

Ejemplo (Estudiante 1, Actividad 1): “La batería disminuye más rápido en videojuegos que en videos”.

Dificultades:

- Identificación incompleta de las magnitudes implicadas en la Actividad 1 por parte del Estudiante 1.

Ejemplo: “el tiempo y es variable”.

- No identificó la tendencia curva de los puntos y lo asocia con una función lineal.

Ejemplo (Estudiante 1, Actividad 3, Momento 1, tarea e): “al momento que grafiqué las 2 primeras coordenadas supuse que iba a ser una recta, pero a lo que grafique la última coordenada ya no coincidía con la recta que pensé que daba, pero al parecer la función tiende a ser una función lineal”.

2. Comprensión Procedimental (Nivel 2)

Fortalezas:

- Correcta construcción de representaciones tabular y gráfica a partir de la recolección de datos.

Dificultades:

- Poca o nula recurrencia a procedimientos algebraicos para hallar la representación algebraica
- Uso de fórmulas mal aplicadas y sin explicar su significado.

3. Abstracción Matemática (Nivel 3)

Fortalezas:

- Identificación de patrones numéricos.

Ejemplo (Estudiante 2, Actividad 1): “Cada 60 minutos, la batería baja 20% en videos y 25% en juegos”.

Dificultades:

- Limitaciones para generalizar patrones a expresiones algebraicas (tránsito entre representación tabular a algebraica).

4. Formalización (Nivel 4)

Fortalezas:

- Intentos de justificación por parte del estudiante 2.
- Reconocimiento verbal de patrones de variación.

Dificultades:

- Validaciones incompletas o incorrectas.
- Uso limitado de lenguaje matemático formal.
- Dificultad para establecer conexiones entre conceptos y procedimientos.

4.6.3 *Análisis por Actividad con Ajustes propuestos*

Actividad 1: Consumo de Batería en un teléfono móvil (Función Lineal).

Tiempo requerido: 4 horas.

Observaciones:

- Buena identificación de variables y relaciones.
- Construcción adecuada de representaciones tabular y gráfica.
- Dificultad para construir la representación algebraica.
- Identificación de relación de dependencia por parte del estudiante 2.
- Uso limitado de la herramienta digital GeoGebra.

Problemas detectados:

- **Redundancia en preguntas:** Tareas b, c y e del Momento 1 solicitaban describir la misma relación.

Ajuste:

- **Fusionar preguntas:**

“Completa la información de la siguiente tabla para distintos valores de tiempo con ayuda del applet y responde: ¿Cómo se relacionan las magnitudes variables implicadas? Si observas alguna regularidad en los datos, descríbela”.

- Dificultad para comprender la tarea c del Momento 3, la cual se asocia al nivel de formalización y repetición de esta en la Actividad 2.

Ajuste:

- Modificar la pregunta de la Actividad 1 hacia la observación de casos particulares y promover el uso de conjeturas:

“Compara la pendiente calculada para ambas actividades (ver videos y jugar videojuegos) con la de tres intervalos distintos de la tabla. ¿Son iguales? ¿Qué concluyes? Plantea una conjetura”.

Actividad 2: Movimiento del teleférico (Función Lineal).

Tiempo requerido: 2 horas.

Observaciones:

- Buena comprensión en el uso de la herramienta digital Tracker.
- Dificultad en la interpretación física de la pendiente.
- Construcción de la representación algebraica limitada.
- Intento de formalización de la variación constante (estudiante 2).

Problemas detectados:

- Dificultad para comprender la tarea c del Momento 2, la cual se asocia al nivel de formalización y repetición de esta en la Actividad 1.

Ajuste:

- Luego de modificar la pregunta de la Actividad 1 hacia la observación de casos particulares promoviendo el uso de conjeturas, es viable ajustar esta pregunta a la validación de una nueva conjetura en este contexto específico.

“Plantea una conjetura acerca de la variación entre la distancia y el tiempo, ¿Cómo puedes justificar matemáticamente de manera general que esta conjetura se cumple siempre? Explica detalladamente tu razonamiento”.

Actividad 3: Proyector en el aula (Función Cuadrática)**Tiempo requerido:** 2 horas.**Observaciones:**

- Confusión entre modelo lineal y tendencia curva.
- Identificación limitada de la función de los parámetros.
- Incapacidad para proponer una representación algebraica.
- Incapacidad para demostrar la variación acelerada.

Problemas detectados:

- Tareas a y b del Momento 3 confusas y con poco sentido.

Ajuste:

- Proponer una nueva tarea en lugar de estas, la cual les permita observar más naturalmente el ajuste requerido en cuanto a la restricción del dominio de la expresión.

“¿Consideras que esta expresión algebraica generada representa adecuadamente los datos en el contexto estudiado? ¿Será necesario realizar algún ajuste a la expresión? Justifica tu respuesta”.

- Dificultad para comprender la tarea e del Momento 3, la cual se asocia al nivel de formalización y repetición de esta en la Actividad 4.

Ajuste:

- Modificar la pregunta de la Actividad 3 hacia la observación de casos particulares y promover el uso de conjeturas:

“Compara la variación del área proyectada con respecto a la distancia en tres intervalos constantes consecutivos (por ejemplo: distancia de 1 a 1.5 m, distancia de 1.5 a 2 m) tomados de la tabla que construiste al inicio. ¿Son iguales? ¿Qué concluyes? Plantea una conjetura”.

Actividad 4: Lanzamiento de una falta en baloncesto (Función Cuadrática).

Tiempo requerido: 2 horas.

Observaciones:

- Asociación correcta de trayectoria parabólica con función cuadrática.
- Uso adecuado de Tracker para modelación experimental.
- Limitación para construir la representación algebraica.
- Limitación para demostrar la variación acelerada.

Problemas detectados:

- Tareas a y b del Momento 2 confusas y redundantes.

Ajuste:

• Proponer una nueva tarea en lugar de estas, la cual les permita observar más naturalmente el ajuste requerido en cuanto a la restricción del dominio de la expresión.

“¿Consideras que esta expresión algebraica generada representa adecuadamente los datos en el contexto estudiado? ¿Qué ajuste requiere? Justifica tu respuesta”.

• Dificultad para comprender la tarea c del Momento 2, la cual se asocia al nivel de formalización y repetición de esta en la Actividad 3.

Ajuste:

- Luego de modificar la pregunta de la Actividad 3 hacia la observación de casos particulares promoviendo el uso de conjeturas, es viable ajustar esta pregunta a la validación de una nueva conjetura en este contexto específico.

“Plantea una conjetura acerca de la variación entre la altura del balón y el tiempo, ¿Cómo puedes justificar matemáticamente de manera general que esta conjetura se cumple siempre? Explica detalladamente tu razonamiento”.

4.6.4 Comparativa entre estudiantes

Tabla 6

Comparativa entre estudiantes post pilotaje

Competencia	Estudiante 1	Estudiante 2
Identificación de variables	Precisión básica	Precisión más profunda
Relaciones entre variables	Descripciones cualitativas	Uso de términos matemáticos
Construcción de modelos	Limitaciones significativas	Mayor comprensión conceptual
Formalización	Limitaciones significativas	Intentos estructurados
Uso de software	Dominio moderado	Mayor dominio

Luego de este pilotaje y ajustes realizados, se espera que las actividades hayan quedado refinadas para proceder con la implementación con los estudiantes de undécimo grado.

4.7 Caracterización del grupo y contexto de aplicación

El experimento de enseñanza se desarrolló con los estudiantes del curso 11-02 de la jornada de la mañana de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander, ubicada en el barrio

Santander de la ciudad de Bucaramanga. El grupo estuvo conformado por 21 estudiantes, de los cuales 14 eran mujeres, incluyendo una estudiante con discapacidad cognitiva y 7 hombres.

Durante el periodo de observación e implementación, se evidenció una asistencia irregular de los estudiantes, lo cual tuvo implicaciones directas en el desarrollo de las actividades. El aula de matemáticas dispuesta para el trabajo contaba con computadores portátiles de baja gama, donados por la alcaldía municipal. Sin embargo, varios de estos equipos presentaban fallas técnicas como lentitud, bloqueos del sistema y dificultades de encendido. A esto se sumaron problemas de conectividad que afectaban a toda la institución. Estas condiciones obligaron a realizar ajustes en el desarrollo del experimento y, eventualmente, motivaron la instalación de una red exclusiva de internet para dicha sala, lo que permitió una mejora parcial en la conectividad, aunque persistieron dificultades.

Previo a la implementación, se realizaron dos sesiones de observación del curso mientras el docente titular dirigía su clase como de costumbre. En la primera clase, centrada en temas de probabilidad, se observó una dinámica enfocada en la revisión de tareas y una actividad experimental con dados. Se percibió un ambiente de confianza entre el docente y los estudiantes, aunque con participación moderada y una disposición inicial limitada por la llegada tardía de algunos estudiantes. En la segunda clase, correspondiente al área de cálculo, se abordó la ubicación de números irracionales en la recta real utilizando inicialmente el compás y luego el software GeoGebra. Allí se evidenció un uso muy limitado del software por parte de los estudiantes, quienes manifestaron dificultades para manipularlo. Esta situación reforzó la necesidad de una introducción guiada de GeoGebra en las actividades diseñadas por el investigador.

En el grupo se encontraba una estudiante con discapacidad cognitiva de grado moderado, según la información suministrada por el docente titular. La estudiante presentaba limitaciones

significativas en el lenguaje oral y en el razonamiento lógico-matemático, y su participación en clase estaba mediada por el acompañamiento constante de una auxiliar pedagógica, quien le proponía tareas centradas en operaciones matemáticas básicas. Si bien fue posible observar algunos de los ejercicios que se le asignaban, no se logró integrarla directamente en el diseño ni en la implementación del experimento de enseñanza, debido a la alta complejidad conceptual de las actividades y a su baja asistencia durante el periodo de trabajo. Se reconoce la importancia de avanzar hacia propuestas más inclusivas en futuras investigaciones que contemplen adaptaciones didácticas acordes con la diversidad funcional presente en el aula.

4.8 Ajustes en la implementación del experimento de enseñanza

Aunque el diseño inicial del experimento de enseñanza contemplaba la aplicación de cuatro actividades, distribuidas en dos sobre funciones lineales y dos sobre funciones cuadráticas, solo fue posible implementar de manera casi completa la actividad 1 y la actividad 3, ambas mediadas por el software GeoGebra e involucrando los objetos matemáticos de funciones lineales y cuadráticas. Las actividades 2 y 4, que requerían el uso del software Tracker para la modelación de fenómenos físicos en video, no pudieron ser llevadas a cabo debido a dificultades técnicas y logísticas presentadas durante el desarrollo del trabajo en la institución educativa.

En una de las sesiones programadas se destinó tiempo a la exploración inicial de la actividad 2. Durante dicha sesión, se logró introducir el manejo básico del software Tracker y modelar el movimiento del teleférico como fenómeno físico. Algunos estudiantes lograron identificar regularidades en el comportamiento del objeto, reconociendo que se trataba de una función lineal y que su velocidad era constante. Sin embargo, el bajo desempeño de los computadores, las dificultades técnicas al ejecutar el software y el tiempo requerido para asistir individualmente a los estudiantes impidieron el avance fluido de la actividad. Como resultado, y

considerando la limitada disponibilidad de sesiones restantes, se decidió suspender su desarrollo completo.

Esta decisión fue tomada en conjunto con el director del trabajo de grado, quien orientó a priorizar las actividades que pudieran desarrollarse con mayor estabilidad técnica y profundidad conceptual, utilizando herramientas más manejables para el contexto observado. Lo anterior refleja una de las tensiones reales de la enseñanza con tecnología en instituciones educativas del sector público colombiano, donde la constante pérdida de clase, las interrupciones institucionales y la calidad limitada de los recursos tecnológicos dificultan la implementación de propuestas didácticas que demandan mayor infraestructura.

5. Análisis e Interpretación de Resultados

En este capítulo se presenta el análisis cualitativo de las producciones obtenidas durante el experimento de enseñanza, cuyo objetivo fue fomentar el desarrollo de procesos de modelación matemática con situaciones auténticas que abarcaban relaciones funcionales, mediadas por el uso de GeoGebra.

El análisis se sustenta en dos referentes teóricos centrales: el ciclo de modelación propuesto por Blum y Borromeo (2009), reorganizado en cuatro fases generales siguiendo la explicación de Londoño y Muñoz (2011), como se indicó en el capítulo de Aspectos Teóricos y Conceptuales; y los niveles de comprensión propuestos por Herscovics y Bergeron, citados en Contreras (1994). Ambos elementos permitieron interpretar los avances y las dificultades que presentaron los estudiantes durante el abordaje de las tareas diseñadas.

En coherencia con el diseño del experimento, las actividades buscaron guiar a los estudiantes a través de las cuatro fases del proceso de modelación ajustadas: comprensión y estructuración, matematización, trabajo matemático y validación e interpretación. Aunque el desarrollo de cada fase varió en profundidad según el estudiante o la actividad, en todos los casos se logró recorrer el ciclo completo, tal como fue organizado para esta investigación.

El ciclo de modelación, por tanto, fue empleado como base para el diseño de las actividades, asegurando que las cuatro fases estuvieran representadas a lo largo del experimento. Sin embargo, el análisis de resultados no se centró en evaluar el tránsito individual de los estudiantes por cada fase, ya que el objetivo central de esta investigación estuvo puesto en caracterizar los niveles de comprensión manifestados en sus producciones.

En relación con estos niveles, si bien el marco teórico los presenta como categorías diferenciadas (intuitivo, de procedimientos, abstracción matemática y formalización), en la práctica se observaron respuestas que mostraban rasgos de más de un nivel, lo cual dificultaba su clasificación estricta. Por ello, se consideraron también formas intermedias o transicionales, señalando cuando una producción evidenciaba una tendencia hacia un nivel superior o una ubicación entre dos niveles. Esta perspectiva flexible permite representar de manera más fiel el carácter progresivo y no lineal de la comprensión matemática.

Los datos considerados en este análisis provienen de las producciones escritas en los libros digitales de GeoGebra trabajados por los estudiantes, así como de intervenciones orales registradas a través de grabaciones de audio y video recolectadas durante el abordaje del experimento.

5.1 Selección de casos

El enfoque cualitativo de la investigación no exigía revisar detalladamente las producciones de todos los estudiantes, por tal razón se optó por seleccionar algunos casos que permitieran comprender mejor cómo se manifestaron los niveles de comprensión matemática durante el proceso de modelación.

La selección de estos se realizó a partir de observaciones realizadas durante las sesiones, priorizando a los estudiantes que participaron activamente, evidenciaron interés en las actividades propuestas y realizaron intervenciones significativas tanto en lo escrito como en lo oral. La intención no era elegir exclusivamente respuestas completas o correctas, sino de identificar los procesos que dieran lugar a un análisis detallado basado en el marco teórico adoptado.

Para preservar la identidad de los participantes, a cada uno de los estudiantes seleccionados se le asignó un seudónimo: Juliana, Sofía, Mateo y Andrea. El análisis que se presenta a continuación se enfoca en caracterizar cómo estos estudiantes se aproximaron a los fenómenos planteados y qué tipos de comprensión lograron construir.

5.2 Análisis de la Actividad 1: Función Lineal

La actividad 1 tuvo como propósito que los estudiantes modelaran matemáticamente el fenómeno de la descarga de la batería en dos situaciones específicas: ver videos y jugar videojuegos. En este estudio de una relación funcional lineal, se buscaba que los estudiantes identificaran las variables implicadas, establecieran relaciones entre ellas y reconocieran que, en este tipo de funciones, la variación es constante.

Además, se incorporó intencionalmente el uso de diversas representaciones matemáticas (tablas, gráficas, expresiones algebraicas y lenguaje natural), con el fin de favorecer el tránsito

entre ellas y fomentar la construcción de conexiones significativas. El análisis que se presenta a continuación se organiza por tareas, dado que en la mayoría de estas el nivel de comprensión puede variar, por lo que es importante realizar una comparación de sus producciones. En cada tarea, se evalúan las producciones escritas y algunas orales más relevantes dentro del grupo de estudiantes seleccionado, considerando los momentos clave del trabajo en el aula y los aportes relevantes al proceso de modelación.

5.2.1 Tarea 1 – Identificación de magnitudes y su clasificación

La primera tarea de la Actividad 1 consistía en identificar las magnitudes presentes en la situación de consumo de batería y clasificarlas como variables o constantes. Esta tarea corresponde al primer paso del ciclo de modelación según Blum y Borromeo (2009), citados en Londoño y Muñoz (2011): la **comprensión y estructuración del problema real**, donde los estudiantes delimitan el fenómeno contextualizado mediante la identificación de variables relevantes y sus relaciones básicas. El enunciado de la tarea decía:

“¿Qué magnitudes están implicadas en esta situación? ¿Cuáles son variables y cuáles permanecen constantes? Justifica tu respuesta.”

Dada la naturaleza de esta pregunta, el nivel de comprensión básico asociado en la mayoría de los casos corresponde al intuitivo (Herscovics & Bergeron, citados en Contreras, 1994), ya que los estudiantes se apoyan en observaciones cotidianas y razonamientos personales para describir lo que cambia y lo que no. Sin embargo, a pesar de lo sencilla que resulte ser la pregunta, muchos estudiantes superan parcialmente el nivel esperado al proponer relaciones entre las magnitudes como sucedió en esta tarea.

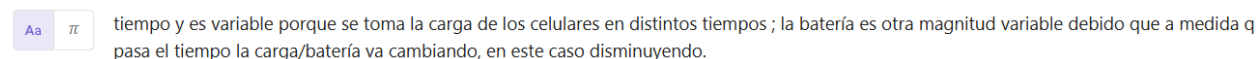
A continuación, se presentan y analizan las respuestas de tres de los estudiantes seleccionados y que asistieron a esta sesión.

Juliana

Figura 6

Respuesta de Juliana a la tarea 1 Act. 1

a) ¿Cuáles son las magnitudes involucradas en esta situación? ¿Son variables o constantes? Justifica tu respuesta.

 tiempo y es variable porque se toma la carga de los celulares en distintos tiempos ; la batería es otra magnitud variable debido que a medida q pasa el tiempo la carga/batería va cambiando, en este caso disminuyendo.

Juliana identifica correctamente las dos magnitudes centrales del fenómeno: tiempo y porcentaje de batería. Ambas las clasifica como variables y su justificación no se limita a mencionar que son variables porque cambian, sino que introduce una relación verbal entre las dos: señala que “*a medida que pasa el tiempo, la batería va cambiando*”.

Este tipo de razonamiento, aunque expresado en lenguaje común, evidencia una idea funcional: el comportamiento de una magnitud (la batería) depende de la otra (el tiempo). Aunque la pregunta no pedía establecer dicha relación, su respuesta espontánea indica que Juliana ya comienza a construir una comprensión más estructurada. Esta respuesta puede considerarse como **un primer paso hacia el nivel de abstracción matemática**, ya que no solo menciona qué magnitudes cambian, sino que también empieza a establecer relaciones y darles sentido.

Mateo

Figura 7

Respuesta de Mateo a la tarea 1 Act. 1

a) ¿Cuáles son las magnitudes involucradas en esta situación? ¿Son variables o constantes? Justifica tu respuesta.

Aa π tiempo y es variable ya que se mide la batería de los dispositivos en diferentes momentos del tiempo. La batería es la otra variable que su carga disminuye al pasar del tiempo

Mateo también menciona correctamente las dos magnitudes como variables. En su justificación, afirma que la batería se mide en distintos momentos y que esta disminuye “*al pasar del tiempo*”. Aunque sugiere cierta conexión temporal entre ambas magnitudes, no lo hace como una relación estructurada, sino como una descripción de lo que ocurre en la experiencia cotidiana. Su comprensión se enmarca en un **nivel de procedimientos**, ya que no se limita exclusivamente a responder la pregunta, sino que identifica una relación de la carga con el tiempo aunque lo asimile más con lo cotidiano.

Andrea

Figura 8

Respuesta de Andrea a la tarea 1 Act. 1

a) ¿Cuáles son las magnitudes involucradas en esta situación? ¿Son variables o constantes? Justifica tu respuesta.

Aa π TIEMPO VARIABLE PORQUE TODO EL TIEMPO ESTA CAMBIANDO CONSTANTEMENTE LA BATERIA VA DISMINUYENDO MEDIANTE VA PASANDO EL TIEMPO

Andrea también menciona las dos magnitudes como variables, pero su redacción es menos precisa. Su justificación contiene repeticiones (“*todo el tiempo está cambiando constantemente*”) y una formulación poco precisa que no permite identificar con claridad su comprensión del fenómeno. Aunque señala que la batería disminuye con el tiempo, esto se expresa de forma confusa y sin conexión explícita con la pregunta de distinguir variables y constantes.

Por tanto, su comprensión se encuentra en el **nivel intuitivo con tendencia al nivel de procedimientos**, ya que no menciona explícitamente las variables involucradas, sino que intenta afirmar directamente una relación entre las mismas sin tener precisión.

5.2.2 Tarea 2 – Relación entre magnitudes y observación de regularidad

En esta tarea se requería que los estudiantes completaran una tabla basándose en información del applet y describieran la relación entre las magnitudes. Esta tarea sigue formando parte de la fase de **comprensión y estructuración** del ciclo de modelación, pues busca que los estudiantes exploren el fenómeno, en este caso a partir de la simulación y de la tabla, para identificar cómo se comportan las magnitudes variables involucradas: el tiempo y la carga de la batería. El enunciado decía así:

“Completa la información de la siguiente tabla para distintos valores de tiempo con ayuda del applet y responde: ¿Cómo se relacionan las magnitudes variables implicadas? Si observas alguna regularidad en los datos, descríbela.”

A continuación, se presentan y analizan las respuestas de los tres estudiantes asistentes y su análisis:

Juliana

Figura 9

Respuesta de Juliana a la tarea 2 Act. 1

¿Cómo se relacionan las magnitudes variables implicadas? Si observas alguna regularidad en los datos, descríbela.



se relacionan debido a que la carga/batería va disminuyendo a medida q va avanzando el tiempo. Se logra visualizar que la batería del celular va disminuyendo un 20% cada 60 minutos , por el contrario al jugar videojuegos va disminuyendo un 25% cada 60 minutos.

Juliana logra describir el comportamiento de ambas situaciones con bastante precisión. Identifica que hay una relación entre las dos magnitudes, y no solo lo dice de forma general, sino

que da un valor concreto de la variación. Al mencionar que la batería disminuye un 20% o un 25% cada 60 minutos, está evidenciando una regularidad clara. Esto muestra que interpreta los datos con sentido y que puede identificar una razón de cambio constante. Su respuesta se ubica en un nivel de comprensión de **abstracción matemática**, ya que observa y presenta con exactitud la regularidad presente en el fenómeno abordado.

Mateo

Figura 10

Respuesta de Mateo a la tarea 2 Act. 1

¿Cómo se relacionan las magnitudes variables implicadas? Si observas alguna regularidad en los datos, descríbela.



