

**MODELADO MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN DE UNA PLATAFORMA DE 6  
GRADOS DE LIBERTAD (PLATAFORMA STEWART- GOUGH)**

**GERARDO GONZÁLEZ SUÁREZ**

**ANDREA LILIANA VARGAS VARGAS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍA FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA  
BUCARAMANGA**

**2013**

**MODELADO MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN DE UNA PLATAFORMA DE 6  
GRADOS DE LIBERTAD (PLATAFORMA STEWART- GOUGH)**

**GERARDO GONZÁLEZ SUÁREZ**

**ANDREA LILIANA VARGAS VARGAS**

**Trabajo de grado para optar el título de  
Ingeniero Mecánico.**

**Director**

**CARLOS BORRAS PINILLA**

**Ingeniero Mecánico**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA  
BUCARAMANGA**

**2013**

## DEDICATORIAS

*Dedicado a todas aquellas personas que han estado presentes  
y me han apoyado de alguna u otra manera durante esta etapa de mi vida,  
en especial a mi madre Carmen Eliza Suarez por su gran esfuerzo.*

**GERARDO GONZÁLEZ SUÁREZ**

*Dedicado con gran cariño a mi familia y a ti,  
por el apoyo incondicional en este tiempo.*

**ANDREA LILIANA VARGAS VARGAS**

## **AGRADECIMIENTO**

Los autores del proyecto agradecen a todas las personas que intervinieron en el desarrollo del mismo, especialmente:

A Carlos Borrás Pinilla, Ingeniero Mecánico, director de proyecto.

## CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN.....	21
1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA .....	23
1.1 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA .....	23
1.2 JUSTIFICACIÓN PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA.....	26
1.3 OBJETIVOS .....	29
1.3.1 Objetivo General .....	29
1.3.2 Objetivos Específicos .....	29
2. MARCO TEÓRICO .....	31
2.1 INTRODUCCIÓN .....	31
2.2 CONTEXTO HISTÓRICO DE LOS ROBOTS PARALELOS .....	32
2.3 Robótica PARALELA .....	38
2.3.2 Robots paralelos planares .....	38
2.3.3 Robots paralelos espaciales .....	39
2.4 PLATAFORMA STEWART .....	41
2.5 ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LA PLATAFORMA STEWART.....	43
2.6 ANÁLISIS CINEMÁTICO .....	44
2.6.1 Cinemática Inversa .....	45
2.6.2 Cinemática Directa .....	45
2.7 ANÁLISIS DINÁMICO .....	46
2.7.1 Método de Newton-Euler .....	47

2.7.2	Formulación de Lagrange .....	48
2.7.3	Otros métodos .....	49
2.8	APLICACIONES .....	49
3.	MODELADO DE LA DINÁMICA INVERSA .....	54
3.1	COORDENADAS GENERALIZADAS .....	55
3.1.1	Determinación de la posición .....	56
3.1.2	Determinación de la orientación.....	57
3.2	ANÁLISIS CINEMÁTICO .....	59
3.2.1	Posición Vectorial .....	59
3.2.2	Parámetros angulares de la plataforma móvil .....	63
3.2.3	Parámetros cinemáticos en la plataforma móvil .....	66
3.2.4	Parámetros cinemáticos en el actuador .....	68
3.3	ANÁLISIS DINÁMICO .....	71
3.3.1	Dinámica del actuador .....	74
3.3.2	Dinámica de la plataforma móvil .....	84
3.3.3	Ecuación dinámica de la plataforma Stewart-Gough.....	87
3.4	MODELADO EN MATLAB DE LAS ECUACIONES PLANTEADAS .....	96
4.	PLANTEAMIENTO DE LA DINÁMICA DE LA PLATAFORMA STEWART-GOUGH UTILIZANDO SOFTWARE DE SIMULACIÓN .....	99
4.1	INTRODUCCION .....	99
4.2	ESTUDIO EN SIMMECHANICS .....	100
4.2.1	SimMechanics y el modelo físico .....	100

4.2.2	Características de SimMechanics.....	100
4.2.3	Simulación y análisis del movimiento mecánico.....	101
4.2.4	Capacidades de SimMechanics.....	101
4.3	DIAGRAMA DE BLOQUES EN MATLAB-SIMULINK .....	102
4.3.1	Características.....	102
4.3.2	Bloques comúnmente usados en Simulink .....	102
4.3.3	Sinks-Visualizadores .....	103
4.4	INICIACION DE SIMMECHANICS .....	103
4.5	BLOQUES MÁS USADOS EN SIMMECHANICS .....	106
4.5.1	Bloque de tierra .....	106
4.5.2	Bloque de entorno .....	106
4.5.3	Bloque de cuerpo.....	107
4.5.4	Bloque de junta.....	109
4.5.5	Bloque de Sensores y Actuadores.....	110
4.6	TRADUCTOR CAD-SIMULINK DE MATLAB.....	111
4.6.1	Exportando un ensamble .....	112
4.6.2	Instalación del traductor CAD a SimMechanics .....	113
4.6.3	Descargar el traductor .....	113
4.6.4	Procedimiento para exportar un archivo XML de la plataforma CAD Solidworks .....	114
4.6.5	Procedimiento para importar un archivo XML a SimMechanics .....	116
4.7	MODELADO FÍSICO MULTIDOMINIO EN SIMULINK .....	117
4.8	BLOQUES SENSORES Y ACTUADORES .....	119

4.8.1	Sensores .....	120
4.8.2	Actuadores .....	120
4.9	SIMULAR Y OBSERVAR EL MOVIMIENTO DE LA PLATAFORMA.....	120
4.10	MODELADO DEL MECANISMO PARALELO DE 6 GDL .....	122
4.10.1	Bloque Trayectoria de los actuadores .....	122
4.10.2	Bloque de Control .....	123
4.10.3	Bloque body position sensor .....	125
4.10.4	Bloque Plataforma .....	126
4.11	INTERFAZ GRAFICA DEL SIMULADOR.....	129
5.	CONTROL BÁSICO DE LA PLATAFORMA STEWART-GOUGH.....	130
5.1	INTRODUCCIÓN .....	130
5.2	DEFINICION DEL PROBLEMA DE CONTROL.....	131
5.3	METODOS DE CONTROL DE ROBOTS.....	131
5.3.1	Control clásico.....	131
5.3.2	Método basado en el modelo dinámico del robot.....	133
5.3.3	Métodos adaptativos.....	134
5.4	ELECCION DEL TIPO DE CONTROLADOR .....	137
5.5	IMPLEMENTACION DEL CONTROL DE LA PLATAFORMA (PID CLÁSICO).....	137
5.6	ESTRATEGIA DE CONTROL IMPLEMENTADA .....	139
5.6.1	Control PID simple de bajo nivel.....	140
5.7	PROPUESTA DE diseño PARA LA PLATAFORMA STEWART-GOUGH. ....	148
5.7.1	Diseño conceptual .....	148

6.	CONCLUSIONES .....	151
7.	RECOMENDACIONES .....	152
8.	BIBLIOGRAFIA.....	154
	ANEXOS .....	157

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Plataforma de 6 grados de libertad a simular .....	25
Figura 2. Plataforma diseñada por Gwinnett (1928). Patente 1'789.680 U.S .....	32
Figura 3. Robot paralelo patentado por W.L.V. Pollard .....	33
Figura 4. (a) Máquina Original de Gough (1954) (b) Máquina de Gough actual ....	34
Figura 5. Plataforma Stewart-Gough .....	34
Figura 6. (a) Gráfico del simulador de vuelo patentado por K. L Cappel (b) imagen del simulador de vuelo construido.....	35
Figura 7. Robot tipo Delta a) Tres grados de libertad b) Cuatro grados de libertad .....	36
Figura 8. Diseño del mecanismo de 5 barras.....	38
Figura 9. Robot paralelo planar 3RRR .....	39
Figura 10. Robot Cuatro .....	40
Figura 11. Principales componentes de un robot tipo Stewart .....	42
Figura 12. Plataforma Stewart (a) 6-sps (b) 6-ups .....	43
Figura 13. Plataforma Stewart tipo 6-6 .....	43
Figura 14. Simulador de vuelo utilizado en la década de los 90.....	50
Figura 15. Plataforma Stewart utilizada en un simulador de manejo, por BMW ...	51
Figura 16. Fotografía del robot trepa en su fase de desarrollo .....	52
Figura 17. Focelda posicionada por medio de una plataforma Stewart .....	52
Figura 18. Sistema fijo XYZ, sistema móvil $XpYpZp$ .....	56
Figura 19. Ángulos de Euler Z-Y-X .....	58
Figura 20. Sistema XYZ fijo a la plataforma base, eje Z perpendicular a la misma .....	60
Figura 21. Sistema $XpYpZp$ respecto al sistema móvil, eje $Zp$ perpendicular a la misma.....	60
Figura 22. Descripción vectorial de la plataforma Stewart-Gough.....	61

Figura 23. Rotaciones de Euler .....	64
Figura 24. Proyección de $\theta$ , $\varphi$ y $\psi$ sobre $XYZ$ .....	64
Figura 25. Cinemática del actuador .....	68
Figura 26. Sistema $X * Y * Z *$ con origen en la base y solidario al movimiento del actuador .....	71
Figura 27. Coordenada generalizada para el actuador .....	74
Figura 28. Fuerzas y desplazamientos pequeños en el actuador.....	81
Figura 29. Sistemas coordenadas y vectores posición .....	85
Figura 30. Diagrama de cuerpo libre de la plataforma móvil .....	86
Figura 31. Datos de entrada para solución de sistema de ecuaciones. ....	97
Figura 32. Interfaz creada en MATLAB.....	98
Figura 33. Biblioteca de bloques comúnmente usados .....	102
Figura 34. Biblioteca de bloques de Simulink para visualizar resultados.....	103
Figura 35. Icono de inicio Simulink .....	104
Figura 36. Icono para abrir un nuevo modelo en Simulink .....	104
Figura 37. Ruta para abrir un nuevo modelo.....	104
Figura 38. Ubicación de la librería del SimMechanics.....	105
Figura 39. Bloque de tierra .....	106
Figura 40. Configuración del bloque de entorno .....	107
Figura 41. Ubicación de los sistemas coordenados en un eslabón .....	108
Figura 42. Configuración del bloque de cuerpo.....	108
Figura 43. Sistemas coordenados relacionados por una junta.....	109
Figura 44. Configuración de un bloque tipo junta.....	110
Figura 45. Configuración del bloque Actuador .....	111
Figura 46. Configuración del bloque Sensor .....	111
Figura 47. Proceso de exportar un ensamblaje CAD en un archivo XML.....	112
Figura 48. Proceso de importar un archivo XML en modelo físico de SimMechanics .....	113
Figura 49. Página web para descargar el traductor .....	113
Figura 50. Configuración del complemento SimMechanics.....	114

Figura 51. Forma de guardar archivo XML .....	115
Figura 52. Procedimiento para importar el archivo XML a SimMechanics.....	116
Figura 53. Modelo físico multidominio en SimMechanics, encapsulado de la plataforma.....	117
Figura 54. Modelo físico multidominio en SimMechanics de la plataforma Stewart .....	118
Figura 55. Plataforma diseñada en SolidWorks .....	119
Figura 56. Bloques sensores y actuadores añadidos al actuador de la plataforma .....	120
Figura 57. Configuración de parámetros de la simulación .....	121
Figura 58. Presentación de la plataforma al iniciar la simulación .....	121
Figura 59. Esquema de simulación de la plataforma Stewart-Gough con Simulink .....	122
Figura 60. Sistema de bloques para calcular la trayectoria de cada actuador.....	123
Figura 61. Detalle interno del bloque de Control .....	125
Figura 62. Ventana de configuración del bloque body position sensor.....	126
Figura 63. Detalle interno del bloque Plataforma .....	127
Figura 64. Ventana de configuración del plato superior .....	128
Figura 65. Detalle interno del subsistema pierna .....	129
Figura 66. Esquema de un control clásico PID .....	132
Figura 67. Control clásico PID con pre compensación.....	132
Figura 68. Control feed-forward Compensation .....	133
Figura 69. Control adaptativo con modelo de referencia.....	134
Figura 70. Control adaptativo con identificación de los parámetros del modelo ..	136
Figura 71. Control por aprendizaje.....	136
Figura 72. Esquema de un control clásico PID implementado .....	140
Figura 73. Método de oscilación permanente de Ziegler-Nichols.....	142
Figura 74. Sistema introducido en el bloque de control.....	143
Figura 75. Resultados obtenidos método de oscilación permanente .....	143
Figura 76. Diagrama de control con los parámetros obtenidos .....	145

Figura 77. Respuesta del controlador PID con los parámetros obtenidos .....	145
Figura 78. Respuesta del controlador PID ajustado .....	146
Figura 79. Señales de error obtenidas con los parámetros ajustados del PID ....	147
Figura 80. Geometría de las placas de la plataforma Stewart-Gough .....	149

## LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Investigadores en modelación dinámica. ....	47
Tabla 2. Agrupación de términos en las ecuaciones (2.69) y (2.70).....	89
Tabla 3. Agrupación de términos en las ecuaciones (2.72) y (2.73).....	91
Tabla 4. Agrupación de términos en la ecuación (2.75) .....	93
Tabla 5. Parámetros de ajuste por el método de Ziegler-Nichols para un controlador PID.....	142
Tabla 6. Resultados Obtenidos.....	144
Tabla 7. Parámetros obtenidos del PID sin ajuste manual.....	140
Tabla 8. Parámetros obtenidos del PID ajustada.....	141

## LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO A. SIMBOLOGIA Y ALGEBRA DE MATRICES .....	158
ANEXO B. VARIABLES CINEMATICAS.....	162
ANEXO C. USO DE LA INTERFAZ GRAFICA DEL MODELADO REALIZADO EN MATLAB DE LA CINEMATICA Y DINAMICA INVERSA .....	175
ANEXO D. USO DE LA INTERFAZ GRÁFICA DEL MODELO REALIZADO EN SIMMECHANICS.....	177
ANEXO E. PLANOS .....	185
ANEXO F. SENSORES Y ACTUADORES EN ROBOTICA.....	200

## RESUMEN

TITULO:

**MODELADO MATEMÁTICO Y SIMULACIÓN DE UNA PLATAFORMA DE 6 GRADOS DE LIBERTAD (PLATAFORMA STEWART- GOUGH)**

AUTORES:

**Gerardo González Suárez \*\***

**Andrea Liliana Vargas Vargas \*\***

PALABRAS CLAVES:

**Simulación, Modelado, Plataforma Stewart-Gough, Interfaz, Dinámica Inversa, MATLAB-SIMULINK.**

DESCRIPCIÓN:

El presente proyecto de grado tiene por objetivo realizar el estudio y simulación de una plataforma de 6 grados de libertad (Plataforma Stewart-Gough) que fortalezca la comprensión de las asignaturas: Sistemas dinámicos, Ingeniería de control y el futuro curso de robótica, favoreciendo la investigación tanto en estas ramas de la ingeniería como el Grupo DICBOT.

Este proyecto brindará al grupo de investigación DICBOT y a todas las personas interesadas una herramienta pedagógica que permita contribuir al desarrollo de sus conocimientos sobre robótica y desarrollo en nuevas tecnologías, para así seguir incursionando en estas áreas de grandes aportes e importancia para la ingeniería y por ende la sociedad.

Para el desarrollo del proyecto de grado se realizó el modelado tanto cinemático, como dinámico inverso de la plataforma Stewart-Gough esta última empleando la combinación de los métodos de Newton-Euler y Lagrange, se desarrolló por medio de Matlab una interfaz gráfica para el usuario que le permitirá ejecutar la simulación del modelado propuesto, a partir de diferentes tipos de señales como lo son: señales de pulsos, señales de escalón y señales de onda sinusoidal para de esta forma poder obtener resultados cinemáticos y dinámicos además poder visualizar su comportamiento en 3 dimensiones a través de la implementación del Software de Simulación SimMechanics de Matlab integrado con SolidWorks. Para lograr integrar Matlab y SolidWorks se hizo necesaria la instalación de un complemento en Matlab disponible en la página de Mathworks.

---

\*Proyecto de grado.

\*\*Facultad de ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de ingeniería Mecánica.  
Director Ing. Carlos Borrás Pinilla.

## ABSTRACT

TITLE:

**MATHEMATICAL MODELING AND SIMULATION OF A PLATFORM 6 DEGREES OF FREEDOM (STEWART-GOUGH PLATFORM)**

AUTHORS:

**Gerardo González Suárez \*\***

**Andrea Liliana Vargas Vargas \*\***

KEY WORDS:

**Simulation, Modeling, Stewart-Gough platform, interface, inverse dynamics, MATLAB-SIMULINK**

DESCRIPTION:

This project of grade aims to the study and simulation of a platform with 6 degrees of freedom (Stewart-Gough platform) to strengthen the understanding of the subjects: Dynamic Systems, Control Engineering and the future course of robotics, favoring research in both these branches of engineering as DICBOT group.

This project will provide the research group DICBOT and all interested persons an educational tool that would aid the development of their knowledge of robotics and development in new technologies, in order to continue making inroads into these areas of great contributions and importance for engineering and thus society.

To develop the project grade modeling was performed both kinematic and dynamic inverse of the Stewart-Gough platform the latter using a combination of methods of Newton-Euler and Lagrange, was developed using Matlab graphical interface for the user allowing you to run the proposed modeling simulation, from different types of signals like: pulse signals, signals step and sine wave signals in this way to obtain kinematic and dynamic results also able to view their behavior in 3 dimensions through the implementation of the simulation software Matlab SimMechanics integrated with SolidWorks. To achieve Matlab and SolidWorks integration was necessary to install a plug-in available at Matlab of Mathworks.

---

\*Project of grade.

\*\* Faculty of Physical-Mechanical Engineering School.  
Director Ing. Carlos Borrás Pinilla.

## INTRODUCCIÓN

Un robot paralelo es aquel cuya estructura mecánica está conformada por un mecanismo de cadena cerrada cuyo efector final se une a la base por al menos dos cadenas cinemáticas independiente. Existen gran cantidad de configuraciones de robots paralelos entre las más difundidas y estudiadas está la plataforma Stewart-Gough, constituida por dos placas o plataformas (una fija y una móvil) unidas generalmente por 6 actuadores lineales (articulación prismática) que a su vez se ensamblan por medio de juntas esféricas universales por lo que generalmente se denomina mecanismo 6 DOF-UPS.

Esta plataforma será el centro de investigación de este proyecto de grado en el cual se pretende mostrar el modelamiento matemático tanto de la cinemática como de la dinámica inversa. El modelo dinámico se obtuvo mediante la combinación del método Newton-Euler con la formulación de Lagrange, aplicándola de forma sistemática para así desarrollar las ecuaciones de movimiento. Al mismo tiempo se realizó una simulación que es definida como el “proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias para el funcionamiento del sistema” está en el software MATLAB mediante la cual el usuario podrá interactuar a través de una interfaz gráfica y así observar las distintas simulaciones posibles, a la cual se le implementó un control clásico PID para obtener una mejor respuesta en el tiempo.

La robótica es la ciencia y tecnología que actualmente posee un mayor crecimiento en los grupos de investigación, gracias a estos experimentos y proyectos realizados por algunos inventores y empresas dedicadas al desarrollo de esta tecnología, se logran realizar tareas muy peligrosas o complicadas que un ser humano no podría en condiciones normales.

# 1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

## 1.1 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

La robótica es una de las áreas de investigación que actualmente tiene mayor crecimiento en los grupos de investigación. Estas características hacen que su desarrollo y resultados tecnológicos en el área, tenga más interés en diferentes sectores como la industria, el sector educativo y la industria del entretenimiento.

La aplicación de la robótica en diferentes tareas busca siempre mejores resultados, siendo una aplicación el diseño de sistemas de movimiento o simuladores que poseen mecanismos, sistemas eléctricos, estrategias de control e interfaces graficas que permiten ejecutar movimientos como lo realizaría un sistema real. El desarrollo de estos sistemas de movimiento hace que la simulación sea un componente principal en esta área.

La simulación que es definida como “una técnica numérica para dirigir experimentos en computadores” estos experimentos contienen algunos tipos de relaciones matemáticas y lógicas, que son necesarios para describir la estructura y el comportamiento de una estructura de sistemas complejos.

En la actualidad existen tres principales tipos de robots manipuladores paralelos que son construidos a nivel comercial y que presentan diferentes tipos de aplicaciones, estos son:

- El robot Delta desarrollado por R. Clavel del cual se calcula que existen más de 4000 unidades en funcionamiento a nivel mundial, y es utilizado especialmente en industrias de manipulación de alimentos.

- El robot Tricept patentado por K.N. Neumann del cual se estima que existen cerca de 300 unidades, el cual es utilizado en máquinas herramientas de media precisión e incursionando en el campo de la medicina.
- Plataforma de Gough, más conocida como plataforma Stewart, la cual es el manipulador paralelo más construido con cerca de 20000 unidades y la cual es utilizada para orientación de antenas, telescopios, paneles solares, aislamiento y producción de vibraciones, posicionamiento de microscopios y pacientes, simuladores de vuelo de avión, vehículos elevadores, ensamble de componentes, posicionamiento de piezas y como máquina herramienta de precisión media.

Las características de los robots paralelos frente a los robots tipo serie son: Como inconveniente, tienen menor espacio de trabajo. Como ventajas, la relación masa del robot frente a carga a soportar es mucho menor por lo que admiten mayores aceleraciones durante su movimiento, y por ello, mayores velocidades, también tienen mayor rigidez y precisión ya que soportan la carga por medio de varios brazos en paralelo.

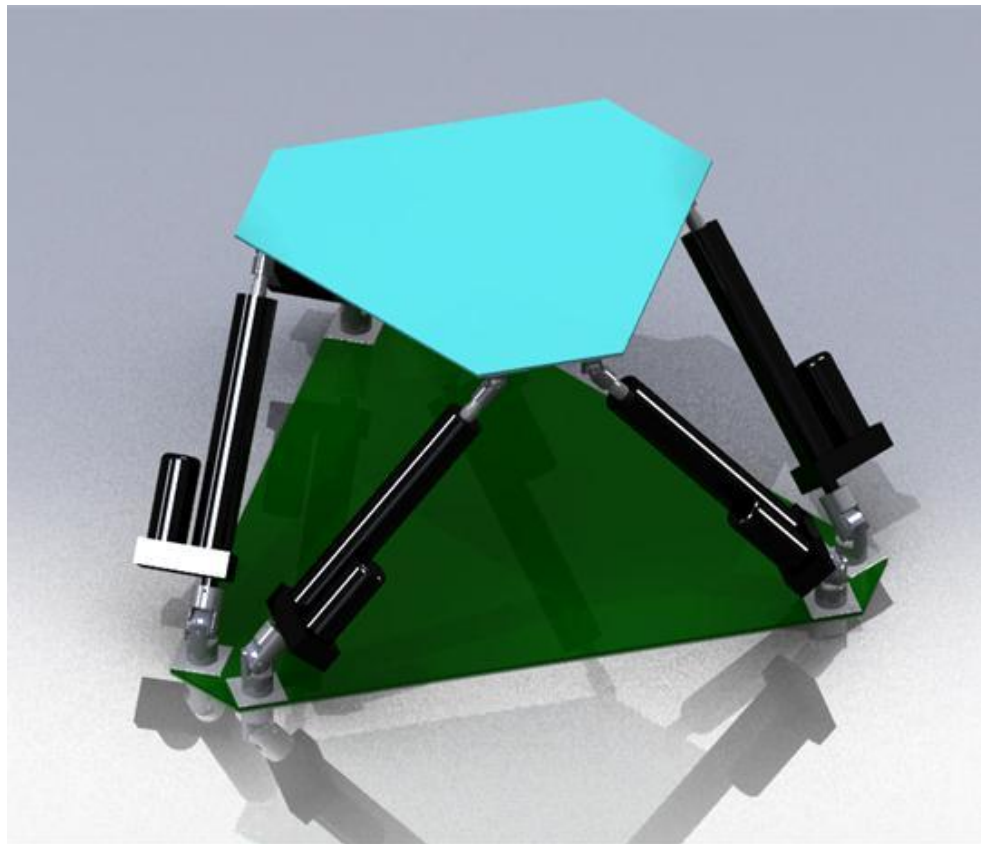
Los simuladores se comenzaron a desarrollar debido a que existen ciertas actividades que son peligrosas de ensayar sin un entrenamiento previo ó que no pueden hacerse de forma segura y que requerirían de equipos con un elevado costo en su valor ó en su operación. Son estas algunas de las razones por las cuales se utilizan los simuladores ya que son herramientas de apoyo para el aprendizaje y perfeccionamiento de habilidades. Esto es debido a que reproducen comportamientos, es decir sensaciones que en realidad no están sucediendo.

Las compañías fabricantes de vehículos de transporte como automóviles, barcos, aviones, entre otros, están interesadas en conocer en gran detalle el comportamiento, en diferentes situaciones de los vehículos que producen, sin la

necesidad de tener que vivir situaciones reales; otras en cambio requieren un sistema con el cual las personas interesadas en lograr un buen desempeño en dichos vehículos ó maquinas puedan obtener habilidades sin la necesidad de estar expuestos a situaciones de peligro reales.

La simulación computacional es una herramienta básica y necesaria para el diseño y construcción de prototipos o máquinas mecatrónicas. Para generar un simulador representativo de la realidad es necesario contar con herramientas matemáticas y lenguajes de programación que hagan posible imitar el comportamiento de un sistema.

Figura 1. Plataforma de 6 grados de libertad a simular



Fuente. Autores del proyecto.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA

En el área de la robótica una de las ventajas del software para simulación de robots es la posibilidad de reproducir situaciones que no pueden ser creadas en la vida real debido a su costo o difícil producción. Para diseñar un simulador que tenga la capacidad de imitar movimientos específicos es necesario conocer cuáles son las características de velocidad, aceleración, sus características dinámicas y cinemáticas además de cuáles son sus limitaciones espaciales y finalmente de qué manera pueden ser controlados los diferentes actuadores para realizar las diferentes trayectorias planteadas.

Uno de estos simuladores, los de conducción son cada vez más usados para entrenar a conductores en todo el mundo. Los estudios han demostrado que estos simuladores son excelentes herramientas para una educación efectiva y un excelente campo de prácticas. Los simuladores pueden ser una solución económica en los casos donde la alternativa (coche, camión, autobús etc.) es mucho más cara. Una clara ventaja es la reducción de riesgos para el conductor cuando se enfrenta a un escenario complejo el cuál podría ser peligroso cuando se aplica en un ambiente no-virtual.

Por otro lado, la Robótica tiene un área especial de análisis, esto es, la Robótica Paralela. Los robots paralelos, por sus ventajas con los robots antropomorfos, tiene diversos usos especiales, por ejemplo se aplican en simuladores de vuelo, operaciones médicas o en procesos industriales. Una definición formal de robot paralelo es la siguiente:

*“Un robot paralelo es un mecanismo de cadena cerrada constituido por un órgano terminal de “n” grados de libertad y una base fija unidos entre sí por cadenas cinemáticas independientes. Cada cadena consta a lo mucho de dos segmentos articulados. La conexión entre los dos segmentos debe ser por una junta de un grado de libertad. El movimiento del mecanismo es efectuado por “n” actuadores simples, uno por cada cadena”. [MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.]*

Los manipuladores paralelos requieren de un estudio más detallado en el contexto de las aplicaciones robóticas a la vista de las ventajas en cuanto a rigidez y precisión con respecto a los robots serie convencionales. Además de la excelente relación carga admisible/peso propio, los robots paralelos presentan otras características favorables.

En los últimos años los manipuladores paralelos han llamado la atención dadas las ventajas que ofrecen con respecto a los manipuladores seriales en campos como la medicina y las máquinas-herramienta.

El desarrollo de simuladores es un componente principal en el área de la simulación, la simulación es una técnica numérica para realizar experimentos en los equipos de una forma segura y confiable si el desarrollo del sistema de control lo es.

La plataforma presentada originalmente por Stewart (1965) es una estructura de cinemática paralela que se puede utilizar para controlar o generar movimientos con 6 grados de libertad, tiene aplicaciones en diversos procesos de fabricación y procesos de precisión.

Por otro lado son las universidades, las organizaciones encargadas de generar desarrollos tecnológicos-científicos que jalonen la industria hacia avances que conlleven su progreso, además el estudio de los sistemas mecatrónicos se hace necesario dentro del estudio de la ingeniería mecánica ya que hace parte de nuestra industria que tiende a desarrollarse aún más en esta área, podemos decir que su estudio es por demás justificado y necesario además de que puede llegar a servir de referencia tangible en las asignaturas de sistemas mecatrónicos, ingeniería de control y sistemas dinámicos.

## **1.3 OBJETIVOS**

### **1.3.1 Objetivo General**

- Contribuir al compromiso misional de la universidad industrial de Santander dentro de la cual se tiene como propósito la formación de personas de alta calidad profesional, investigación, desarrollo, la generación y adecuación de conocimientos, realizando el estudio y simulación de una plataforma de 6 grados de libertad (Plataforma Stewart-Gough) que fortalezca la comprensión de las asignaturas: Sistemas dinámicos, Ingeniería de control y el futuro curso de robótica, favoreciendo la investigación en estas ramas de la ingeniería como el Grupo DICBOT.

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

- Realizar el modelo matemático y simulación de una plataforma de 6 grados de libertad. Incluye la cinemática y dinámica de la Plataforma de Stewart- Gough. El modelo dinámico se obtiene mediante la combinación del método Newton-Euler con la formulación de Lagrange, aplicado sistemáticamente para desarrollar las ecuaciones de movimiento.
- Realizar un software de simulación en Matlab-Simulink en base al modelado matemático con el fin de representar el alcance que puede tener el sistema.
- Calcular con base en el análisis cinemático inverso de la plataforma, la respuesta dinámica (Posición, velocidad y aceleración) debida a la señal de excitación deseada ó “Setpoint” para el control de la plataforma Stewart-Gough.