La carga de las baterías va disminuyendo en función del tiempo. Al ver videos la carga disminuye un 20% cada 60 minutos, mientras que al jugar videojuegos disminuye un 25% cada 60 minutos. Tiene relacion inversa.

Mateo también identifica la variación constante y la expresa con porcentajes correctos para ambas situaciones: 20% cada 60 minutos al ver videos, y 25% al jugar videojuegos. Esto demuestra que no solo interpretó bien los datos de la tabla, sino que logró darles sentido y organizar la información con claridad. Además, al decir que “*la carga de las baterías va disminuyendo en función del tiempo*”, deja en evidencia que reconoce que se trata de una función, aun cuando en ese momento no se había introducido formalmente este concepto. Otro aspecto importante es su afirmación de que la relación “*es inversa*”. Si bien no justifica este término, su uso es coherente con la situación planteada, ya que, al aumentar el tiempo, disminuye la batería. Su respuesta se ubica en un nivel de comprensión de **abstracción matemática**, dado que logra generalizar el comportamiento del fenómeno y establecer una relación funcional clara a partir de los datos observados.

Andrea

Figura 11

Respuesta de Andrea a la tarea 2 Act. 1

¿Cómo se relacionan las magnitudes variables implicadas? Si observas alguna regularidad en los datos, descríbela.

Aa π SE RELACIONAN PORQUE AMBOS MEDIANTE EL TIEMPO PORQUE VARIA Y CAMBIA, EL TIEMPO Y LA BATERIA SON LAS MAGNITUDES

Andrea logra señalar en su respuesta escrita que las dos magnitudes se relacionan y que varían con el tiempo. Sin embargo, su redacción es desorganizada y no aporta ningún dato específico ni expresión que indique que haya identificado una regularidad. No menciona porcentajes ni intervalos, ni describe cómo ocurre el cambio. Por tanto, su respuesta se mantiene en un nivel de **comprensión intuitivo**. Reconoce que hay un cambio, pero no lo estructura ni lo representa con precisión.

No obstante, durante el espacio de “comunicando y compartiendo”, Andrea realizó una intervención que aporta una comprensión más profunda del fenómeno:

Investigador: *Entonces, ¿cómo podríamos pensar en esta situación bajo ese ejemplo? Ya sabemos que aquí hay dos variables implicadas, que son el tiempo y la carga de la batería, entonces, ¿cómo se relacionan en este contexto? ¿Cómo va el tiempo y cómo va la batería?*

Andrea: *Que a medida que aumenta el tiempo va descargándose la batería.*

Investigador: *¿Entonces, qué tipo de relación llevan estas dos variables? ¿Qué sucede cuando con la pareja hacemos lo contrario? ¿Es una relación de qué tipo?*

Andrea: *Opuesta*

Al ser preguntada por el tipo de relación entre las variables, respondió: “que a medida que aumenta el tiempo, va descargándose la batería”, y posteriormente, ante la analogía del

investigador con una relación de pareja, afirmó que era una relación “opuesta”. Aunque este término no sea técnico, su uso es coherente con la idea de una relación en la que una magnitud crece mientras la otra decrece. Con esto, se permite establecer mejor su nivel de comprensión, ya que evidencia que Andrea sí había comprendido la relación entre las magnitudes, aunque no logró expresarla adecuadamente por escrito. Por tanto, su participación oral sugiere un **nivel de procedimientos con tendencia hacia el nivel de abstracción matemática**.

5.2.3 Tarea 3 – Representación gráfica y análisis de comportamiento

En esta tarea, los estudiantes debían representar gráficamente los puntos obtenidos a partir de los datos de consumo de batería y, a partir de la gráfica, describir similitudes y diferencias entre ambas situaciones. Se les ofreció la opción de hacerlo manualmente o utilizando la ventana de GeoGebra en el applet. El enunciado decía:

“Utilizando los valores obtenidos, grafica la relación entre el tiempo y la batería restante para ambas actividades en el plano cartesiano. ¿Qué similitudes y diferencias observas entre las dos gráficas? Describe detalladamente tu observación”.

Esta actividad corresponde a la fase de **matematización** dentro del ciclo de modelación, donde los estudiantes avanzan en la construcción del modelo matemático al transitar desde representaciones tabulares hacia representaciones gráficas. En este paso, no solo se trata de graficar puntos, sino de interpretar el comportamiento visual del fenómeno para consolidar la comprensión de la relación funcional.

En todos los casos analizados, los estudiantes construyeron correctamente sus gráficas, lo que indica que comprendieron cómo representar la relación entre tiempo y batería en el plano

cartesiano. Esta tarea les permitió visualizar el comportamiento funcional y describir patrones que permiten comprender el fenómeno, un aspecto clave en el proceso de modelación matemática.

A continuación, se analizan las respuestas escritas de los tres estudiantes que participaron.

Juliana

Figura 12

Respuesta de Juliana a la tarea 3 Act. 1

d) Utilizando los valores obtenidos, grafica la relación entre el tiempo y la batería restante para ambas actividades en el plano cartesiano. ¿Qué similitudes y diferencias observas entre las dos gráficas? Describe detalladamente tu observación. **Nota: Puedes utilizar la ventana de GeoGebra aquí propuesta o tu hoja de trabajo.**



ambas disminuyen de manera constante en función del tiempo ; En la gráfica de los videos se logra ver como disminuye constantemente, en cambio la de los videojuegos disminuyo de manera constante y luego al llegar a cero siguió constante pero NO disminuyendo debido a q pasaron otros 60 minutos más del tiempo q podía seguir con batería.

Juliana identifica que ambas gráficas representan una disminución constante. Además, realiza una distinción clara entre los dos casos: en el de videojuegos, interpreta correctamente que la gráfica se detiene al llegar a cero y permanece constante al continuar el tiempo sin batería. Este detalle muestra no solo una lectura adecuada, sino una interpretación funcional del contexto. Su respuesta se ubica en un nivel de comprensión de **abstracción matemática**, ya que logra interpretar el comportamiento de las gráficas en función del fenómeno y comunicarlo con claridad.

Mateo

Figura 13

Respuesta de Mateo a la tarea 3 Act. 1

d) Utilizando los valores obtenidos, grafica la relación entre el tiempo y la batería restante para ambas actividades en el plano cartesiano. ¿Qué similitudes y diferencias observas entre las dos gráficas? Describe detalladamente tu observación. **Nota: Puedes utilizar la ventana de GeoGebra aquí propuesta o tu hoja de trabajo.**

Aa π Ambas disminuyen constantemente en función del tiempo, en la de videojuegos se mantuvo constante sin disminuir al llegar a 0, ya que pasaron 60 minutos mas. Ambas son lineas rectas.

Mateo también interpreta correctamente que ambas gráficas representan una disminución constante y menciona que ambas son líneas rectas, lo que implica que reconoció la estructura lineal de los modelos. Al igual que Juliana, identifica que la gráfica de los videojuegos se detiene al llegar a cero y permanece constante. Su respuesta evidencia un nivel de comprensión de **abstracción matemática**, pues interpreta correctamente la relación gráfica en función del comportamiento observado, haciendo referencia tanto a la forma como al significado del modelo.

Andrea

Figura 14

Respuesta de Andrea a la tarea 3 Act. 1

d) Utilizando los valores obtenidos, grafica la relación entre el tiempo y la batería restante para ambas actividades en el plano cartesiano. ¿Qué similitudes y diferencias observas entre las dos gráficas? Describe detalladamente tu observación. **Nota: Puedes utilizar la ventana de GeoGebra aquí propuesta o tu hoja de trabajo.**

Aa π no sobrepasan el numero 100 en el plano cartesiano, a medida de q va disminuyendo su batería se van bajando los puntos hasta llegar al numero 0

Andrea identificó que los puntos en la gráfica bajan progresivamente hasta llegar a cero y que no superan el valor de 100, lo cual es correcto, pero su descripción se mantiene en un nivel muy básico. No establece diferencias entre las dos gráficas ni menciona aspectos estructurales como la forma de la función o el comportamiento por separado de cada caso. Por tanto, su respuesta

escrita se ubica en un nivel de **comprensión intuitivo**, ya que se centra en la observación directa sin una interpretación más elaborada.

Sin embargo, durante el espacio discusión, Andrea aportó una idea que permite valorar con mayor detalle su comprensión:

Investigador: *¿Qué podemos ver si seguimos el rastro de los puntos? Por ejemplo, veamos los puntos desde A hasta G, esa cuál actividad es, ¿ver videos o jugar videojuegos? ¿Cuál se descargaba más rápido?*

Todos: *Jugar videojuegos*

Investigador: *Listo, entonces, en ese contexto, ¿cuál sería ese rastro?*

Andrea: *La primera*

Investigador: *¿Por qué?*

Andrea: *Porque toca el cero antes que la otra*

Al preguntarse cuál de las dos actividades se descargaba más rápido, respondió que era “*la primera*”, justificando que “*tocaba el cero antes que la otra*”. Este comentario indica que Andrea fue capaz de interpretar correctamente la representación gráfica considerando las variables involucradas, en particular la relación entre el tiempo y el momento en que la batería se agota. Esta observación requiere reconocer que el tiempo avanza sobre el eje horizontal y que la variable dependiente (la batería) alcanza el cero en un punto distinto para cada actividad. Bajo esta nueva respuesta, se evidencia un avance en su nivel de comprensión, estando ahora en un **nivel de procedimientos con tendencia a la abstracción matemática**, ya que si bien da una descripción correcta, aun le hace falta profundizar más.

5.2.4 Tarea 4 – Expresión algebraica de la relación

Esta tarea tenía como objetivo que los estudiantes expresaran algebraicamente la relación entre el tiempo y el porcentaje de batería, considerando el comportamiento regular observado en las actividades anteriores. El enunciado planteaba:

"Si el consumo de batería sigue un comportamiento regular, ¿cómo podrías expresarlo en términos matemáticos? Plantea una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la batería restante en cada actividad."

Esta actividad se enmarca en la fase de **matematización** dentro del ciclo de modelación, específicamente en el paso de traducción del modelo contextual a una representación matemática formal. Se buscaba que los estudiantes avanzaran desde las representaciones gráficas y tabulares hacia una expresión algebraica que evidenciara la relación funcional lineal.

A continuación, se analizan las respuestas de los estudiantes:

Juliana

Sin respuesta.

Juliana no proporcionó una respuesta escrita para esta tarea. Aunque en fases previas había demostrado capacidad para identificar relaciones entre variables y patrones de comportamiento (abstracción), el salto hacia la representación algebraica resultó ser un obstáculo. Su falta de respuesta sugiere que aún no había consolidado las herramientas necesarias para esta fase de matematización, aunque esto no invalida sus avances en otros aspectos del proceso.

Mateo

Figura 15

Respuesta de Mateo a la tarea 4 Act. 1

e) Si el consumo de batería sigue un comportamiento regular, ¿cómo podrías expresarlo en términos matemáticos? Plantea una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la batería restante en cada actividad.



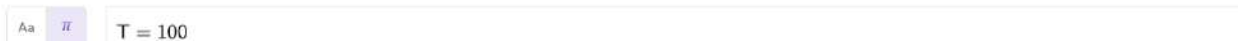
Mateo utilizó notación funcional, indicando que reconoció la existencia de una relación de dependencia entre las variables. Su intento de respuesta evidencia un **nivel de procedimientos** en su comprensión, ya que intentó organizar la relación en una estructura matemática, aunque sin precisar los componentes de la función lineal (pendiente e intercepto). Su respuesta, aunque incompleta, refleja una aproximación válida, coherente con la fase de matematización.

Andrea

Figura 16

Respuesta de Andrea a la tarea 4 Act. 1

e) Si el consumo de batería sigue un comportamiento regular, ¿cómo podrías expresarlo en términos matemáticos? Plantea una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la batería restante en cada actividad.



Andrea escribió una igualdad que hace referencia al valor inicial de la batería. Su respuesta se mantiene en el **nivel intuitivo**, pues, aunque identificó un elemento relevante del contexto (el 100% inicial), no logró estructurar la relación dinámica entre las variables.

5.2.5 Tarea 5 – Interpretación de cambios en el plano cartesiano

Esta tarea, correspondiente al momento 2 de la actividad y basada en un contexto diferente, buscaba que los estudiantes relacionaran los conceptos de cambio vertical (calles) y cambio horizontal (carreras) con los ejes del plano cartesiano. Este segundo momento de la actividad fue

diseñado específicamente con el objetivo de reforzar la construcción de la representación algebraica de una función a partir de sus representaciones tabular y gráfica. El enunciado decía:

“¿Qué representa el cambio vertical (calles) y el cambio horizontal (carreras) de este contexto en el plano cartesiano? Explica tu respuesta.”

Esta actividad se enmarca en la fase de **matematización**, específicamente en la consolidación de conceptos clave como la pendiente y su relación con los ejes coordenados. Aunque la formulación de la pregunta no fue la más clara, permitió observar cómo los estudiantes interpretaban esta conexión entre el contexto urbano y la representación matemática.

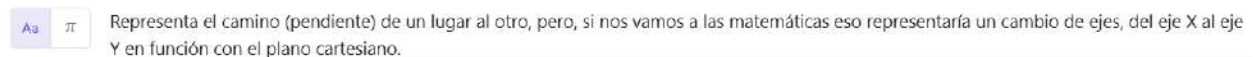
A continuación se presentan las respuestas de los estudiantes y su análisis:

Sofía

Figura 17

Respuesta de Sofía a la tarea 5 Act. 1

a) ¿Qué representa el cambio vertical (calles) y el cambio horizontal (carreras) de este contexto en el plano cartesiano? Explica tu respuesta.


 Representa el camino (pendiente) de un lugar al otro, pero, si nos vamos a las matemáticas eso representaría un cambio de ejes, del eje X al eje Y en función con el plano cartesiano.


Sofía fue la única que respondió correctamente, identificando que los cambios verticales y horizontales corresponden a los movimientos en los ejes x e y , respectivamente. Su comprensión evidencia un **nivel de procedimientos con acercamiento al nivel de abstracción matemática**, ya que logró trasladar la situación concreta a conceptos matemáticos, aunque su explicación fue un poco confusa al mencionar "*un cambio de ejes*".

Mateo

Figura 18

Respuesta de Mateo a la tarea 5 Act. 1

a) ¿Qué representa el cambio vertical (calles) y el cambio horizontal (carreras) de este contexto en el plano cartesiano? Explica tu respuesta.

 representa la distancia que tenemos que recorrer para llegar de un punto a otro en la ciudad.

Mateo se mantuvo en una interpretación literal del contexto, sin relacionarlo con el plano cartesiano. Su respuesta refleja un **nivel intuitivo** en su comprensión, ya que se centró en la descripción concreta de la actividad sin avanzar hacia el contexto matemático.

Andrea

Figura 19

Respuesta de Andrea a la tarea 5 Act. 1

a) ¿Qué representa el cambio vertical (calles) y el cambio horizontal (carreras) de este contexto en el plano cartesiano? Explica tu respuesta.

 que si todo queda en -10 las líneas verticales y horizontales desaparecen y a medida de q vamos moviendo las líneas llegamos al lugar donde nos queremos dirigir

Andrea proporcionó una respuesta poco clara, mezclando ideas sobre coordenadas negativas y movimiento. Su explicación se mantiene en un **nivel intuitivo**, sin lograr conectar explícitamente los cambios con los ejes x e y. Ante esto, se quiso profundizar en su respuesta, dada su poca claridad:

Investigador: *Andrea, usted menciona que si todo queda en -10 las líneas verticales y horizontales desaparecen, ¿a qué se refería con eso?*

Andrea: *Pues yo estaba moviendo las barras estas (refiriéndose a los deslizadores) y me di cuenta de que cuando las pones todas en -10 se desaparece la línea*

Investigador: *Vale, pero aun sigo sin entender por qué mencionó eso, acaso ¿cómo entendió la pregunta?*

Andrea: *Pues la verdad no la entendí, pero como me preguntaban que el cambio vertical y horizontal yo entendí que debía mover esas barras de un lado a otro como usted nos había dicho y ver qué sucedía y eso fue lo que me llamó la atención para escribir.*

Con esto, queda en evidencia que Andrea no comprendió lo que realmente solicitaba la tarea, ella se basó más en una exploración intentando hallar algo inusual, dado que se les había indicado que debían mover los deslizadores para arrastrar el punto A y el punto B por el plano cartesiano que simulaba una ciudad, con el objetivo de ir de un punto a otro. Por lo tanto, su nivel de comprensión no pasó del **nivel intuitivo**.

5.2.6 Tarea 6 – Relación entre pendiente y distancia

En esta tarea, los estudiantes debían explicar cómo se relaciona la pendiente con la distancia entre lugares basados en el contexto de la ciudad en el applet. El enunciado decía:

"¿Cómo se relaciona la pendiente con la distancia entre los lugares? Justifica tu respuesta".

Esta actividad se enmarca en la fase de **matematización** del ciclo de modelación, donde se buscaba que los estudiantes trasladaran su comprensión del contexto concreto (moverse por calles y carreras) al concepto abstracto de pendiente como razón de cambio ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$).

Los resultados evidenciaron distintos niveles de comprensión, a continuación, se presentan sus respuestas y análisis:

Sofía

Figura 20

Respuesta de Sofía a la tarea 6 Act. 1

b) ¿Cómo se relaciona la pendiente con la distancia entre los lugares? Justifica tu respuesta.

Aa π La pendiente es la relación entre el eje X y el eje Y(ya sean vertical u horizontal)

Sofía demuestra tener una buena idea de lo que representa la pendiente, al señalar que se trata de una relación. Aunque no es del todo precisa, ya que menciona los ejes y no el cambio a través de estos, su respuesta refleja que está comenzando a comprender que se trata de una comparación entre dos direcciones. Esta forma de razonar sugiere que ha superado el nivel intuitivo y que se encuentra en el **nivel procedimental con tendencias hacia el nivel de abstracción matemática**, al reconocer que la pendiente implica una relación entre variables, aunque aún no identifique con claridad que se trata del cociente entre los movimientos en el eje vertical y el eje horizontal.

Mateo

Figura 21

Respuesta de Mateo a la tarea 6 Act. 1

b) ¿Cómo se relaciona la pendiente con la distancia entre los lugares? Justifica tu respuesta.

Aa π la pendiente es una forma directa de llegar de un lugar a otro.

La respuesta de Mateo resulta confusa y difícil de interpretar, ya que no es claro a qué se refiere con “*forma directa*”. Por esta razón, se le consultó directamente para profundizar en su razonamiento. Durante el diálogo, explicó que pensó en la pendiente como una forma de conexión

vista “desde el aire”, es decir, como una línea recta que une dos puntos saltándose calles y edificaciones, lo que aclaró que se refería a una visión similar a la de un mapa de navegación. Este fue el diálogo:

Investigador: *Listo Mateo, la pregunta decía: ¿Cómo se relaciona la pendiente con la distancia entre dos lugares? Me llamó la atención su respuesta porque usted me dijo que la pendiente es una forma directa de llegar a un punto de la ciudad, ¿me podría explicar mejor a qué se refería con “forma directa”?*

Mateo: *Pues porque para ir en la ciudad de un punto a otro se analizan las cosas para llegar al lugar (se notaba nervioso)*

Investigador: *Si, pero usted me dijo que la pendiente era una forma directa, ¿directa de qué manera?*

Mateo: *No sé cómo decirlo, espere pienso bien.*

Investigador: *Tengo dos hipótesis, la primera es que usted lo visualizó en un mapa, como en el GPS, visto desde el aire, y a la forma directa que usted se refiere es algo así como tomar un dron y atravesar las edificaciones y llegar al destino, o la otra opción es que se refería a recorrer primero las calles y luego las carreras, o viceversa, ¿es alguno de esos dos el razonamiento que usted realizó?*

Mateo: *Si, así visto desde el aire fue como yo la interpreté.*

A partir de esto, se puede decir que su respuesta se mantiene en un **nivel de comprensión intuitivo**, ya que no logra establecer con claridad la relación entre los desplazamientos horizontales y verticales ni el significado matemático de la pendiente como razón de cambio.

Aunque intenta darle sentido desde su experiencia, su interpretación se aleja del objetivo de la tarea y no logra conectar el concepto con el contexto trabajado.

Andrea

Figura 22

Respuesta de Andrea a la tarea 6 Act. 1

b) ¿Cómo se relaciona la pendiente con la distancia entre los lugares? Justifica tu respuesta.

Aa π que entre mas lejos este el lugar mas alta será la pendiente

La respuesta de Andrea revela una confusión entre la pendiente y la distancia total. Ella parece pensar que, a mayor distancia recorrida, mayor será la pendiente, lo cual refleja una idea errónea del concepto, ya que la pendiente no depende de la longitud del recorrido sino de la razón entre el cambio vertical y el cambio horizontal. Esto indica que no logra distinguir entre desplazamiento y razón de cambio, lo que ubica su respuesta en un **nivel de comprensión intuitivo**. Aunque intenta establecer una relación, esta sigue siendo superficial y alejada del sentido matemático del concepto.

5.2.7 Tarea 7 – Interpretación numérica de la pendiente

En esta tarea se buscaba que los estudiantes interpretaran el significado numérico de distintos valores de pendiente dentro del contexto de la ciudad propuesta en el applet. A través de esta pregunta, se esperaba que pudieran reconocer cómo la fracción o el número entero asignado a la pendiente se refleja en desplazamientos concretos sobre el plano cartesiano, tanto en el eje horizontal como en el vertical.

La pregunta decía así:

“¿Qué significa que la función tenga una pendiente de 3? ¿una de 3/5? ¿y una de -1/2? Explica detalladamente tus respuestas.”

Este ejercicio corresponde a la fase de **matematización** del ciclo de modelación, ya que los estudiantes debían relacionar directamente el valor de la pendiente (números racionales y enteros) con el movimiento en el espacio gráfico del contexto. Según Blum y Borromeo (2009), citados en Londoño y Muñoz (2011), esta etapa implica traducir una situación real a un modelo matemático, que en este caso corresponde a los desplazamientos de cuadras según las pendientes indicadas, lo que de a poco se va acercando al planteamiento de la expresión algebraica.

A continuación, se presentan las respuestas y el análisis de los estudiantes.

Sofía

Figura 23

Respuesta de Sofía a la tarea 7 Act. 1

c) En este contexto, ¿qué significa que la función tenga una pendiente de 3? ¿una de $\frac{3}{5}$? ¿y una de $-\frac{1}{2}$? Explica detalladamente tus respuestas.

Aa

π

1. En la pendiente 3 de manera horizontal se movió 2 paso hacía la derecha y de manera vertical dio 6 pasos hacía arriba.
2. En la pendiente 3/5 de manera horizontal se movió 4 pasos Y medio hacía la derecha y de manera vertical 2 pasos y medio hacía arriba.
3. En la pendiente -1/2 de manera horizontal se movió 2 pasos hacía la izquierda y de manera vertical se movió medio paso hacía arriba.

En el primer caso, Sofía logra representar correctamente la pendiente de 3, al indicar un desplazamiento proporcional de 6 unidades hacia arriba por cada 2 hacia la derecha, lo cual mantiene una razón equivalente a 3 a 1. Esto demuestra que comprendió que la pendiente puede expresarse con distintos pares de valores equivalentes. Sin embargo, en los otros dos casos comete errores. En la pendiente 3/5, los desplazamientos que menciona no corresponden con la proporción esperada, lo que indica una confusión posiblemente causada por no haber considerado adecuadamente la escala de los ejes, que avanzaban de dos en dos en el applet. En el caso de la

pendiente $-1/2$, aunque el movimiento que describe (izquierda y arriba) sí puede representar correctamente una pendiente negativa, nuevamente se equivocó en el manejo de la escala de los ejes tras contar mal los movimientos. Por todo esto, su respuesta se ubica entre un **nivel intuitivo** y un **procedimental inicial**, ya que evidencia cierta comprensión parcial, pero con errores importantes en la interpretación numérica y visual.

Mateo

Figura 24

Respuesta de Mateo a la tarea 7 Act. 1

c) En este contexto, ¿qué significa que la función tenga una pendiente de 3? ¿una de $\frac{3}{5}$? ¿y una de $-\frac{1}{2}$? Explica detalladamente tus respuestas.



En la pendiente de 3 vimos que de manera horizontal se movió 1 paso hacia la derecha, y de manera vertical se movió 3 pasos hacia arriba. En la pendiente de $3/5$ vimos que de manera horizontal se movió 5 pasos hacia la derecha, y de manera vertical se movió 3 pasos hacia arriba. En la pendiente $-1/2$ se mueve 1 paso de manera vertical hacia abajo, y 2 pasos hacia la derecha de manera horizontal

Mateo representa correctamente los tres casos. En la pendiente 3 mantiene la proporción adecuada con un desplazamiento de 3 a 1. En la pendiente $3/5$ también conserva la relación entre los valores con sentido y dirección correctos. Y en la pendiente $-1/2$ describe un desplazamiento hacia la derecha y hacia abajo, lo cual representa apropiadamente una pendiente negativa. Si hubiera dicho, por ejemplo, que el movimiento horizontal era hacia la izquierda y el vertical hacia arriba, también habría sido válido. Esto indica que comprendió el significado de la pendiente como una razón entre dos direcciones, donde el signo negativo se puede reflejar en cualquiera de las dos. Su respuesta, por tanto, refleja un nivel de comprensión de **abstracción matemática**, al conectar correctamente los valores numéricos con su representación gráfica y contextual.

Andrea

Figura 25

Respuesta de Andrea a la tarea 7 Act. 1

c) En este contexto, ¿qué significa que la función tenga una pendiente de 3? ¿una de $\frac{3}{5}$? ¿y una de $-\frac{1}{2}$? Explica detalladamente tus respuestas.



en pendiente de 3 se dio 1 paso horizontal y 3 vertical, en la pendiente 3/5 se dan 2 pasos y medio horizontalmente y 1 y medio verticalmente en -1/2 se da 1 paso horizontal y medio paso vertical y queda ubicado en el eje negativo del plano cartesiano

Andrea logra mantener correctamente las proporciones en los tres casos. Aunque usó valores menores que los propuestos en la pregunta (por ejemplo, 2.5 y 1.5 para la pendiente 3/5), su razonamiento es válido, ya que, al tomar un punto intermedio sobre la misma recta, la pendiente se conserva. Esto evidencia que comprendió el concepto de razón constante. Sin embargo, un aspecto que limita su respuesta es que no menciona el sentido de los desplazamientos (si fueron hacia la derecha, izquierda, arriba o abajo), lo cual es importante especialmente en el caso de la pendiente negativa. A pesar de ello, se nota que entendió la relación entre los valores numéricos y los desplazamientos. Por esta razón, su respuesta puede ubicarse en un **nivel procedimental con tendencias hacia el nivel de abstracción matemática**.

5.2.8 Tarea 8 – Concepto de “pendiente”

Esta tarea tenía como objetivo explorar la manera en que los estudiantes consolidaban su comprensión sobre el concepto de pendiente, luego de haber trabajado con distintos ejemplos y representaciones. Se les pidió que, a partir de todo lo realizado en el momento 2, explicaran con sus propias palabras qué entendían por pendiente de una función. El enunciado decía: *“Después de responder las preguntas anteriores, ¿qué entiendes por ‘pendiente’ de una función? Justifica tu respuesta.”*

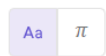
Esta tarea aún se ubica en la fase de **matematización** del proceso de modelación, ya que busca que el estudiante dé sentido matemático al comportamiento observado en la gráfica y se aproxime a la idea formal de pendiente como razón de cambio. Aunque no se les pedía escribir una expresión algebraica, sí se pretendía que construyeran una idea más estructurada del concepto, como preparación para el siguiente paso del ciclo. A continuación, se presenta el análisis de las respuestas.

Sofía

Figura 26

Respuesta de Sofía a la tarea 8 Act 1

d) Después de responder las preguntas anteriores, ¿qué entiendes por “pendiente” de una función? Justifica tu respuesta.



Es el grado de inclinación y la relación de los movimientos X y del eje Y

Sofía logra expresar dos ideas importantes: por un lado, reconoce que la pendiente tiene que ver con la inclinación de una recta, lo cual es matemáticamente correcto; y por otro, menciona la relación entre los movimientos en los ejes, aunque lo hace de forma general. Su respuesta muestra que ha construido una idea básica del concepto, aunque sin precisar que se trata de una razón de cambio entre dos magnitudes. A pesar de esto, es evidente que logró articular al menos dos aspectos relevantes del concepto, por lo que se puede ubicar en un nivel de comprensión **de procedimientos en tránsito hacia la abstracción matemática**.

Mateo

Figura 27

Respuesta de Mateo a la tarea 8 Act. 1

d) Después de responder las preguntas anteriores, ¿qué entiendes por “pendiente” de una función? Justifica tu respuesta.

Aa π una pendiente es la relación entre el eje x y el eje y

Mateo también apunta hacia una idea central del concepto al mencionar que se trata de una relación entre los ejes. Sin embargo, su definición es muy general, ya que no especifica qué tipo de relación existe ni en qué sentido se da. Aunque ha usado correctamente el término “relación”, su formulación no deja ver si comprende que la pendiente representa un cociente entre los cambios de ambas variables. Por esto, su respuesta se puede ubicar en un nivel de **comprensión procedimental**, ya que probablemente comprendió el concepto durante la actividad, pero no logró expresarlo con claridad.

Andrea

Figura 28

Respuesta de Andrea a la tarea 8 Act. 1

d) Después de responder las preguntas anteriores, ¿qué entiendes por “pendiente” de una función? Justifica tu respuesta.

Aa π pendiente es una función lineal, es el resultado de una formula según como se ubica en el plano cartesiano

Andrea presenta una respuesta escrita confusa. Parece haber relacionado la pendiente directamente con el tipo de función (lineal) y con una fórmula, sin llegar a identificar que se trata de una relación entre los cambios de las variables. Su explicación mezcla términos sin establecer una conexión clara con lo trabajado previamente, lo que sugiere que su comprensión se encuentra en un **nivel intuitivo**.

No obstante, durante el espacio de socialización “comunicando y compartiendo”, Andrea realizó una intervención que deja ver que, aunque no lo logró expresar correctamente por escrito, sí alcanzó a comprender parte del significado del concepto:

Investigador: *Luego, quiero que me definan la pendiente aquí en el contexto, denle sentido a lo que acabo de explicarles sobre el applet.*

Andrea: *Entonces es una relación*

Esta afirmación breve sugiere que Andrea tenía una idea de que la pendiente representa una relación, aunque no lograra estructurar del todo su pensamiento, durante este espacio lo pudo aclarar. Por esta razón, su nivel de comprensión podría considerarse en transición entre el **nivel intuitivo y el procedimental**, apoyado en lo trabajado durante el desarrollo colectivo de la tarea.

5.2.9 Tarea 9 – Interpretación del parámetro ‘b’ en la función lineal

Esta tarea fue planteada con el objetivo de que los estudiantes comprendieran el significado del parámetro b en la expresión algebraica de la función lineal en su forma canónica: $f(x) = mx \pm b$. La pregunta decía:

“Sabido que la forma canónica de la función lineal está dada por $f(x) = mx \pm b$, ¿qué representa el valor de ‘b’ en la función lineal? Justifica tu respuesta. Nota: Ayúdate del applet.”

Esta actividad sigue enmarcada dentro de la fase de **matematización**, según Blum y Borromeo (2009), citados en Londoño y Muñoz, (2011), ya que se requería interpretar un elemento simbólico del modelo algebraico a partir de su representación gráfica. Para lograrlo, el applet

utilizado permitía a los estudiantes explorar cómo cambiaba el valor de b al mover los puntos A y B, mostrando también el punto C, que marcaba el lugar exacto donde la función cortaba el eje y .

A continuación, se presentan las respuestas y el análisis de los estudiantes.

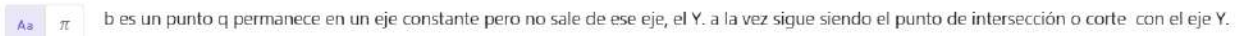
Sofía

Figura 29

Respuesta de Sofía a la tarea 9 Act. 1

e) Sabiendo que la forma canónica de la función lineal está dada por $f(x) = mx \pm b$, ¿qué representa el valor de b en la función lineal? Justifica tu respuesta.

Nota: Ayúdate del applet.

 b es un punto q permanece en un eje constante pero no sale de ese eje, el Y. a la vez sigue siendo el punto de intersección o corte con el eje Y.

Sofía logra identificar el significado correcto del parámetro b como el punto de corte de la recta con el eje y . Aunque su expresión inicial “*un eje constante*” es un poco confusa, posteriormente aclara que se trata del punto de intersección con el eje y , lo cual es matemáticamente correcto. Esto indica que comprendió la relación entre la representación gráfica y la expresión algebraica, razón por la cual su producción se puede ubicar en un nivel de **abstracción matemática**, ya que identifica gráficamente el valor de b , reconociendo la función de este parámetro dentro de la representación algebraica.


Mateo

Figura 30

Respuesta de Mateo a la tarea 9 Act. 1

e) Sabiendo que la forma canónica de la función lineal está dada por $f(x) = mx \pm b$, ¿qué representa el valor de b en la función lineal? Justifica tu respuesta.

Nota: Ayúdate del applet.

 Es un punto variable que va cambiando según el movimiento de el punto a y sus ejes.

La respuesta de Mateo es confusa, ya que, aunque reconoce que el punto varía con el movimiento, no logra especificar qué representa realmente el valor de b . Su afirmación se queda en una descripción general del comportamiento del punto, sin establecer su vínculo con el eje y ni con el concepto de intersección. Esto limita su comprensión y sugiere un **nivel intuitivo**, ya que no logra conectar adecuadamente la representación algebraica con la gráfica.

Sin embargo, durante el espacio de socialización, Mateo realiza una afirmación importante que permite reconsiderar su nivel de comprensión.

Investigador: *Si, pero más que tocar el eje y, ¿qué hace en realidad?*

Sofía: *Lo corta*

Andrea: *Lo intercepta*

Investigador: *Muy bien, entonces definamos de manera organizada el parámetro b , ¿quién me da la definición completa?*

Mateo: *Sería entonces el punto donde la gráfica corta el eje vertical*

Esta afirmación muestra que el estudiante logró establecer la relación correcta entre el valor de b y su interpretación gráfica como punto de intersección con el eje y, lo que no había logrado

evidenciar en su respuesta escrita y lo pudo aclarar al momento de la socialización. Por esta razón, se reubica su nivel de comprensión en una **transición entre lo procedimental y la abstracción matemática**, al demostrar oralmente que comprendió el significado contextual del parámetro dentro del modelo gráfico.

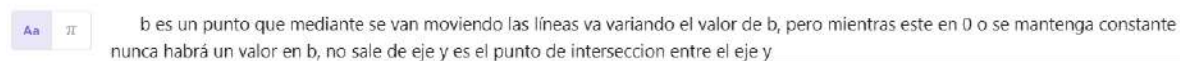
Andrea

Figura 31

Respuesta de Andrea a la tarea 9 Act. 1

e) Sabiendo que la forma canónica de la función lineal está dada por $f(x) = mx \pm b$, ¿qué representa el valor de b en la función lineal? Justifica tu respuesta.

Nota: Ayúdate del applet.

 b es un punto que mediante se van moviendo las líneas va variando el valor de b, pero mientras este en 0 o se mantenga constante nunca habrá un valor en b, no sale de eje y es el punto de interseccion entre el eje y

Andrea presenta una respuesta que evidencia poca claridad en su razonamiento. Su redacción es imprecisa y confusa, y no logra identificar que el parámetro b representa el punto donde la función corta el eje y. Sin embargo, durante el espacio de socialización, Andrea realizó una intervención que permite reconsiderar parcialmente su nivel de comprensión:

Investigador: *Así es, ese punto siempre está sobre el eje y, pero en sí, ¿qué representa ese punto? Detallen bien la gráfica y revisen la función que ejerce sobre esta.*

Sofía: *Yo veo que es el punto donde la función toca el eje vertical*

Investigador: *Si, pero más que tocar el eje y, ¿qué hace en realidad?*

Sofía: *Lo corta*

Andrea: *Lo intercepta*

Con esa afirmación, Andrea logró verbalizar la idea central del parámetro b , incluso utilizando el término técnico “intercepta”, lo cual indica que, al menos de forma oral y en interacción grupal, sí logró captar el significado buscado. Por ello, aunque su respuesta escrita es confusa, esta intervención oral permite elevar su nivel de comprensión a una **transición entre lo procedimental y la abstracción matemática**, al evidenciar oralmente que comprendió la función del parámetro dentro de la representación gráfica del modelo, aunque sin justificarlo más detalladamente.

5.2.10 Tarea 10 – Planteamiento de la expresión algebraica

Esta tarea marca el inicio del momento 3 de la actividad, en el cual los estudiantes debían construir una expresión algebraica que representara la relación entre el tiempo y la batería restante para las dos actividades abordadas: ver videos y jugar videojuegos. El enunciado decía:

“Ahora que comprendes lo que significa la pendiente y el complemento en una función lineal, plantea una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la batería restante en cada actividad.”

Esta tarea hace parte de la fase de **matematización** del ciclo de modelación, ya que implica el paso directo desde las representaciones gráfica y tabular hacia una representación algebraica que generalice el comportamiento del fenómeno. Aquí se esperaba que los estudiantes identificaran la pendiente y el punto de corte en el eje y para formular correctamente la expresión correspondiente a cada situación.

En esta sesión se contó con el regreso de Juliana, quien no había participado durante el momento 2. A continuación, se presentan las respuestas y el análisis de cada estudiante:

Juliana

Figura 32

Respuesta de Juliana a la tarea 10 Act. 1

a) Ahora que comprendes lo que significa la pendiente y el complemento en una función lineal, plantea una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la batería restante en cada actividad.



A screenshot of a digital workspace. On the left, there are two small buttons labeled 'Aa' and 'π'. To the right of these buttons is a text input field containing the mathematical expressions $y = -\frac{1}{3}x + 100, y = -\frac{5}{12}x + 100$.

Juliana plantea correctamente ambas expresiones algebraicas: usa los valores adecuados para la pendiente ($-1/3$ para ver videos y $-5/12$ para jugar videojuegos) y el punto de corte con el eje y, que en ambos casos es 100. Su procedimiento muestra que comprendió cómo se construye una función lineal en su representación algebraica a partir de los datos trabajados a través de las otras representaciones. Sin embargo, utiliza las letras x e y para representar las variables, sin relacionarlas directamente con el contexto. Lo ideal habría sido usar t para el tiempo y $B(t)$ o $C(t)$ para la batería, o al menos haber indicado que representaba cada variable. Esta desconexión con el contexto no anula lo que logró, pero sí limita que pueda ubicarse en un nivel de abstracción matemática. Su producción se considera en un **nivel procedimental**, ya que si bien aplicó correctamente la estructura funcional, no involucró las variables del contexto abordado o especificó que x era el tiempo e y la carga de la batería.

Cabe mencionar que Juliana no estuvo presente durante el momento 2. Sin embargo, al inicio de esta sesión se le ofreció una breve nivelación, con la que logró comprender rápidamente las ideas centrales y dar continuidad a la actividad. Esto refuerza que, a pesar de su ausencia en momento anterior, fue capaz de construir una respuesta coherente y funcional.

Sofía

Figura 33

Respuesta de Sofía a la tarea 10 Act. 1

a) Ahora que comprendes lo que significa la pendiente y el complemento en una función lineal, plantea una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la batería restante en cada actividad.

Aa π $y = -\frac{1}{3}x + 100, y = -\frac{5}{12}x + 100$

Sofía también formula correctamente ambas expresiones. Al igual que Juliana, usa variables genéricas (x e y), sin hacer una conexión explícita con el contexto, pero la estructura de la función es adecuada, y usa correctamente la pendiente y el punto de corte. Esto muestra que comprendió cómo trasladar la información de los casos al lenguaje algebraico. Su respuesta, al igual que la de Juliana, refleja un **nivel procedimental**, ya que reconoce la tendencia de la función y la expresa algebraicamente, pero sin tener en cuenta las variables del contexto original.

Mateo

Figura 34

Respuesta de Mateo a la tarea 10 Act. 1

a) Ahora que comprendes lo que significa la pendiente y el complemento en una función lineal, plantea una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la batería restante en cada actividad.

Aa π $y = mx + b$ Videojuegos: $y = -5/12 x + 100$ Videos: $y = -1/3x + 100$ expresión: $B(t) = mt + 100$

Mateo inicia con la forma general de la función lineal, luego presenta dos expresiones específicas para cada actividad, y finalmente hace una aclaración que vincula la función con el contexto real: $B(t) = mt + 100$. Aunque no cambia las variables en las expresiones anteriores, este último comentario demuestra que entiende que la función debe relacionarse con las magnitudes del contexto abordado. Esto evidencia una buena comprensión del modelo matemático. Su

producción corresponde a un nivel de **abstracción matemática**, al lograr conectar las representaciones algebraicas con el fenómeno estudiado.

Andrea

Figura 35

Respuesta de Andrea a la tarea 10 Act. 1

a) Ahora que comprendes lo que significa la pendiente y el complemento en una función lineal, plantea una expresión algebraica que represente la relación entre el tiempo y la batería restante en cada actividad.



Andrea intenta formular la expresión, pero su resultado es incompleto. Aunque incluye los valores aproximados de la pendiente y del punto de corte, omite la variable independiente y el signo correcto, lo cual impide que su expresión represente adecuadamente la relación funcional. Aun así, el hecho de que mencione los valores muestra que ha identificado ciertos elementos del modelo, pero no logra unirlos de forma correcta. Por esta razón, su producción se ubica entre un **nivel intuitivo y un nivel procedimental**, ya que demuestra tener cierto conocimiento de lo que debía realizar, pero sin concretar correctamente su procedimiento.

No obstante, durante el espacio de discusión, Andrea retoma la tarea y corrige su respuesta, afirmando lo siguiente:

Investigador: *¿Y qué pasa, resulta positiva o negativa esa pendiente?*

Sofía: *Queda negativa*

Investigador: *¿Por qué queda negativo?*

Sofía: *Porque uno de los valores es positivo y el otro negativo y menos por más me da menos.*

Investigador: *Listo, ahora de la misma manera revisen la expresión de ver videos los que aún no la hicieron y me dicen cuánto les da*

Andrea: *Me dio $-1/3x + 100$*

Investigador: *¿Por qué le resultó la pendiente negativa?*

Andrea: *Porque me di cuenta de que para ir de 100 a cero en el eje vertical en realidad estaba bajando y eso se toma como negativo*

Tras esta intervención, se evidencia que Andrea logró reformular su respuesta inicial, comprendiendo la relación entre los movimientos en los ejes y su impacto en el signo de la pendiente. Sin embargo, al igual que ocurrió con Juliana y Sofía, no estableció una conexión explícita entre las variables del contexto en la expresión algebraica. Este avance muestra que su comprensión alcanza el **nivel de procedimientos**, ya que al igual que Juliana y Sofía, no establece una relación con las variables del contexto.

5.2.11 Tarea 11 – Comparación de expresiones y consumo de batería

En esta tarea, los estudiantes debían comparar las expresiones algebraicas que habían planteado para las dos actividades: ver videos y jugar videojuegos, y reflexionar sobre las diferencias entre estas en relación con el consumo de batería. El enunciado era el siguiente:

“Compara las expresiones algebraicas que propusiste para ver videos y jugar videojuegos. ¿Qué diferencias notas? ¿Qué significa eso en términos del consumo de batería? Justifica tu respuesta.”

Esta tarea se ubica en la **fase de trabajo matemático** del ciclo de modelación, ya que los estudiantes debían utilizar las expresiones formuladas previamente para interpretar y sacar conclusiones sobre el fenómeno modelado.

A continuación, se presenta el análisis de las respuestas:

Juliana

Figura 36

Respuesta de Juliana a la tarea 11 Act. 1

b) Compara las expresiones algebraicas que propusiste para ver videos y jugar videojuegos. ¿Qué diferencias notas? ¿Qué significa eso en términos del consumo de batería? Justifica tu respuesta.

la única diferencia q logro visualizar es la expresion de la funcion de los movimientos en el eje y sobre el eje x y en la expresion lineal algebraica de los videos se visualiza que se dan 100 pasos en el eje y sobre 300 pasos q se da en el eje x y se simplifica quedando así 1/3 y al ver de manera grafica la expresion lineal la inclinación de esta es negativa dejando así -1/3 y al igual con la funcion de la grafica de los videos se toma que de dan 100 pasos en el eje y y 240 en el eje x y simplificado se obtiene 5/12 y al igual q la anterior su perpendicular es negativa dejando así -5/12. Viendo las expresiones algebraicas se logra ver como la función de los videos es mayor que la de los videojuegos dejando así claro que al ser mayor el valor de m significa q consume menos energía en base del tiempo para obtener el porcentaje de batería.

Juliana presenta una explicación extensa y aunque algo desorganizada, se nota que intenta justificar el origen de los valores de las pendientes desde los datos del contexto. Reconoce correctamente que la pendiente es más pronunciada en el caso de jugar videojuegos y logra relacionar esto con un mayor consumo de batería. Además, menciona el signo negativo de la pendiente y justifica su valor desde la proporción entre los datos. Aunque usa términos como “perpendicular” de forma inadecuada y se confunde en algunos momentos, su análisis global muestra que comprendió la relación funcional y su interpretación contextual. Su respuesta se ubica en un nivel de comprensión **de abstracción matemática**, aunque con ciertos aspectos por mejorar en la claridad de la argumentación.

Sofía

Figura 37

Respuesta de Sofía a la tarea 11 Act. 1

b) Compara las expresiones algebraicas que propusiste para ver videos y jugar videojuegos. ¿Qué diferencias notas? ¿Qué significa eso en términos del consumo de batería? Justifica tu respuesta.