- Ser un precedente a futuros estudios que se realicen entorno a este tema, y de esta manera promover el desarrollo de manipuladores paralelos en general, al servicio del país y la comunidad.
- Proponer un diseño y control de la plataforma Stewart-Gough, las dimensiones comprendidas deben estar en el rango de 100-150 [cm] de largo, 80-120 [cm] de ancho y entre 40-80 [cm] de alto con los cilindros comprimidos.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1 INTRODUCCIÓN

Un robot es una entidad, generalmente electromecánica, multifuncional. La primera referencia conocida de la palabra Robot fue la palabra “robotik” la misma que viene de la obra R.U.R (Rossum’s Universal Robots) del dramaturgo checo KarelCapek en el año de 1921.

En la actualidad la Federación Internacional de Robótica (IFR-ISO 8373) da una definición normalizada para robot industrial, la misma que se indica a continuación

*“Un robot industrial es un manipulador programable en tres o más ejes, controlado automáticamente, reprogramable y multifuncional, que puede estar fijado en un lugar o ser móvil, y cuya finalidad es la utilización en aplicaciones de automatización industrial”.* [Norma ISO 8373].

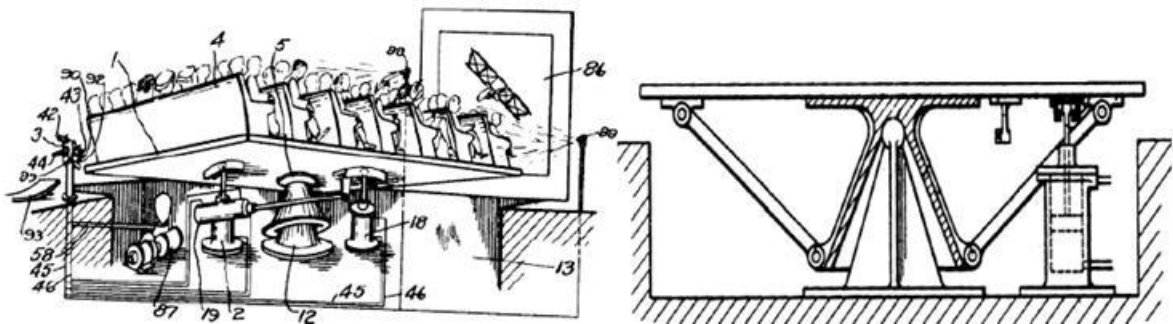
La robótica en general ha tenido una evolución en la historia muy importante, pues gracias a los experimentos y proyectos realizados por algunos inventores y empresas dedicadas al desarrollo de ésta tecnología, han brindado la facilidad de resolver problemas, realizar tareas peligrosas o muy complicadas que un ser humano no podría hacerlas en condiciones normales.

Se puede dividir la historia de la robótica en tres etapas, claramente distinguidas. La primera que hace referencia a hechos o inventos, que para su época podían verse como inútiles, pero que serían precursores de la robótica actual. La segunda etapa donde todo el esfuerzo se concentró en la industria y que puede ser asociada como la revolución industrial de la robótica, donde se definieron las bases sólidas para la robótica existente. La tercera etapa es la actual, donde la robótica ha entrado fuertemente al mercado de consumo, mostrando muchos de los avances que serán comunes en un futuro cercano.

## 2.2 CONTEXTO HISTÓRICO DE LOS ROBOTS PARALELOS

Los primeros trabajos teóricos relacionados con las estructuras mecánicas paralelas aparecieron ya hace siglos, antes de que se empezara a hablar de robots, cuando los primeros ingenieros y dibujantes franceses e ingleses realizaron sus estudios sobre los poliedros y sus aplicaciones. Ya en épocas más recientes, el primer mecanismo paralelo fue patentado en el año 1931. Se trataba de una plataforma de movimiento destinada a la industria del entretenimiento diseñada por James E. Gwinnett, aunque el mecanismo diseñado nunca fue construido.

Figura 2. Plataforma diseñada por Gwinnett (1928). Patente 1'789.680 U.S

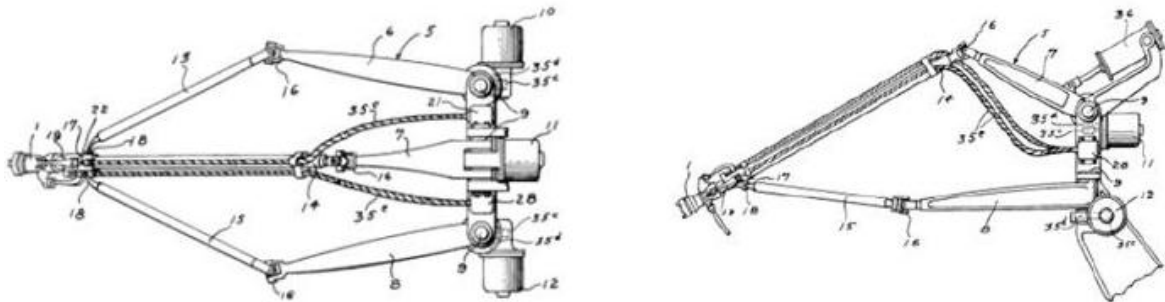


Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

Tiempo después, aparece el primer diseño de robot industrial paralelo. En 1940, Willard L.V. Pollard presentaba un ingenioso robot de 5 grados de libertad destinado a operaciones de pintura con spray. El robot consistía en tres brazos de dos eslabones cada uno. Los eslabones estaban unidos mediante juntas universales. Los tres actuadores de la base comandaban la posición de la herramienta, mientras que la orientación era proporcionada por otros dos

actuadores situados en la base y que transmitían el movimiento a la herramienta mediante la rotación proporcionada a unos cables flexibles.

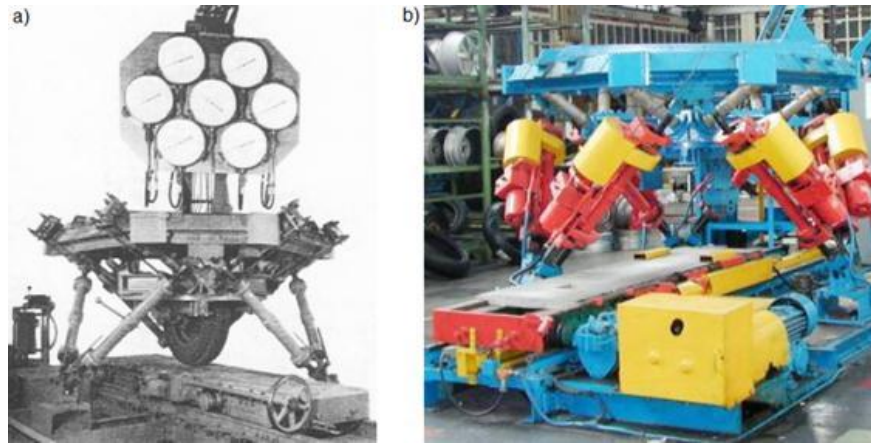
Figura 3. Robot paralelo patentado por W.L.V. Pollard



Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

Sin embargo, han sido otros mecanismos paralelos los que han logrado un mayor reconocimiento general y han contribuido a la aparición de un mayor número de publicaciones sobre la robótica paralela. Por estricto orden temporal, fue el Dr. Eric Gough quien en 1947 inventó la plataforma paralela más popular de todas. El Dr. Gough diseño un octaedro hexápodo con lados de longitud variable como plataforma para la comprobación del comportamiento de los neumáticos de la casa Dunlop para la cual trabajaba, bajo cargas aplicadas en diferentes ejes. De esta forma, intentaba simular el proceso de aterrizaje de un avión. En la actualidad existen multitud de plataformas basadas en este diseño en numerosas empresas, y se conocen bajo el nombre de MAST (Multi-Axis Simulation Table).

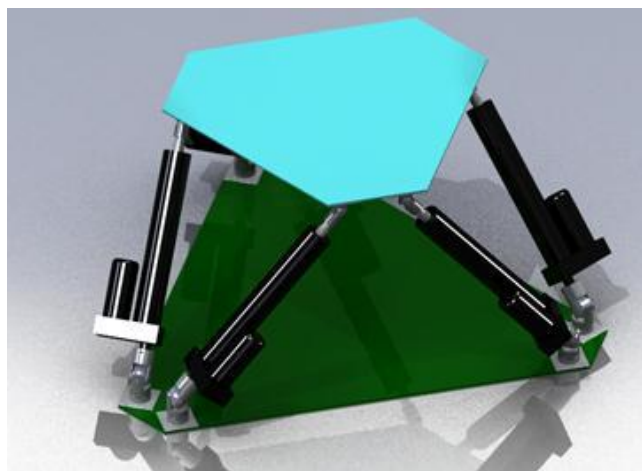
Figura 4. (a) Máquina Original de Gough (1954) (b) Máquina de Gough actual



Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

Ya en 1965, Mr. Stewart, presentó un artículo en el que describía una plataforma de movimiento de 6 grados de libertad destinada a trabajar como simulador de vuelo. El artículo de Stewart tuvo y tiene gran influencia en el mundo académico y se considera como uno de los primeros trabajos de análisis de plataformas paralelas.

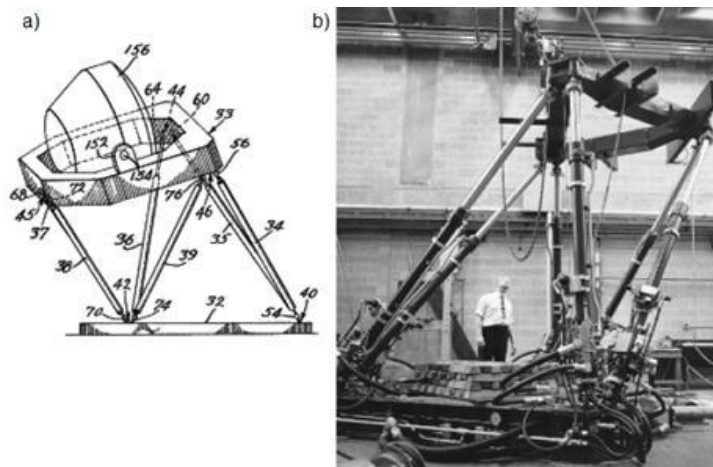
Figura 5. Plataforma Stewart-Gough



Fuente: Autores del proyecto.

Paralelamente, el ingeniero Klaus Cappel realizaba en el Franklin Institute Research Laboratory numerosas investigaciones con plataformas paralelas de 6 grados de libertad. En 1967 Mr. Cappel patentaba un simulador de movimiento basado en un hexápodo, y construyó varias de sus invenciones. Más tarde en 1978, Hunt sugirió que se usaran los mecanismos actuados de forma paralela de los simuladores de vuelo, como robots manipuladores y destacó que los manipuladores paralelos requerían de un estudio más detallado en el contexto de las aplicaciones robóticas a la vista de las ventajas en cuanto a rigidez y precisión con respecto a los robots serie convencionales.

Figura 6. (a) Gráfico del simulador de vuelo patentado por K. L Cappel (b) imagen del simulador de vuelo construido

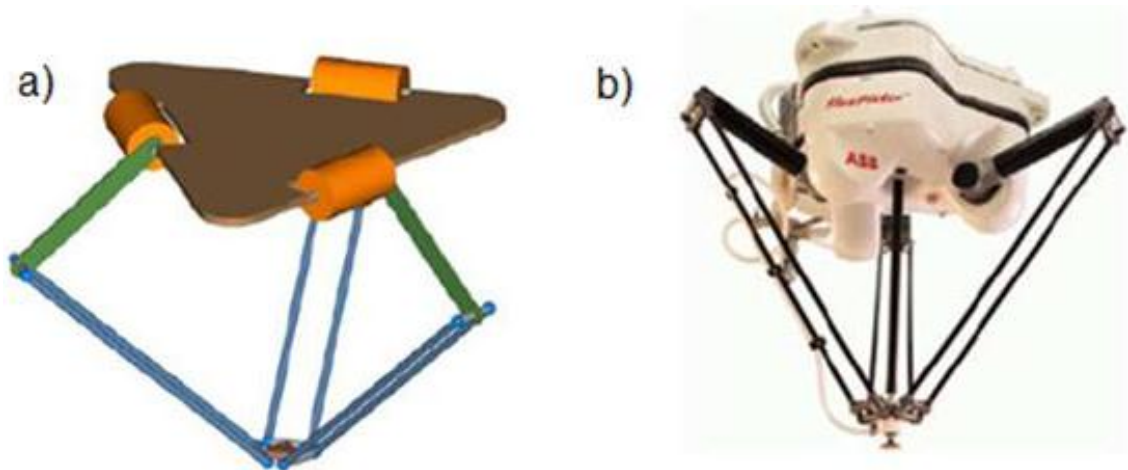


Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

Además de la excelente relación carga admisible/peso propio, los robots paralelos presentan otras características favorables. En 1979, McCallion y Pham fueron los primeros que propusieron usar la plataforma de Stewart como un manipulador paralelo para una célula de ensamblaje robotizada, en particular porque la posición del efector final es mucho menos sensible a los errores que los sensores articulares de los robots en serie. La gran rigidez asegura que las deformaciones

de los actuadores sean mínimas y esta característica contribuye en gran manera a la precisión en el posicionamiento del manipulador. En 1990, Reymond Clavel [8] realizó una modificación al manipulador de Stewart que presentaba desventajas respecto con su difícil análisis en la cinemática y su costo elevado en la fabricación de las uniones esféricas por su exigencia en la precisión a la hora de construirlo. De esta manera surge el manipulador Delta de tres y cuatro grados de libertad, que supera las desventajas antes mencionadas. Este manipulador es un paralelepípedo que cuenta con 3 grados de libertad. En su forma más general, está constituido por una base fija y otra móvil. Éstas se encuentran unidos por 3 cadenas cinemáticas cerradas, conocida cada una como “brazo” del manipulador. Los motores que conducen el plato móvil se encuentran montados en la base fija, de manera que la masa a mover del robot es menor, permitiendo así mayores aceleraciones. Para el Delta de 4 grados de libertad, se le añade un giro a la pinza final. Estos tipos de manipuladores son utilizados principalmente en empresas donde su proceso se basa en la manipulación de alimentos, ya que por su sencillez en la estructura se garantiza una fácil limpieza e higiene.

Figura 7. Robot tipo Delta a) Tres grados de libertad b) Cuatro grados de libertad



Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

En los últimos años los manipuladores paralelos han llamado la atención dadas las ventajas que ofrecen con respecto a los manipuladores seriales en campos como la medicina y las máquinas-herramienta. Esto los ha convertido en un área de investigación y desarrollo con muchos problemas abiertos aún por tratar. Una línea de investigación basada en este tipo de manipuladores debe comenzar comprendiendo a fondo el funcionamiento y complejidad de las estructuras más simples, entre ellas el manipulador delta de tres grados de libertad, que representa una de las estructuras más sencillas y mejor documentadas de los robots manipuladores paralelos.

En la actualidad existen tres tipos de robots manipuladores paralelos que son construidos a nivel comercial y que presentan diferentes tipo de aplicaciones, estos son:

- El robot Delta desarrollado por R. Clavel del cual se calcula que existen más de 4000 unidades en funcionamiento a nivel mundial, y es utilizado especialmente en industrias de manipulación de alimentos.
- El robot Tricept patentado por K.N. Neumann del cual se estima que existen cerca de 300 unidades, el cual es utilizado en máquinas herramientas de media precisión e incursionando en el campo de la medicina.
- Plataforma de Gough, la cual es el manipulador paralelo más construido con cerca de 20000 unidades y la cual es utilizada para orientación de antenas, telescopios, paneles solares, aislamiento y producción de vibraciones, posicionamiento de microscopios y pacientes, simuladores de vuelo de avión, vehículo elevadores, ensamble de componentes, posicionamiento de piezas y como máquina herramienta de precisión media.

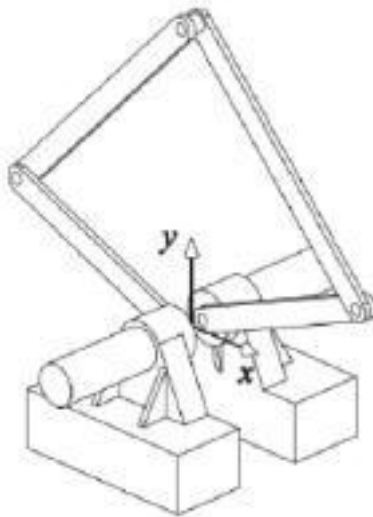
## 2.3 ROBÓTICA PARALELA

En general, los robots paralelos se pueden definir como un mecanismo de cadena cerrada cuyo efecto final está unido a la base por varias cadenas cinemáticas independientes. Estos pueden ser clasificados de acuerdo a diferentes criterios. Uno de los criterios para clasificar a los manipuladores paralelos es por su movilidad, de acuerdo a esto pueden ser planares o espaciales. Dentro de los espaciales se tiene a los mecanismos paralelos esféricos y traslacionales.

### 2.3.2 Robots paralelos planares

El robot paralelo más simple es el mecanismo de cinco barras, posee cuatro escalones que forman un solo brazo en lazo cerrado, se interconectan entre si y la plataforma fija o base mediante cinco articulaciones rotacionales; posee dos grados de libertad y su diseño estructural está representado en la siguiente figura.

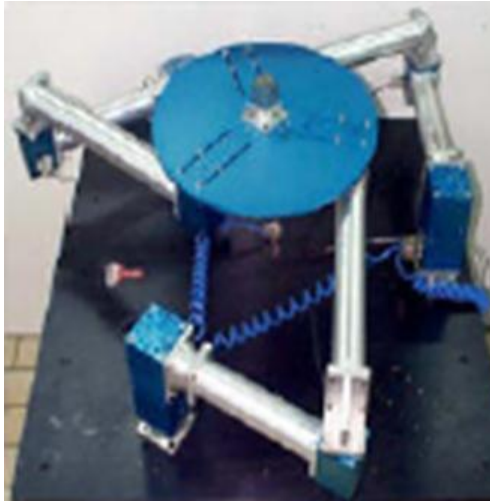
Figura 8. Diseño del mecanismo de 5 barras



Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

Otro tipo de robot paralelo planar es el 3RRR, éste se encuentra formado por tres brazos con tres articulaciones rotacionales, la articulación que está fija en la base debe ser actuada. Este robot cuenta con tres grados de libertad, dos traslacionales y uno rotacional.

Figura 9. Robot paralelo planar 3RRR



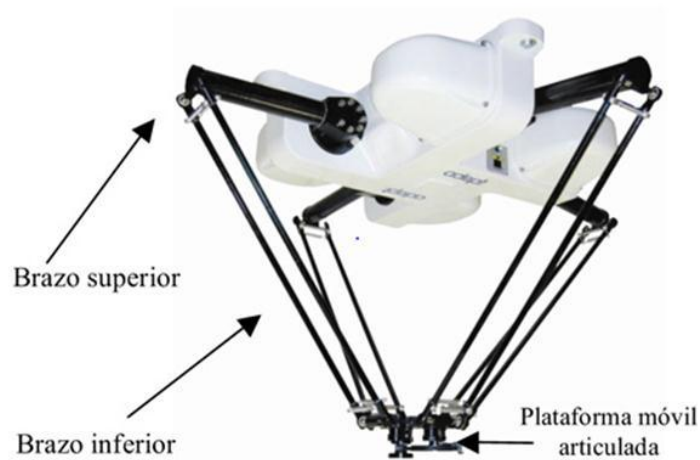
Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

### **2.3.3 Robots paralelos espaciales**

Dentro de los robots paralelos espaciales tenemos la “Plataforma Stewart”, cuenta con seis grados de libertad ver figura 5. En principio fue creada con el fin de realizar simulaciones de vuelo, pero en la actualidad son diversas las aplicaciones que se le dan. Existen diversos tipos de configuraciones para esta plataforma.

El robot DELTA es otro tipo de robot paralelo traslacional y contiene articulaciones esféricas en los paralelogramos que los conforman, es un mecanismo muy similar a la plataforma Stewart.

Figura 10. Robot Quatro



Fuente: <http://www.interempresas.net/MetalMecanica/Articulos/26569-Maquinas-de-cinematica-paralela-implementacion-industrial-y-futuras-tendencias.html>.

La aplicación de las estructuras paralelas permite explotar sus ventajas frente a estructuras seriales como lo son:

- Capacidad de manipular cargas superiores a su propio peso, lo que confiere una alta eficiencia energética: Se podrá ver fácilmente que si se coloca una carga alta en la placa móvil esta se repartirá entre los 6 actuadores de forma que cada uno de ellos soporta una fracción de la carga.
- Mayor precisión: Debido a la disposición de los miembros no se presentan errores acumulados como en el caso de los robots seriales que amplifican las incertidumbres debido al error de posicionamiento de cada uno de los actuadores y a la deflexión de sus miembros.
- Velocidades de operación superiores: Por tener que mover menos inercia, los actuadores se pueden mover mucho más rápido.

- Manejo de varios grados de libertad con pocos componentes: En el caso de los seriales, mayor cantidad de grados de libertad implica la utilización de más miembros en la cadena cinemática, esto no aplica en el caso de los paralelos.

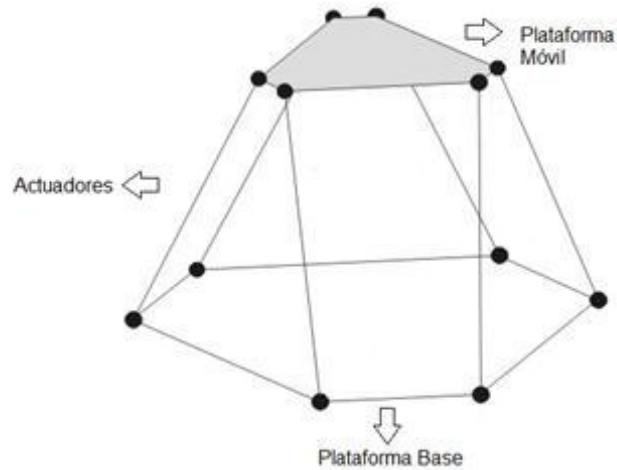
Sin embargo, presentan algunas desventajas como:

- La cinemática de los mecanismos paralelos es más complicada y no se conoce un modelo general como si lo hay para estructuras seriales.
- El espacio de trabajo suele ser más pequeño que el de los seriales y su cálculo no es sencillo.
- El análisis de las configuraciones singulares es más y se debe hacer específicamente para cada configuración.

## **2.4 PLATAFORMA STEWART**

La plataforma Stewart tiene un amplio rango de movilidad, y puede ser posicionada con una elevada precisión. La arquitectura de la plataforma Stewart tal como se conoce en la actualidad consiste en una base fija, y una base superior móvil, conectada en al menos tres puntos con los actuadores lineales. Esta base móvil se conecta con la base fija por medio de 6 actuadores, que a su vez están enlazados mediante articulaciones esféricas en ambos lados o con articulaciones esféricas a un lado y universal al otro.

Figura 11. Principales componentes de un robot tipo Stewart

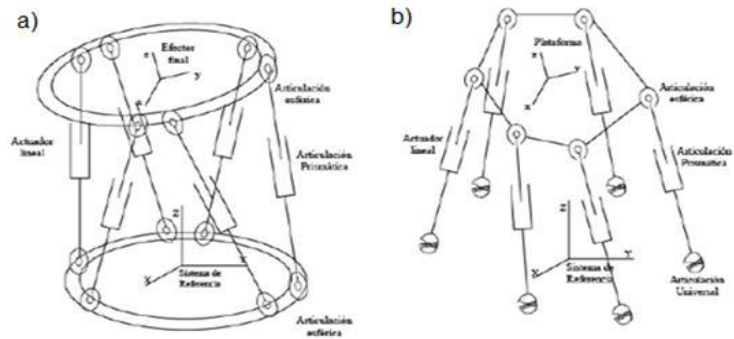


Fuente: Autores del proyecto.

Por su geometría, el diseño de la plataforma Stewart, permite que su plataforma móvil tenga seis grados de libertad (rotación sobre los ejes  $X, Y, Z$  además de traslación en estos mismos), es decir, la placa superior tiene la misma movilidad, que si ésta no tuviera ninguna restricción en el espacio (considerando esto dentro de su espacio de trabajo). A esto debemos añadirle la estabilidad y precisión que, por su estructura mecánica nos brinda este tipo de plataforma.

Existe una gran variedad de configuraciones mecánicas para este tipo de robots, según sea la estructura de las cadenas cinemáticas que unen la base con el efector final. La estructura cinemática con articulaciones esféricas a ambos lados de cada actuador se denota como Plataforma Stewart 6-sps, donde 6 se refiere al número de grados de libertad del robot y sps viene del inglés (spherical-prismatic-spherical). De igual forma, la estructura con articulaciones universales en la base y esféricas en el efector se denota como plataforma Stewart 6-ups (universal-prismatic-spherical). Estas dos estructuras son idénticas salvo que la plataforma 6-sps presenta seis grados de libertad pasivos que permite la rotación de cada cadena cinemática sobre su eje.

Figura 12. Plataforma Stewart (a) 6-sps (b) 6-ups

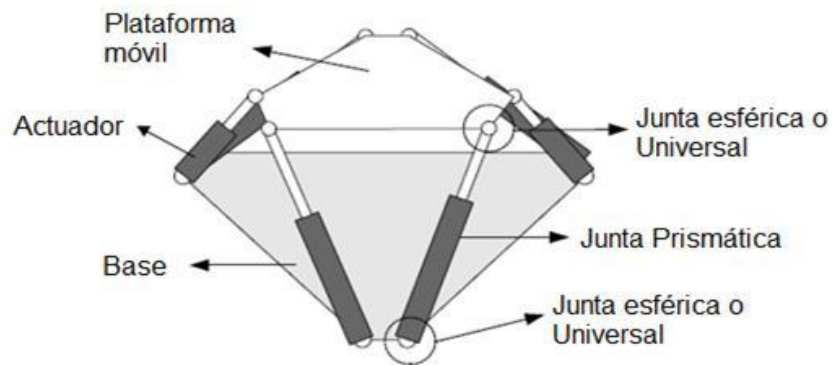


Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

## 2.5 ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LA PLATAFORMA STEWART

El cálculo de los grados de libertad de la plataforma Stewart se basa en la configuración presentada en la siguiente figura.

Figura 13. Plataforma Stewart tipo 6-6



Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

Utilizando el criterio de Grübler, se determina el número de grados de libertad en una plataforma Stewart tipo UPS (universal-prismatic- spherical) a través de la siguiente ecuación:

$$m = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i - I_f \quad (1)$$

Donde:

$m$  Número de grados de libertad del sistema.

$\lambda$  Grados de libertad del espacio donde el mecanismo está;  $\lambda = 3$  si es bidimensional y  $\lambda = 6$  para el caso espacial.

$n$  Número de eslabones fijos del mecanismo incluyendo la base y la parte móvil.

$j$  Número de juntas en el mecanismo.

$f_i$  Grados del movimiento relativos por junta.

$I_f$  Número de grados de libertad pasivos del mecanismo.

Para la plataforma Stewart-Gough los términos de la ecuación tendrán los siguientes valores.

$$\begin{aligned} \lambda = 6; n = 14; j = 18; f_i = 3 \text{ (Juntas esféricas)}; f_i = 2 \text{ (Juntas universales)} f_i \\ = 1 \text{ (Juntas prismáticas)} \end{aligned}$$

Remplazando los valores anteriores en la ecuación (1) se obtiene un valor de seis grados de libertad.

$$m = 6(14 - 18 - 1) + \sum_{i=1}^6 3 + \sum_{i=1}^6 2 + \sum_{i=1}^6 1 = 6$$

## 2.6 ANÁLISIS CINEMÁTICO

La cinemática estudia el movimiento de los robots respecto a un sistema de referencia sin considerar las fuerzas que actúan sobre el sistema, sino únicamente la geometría del mismo.

La cinemática de un mecanismo se divide en dos tipos: cinemática inversa y directa. El cálculo de la cinemática directa de un robot paralelo es complejo debido a los lazos cerrados que contienen; por el contrario, el cálculo de la cinemática inversa es relativamente simple, a continuación se describe brevemente que determina cada una.

### **2.6.1 Cinemática Inversa**

La cinemática inversa determina las coordenadas articulares de cada actuador para una posición y orientación conocidas de la plataforma móvil. Existen varios métodos para el cálculo de la cinemática inversa; Merlet propone dos métodos para este cálculo; uno analítico y otro geométrico. En el caso de los robots paralelos el método geométrico facilita el análisis de la cinemática inversa, está permite determinar una solución para el ángulo que debe rotar el actuador dependiendo de la posición y rotación de la plataforma móvil, con respecto a la plataforma fija.

### **2.6.2 Cinemática Directa**

Sirve para determinar cuál es la posición y orientación final de la plataforma móvil, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conociendo las coordenadas articulares del robot. Se conocen varios métodos para el cálculo de la cinemática directa como por ejemplo iterativos y polinomiales, que son métodos numéricos que requieren cierto tiempo de cálculo para ser realizados. También existen métodos más sofisticados como es la programación de redes neuronales para el cálculo de la cinemática directa de un mecanismo paralelo.

## 2.7 ANÁLISIS DINÁMICO

La cinemática se encarga del análisis del movimiento sin considerar las fuerzas que lo originan, mientras que la dinámica se ocupa del análisis de fuerzas y torques en relación con el movimiento. Por ello es preciso tener claro el concepto de fuerza, momento, y cómo las masas e inercias de los actuadores afectan al análisis dinámico. También es útil tener presente la teoría de cuerpos rígidos entendiendo a su vez los conceptos de trabajo y energía.

La relación entre las fuerzas que actúan en el manipulador y el movimiento del mismo se obtiene mediante el modelo dinámico. El análisis dinámico puede afrontarse en dos sentidos opuestos, la dinámica inversa y la directa. La dinámica inversa consiste en determinar las fuerzas y torques en función del tiempo, requeridos para producir un movimiento a través de una trayectoria deseada, en términos de las posiciones, velocidades, aceleraciones y orientaciones en el tiempo. Por otro lado, la dinámica directa expresa la evolución temporal de la velocidad, aceleración y orientación del manipulador en función de las fuerzas y pares aplicados.

Al igual que los sistemas de cadena abierta (manipuladores seriales), los de cadena cinemática cerrada son actualmente un activo campo de investigación, en el cual los investigadores han ido usando diversos principios de la dinámica para las ecuaciones que modelan el comportamiento dinámico de los manipuladores paralelos, algunos de los más importantes investigadores se aprecian en la siguiente tabla.

Tabla 1. Investigadores en modelación dinámica

<b>Investigador</b>	<b>Año</b>	<b>Principio Dinámico</b>
Do y Yang	1998	Newton-Euler
Dapsgupta y Mruthyunjaya	1998	Newton-Euler
Lebrel et al.	1993	Lagrange-Euler
Miller y Clavel	1992	Lagrange-Euler
Wang y Gosselin	1998	Principio del trabajo virtual
Tsai	2000	Principio del trabajo virtual
Geike y Mcphee	2003	Principio del trabajo virtual

Fuente: Autores del proyecto.

Una forma clásica de calcular la dinámica de manipuladores paralelos es usando un sistema de ecuaciones de restricción mediante los multiplicadores de Lagrange o el principio de D' Alembert. Existen también métodos alternativos de modelación dinámica basados en el trabajo virtual, principio de Hamilton, las ecuaciones de Newton-Euler, entre otras. Y a su vez existen desarrollos en el uso mixto de los formalismos antes mencionados, que como se verá en adelante, es el caso de la presente tesis.

Están también métodos basados en otras leyes de la física como las Ecuaciones de Gibbs-Appell para obtener la dinámica directa de manipuladores paralelos, el principio de D'Alembert generalizado, las ecuaciones canónicas de Hamilton para resolver tanto la dinámica inversa como la directa, entre otras formulaciones.

### **2.7.1 Método de Newton-Euler**

En este método se parte del equilibrio de fuerzas y momentos, que conduce a una formulación recursiva donde se obtienen la posición, velocidad y aceleración del eslabón o elemento  $i$  respecto del sistema de referencia, a partir de los

correspondientes valores del elemento  $i - 1$  y del movimiento relativo de la articulación  $i$ , de tal manera que se parte del eslabón 1 y se llega al  $n$ . Luego se obtienen las fuerzas y momentos actuantes en el elemento  $i$  a partir de los que actúan en el elemento  $i + 1$ , y de esta forma se analiza desde el elemento  $n$  al 1. Se trata de un cálculo “hacia delante” de la propagación de las velocidades y aceleraciones de un eslabón a otro, seguido de un cálculo “hacia atrás” de las fuerzas y momentos existentes en cada articulación. El algoritmo se basa en operaciones vectoriales, con productos escalares y vectoriales, y producto de matrices con vectores. La estructura de las ecuaciones resultantes es bastante compleja dependiendo del número de grados de libertad del sistema.

Este método es aplicado generalmente en el análisis de robots seriales, ya que en el caso de manipuladores paralelos se genera un gran número de ecuaciones, por ello este método es poco eficiente, computacionalmente hablando.

### **2.7.2 Formulación de Lagrange**

Es un método perteneciente a la dinámica analítica, la cual consiste en una serie de técnicas basadas en el tratamiento puramente abstracto y analítico de los sistemas mecánicos. Este tiene la ventaja de considerar la definición de coordenadas generalizadas por el análisis de fuerzas de contacto.

Las coordenadas generalizadas son parámetros que permiten definir un sistema material. En el cuerpo rígido puede obtenerse con las tres coordenadas de un punto y tres ángulos que fijan su orientación en el espacio. Es decir que, en general, se logra la configuración del sistema por medio de un cierto número de coordenadas lineales y angulares a las que se denomina como coordenadas generalizadas.

La formulación de Lagrange se expresa en ecuaciones que relacionan las fuerzas que realizan trabajo virtual con la energía cinética y potencial del sistema, donde el número de ecuaciones de Lagrange generadas es igual a los grados de libertad

del sistema. Para el caso de mecanismos paralelos, se requiere formular las ecuaciones de restricción necesarias que igualen al número de incógnitas, lo cual sugiere que mientras mayor sea la movilidad del mecanismo (mayor grado de libertad), la aplicación del método se complica más.

### **2.7.3 Otros métodos**

El problema dinámico directo de los manipuladores paralelos puede ser resuelto mediante una formulación sistemática basada en las ecuaciones de Gibbs-Appell explícitas, método propuesto por Udwadia y Kabala, donde los eslabones y juntas se consideran rígidos e ideales respectivamente. La formulación permite transformar la resolución del problema dinámico de un sistema mecánico restringido, a la resolución de un sistema conformado por cadenas abiertas, hecho que permite el uso de algoritmos eficientes basados en las ecuaciones de Gibbs-Appell.

Existe otra formulación, como tantas otras, que resuelve la dinámica inversa y directa en base a las ecuaciones canónicas de Hamilton. En general, la dinámica de un mecanismo puede resolverse mediante las distintas teorías de la dinámica analítica, pero la elección de una o más formulaciones usadas en conjunto, dependerá de la aplicación y de la eficiencia computacional requerida.

## **2.8 APLICACIONES**

La realización práctica de prototipos para robots paralelos, ha surgido en función de los desarrollos de su cinemática y dinámica. La gran precisión en el posicionamiento y orientación de la plataforma, ha propiciado su aplicación en muñecas para brazos manipuladores. Los seis grados de libertad hacen que su aplicación sea atractiva en simuladores de vuelo para lo que fueron originalmente usados, simuladores de movimientos ecuestres y aplicaciones de realidad virtual.

También este tipo de plataforma, se les ha utilizado desde mediados de los setentas, en simuladores de vuelos inmersivos. En este tipo de simuladores de vuelo se coloca una cabina real de avión, en la base superior del robot, permitiendo este, que la cabina esté sometida a los mismos movimientos que tendría un avión real. Esto permite al piloto en entrenamiento, tener una sensación mucho más real e inmersiva del comportamiento del avión, a los mandos y controles aplicados.

Figura 14. Simulador de vuelo utilizado en la década de los 90



Fuente: <http://images.yourdictionary.com/evans-sutherland>.

Además de la simulación de vuelo, esta configuración de robot al tener 6 grados de libertad, puede simular el movimiento prácticamente de cualquier transporte, por lo que en algunos casos, es aplicado también a la simulación de manejo de automóviles, o incluso de los transbordadores espaciales.

Figura 15. Plataforma Stewart utilizada en un simulador de manejo, por BMW



Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

Un ejemplo bastante innovador del uso de la plataforma Stewart es el robot “trepa”, desarrollado por el grupo de robots de máquinas inteligentes de la Universidad Politécnica de Madrid. Este robot aprovecha la amplia movilidad de la plataforma debido a sus uniones universales, e implementa un intercambio entre la plataforma fija y la móvil, para poder trepar por estructuras, cuyo acceso es bastante limitado para el ser humano.

Este robot en cada una de sus bases (superior e inferior), tiene un actuador que asegura a cada base una parte de la estructura por la que se está moviendo, generando un movimiento tipo oruga, que le permite acceder sin problema virtualmente a cualquier posición que sea requerida.

Figura 16. Fotografía del robot trepa en su fase de desarrollo



Fuente: <http://sade.disam.etsii.upm.es/trepa/es/project.asp>.

Entre las aplicaciones de uso general, podemos observar un diseño de celda solar, que se auto posiciona para obtener la mayor cantidad de luz posible. Al poseer la plataforma Stewart la capacidad de moverse y rotar sobre sus ejes, se puede obtener siempre una posición perpendicular precisa con respecto a la ubicación del sol, en cualquier instante.

Figura 17. Fococelda posicionada por medio de una plataforma Stewart



Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

En el campo de la robótica industrial, dada la libertad del movimiento de la plataforma Stewart, se está utilizando como muñeca en algunos brazos robot, donde la base móvil de la plataforma se convierte en el portaherramientas del robot. Con esto se añade más movilidad al campo de acción de dicho brazo mecánico.

Entre otras aplicaciones, encontramos que se están utilizando plataformas Stewart en campo que van desde la ubicación de telescopios y antenas parabólicas, hasta cirugía y rehabilitación ortopédica. Las posibilidades de uso de este tipo de robot son ilimitadas debido a su versatilidad y resistencia mecánica.

### 3. MODELADO DE LA DINÁMICA INVERSA

En este capítulo se llevará a cabo el análisis de un mecanismo paralelo, la plataforma Stewart-Gough. Inicialmente se encontrarán las expresiones necesarias de la cinemática para el correspondiente planteamiento de la dinámica, para luego desarrollar el análisis dinámico inverso y de esta forma obtener las fuerzas necesarias en cada actuador para lograr en la plataforma un movimiento determinado.

Tanto el modelo cinemático como dinámico son indispensables en cualquier tipo de mecanismo ya que así es la única forma de llegar a comprender las leyes que rigen su movimiento en el tiempo, actualmente se pueden encontrar diversos planteamientos para obtener los modelos mencionados como lo son las leyes de Newton, el principio del trabajo virtual, la formulación de Lagrange entre otros. Elegir uno o una combinación de modelos dependerá del mecanismo en análisis.

Se realizó una investigación de las distintas formulaciones propuestas que tuvieran relación con el modelamiento dinámico de la plataforma Stewart-Gough, lo cual permitió tener una mejor perspectiva sobre plataformas paralelas, para finalmente escoger una combinación del método Newton-Euler con la formulación de Lagrange, los cuales serán aplicados sistemáticamente para encontrar las ecuaciones de movimiento, así se aprovechan las ventajas que presentan ambos métodos para intentar optimizar la modelación dinámica de la plataforma Stewart-Gough.

El análisis de la dinámica inversa es en el cual la trayectoria, velocidad y aceleración de la plataforma superior son datos conocidos, y las fuerzas que realizan tal movimiento deben ser encontradas, por otro lado la dinámica directa es cuando las fuerzas generadoras de movimiento son conocidas y se debe determinar la trayectoria, velocidad y aceleración de la plataforma móvil al actuar las fuerzas.

Los efectos relacionados con la fricción no se tendrán en cuenta, lo cual permite que el análisis presentado sea mejorado, no obstante dicho efecto no es crítico en manipuladores paralelos debido a que existe cierta compensación del error, en cambio en mecanismos en serie el error se acumula.

La plataforma se encuentra compuesta por seis actuadores unidos en su extremo superior a una plataforma móvil, por lo tanto se tienen seis cadenas cinemáticas cerradas por estudiar. Cada una de ellas posee un movimiento diferente, sin embargo el desarrollo cinemático y cinético es el mismo debido a que los brazos son iguales y están ubicados de forma simétrica.

### **3.1 COORDENADAS GENERALIZADAS**

Con el propósito de describir el movimiento de un mecanismo, se usan coordenadas lineales, angulares o ambas a las cuales se les denomina coordenadas generalizadas y en conjunto se denotan con el término  $q$ . El número de éstas dependerá del número de grados de libertad que tenga el correspondiente sistema.

Para la plataforma Stewart-Gough es importante definir el movimiento de la plataforma móvil, el cual está limitado por el movimiento de los actuadores que están unidos a la plataforma fija o base. Para la localización espacial de la plataforma superior es posible utilizar los parámetros de Denavit y Hartenberg, sin embargo para el mecanismo en estudio, el hecho de que posea seis cadenas cinemáticas dificulta el uso de estos, por esto se prefiere utilizar un enfoque geométrico, definiendo ecuaciones vectoriales para cada actuador.

Por tanto, el análisis para la cinemática y cinética estará fundamentado en un enfoque geométrico aplicando la mecánica vectorial, pero se desarrollará en forma matricial, ya que así es más fácil expresar ecuaciones extensas y complejas de forma compacta, al mismo tiempo brinda la posibilidad de resolver sistemas de ecuaciones lineales de forma simple usando el concepto de matriz inversa, éstas

ventajas son favorables para llevar a cabo la implementación de un modelo final en un sistema de cómputo.

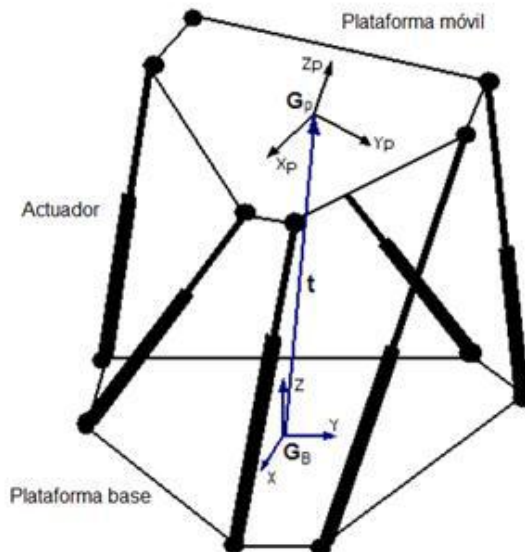
La plataforma móvil posee seis grados de libertad debido a que tiene seis cadenas cinemáticas, por esto se definen seis coordenadas generalizadas que pueden obtenerse con las tres coordenadas de un punto perteneciente a la plataforma móvil y tres ángulos que determinan su orientación en el espacio. Usando la forma matricial, se define el término  $q$  de seis variables describiendo la orientación y posición de la plataforma móvil en el espacio.

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T \quad (2.1)$$

### 3.1.1 Determinación de la posición

La plataforma Stewart-Gough se encuentra compuesta por seis actuadores lineales que forman un octaedro hexápodo, estos se encuentran unidos a una base fija por un lado y por una plataforma móvil al lado opuesto.

Figura 18. Sistema fijo XYZ, sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$



Fuente: MERLET Jean-pierre. Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.

Se determinaron dos sistemas de coordenadas, el sistema  $XYZ$  ubicado en el centro geométrico de la plataforma fija o base, y el sistema  $X_p Y_p Z_p$  ubicado también en el centro geométrico de la plataforma móvil, por ende será suficiente definir la posición del centro geométrico de la plataforma móvil en función del tiempo para esto se define el vector  $t$  referente al sistema  $XYZ$ .

$$t = [x \ y \ z]^T = (q_1 \ q_2 \ q_3) \quad (2.2)$$

### 3.1.2 Determinación de la orientación

Existen varios métodos para especificar la orientación de un cuerpo en el espacio. Por un lado encontramos el método par de rotación, para el cual se necesitan definir tres ángulos, de los cuales dos de ellos se usan para especificar la rotación del cuerpo respecto a dicho eje. Otro método utilizado para definir la orientación en el espacio tridimensional son los ángulos de Euler, pero el usarlo de forma vectorial no es tan viable, por ello se considera la facilidad de representación de estos y su compatibilidad con la composición de matrices, por ende se determina expresarlos mediante matrices de rotación, lo cual si es aplicable en vectores.

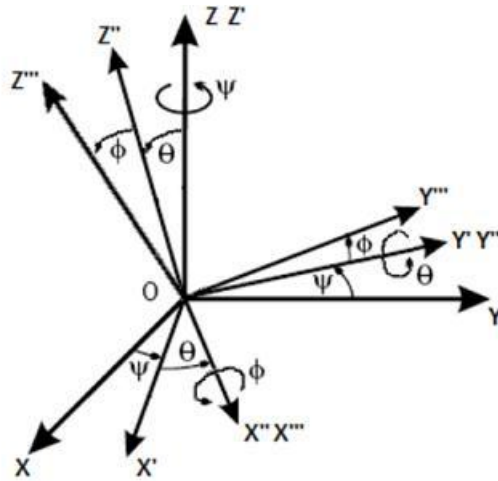
La orientación de la plataforma móvil con respecto al sistema de referencia  $XYZ$  se determina por tres coordenadas generalizadas que a su vez son los ángulos de Euler.

$$K = [\varphi \ \theta \ \psi]^T = (q_4 \ q_5 \ q_6) \quad (2.3)$$

Existen veinticuatro posibilidades formalmente definidas de representar la orientación, la utilizada para el desarrollo de la dinámica inversa será  $ZYX$ , Dicho sistema consiste en rotaciones sucesivas respecto al sistema coordinado que ha girado, y el orden de las rotaciones es el siguiente:

1. Una rotación del ángulo  $\psi$  alrededor del eje  $OZ$  ( $R_{z,\psi}$ ).
2. Una rotación del ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $OY'$  ( $R_{y',\theta}$ ).
3. Una rotación del ángulo  $\varphi$  alrededor del eje  $OX'$  ( $R_{x',\varphi}$ ).

Figura 19. Ángulos de Euler Z-Y-X



Fuente: Autores del proyecto.

En la figura se observa que los ejes resultantes  $X'' Y'' Z''$  al final de las rotaciones sería justamente el sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$ .

La matriz de rotación de Euler se obtiene de multiplicar las rotaciones, ya que se definen respecto al sistema que está rotando [1].

$$R_{z,\psi} R_{y',\theta} R_{x'',\phi} = R_{\psi,\phi,\theta} = \begin{bmatrix} C\psi C\theta & C\psi S\theta S\phi - S\psi C\phi & S\psi S\phi + C\psi S\theta C\phi \\ S\psi C\theta & C\psi C\phi + S\psi S\theta S\phi & S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi \\ -S\theta & C\theta S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Esta matriz se utiliza para transformar un vector definido respecto del sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$  al sistema fijo  $XYZ$ , de esta forma es posible obtener cualquier orientación de la plataforma móvil respecto del sistema coordenado de referencia realizando unas correctas elecciones de los ángulos  $\phi, \theta$  y  $\psi$ .

Se puede definir un vector  $\mathbf{P}$  el cual une el centro geométrico de la plataforma móvil y uno de los vértices del polígono, este se puede definir respecto de  $XYZ$  o  $X_p Y_p Z_p$ , ello dependerá de cómo se proyecte el vector. Si se proyecta al sistema

$X_p Y_p Z_p$  se obtiene  $\mathbf{P}_p$  y si es respecto a  $XYZ$  se obtiene el vector  $\mathbf{P}$ . Sin embargo una forma sencilla de obtener  $\mathbf{P}$  a partir de  $\mathbf{P}_p$  y la matriz de rotación es la siguiente, de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{P}_p \quad (2.5)$$

Donde los vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}_p$  tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{P} = [P_x \ P_y \ P_z]^T \quad (2.6)$$

$$\mathbf{P}_p = [P_{p,x} \ P_{p,y} \ P_{p,z}]^T \quad (2.7)$$

La matriz de rotación  $\mathbf{R}$  corresponde a la orientación del polígono es decir los ángulos de Euler. El vector  $\mathbf{P}$  podría representar una posición, velocidad o aceleración.

### 3.2 ANÁLISIS CINEMÁTICO

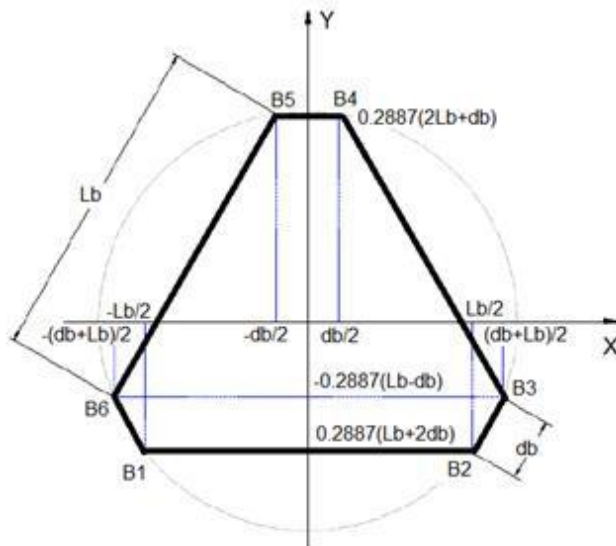
A continuación se llevará a cabo el desarrollo de las expresiones correspondientes a la cinemática que posteriormente se utilizarán en la cinética. En esta sección se deducirán algunos términos indispensables del actuador necesarios para el análisis utilizando el método de Lagrange, y los parámetros cinemáticos de la plataforma móvil que serán utilizados en el planteamiento Newton Euler. El análisis cinemático se definirá mediante vectores y respecto a sistemas coordenados adecuados.

#### 3.2.1 Posición Vectorial

Para el análisis vectorial, lo primero que se debe precisar son los sistemas coordenados y definir la geometría de las plataformas respecto a dichos sistemas para luego poder aplicar la cinemática y cinética de cuerpos rígidos en el espacio.

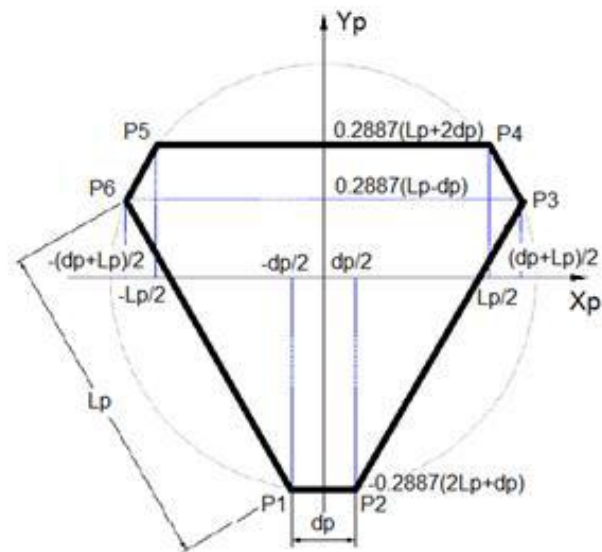
El sistema  $XYZ$  se definió fijo en la plataforma base, este será el sistema de referencia y el sistema  $X_p Y_p Z_p$  se asocia a la plataforma móvil.

Figura 20. Sistema  $XYZ$  fijo a la plataforma base, eje  $Z$  perpendicular a la misma



Fuente: Autores del proyecto.

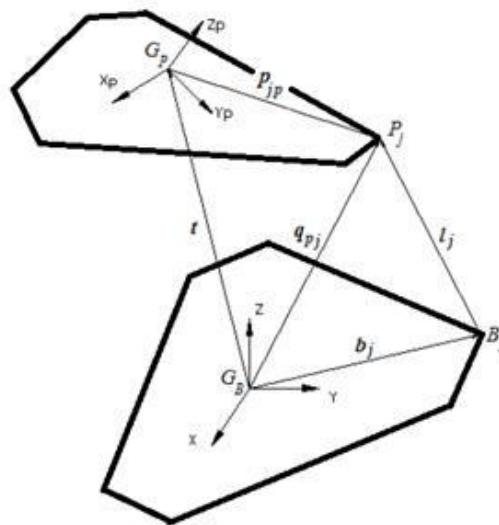
Figura 21. Sistema  $X_pY_pZ_p$  respecto al sistema móvil, eje  $Z_p$  perpendicular a la misma



Fuente: Autores del proyecto.

Las plataformas se encontrarán unidas por los actuadores, de tal forma que los extremos del primer actuador se denotarán de la siguiente forma  $P_1$ ,  $B_1$  y así sucesivamente hasta el sexto. Luego de describir la geometría de las plataformas en el espacio es necesario definir de manera conveniente los vectores que se utilizarán en el planteamiento tanto de la cinemática como de la cinética.

Figura 22. Descripción vectorial de la plataforma Stewart-Gough



Fuente: Autores del proyecto.

A partir del modelo dinámico inverso se desea obtener las fuerzas necesarias en cada actuador para que la plataforma móvil realice un movimiento deseado. Una forma simple de describir el movimiento requerido es definiendo la translación y orientación del sistema  $X_p Y_p Z_p$  en el tiempo mediante las ecuaciones (2.2) y (2.3), éstas ecuaciones forman la matriz de coordenadas generalizadas que es un dato de entrada en la ecuación dinámica final.

A partir de las figuras 21 y 22 se pueden encontrar los vectores  $b_j$ , que indican la posición del extremo fijo del actuador respecto a  $XYZ$ ; y  $p_{jp}$  que es la posición del extremo del actuador unido a la plataforma móvil referida al sistema  $X_p Y_p Z_p$ , donde sus valores son los siguientes:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left[ -0.5L_b \quad -\frac{\sqrt{3}}{6}(L_b + 2d_b) \quad 0 \right]^T \\
b_2 &= \left[ 0.5L_b \quad -\frac{\sqrt{3}}{6}(L_b + 2d_b) \quad 0 \right]^T \\
b_3 &= \left[ 0.5(L_b + d_b) \quad \frac{\sqrt{3}}{6}(L_b - d_b) \quad 0 \right]^T \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_4 &= \left[ 0.5d_b \quad \frac{\sqrt{3}}{6}(2L_b + d_b) \quad 0 \right]^T \\
b_5 &= \left[ -0.5d_b \quad \frac{\sqrt{3}}{6}(2L_b + d_b) \quad 0 \right]^T \\
b_6 &= \left[ -0.5(L_b + d_b) \quad \frac{\sqrt{3}}{6}(L_b - d_b) \quad 0 \right]^T \\
P_{1p} &= \left[ -0.5d_p \quad -\frac{\sqrt{3}}{6}(2L_p + d_p) \quad 0 \right]^T \\
P_{2p} &= \left[ 0.5d_p \quad -\frac{\sqrt{3}}{6}(2L_p + d_p) \quad 0 \right]^T \\
P_{3p} &= \left[ 0.5(L_p + d_p) \quad \frac{\sqrt{3}}{6}(L_p - d_p) \quad 0 \right]^T \tag{2.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{4p} &= \left[ 0.5L_p \quad \frac{\sqrt{3}}{6}(L_p + 2d_p) \quad 0 \right]^T \\
P_{5p} &= \left[ -0.5L_p \quad \frac{\sqrt{3}}{6}(L_p + 2d_p) \quad 0 \right]^T \\
P_{6p} &= \left[ -0.5(L_p + d_p) \quad \frac{\sqrt{3}}{6}(L_p - d_p) \quad 0 \right]^T
\end{aligned}$$

Uno de los objetivos de esta sección es hallar la velocidad y aceleración del extremo móvil del actuador expresado con el símbolo  $P_j$ , siendo este el punto en que se unen el actuador y la plataforma superior. El vector relacionado con dicho punto es el  $q_{pj}$  y puede ser obtenido del diagrama de vectores de la figura 23, a partir de la siguiente ecuación:

$$q_{pj} = t + Rp_{jp} \quad (2.10)$$

De igual manera se obtiene el vector  $l_j$  que representa la longitud del actuador.

$$l_j = q_{pj} - b_j \quad (2.11)$$

### 3.2.2 Parámetros angulares de la plataforma móvil

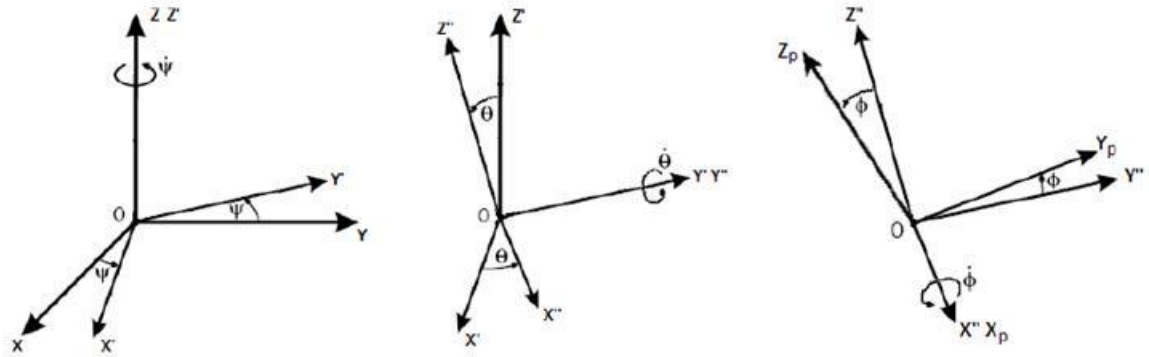
Para hallar el vector velocidad  $\dot{q}_{pj}$  y el vector aceleración  $\ddot{q}_{pj}$  se usa la teoría cinemática de cuerpos rígidos donde es necesario determinar la velocidad y aceleración angular de la plataforma móvil, denotados por  $\omega$  y  $\alpha$  respectivamente, siendo estos vectores usados en el análisis dinámico de Newton Euler.

- **Deducción de la velocidad angular  $\omega$**

No es posible encontrar un conjunto de tres ángulos que especifiquen la orientación de un cuerpo y que sus derivadas respecto al tiempo sean directamente  $\omega_x, \omega_y$  y  $\omega_z$ , debido a que los desplazamientos angulares no se comportan como vectores [5]. Sin embargo es posible analizar el movimiento de cuerpo en términos de ángulos de Euler, para ello las ecuaciones de movimiento angular se deben expresar en función de tales parámetros [1].