Lo único q cambia es el m, por q de resto todo está igual, y en términos de batería, los juegos son los q más rápidos se descargan

Sofía identifica que el único valor que cambia es la pendiente, lo cual es correcto. Aunque su explicación es muy breve, logra establecer una relación entre la pendiente y el consumo de

batería, reconociendo que jugar videojuegos implica un mayor gasto. No entra en detalles ni justifica por qué ese valor indica un mayor consumo, por lo cual su respuesta puede ubicarse en un **nivel procedimental**, ya que interpreta adecuadamente lo trabajado, pero sin desarrollar un razonamiento más profundo.

Mateo

Figura 38

Respuesta de Mateo a la tarea 11 Act. 1

b) Compara las expresiones algebraicas que propusiste para ver videos y jugar videojuegos. ¿Qué diferencias notas? ¿Qué significa eso en términos del consumo de batería? Justifica tu respuesta.

la batería se consume mas rápido al jugar videojuegos. El eje y es el porcentaje de batería y el eje x es el tiempo. La batería depende del tiempo

Mateo también acierta al señalar que la batería se consume más rápido al jugar videojuegos. Además, identifica correctamente las variables involucradas, reconociendo la dependencia entre ellas. Aunque su respuesta no menciona explícitamente la pendiente de las expresiones planteadas ni justifica con base en estas, sí logra interpretar el fenómeno desde su experiencia en las actividades previas. Su explicación es clara pero general, lo que la ubica en un **nivel procedimental**.

Andrea

Figura 39

Respuesta de Andrea a la tarea 11 Act. 1

b) Compara las expresiones algebraicas que propusiste para ver videos y jugar videojuegos. ¿Qué diferencias notas? ¿Qué significa eso en términos del consumo de batería? Justifica tu respuesta.

significa el tiempo que tarda en descargarse la bateria, la expresion algebraica del celular en donde estan viendo videos tarda menos tiempo en descargarse y la expresion algebraica del celular donde estan jugando videojuegos representa que la bateria se descarga mas rapido

Andrea se confunde parcialmente en su explicación. Si bien identifica que hay diferencias en el consumo de batería entre ambas actividades, afirma que ver videos descarga más rápido la batería, lo cual es incorrecto, pero al mismo tiempo, afirma que jugar videojuegos descarga más

rápido la batería, lo que sugiere que hubo una confusión en su redacción y no supo transmitir sus ideas. Además, su argumento es confuso y no hace referencia al valor de las pendientes ni a los valores concretos de las funciones. Esta respuesta refleja que no logró establecer una conexión clara entre las expresiones algebraicas y su interpretación, por lo cual su comprensión se ubica en un **nivel intuitivo**.

Sin embargo, una vez más, dentro del espacio de socialización, Andrea realizó un aporte, el cual permitió asimilar mejor su comprensión:

Investigador: *¿Qué tiene de diferente esta función con respecto a esta? (Refiriéndose a la de jugar videojuegos respecto a la de ver videos)*

Andrea: *Que la de jugar videojuegos llega más rápido al cero.*

Investigador: *Así es, pero en el contexto real, ¿qué afirmación podría hacer?*

Andrea: *Ah, pues sería entonces que el celular donde juegan videojuegos se descarga más rápido que el otro.*

Aunque Andrea no logró explicar claramente su razonamiento por escrito, al expresarse oralmente sí demostró entender un poco mejor la diferencia entre las dos actividades basándose en que “*la de jugar videojuegos llega más rápido al cero*”, expresando así un mejor argumento para diferenciarlas, aunque de manera muy general. Esto muestra que su comprensión estaba un poco más arriba de lo que su respuesta escrita sugería, ubicándose **entre el nivel intuitivo y el nivel procedimental**.

5.2.12 Tarea 12 – Conjetura sobre la variación constante de la función

Esta tarea se ubica en la **fase de trabajo matemático** del ciclo de modelación, ya que tenía como propósito acercar a los estudiantes al nivel de **formalización** (Herscovics & Bergeron,

citados en Contreras, 1994) a partir de la observación repetida de una regularidad en los datos. El enunciado decía:

"Compara la pendiente calculada para ambas actividades (ver videos y jugar videojuegos) con la de tres intervalos distintos de la tabla. ¿Son iguales? ¿Qué concluyes? Plantea una conjetura."

La intención era que los estudiantes reconocieran que, al tomar diferentes pares de puntos de la tabla, la pendiente se mantenía constante. Esto les permitiría llegar a una conjetura sobre el comportamiento regular del fenómeno y, con ello, avanzar hacia una idea más formal de función lineal. Aunque no se trataba de una demostración, sí se esperaba que notaran que la variación era constante y fueran capaces de verbalizarla.

Esta tarea corresponde a un intento por alcanzar el nivel de **formalización**. Sin embargo, no se puede afirmar que se logró completamente, ya que los estudiantes no estaban obligados a demostrar su conjetura. La verdadera tarea donde se planeaba que los estudiantes alcanzaran este nivel se encontraba en la actividad 2, pero esta no se pudo desarrollar dadas las circunstancias expuestas anteriormente. Aun así, esta tarea representa un esfuerzo por encaminar a los estudiantes hacia este nivel de comprensión.

A continuación, se presentan sus respuestas y posterior análisis.

Juliana

Figura 40

Respuesta de Juliana a la tarea 12 Act. 1

c) Compara la pendiente calculada para ambas actividades (ver videos y jugar videojuegos) con la de tres intervalos distintos de la tabla. ¿Son iguales? ¿Qué concluyes? Plantea una conjetura.

Aa π q los resultados de la grafica de los videos sus resultados son los mismos $-1/3$ debidos a q su funcion en el eje y siempre va disminuyendo de 20 en 20 y en el eje x siempre va aumentando de 60 en 60 osea q su expresion siempre sera $-20/60$ simplificado seria $-1/3$ y lo mismo con la funcion de la grafica de los videojuegos su funcion del tiempo siempre ira aumentando de 60 en 60 y su porcentaje de bateria va dismuyendo de 25 en 25 dando como resultado $-25/60$ y simplificado se vera $-5/12$ y sus resultados son iguales.

Juliana fue la única que logró construir una respuesta cercana a lo esperado. Aunque no realizó tres cálculos formales, su análisis demuestra que comprendió que la pendiente se mantiene constante para ambos casos y que esto se puede observar en la relación entre los datos. Utilizó fracciones para representar la razón de cambio y las simplificó correctamente, llegando a identificar que en ambos casos se trataba de valores constantes: $-1/3$ y $-5/12$. Su respuesta se sitúa en un nivel de comprensión de **abstracción matemática con tendencias a la formalización**, ya que logra verbalizar una regularidad con base en la observación, aunque sin establecer una demostración. Es un avance importante para lo que se esperaba en esta etapa.

Sofía

Figura 41

Respuesta de Sofía a la tarea 12 Act. 1

c) Compara la pendiente calculada para ambas actividades (ver videos y jugar videojuegos) con la de tres intervalos distintos de la tabla. ¿Son iguales? ¿Qué concluyes? Plantea una conjetura.

Aa π cada intervalo depende conforme a los pasos q se de

La respuesta de Sofía es confusa e incompleta. No establece una comparación entre pendientes ni intenta calcularlas. Se limita a una afirmación general, sin vincular su idea a lo que

se trabajó en la tabla ni a las funciones previamente planteadas. Por tanto, su respuesta se ubica en un **nivel intuitivo**, sin mostrar avances hacia la formalización.

Mateo

Figura 42

Respuesta de Mateo a la tarea 12 Act. 1

c) Compara la pendiente calculada para ambas actividades (ver videos y jugar videojuegos) con la de tres intervalos distintos de la tabla. ¿Son iguales? ¿Qué concluyes? Plantea una conjetura.

Aa π no son iguales, aunque ambas son lineales

Mateo reconoce que ambas relaciones son lineales y que sus pendientes no son iguales, lo cual es correcto. Aun así, parece no haber comprendido el objetivo de la tarea, en la cual debía comparar la pendiente calculada con los valores obtenidos en distintos intervalos para cada una de las actividades. Aunque intenta justificar parcialmente su idea, no presenta ningún cálculo ni ejemplo que respalde su afirmación. Por ello, su respuesta también se mantiene en un **nivel intuitivo**.

Andrea

Figura 43

Respuesta de Andrea a la tarea 12 Act. 1

c) Compara la pendiente calculada para ambas actividades (ver videos y jugar videojuegos) con la de tres intervalos distintos de la tabla. ¿Son iguales? ¿Qué concluyes? Plantea una conjetura.

Aa π la batería depende en función del tiempo
si nos dirigimos hacia la izquierda es negativo

Andrea da una respuesta muy general, sin hacer ninguna mención de las pendientes ni de los intervalos de la tabla. No evidencia que haya comprendido el propósito de la tarea ni que haya

intentado encontrar una regularidad en los datos. Su respuesta permanece en un **nivel intuitivo**, sin avances hacia un razonamiento más estructurado.

5.2.13 Tarea 13 – Restricción del dominio y recorrido

Esta fue la última tarea del momento 3, y su propósito fue cerrar el ciclo de modelación abordando la fase de **validación e interpretación**, en la cual se analiza si el modelo construido tiene sentido dentro del contexto real. Según Blum y Borromeo (2009), citados en Londoño y Muñoz (2011), esta fase implica revisar si los resultados matemáticos tienen coherencia con la situación original y, si es necesario, ajustar el modelo.

El enunciado de la tarea decía:

"La función que representa esta situación se extiende indefinidamente, pero en la realidad, ¿hasta qué punto tiene sentido? ¿Debemos hacerle alguna restricción al dominio o al recorrido? Justifica tu respuesta con base en el contexto."

Con esta pregunta se buscaba que los estudiantes comprendieran que, aunque una función lineal puede extenderse indefinidamente en un plano cartesiano, en este caso el contexto real impone límites. El dominio (valores posibles para el tiempo) solo tiene sentido entre 0 y 300 minutos en el caso de ver videos, y entre 0 y 240 en el caso de jugar videojuegos. Por su parte, el recorrido (porcentaje de batería) se restringe de 0 a 100, dado que no se puede tener más del 100% de carga ni menos del 0%. Es decir, esta función está completamente contenida en el primer cuadrante del plano cartesiano.

A continuación, se presentan los análisis de las respuestas de los estudiantes.

Juliana

Figura 44

Respuesta de Juliana a la tarea 13 Act. 1

d) La función que representa esta situación se extiende indefinidamente, pero en la realidad, ¿hasta qué punto tiene sentido? ¿Debemos hacerle alguna restricción al dominio o al recorrido? Justifica tu respuesta con base en el contexto.

Aa π se debería limitar la función ya q por ejemplo el tiempo inicia desde 0 y termina en 240 en jugar videojuegos y en 300 en ver videos y en el caso de la batería ella inicia desde 100 cuando tiene su carga completa y termina en 0 cuando se descarga toda

Juliana da una respuesta muy completa y precisa. Reconoce la necesidad de limitar la función con base en el tiempo y la carga de la batería, mencionando explícitamente los valores que corresponden a cada actividad. Este nivel de detalle muestra que comprendió tanto el dominio como el recorrido de la función en el contexto, y que supo ajustar el modelo matemático a lo que realmente ocurre en la situación. Por tanto, su respuesta se ubica en un nivel de comprensión de **abstracción matemática**, al realizar una interpretación del modelo considerando los límites reales del fenómeno. Además, cumple completamente con el propósito de la fase de validación e interpretación.

Sofía

Figura 45

Respuesta de Sofía a la tarea 13 Act. 1

d) La función que representa esta situación se extiende indefinidamente, pero en la realidad, ¿hasta qué punto tiene sentido? ¿Debemos hacerle alguna restricción al dominio o al recorrido? Justifica tu respuesta con base en el contexto.

Aa π la función tiene sentido hasta el punto 0 donde se termina el tiempo

Sofía da una respuesta parcial. Aunque menciona que la función tiene sentido hasta el punto en que termina el tiempo, no queda del todo claro si se está refiriendo al momento en que se acaba la batería o simplemente al paso del tiempo. No especifica los valores ni evidencia la necesidad de

restringir el dominio y el recorrido, lo que hace que su respuesta se mantenga en un **nivel intuitivo con tendencias al procedimental**, dado que pudo evidenciar algo general.

Mateo

Figura 46

Respuesta de Mateo a la tarea 13 Act. 1

d) La función que representa esta situación se extiende indefinidamente, pero en la realidad, ¿hasta qué punto tiene sentido? ¿Debemos hacerle alguna restricción al dominio o al recorrido? Justifica tu respuesta con base en el contexto.

As π diría que tiene sentido desde 100 hasta 0 que es cuando la batería se descarga, y para el tiempo sería desde 0 que inicia hasta 300 que termina

Mateo realiza una buena aproximación. Identifica correctamente que la carga de la batería va de 100 a 0, lo cual es una forma de establecer el recorrido. También menciona el tiempo entre 0 y 300 minutos. Si bien no hace una distinción entre las dos actividades (una con duración de 300 y otra de 240 minutos), es posible que haya generalizado con base en el mayor de los dos. Por esta razón, su respuesta se encuentra en un **nivel procedimental con alto acercamiento a la abstracción matemática**, ya que muestra una buena interpretación del fenómeno, aunque sin un desarrollo completamente detallado.

Andrea

Figura 47

Respuesta de Andrea a la tarea 13 Act. 1

d) La función que representa esta situación se extiende indefinidamente, pero en la realidad, ¿hasta qué punto tiene sentido? ¿Debemos hacerle alguna restricción al dominio o al recorrido? Justifica tu respuesta con base en el contexto.

As π la batería se agota cuando llega a cero

Andrea da una respuesta muy limitada. Menciona un aspecto correcto del recorrido, pero no hace referencia al dominio ni a la necesidad de limitar la función. Su respuesta es muy general y no muestra un análisis más allá de lo evidente. Por esto, su respuesta se mantiene en un nivel de

comprensión intuitivo sin evidenciar una conexión profunda entre el modelo matemático y el contexto.

5.3 Conclusiones generales de la Actividad 1

La Actividad 1 permitió recorrer las fases del ciclo de modelación mediante el análisis del consumo de batería en diferentes actividades. Como muestra la Tabla 1, los estudiantes evidenciaron distintos niveles de comprensión según las tareas:

Tabla 7

Resumen Global por tareas Act. 1

Tarea	Juliana	Sofía	Mateo	Andrea
Comprensión y estructuración del problema				
T1: Identificación de magnitudes	Abstracción matemática (tendencia)	No participó	Procedimientos	Intuitivo (tendencia a procedimientos)
T2: Relación entre magnitudes	Abstracción matemática	No participó	Abstracción matemática	Intuitivo (oral: procedimientos con tendencia a abstracción)
T3: Representación gráfica	Abstracción matemática	No participó	Abstracción matemática	Intuitivo (oral: procedimientos con tendencia a abstracción)
Matematización				
T4: Expresión algebraica	Sin respuesta	No participó	Procedimientos	Intuitivo
T5: Interpretación de cambios	No participó	Procedimientos (tendencia a abstracción)	Intuitivo a	Intuitivo
T6: Relación pendiente-distancia	No participó	Procedimientos (tendencia a abstracción)	Intuitivo a	Intuitivo

T7: Interpretación numérica	No participó	Intuitivo/procedimental inicial	Abstracción matemática	Procedimientos (tendencia a abstracción)
T8: Concepto de pendiente	No participó	Procedimientos (tendencia a abstracción)	Procedimientos	Intuitivo (oral: transición a procedimientos)
T9: Parámetro 'b'	No participó	Abstracción matemática	Intuitivo (oral: procedimientos con tendencia a abstracción)	Intuitivo (oral: procedimientos con tendencia a abstracción)
T10: Expresión algebraica	Procedimientos	Procedimientos	Abstracción matemática	Intuitivo/procedimental (oral: procedimientos)
Trabajo matemático				
T11: Comparación de expresiones	Abstracción matemática	Procedimientos	Procedimientos	Intuitivo (oral: transición a procedimientos)
T12: Conjetura sobre variación	Abstracción matemática (tendencia a formalización)	Intuitivo	Intuitivo	Intuitivo
Validación e interpretación				
T13: Restricción dominio/recorrido	Abstracción matemática	Intuitivo (tendencia a procedimientos)	Procedimientos (tendencia a abstracción)	Intuitivo

El análisis de la Actividad 1 desde el marco del ciclo de modelación (Blum y Borromeo, 2009, citados en Londoño y Muñoz, 2011) y los niveles de comprensión (Herscovics y Bergeron, citados en Contreras, 1994) revela cómo los estudiantes avanzaron progresivamente en la construcción del modelo matemático del consumo de batería. La articulación entre estas dos dimensiones teóricas permite comprender tanto el proceso como los resultados de aprendizaje alcanzados.

En la fase de **comprensión y estructuración del problema**, evidenciada en las primeras tareas (T1-T3), se observaron diferencias significativas en los niveles de comprensión. Juliana se destacó desde la identificación de variables (T1), donde alcanzó una tendencia al nivel de abstracción matemática al establecer relaciones funcionales explícitas entre tiempo y porcentaje de batería. Mateo, aunque mostró un nivel procedimental en T1, evolucionó hacia la abstracción en la interpretación gráfica (T3), demostrando cómo el trabajo con representaciones múltiples en GeoGebra facilitó esta transición. Andrea evidenció en sus intervenciones orales durante T2 y T3 una comprensión más avanzada que la mostrada en sus producciones escritas.

La fase de **matematización**, desarrollada en las tareas T4-T10, mostró los mayores desafíos. Inicialmente, Mateo fue el único en alcanzar el nivel de procedimientos en T4, al acercarse a la proposición de una expresión algebraica sin mayores herramientas. Así mismo, junto a Andrea consiguieron niveles de abstracción y acercamientos a la abstracción respectivamente en la interpretación numérica de la pendiente (T7). Durante esta fase de matematización se evidenció la dificultad entre el manejo gráfico y algebraico como lo señalaron Londoño y Muñoz (2011) sobre las dificultades en la traducción entre representaciones. Las tareas de exploración de parámetros (T8-T10) fueron importantes para que Sofía desarrollara una comprensión procedimental con tendencia a la abstracción, particularmente en la interpretación del parámetro ' b ' (T9).

En el **trabajo matemático y la validación e interpretación** (T11-T13), las diferencias individuales fueron más evidentes. Juliana demostró un buen dominio del ciclo al alcanzar el nivel de abstracción matemática en la comparación de expresiones (T11) y en la restricción del dominio (T13). Mateo mostró fortalezas en la aplicación del modelo (T11) pero presentó limitaciones en la formalización de conjeturas (T12), que representaba una transición hacia el nivel de formalización.

Andrea, aunque se mantuvo mayormente en lo intuitivo en sus producciones escritas, aprovechó las discusiones grupales de T11 principalmente para demostrar una comprensión procedimental de las relaciones funcionales.

El análisis por tareas revela tres hallazgos clave:

1. La mediación tecnológica fue determinante para superar las dificultades en la fase de matematización, especialmente en tareas gráficas (T3, T7).
2. Las transiciones entre niveles de comprensión no fueron lineales, mostrando avances y retrocesos según el tipo de tarea.
3. La socialización funcionó como un impulso para estudiantes como Andrea, permitiéndoles demostrar en discusiones orales lo que no lograban evidenciar por escrito.

Estos resultados confirman que el ciclo de modelación, cuando se implementa con apoyos tecnológicos adecuados y oportunidades de interacción grupal, permite desarrollar progresivamente la comprensión matemática. Sin embargo, también se evidencia la necesidad de:

- Diseñar actividades específicas que fortalezcan la conexión entre representaciones (particularmente hacia lo algebraico)
- Incorporar estrategias diferenciadas según los momentos del ciclo donde cada estudiante muestra mayores dificultades
- Utilizar las producciones orales como complemento esencial para evaluar la comprensión, especialmente en estudiantes con dificultades de expresión escrita

La integración del marco teórico muestra cómo los niveles de comprensión se articulan con las fases del ciclo de modelación, ofreciendo una visión completa tanto del proceso de aprendizaje como de los resultados alcanzados por los estudiantes en las distintas tareas propuestas.

5.4 Análisis de la Actividad 3: Función Cuadrática

La actividad 3 tuvo como propósito que los estudiantes modelaran una situación basada en su entorno escolar: la proyección de una imagen sobre el tablero usando un videobeam. Mediante un applet de GeoGebra, se simuló la situación mencionada, evidenciando cómo cambia el área proyectada al modificar la distancia entre el proyector y el tablero, permitiendo así explorar una relación funcional distinta a la trabajada previamente.

En esta ocasión, se pretendía que los estudiantes identificaran que dicha relación no era lineal, y la pudieran asociar a una función cuadrática. Se buscaba que reconocieran las variables implicadas, interpretaran los cambios en la gráfica y observaran cómo varía la relación a medida que se modificaba la distancia. Al igual que en la actividad anterior, el análisis se organiza por tareas y se examinan tanto las producciones escritas como las intervenciones orales más relevantes de los estudiantes seleccionados.

5.4.1 Tarea 1 – Identificación de magnitudes variables y constantes

La primera tarea de la actividad buscaba que los estudiantes identificaran las magnitudes presentes en la situación de modelación y pudieran clasificarlas como variables o constantes. Para ello, se les planteó la siguiente pregunta:

“¿Qué magnitudes están implicadas en esta situación? ¿Cuáles son variables y cuáles permanecen constantes? Justifica tu respuesta.”

Esta tarea hace parte de la fase de **comprensión y estructuración** del ciclo de modelación, ya que se centró en reconocer los elementos esenciales del contexto que luego formarían parte del modelo matemático. La intención era que los estudiantes observaran la situación propuesta y distinguieran qué magnitudes se mantenían constantes y cuáles cambiaban al mover el deslizador en el applet.

A continuación, se presentan sus respuestas y el respectivo análisis:

Juliana

Figura 48

Respuesta de Juliana a la tarea 1 Act. 3

a) ¿Qué magnitudes están implicadas en esta situación? ¿Cuáles son variables y cuáles permanecen constantes? Justifica tu respuesta.

Aa π las magnitudes son la distancia y el area proyectada al igual q lo son el largo y ancho del tablero las cuales son las q permanecen constantes al igual q la altura del salon y el ancho del mismo y la distancia y el area proyectada , tambien el video-beam

Juliana menciona varias magnitudes presentes en la situación, incluyendo correctamente la distancia y el área proyectada. De esta manera, demuestra una buena observación al identificar magnitudes constantes como las dimensiones del tablero, del videobeam y la altura del salón. Su nivel de comprensión es **de procedimientos**, ya que identifica correctamente varias de las magnitudes implicadas y da cuenta de su naturaleza.

Sofía

Figura 49

Respuesta de Sofía a la tarea 1 Act. 3

a) ¿Qué magnitudes están implicadas en esta situación? ¿Cuáles son variables y cuáles permanecen constantes? Justifica tu respuesta.

Aa π Las magnitudes son: Distancia (m), el área proyectada (m^2) y el ancho (2.24m) y el largo (1.8m) de la proyección, las constantes son: el largo y el ancho del salón, el tablero, y el video-beam, y las variables son la distancia y el área proyectada.

Sofía identifica correctamente la distancia y el área proyectada como magnitudes variables. Así mismo, identifica algunas de las magnitudes constantes implicadas en la situación. Sin embargo, aunque menciona el ancho y el largo de “la proyección”, no queda claro si se está refiriendo al área máxima de proyección o a las dimensiones del área proyectada. En todo caso, identificó correctamente varias de las magnitudes implicadas, y al igual que Juliana, su comprensión está en el **nivel de procedimientos**, ya que identifica correctamente las magnitudes variables y algunas de las constantes y las clasifica.

Mateo

Figura 50

Respuesta de Mateo a la tarea 1 Act. 3

a) ¿Qué magnitudes están implicadas en esta situación? ¿Cuáles son variables y cuáles permanecen constantes? Justifica tu respuesta.

Aa π Están implicadas la distancia en metros, el área en metros cuadrados

La respuesta de Mateo es muy breve, aun así menciona correctamente las dos variables principales. Sin embargo, no profundiza ni menciona algunas de las magnitudes constantes implicadas, por lo que su respuesta está en un **nivel intuitivo**, dado que es muy general e incompleta.

Andrea

Figura 51

Respuesta de Andrea a la tarea 1 Act. 3

a) ¿Qué magnitudes están implicadas en esta situación? ¿Cuáles son variables y cuáles permanecen constantes? Justifica tu respuesta.

Aa π LA DISTANCIA QUE SE MIDE EN METROS, EL VALOR DE ANCHO Y LARGO, A MEDIDA DE QUE EL PROYECTOR SE ALEJA SE HACE MAS GRANDE LA PROYECCION EN EL TABLERO, EL AREA ES OTRA MAGNITUD, LA PUERTA Y EL TABLERO SON OTROS EJEMPLOS DE MAGNITUD, LAS Q PERMANECEN CONSTANTES SON EL TABLERO Y LA PUERTA, Y LAS QUE SON VARIABLES SON EL VALOR DEL PROYECTOR PQ A MEDIDA DE Q SE ALEJA CAMBIA SU VALOR Y ES VARIABLE

Andrea logra identificar correctamente que la distancia y el área son variables, e incluso describe cómo se comporta el fenómeno al aumentar la distancia. Sin embargo, no especifica si el largo y ancho del área proyectada son variables o constantes. También reconoce algunas magnitudes constantes como las dimensiones del tablero y de la puerta. Aunque su redacción es algo confusa, se puede interpretar que tiene una comprensión general de lo que se le pedía. Por esto, su respuesta puede ubicarse en un **nivel procedimental con acercamientos al nivel de abstracción**, ya que no solo identificó algunas variables, sino que estableció una relación entre las magnitudes variables centrales.

5.4.2 Tarea 2 – Relación entre las variables

La segunda tarea tenía como objetivo que los estudiantes observaran el comportamiento de las variables implicadas y determinaran si existía algún tipo de relación entre ellas. El enunciado planteaba lo siguiente:

“¿Notas alguna relación entre las variables implicadas? Describe toda tu observación.”

Esta actividad sigue formando parte de la fase de **comprensión y estructuración** del ciclo de modelación, pues busca que los estudiantes exploren el fenómeno para identificar cómo se comportan las magnitudes variables involucradas, en este caso la distancia y el área proyectada.

El objetivo era que pudieran notar que, si bien ambas variables aumentan, lo hacen de forma distinta: la distancia de manera constante y el área de forma creciente pero no constante.

A continuación, se analizan las respuestas de los estudiantes:

Juliana

Figura 52

Respuesta de Juliana a la tarea 2 Act. 3

b) ¿Notas alguna relación entre las variables implicadas? Describe toda tu observación.

Aa π a medida q el video beam se aleja del tablero aumenta la distancia entre los mismos , cuando se aleja el video beam el area de la proyección va aumentando y a medida q se acerca el video beam va disminuyendo su area de proyección

Juliana logra identificar la relación directa entre ambas variables: al aumentar la distancia, el área proyectada también aumenta, y al acercarse el proyector, esta disminuye. Aunque no menciona si el crecimiento es constante o no, su observación es coherente con el comportamiento general del fenómeno. Esta respuesta refleja un **nivel procedimental** ya que logra establecer una relación entre las variables basada en la observación, aunque sin hacer una caracterización más profunda del tipo de crecimiento.

Sofía

Figura 53

Respuesta de Sofía a la tarea 2 Act. 3

b) ¿Notas alguna relación entre las variables implicadas? Describe toda tu observación.

Aa π La relación es que a medida que el video-beam aumenta su proyección también aumenta la distancia de ellos mismos y cuando disminuye su distancia también disminuye.

Sofía reconoce que hay una relación directa entre las variables, donde ambas aumentan o disminuyen de manera simultánea; sin embargo, en su explicación comete dos errores: primero, plantea que la distancia depende del área proyectada, invirtiendo la relación real, y segundo, no

especifica el tipo de variación (constante o no). Por ello, su respuesta se ubica en un nivel de **comprensión intuitivo**, ya que, pese a reconocer la relación directa, falla en determinar correctamente la variable independiente y en caracterizar la variación.

Mateo

Figura 54

Respuesta de Mateo a la tarea 2 Act. 3

b) ¿Notas alguna relación entre las variables implicadas? Describe toda tu observación.



Tienen una relación diferente, la distancia aumenta de manera regular con un patrón de 0,1, mientras que el área proyectada aumenta pero su valor no sigue un patrón específico. La variable del área es dependiente de la distancia.

Mateo desarrolla un análisis más completo, reconociendo acertadamente que la distancia aumenta de forma constante mientras el área proyectada crece sin un patrón fijo, además de establecer correctamente la relación de dependencia del área respecto a la distancia. Su comprensión alcanza un nivel **cercano a la abstracción matemática** pues no solo describe el comportamiento de las variables sino que identifica su relación; sin embargo, no logra precisar que el crecimiento del área sigue un patrón acelerado, lo que le impide alcanzar una comprensión plenamente abstracta del fenómeno.

Andrea

Figura 55

Respuesta de Andrea a la tarea 2 Act. 3

b) ¿Notas alguna relación entre las variables implicadas? Describe toda tu observación.



SI, LAS VARIABLES DEL PROYECTOR VAN CAMBIANDO DE 11 EN 11 POR EJEMPLO EN 1 EL VALOR POR LARGO ERA DE 0,36 Y EL VALOR POR ANCHO DE 0,45 Y ASI SUCESIVAMENTE VAN VARIANDO DE 11 EN 11, A MEDIDA DE QUE LA DISTANCIA AUMENTA EL AREA PROYECTADA TAMBIEN AUMENTA

Andrea intenta explicar la relación entre las variables, pero su respuesta se pierde un poco al enfocarse en valores específicos del largo y ancho, incluso menciona un patrón "de 11 en 11"

que en realidad no existe. Sin embargo, a pesar de esa confusión, logra darse cuenta de que hay una relación directa entre ambas magnitudes variables. Podemos decir que su comprensión está en un **nivel intuitivo**, porque aunque capta la idea general de que las variables aumentan juntas, todavía no logra diferenciar bien los detalles ni supera del todo la idea de variación constante que abordó en la Actividad 1.

5.4.3 Tarea 3 – Identificación de la regularidad entre variables

En esta tarea, se pedía a los estudiantes observar los datos organizados en una tabla, la cual fue elaborada por ellos mismos dadas las indicaciones al inicio de la actividad, con el objetivo de identificar algún patrón en los valores de la distancia y el área proyectada. El propósito era que, con valores concretos, pudieran avanzar en la comprensión de la relación entre las variables y notar con mayor claridad que el aumento del área no es constante, sino acelerado. Esta tarea continúa en la fase de **comprensión y estructuración del ciclo de modelación**, pues aún se busca que los estudiantes exploren el fenómeno e identifiquen el comportamiento de las magnitudes variables involucradas, en este caso con ayuda de la tabla que han construido.

El enunciado de la tarea era el siguiente:

“Observa la tabla que construiste. ¿Qué regularidad encuentras en los valores de distancia y área proyectada? Explica tu respuesta.”

A continuación, se presentan las respuestas de los estudiantes y su respectivo análisis:

Juliana

Figura 56

Respuesta de Juliana a la tarea 3 Act. 3

c) Observa la tabla que construiste. ¿Qué regularidad encuentras en los valores de distancia y área proyectada? Explica tu respuesta.

Aa π a medida q la distancia aumenta de 0,1 en 0,1 la area proyectada tambien aumenta pero no se ve algun orden de aumento

Juliana reconoce que hay un patrón fijo en la distancia y que el área proyectada también crece, así mismo identifica que el crecimiento no es constante. Sin embargo, no logra identificar que el aumento es acelerado o que a medida que la distancia aumenta de manera regular, el área cada vez aumenta más. Por esto, su respuesta se encuentra en un **nivel procedimental**, ya que observa con atención pero no caracteriza completamente la regularidad.

Sofía

Figura 57

Respuesta de Sofía a la tarea 3 Act. 3

c) Observa la tabla que construiste. ¿Qué regularidad encuentras en los valores de distancia y área proyectada? Explica tu respuesta.

Aa π De acuerdo a la tabla, la distancia aumenta con un patrón fijo de 0.1 a 0.1 mientras q al área aumenta irregularmente con un orden indefinido.

Sofía reconoce adecuadamente que la distancia aumenta de manera constante, mientras que el área proyectada no sigue un patrón definido. Aunque no menciona explícitamente que el área crece de forma acelerada, su análisis coincide con lo observado en los datos. Al igual que Juliana, su comprensión corresponde a un **nivel procedimental**, ya que logra diferenciar los comportamientos de ambas variables pero no avanza hacia una interpretación más profunda de lo que esto significa.

Mateo

Figura 58

Respuesta de Mateo a la tarea 3 Act. 3

c) Observa la tabla que construiste. ¿Qué regularidad encuentras en los valores de distancia y área proyectada? Explica tu respuesta.



Ambos valores aumentan progresivamente. La regularidad se encuentra en la variable de la distancia, ya que es la independiente y se modifica para sacar los valores del área proyectada

Mateo identifica correctamente que ambas variables aumentan juntas, reconociendo su relación directa, y acierta al señalar que la distancia, que varía de forma constante, es la variable independiente. Sin embargo, en esta tarea no profundizó en el comportamiento del área (variable dependiente), un aspecto que sí había mencionado en la tarea anterior al indicar que no seguía un patrón definido. Este retroceso es notable, pues además de omitir un detalle que ya había captado, tampoco avanzó a observar que el área crece aceleradamente. Por esto, su comprensión permanece en un **nivel procedimental**, donde aunque distingue la relación general entre variables, no analiza con suficiente profundidad la variación específica de la variable dependiente.

Andrea

Figura 59

Respuesta de Andrea a la tarea 3 Act. 3

c) Observa la tabla que construiste. ¿Qué regularidad encuentras en los valores de distancia y área proyectada? Explica tu respuesta.



QUE CADA VEZ QUE EL PROYECTOR SE ALEJABA CAMBIABAN LOS VALORES DEL AREA Y LA DISTANCIA, SI SE MOVIA HACIA ADELANTE AUMENTABA SU VALOR Y SI SE MOVIA HACIA ATRAS SU VALOR DISMINUIA PERO SIEMPRE ERA VARIABLE, NUNCA SE MANTENIA CONSTANTE

Andrea comprende de manera general que ambas variables cambian y no se mantienen fijas, pero en lugar de centrarse en los valores de la tabla, se guía más por lo que ve en el applet. Aquí comete un error conceptual importante: confunde el término "constante" (magnitud que no varía) con "variación constante" (ritmo uniforme de cambio). Lo que realmente quiso decir es que

la variación no es constante, pero no logra expresarlo correctamente. Su comprensión evidencia un **nivel intuitivo con acercamientos al procedimental**, ya que, aunque capta la idea general, no logra precisarla bien y se confunde con términos que ya se habían abordado antes.

5.4.4 Tarea 4 – Variación del área proyectada

Con esta tarea se inicia la fase de **matematización** del ciclo de modelación, al centrarse en observar cómo se comporta el área proyectada conforme varía la distancia entre el proyector y el tablero. En este punto se esperaba que los estudiantes logaran reconocer que, aunque la distancia crece de forma constante, el área proyectada aumenta de manera acelerada, consolidando así los resultados de las tareas anteriores.

El enunciado de la tarea era el siguiente:

“¿Cómo cambia el área proyectada a medida que el proyector se aleja del tablero?

Describe detalladamente lo que observas.”

A continuación se presentan sus respuestas y el respectivo análisis:

Juliana

Figura 60

Respuesta de Juliana a la tarea 4 Act. 3

d) ¿Cómo cambia el área proyectada a medida que el proyector se aleja del tablero? Describe detalladamente lo que observas.

Aa π a medida q la distancia aumenta el area proyectada aumenta de una forma que no es constante creo que es acelerada

Juliana fue la única que logró captar con claridad el tipo de variación que presenta el área proyectada. Aunque su explicación es breve, reconoce que no se trata de un crecimiento constante y se atreve a proponer que es un aumento acelerado, lo cual es correcto. Su respuesta refleja un

nivel de comprensión **cercano a la abstracción matemática**, ya que identifica y describe adecuadamente el comportamiento de la variable dependiente, aunque sin brindar mayor detalle sobre este comportamiento.

Sofía

Figura 61

Respuesta de Sofía a la tarea 4 Act. 3

d) ¿Cómo cambia el área proyectada a medida que el proyector se aleja del tablero? Describe detalladamente lo que observas.



El área proyectada cambia dependiendo de la distancia en q el proyector se aleja, por ejemplo mientras q la distancia aumenta un 0.1 su área aumenta con un orden indefinido .

Sofía nota que el área no aumenta siguiendo un patrón fijo, lo cual es correcto. Pero en su explicación se queda muy en lo general y no alcanza a ver que, aunque no es uniforme, ese crecimiento va siendo cada vez más rápido. Por esto, su comprensión se ubica en un **nivel procedimental**, porque si bien capta que hay una relación, no logra describir exactamente cómo es ese cambio.

Mateo

Figura 62

Respuesta de Mateo a la tarea 4 Act. 3

d) ¿Cómo cambia el área proyectada a medida que el proyector se aleja del tablero? Describe detalladamente lo que observas.



A medida que se aleja el proyector del tablero, el área proyectada aumenta, cubriendo totalmente el tablero al alejar el proyector a una distancia de 3 metros.

Mateo explica el fenómeno en términos generales y usa un ejemplo del applet para ilustrarlo, lo que demuestra que entendió el comportamiento básico de la variable. Sin embargo, no profundiza en describir cómo ocurre exactamente el aumento, ni aclara si este es constante o

no. Por esto, su comprensión corresponde a un **nivel procedimental**, pues aunque reconoce la relación entre las variables, no logra caracterizar cómo varían específicamente.

Andrea

Figura 63

Respuesta de Andrea a la tarea 4 Act. 3

d) ¿Cómo cambia el área proyectada a medida que el proyector se aleja del tablero? Describe detalladamente lo que observas.

Aa π CAMBIA DE MANERA EN QUE SU VALOR AUMENTA, AUMENTABA DE 7 A 8 Y SU DISTANCIA ESTABA EN METROS CUADRADOS

Andrea presenta una respuesta confusa y poco estructurada. Si bien logra notar que el área aumenta, no queda claro cómo interpreta este comportamiento ni si comprende el significado de las unidades o su relación con la distancia. Debido a lo difícil que resultó entender su explicación inicial, se decidió profundizar sobre su respuesta mediante preguntas adicionales y así poder evaluar con mayor precisión su nivel de comprensión.

Investigador: *Andrea, revisemos su respuesta en la tarea 4, que es esta (señalando la tarea). Léala de nuevo y me explica por favor qué quiso decir con que aumentaba de 7 a 8.*

Andrea: *Pues yo dije eso porque me di cuenta de que cuando la distancia cambiaba de 1 a 1.1 el área cambiaba de.... Espere.... Ah ya, cambiaba de 0.16 a 0.23, entonces ahí cambió 7 y luego cambió de 0.23 a 0.32 ahí cambió 8*

Investigador: *En realidad en este último cambió fue 0.09 y en el anterior fue 0.07 metros cuadrados, pero está bien, ya entiendo lo que quiso decir, pero tengo otra pregunta, usted dijo que “su distancia cambiaba en metros cuadrados”, ¿cómo así? Explíqueme.*

Andrea: *Si, porque la distancia está en metros cuadrados para el área ¿no?*

Investigador: *Quizás quiso decir “medida” o “unidad”, porque distancia aquí es la otra variable*

Andrea: *Ah sí, perdón, me equivoqué.*

Esto demuestra que Andrea sí notó un cambio importante: observó que entre los primeros intervalos, donde la distancia se mantenía constante, el área aumentaba más en uno que en otro. Si bien hubiera necesitado analizar más intervalos para confirmar que el crecimiento era acelerado, su enfoque de comparar intervalos específicos es válido y muestra un buen razonamiento. Por esto, su comprensión alcanza un **nivel de procedimientos con tendencias a la abstracción matemática**, ya que va más allá de una simple observación general e intenta trabajar con datos concretos, aunque todavía le falte profundizar en el análisis.

5.4.5 Tarea 5 – Interpretación gráfica y forma funcional

En esta tarea, los estudiantes debían graficar los valores obtenidos en GeoGebra para observar la forma que tomaba el rastro de los puntos en el plano cartesiano. El objetivo era que, a partir de esa visualización, pudieran identificar una regularidad en la forma de la gráfica y asociarla con algún tipo de función. Esta tarea también hace parte de la fase de **matematización**, ya que sigue acercando al estudiante a construir un modelo a partir de una representación gráfica.

El enunciado de la tarea era el siguiente:

“Utiliza GeoGebra para graficar los puntos de la tabla (distancia vs. área proyectada). ¿Qué forma crees que se genera al seguir el rastro de los puntos? ¿Qué tipo de función podría representar estos datos? Justifica tu respuesta.”

A continuación, se presentan las respuestas y el análisis:

Juliana

Figura 64

Respuesta de Juliana a la tarea 5 Act. 3

e) ¿Qué forma crees que se genera al seguir el rastro de los puntos? ¿Qué tipo de función podría representar estos datos? Justifica tu respuesta.

Aa π su forma es una curva, es un movimiento acelerado debido a q se ve como los puntos se van separando cada vez mas (amplitud entre los puntos)

Juliana nota que la gráfica forma una curva y observa que la distancia entre los puntos va aumentando, lo que indica que reconoce el crecimiento acelerado. Aunque no menciona qué tipo de función podría ser, su descripción de la forma y el comportamiento de la gráfica es correcta. Esta respuesta muestra un **nivel procedimental con rasgos de abstracción matemática**, pues conecta lo que ve en la gráfica con el comportamiento de los datos, aunque sin llegar a proponer una función que los pueda representar.

Sofía

Figura 65

Respuesta de Sofía a la tarea 5 Act. 3

e) ¿Qué forma crees que se genera al seguir el rastro de los puntos? ¿Qué tipo de función podría representar estos datos? Justifica tu respuesta.

Aa π Su forma es una curva, es un tipo de crecimiento exponencial, además observamos un movimiento acelerado debido al crecimiento y separación de los puntos entre sí

Sofía, además de describir que se forma una curva, propone un tipo de función: una exponencial. Aunque esta no es la función que se trabaja en esta actividad (cuadrática), su razonamiento es válido y coherente con lo que se ve en la gráfica (una curva creciente). Además, usa la expresión “crecimiento acelerado”, lo que indica que comprendió finalmente el comportamiento. Su nivel de comprensión puede ubicarse en el nivel de **abstracción matemática**,

ya que da sentido al comportamiento observado, propone una función y justifica su elección, aunque no sea la más precisa.

Mateo

Figura 66

Respuesta de Mateo a la tarea 5 Act. 3

e) ¿Qué forma crees que se genera al seguir el rastro de los puntos? ¿Qué tipo de función podría representar estos datos? Justifica tu respuesta.

Aa π Se genera una curva de puntos en forma de pendiente ascendente. La grafica representa una función cuadrática

Mateo fue el único que sugirió que el rastro de los puntos podía ser representado por una función cuadrática. Aunque no dio una explicación detallada, su respuesta muestra algo importante: supo relacionar la forma curva que veía en la gráfica con un tipo de función matemática específica. Esto indica que no solo estaba observando los datos, sino que los estaba interpretando, usando lo que ya sabía sobre funciones. Su nivel de comprensión es de **abstracción matemática**, ya que identifica uno de los tipos de función más adecuado y lo justifica en términos generales.

Andrea

Figura 67

Respuesta de Andrea a la tarea 5 Act. 3

e) ¿Qué forma crees que se genera al seguir el rastro de los puntos? ¿Qué tipo de función podría representar estos datos? Justifica tu respuesta.

Aa π SE FORMA UNA LINEA CURVA, UN CRECIMIENTO EXPONENCIAL, A MEDIDA DE QUE LOS VALORES VAN AUMENTANDO LOS PUNTOS DE LA GRAFICA SE ALEJAN POCO A POCO ENTRE SI

Andrea también identifica la forma curva de la gráfica y sugiere que corresponde a un crecimiento exponencial. Su interpretación resulta válida, pues logra asociarla con el incremento progresivo en la separación entre los puntos. Demuestra un nivel de comprensión similar al de

Sofía, aunque con menor precisión en su descripción. Por ello, su desempeño se sitúa en un **nivel procedimental con acercamiento al de abstracción**, dado que reconoce el patrón general de crecimiento pero no avanza en una caracterización más detallada del fenómeno.

5.4.6 Tarea 6 – Propuesta de una expresión algebraica

En esta actividad, los estudiantes debían analizar los datos de la tabla y la gráfica para intentar proponer una expresión algebraica que relacionara la distancia del video beam con el área proyectada. Este ejercicio correspondía a la fase de **matematización** del proceso de modelación, donde el objetivo era que pasaran de simplemente observar patrones en los datos a construir una expresión algebraica que modelara esa relación.

El enunciado de la tarea era el siguiente:

“A partir de los datos de la tabla y la gráfica, propón una expresión algebraica que modele la relación entre la distancia del proyector al tablero y el área proyectada. Justifica cómo llegaste a esta expresión. Nota: Puedes ayudarte de GeoGebra.”

A continuación, se presentan las respuestas de los estudiantes y su análisis:


Juliana

Figura 68

Respuesta de Juliana a la tarea 6 Act. 3

f) A partir de los datos de la tabla y la gráfica, propón una expresión algebraica que modele la relación entre la distancia del proyector al tablero y el área proyectada. Justifica cómo llegaste a esta expresión.

Nota: Puedes ayudarte de GeoGebra.

 el ancho y el largo de la proyección es igual al área proyectada q varía dependiendo en la posición en la q se encuentre el video beam

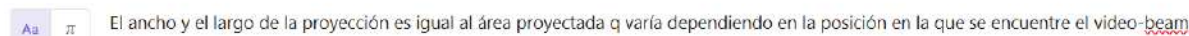
Sofía

Figura 69

Respuesta de Sofía a la tarea 6 Act. 3

f) A partir de los datos de la tabla y la gráfica, propón una expresión algebraica que modele la relación entre la distancia del proyector al tablero y el área proyectada. Justifica cómo llegaste a esta expresión.

Nota: Puedes ayudarte de GeoGebra.