Los ángulos de Euler permiten definir la velocidad angular como la rapidez con la que se realizan las rotaciones sucesivas de  $\Psi$  estas respecto al eje  $Z$ , de  $\Theta$  respecto al eje  $Y'$  y  $\varphi$  respecto a  $X''$ . Para visualizar esto, se empieza con el sistema móvil coincidente con el sistema de referencia para después mediante las rotaciones mencionadas, llegar a la orientación definitiva.

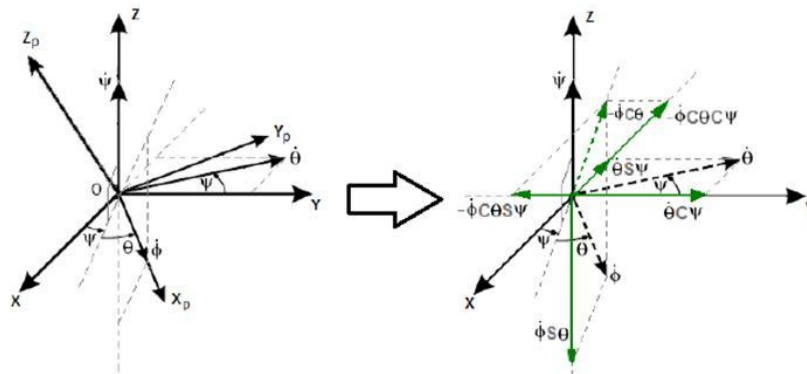
Figura 23. Rotaciones de Euler



Fuente: Autores del proyecto.

El origen del sistema tanto  $XYZ$  como  $X_pY_pZ_p$  pueden ubicarse en un mismo punto como lo indica la figura 25, ya que la traslación del sistema móvil  $X_pY_pZ_p$  no posee ninguna influencia en la deducción del vector velocidad angular, el único interés es la orientación de la misma respecto a  $XYZ$ . Por lo tanto el vector velocidad angular depende del sistema coordenado al cual se proyecten las magnitudes  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$ , si se proyecta en  $X_pY_pZ_p$  se obtiene  $\omega_p$ ; y si es en  $XYZ$  se obtiene  $\omega$ .

Figura 24. Proyección de  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  sobre  $XYZ$



Fuente: Autores del proyecto.

Se puede observar la obtención de  $\omega$  en la figura anterior, y el valor de las componentes en  $XYZ$  será:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi C\theta * C\psi - \dot{\theta} S\psi \\ \varphi C\theta * S\psi - \dot{\theta} C\psi \\ \psi - \varphi S\theta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

De igual manera se obtiene  $\omega_p$ .

$$\omega_p = \begin{bmatrix} \omega_{px} \\ \omega_{py} \\ \omega_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi - \psi S\theta \\ \psi S\varphi C\theta - \dot{\theta} C\varphi \\ \dot{\psi} C\theta C\varphi - \dot{\theta} S\varphi \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Por otro lado la matriz de rotación  $R$  se puede aplicar para obtener  $\omega$  a partir de  $\omega_p$ , de la siguiente forma:

$$\omega = R\omega_p \quad (2.14)$$

Como se puede observar, tanto el vector  $\omega$  como el vector  $\omega_p$  dependen del sistema de rotación escogido, que en este caso es  $ZYX$ , como se ha definido anteriormente. No obstante es posible escoger cualquier sistema de Euler, y la deducción se realiza de la misma forma.

- **Deducción de la aceleración angular  $\alpha$**

La forma más sencilla de obtener la aceleración angular es derivando la ecuación de la velocidad angular respecto al tiempo, de la siguiente manera:

$$\alpha_p = \frac{d}{dt}(\omega_p) = \dot{\omega}_p = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\theta}C\theta - \ddot{\psi}S\theta \\ \ddot{\theta}C\varphi - \dot{\varphi}\dot{\theta}S\varphi - \dot{\psi}\dot{\theta}S\varphi S\theta + \dot{\psi}\dot{\varphi}C\theta C\varphi + \ddot{\psi}C\theta S\varphi \\ -\ddot{\theta}S\varphi - \dot{\varphi}\dot{\theta}C\varphi - \dot{\psi}\dot{\theta}C\varphi S\theta - \dot{\psi}\dot{\varphi}C\theta S\varphi + \ddot{\psi}C\theta C\varphi \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Donde  $\alpha_p$  es la aceleración angular respecto al sistema  $X_p Y_p Z_p$  que corresponde al de la plataforma móvil, para obtener la expresión de la aceleración angular respecto al sistema base se utiliza la matriz de rotación.

$$\alpha = R \alpha_p \quad (2.16)$$

### 3.2.3 Parámetros cinemáticos en la plataforma móvil

A partir de los valores ya obtenidos de las variables angulares, se puede proceder a encontrar los vectores velocidad y aceleración en el punto  $P_j$ , representado por los símbolos  $\dot{q}_{pj}$  y  $\ddot{q}_{pj}$  respectivamente, definidos respecto al sistema base  $XYZ$ .

Se considera la plataforma superior como un cuerpo rígido, de la cinemática se puede obtener la siguiente expresión para  $\dot{q}_{pj}$ .

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + \omega \times R p_{jp} \quad (2.17)$$

Siendo  $\dot{t}$  el vector velocidad del centro geométrico de la plataforma móvil obtenida de derivar el vector posición  $t$ , y se denota de la siguiente forma:

$$\dot{t} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \quad (2.18)$$

De igual manera se obtiene de la cinemática el vector  $\ddot{q}_{pj}$ .

$$\ddot{q}_{pj} = \ddot{t} + \alpha \times R p_{jp} + \omega \times (\omega \times R p_{jp}) \quad (2.19)$$

$\ddot{t}$  es el vector aceleración del centro geométrico de la plataforma y se expresa de la siguiente forma:

$$\ddot{t} = [\ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}]^T \quad (2.20)$$

Las ecuaciones (2.17) y (2.19) describen la cinemática de los puntos  $P_j$  de la plataforma móvil en su movimiento general.

Los vectores velocidad y aceleración también pueden ser obtenidos a partir de los mismo vectores pero referidos al sistema móvil, esto a través de la matriz de rotación  $R$ . Partiendo de la definición de velocidad y aceleración definidas respecto al sistema móvil  $X_p Y_p Z_p$ , de la siguiente forma:

$$\dot{q}_{pjp} = \dot{t}_p + \omega_p \times p_{jp} \quad (2.21)$$

$$\ddot{q}_{pjp} = \ddot{t}_p + \alpha_p \times p_{jp} + \omega_p \times (\omega_p \times p_{jp}) \quad (2.22)$$

Para encontrar los vectores respecto a  $XYZ$ , simplemente se multiplica a cada lado de la ecuación por la matriz de rotación y se obtienen las siguientes ecuaciones matemáticas:

$$\triangleright R\dot{q}_{pjp} = R[\dot{t}_p + \omega_p \times p_{jp}]$$

$$\rightarrow \dot{q}_{pj} = \dot{t} + \omega \times Rp_{jp} \quad (2.23)$$

$$\triangleright R\ddot{q}_{pjp} = R[\ddot{t}_p + \alpha_p \times p_{jp} + \omega_p \times (\omega_p \times p_{jp})]$$

$$\rightarrow \ddot{q}_{pj} = \ddot{t} + \alpha \times Rp_{jp} + \omega \times (\omega \times Rp_{jp}) \quad (2.24)$$

Obteniendo las ecuaciones (2.17) y (2.19), de esta manera queda demostrado que la matriz de rotación de Euler aplica también para velocidades y aceleraciones.

Para introducir  $\dot{q}_{pj}$  y  $\ddot{q}_{pj}$  en el análisis dinámico, se deben encontrar en forma matricial y partiendo de (2.19) y (2.17) se obtiene:

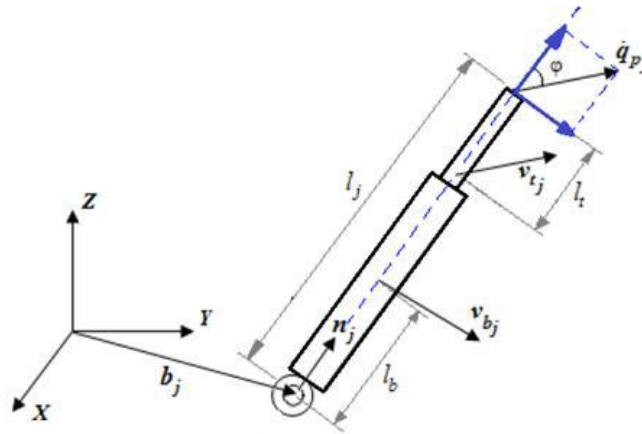
$$\dot{q}_{pj} = [I \quad R\tilde{p}_{jp}^T \quad R^T] \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \omega \end{bmatrix} = [I \quad R\tilde{p}_{jp}^T \quad R^T] \dot{q} \quad (2.25)$$

$$\ddot{q}_{pj} = [I \quad R\tilde{p}_{jp}^T \quad R^T] \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \tilde{\omega}^2 R p_{jp} = [I \quad R\tilde{p}_{jp}^T \quad R^T] \ddot{q} + \tilde{\omega}^2 R p_{jp} \quad (2.26)$$

### 3.2.4 Parámetros cinemáticos en el actuador

Con el objetivo de determinar la expresión de energía del actuador y las fuerzas generadas debido a la masa del mismo, se necesita encontrar el vector velocidad angular del actuador, y los vectores velocidad del centro de masa del vástago y del cilindro. Mostrado en la figura 25.

Figura 25. Cinemática del actuador



Fuente: Autores del proyecto.

Se define:  $l_j$  como el vector longitud del actuador,  $l_j$  como la magnitud y  $n_j$  como el vector unitario en el eje axial del actuador.

$$l_j = q_{pj} - b_j \quad (2.27)$$

$$l_j = \sqrt{l_j^T l_j} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{n}_j = \frac{l_j}{l_j} \quad (2.29)$$

Para hallar la expresión de la fuerza generalizada, se utiliza la magnitud de  $\dot{l}_j$  que significa la velocidad del actuador a lo largo del eje axial, el cual se obtiene directamente de la figura 25 mediante el producto punto entre  $\mathbf{n}_j$  y  $\dot{\mathbf{q}}_{pj}$ .

$$\dot{l}_j = \mathbf{n}_j^T \dot{\mathbf{q}}_{pj} \quad (2.30)$$

Como observa en la figura 25, la velocidad angular  $\omega_{Lj}$  se determina por la componente  $\|\dot{\mathbf{q}}_{pj}\| \text{sen}(\varphi)$ , de forma que:

$$\|\dot{\mathbf{q}}_{pj}\| \text{sen}(\varphi) = \|\omega_{Lj}\| l_j$$

$$\|\omega_{Lj}\| = \frac{\|\dot{\mathbf{q}}_{pj}\| \text{sen}(\varphi)}{l_j}$$

Usando las propiedades del producto vectorial, se tiene que:

$$\|\dot{\mathbf{q}}_{pj}\| \text{sen}(\varphi) = \|\tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{pj}\|.$$

$$\|\omega_{Lj}\| = \frac{\|\dot{\mathbf{q}}_{pj}\| \text{sen}(\varphi)}{l_j} = \frac{\|\tilde{\mathbf{n}}_j \dot{\mathbf{q}}_{pj}\|}{l_j}$$

Para expresar la velocidad angular como vector de la siguiente forma:

$$\omega_{Lj} = \frac{n_j \times \dot{q}_{pj}}{l_j} = \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j} \quad (2.31)$$

Para deducir  $v_{tj}$  y  $v_{bj}$  se toma como referencia la figura 25, aplicando cinemática de cuerpo rígido se tiene:

$$v_{tj} = \dot{q}_{pj} + \omega_{Lj} \times (-l_t \mathbf{n}_j)$$

$$v_{bj} = \omega_{Lj} \times (l_b \mathbf{n}_j)$$

En el desarrollo de las expresiones de la dinámica, los vectores  $v_{tj}$  y  $v_{bj}$  se necesitan expresar de forma compacta, realizando diversos manejos matemáticos se pueden obtener:

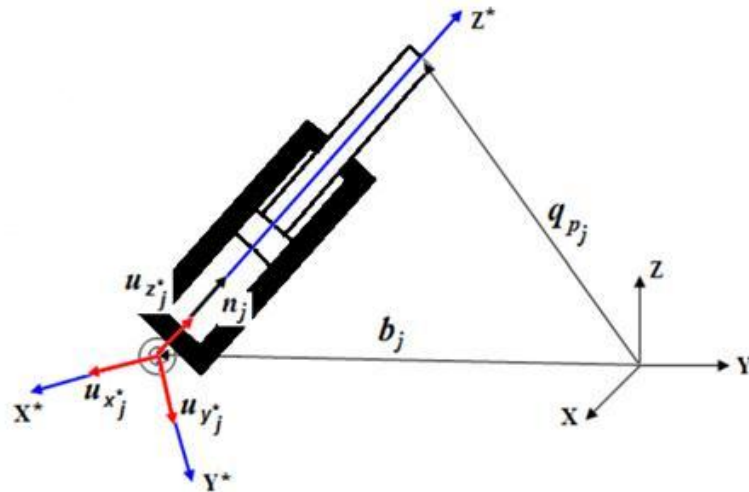
$$v_{tj} = \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \dot{q}_{pj} \quad (2.32)$$

$$v_{Bj} = \left( \frac{l_B \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) \dot{q}_{pj} \quad (2.33)$$

Es posible definir la velocidad angular desde un sistema  $X^*Y^*Z^*$ , con origen en la base del actuador y solidario al movimiento del mismo, para poder utilizar este sistema se deben definir vectores unitarios ortogonales entre sí, de la siguiente forma:

$$u_{x^*j} = \frac{b_j \times q_{pj}}{\|b_j \times q_{pj}\|}; \quad u_{z^*j} = n_j; \quad u_{y^*j} = u_{z^*j} * u_{x^*j}$$

Figura 26. Sistema  $X^*Y^*Z^*$  con origen en la base y solidario al movimiento del actuador



Fuente: Autores del proyecto.

Desde el marco de referencia  $X^*Y^*Z^*$ , el vector velocidad angular se define como  $\dot{\omega}_{Lj}$ .

$$\dot{\omega}_{Lj} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{Lxj} \\ \dot{\omega}_{Lyj} \\ \dot{\omega}_{Lzj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{Lj} \cdot u_{x^*j} \\ \omega_{Lj} \cdot u_{y^*j} \\ \omega_{Lj} \cdot u_{z^*j} \end{bmatrix}$$

### 3.3 ANÁLISIS DINÁMICO

La obtención del modelo dinámico inverso de la plataforma Stewart-Gough se realizará en dos partes, El movimiento que realiza la plataforma superior y el de los seis actuadores lineales, para así obtener la estructura completa de la plataforma, ya que realizar el análisis por un solo método resulta complejo debido a la geometría del mecanismo, por esto se planteó un método para cada parte ya propuesta.

Para los actuadores, se decidió que la fuerza de restricción ubicada en su extremo móvil se obtendría a partir del método de Lagrange, mientras que la dinámica de la plataforma superior o móvil se obtendrá por el método de Newton-Euler.

Ya que la dinámica del actuador se desarrollará por medio de Lagrange, el primer paso a seguir es hallar el valor de la energía cinética del actuador. Por esto se plantean dos métodos el primero que se desarrollará según la dinámica del cuerpo rígido y la segunda que es una ecuación de energía planteada por Guo y Li [6] que propone una simplificación del modelo dinámico del actuador. Por otro lado es importante recordar que los efectos de la fricción no serán considerados en las ecuaciones dinámicas.

- **Energía cinética del actuador**

Se puede considerar al actuador como un cuerpo rígido que se mueve alrededor de un punto fijo en el espacio tridimensional, de esta forma la energía cinética del cuerpo será expresada en función de la velocidad y los momentos de inercia. Sin embargo el vástago presenta un movimiento axial, por esto se debe considerar la energía cinética lineal del centro de masa de este elemento, obteniendo:

$$T_j = \frac{1}{2} v_{tj}^T m_t v_{tj} + \frac{1}{2} \omega_{Lj}^T (I_j) \omega_{Lj} \quad (2.34)$$

En la anterior expresión  $\frac{1}{2} v_{tj}^T m_t v_{tj}$  representa la energía del vástago y  $\frac{1}{2} \omega_{Lj}^T (I_j) \omega_{Lj}$  es la energía del actuador completo es decir cilindro y vástago respecto a un punto fijo. El término  $I_j$  es el tensor de inercia del actuador respecto a su articulación fija y está definido respecto al sistema  $XYZ$ , esto implica que los momentos y productos de inercia son variables e implicaría determinar sus valores en función del tiempo, por tanto es más conveniente utilizar los ejes  $X^*Y^*Z^*$  que posee su origen en la base del actuador, garantizando que los momentos y

productos mantendrán su mismo valor durante el movimiento. De esta forma se redefine la ecuación así:

$$T_j = \frac{1}{2} v_{tj}^T m_t v_{tj} + \frac{1}{2} \omega_{Lj}^{*T} (I_j^*) \omega_{Lj}^* \quad (2.35)$$

Donde  $I_j^*$  es constante y es la suma del tensor de inercia del actuador más el vástago respecto a  $X^*Y^*Z^*$ .

- **Energía cinética del actuador método Guo y Li**

La ecuación 2.35 es bastante compleja puesto que al derivar el término  $\omega_{Lj}^*$  significa un mayor costo computacional, ya que aumenta el número de términos dependientes de  $q_{pj}$  y  $\dot{q}_{pj}$ . Además la ecuación 2.34 tampoco es derivable de forma sencilla ya que  $I_j$  no es contante y depende del vector  $q_{pj}$ . Sin embargo en Guo y Li plantea una expresión de energía que simplifica las operaciones posteriores y permite una factorización de términos de forma conveniente, que simplifican el costo computacional.

$$T_{GUOj} = \frac{1}{2} v_{tj}^T m_t v_{tj} + \frac{1}{2} \omega_{Lj}^T (I_t + I_b) \omega_{Lj} \quad (2.36)$$

En la ecuación (2.36) los términos  $I_t$  e  $I_b$  son las matrices de inercia del vástago y el cilindro respectivamente, y son las componentes del tensor de inercia  $I_j^*$  donde el actuador se modela como un cuerpo de revolución macizo.

$$I_j^* = \begin{pmatrix} I_x^* & 0 & 0 \\ 0 & I_y^* & 0 \\ 0 & 0 & I_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_t + I_b & 0 & 0 \\ 0 & I_t + I_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

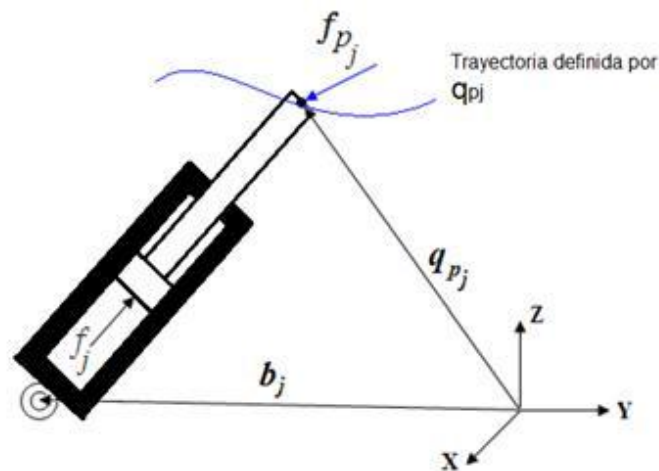
Los momentos de inercia del tensor  $I_j^*$  son constantes debido a que están definidos respecto al sistema  $X^*Y^*Z^*$  y sus productos de inercia son cero ya que coinciden con los ejes principales de inercia del actuador.

Debido a la ventaja que ofrece la simplificación de Guo y Li para expresar las ecuaciones de forma compacta y facilitar la factorización de términos, la energía cinética de Guo y Li será utilizada en la modelación dinámica del actuador.

### 3.3.1 Dinámica del actuador

El propósito es encontrar la ecuación que relacione la fuerza generada por la presión hidráulica en el actuador, con el vector fuerza que se aplica a la plataforma móvil a través de la articulación.

Figura 27. Coordenada generalizada para el actuador



Fuente: Autores del proyecto.

Una forma de lograrlo es analizando el actuador como un cuerpo rígido en movimiento alrededor de un punto fijo por el método de Newton-Euler, esto implica un procedimiento en el cual se obtienen vectores relacionados a la cinemática y por ende a la cinética; sin embargo las ecuaciones resultantes son de estructura

compleja que aumentarán con los grados de libertad, por esta razón este método no resulta práctico teniendo en cuenta que son seis actuadores lo que dificulta aún más el cálculo [5].

Se sabe que la aplicación del principio del trabajo y la energía simplifica de gran forma la solución de problemas relacionados con fuerzas, desplazamientos y velocidades, aunque no se puede determinar de manera directa la aceleración es por ello que deben complementarse con las leyes de Newton, siendo el método que brinda estas cualidades conocido como Lagrange, sin embargo su desventaja es el alto costo computacional cuando se implemente algún tipo de control, el cual resulta ser más crítico conforme aumentan los grados de libertad .

Como se puede notar en la figura 27, el grado de libertad del actuador en movimiento es el vector  $q_{pj}$ , y por consiguiente tendrá una sola ecuación de Lagrange en términos vectoriales. Ya que  $q_{pj}$  es el vector conocido que define el movimiento del extremo móvil del vástago, en el análisis del actuador dicho término será la coordenada generalizada en la expresión de Lagrange. Por tanto dicha formulación será aplicada, no solo por la facilidad de describir el movimiento, sino también por su simplicidad y la facilidad de eliminar las fuerzas de restricción [16].

La siguiente será la ecuación de Lagrange para un sistema dinámico cualquiera.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{qr} \quad (2.37)$$

Donde  $T$  es la energía cinética del cuerpo,  $q_r$  es el conjunto de coordenadas generalizadas o grados de libertad,  $F_{qr}$  la suma de fuerzas generalizadas no conservativas que actúan en el sistema.

- **Cálculo de la componente inercial**

La parte inercial de la ecuación (2.37) corresponde al término de la izquierda, donde la energía será definida como  $T_{GUOj}$ , la coordenada generalizada como  $q_{pj}$ , y las fuerzas generalizadas como  $Q_j$ , reemplazando en la ecuación (2.37) se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{GUOj}}{\partial \dot{q}_{pj}} \right) - \frac{\partial T_{GUOj}}{\partial q_{pj}} = Q_j \quad (2.38)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.31) y (2.32) en (2.36) se obtiene:

$$T_{GUOj} = \frac{1}{2} \left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \dot{q}_{pj} \right)^T m_t \left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \dot{q}_{pj} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j} \right)$$

Después haciendo uso del álgebra de matrices, la ecuación anterior se puede simplificar de la siguiente forma:

$$T_{GUOj} = \frac{1}{2} \dot{q}_{pj}^T (M_{aj} + M_{bj}) \dot{q}_{pj} \quad (2.40)$$

Donde  $M_{aj}$  y  $M_{bj}$  son:

$$M_{aj} = \frac{1}{2} \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \quad (2.41)$$

$$M_{bj} = \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right) \quad (2.42)$$

Uno de los términos inerciales de la expresión (2.38) se obtienen aplicando la derivada parcial respecto a  $\dot{q}_{pj}$  a la ecuación (2.40) y se obtiene:

$$\frac{\partial T_{GUOj}}{\partial \dot{q}_{pj}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} \left( \frac{1}{2} (\dot{q}_{pj}^T M_{aj} \dot{q}_{pj}) \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} \left( \frac{1}{2} (\dot{q}_{pj}^T M_{bj} \dot{q}_{pj}) \right) \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} \left( \frac{1}{2} (\dot{q}_{pj}^T M_{aj} \dot{q}_{pj}) \right) = M_{aj} \dot{q}_{pj} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial T_{GUOj}}{\partial \dot{q}_{pj}} = (M_{aj} + M_{bj}) \dot{q}_{pj} \quad (2.45)$$

La ecuación (2.43) debe ser derivada y se plantea de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{GUOj}}{\partial \dot{q}_{pj}} \right) = \frac{d}{dt} (M_{aj} + M_{bj}) \dot{q}_{pj} + (M_{aj} + M_{bj}) \ddot{q}_{pj} \quad (2.46)$$

Deben determinarse los parámetros que dependen del tiempo, esto con el fin de derivar una expresión respecto a este, por consiguiente los parámetros de entrada como lo son la trayectoria y orientación de la plataforma deben definirse respecto al tiempo y éstas a su vez conforman las coordenadas generalizadas, por lo tanto se puede apreciar que  $M_{aj}$  y  $M_{bj}$  dependen de las coordenadas generalizadas y sus derivadas podrán ser fácilmente calculables mediante un programa de computador.

Sin embargo también se pueden obtener de forma analítica de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M_{aj} + M_{bj}) = & \left( \frac{2m_t l_t}{l_j^2} \right) (n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \dot{q}_{pj} \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj}^T n_j^T ) \\ & - \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + 2\tilde{n}_j^T \dot{q}_{pj} \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj}^T n_j^T ) \end{aligned}$$

$$- \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (2n_j \dot{q}_{pj}^T n_j \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj} n_j^T) \quad (2.47)$$

La ecuación anterior (2.47) fue desarrollada por Guo y Li, por tanto no han sido deducidas en la presente tesis. Finalmente reemplazando (2.41), (2.42) y (2.47) en la ecuación (2.46) obtendremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{GUOj}}{\partial \dot{q}_{pj}} \right) &= \left( \left( \frac{2m_t l_t}{l_j^2} \right) (n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \dot{q}_{pj} \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj} n_j^T) \right. \\ &\quad - \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + 2\tilde{n}_j^T \dot{q}_{pj} \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj} n_j^T) \\ &\quad \left. - \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (2n_j \dot{q}_{pj}^T n_j \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj} n_j^T) \right) \dot{q}_{pj} \\ &\quad + \left( \left( 1 + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( 1 + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) + \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right) \right) \ddot{q}_{pj} \end{aligned} \quad (2.48)$$

El término de la ecuación (2.38) que falta determinar resulta de aplicar a la ecuación (2.40) la derivada parcial respecto a  $q_{pj}$ , de esta forma se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{GUOj}}{\partial q_{pj}} &= \left( \frac{2m_t l_t}{l_j^2} \right) (n_j \dot{q}_{pj}^T \dot{q}_{pj} + 2n_j^T \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj} - 3n_j \dot{q}_{pj}^T n_j n_j^T \dot{q}_{pj}) \\ &\quad - \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (n_j \dot{q}_{pj}^T \dot{q}_{pj} + \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj}^T n_j - 2n_j n_j^T \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj}^T n_j) \\ &\quad - \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (n_j^T \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj} + n_j \dot{q}_{pj}^T \dot{q}_{pj} - 2n_j \dot{q}_{pj}^T n_j n_j^T \dot{q}_{pj}) \end{aligned} \quad (2.49)$$

De forma análoga a la ecuación (2.47) la ecuación anterior ha sido deducida por Guo y Li. Se nota que en la ecuación (2.49) se aplica la derivada parcial a  $T_{GUOj}$  respecto al vector  $q_{pj}$  lo cual se deduce de la siguiente forma:

$$\frac{\partial T_{GUOj}}{\partial q_{pj}} = \left( \frac{\partial T_{GUOj}}{\partial q_{pjx}} \quad \frac{\partial T_{GUOj}}{\partial q_{pjy}} \quad \frac{\partial T_{GUOj}}{\partial q_{pjz}} \right)^T \quad (2.50)$$

- **Calculo de la fuerza generalizada**

Para calcular el término  $Q_j$  que corresponde al término derecho de la ecuación (2.38), solamente se deben considerar las fuerzas impulsoras que se ejercen sobre el actuador, fuerzas como la centrífuga o la de coriolis son consideradas en el término de la izquierda de la ecuación (2.38) donde automáticamente se tienen en cuenta todas las fuerzas inerciales [16].

La fuerza generalizada es una magnitud de tal naturaleza tal que el producto punto de  $Q_j \cdot \delta q_{pj}$  es el trabajo de las fuerzas impulsoras [16]. De igual forma la suma vectorial total de dichas fuerzas serán nombradas por  $\sum F_{actuadorj}$  y se expresa de la siguiente forma:

$$\sum F_{actuadorj} = f_j + m_t g + m_b g + f_{pj} \quad (2.51)$$

Dónde:

$f_j$  Es el vector fuerza generado por la presión hidráulica al interior del actuador.

$m_t g$  “y”  $m_b g$  Son las fuerzas debido a la masa de los componentes del actuador.

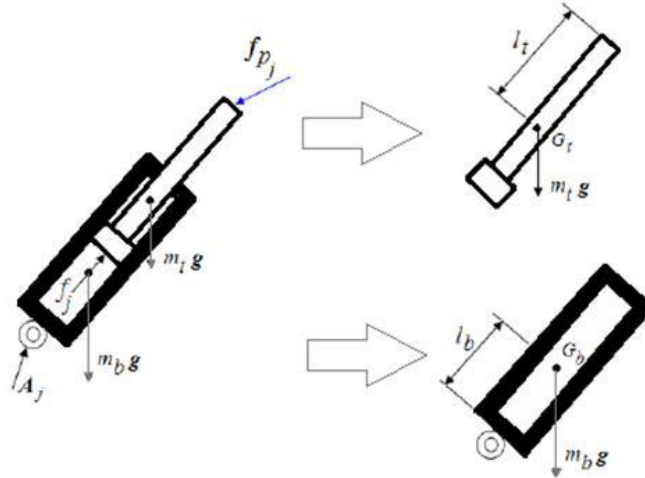
$f_{pj}$  Es la fuerza de restricción en la articulación ubicada en el extremo móvil del actuador.

La reacción  $A_j$  no se tiene en cuenta ya que no realiza ningún trabajo. Estos términos se representan en la figura 28.

La influencia de las masas del actuador en el análisis dinámico, sugieren considerar un solo centro de masa para el actuador completo [5]. En este caso

debe notarse que el vástago del actuador presentará movimiento axial lo cual hace que el centro de masa total varíe de posición a lo largo del eje axial del actuador. Este inconveniente es solucionado al definir dos centros de masa como se muestra en la figura 28.

Figura 28. Cinemática del actuador



Fuente: Autores del proyecto.

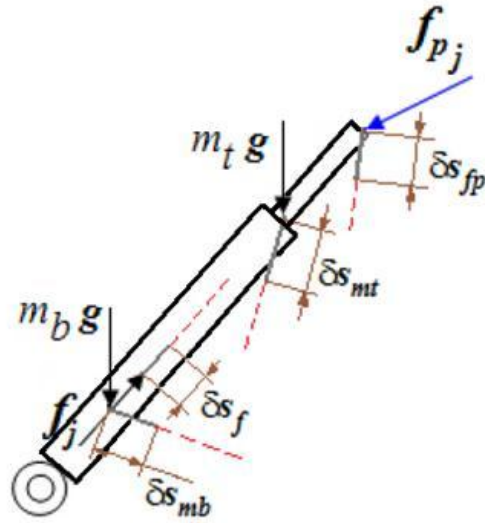
Partiendo del concepto de la formulación de Lagrange (2.36), la expresión de la fuerza generalizada se desarrolla en función de las fuerzas impulsoras de la siguiente forma:

$$Q_j = Q_{fj} + Q_{mtj} + Q_{mbj} + Q_{fpj} \quad (2.52)$$

$$Q_j = \left( \frac{\partial s_{fj}}{\partial q_{pj}} f_j \right) + \left( \frac{\partial s_{mtj}}{\partial q_{pj}} m_t g \right) + \left( \frac{\partial s_{mbj}}{\partial q_{pj}} m_b g \right) + \left( \frac{\partial s_{fpj}}{\partial q_{pj}} f_{pj} \right) \quad (2.53)$$

Donde  $s_{fj}, s_{mtj}, s_{mbj}, s_{fpj}$  Se refiere a desplazamientos relativos para cada fuerza aplicada al actuador, como se muestra en la figura 29.

Figura 28. Fuerzas y desplazamientos pequeños en el actuador.



Fuente: Autores del proyecto.

Basado en el principio del trabajo virtual, dos sistemas de fuerzas son equivalentes si realizan el mismo trabajo virtual, entonces la fuerza  $Q_{fj}$  se proyecta en la variación de la coordenada generalizada para obtener el trabajo virtual de  $f_j$ , que al mismo tiempo se iguala al trabajo virtual de la fuerza  $f_j$ , esto es:

$$\delta s_{fj} = \delta l_j$$

$$\delta W_j = Q_{fj}^T \delta q_{pj} = f_j \delta l_j \quad (2.54)$$

El trabajo virtual del vector  $f_j$  se expresa en forma escalar como  $f_j \delta l_j$ . Al mismo tiempo el término  $\delta l_j$  puede expresarse de la siguiente forma:

$$\delta l_j = n_j^T \delta q_{pj} \quad (2.55)$$

Reemplazando la ecuación (2.55) en (2.54) se tendrá:

$$\delta W_j = Q_{fj}^T \delta q_{pj} = f_j (n_j^T \delta q_{pj}) = (f_j n_j)^T n_j^T \delta q_{pj}$$

De la anterior expresión se halla finalmente el valor de la fuerza generalizada.

$$Q_{fj} = f_j n_j \quad (2.56)$$

A los términos  $Q_{mtj}$  y  $Q_{mbj}$  les pertenecen respectivamente los vectores de desplazamiento  $s_{mtj}$  y  $s_{mbj}$ . Para encontrar  $Q_{mtj}$  se parte del principio del trabajo virtual y después se utiliza la ecuación (2.32). Análogamente a la deducción de  $Q_{fj}$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$Q_{mtj} = \left( 1 + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) m_t g \quad (2.57)$$

De forma similar, partiendo del principio del trabajo virtual y usando la ecuación (2.33), se obtiene la fuerza generalizada  $Q_{mbj}$  que se define por medio de la siguiente expresión:

$$Q_{mbj} = \left( \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) m_b g \quad (2.58)$$

El procedimiento para obtener  $Q_{fpj}$  es similar a los anteriores donde se obtiene:

$$Q_{fpj} = f_{pj} \quad (2.59)$$

- **Ecuación de Lagrange**

Para obtener la fuerza que el actuador transmite a la plataforma  $f_{pj}$ , se despeja de la ecuación (2.52), donde la incógnita  $f_j$  se encuentra incluida en el vector  $Q_{fj}$  y despejando de la ecuación (2.59) obtenemos:

$$f_{pj} = Q_j - Q_{fj} - Q_{mtj} - Q_{mbj} \quad (2.60)$$

El término  $Q_j$  se puede expresar (De la ecuación 2.38).

$$Q_j = \frac{d}{dt}(M_{aj} + M_{bj})\dot{q}_{pj} + (M_{aj} + M_{bj})\ddot{q}_{pj} - \frac{\partial T_{GUOj}}{\partial q_{pj}} \quad (2.61)$$

Simplificando definimos  $C_{aj}$  como:

$$C_{aj} = \frac{d}{dt}(M_{aj} + M_{bj})\dot{q}_{pj} - \frac{\partial T_{GUOj}}{\partial q_{pj}} \quad (2.62)$$

De esta forma la ecuación (2.61) pasará a ser:

$$Q_j = (M_{aj} + M_{bj})\ddot{q}_{pj} + C_{aj} \quad (2.63)$$

Reemplazando en la ecuación (2.60) la ecuación (2.63).

$$f_{pj} = (M_{aj} + M_{bj})\ddot{q}_{pj} + C_{aj} - (Q_j + Q_{mtj} + Q_{mbj}) \quad (2.64)$$

Con la finalidad de deducir la dinámica de la plataforma móvil, se reemplazará en la ecuación anterior la ecuación (2.26).

$$f_{pj} = (M_{aj} + M_{bj})[I \quad R\tilde{p}_{jp}^T \quad R^T] \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \alpha \end{bmatrix} + (M_{aj} + M_{bj})\tilde{\omega}^2 R p_{jp} + C_{aj} - (Q_j + Q_{mtj} + Q_{mbj}) \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned}
f_{pj} = & \left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) + (I_t + I_b) (\tilde{n}_j)^T \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j^2} \right) \right) [I \quad R \tilde{p}_{jp}^T R^T] \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} \\
& + \left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) + (I_t + I_b) (\tilde{n}_j)^T \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j^2} \right) \right) \tilde{\omega}^2 R p_{jp} \\
& + \left( \frac{2m_t l_t}{l_j^2} \right) (n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + n_j^T \dot{q}_{pj} \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj}^T n_j^T) \\
& - \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (2n_j^T \dot{q}_{pj} \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj}^T n_j^T) \\
& - \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (2\dot{q}_{pj}^T n_j \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj}^T n_j^T + n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j) \dot{q}_{pj} \\
& - \left( \frac{m_t l_j}{l_j^2} \right) (n_j \dot{q}_{pj}^T \dot{q}_{pj} + 2n_j^T \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj} - 3n_j \dot{q}_{pj}^T n_j n_j^T \dot{q}_{pj}) \\
& + \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (n_j \dot{q}_{pj}^T \dot{q}_{pj} + \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj}^T n_j - 2n_j n_j^T \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj}^T n_j) \\
& + \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (n_j^T \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj} + n_j \dot{q}_{pj}^T \dot{q}_{pj} - 2n_j \dot{q}_{pj}^T n_j n_j^T \dot{q}_{pj}) \\
& - \left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) m_t g + \left( \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) m_b g \right)
\end{aligned}$$

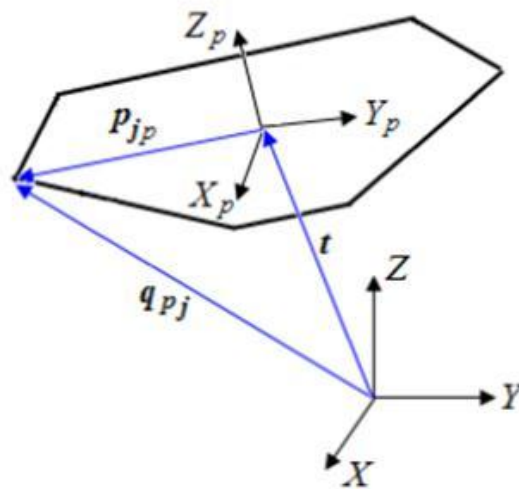
### 3.3.2 Dinámica de la plataforma móvil

Con el objetivo de resolver el problema dinámico inverso del mecanismo paralelo, se deben encontrar ecuaciones que expresen las fuerzas  $f_{pj}$  con la trayectoria y la orientación de la plataforma en el tiempo, para encontrar esto se utilizará el método de Newton-Euler, el cual parte del equilibrio de fuerzas y momentos en la plataforma móvil para obtener dos ecuaciones vectoriales, que a su vez generan

un sistema de seis ecuaciones escalares, que al resolverlo permiten obtener las seis fuerzas incógnitas  $f_j$ , que es la finalidad principal de este capítulo.

El primer paso para la dinámica es construir un diagrama de cuerpo libre donde se puedan observar las fuerzas y los momentos actuantes en el sistema, no obstante previamente debe definirse el sistema coordinado de referencia, tal como se ilustra en la figura 30.

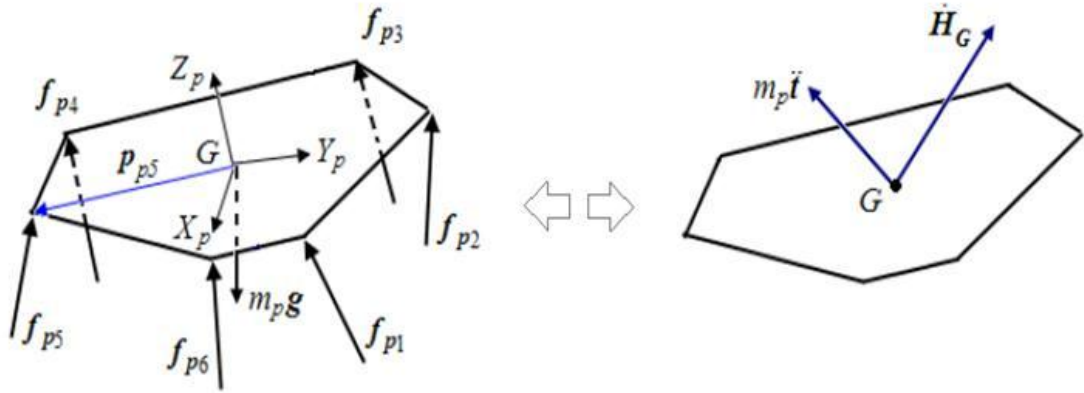
Figura 29. Sistemas coordenadas y vectores posición



Fuente: Autores del proyecto.

La simplicidad con la que se pueda resolver un problema específico depende de manera significativa del sistema coordinado apropiado, y particularmente en el caso de Newton-Euler, también del centro de reducción escogido. Para esto ya se han definido los sistemas de referencia  $XYZ$  y  $X_pY_pZ_p$ , respecto al centro de reducción, lo más apropiado para este método es encontrar un centro de reducción que coincida con el centro de masa del sistema que se está analizando. Entonces se definen los diagramas dinámicos de fuerzas externas y el de fuerzas efectivas referido al centro de reducción.

Figura 30. Diagrama de cuerpo libre de la plataforma móvil



Fuente: Autores del proyecto.

El término  $m_p g$  y las fuerzas ejercidas por los actuadores son cargas externas aplicadas sobre la plataforma móvil. Realizando la sumatoria de fuerzas a partir del sistema mostrado se tendrá:

$$\left(\sum F_G\right)_{efectivas} = \left(\sum F_G\right)_{externas}$$

$$m_p \ddot{t} = - \sum_{j=1}^6 (f_{pj}) + m_p g \quad (2.66)$$

Donde  $m_p$  es la masa de la plataforma móvil.

De la misma forma se obtienen las sumatorias de momentos, donde la ecuación de Euler se establece de la siguiente forma:

$$\left(\sum M_G\right)_{efectivas} = \left(\sum M_G\right)_{externas}$$

$$\dot{H}_G = - \sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} \times f_{pj}) \quad (2.67)$$

El término  $\dot{H}_G$  es completamente deducido en el anexo B, siendo su resultado final:

$$\dot{H}_G = RI_G R^T \alpha + \tilde{\omega} RI_G R^T \omega \quad (2.68)$$

A las ecuaciones (2.66) y (2.67) se les da forma de matriz con la finalidad de encontrar expresiones posteriores, para finalmente obtener:

$$[m_p \quad I \quad 0] \ddot{q} = - \sum_{j=1}^6 (f_{pj}) + m_p g \quad (2.69)$$

$$[0 \quad RI_p R^T] \ddot{q} + [0 \quad \tilde{\omega} RI_p R^T] \dot{q} = - \sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} \times f_{pj}) \quad (2.70)$$

Donde  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  son:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \omega \end{bmatrix} ; \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix}$$

### 3.3.3 Ecuación dinámica de la plataforma Stewart-Gough

El objetivo es calcular el valor de las fuerzas escalares  $f_j$  generadas por la presión hidráulica al interior de cada actuador, para esto se encontraron las ecuaciones (2.69) y (2.70) que permiten calcularlas a partir de  $f_{pj}$  y de los valores de orientación y traslación de la plataforma móvil. De esta forma el análisis dinámico inverso es completado, y a partir de una trayectoria conocida podrán encontrarse las fuerzas  $f_j$  necesarias para el movimiento a lo largo del tiempo.

Para los mecanismos paralelos, desarrollar la cinemática inversa es de simple planteamiento por consideraciones geométricas de carácter general, en cambio desarrollar la cinemática directa es más complicado y normalmente se obtiene más de una solución [12]. La presente tesis contiene solamente la dinámica inversa, por esto la solución analítica es única, ya que las incógnitas serán las seis

coordenadas generalizadas que definen el movimiento de la plataforma móvil, y por Newton-Euler se plantean seis ecuaciones lineales obtenidas de la sumatoria de fuerzas (2.69) y momentos (2.70). Tal sistema de ecuaciones puede ser resuelto por distintos métodos como lo son: el método de Gauss, de Cramer, el teorema de Rouché-Frobenius y el método de la matriz inversa. Ya que el análisis se desarrolló en forma de matrices, es adecuado usar el método de la matriz inversa para obtener una solución al sistema de ecuaciones lineales, con este objetivo es necesario dar forma a las ecuaciones (2.69) y (2.70) de tal manera que se obtenga una matriz de incógnitas y así despejar su coeficiente matricial mediante el uso de la matriz inversa.

Para desarrollar una deducción compacta y entendible, se construirán matrices con los términos de las expresiones (2.69) y (2.70) de tal forma que se obtiene una ecuación matricial de seis filas. La idea de realizar una expresión compacta es poder formar una sola ecuación dinámica donde la matriz de incógnitas  $f_j$  se calcula aplicando matriz inversa. Dichas ecuaciones poseen términos similares en coeficientes y dependencia, por esta razón lo primero que se debe hacer para encontrar la ecuación compacta es ordenar los términos de manera que se formen matrices comunes. En función de la dependencia y coeficientes como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 2. Agrupación de términos en las ecuaciones (2.69) y (2.70)

Newton $\sum F_G$	Euler $\sum M_G$	Agrupar según	
		Dependencia	Coeficiente
$[m_p I \quad 0] \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix}$	$[0 \quad RI_p R^T] \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix}$	$f(q)$	$\ddot{q}$
$[0 \quad 0] \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \omega \end{bmatrix}$	$[0 \quad \tilde{\omega} RI_p R^T] \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \omega \end{bmatrix}$	$f(q, \dot{q})$	$\dot{q}$
$-\sum_{j=1}^6 (f_{pj})$	$-\sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} \times f_{pj})$	$f(q, \dot{q})$	$q, \dot{q}$
$m_p g$	0		

Fuente: Autores del proyecto.

Usando la tabla anterior, se asocian los términos matriciales de Newton y Euler, según su dependencia y coeficiente para así conformar una matriz de seis filas, que tenga la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sum F_G \\ \sum M_G \end{bmatrix}_{efectivas} = \begin{bmatrix} \sum F_G \\ \sum M_G \end{bmatrix}_{externas}$$

$$\begin{bmatrix} m_p I & 0 \\ 0 & RI_p R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} RI_p R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^6 (f_{pj}) \\ -\sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} \times f_{pj}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_p g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

En la ecuación el término  $f_{pj}$  no se encuentra reemplazado ya que es bastante extenso, este término se desarrollará individualmente para luego si reemplazarlo.

$$f_{pj} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^6 (f_{pj}) \\ -\sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} \times f_{pj}) \end{bmatrix}$$

El término  $-\sum_{j=1}^6 (f_{pj})$  según la expresión (2.65) se expresa como:

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^6 (f_{pj}) &= -\sum_{j=1}^6 \left( (M_{aj} + M_{bj}) [I \quad R\tilde{p}_{jp}^T \quad R^T] \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \omega \end{bmatrix} \right) - \sum_{j=1}^6 ((M_{aj} + M_{bj}) \tilde{\omega}^2 Rp_{jp}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^6 C_{aj} + \sum_{j=1}^6 (Q_{mtj} + Q_{mbj}) + \sum_{j=1}^6 Q_j \end{aligned} \quad (2.72)$$

Y el término  $-\sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} \times f_{pj})$  se expresa de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} \times f_{pj}) &= -\sum_{j=1}^6 \left( (Rp_{jp} R^T) (M_{aj} + M_{bj}) [I \quad R\tilde{p}_{jp}^T \quad R^T] \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^6 ((Rp_{jp} R^T) (M_{aj} + M_{bj}) \tilde{\omega}^2 Rp_{jp}) - \sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} R^T C_{aj}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} R^T (Q_{mtj} + Q_{mbj})) + \sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} R^T Q_{fj}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Los términos de las expresiones (2.72) y (2.73) también pueden agruparse por dependencia y por coeficientes, tal como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Agrupación de términos en las ecuaciones (2.72) y (2.73)

Newton - $\sum_{j=1}^6(f_{pj})$	Euler - $\sum_{j=1}^6(Rp_{jp} \times f_{pj})$	según	
		Dependencia	Coficiente
$-\sum_{j=1}^6 \left( (M_{aj} + M_{bj}) [I \quad Rp_{jp}^T R^T] \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} \right)$	$-\sum_{j=1}^6 \left( (R\tilde{p}_{jp} R^T) (M_{aj} + M_{bj}) [I \quad Rp_{jp}^T R^T] \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} \right)$	$f(q)$	$\ddot{q}$
$-\sum_{j=1}^6 \left( (M_{aj} + M_{bj}) \tilde{\omega}^2 Rp_{jp} \right)$	$-\sum_{j=1}^6 \left( (R\tilde{p}_{jp} R^T) (M_{aj} + M_{bj}) \tilde{\omega}^2 Rp_{jp} \right)$	$f(q, \dot{q})$	
$-\sum_{j=1}^6 (C_{aj})$	$-\sum_{j=1}^6 (R\tilde{p}_{jp} R^T C_{aj})$	$f(q, \dot{q})$	$\dot{q}$
$\sum_{j=1}^6 (Q_{mtj} + Q_{mbj})$	$\sum_{j=1}^6 (R\tilde{p}_{jp} R^T (Q_{mtj} + Q_{mbj}))$	$f(q)$	
$\sum_{j=1}^6 (Q_{fj})$	$\sum_{j=1}^6 (R\tilde{p}_{jp} R^T Q_{fj})$	$f(q)$	

Fuente: Autores del proyecto.

Nuevamente se acoplan los términos matriciales de la tabla 3, según su dependencia y coeficiente, para formar una matriz de seis filas.

$$\begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^6 (f_{pj}) \\ -\sum_{j=1}^6 (Rp_{jp} \times f_{pj}) \end{bmatrix} = -\sum_{j=1}^6 \left( \begin{pmatrix} I \\ R\tilde{p}_{jp} R^T \end{pmatrix} (M_{aj} + M_{bj}) [I \quad R\tilde{p}_{jp}^T \quad R^T] \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^6 \left( \left( R p_{jp} R^T \right) C_{aj} \right) + \sum_{j=1}^6 \left( \left( R p_{jp} R^T \right) Q_{fj} \right) + \sum_{j=1}^6 \left( \left( R p_{jp} R^T \right) (Q_{mtj} + Q_{mbj}) \right) \\
& - \sum_{j=1}^6 \left( \left( \left( R p_{jp} R^T \right) \right) (M_{aj} + M_{bj}) \tilde{\omega}^2 R p_{jp} \right) \tag{2.74}
\end{aligned}$$

Reemplazando la expresión anterior en (2.71) se obtiene la ecuación dinámica general de la plataforma.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m_p I & 0 \\ 0 & R I_p R^T \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} R I_p R^T \end{bmatrix} \dot{q} = - \sum_{j=1}^6 \left( \left( R \tilde{p}_{jp} R^T \right) (M_{aj} + M_{bj}) \begin{bmatrix} I & R \tilde{p}_{jp}^T & R^T \end{bmatrix} \right) \ddot{q} \\
& - \sum_{j=1}^6 \left( \left( \left( R \tilde{p}_{jp} R^T \right) \right) (M_{aj} + M_{bj}) \tilde{\omega}^2 R p_{jp} \right) - \sum_{j=1}^6 \left( \left( R \tilde{p}_{jp} R^T \right) C_{aj} \right) \\
& + \sum_{j=1}^6 \left( \left( R p_{jp} R^T \right) (Q_{mtj} + Q_{mbj}) \right) + \begin{bmatrix} m_p g \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + \sum_{j=1}^6 \left( R p_{jp} R^T \right) Q_{fj} \tag{2.75}
\end{aligned}$$

Según [17], la ecuación dinámica inversa para un manipulador paralelo debe tener la siguiente forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = H(q)F \tag{2.76}$$

Donde:

**$M(q)$**  Matriz de inercias.

**$C(q, \dot{q})$**  Término de efectos centrífugos y de coriolis.

**$G(q)$**  Término gravitacional.

**$F$**  Contiene las fuerzas aplicadas al interior de cada actuador.

**$H(q)$**  Matriz de vectores unitarios.

En la forma general de la ecuación dinámica, se puede observar términos que poseen una relación por dependencia y por coeficiente, lo cual hace que el procedimiento que se ha desarrollado sea consistente en forma general. Por esto a la ecuación (2.75) se le dará la forma de la ecuación general, agrupando términos de forma similar a como se desarrolló anteriormente.

Tabla 4. Agrupación de términos en la ecuación (2.75)

Forma General	Términos
$M_{(q)}\ddot{q} + C_{(q,\dot{q})}\dot{q} + G_{(q)} = H_{(q)}F$	
$\begin{bmatrix} m_p I & 0 \\ 0 & R I_p R^T \end{bmatrix} \ddot{q}$	$M_{(q)}\ddot{q}$
$\sum_{j=1}^6 \left( \left( R \tilde{p}_{jp} R^T \right) (M_{aj} + M_{bj}) [I \quad R \tilde{p}_{jp}^T \quad R^T] \right) \ddot{q}$	
$-\sum_{j=1}^6 \left( \left( R p_{jp} R^T \right) (Q_{mtj} + Q_{mbj}) \right)$	$G_{(q)}$
$\begin{bmatrix} m_p g \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} R I_p R^T \end{bmatrix} \dot{q}$	$C_{(q,\dot{q})}\dot{q}$
$\sum_{j=1}^6 \left( \left( R \tilde{p}_{jp} R^T \right) C_{aj} \right)$	
$\sum_{j=1}^6 \left( \left( R \tilde{p}_{jp} R^T \right) (M_{aj} + M_{bj}) \tilde{\omega}^2 R p_{jp} \right)$	
$\sum_{j=1}^6 \left( R p_{jp} R^T \right) Q_{fj}$	$H_{(q)}F$

Fuente: Autores del proyecto.

El término  $Q_{fj}$  incluido en el término  $H_{(q)}F$  no se reemplazó en la tabla anterior. La matriz a formar debe tener el tamaño de 6x1 que va tener de incógnitas las fuerzas mencionadas, que al mismo tiempo pueden ser despejadas mediante el uso de la matriz inversa, para obtener al final la siguiente expresión

$$H_{(q)}F = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ R\tilde{p}_{1p}R^T n_1 & R\tilde{p}_{2p}R^T n_2 & R\tilde{p}_{3p}R^T n_3 & R\tilde{p}_{4p}R^T n_4 & R\tilde{p}_{5p}R^T n_5 & R\tilde{p}_{6p}R^T n_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Para despejar  $F$ , en la ecuación (2.77) se premultiplica por la matriz inversa de  $H_{(q)}$  en ambos términos de la ecuación. Para obtener finalmente la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ R\tilde{p}_{1p}R^T n_1 & R\tilde{p}_{2p}R^T n_2 & R\tilde{p}_{3p}R^T n_3 & R\tilde{p}_{4p}R^T n_4 & R\tilde{p}_{5p}R^T n_5 & R\tilde{p}_{6p}R^T n_6 \end{bmatrix}^{-1} \left( \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} I \\ R\tilde{p}_{jp}R^T \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} I \\ \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) + (I_t + I_b)(\tilde{n}_j)^T \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j^2} \right) \right) \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} \right. \right. \\
&+ \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} I \\ R\tilde{p}_{jp}R^T \end{bmatrix} \left( \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (2\dot{q}_{pj}^T n_j \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj}^T n_j^T + n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j) \right. \right. \\
&- \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (2n_j^T \dot{q}_{pj} \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj}^T n_j^T) \\
&- \left. \left. \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (2\dot{q}_{pj}^T n_j \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j + \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j \dot{q}_{pj}^T n_j^T + n_j \dot{q}_{pj}^T \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j) \right) \dot{q}_{pj} \right. \\
&- \left. \left. \left( \frac{m_t l_t}{l_j^2} \right) (2n_j \dot{q}_{pj}^T \dot{q}_{pj} + 2n_j^T \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj} - 3n_j \dot{q}_{pj}^T n_j n_j^T \dot{q}_{pj}) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left( \frac{m_t l_t^2}{l_j^3} \right) (n_j \dot{q}_{pj}^T \dot{q}_{pj} + \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj}^T n_j - 2n_j n_j^T \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj}^T n_j) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left( \frac{I_t + I_b}{l_j^3} \right) (n_j^T \dot{q}_{pj} \dot{q}_{pj} + n_j \dot{q}_{pj}^T \dot{q}_{pj} - 2n_j \dot{q}_{pj}^T n_j n_j^T \dot{q}_{pj}) \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega} R I_p R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \omega \end{bmatrix} \right) \\
&+ \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} I \\ R\tilde{p}_{jp}R^T \end{bmatrix} \left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) + (I_t + I_b)(\tilde{n}_j)^T \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j^2} \right) \right) \tilde{\omega}^2 R p_{jp} \right) \\
&- \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} I \\ R\tilde{p}_{jp}R^T \end{bmatrix} \left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) m_t g + \left( \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) m_b g \right) \right) - \begin{bmatrix} m_p g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_p I & 0 \\ 0 & R I_p R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} \Big)
\end{aligned}$$

### **3.4 MODELADO EN MATLAB DE LAS ECUACIONES PLANTEADAS**

Con el fin de poder realizar pruebas y probar la veracidad de las ecuaciones planteadas se han introducido en el Software MATLAB todas las ecuaciones obtenidas tanto cinemáticas como de dinámica inversa.

Para la solución de este sistema de ecuaciones se deben introducir una serie de valores tanto de geometría de la plataforma, masas y trayectorias deseadas, específicamente los siguientes datos son necesarios para la solución del sistema de ecuaciones planteadas, ver figura 31.

Figura 31. Datos de entrada para solución de sistema de ecuaciones.