 El ancho y el largo de la proyección es igual al área proyectada q varía dependiendo en la posición en la que se encuentre el video-beam

Las dos respuestas son idénticas, lo que hace pensar que hubo colaboración entre las estudiantes. Ambas mencionan correctamente que el área depende del largo y el ancho, la cual es una relación válida pues el área resulta de multiplicar estas dimensiones. Sin embargo, esto no responde a lo solicitado en la actividad: en la cual se les pedía proponer una expresión algebraica basada en los datos para modelar la relación. Por esto, aunque el concepto básico es acertado, no representan un avance en la construcción del modelo matemático esperado. Su comprensión corresponde a un **nivel intuitivo**, al no lograr expresar algebraicamente la relación ni acercarse mediante propuestas más concretas.

Mateo

Figura 70

Respuesta de Mateo a la tarea 6 Act. 3

f) A partir de los datos de la tabla y la gráfica, propón una expresión algebraica que modele la relación entre la distancia del proyector al tablero y el área proyectada. Justifica cómo llegaste a esta expresión.

Nota: Puedes ayudarte de GeoGebra.

 Función cuadrática

Mateo identifica correctamente el tipo de función que podría modelar el fenómeno, lo cual demuestra que reconoce el patrón. Sin embargo, su respuesta se queda corta al no presentar un acercamiento hacia la expresión algebraica correspondiente ni explicar su razonamiento. Como ya

había mencionado esta misma idea en la actividad anterior, su aporte aquí no muestra un progreso significativo. Por estas limitaciones, su comprensión se mantiene en un **nivel intuitivo**, pues aunque identifica el tipo de función, no avanza hacia una propuesta de representación algebraica que modele el fenómeno ni ofrece una justificación adecuada.

Andrea

Figura 71

Respuesta de Andrea a la tarea 6 Act. 3

f) A partir de los datos de la tabla y la gráfica, propón una expresión algebraica que modele la relación entre la distancia del proyector al tablero y el área proyectada. Justifica cómo llegaste a esta expresión.

Nota: Puedes ayudarte de GeoGebra.

 $F(x) = ax^2 + bx + c$

Andrea escribió simplemente la forma general de una función cuadrática, lo que podría indicar que recordaba cómo se ve esta expresión o que buscó la información para no dejar el espacio en blanco. Sin embargo, no relacionó esa expresión con lo que había en la tabla ni con lo que se observaba en la gráfica. No hizo ningún intento por calcular los valores que deberían ir en la expresión ni explicó por qué esa función serviría para modelar el comportamiento del área proyectada. Por eso, su respuesta se ubica en un **nivel intuitivo**, ya que aunque mostró una idea superficial del tipo de función, no pudo aplicarla al contexto real de la actividad.

5.4.7 Tarea 7 – Exploración del parámetro ‘a’ en la función cuadrática

Esta tarea marcó el inicio del Momento 2, donde los estudiantes exploraron, mediante un applet de GeoGebra, cómo el parámetro ‘a’ afecta la concavidad y apertura de la parábola. Como parte de la fase de **matematización**, esta actividad (junto con las cuatro siguientes del mismo momento) busca que identifiquen progresivamente cómo cada parámetro de la función cuadrática

influye en su gráfica, sentando las bases para que en el Momento 3 tengan mejores herramientas y puedan construir la expresión algebraica que modela el fenómeno.

El enunciado de la tarea era el siguiente:

“¿Qué efecto tiene el parámetro "a" en la gráfica? ¿Qué sucede si a es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.”

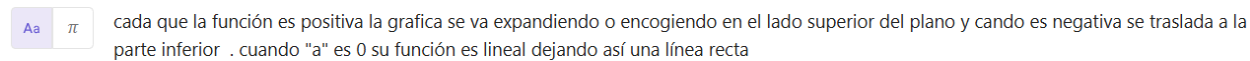
A continuación, se presentan las respuestas de los estudiantes y su respectivo análisis:

Juliana

Figura 72

Respuesta de Juliana a la tarea 7 Act. 3

a) ¿Qué efecto tiene el parámetro "a" en la gráfica? ¿Qué sucede si a es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.

 cada que la función es positiva la grafica se va expandiendo o encogiendo en el lado superior del plano y cando es negativa se traslada a la parte inferior . cuando "a" es 0 su función es lineal dejando así una línea recta

Juliana demuestra una buena comprensión del parámetro a al notar que cuando es positivo la parábola abre hacia arriba, y cuando es negativo, abre hacia abajo. Además, acierta al observar que si a es cero, la gráfica ya no es curva sino una línea recta. Si bien su explicación sobre qué tan abierta o cerrada está la parábola no es del todo clara, en general su respuesta es acertada y completa. Esto indica que su nivel de comprensión está entre el **nivel de procedimientos y el de abstracción matemática**, pues no solo describe los cambios, sino que también entiende los tres casos, aunque su escritura no sea del todo clara.

Sofía

Figura 73

Respuesta de Sofía a la tarea 7 Act. 3

a) ¿Qué efecto tiene el parámetro "a" en la gráfica? ¿Qué sucede si a es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.



Cada que es la función es positiva queda en la parte superior, mientras que cuando está en negativo queda en la parte inferior. además cuando la función está en 0 se convierte en una línea recta diagonal.

Sofía no es clara al sustentar su respuesta. Menciona que *“cuando la función es positiva queda en la parte superior, mientras que cuando está negativo queda en la parte inferior”*. En realidad lo que sucede es que la función abre hacia arriba o hacia abajo, lo que probablemente no supo expresar. Además, no profundiza en cómo varía la amplitud de la apertura y su comentario sobre la línea *“diagonal”* resulta confuso, ya que en sí es una línea recta o que la función pasa a ser lineal. En general responde de manera superficial, y expone el caso cuando el parámetro vale cero, aunque no de la mejor manera. Por esto, su respuesta se ubica entre un **nivel intuitivo y un nivel de procedimientos**, ya que si bien identifica algo, no lo expresa de la mejor manera ni profundiza en esto.

Mateo

Figura 74

Respuesta de Mateo a la tarea 7 Act. 3

a) ¿Qué efecto tiene el parámetro "a" en la gráfica? ¿Qué sucede si a es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.



Afecta la anchura y el ángulo de la parábola. si es positivo esta hacia arriba, si es negativo esta hacia abajo y si es cero es una línea recta

Mateo describe con precisión cómo el parámetro a afecta la orientación de la parábola, aunque comete un error al referirse al *“ángulo”* en lugar de la abertura. Lo importante es que entiende perfectamente que el signo de a determina la concavidad (hacia arriba o abajo), y además

acierta al señalar que cuando a vale cero, la gráfica se convierte en una línea recta. Por estas razones, su comprensión alcanza un **nivel procedimental con tendencias al de abstracción matemática**, demostrando que va más allá de lo puramente descriptivo.

Andrea

Figura 75

Respuesta de Andrea a la tarea 7 Act. 3

a) ¿Qué efecto tiene el parámetro " a " en la gráfica? ¿Qué sucede si a es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.

Aa π si a es positivo la linea cuadrática se va hacia arriba y a medida de que sus valores aumentan su medida se encoje y cuando a esta negativo la linea se dirige hacia abajo y tiene el mismo efecto entre mas sean sus valores su medida se encoje y cuando esta en 0 se convierte en una linea recta

Andrea reconoce correctamente que el signo del parámetro a determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. Además, intenta describir la abertura de la curva al mencionar que "se encoje", aunque esta expresión no es del todo precisa. Pese a esta pequeña imprecisión, su respuesta muestra una comprensión adecuada del comportamiento general de la función cuadrática. Por esto, su nivel de comprensión corresponde a un **nivel procedimental con rasgos de abstracción**, donde logra identificar los efectos principales del parámetro, aunque con ciertas limitaciones en su redacción.

5.4.8 Tarea 8 – Exploración del parámetro b en la función cuadrática

Esta actividad tenía como propósito que los estudiantes entendieran qué pasa con la gráfica de una función cuadrática cuando se cambia el valor del parámetro b . Con la ayuda del applet de GeoGebra, podían notar que al mover b , la parábola se desplazaba hacia los lados, cambiando su posición con respecto al eje vertical. Además, no solo se movía horizontalmente, sino también un poco hacia arriba o abajo, observando que al seguir el rastro del vértice este dibuja otra parábola

invertida de las mismas características al moverse. Un caso especial se da cuando b vale cero, ya que ahí la parábola queda centrada justo sobre el eje y .

La tarea, que forma parte de la fase de **matematización**, tenía como propósito que los estudiantes desarrollaran mejores herramientas para luego construir la expresión algebraica que modela el fenómeno. A través de la manipulación del deslizador, se esperaba que describieran con sus palabras estos cambios en la gráfica.

El enunciado decía:

“¿Qué efecto tiene el parámetro ‘b’ en la gráfica? ¿Cómo cambia la posición de la parábola cuando varías b ? ¿Qué sucede si b es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.”

A continuación, se presentan las respuestas y su análisis:

Juliana

Figura 76

Respuesta de Juliana a la tarea 8 Act. 3

b) ¿Qué efecto tiene el parámetro " b " en la gráfica? ¿Cómo cambia la posición de la parábola cuando varías b ? ¿Qué sucede si b es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.

Aa π cuando es negativo la función se va al costado derecho y cuando es positivo hacia el derecho y cuando esta en 0 se queda en el punto medio de los dos costados

Juliana intenta explicar cómo se mueve la parábola cuando cambia el valor de b , pero se confunde al decir que tanto con números positivos como negativos la gráfica se va hacia la derecha, aunque parece ser simplemente un error de escritura. Así mismo, acierta al mencionar que cuando b vale cero, la parábola queda centrada. Aunque su explicación tiene algunas partes confusas, se nota que está haciendo un buen esfuerzo por entender lo que observa. Por esto, su

nivel de comprensión es **de procedimientos**, ya que capta lo principal aunque todavía con algunas dificultades para explicarlo bien.

Sofía

Figura 77

Respuesta de Sofía a la tarea 8 Act. 3

b) ¿Qué efecto tiene el parámetro " b " en la gráfica? ¿Cómo cambia la posición de la parábola cuando varías b ? ¿Qué sucede si b es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.

En el parámetro B , cuando está en positivo se va hacia la izquierda mientras que cuando está en negativo se va para la derecha y cuando está en 0 se deja en el punto medio de ambos.

Sofía describe correctamente el comportamiento general del parámetro b . Reconoce que este hace que la parábola se desplace lateralmente, y acierta al decir que con b igual a cero, la parábola queda centrada. Aunque no profundiza más en su observación, su respuesta es bastante clara, por lo que se puede decir que presenta un nivel de comprensión **de procedimientos**, ya que si bien realiza una buena observación, le falta mayor profundidad para identificar otras características.

Mateo

Figura 78

Respuesta de Mateo a la tarea 8 Act. 3

b) ¿Qué efecto tiene el parámetro " b " en la gráfica? ¿Cómo cambia la posición de la parábola cuando varías b ? ¿Qué sucede si b es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.

El parámetro " b " sirve para mover de lado a lado el vértice de la parábola, cambia su inclinación

Mateo capta bien una parte importante: nota que el parámetro b mueve el vértice de lado a lado, lo cual es correcto, solo que al decir que "*cambia su inclinación*", parece haberse confundido, quizás quiso decir "posición". Aunque su observación es válida, se queda muy corta en

profundidad. Por esto, se puede afirmar que su comprensión está en un **nivel intuitivo**, donde observa lo general pero no da mayores detalles ni profundidad.

Andrea

Figura 79

Respuesta de Andrea a la tarea 8 Act. 3

b) ¿Qué efecto tiene el parámetro "b" en la gráfica? ¿Cómo cambia la posición de la parábola cuando varías b? ¿Qué sucede si b es positivo, negativo o cero? Justifica tu respuesta.

Aa π cuando b esta en positivo tambien se convierte en una línea recta de manera diagonal, y cuando b esta en negativo tambien es una línea diagonal pero un poco menos abierta y va como hacia el lado izquierdo, y cuando b esta en 0 vuelve a ser una línea cuadrática

Andrea muestra serias dificultades para entender el parámetro *b*. Cree que cuando cambia su valor, la parábola se convierte en línea recta, lo cual no es correcto. Además, no logra explicar con claridad qué efecto tiene realmente este parámetro en la gráfica. Aunque hace un intento por interpretar lo que ve, su comprensión se mantiene en un **nivel intuitivo**, donde capta que algo cambia, pero sin precisar exactamente cómo funciona *b* en la función cuadrática.

5.4.9 Tarea 9 – Exploración del parámetro c

En esta tarea, se les pidió a los estudiantes que exploraran el efecto del parámetro *c* sobre la gráfica de una función cuadrática. El objetivo era que reconocieran que *c* determina el punto donde la parábola corta el eje vertical, y que al modificar este valor, la gráfica se desplaza verticalmente hacia arriba o hacia abajo sin cambiar su forma. Esta actividad sigue haciendo parte de la fase de **matematización** del ciclo de modelación, ya que su intención era reforzar el significado de cada parámetro antes de construir una expresión que represente la situación abordada.

El enunciado de la tarea era el siguiente:

“¿Qué efecto tiene el parámetro "c" en la gráfica? ¿Cómo se relaciona con la intersección de la parábola con el eje vertical? Justifica tu respuesta.”


A continuación, se presentan las respuestas de los estudiantes y su respectivo análisis:

Juliana

Figura 80

Respuesta de Juliana a la tarea 9 Act. 3

c) ¿Qué efecto tiene el parámetro "c" en la gráfica? ¿Cómo se relaciona con la intersección de la parábola con el eje vertical? Justifica tu respuesta.

 esta función se va moviendo de arriba a abajo , cuando es negativo se va a la parte inferior sin moverse su punto de corte en el eje vertical, es como si se estirara , cuando es positivo, se va tipo encogiendo hacia arriba y como se menciona se va encogiendo a la parte superior del plano.


Juliana parece tener una idea general de que la gráfica se mueve hacia arriba o hacia abajo, pero lo expresa de forma confusa. Menciona que “no se mueve su punto de corte”, lo cual contradice lo que realmente sucede con el parámetro c , ya que es precisamente ese valor el que determina el punto de intersección con el eje y . Además, introduce la idea de “encogerse” o “estirarse”, que corresponde más al parámetro a . En este caso, se nota que su comprensión es muy **intuitiva**, con algunas ideas enredadas o mal interpretadas.

Sofía

Figura 81

Respuesta de Sofía a la tarea 9 Act. 3

c) ¿Qué efecto tiene el parámetro "c" en la gráfica? ¿Cómo se relaciona con la intersección de la parábola con el eje vertical? Justifica tu respuesta.

 En este parámetro vemos q cuando está en positivo se va hacia la parte superior mientras que cuando está en negativo se va hacia la parte inferior de la gráfica.

Sofía logra una observación más clara. Reconoce que c mueve la gráfica hacia arriba o abajo según su valor. No menciona que este valor determina la intersección con el eje y , pero al menos describe bien el comportamiento general. Su nivel de comprensión se puede ubicar entre

intuitivo y procedimental inicial, ya que describe bien el efecto, aunque no de la mejor manera y además, no profundiza en su relación con la expresión.

Mateo

Figura 82

Respuesta de Mateo a la tarea 9 Act. 3

c) ¿Qué efecto tiene el parámetro "c" en la gráfica? ¿Cómo se relaciona con la intersección de la parábola con el eje vertical? Justifica tu respuesta.

Aa π Es el cambio de altura de la parábola, ya que aumenta o disminuye si es positivo o negativo respectivamente. Se mueve solo de arriba a abajo en el eje vertical

Mateo da una respuesta bastante clara. Habla del “*cambio de altura*” y menciona correctamente que la parábola se mueve en el eje vertical. Aunque no utiliza términos técnicos, su explicación apunta a lo que realmente sucede con el parámetro *c*. Por eso, su nivel de comprensión está **en el nivel procedimental con tendencias al de abstracción matemática**, pues aunque no habla directamente de la intersección con el eje *y*, reconoce que *c* mueve la gráfica hacia arriba o abajo.

Andrea

Figura 83

Respuesta de Andrea a la tarea 9 Act. 3

c) ¿Qué efecto tiene el parámetro "c" en la gráfica? ¿Cómo se relaciona con la intersección de la parábola con el eje vertical? Justifica tu respuesta.

Aa π cuando esta ubicado en negativo- la línea cuadrática aumenta y se hace mas grande, y cuando nos dirijimos de manera positiva la línea cuadratica va disminuyendo y si seguimos moviendo de manera positiva la línea cuadratica se disminuye y se encoje al punto de desaparecer

Andrea muestra nuevamente una idea muy poco clara. Habla de “aumentar” o “disminuir” en un sentido que no se entiende bien, y dice que al moverse hacia lo positivo la parábola “*desaparece*”, lo cual no es cierto. No hay una conexión clara con el comportamiento del parámetro *c*, ni con la gráfica ni con el eje vertical. Por eso, su respuesta se ubica claramente en

un nivel **intuitivo**, ya que parece que intentó describir lo que veía, pero no logró comprender lo que significaba ese parámetro.

5.4.10 Tarea 10 – Combinación de parámetros a y b

En esta tarea, se pidió a los estudiantes observar qué ocurre al combinar diferentes valores de los parámetros a y b dentro de la función cuadrática. Para esto, se les habilitó la opción de darle movimiento a los parámetros en conjunto en GeoGebra y observar su comportamiento. Se esperaba que notaran cómo cambia la orientación de la parábola y hacia qué zona del plano se mueve el vértice, dependiendo de los signos de los parámetros. Esta tarea también hace parte de la **fase de matematización**, ya que el objetivo seguía siendo que los estudiantes comprendieran la función cuadrática como un modelo ajustable antes de intentar representarla algebraicamente en una situación contextual.

El enunciado de la tarea era el siguiente:

“¿Qué sucede cuando combinas diferentes valores de a y b ? Por ejemplo, ¿cómo cambia la gráfica si a es positivo y b es negativo, o viceversa? Justifica tu respuesta.”

A continuación, se presentan sus respuestas y el análisis correspondiente:

Juliana

Figura 84

Respuesta de Juliana a la tarea 10 Act. 3

d) ¿Qué sucede cuando combinas diferentes valores de a y b ? Por ejemplo, ¿cómo cambia la gráfica si a es positivo y b es negativo, o viceversa? Justifica tu respuesta.



si a es positivo y b es negativo la función se va encogiendo pero se va moviendo al costado derecho y cuando a es negativo y b es positivo su función pasa a la parte inferior del plano y se va moviendo igualmente al costado derecho.

si se combina valores de a y de b se ve q se encoge la función mientras se va moviendo al costado correspondiente luego llega a un punto donde queda estatico y se expande en el costado en el q está y luego se estira a dejar la funcion lineal y pasa al otro costado y hace lo mismo se encoge llega a su punto estatico en funcion del eje vertical , se expande y luego vuelve a estirarse a llega a la funcion lineal y así sucesivamente

Juliana escribe una respuesta extensa, aunque un poco desordenada. Da indicios de haber observado el movimiento de la parábola cuando los parámetros cambian, y menciona tanto la dirección como la forma de la gráfica. Habla del “*costado correspondiente*” y de que la parábola se “*encoge*” y “*se estira*”, lo cual se relaciona con a , pero también habla de desplazamientos horizontales asociados con b . Aunque no lo expresa de forma clara, se nota un intento por comprender el comportamiento del vértice. Esta respuesta refleja un **nivel procedimental**, ya que relaciona lo que ve con los parámetros y muestra un esfuerzo por describirlo, aunque con dificultad para organizar sus ideas.

Sofía

Figura 85

Respuesta de Sofía a la tarea 10 Act. 3

d) ¿Qué sucede cuando combinas diferentes valores de a y b ? Por ejemplo, ¿cómo cambia la gráfica si a es positivo y b es negativo, o viceversa? Justifica tu respuesta.



Si combinamos los valores A y B, siendo A el positivo y B el negativo, su forma queda en la parte superior hacia la derecha, mientras q si lo hacemos en viceversa queda en la parte inferior y sigue estando en la parte de la derecha MÍA, por que si lo vemos desde la perspectiva de la gráfica queda a la izquierda. También observamos que cuando están los dos en movimiento al mimo tiempo se encogen y llegan a punto q se empieza a soltar y vuelve a su forma original y eso se repite una y otra vez.....x

Sofía logra entender cómo los parámetros a y b modifican la parábola, tanto en su posición como en su forma. Mediante sus propias palabras explica que dependiendo de si son positivos o negativos, la gráfica "se mueve" hacia arriba, abajo, izquierda o derecha. También nota que la curva puede "encogerse" y que estos cambios siguen un patrón. Aunque no usa términos técnicos, se ve que capta la idea principal de cómo interactúan los parámetros. Por eso, su comprensión está en un **nivel procedimental con rasgos de abstracción**, donde ya va más allá de lo básico pero todavía le falta precisión matemática.

Mateo

Figura 86

Respuesta de Mateo a la tarea 10 Act. 3

d) ¿Qué sucede cuando combinas diferentes valores de a y b ? Por ejemplo, ¿cómo cambia la gráfica si a es positivo y b es negativo, o viceversa? Justifica tu respuesta.



La parábola y su vértice se desplaza de arriba a abajo y de lado a lado

Mateo realiza una afirmación muy sencilla. Aunque acierta al decir que la parábola se mueve tanto vertical como horizontalmente, no especifica cómo influyen los valores de a y b . No hay explicación, ejemplos, ni justificación. Por esa razón, su nivel de comprensión es **intuitivo**, ya que apenas menciona lo más general sin profundizar.

Andrea

Figura 87

Respuesta de Andrea a la tarea 10 Act. 3

d) ¿Qué sucede cuando combinas diferentes valores de a y b ? Por ejemplo, ¿cómo cambia la gráfica si a es positivo y b es negativo, o viceversa? Justifica tu respuesta.

Aa π si a es positivo y b negativo la línea cuadrática se encoje y se dirige hacia la derecha la parábola va hacia arriba y cuando a es negativo y b es positivo la parábola va hacia abajo y también se encoje

Andrea muestra que observa cómo el signo de a determina si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo, y que b afecta la dirección horizontal. Aunque no menciona el vértice directamente, reconoce que la gráfica se mueve y cambia de forma. Su lenguaje es sencillo, pero su interpretación tiene coherencia con el fenómeno. Esta respuesta puede considerarse dentro del **nivel procedimental**, ya que observa correctamente los efectos de ambos parámetros, aunque sin profundizar.

5.4.11 Tarea 11 – Ajuste gráfico de la expresión algebraica

Esta tarea representó el inicio del Momento 3 y, aunque no aparecía como actividad numerada en el libro digital de GeoGebra, constituyó una etapa clave en el proceso de modelación. Se diseñó como una serie de indicaciones guiadas para que los estudiantes ajustaran manualmente una función cuadrática a los datos recolectados previamente. El enunciado solicitaba lo siguiente:

“Grafica nuevamente los puntos que has recolectado en la tabla de datos sobre la hoja de Excel de GeoGebra, y con ayuda de los deslizadores ajusta el valor de los parámetros intentando que la función pase por todos los puntos que has graficado.”