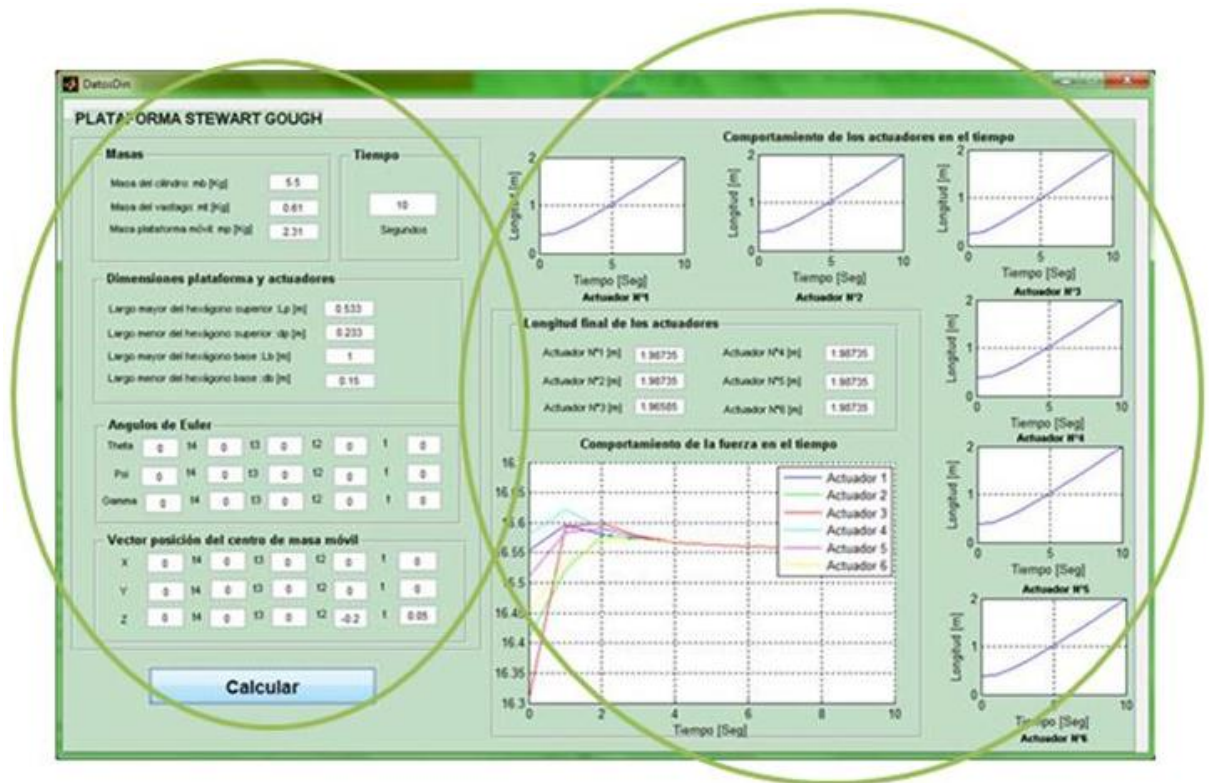
Masas		Tiempo	
Masa del cilindro: $m_b$ [Kg]	<input type="text"/>	<input type="text"/>	
Masa del vástago: $m_t$ [Kg]	<input type="text"/>	Segundos	
Masa plataforma móvil: $m_p$ [Kg]	<input type="text"/>		
Dimensiones plataforma y actuadores			
Largo mayor del hexágono superior : $L_p$ [m]	<input type="text"/>		
Largo menor del hexágono superior : $d_p$ [m]	<input type="text"/>		
Largo mayor del hexágono base : $L_b$ [m]	<input type="text"/>		
Largo menor del hexágono base : $d_b$ [m]	<input type="text"/>		
Angulos de Euler			
Theta	<input type="text"/>	t4	<input type="text"/>
		t3	<input type="text"/>
		t2	<input type="text"/>
		t	<input type="text"/>
Psi	<input type="text"/>	t4	<input type="text"/>
		t3	<input type="text"/>
		t2	<input type="text"/>
		t	<input type="text"/>
Gamma	<input type="text"/>	t4	<input type="text"/>
		t3	<input type="text"/>
		t2	<input type="text"/>
		t	<input type="text"/>
Vector posición del centro de masa móvil			
X	<input type="text"/>	t4	<input type="text"/>
		t3	<input type="text"/>
		t2	<input type="text"/>
		t	<input type="text"/>
Y	<input type="text"/>	t4	<input type="text"/>
		t3	<input type="text"/>
		t2	<input type="text"/>
		t	<input type="text"/>
Z	<input type="text"/>	t4	<input type="text"/>
		t3	<input type="text"/>
		t2	<input type="text"/>
		t	<input type="text"/>

Fuente: Autores del proyecto.

Como se puede observar en la figura 31, los datos de entrada son Masas del cilindro, el vástago y la plataforma móvil; el tiempo de simulación y trayectoria del centroide de la plataforma móvil, la cual podemos especificar con ecuaciones de hasta de cuarto orden en cada uno de los 6 grados de libertad que posee la plataforma, 3 traslaciones y 3 rotaciones en los ejes X, Y, Z, es decir podemos simplemente realizar desplazamientos constantes y colocar el resto de variables en cero.

Tras introducir los datos necesarios el sistema estará en capacidad de mostrarnos la longitud de cada uno de los actuadores sus trayectorias y las fuerzas necesarias para alcanzar el movimiento deseado, ver figura 32.

Figura 32. Interfaz creada en MATLAB



Fuente: Autores del proyecto.

En esta figura 32, podemos identificar los datos introducidos (derecha) y los resultados obtenidos (Izquierda) tras realizar la simulación. En el Anexo C se describe el funcionamiento de la interfaz creada.

## **4. PLANTEAMIENTO DE LA DINÁMICA DE LA PLATAFORMA STEWART-GOUGH UTILIZANDO SOFTWARE DE SIMULACIÓN**

### **4.1 INTRODUCCION**

El análisis de la plataforma se ha realizado con el modelado matemático, sin embargo, con el objeto de plantear un modelado sencillo, que utilizara una herramienta computacional y se pudiera emplear en otras aplicaciones se concluyó utilizar el módulo SimMechanics de MATLAB integrado con Solidworks; para conocer un poco sobre estas herramientas tenemos que profundizar un poco sobre MATLAB y la extensión conocida como Simulink.

MATLAB es un programa interactivo para computación numérica y visualización de datos. Es ampliamente utilizado en ingeniería en el análisis y diseño de sistemas. Posee además una extraordinaria versatilidad para resolver problemas en matemática aplicada, física, química, finanzas y otras aplicaciones de ingeniería.

MATLAB integra análisis numérico, cálculo matricial, proceso de señal y visualización gráfica en un entorno completo donde los problemas y sus soluciones son expresados del mismo modo en que se escribirían tradicionalmente, sin necesidad de hacer uso de la programación tradicional.

Dentro del Toolbox se dispone del Simulink, que es un entorno gráfico interactivo con el que se puede analizar, modelar y simular la dinámica de sistemas lineales y no lineales.

MATLAB opera bajo sistemas operativos UNIX, Macintosh y Windows.

## **4.2 ESTUDIO EN SIMMECHANICS**

SimMechanics es una extensión del Simulink con herramientas para modelar y simular sistemas mecánicos.

SimMechanics simula el movimiento de dispositivos mecánicos y genera las mediciones del rendimiento relacionadas con este movimiento. Está integrado con el diseño de control de Mathworks y paquetes de generación de código permitiendo el diseño de controladores y la evaluación en tiempo real con el modelo del sistema mecánico.

SimMechanics tiene una variedad de estudios en aeronáutica, defensa y aplicaciones automovilísticas, como el desarrollo de la suspensión activa, tren de aterrizaje y sistemas de control.

SimMechanics es un ambiente informático que usa diagramas de bloques para diseño y simulación de máquinas de cuerpos rígidos y sus movimientos, usando la dinámica clásica newtoniana de fuerza y torques. Para nuestro estudio se usó el SimMechanics para describir el modelo físico obtenido a partir del diseño de Solidworks.

### **4.2.1 SimMechanics y el modelo físico**

SimMechanics está basado en Simscape que abarca el modelado y el diseño de sistemas de acuerdo con los principios físicos básicos. A diferencia de otros bloques de Simulink, que representan las operaciones matemáticas, los bloques de Simscape representan componentes físicos o relaciones directas.

### **4.2.2 Características de SimMechanics**

- Suministra un ambiente de modelado matemático en tres dimensiones de sistemas mecánicos.

- Incluye una variedad de técnicas de simulación para analizar el movimiento y dimensionar componentes mecánicos.
- Permite que a la puesta en práctica de modelos de planta de alta fidelidad, no lineales en Simulink respalde el desarrollo y la prueba de sistemas de control.
- Suministra un traductor de Solidworks que permite el uso de herramientas de diseño asistido por computadora para definir modelos mecánicos.

#### **4.2.3 Simulación y análisis del movimiento mecánico**

Simulando el modelo de SimMechanics, se puede imponer restricciones cinemáticas, aplicar fuerzas y torques y medir resultados de movimiento y fuerza. También puede desarrollar y evaluar actuadores, como motores eléctricos, tornillos de bola, cilindros hidráulicos y motores.

#### **4.2.4 Capacidades de SimMechanics**

SimMechanics es un paquete de bibliotecas informáticas, modelos mecánicos y características de simulación con el uso de Simulink. Permite conectar bloques de SimMechanics a bloques de Simulink a través de bloques sensores y bloques de actuadores.

Puede imponer restricciones cinemáticas, fuerza y torques, integrar las ecuaciones de newton y realizar movimientos como resultados.

Las capacidades de SimMechanics permiten:

- Diseñar maquinas.
- Configurar cuerpos, sistemas coordinados, articulaciones y restricciones.
- Usar sensores, actuadores, fricción y los elementos de fuerza en sistemas mecánicos.
- Simular, analizar, visualizar y realizar animaciones de máquinas.

## 4.3 DIAGRAMA DE BLOQUES EN MATLAB-SIMULINK

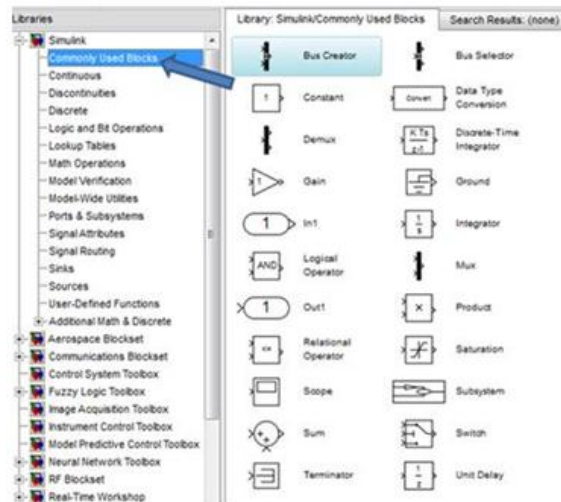
### 4.3.1 Características

- La funcionalidad básica del Simulink es la simular sistemas dinámicos.
- Se trata de un entorno gráfico.
- El sistema se representa como una interconexión de bloques elementales.
- Cada bloque lleva asociado un modelo matemático que representa su relación entre entrada/salida.

### 4.3.2 Bloques comúnmente usados en Simulink

Son los bloques usados para el desarrollo de modelos o sistemas a ser analizados. Estos bloques permiten crear los modelos básicos de simulación en Simulink, como puertos de entrada y salida de modelos y sistemas, tierra, constantes, pantallas de visualización de señales, buses de datos, interruptores, operadores relacionales entre otros bloques.

Figura 33. Biblioteca de bloques comúnmente usados

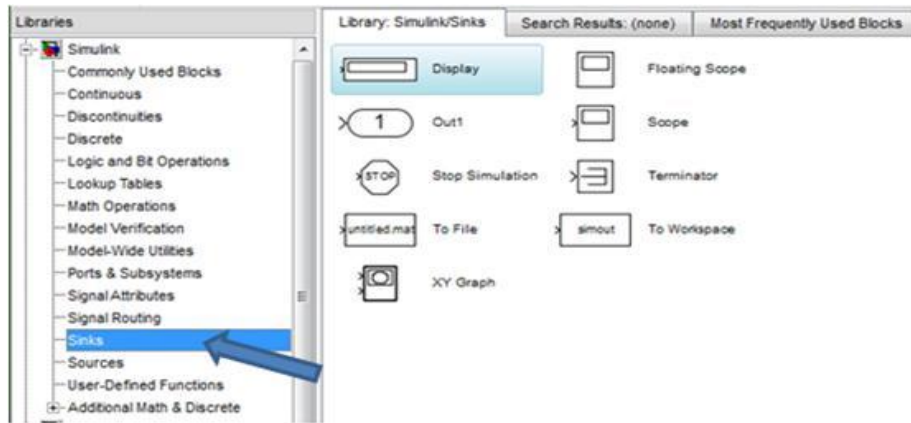


Fuente: Autores del proyecto.

### 4.3.3 Sinks-Visualizadores

Esta biblioteca de bloques contiene salidas o dispositivos de visualización y almacenamiento de variables como osciloscopio, ficheros, display, pantallas entre otros, como se muestra en la figura 34.

Figura 34. Biblioteca de bloques de Simulink para visualizar resultados



Fuente: Autores del proyecto.

Todas estas categorías de bloques se muestran en la ventana inicial de Simulink. El procedimiento de trabajo para la creación de un modelo será seleccionar los elementos adecuados de entre los bloques presentes en estas categorías, colocarlos sobre la ventana de diseño, establecer las conexiones correspondientes entre ellos y configurarlos.

## 4.4 INICIACION DE SIMMECHANICS

Para arrancar Simulink se puede hacer desde el prompt de MATLAB digitando el comando **>>Simulink** ó utilizando el icono:

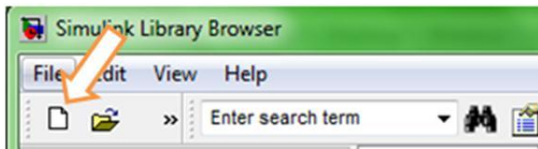
Figura 35. Icono de inicio Simulink



Fuente: Autores del proyecto.

Se abre la ventana Simulink Library Browser como se indica abajo y se puede diagramar un nuevo modelo activando el botón “New Model”, ósea el icono:

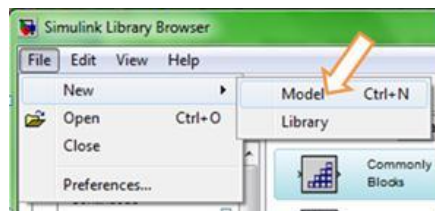
Figura 36. Icono para abrir un nuevo modelo en Simulink



Fuente: Autores del proyecto.

O la ruta File – New Model:

Figura 37. Ruta para abrir un nuevo modelo



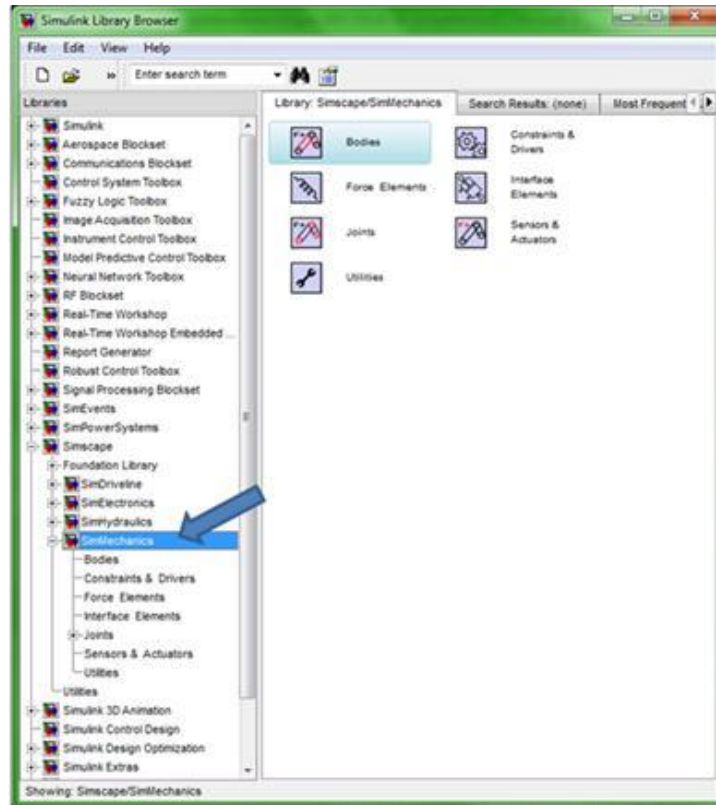
Fuente: Autores del proyecto.

Un modelo es un conjunto básico de bloques que representa un sistema y como archivo tiene extensión \*.mdl.

Dentro del Simulink, el MATLAB dispone de una aplicación particular en la ingeniería mecánica, el Toolbox SimMechanics.

El vínculo de SimMechanics lo encuentras en el mismo lugar que Simulink y de hecho al emplear SimMechanics también podemos emplear más bloques de otras Libraries como Simulink, para ingresar seleccionas el icono correspondiente el cual se encuentra dentro de la Librarie Simscape así:

Figura 38. Ubicación de la librería del SimMechanics



Fuente: Autores del proyecto.

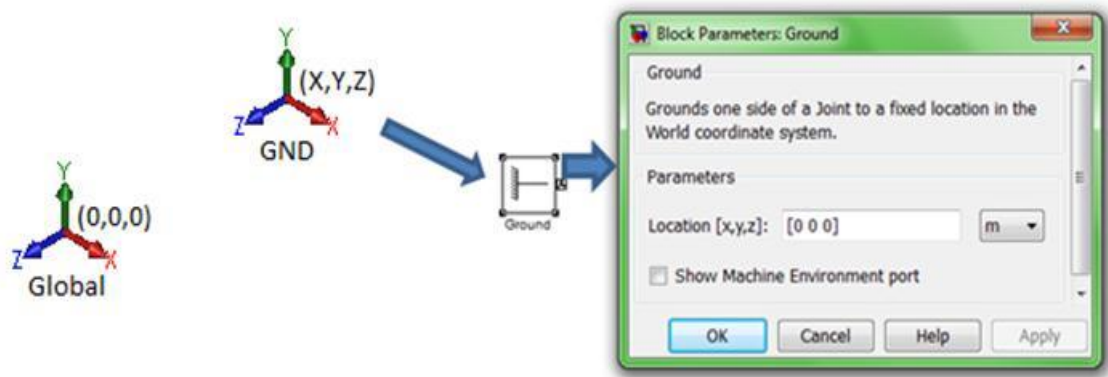
SimMechanics es un ambiente de modelado con diagramas de bloques para la simulación de mecanismos de cuerpos rígidos y hace parte de la aplicación Simulink. Así como en Simulink los bloques representan operaciones matemáticas y las líneas de unión representan señales, en SimMechanics los bloques representan los cuerpos del sistema y las restricciones que existen entre ellos mientras que las líneas indican conexiones físicas y relaciones espaciales.

## 4.5 BLOQUES MÁS USADOS EN SIMMECHANICS

### 4.5.1 Bloque de tierra

El bloque de tierra (Figura 39) representa un cuerpo de tamaño y masa infinitos, sirve como referencia de los demás eslabones del mecanismo. La información que contiene es la ubicación del origen del sistema coordenado donde se encuentran las juntas ancladas a tierra. En todo modelo se debe usar por lo menos un bloque de este tipo y se pueden utilizar tantos como sean necesarios.

Figura 39. Bloque de tierra

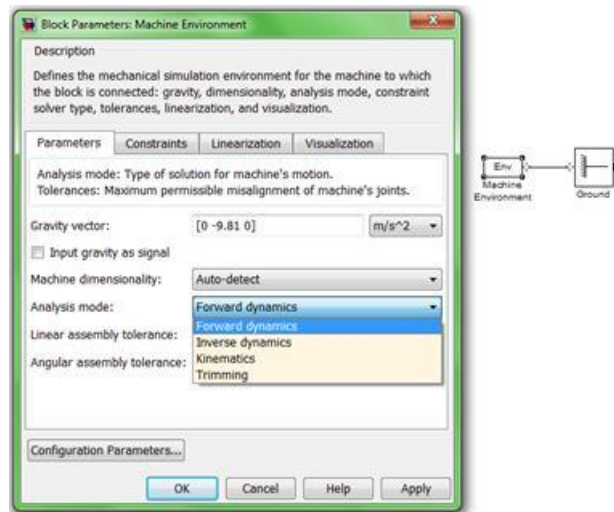


Fuente: Autores del proyecto.

### 4.5.2 Bloque de entorno

En toda simulación también debe haber un bloque de entorno (figura 40), este permite configurar las condiciones de la simulación como gravedad, tipo de simulación (dinámica directa, dinámica inversa, cinemática, etc.). Este debe ir conectado a un bloque de tierra.

Figura 40. Configuración del bloque de entorno

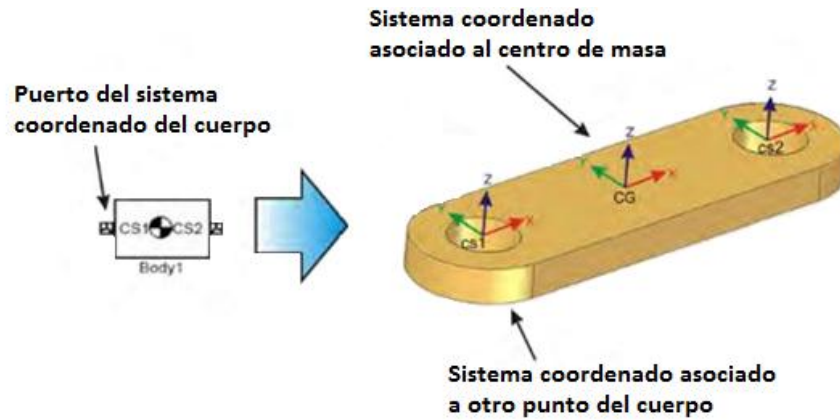


Fuente: Autores del proyecto.

### 4.5.3 Bloque de cuerpo

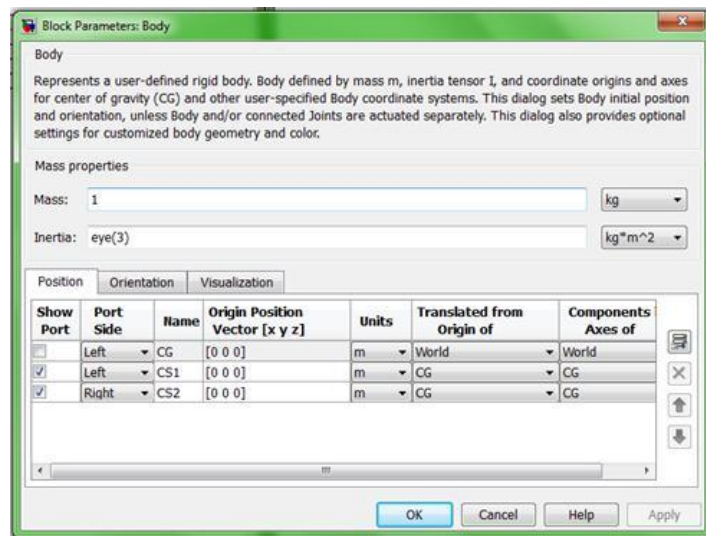
El bloque “body” permite definir las propiedades de masa e inercia de los eslabones del mecanismo así como los sistemas coordenados atados a ellos (figura 41), por medio de estos sistemas coordenados se establecen las restricciones respecto a los demás. Todo cuerpo debe tener por lo menos un sistema coordenado cuyo origen coincida con el centro de masa del cuerpo y tantos sistemas coordenados adicionales como se requiera para establecer las relaciones con los cuerpo adyacentes.

Figura 41. Ubicación de los sistemas coordenados en un eslabón



Fuente: Autores del proyecto.

Figura 42. Configuración del bloque de cuerpo



Fuente: Autores del proyecto.

Además de la configuración de la masa, para configurar correctamente un bloque de cuerpo se requiere definir el tensor de Inercia:

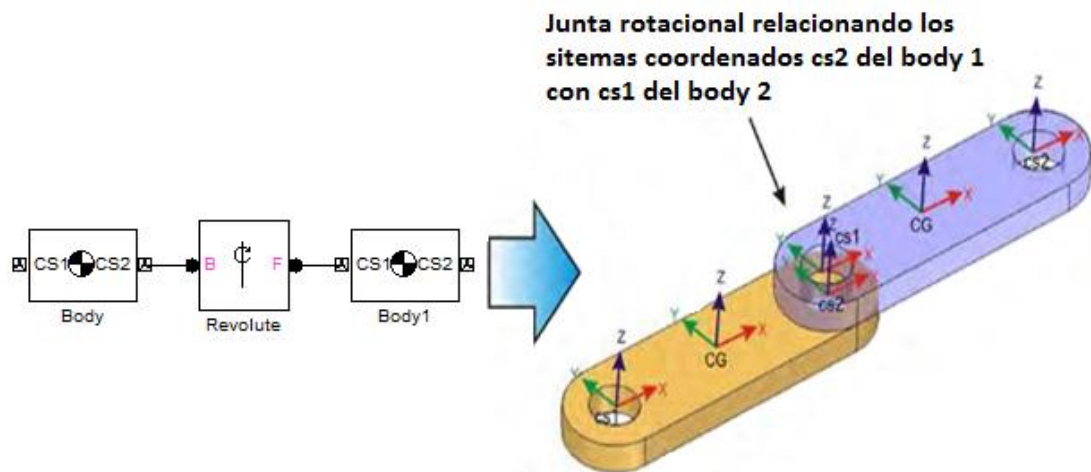
$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Donde  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  representan los momentos de inercia centroidales (no necesariamente principales) respecto a los ejes definidos en el sistema coordenado del centro de masa  $I_{zy}, I_{yz}, I_{xz}$  representan los productos de inercia respecto a estos mismos ejes.

#### 4.5.4 Bloque de junta

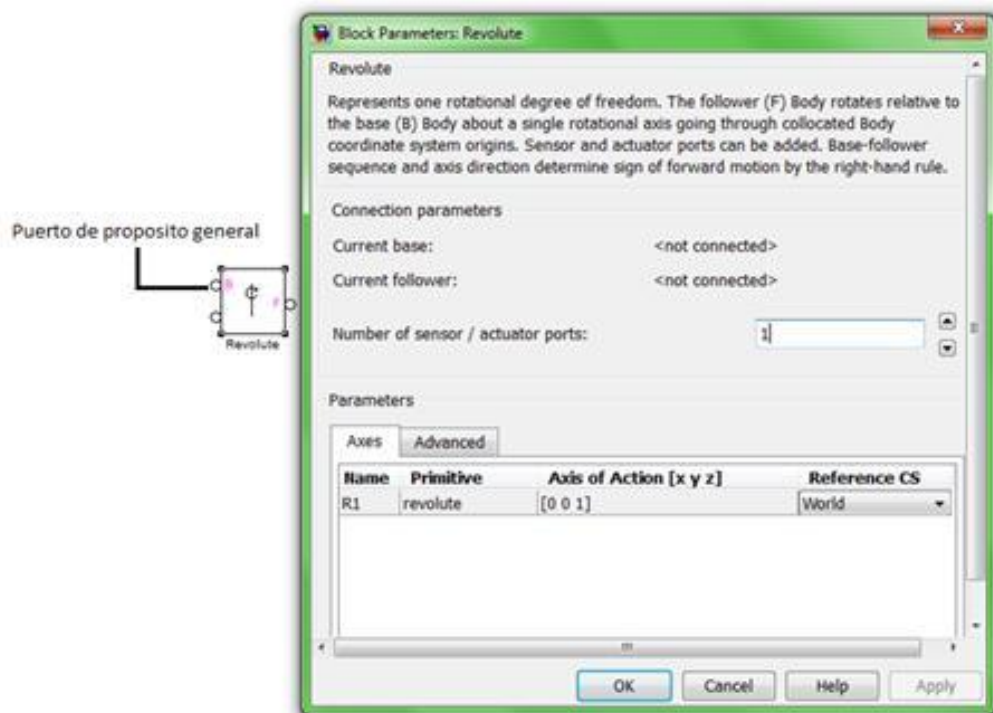
Los bloques de junta (articulaciones) permiten establecer las restricciones de movimiento que existen entre los cuerpos del mecanismo (Figura 43), para ello se vale de los sistemas coordenados de los cuerpos que conecta. La configuración sólo requiere establecer la dirección del desplazamiento o del giro de la junta y la cantidad de sensores o actuadores a conectar (figura 44).

Figura 43. Sistemas coordenados relacionados por una junta



Fuente: Autores del proyecto.

Figura 44. Configuración de un bloque tipo junta

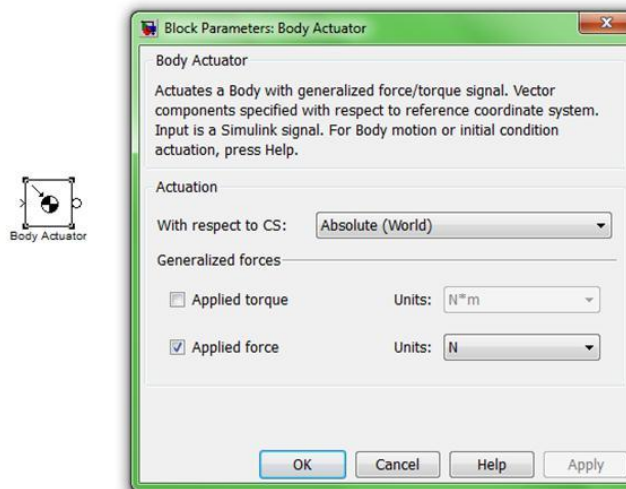


Fuente: Autores del proyecto.

#### 4.5.5 Bloque de Sensores y Actuadores

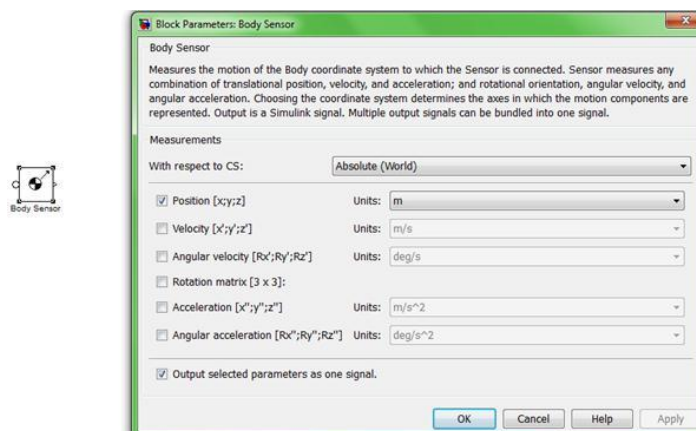
Los sensores y actuadores se conectan con las juntas o con los cuerpos para medir o definir el comportamiento de alguna variable del movimiento de las juntas. Los actuadores reciben señales de Simulink y los sensores entregan señales de Simulink. Para configurar estos bloques es necesario definir si los datos de entrada/salida corresponden a fuerzas y torques o a posición velocidad y aceleración de la junta, obviamente con sus respectivas unidades (figura 45 y figura 46).

Figura 45. Configuración del bloque Actuador



Fuente: Autores del proyecto.