Esta tarea se ubica en la **fase de matematización** del ciclo de modelación, ya que aquí se buscaba que los estudiantes encontraran una expresión algebraica que modelara el fenómeno, a partir de la gráfica de los puntos y del ajuste de los parámetros en la función cuadrática.

A diferencia del enfoque algebraico tradicional (con sistemas de ecuaciones), se optó por una estrategia visual e intuitiva utilizando GeoGebra. Los estudiantes debían graficar los puntos manualmente en la hoja de cálculo de GeoGebra, generar un listado con ellos, y luego usar los deslizadores para modificar los parámetros a , b y c de la función cuadrática general ($f(x) = ax^2 + bx + c$), hasta lograr que la curva se ajustara lo mejor posible a esos puntos.

Este procedimiento se apoyó en lo trabajado previamente durante el Momento 2, donde exploraron el efecto de cada parámetro en la forma de la parábola. Esa experiencia previa les permitió tener más claridad sobre cómo mover los deslizadores para ampliar, encoger o trasladar la gráfica de acuerdo con lo que requerían.

A diferencia de otras tareas, en esta **no se realiza un análisis individual por estudiante**, ya que las respuestas fueron exclusivamente gráficas y no hubo producción escrita que permitiera conocer el razonamiento que desarrollaron. Por esta razón, no sería pertinente relacionar un nivel de comprensión con base en cada resultado específico. Sin embargo, en términos generales, se puede decir que la actividad promovió el tránsito entre los niveles **intuitivo y procedimental**, pues los estudiantes pusieron en práctica observaciones visuales y ajustes basados en la exploración, más que en cálculos formales.

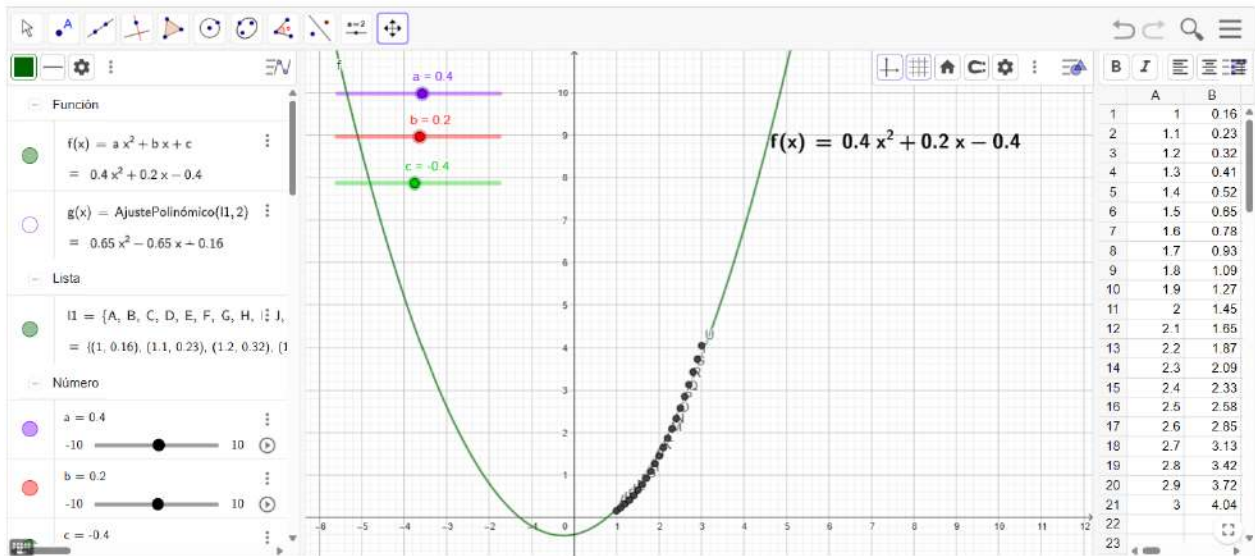
Al finalizar, se les enseñó cómo aplicar el ajuste polinómico de segundo grado en GeoGebra, lo cual permitió verificar la función que mejor se ajustaba a los datos según el programa. La expresión generada fue: $f(x) = 0.65x^2 - 0.65x + 0.16$. Sin embargo, es necesario contextualizar la expresión, por lo cual finalmente queda expresada como $A(d) = 0.65d^2 - 0.65d + 0.16$, donde d representa la distancia y $A(d)$ representa el área proyectada en función de la distancia.

A continuación se presentan las producciones de los estudiantes junto a la expresión algebraica a la que llegaron:

Juliana

Figura 88

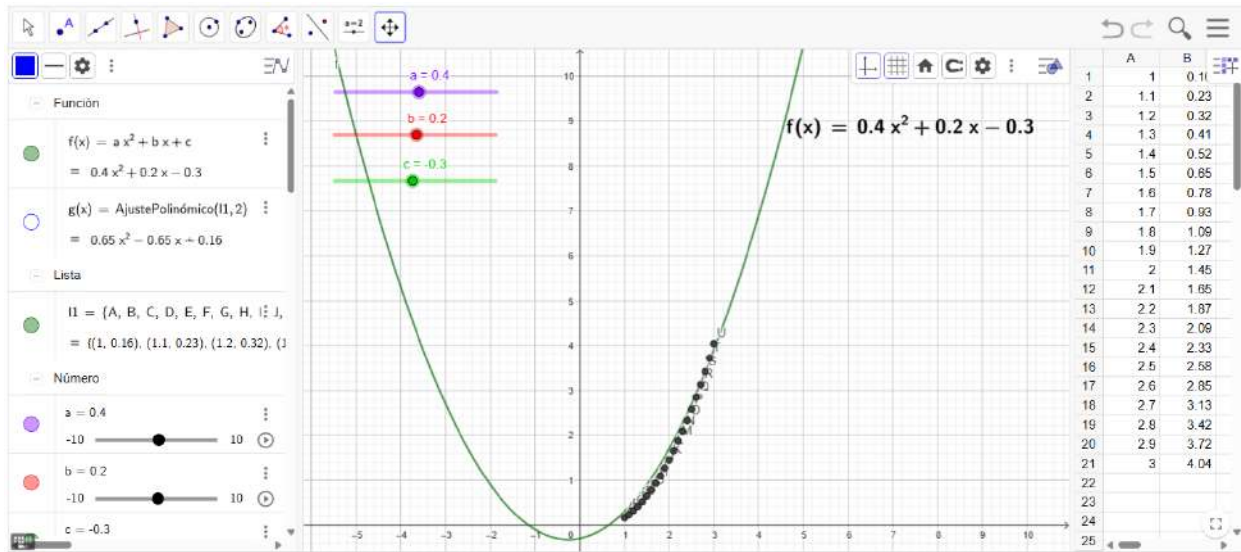
Gráfica de Juliana en la tarea 11 Act. 3



Sofía

Figura 89

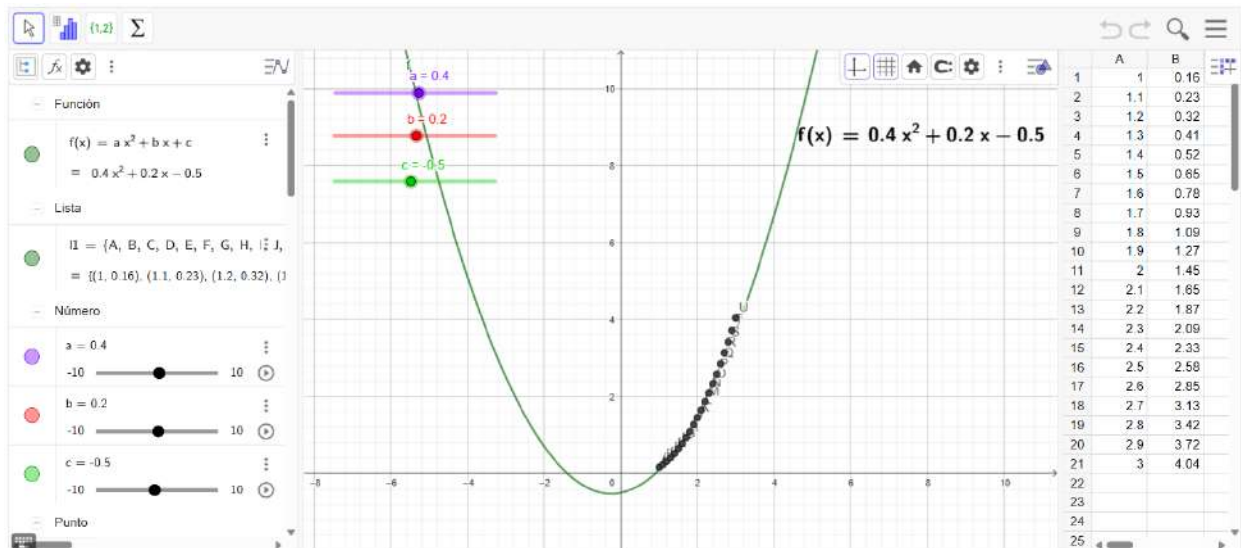
Gráfica de Sofía en la tarea 11 Act. 3



Mateo

Figura 90

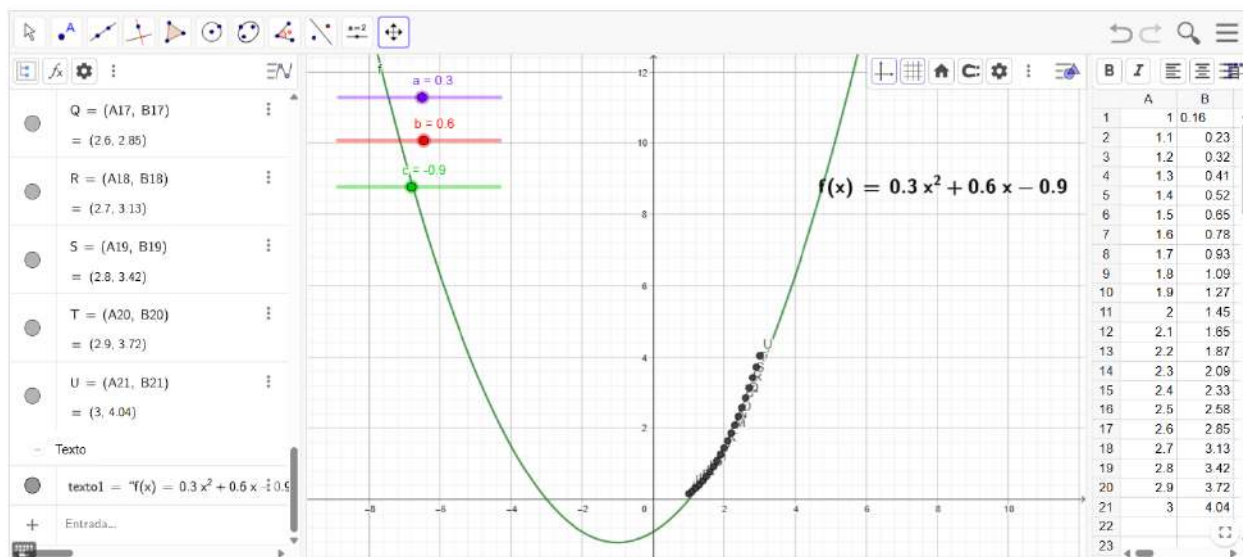
Gráfica de Mateo en la tarea 11 Act. 3



Andrea

Figura 91

Gráfica de Andrea en la tarea 11 Act. 3



5.4.12 Tarea 12 – Evaluación del modelo en un nuevo valor de distancia

Con esta actividad comenzó la fase de **trabajo matemático**, donde los estudiantes pusieron a prueba el modelo que habían construido. La idea era que aplicaran lo aprendido a una situación nueva, un caso que no aparecía en sus datos originales. Tenían dos opciones para resolverlo: podían usar directamente la expresión algebraica sustituyendo el valor de la distancia, o bien hacer una estimación visual basada en la gráfica. Lo más importante era que explicaran claramente cómo llegaban a sus respuestas, mostrando así su comprensión del modelo.

El enunciado de la tarea era el siguiente:

“Si el proyector se alejara a 4 metros del tablero, ¿cuál sería el área proyectada según la función? ¿Tiene sentido este resultado en el contexto real? Justifica tu respuesta.”

A continuación se presentan las respuestas de los estudiantes y su análisis.

Juliana

Figura 92

Respuesta de Juliana a la tarea 12 Act. 3

a) Si el proyector se alejara a 4 metros del tablero, ¿cuál sería el área proyectada según la función? ¿Tiene sentido este resultado en el contexto real? Justifica tu respuesta.

Aa π Si se aleja el proyector 4 metros la proyección se verá más grande por ende el área proyectada va aumentar

Juliana responde a la tarea de manera cualitativa, describiendo en términos generales lo que ocurriría con la proyección, pero sin proporcionar un valor numérico concreto ni explicar su razonamiento. Aunque demuestra entender que habría un crecimiento, no utiliza ni la gráfica ni la expresión algebraica que habían obtenido previamente para sustentar su respuesta. Esta aproximación, donde capta la idea general pero no aplica las herramientas matemáticas disponibles, corresponde a un **nivel intuitivo** de comprensión.

Sofía

Figura 93

Respuesta de Sofía a la tarea 12 Act. 3

a) Si el proyector se alejara a 4 metros del tablero, ¿cuál sería el área proyectada según la función? ¿Tiene sentido este resultado en el contexto real? Justifica tu respuesta.

Aa π Si el proyector se alejara 4 metros más, su área proyectada aumentaría en una mayor parte, hasta 8 m cuadrados

Sofía da una estimación de $8 m^2$, que resulta bastante cercana al valor real ($7.96 m^2$). Sin embargo, no explica cómo llegó a ese valor, no menciona si usó la gráfica o la expresión algebraica. Por la cercanía del resultado, es probable que haya basado su respuesta en lo que pudo evidenciar en la gráfica. Por esto, su comprensión se puede ubicar entre los **niveles intuitivo y de procedimientos**, ya que acierta en el resultado, pero le falta explicar el proceso que siguió para llegar a él.

Sin embargo, como Andrea estaba trabajando junto a Juliana en este último espacio de la actividad, se aprovechó la situación para profundizar en sus respuestas interrogándolas a ambas en conjunto. Esto permitió explorar mejor su comprensión a través del diálogo y el intercambio de ideas entre ellas.

Investigador: *Explíquenme cómo resolvieron esta tarea, donde les decía que si el proyector se alejara a 4 metros del tablero, ¿cuál sería el área proyectada?*

Juliana: *Pues claramente iba a aumentar*

Sofía: *Sí, pero también se podía saber si mirábamos la gráfica*

Investigador: *¿Cómo lo hizo Sofía? Explíqueme*

Sofía: *Pues si se alejara 4 metros diría que se aumentaría hasta 8 metros cuadrados al observar la gráfica, aquí está el cuatro (señalando la gráfica) y subimos y vemos que conecta con el 8 en el eje y*

Investigador: *Juliana, entonces si el proyector se alejara a 3.5 metros del tablero, ¿cuál sería la distancia proyectada?*

Juliana: *Debo mirar la gráfica y sería..... si, sería 6 metros cuadrados, es lo que alcanzo a observar, ¿si está bien?*

Investigador: *Así es*

Se evidencia que Sofía utilizó correctamente la gráfica de la función para resolver la tarea, sustentando su respuesta de manera acertada. Esto le permite afianzar su comprensión en un **nivel de procedimientos**, ya que logra justificar adecuadamente su razonamiento.

Por otro lado, Juliana, aunque en un principio se aferraba a su respuesta inicial, logra entender cómo emplear la gráfica para determinar los valores dentro del contexto planteado. Esto queda demostrado cuando responde correctamente a una pregunta similar con un valor de distancia distinto. Debido a esto, puede afirmarse que su comprensión experimenta un avance, situándose entre **un nivel intuitivo y de procedimientos**, pues, aunque no lo identificó por sí misma, logró asimilarlo al escuchar la explicación de su compañera.

Mateo

Figura 94

Respuesta de Mateo a la tarea 12 Act. 3

a) Si el proyector se alejara a 4 metros del tablero, ¿cuál sería el área proyectada según la función? ¿Tiene sentido este resultado en el contexto real? Justifica tu respuesta.

As π el área proyectada sería de 7,92 metros cuadrados. En el contexto de la situación, el área proyectada con el proyector alejado a 4 metros de distancia no se vería bien, ya que sería mas grande que el tablero.

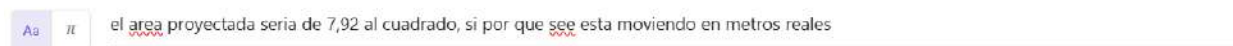
Mateo da una respuesta numérica muy cercana al valor exacto, lo cual sugiere que utilizó el modelo algebraico aunque con alguna imprecisión mínima en el cálculo. Además, reflexiona sobre el contexto, cuestionando la validez del resultado en términos reales. Esto indica que logró usar el modelo para predecir y también para interpretar. Por lo tanto, su respuesta se podría ubicar en un **nivel de comprensión de procedimientos con acercamientos a la abstracción matemática**, ya que empieza a conectar el modelo con el fenómeno real.

Andrea

Figura 95

Respuesta de Andrea a la tarea 12 Act. 3

a) Si el proyector se alejara a 4 metros del tablero, ¿cuál sería el área proyectada según la función? ¿Tiene sentido este resultado en el contexto real? Justifica tu respuesta.



Andrea proporciona un valor de 7.92, que parece haberlo calculado utilizando la expresión algebraica, aunque con un pequeño error en las unidades (solo menciona "al cuadrado" en lugar de "metros cuadrados"). Al igual que sus compañeros, no explica cómo llegó a ese número, y cuando intenta justificarlo, su explicación resulta confusa. Aunque el valor numérico resulta cercano al correcto, al no explicar claramente su proceso ni mencionar bien las unidades, su comprensión se queda en un **nivel intuitivo con rasgos procedimentales**.

5.4.13 Tarea 13 – Cálculo de la distancia para un área proyectada dada

Esta actividad también forma parte del **trabajo matemático**, puesto que los estudiantes debían emplear la función cuadrática previamente construida para calcular la distancia correspondiente a un área proyectada específica, en este caso, 10 m². A diferencia de la pregunta anterior, esta representaba un mayor desafío, ya que implicaba invertir el proceso: en lugar de determinar el área a partir de una distancia, ahora debían hallar la distancia partiendo del área, lo cual exigía un manejo más complejo desde el enfoque algebraico si optaban por resolverlo por este método.

El enunciado de la tarea decía:

“¿A qué distancia del tablero debería estar el proyector para que el área proyectada sea de 10 m²? Justifica tu respuesta.”

A continuación se presentan las respuestas de los estudiantes y su análisis.

Juliana

Sin respuesta

Juliana no dio una respuesta por escrito. Sin embargo, durante la interacción posterior, cuando se retomó el tema demostró que había comprendido el ejercicio.

Investigador: *Ahora veamos la siguiente tarea, en la cual se les pedía que determinaran a qué distancia debería estar el proyector para que el área proyectada fuera de 10 m^2 , ¿cómo lo harían?*

Juliana: *Pues viendo la gráfica sería como cuatros metros y medio más o menos*

Investigador: *Así es, aproximadamente*

Esta interacción muestra que Juliana logró entender la relación entre la representación gráfica de la función y el contexto. Aunque su respuesta fue breve, la precisión de su estimación ("*cuatro metros y medio*") indica que detalló cuidadosamente la representación gráfica, ubicando correctamente el punto correspondiente a los 10 m^2 . Por esta razón, su comprensión puede clasificarse en el **nivel de procedimientos**, ya que demostró capacidad para interpretar y extraer información específica de la gráfica, aunque sin explicar el proceso realizado.

Sofía

Sin respuesta

Al revisar las respuestas, se observó que Sofía, al igual que Juliana, había dejado esta pregunta sin responder. Durante la revisión conjunta con las estudiantes, surgió el siguiente diálogo que explica su razonamiento:

Investigador: *¿Qué sucedió con usted Sofía, por qué no respondió la pregunta si usted había justificado bien la anterior?*

Sofía: *Pensé que no se podía resolver gráficamente, pero ahora veo que si*

Investigador: *Está bien, y si en lugar del caso de 10 metros cuadrados le preguntara que ¿cuál es la distancia a la que debe estar el proyector para que el área proyectada sea de 7 metros cuadrados?*

Sofía: *Vale, pues revisando serían serían aproximadamente 3.8 metros*

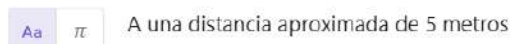
Esta interacción evidencia que Sofía inicialmente tuvo dificultades para reconocer la aplicabilidad del método gráfico, pero durante la conversación demostró comprender su uso. La precisión de su respuesta final ("*aproximadamente 3.8 metros*") indica que logró interpretar correctamente la gráfica una vez superada su dificultad. Al igual que en el caso de Juliana, esto sugiere que Sofía alcanzó un nivel de comprensión **de procedimientos**, pues aunque necesitó orientación, finalmente pudo extraer la información necesaria de la gráfica y realizar la medición adecuada.

Mateo

Figura 96

Respuesta de Mateo a la tarea 13 Act. 3

b) ¿A qué distancia del tablero debería estar el proyector para que el área proyectada sea de 10 m²? Justifica tu respuesta.

 A una distancia aproximada de 5 metros

Mateo proporciona una respuesta aproximada que, si bien no es exacta, se acerca al valor esperado. Es probable que haya utilizado la representación gráfica de la función para estimar visualmente el punto donde el área alcanza los 10 m². Aunque no justifica su método, su

aproximación demuestra una comprensión básica de la función. Podemos situar su nivel de comprensión **entre el intuitivo y de procedimientos**, pues, si bien aparentemente usó la gráfica como apoyo, su resultado no es completamente preciso y hace falta el soporte de su procedimiento.

Andrea

Figura 97

Respuesta de Andrea a la tarea 13 Act. 3

b) ¿A qué distancia del tablero debería estar el proyector para que el área proyectada sea de 10 m^2 ? Justifica tu respuesta.



la distancia que debera estar el proyector es aproximadamente de 5 metros

Andrea presenta una respuesta similar a la de Mateo. No detalla cómo obtuvo ese valor, y aunque se acerca al resultado esperado, no es posible saber con certeza si utilizó la gráfica como referencia o si fue una simple aproximación. Al no justificar su procedimiento, su comprensión se situaría entre **el nivel intuitivo y el de procedimientos**, aunque en una etapa muy inicial, donde predomina más una interpretación visual básica que una comprensión profunda del modelo matemático.

5.4.14 Tarea 14 – Análisis de intervalos y conjetura sobre la variación

El objetivo de esta tarea era que los estudiantes analizaran con mayor profundidad cómo cambiaba el área proyectada en función de la distancia, evaluando tres intervalos consecutivos en la tabla de datos. La idea era que notaran que el aumento no era constante, sino que se aceleraba, y que a partir de esa observación, propusieran una conjetura. Esta parte del trabajo encajaba en la fase de **trabajo matemático** y estaba planteada para que los estudiantes alcanzaran el **nivel de formalización** en su comprensión, lo que la hacía más desafiante dentro de todas las tareas propuestas.