Figura 46. Configuración del bloque Sensor



Fuente: Autores del proyecto.

#### 4.6 TRADUCTOR CAD-SIMULINK DE MATLAB

Usar el traductor CAD-SimMechanics con un ensamblaje CAD requiere dos pasos muy importantes, exportar el ensamblaje de Diseño Asistido por Computadora a formato XML e importar el XML para crear un modelo de SimMechanics a formato

MDL. El traductor CAD-Simulink es una herramienta externa de MATLAB que permite importar archivos .XML para transformarlos en archivos .mdl de SimMechanics.

#### 4.6.1 Exportando un ensamble

Al exportar un ensamblaje de la plataforma CAD en un archivo .XML obtenemos un modelo físico que después será usado por SimMechanics.

El proceso de creación del modelo funcional en la plataforma CAD y luego exportar el ensamble XML se representa en la figura 47.

Figura 47. Proceso de exportar un ensamblaje CAD en un archivo XML

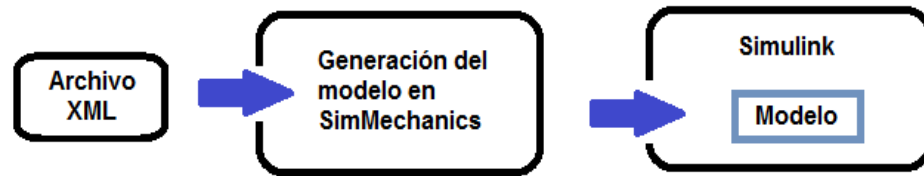


Fuente: Autores del proyecto.

Primero se requiere exportar un ensamblaje CAD en un archivo XML de diseño funcional, esto se realiza desde SolidWorks.

Luego se convierte el archivo XML de diseño funcional en un modelo físico de SimMechanics en archivo MDL. Este paso requiere el archivo XML, pero no la plataforma CAD. La figura 48 muestra este proceso.

Figura 48. Proceso de importar un archivo XML en modelo físico de SimMechanics



Fuente: Autores del proyecto.

#### 4.6.2 Instalación del traductor CAD a SimMechanics

No se requiere ningún componente de MATLAB para instalar el traductor de CAD-SimMechanics, pero la plataforma de CAD debe ser instalada primero.

#### 4.6.3 Descargar el traductor

Para obtener el traductor, se debe descargar el traductor de acuerdo a la plataforma CAD de la siguiente página web:

<http://www.mathworks.com/products/simmechanics/>

Figura 49. Página web para descargar el traductor



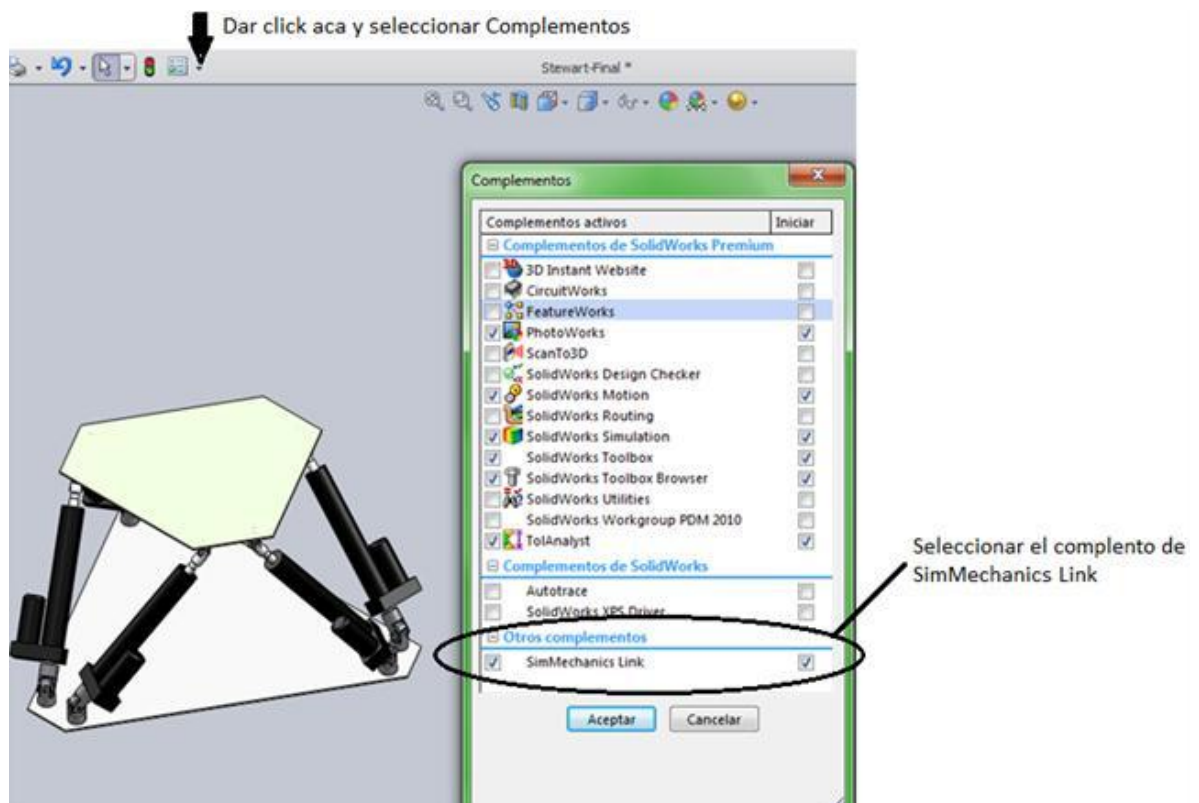
Fuente: <http://www.mathworks.com/products/simmechanics/>

#### 4.6.4 Procedimiento para exportar un archivo XML de la plataforma CAD Solidworks

Simplemente, al momento de guardar el archivo de ensamble en Solidworks se debe guardar en formato XML.

El primer paso es instalar el traductor CAD. El segundo paso es activar en SimMechanics en el Solidworks como se muestra en la figura 50.

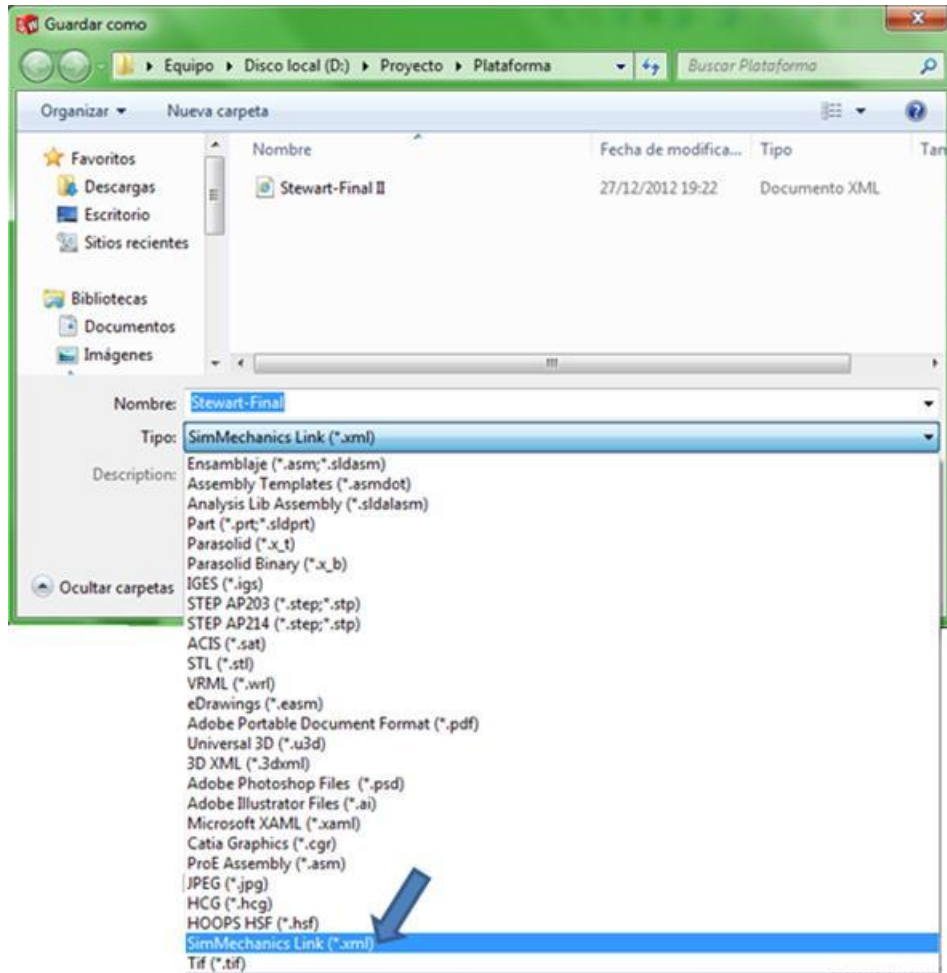
Figura 50. Configuración del complemento SimMechanics



Fuente: Autores del proyecto.

El tercer paso, luego de activar el SimMechanics en el Solidworks, es guardar el diseño funcional en formato XML como se muestra en el siguiente gráfico.

Figura 51. Forma de guardar archivo XML



Fuente: Autores del proyecto.

Este archivo permite usar el traductor CAD para importar el diseño funcional a modelo físico en diagrama de bloques con lenguaje de MATLAB de forma muy sencilla.

SimMechanics incluye un traductor que permite crear un modelo de SimMechanics automáticamente sobre la base de un ensamble CAD de Solidworks.

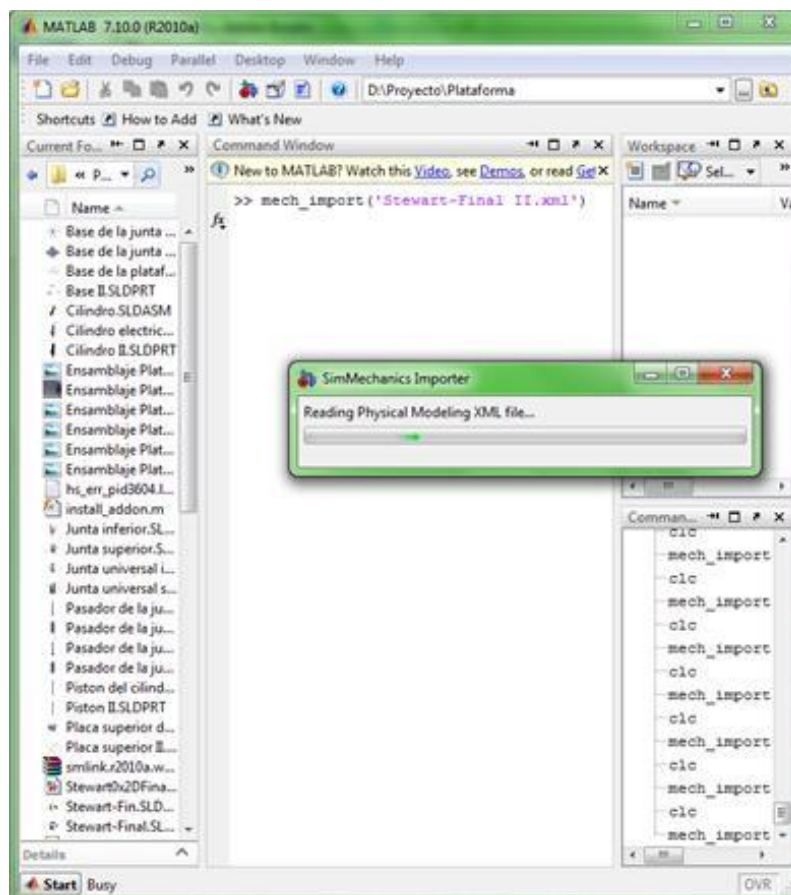
El traductor de Solidworks para SimMechanics exporta la masa y la inercia de cada parte en el ensamble y crea el diagrama de bloques en SimMechanics.

El traductor verifica las definiciones de juntas diseñadas en Solidworks para conectar los bloques en SimMechanics de forma apropiada con las articulaciones automáticamente.

#### 4.6.5 Procedimiento para importar un archivo XML a SimMechanics

Luego de abrir normalmente el MATLAB en la ventana principal digitalizamos el comando: `>> mech_import('Stewart-Final II.xml')` y posteriormente se observará el proceso de generación del modelo físico CAD en SimMechanics de MATLAB. Se debe importar el archivo XML describiendo el nombre con el que fue guardado desde el SolidWorks.

Figura 52. Procedimiento para importar el archivo XML a SimMechanics



Fuente: Autores del proyecto.

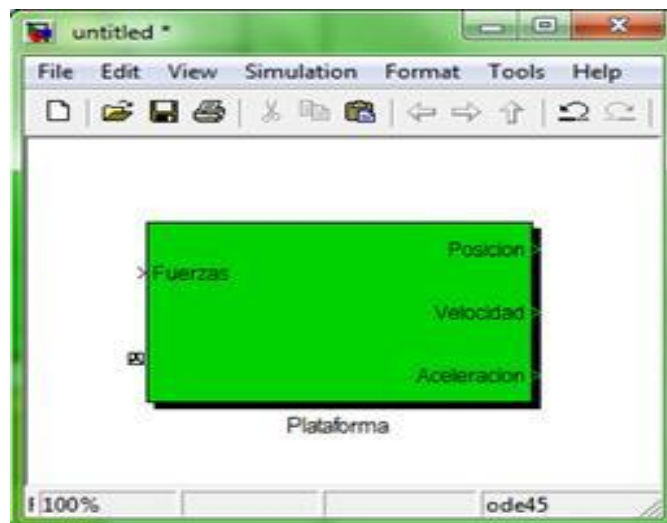
## 4.7 MODELADO FÍSICO MULTIDOMINIO EN SIMULINK

Los bloques de Simulink usuales definen una función de transferencia entre entradas y los flujos de señal. Para aplicaciones como diseño de sistemas de control y procesamiento de señal, este enfoque es natural, práctico y funcional.

El hacer un modelo de las interacciones entre componentes en sistemas mecánicos requiere un estudio más amplio.

Con SimMechanics, se puede crear un sistema de control como un diagrama de bloques de circulación de señal unidireccional y luego comunicar a este modelo a una planta física.

Figura 53. Modelo físico multidominio en SimMechanics, encapsulado de la plataforma

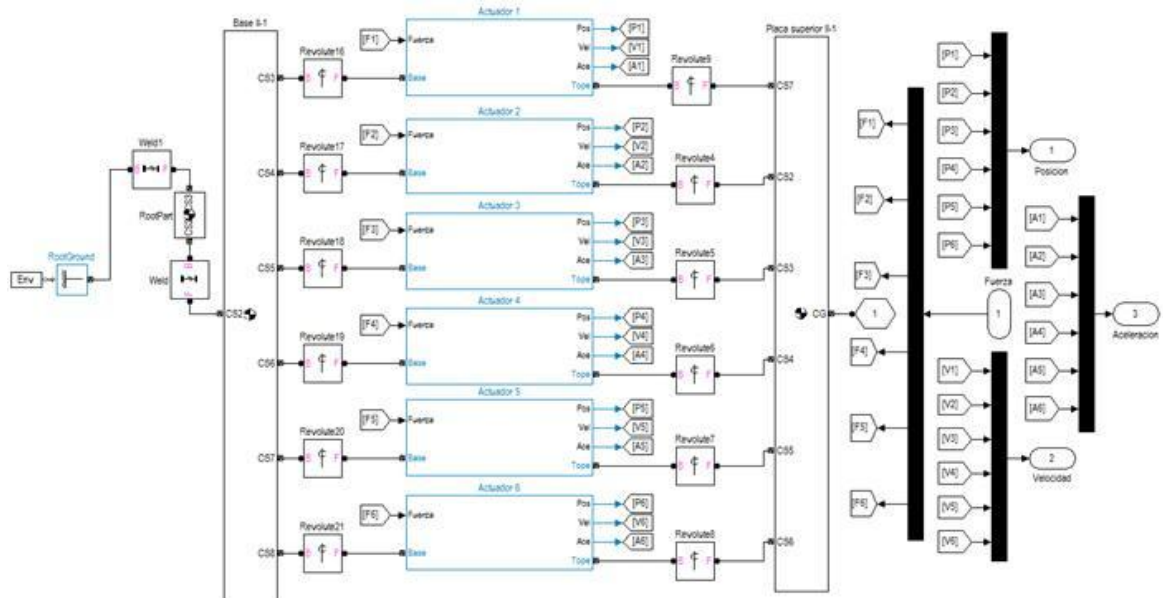


Fuente: Autores del proyecto.

La figura 53 muestra el modelo físico en multidominio de SimMechanics todos los parámetros son reconocidos por defecto a partir del modelo funcional. Esto permite simplificar el diseño en MATLAB y usar el traductor CAD-Simulink para facilitar el modelo de la maquina en SimMechanics.

Al dar doble Click aparecerá el modelo en diagramas de bloques como se muestra en la figura 54.

Figura 54. Modelo físico multidominio en SimMechanics de la plataforma Stewart



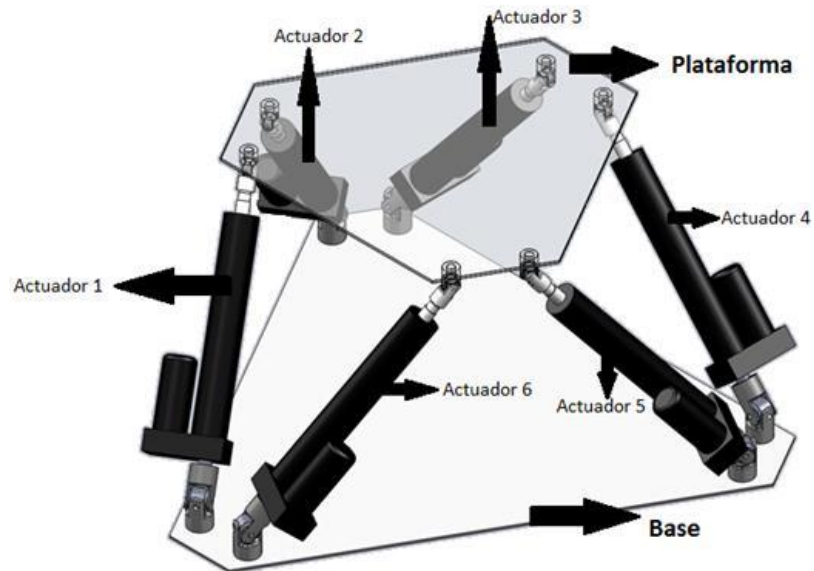
Fuente: Autores del proyecto.

El modelo completo en la simulación deberá incluir:

- Cuerpos y bloques.
- Usar bloques de SimMechanics con bloques de Simulink normales.
- Visualizar y animar sistemas mecánicos usando cuerpos.
- Un control básico para observar diferentes movimientos.

El modelo físico tiene por defecto cada uno de los elementos diseñados previamente en el SolidWorks, que se muestra en la figura 55.

Figura 55. Plataforma diseñada en SolidWorks



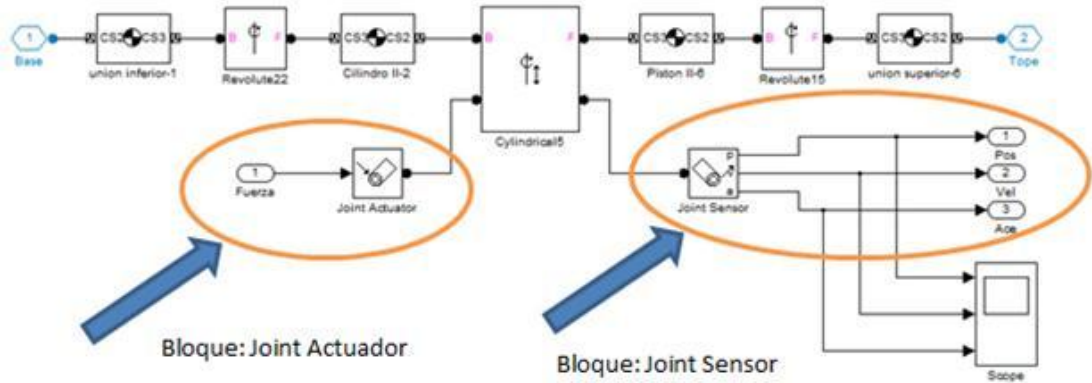
Fuente: Autores del proyecto.

#### 4.8 BLOQUES SENSORES Y ACTUADORES

Al dar doble Click en una de las juntas se puede agregar conectores y esto permite cambiar el número de puertos para sensores y/o actuadores. Desde la biblioteca del SimMechanics se inserta sensores y actuadores cerca de los nuevos puertos respectivamente. Los actuadores son configurados para crear señales de movimiento.

Finalmente se puede insertar bloques de visualización y operaciones matemáticas. Se configura la señal y su frecuencia, y se da las condiciones iniciales.

Figura 56. Bloques sensores y actuadores añadidos al actuador de la plataforma



Fuente: Autores del proyecto.

#### 4.8.1 Sensores

Un sensor es un dispositivo que al ser expuesto a un fenómeno físico (temperatura, fuerza, etc.) produce una señal de salida proporcional, que puede ser: eléctrica, mecánica, térmica, magnética, óptica o molecular (química). El objetivo del sensor es convertir los parámetros a ser medidos, controlados o supervisados en señales equivalentes que la etapa de control pueda interpretar.

#### 4.8.2 Actuadores

Los actuadores son transductores de salida que convierten la potencia eléctrica que se les aplica en un cambio físico, generando fuerza, movimiento, calor, flujo, etc., y son parte esencial de un sistema mecatrónico. Las acciones que ejecutan son comandadas por una unidad de control, provocando efecto sobre un proceso automatizado.

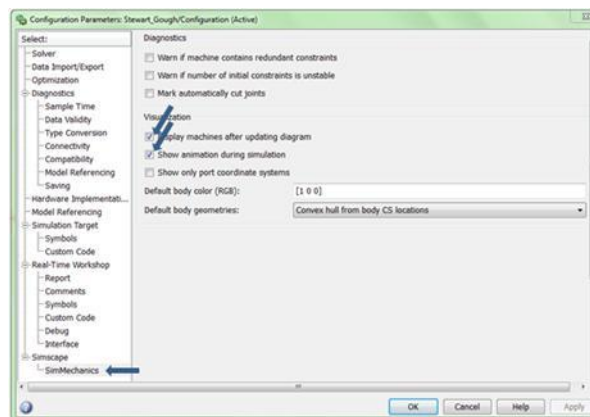
### 4.9 SIMULAR Y OBSERVAR EL MOVIMIENTO DE LA PLATAFORMA

Es momento de correr la simulación de la plataforma.

Para visualizar los movimientos del cuerpo:

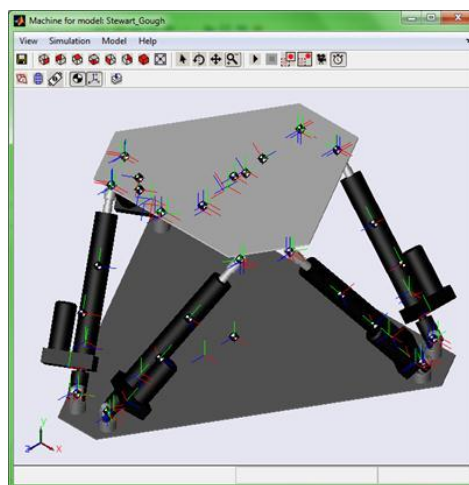
- Desde el menú de Simulación, seleccionar Configuration Parameters, después desplegar SimMechanics.
- Seleccionar Display Machines after updating diagram y Show animation during simulation. Dar click en OK.
- Dar Click en el botón Start.

Figura 57. Configuración de parámetros de la simulación



Fuente: Autores del proyecto.

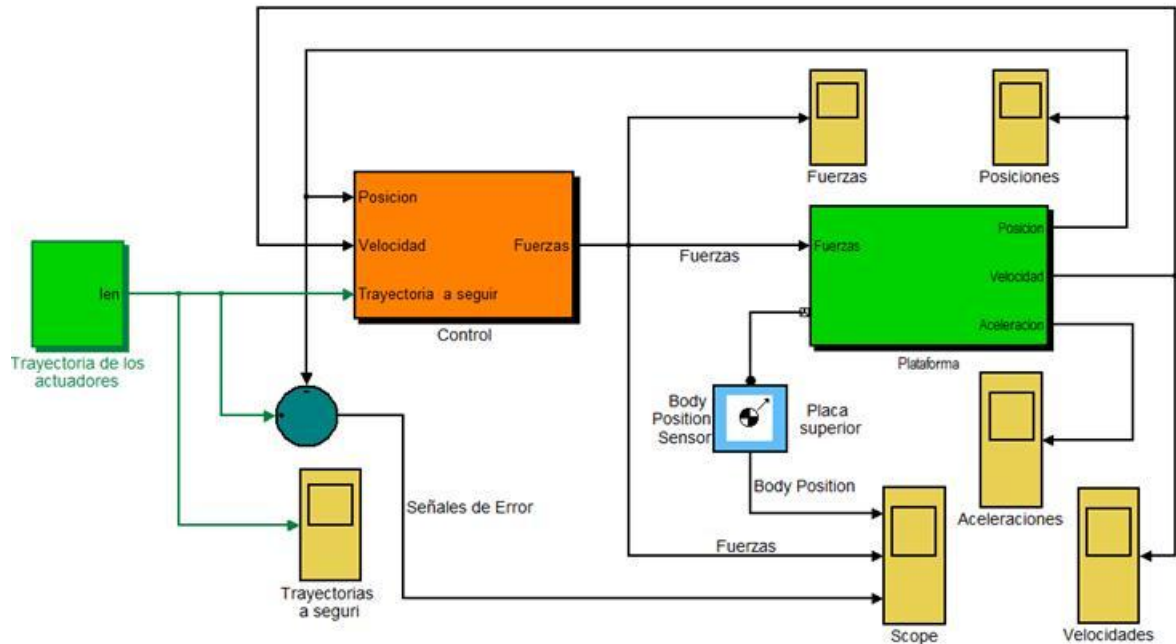
Figura 58. Presentación de la plataforma al iniciar la simulación



Fuente: Autores del proyecto.

## 4.10 MODELADO DEL MECANISMO PARALELO DE 6 GDL

Figura 59. Esquema de simulación de la plataforma Stewart-Gough con Simulink



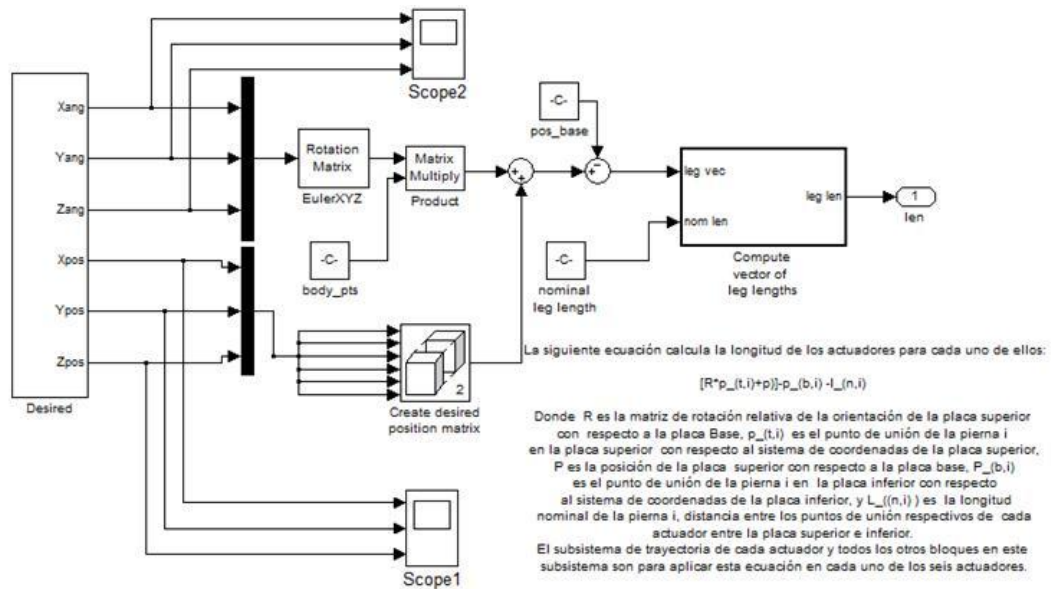
Fuente: Autores del proyecto.

Descripción de los bloques:

### 4.10.1 Bloque Trayectoria de los actuadores

Se encarga de generar la trayectoria a seguir por el conjunto móvil. El contenido del subsistema se puede apreciar en la figura 60.

Figura 60. Sistema de bloques para calcular la trayectoria de cada actuador



Fuente: Autores del proyecto.

Se generan los componentes en los tres ejes tanto angulares como de posición. Posteriormente a través de cálculo de matrices de rotación se lleva a las posiciones finales deseadas para el conjunto de la plataforma, cambiando los centros de referencia. Esto se diferencia de la posición base y se produce el cálculo de la longitud de cada pierna que permitirá llegar a la posición deseada, finalmente esta longitud se entrega como salida del bloque.

#### 4.10.2 Bloque de Control

El modelo de plataforma usa controlador simple PID y un bloque sensor de posición para medir el movimiento. La implementación de control de trayectoria se realiza aplicando fuerzas a la planta proporcionales al error de movimiento.