Sin embargo, ninguno de los estudiantes respondió esta actividad. A pesar de estar incluida en el libro digital, prefirieron concentrarse en otras tareas que les resultaban más comprensibles. Al leer el enunciado, expresaron confusiones sobre qué hacer exactamente, y como era la última sesión disponible, se decidió priorizar la siguiente tarea (la fase de validación), que era más directa y permitía un cierre adecuado con el tiempo restante.

El enunciado decía lo siguiente:

"Compara la variación del área proyectada con respecto a la distancia en tres intervalos constantes consecutivos (por ejemplo: distancia de 1 a 1.5 m, distancia de 1.5 a 2 m) tomados de la tabla. ¿Son iguales? ¿Qué concluyes? Plantea una conjetura e intenta demostrar que siempre se cumple."

Cabe mencionar que se había planeado guiar esta actividad con más apoyo, especialmente porque requería un tipo de razonamiento más abstracto y poco familiar para ellos. Desafortunadamente, la sesión fue interrumpida por una actividad institucional imprevista, lo que impidió profundizar en lo planeado. Aun así, es importante dejar constancia de esta tarea como parte del diseño original, ya que refleja la intención de llevar a los estudiantes hacia una comprensión más detallada del fenómeno y avanzar hacia un pensamiento matemático más estructurado.

5.4.15 Tarea 15 – Validación del modelo obtenido

Esta actividad formaba parte de la fase de **validación e interpretación** dentro del ciclo de modelación, donde los estudiantes debían analizar si la función que obtuvieron realmente representaba bien lo que observaban en la situación real. La idea era que revisaran con cuidado la

gráfica y determinarán si hacía falta modificar algo en la función para que tuviera más sentido con respecto al contexto.

El enunciado era el siguiente:

“¿Consideras que la función generada representa adecuadamente los datos en el contexto estudiado? ¿Será necesario realizar algún ajuste a la misma? Justifica tu respuesta.”

A continuación, se presentan las respuestas de los estudiantes y su respectivo análisis:

Juliana

Figura 98

Respuesta de Juliana a la tarea 15 Act. 3

d) ¿Consideras que la función generada representa adecuadamente los datos en el contexto estudiado? ¿Será necesario realizar algún ajuste a la misma? Justifica tu respuesta.

Aa π esta función para mi es adecuada ya q permite ver la manera mas cerca posible de que la línea curva toque todos los puntos pero aun se le haría un ajuste ya q en clase se vio como a todos nos dio unos valores distintos para la función

Juliana menciona que la función se aproxima a los puntos, justificando su respuesta con el argumento de que *"a todos nos dio unos valores distintos para la función"*, lo cual era cierto antes del ajuste polinómico. Sin embargo, al procesar los datos con el software, la expresión algebraica resultante fue la más precisa, corrigiendo así los errores manuales iniciales. Este análisis revela que la estudiante no logró identificar el verdadero propósito de la tarea, ya que se enfocó en aspectos secundarios y ofreció una explicación bastante superficial. Por esta razón, su comprensión puede situarse en un **nivel intuitivo**, pues aunque percibió algunos elementos del problema, no alcanzó a comprender plenamente el objetivo central de la tarea.

Dadas las dificultades que presentó Juliana con la tarea, se intentó guiarla mediante un diálogo con el objetivo de establecer un mejor nivel de comprensión.

Investigador: *Juliana, revisemos la última pregunta, usted menciona que si es necesario un ajuste basando su idea en que a todos les dio valores distintos en los parámetros, lo cual es cierto, pero si se fija ese ajuste ya lo hicimos con el ajuste polinomial de grado 2, por eso quiero que se replantee la pregunta y piense si es necesario realizar un ajuste para que se parezca a los datos del contexto. ¿Tiene pensado alguno?*

Juliana: *La verdad no*

Investigador: *Le propongo un ejemplo, ¿será que yo puedo decir que la distancia de aquí a la pared de es -5 metros? 'Qué piensa?*

Juliana: *No, no se puede, la distancia nunca se mide en negativo*

Investigador: *Vale, entonces revise detalladamente la gráfica y me dice qué observa sobre la distancia*

Juliana: *Ah si, la gráfica pasa por la parte negativa también.*

Investigador: *Así es, entonces ¿qué le haría a la función? En matemáticas hablamos de hacer una restricción, entonces ¿qué restricción le harían?*

Juliana: *Sería cortarla, solo dejar la parte donde están los positivos*

Finalmente, Juliana entendió el ajuste necesario. Se dio cuenta que los valores negativos de distancia no tenían sentido y propuso "cortar" la función, refiriéndose a hacer la restricción adecuada. Esto muestra que alcanzó un **nivel de procedimientos**, aunque necesitó ayuda para llegar a esa conclusión. Es decir, logró comprenderla aunque con apoyo guiado.

Sofía

Figura 99

Respuesta de Sofía a la tarea 15 Act. 3

d) ¿Consideras que la función generada representa adecuadamente los datos en el contexto estudiado? ¿Será necesario realizar algún ajuste a la misma? Justifica tu respuesta.

Aa π Para mí esta función representa adecuadamente los datos, lo único que le cambiaría sería el corte en la parte negativa ya que la distancia nunca se mide en negativo.

Sofía desarrolla una respuesta acertada. Por un lado, reconoce que el modelo se ajusta adecuadamente a los datos, pero por otro, detecta una inconsistencia clave: la función genera valores negativos de distancia, algo imposible en la situación real. Esta observación demuestra que está evaluando el modelo no solo desde lo matemático, sino considerando su significado concreto en el contexto del problema. Su capacidad para relacionar el comportamiento de la función con las limitaciones prácticas del fenómeno estudiado sugiere una comprensión **procedimental con tendencias al nivel de abstracción matemática**, pues va más allá del cálculo para reflexionar sobre la coherencia general del modelo.

Mateo

Figura 100

Respuesta de Mateo a la tarea 15 Act. 3

d) ¿Consideras que la función generada representa adecuadamente los datos en el contexto estudiado? ¿Será necesario realizar algún ajuste a la misma? Justifica tu respuesta.

Aa π Sí, se ve como en la gráfica están bien representados los puntos basados en los datos de la tabla, estos puntos con esta función están alineados con la parábola de forma curva.

Mateo afirma que la función es correcta porque en la gráfica "los puntos coinciden con la línea", sin embargo, no se fija si se requiere hacerle ajustes o si los valores tienen sentido en la vida real. Como solo se fija en lo más básico, se podría decir que su comprensión está entre el **nivel intuitivo y de procedimientos**, ya que comprende la gráfica pero no va más allá.

Dado que Mateo no pudo observar la restricción que requería la función para que se adaptara al contexto, se estableció un diálogo con él con el objetivo de que pudiera notarlo y aumentar su nivel de comprensión.

Investigador: *Mateo, vamos a aclarar la última tarea, donde se le preguntaba si consideraba que la función generada representaba adecuadamente la situación del contexto. ¿Qué piensa sobre eso?*

Mateo: *Si, porque se ve en la gráfica que los puntos están bien representados por la función*

Investigador: *Vale, revise la gráfica ¿hacia qué sector del plano se ubican los puntos que graficó?*

Mateo: *Hacia la derecha*

Investigador: *Vale, ahora revise todo el plano, ¿observa algo inusual?*

Mateo: *Ah si, que la gráfica pasa por la parte negativa*

Investigador: *¿Considera que hay distancias negativas?*

Mateo: *No, no hay*

Investigador: *Listo, entonces ya viendo eso, ¿será necesario realizarle algún ajuste a la función para que queden solo datos reales?*

Mateo: *Sería cortarla para que queden solo las distancias positivas*

Investigador: *Así es, entonces hablamos de restringir la función, y a partir de eso ¿qué distancias tomaría?*

Mateo: *Desde el 1 hasta el 3*

Como se pudo observar, Mateo logró el objetivo, pudo observar la restricción que requería el contexto sobre la función. Por este motivo se puede afirmar que su nivel de comprensión es **de procedimientos**, ya que pudo percatarse de la situación y realizar el ajuste necesario, aunque con un apoyo guiado.

Andrea

Figura 101

Respuesta de Andrea a la tarea 15 Act. 3

d) ¿Consideras que la función generada representa adecuadamente los datos en el contexto estudiado? ¿Será necesario realizar algún ajuste a la misma? Justifica tu respuesta.

Aa π

Si ya que todos los puntos pasan por encima de la curva, es necesario realizar el ajuste, debemos cortar la curva de manera de que todos los puntos solo queden en el eje positivo

Andrea también considera que se requiere un ajuste, indicando que la gráfica debe limitarse al eje positivo. Aunque su redacción es poco precisa, logra expresar la necesidad de restringir el dominio del modelo a los valores positivos, lo cual es correcto. Esta respuesta también puede ubicarse en un **nivel procedimental con elementos de abstracción**, al mostrar una interpretación coherente entre el modelo y el contexto real.

5.5 Conclusiones generales de la Actividad 3

El análisis de la Actividad 3, que abordó la relación entre la distancia de un proyector y el área proyectada, evidenció cómo los estudiantes avanzaron a través del ciclo de modelación (Blum y Borromeo, 2009, citados por Londoño y Muñoz, 2011), mostrando distintos niveles de comprensión (Herscovics y Bergeron, citados en Contreras, 1994) en cada fase como se resume a continuación:

Tabla 8

Resumen Global por tareas Act. 3

Tarea	Juliana	Sofía	Mateo	Andrea
Comprensión y estructuración del problema				
T1: Identificación de variables	Procedimientos	Procedimientos	Intuitivo	Procedimientos (tendencia a abstracción)
T2: Relación entre variables	Procedimientos	Intuitivo	Abstracción matemática (tendencia)	Intuitivo
T3: Regularidad en datos	Procedimientos	Procedimientos	Procedimientos	Intuitivo (tendencia a procedimientos)
Matematización				
T4: Variación del área	Abstracción matemática (tendencia)	Procedimientos	Procedimientos	Procedimientos (tendencia a abstracción)
T5: Interpretación gráfica	Procedimientos (tendencia a abstracción)	Abstracción matemática	Abstracción matemática	Procedimientos (tendencia a abstracción)
T6: Propuesta algebraica	Intuitivo	Intuitivo	Intuitivo	Intuitivo
T7: Parámetro 'a'	Procedimientos/Abstracción	Intuitivo/Procedimientos	Procedimientos (tendencia a abstracción)	Procedimientos (tendencia a abstracción)
T8: Parámetro 'b'	Procedimientos	Procedimientos	Intuitivo	Intuitivo

T9: Parámetro 'c'	Intuitivo	Intuitivo/Procedimientos	Procedimientos (tendencia a abstracción)	Intuitivo
T10: Combinación parámetros	Procedimientos	Procedimientos (tendencia a abstracción)	Intuitivo	Procedimientos
Trabajo matemático				
T11: Ajuste gráfico	Intuitivo/Procedimientos	Intuitivo/Procedimientos	Intuitivo/Procedimientos	Intuitivo/Procedimientos
T12: Evaluación del modelo	Intuitivo (Oral: Intuitivo a (tendencia procedimientos)	Intuitivo/Procedimientos	Procedimientos (tendencia a abstracción)	Intuitivo (tendencia a procedimientos)
T13: Cálculo de distancia	Procedimientos	Procedimientos	Intuitivo/Procedimientos	Intuitivo/Procedimientos
Validación e interpretación				
T15: Validación del modelo	Intuitivo	Procedimientos (tendencia a abstracción)	Intuitivo/Procedimientos	Procedimientos (tendencia a abstracción)

En la fase de comprensión y estructuración, las tareas iniciales (T1-T3) evidenciaron que, aunque todos identificaron las variables clave (distancia y área), hubo dificultades para caracterizar con precisión su relación. Juliana se destacó principalmente desde T1 donde estableció conexiones entre las magnitudes manteniendo un nivel procedimental. Sofía y Mateo presentaron un leve avance entre T1 y T3 al establecer la relación, mientras que Andrea, aunque estableció una relación en T1, con el paso a T3 y T3 no logró sostener la regularidad en los datos y se evidenció un retroceso.

Durante la fase de matematización, las tareas de identificación de tendencia (T4-T6) y función de los parámetros (T7-T10) marcaron diferencias significativas. En T4, Juliana fue la única en describir acertadamente el crecimiento no lineal del área, proponiendo la

variación acelerada, de esta manera tendiendo al nivel de abstracción matemática, mientras sus compañeros se mantuvieron en niveles procedimentales. La interpretación gráfica (T5) resultó más accesible, con tres estudiantes logrando abstracción al analizar la forma parabólica, lo que confirma el valor de las representaciones visuales en GeoGebra para comprender comportamientos complejos. Sin embargo, la transición al lenguaje algebraico (T6) mostró obstáculos recurrentes, con todos los estudiantes en nivel intuitivo, pero que en sí fue un resultado esperado, dado que no contaban con las herramientas necesarias para lograrlo. La exploración de parámetros (T7-T10) permitió avances notables: A excepción de Sofía, la mayoría comprendieron el efecto de ' a ' en la concavidad (T7) con niveles procedimental/abstracto, mientras que la confusión de Mateo en T8 sobre el parámetro ' b ' ("inclinación" vs. desplazamiento) reveló un desafío conceptual común en la modelación cuadrática.

En las fases finales de trabajo matemático y validación, la aplicación del modelo (T11-T13) y su ajuste contextual (T15) destacaron tanto logros como dificultades. Los cuatro estudiantes se acercaron en el ajuste gráfico (T11), cuya finalidad no era evaluar un nivel de comprensión individual, sino permitirles explorar y acercarse a la obtención del modelo, correlacionando datos empíricos con la función de los parámetros previamente explorada. En T12-T13, la mayoría de ellos logró estimar valores con nivel procedimental avanzado, aunque con intervención guiada del investigador. Ya en la validación del modelo (T15), Sofía y Andrea identificaron de manera autónoma la necesidad de restringir el dominio a valores positivos, mostrando transferencia al contexto real, mientras Juliana y Mateo requirieron apoyo para esta reflexión, lo que subraya las dificultades en la fase de interpretación señaladas por Londoño y Muñoz (2011).

Estos hallazgos resaltan tres aspectos didácticos clave: **1)** La mediación tecnológica (GeoGebra) fue esencial para la comprensión gráfica, pero insuficiente para la transición hacia lo algebraico; **2)** Las discusiones grupales permitieron a estudiantes como Andrea demostrar mayor claridad en su comprensión a diferencia de lo expuesto de manera escrita e individual; y **3)** La formalización como nivel de comprensión resultó ser una fase crítica, ningún estudiante pudo plantear conjeturas sobre la variación (T14 no realizada), evidenciando que el paso a este nivel requiere intervenciones específicas y más escalonadas, además de contar con el tiempo suficiente para abordarlas.

La actividad confirmó que, aunque el ciclo de modelación facilitó el desarrollo de comprensión funcional, persisten retos en la generalización de patrones y el manejo algebraico, particularmente en funciones cuadráticas. Esto sugiere la necesidad de complementar estas secuencias con actividades específicas para fortalecer el razonamiento abstracto y las conexiones entre representaciones, siempre ancladas en contextos auténticos que den significado a los conceptos matemáticos.

6. Conclusiones Generales del Estudio

Esta investigación logró caracterizar los niveles de comprensión matemática alcanzados por estudiantes de undécimo grado mientras realizaban actividades de modelación con el apoyo de GeoGebra. Basado en el ciclo de modelación de Blum y Borromeo (2009), citados en Londoño y Muñoz (2011) y los niveles de comprensión de Herscovics y Bergeron, citados en Contreras

(1994), el estudio reveló avances significativos en el pensamiento matemático al trabajar con funciones lineales y cuadráticas en contextos reales.

En el caso de las funciones lineales, los estudiantes demostraron capacidad para identificar variables, establecer relaciones y transitar entre representaciones tabulares, gráficas, algebraicas y verbales, alcanzando en muchos casos el nivel de abstracción matemática. Como señalan Londoño y Muñoz (2011), esta habilidad para transitar entre diferentes representaciones es fundamental para una comprensión profunda. Casos como el de Juliana en la Actividad 1 demostraron cómo los estudiantes pueden aproximarse al nivel de formalización cuando las actividades fomentan la identificación de patrones y formulación de conjeturas basadas en evidencias experimentales.

Para el caso de las funciones cuadráticas, el proceso presentó mayores dificultades, particularmente en las fases de matematización y trabajo matemático del ciclo de modelación, así como la transición hacia el nivel de formalización. Los niveles de comprensión mostraron mayor variabilidad entre los estudiantes, aunque el uso estratégico de GeoGebra ayudó a superar parcialmente estas dificultades al permitir la visualización de conceptos complejos como la concavidad y los parámetros de la función. Estos hallazgos respaldan lo planteado por diversos autores sobre el valor de las representaciones visuales en el aprendizaje de matemáticas avanzadas.

Así mismo, el pilotaje permitió confirmar las expectativas planteadas en el análisis a priori y evidenció de manera general los aspectos en los que los estudiantes presentaron mayores dificultades. Se identificaron patrones de comprensión más consistentes en actividades lineales, mientras que las cuadráticas mostraron mayor variabilidad, especialmente en las fases de matematización y formalización. Estos hallazgos guiaron ajustes en las tareas y reforzaron la necesidad de estrategias de apoyo más explícitas, como la validación de conjeturas, la discusión

sobre dominios y la comparación de tasas de cambio, sin entrar en detalles específicos por actividad.

En concordancia con el análisis a priori, los avances más sólidos se observaron en el manejo de representaciones lineales y en la capacidad para establecer relaciones entre variables, mientras que las funciones cuadráticas requirieron un andamiaje adicional que facilitara la transición hacia niveles de comprensión más avanzados. La observación general del pilotaje permitió ajustar la secuencia didáctica para equilibrar los desafíos conceptuales con el potencial de aprendizaje, manteniendo un enfoque en la visualización, la interacción y la construcción progresiva del conocimiento.

Tanto el análisis a priori como el pilotaje proporcionaron información valiosa sobre la eficacia de la propuesta didáctica y la adaptación de las actividades a las capacidades de los estudiantes. Esta evidencia respalda la pertinencia de la modelación matemática con apoyo tecnológico como estrategia para desarrollar comprensión conceptual profunda, al tiempo que resalta la importancia de diseñar tareas flexibles que anticipen dificultades y permitan ajustes metodológicos en contextos educativos reales.

Más allá de los aspectos conceptuales, el estudio identificó retos prácticos significativos. Las limitaciones tecnológicas en las instituciones educativas, sumadas a la frecuente interrupción de clases, configuraron un escenario que dificultó la implementación completa de la secuencia didáctica. Estas condiciones, típicas del sistema educativo público colombiano, plantean interrogantes importantes sobre cómo diseñar propuestas de modelación matemática que sean robustas ante condiciones adversas, sin sacrificar su potencial educativo.

Desde la perspectiva didáctica, los resultados sugieren que la integración de herramientas digitales en la modelación matemática potencia la comprensión conceptual cuando: (1) se fundamenta en un marco teórico sólido que guíe las transiciones entre representaciones, (2) incluye actividades explícitas para promover el progreso entre niveles de comprensión, y (3) anticipa obstáculos tanto conceptuales como logísticos. El uso de los niveles de comprensión como marco teórico resultó particularmente valioso para analizar no solo lo que los estudiantes pueden hacer, sino cómo construyen progresivamente su comprensión.

La experiencia evidenció que las interacciones entre estudiantes e investigador fueron importantes para consolidar aprendizajes, aunque requieren mayor estructuración para optimizar su potencial. Implementar reglas claras podría mejorar estas discusiones, permitiendo una comparación más efectiva de ideas y una construcción más organizada del conocimiento en conjunto.

Los hallazgos apuntan hacia la necesidad de diseñar secuencias didácticas más flexibles y accesibles, posiblemente organizadas en módulos que combinen fases tecnológicas con materiales físicos, siempre conservando el enfoque visual e interactivo. Este enfoque permitiría mantener la esencia metodológica incluso en condiciones menos favorables.

La investigación demuestra que, con los ajustes adecuados, la modelación matemática sigue siendo una estrategia poderosa para el estudio de conceptos fundamentales como las funciones. El desafío futuro consiste en desarrollar versiones más adaptables de esta metodología, capaces de conservar su rigor conceptual y potencial para desarrollar pensamiento matemático profundo, incluso en contextos con limitaciones de tiempo o recursos.

Referencias Bibliográficas

Almonacid, A. (2018). *Modelización de funciones cuadráticas: Espacio de trabajo matemático personal de estudiantes de humanidades* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio Institucional PUCP.

Araya Chacón, A. M., Monge Sánchez, A., & Morales Quirós, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: Niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 7(2).
<https://doi.org/10.15517/aie.v7i2.9274>

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *International Journal for Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.

Cruz, J., & Medina, Y. (2013). Funciones en contexto: Una experiencia enriquecida en la modelación y simulación interactiva. *Revista S&T*, 11(26), 59–80.

González, R., & Castañeda, A. (2023). Aprender funciones como un proceso de matematización progresiva: Estudiantes de secundaria enfrentando una secuencia didáctica de caída libre. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 26(2), 147–175.

Guerra, Y., & Leyva, J. (2013). El uso del software “Tracker” en la enseñanza experimental de la matemática. *Revista Varela*, 2(35), Mayo–Agosto.

Jácome, I. (2019). *Matematización del teorema fundamental del cálculo con el uso de tecnologías digitales* [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio UIS.

León, M. (2015). *Una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de funciones lineales* [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio CINVESTAV.

Londoño, S., & Muñoz, L. (2011). *La modelación matemática: Un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables* [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio UdeA.

Martínez Reyes, J., Soberanes Martín, E., & Sánchez Soto, G. (2018). La importancia de la variación en el aprendizaje del concepto de función. *Programa de Matemáticas*, 10(2), 55–68.

Mesa, Y. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2008). La importancia de Galileo en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 922–930. Colegio Mexicano de Matemática Educativa.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*.

Molina González, M., Castro Martínez, E., Molina González, J. L., & Castro Martínez, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>

Pantoja Rangel, R., Guerrero Magaña, M. L., & Ulloa Azpeitia, R. (2018). La modelación matemática en situaciones problema de la vida cotidiana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(2), 1–18.

Pépin, R., & Dionne, J. (1997). La compréhension de concepts mathématiques chez des élèves anglophones en immersion française au secondaire. *Éducation et francophonie*, 25(1), 85–110. <https://doi.org/10.7202/1080651ar>

Roldán, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal: Propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio UNAL.

Suárez Téllez, L., & Cordero Osorio, F. (2010). Modelación–graficación, una categoría para la matemática escolar: Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 13(1), 7–40.

Tall, D. (1997). Functions and calculus. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics* (pp. 235–264). Psychology Press.

Tolosa, S. (2022). *Contribuciones de la modelación matemática al estudio del concepto de integral* [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio UIS.

Torres Bezaury, A. M. E. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología* [Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio IPN.

Vargas, L. (2016). Laboratorio tecnológico para la construcción de lo cuadrático con la implementación del software aplicativo libre Tracker. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 29(1), 91–103.