Una ley de control PID es una combinación de la variable detectada por el sensor, su integral en el tiempo y su primera derivada. Esta plataforma usa los errores de posición de cada pierna  $E_r$  y sus integrales y velocidades. La ley de control para cada pierna r tiene la forma:

$$F_{act,r} = K_p E_r + K_i \int_0^t E_r dt + K_d \left( \frac{dE_r}{dt} \right)$$

El controlador aplica la fuerza actuante  $F_{act,r}$  a través de la pierna:

Si  $E_r$  es positiva, la pierna es muy corta, y  $F_{act,r}$  es positiva (extensión).

Si  $E_r$  es negativa, la pierna es muy larga, y  $F_{act,r}$  es negativa (retracción).

Si  $E_r$  es cero, la pierna tiene exactamente la longitud deseada, y  $F_{act,r}$  es cero.

Las constantes  $K_p, K_i, y K_d$  son, respectivamente, las ganancias proporcional, integral y derivativa que actúan sobre las señales realimentadas por el sensor en la ley de control.

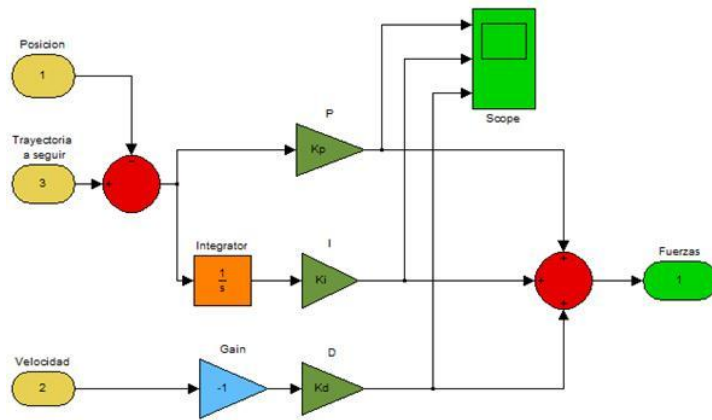
El primer término es proporcional al error de posición instantáneo de la pierna, o desviación de la referencia.

El segundo término es proporcional a la integral del error de posición de la pierna.

El tercer término es proporcional a la derivada del error de posición de la pierna en este caso vista como velocidad.

El resultado es  $F_{act,r}$  la fuerza del actuador aplicada por el controlador a las piernas. Los términos proporcional, integral y derivativo tienden a hacer que los puntos de unión superiores de las piernas  $P_{t,r}$  sigan las trayectorias de referencia suprimiendo el error de movimiento.

Figura 61. Detalle interno del bloque de Control



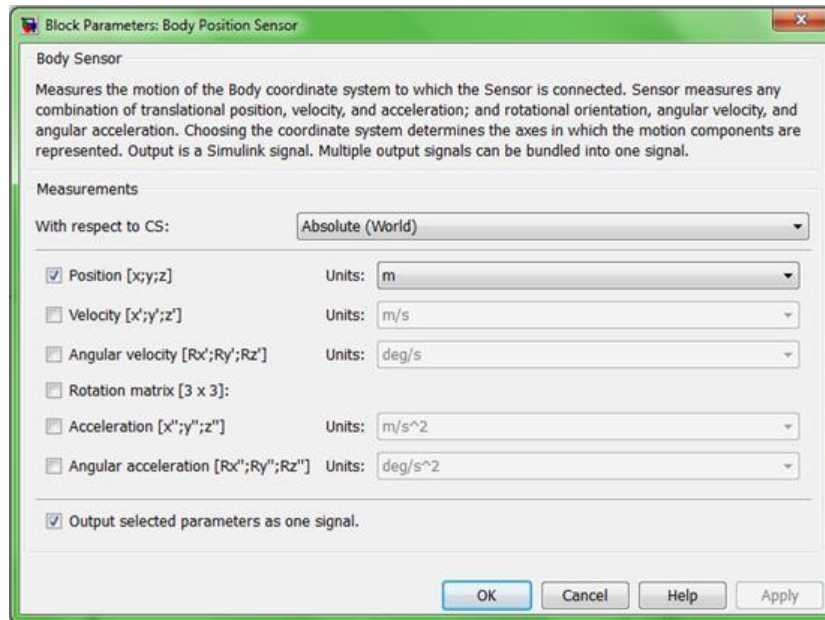
Fuente: Autores del proyecto.

Se trata del método de control más simple empleado en el modelo inicial. Existen otros algoritmos más sofisticados que son en su mayoría variaciones de la teoría del uso de filtros del tipo Washout.

#### 4.10.3 Bloque body position sensor

El control PID requiere las derivadas con respecto al tiempo del movimiento actual y el referencial. Para brindar una buena calidad de realismo, la planta de la plataforma usa un bloque sensor para detectar solo la actual posición de la plataforma, dejando que la velocidad sea calculada por el controlador. Encontrar la velocidad actual y de la referencia requiere tomar derivadas numéricas de las trayectorias actuales, cada una de las cuales es una función del tiempo.

Figura 62. Ventana de configuración del bloque body position sensor

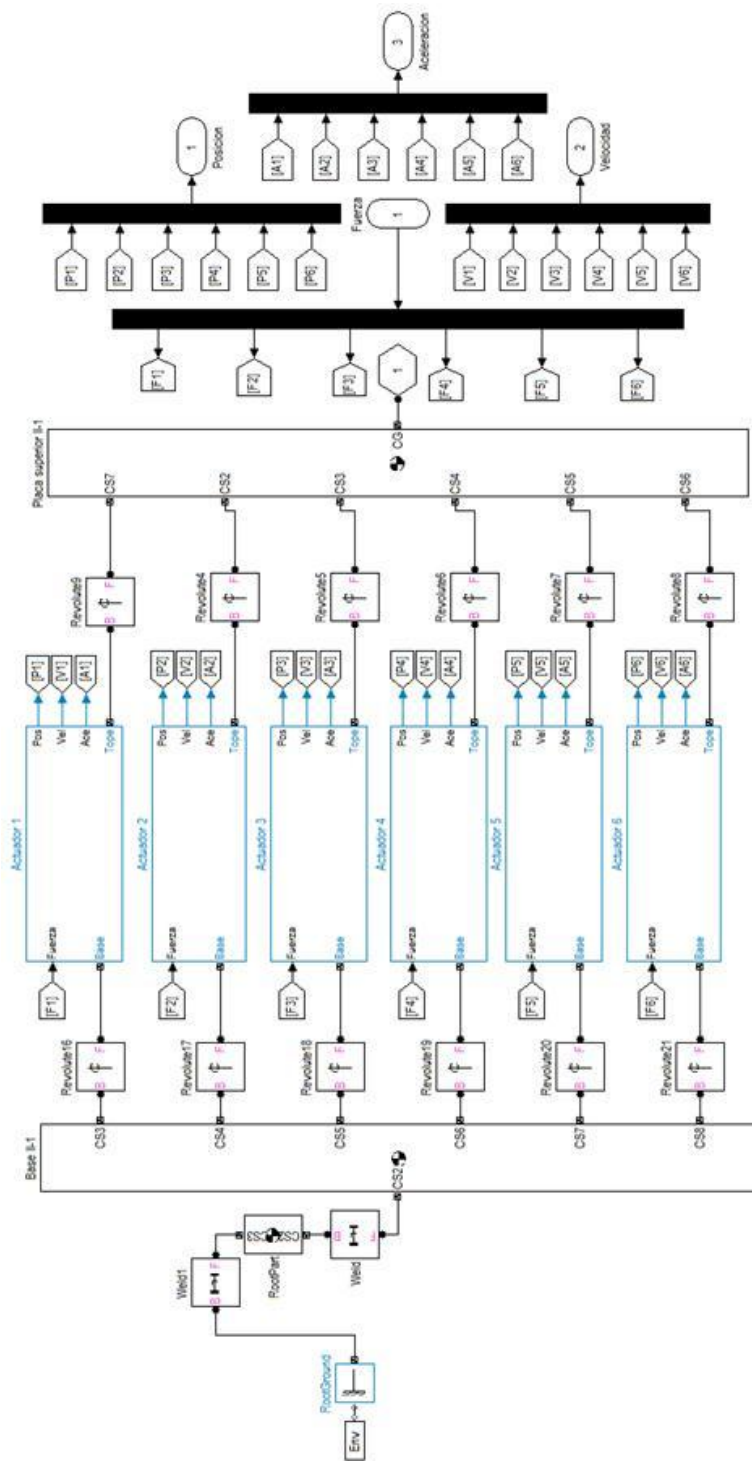


Fuente: Autores del proyecto.

#### 4.10.4 Bloque Plataforma

Consiste en el modelamiento de planta de la plataforma Stewart-Gough, en este caso empleando herramientas de Software en vez de los tradicionales procedimientos matemáticos que usan ecuaciones diferenciales. Está compuesta por las placas superior e inferior, unidos por las piernas, como puede apreciarse en la figura 63.

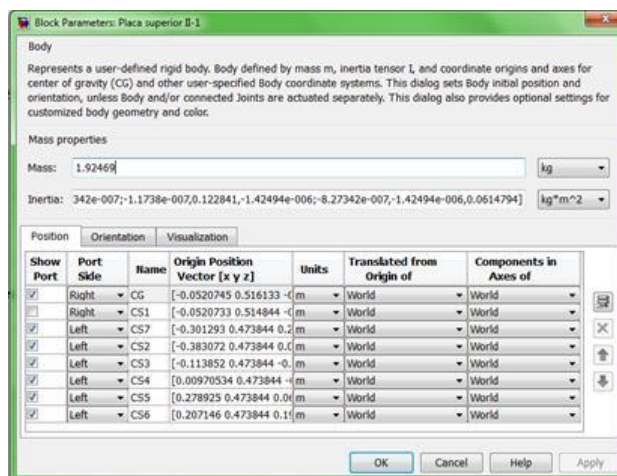
Figura 63. Detalle interno del bloque Plataforma



Fuente: Autores del proyecto.

En el caso de la placa superior, que representa finalmente el cuerpo que se va a mover, se cuenta con una ventana de configuración para sus piernas de coordenadas y centro de gravedad (Figura 64) las cuales arrastran todo el proceso posterior y posibilitan el cálculo de la dinámica, tarea que anteriormente hubiese demandado gran capacidad de recursos de cálculo y que ahora se ha simplificado significativamente.

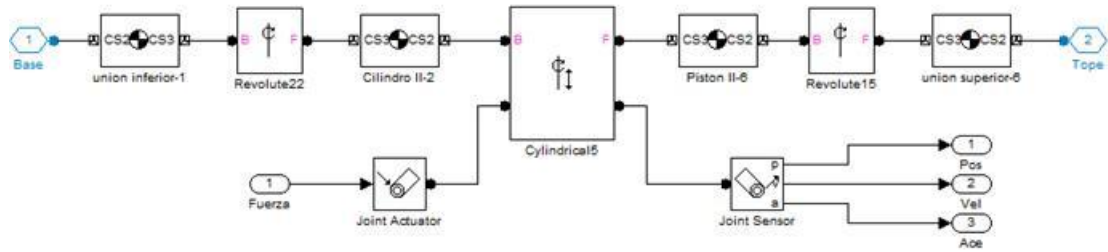
Figura 64. Ventana de configuración del plato superior



Fuente: Autores del proyecto.

Descomponiendo cada pierna se obtiene el siguiente esquema, dentro del cual se aprecian las características de las juntas empleadas: universal entre las piernas y las placas superior e inferior, y cilíndrica entre el actuador y el resto del conjunto. En este último caso, si bien el esquema corresponde a una articulación cilíndrica, en la realidad se trata de desplazamiento únicamente longitudinal sin ningún tipo de rotación.

Figura 65. Detalle interno del subsistema pierna



Fuente: Autores del proyecto.

#### 4.11 INTERFAZ GRAFICA DEL SIMULADOR

Para la simulación de trayectorias de la plataforma Stewart-Gough se ha diseñado una interfaz gráfica mediante la cual el usuario puede definir diferentes trayectorias y lograr simular los movimientos deseados en la plataforma, esta interfaz ha sido diseñada en Matlab por lo tanto es indispensable tener instalado este Software, preferiblemente en la versión 7.10.0 (Matlab R2010a) y tener instalado sobre el programa la aplicación SimMechanics link que permite importar archivos desde un programa CAD (como SolidWorks) a la interfaz gráfica de Simulink. Para una mejor comprensión y uso de la interfaz ver el Anexo D.

## 5. CONTROL BÁSICO DE LA PLATAFORMA STEWART-GOUGH

### 5.1 INTRODUCCIÓN

Generalmente, el sistema de control de un manipulador está compuesto por los siguientes módulos: los actuadores, los sensores, el controlador, el planificador de trayectorias, y el sistema de supervisión y decisión. Los actuadores son los encargados de accionar cada una de las articulaciones con el fin de posicionar y orientar el efector final. Estos pueden ser de tipo eléctrico, neumático o hidráulico. Los sensores por su parte, son los encargados de medir las variables de interés para el control del robot, y pueden ser de dos clases: los que proveen el reconocimiento del estado mecánico del manipulador (por ejemplo: sensores de posición, velocidad, fuerza), y los que permiten una realimentación del entorno del manipulador (por ejemplo: cámaras, sensores de ultrasonidos, etc.). El controlador recibe las consignas de referencia de las variables asociadas a la trayectoria del efector final, y que son generadas por el sistema de planificación de trayectorias. De acuerdo a la información entregada por los sensores, se generan las acciones de control adecuadas para cada actuador según el algoritmo de control empleado.

En este capítulo se propone el controlador articular de la plataforma Stewart-Gough. Para reducir el efecto de las perturbaciones externas y que la señal de control sea robusta frente a errores de modelado, el controlador debe considerar términos de realimentación de posición y velocidad. La dificultad de realizar el control en bucle cerrado proviene del hecho de que el robot es un sistema multidimensional, no lineal, fuertemente acoplado, y muy variable en el tiempo. A pesar de que el control de robots ha sido estudiado en numerosos trabajos, la dificultad es tal, que aún queda mucho por hacer en este campo.

Con el fin de encontrar la solución más sencilla y eficaz para conseguir control articular de la plataforma Stewart-Gough, inicialmente este capítulo describe los

distintos métodos encontrados en la literatura especializada. A continuación se discute su posible aplicación al control de robots rápidos y precisos. Se elige y describe detalladamente un método basado en el modelo dinámico del robot para el control de la plataforma Stewart-Gough.

## **5.2 DEFINICION DEL PROBLEMA DE CONTROL**

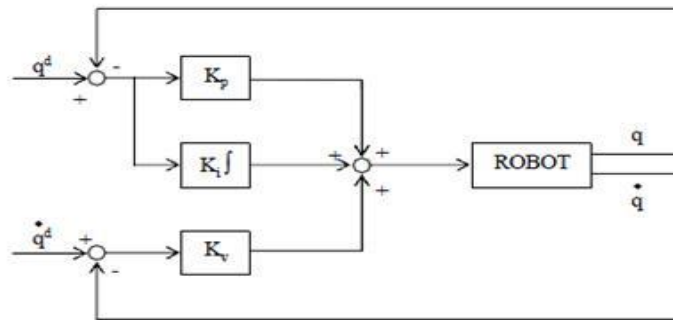
El problema de control (según Mathworks) se define como “*encontrar un método para accionar las seis piernas y llevar a una posición y orientación específica la plataforma móvil con respecto a la base fija*”. Estos valores deseados deben poder variar en el tiempo, siendo el modelo de la planta no lineal. Para la estrategia de control se debe considerar el accionamiento de las piernas y el censado de longitud y velocidad.

## **5.3 METODOS DE CONTROL DE ROBOTS**

### **5.3.1 Control clásico**

El modelo dinámico de un manipulador, describe un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales y acopladas. Por lo tanto en un control clásico, como es el de la mayoría de los robots industriales actuales, el mecanismo se considera un sistema lineal y cada una de las articulaciones se controla localmente con un regulador de tipo PID de ganancias constantes. Las ventajas de este sistema son la facilidad de implantación y el pequeño coste computacional. Las desventajas son que la respuesta temporal del robot varía según su configuración, se producen sobreoscilaciones e imprecisión en los movimientos rápidos. En muchas aplicaciones, estos inconvenientes no son graves, y a menudo se atenúan con la utilización de un reductor entre el motor y el brazo. El esquema de la Figura 66, ilustra este acercamiento, donde cada eje se regula independientemente de los otros.

Figura 66. Esquema de un control clásico PID

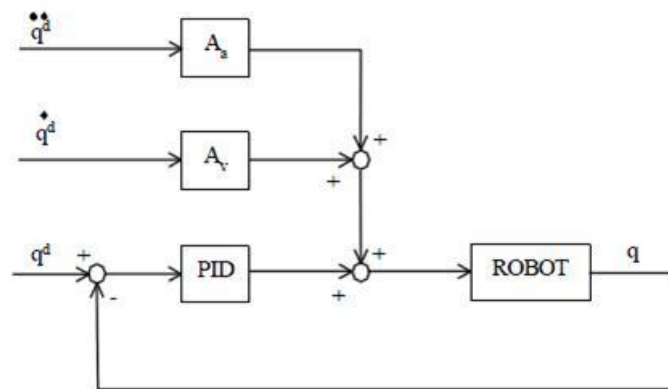


Fuente: [14].

Con un esquema como el de la Figura 66, se puede demostrar que el término integral es indispensable para eliminar el error estático en posición debido a la fuerza de gravedad y al rozamiento. No obstante, para una consigna de tipo rampa (velocidad constante) subsiste un error constante de arrastre.

Para una consigna parabólica (aceleración constante), este error se hace infinito. Para evitar estos problemas, algunos autores realizan un control a partir de la velocidad y/o aceleración local sobre cada uno de los ejes. Si no es posible medir la velocidad directamente, un término derivador sobre la posición jugará el mismo papel. El esquema de este tipo de control es el siguiente (Figura 67).

Figura 67. Control clásico PID con pre compensación



Fuente: [14].

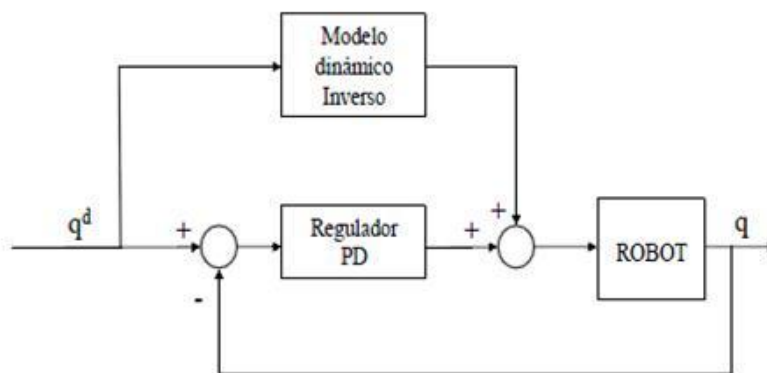
A pesar de que este esquema es más completo que el anterior, no tiene en cuenta las no linealidades y acoplamientos del robot. Esto ha llevado a los investigadores a desarrollar otros métodos de control.

### 5.3.2 Método basado en el modelo dinámico del robot

Este es un sistema de control más sofisticado que tiene en cuenta las fuerzas de interacción dinámicas.

Un primer esquema conocido como “feed-forward compensation” (Khosla, 1986), Figura 68, utiliza el modelo dinámico completo del robot para el control articular. El modelo dinámico inverso permite calcular los pares necesarios en cada articulación para seguir la trayectoria deseada. Este cálculo puede realizarse antes del movimiento (fuera de línea) o durante el movimiento (en línea o en tiempo real). En este último caso, debe desarrollarse un modelo con un coste computacional aceptable. Al aplicar el par calculado a cada articulación, la trayectoria se seguirá sin error si el modelo del robot es exacto y si no hay perturbaciones externas. En la práctica, ningún modelo es perfecto y debe introducirse un bucle de realimentación.

Figura 68. Control feed-forward Compensation



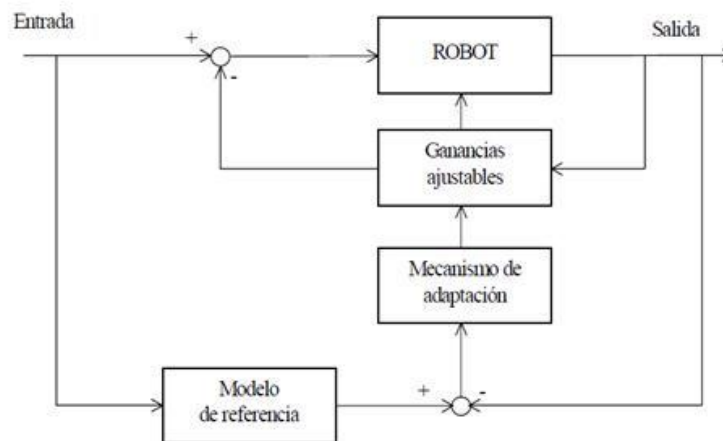
Fuente: [14].

### 5.3.3 Métodos adaptativos

Parece interesante utilizar el modelo dinámico del robot en el bucle de regulación, sin embargo, el tiempo empleado en establecer el modelo y el desconocimiento de sus parámetros han llevado a los investigadores a desarrollar otros métodos de control. En concreto, en los últimos años se ha concentrado un esfuerzo considerable en el control adaptativo. Estos métodos se basan en adaptar la ley de control según un criterio de error específico.

El control adaptativo con modelo de referencia o MRAC (Model reference Adaptive Control) es un esquema encontrado a menudo en la literatura. Esta estructura de control se muestra en la figura 69.

Figura 69. Control adaptativo con modelo de referencia



Fuente:

[14].

La idea fundamental, es forzar al robot a seguir un modelo de referencia lo mejor posible, esto se hace ajustando las ganancias de realimentación del control en función del error entre la respuesta del modelo y la del sistema real.

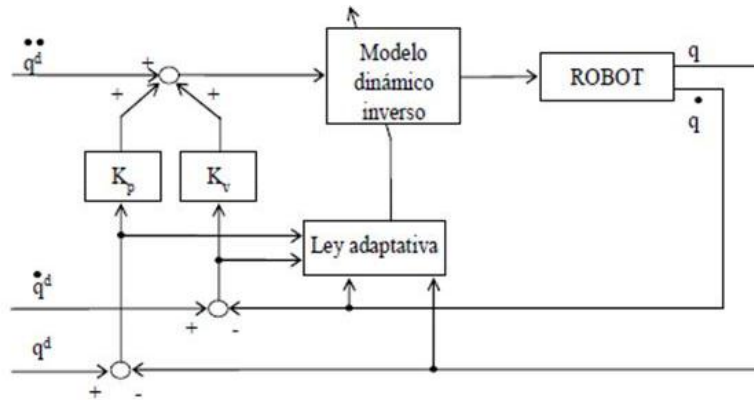
A menudo, el modelo de referencia escogido es una ecuación diferencial lineal de segundo orden para cada grado de libertad (Dobowsky and Desformes, 1979). Evidentemente, un modelo así no tiene en cuenta las fuerzas de gravedad y desprecia los efectos no lineales. Además, la estabilidad global de este esquema no está siempre garantizada, lo que lo convierte en inutilizable en la práctica, especialmente si, como en el caso de los robots rápidos, los parámetros varían tan rápidamente como el fenómeno de la adaptación. Se han propuesto otros esquemas MRAC basados en distintos conceptos; se puede hallar una síntesis de estos métodos en (Hsia, 1986), (Craig, 88).

Se encuentran en la literatura otros algoritmos basados en la teoría de los reguladores autoadaptativos (Koivo and Guo, 1981), (Van and Griethuysen, 1987), pero tienen la desventaja de que el robot debe modelarse como un sistema lineal desacoplado, lo cual no corresponde con la realidad.

Así, la mayoría de los trabajos basados en el control adaptativo simplemente han querido aplicar a los robots las teorías desarrolladas para los sistemas lineales, de modo que a pesar de las numerosas publicaciones sobre el tema, los resultados obtenidos son poco prometedores.

Por esta razón, en los últimos años se ha producido la reaparición del uso del modelo dinámico en los métodos adaptativos; Craig (1988) propone un método adaptativo basado en el esquema del control por desacoplamiento no lineal que se muestra en la Figura 70.

Figura 70. Control adaptativo con identificación de los parámetros del modelo

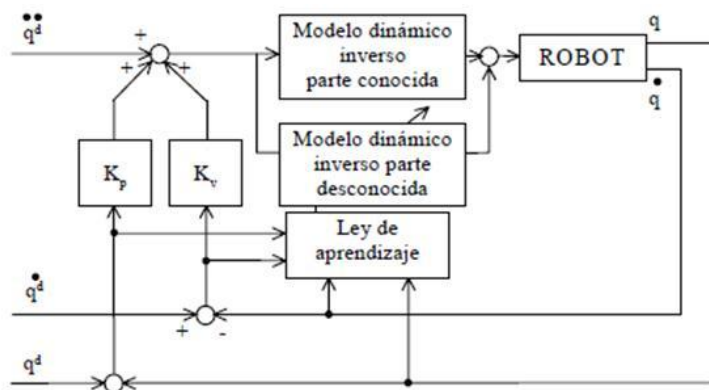


Fuente: [14].

La idea consiste en identificar los parámetros del modelo no lineal completo antes que los de un modelo lineal que no refleja la realidad. Faessler (1988a) también adopta este esquema, pero lo amplía con un modelo de referencia lineal de segundo orden del sistema desacoplado.

Cuando la trayectoria es repetitiva, como es a menudo el caso en las aplicaciones robóticas, se puede utilizar un control por aprendizaje para corregir los fenómenos no modelados, y de este modo el robot irá corrigiendo sus errores de seguimiento de la trayectoria. Craig (1988) propone un esquema de este tipo, Figura 71.

Figura 71. Control por aprendizaje



Fuente: [14].

## 5.4 ELECCION DEL TIPO DE CONTROLADOR

El controlador PID básico combina las acciones proporcional, derivativa e integral mediante el siguiente algoritmo de control:

$$u(t) = K_c \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(T) dT + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) = P + I + D$$

Como es bien sabido, el término proporcional contribuye a la reducción del error en régimen permanente. Ahora bien, la ganancia requerida para que dicho error se reduzca hasta los niveles deseados con la aplicación de un mero control proporcional puede ser incompatible con las especificaciones de sobreoscilación y estabilidad relativa del sistema. La acción integral tiene un efecto cualitativo sobre el error en régimen permanente, ya que aumenta el tipo del sistema y garantiza la anulación de éste cuando la referencia es de tipo escalón. El término derivativo permite una cierta predicción del futuro error y por tanto juega un papel anticipativo.

La primera decisión en el diseño de un sistema de control PID es la elección del controlador, posteriormente, se ajustaran los parámetros del mismo.

## 5.5 IMPLEMENTACION DEL CONTROL DE LA PLATAFORMA (PID CLÁSICO)

El control automático sienta sus bases esencialmente en el concepto de realimentación. Este concepto se concreta en una estructura de control en la cual el controlador se puede entender como un operador, que en función de la salida deseada de la planta, y la salida real medida, proporciona la acción de control a aplicar sobre el sistema.

Si bien existen muchos tipos de control basados en este principio, el control proporcional, derivativo e integral (PID), es el que mayor implantación tiene en la industria de procesos. Dicho control consiste esencialmente en obtener la acción de control como la suma de tres términos: término proporcional, término derivativo y término integral. Se pueden obtener variaciones a este esquema consistentes en la no introducción de los términos derivativo e integral; en dicho caso el control coincide con el llamado control proporcional. Si solamente se prescinde de la acción integral, el control se denomina control proporcional derivativo (PD). Si, por el contrario, el único término que desaparece es el derivativo, el control se denomina proporcional integral (PI). Según una estimación dada por Amstrom [7]: El 95% de los bucles de control en la industria son del tipo PID, y fundamentalmente PI. La amplia implantación del control PID en la industria, se debe fundamentalmente a los siguientes factores:

- La actuación en función de la señal de error proporciona una estructura de realimentación negativa, que como es conocido, permite obtener en muchas ocasiones un comportamiento satisfactorio del sistema a pesar de la existencia de perturbaciones e incertidumbres sobre el modelo del sistema.
- El término derivativo proporciona cierta anticipación sobre la respuesta al sistema.
- El término integral permite eliminar el error en régimen permanente.
- El control PID obtiene resultados satisfactorios para una amplia gama de procesos.
- Existen sencillas reglas heurísticas que permiten obtener los parámetros del controlador PID. Dichas reglas hacen posible el ajuste del controlador, sin

presuponer un gran conocimiento en teoría de control automático por parte del operador.

- En estructuras de control más sofisticadas, donde exista cierta organización jerárquica, el controlador PID puede utilizarse a un nivel bajo.
- El controlador PID se puede adquirir como un módulo compacto, donde los distintos parámetros del controlador se pueden ajustar manualmente. Actualmente muchos de los PID's industriales proporcionan ciertas opciones de autosintonía.

## **5.6 ESTRATEGIA DE CONTROL IMPLEMENTADA**

En las típicas aplicaciones de robot de serie, el problema de cinemática directa es fácil, mientras que el problema de cinemática inversa es más difícil. El problema de cinemática directa calcula la posición y la orientación del efector final del robot dado los ángulos de articulación, mientras que el problema de cinemática inversa calcula los ángulos de articulación (múltiples), dada la posición del efector final y la orientación. En la plataforma de Stewart-Gough, es fácil de calcular los ángulos de articulación (longitud de los actuadores) dadas la posición y orientación del efector final (placa superior).

El objetivo básico de este controlador es especificar la trayectoria de la placa superior en la posición y orientación deseada. Después se traza esta trayectoria deseada a la trayectoria correspondiente en los actuadores de la plataforma con cinemática inversa. Por último, se utiliza un controlador de nivel bajo para cada actuador con el fin de controlar la trayectoria deseada del mismo. De esta manera, evitamos la solución de la cinemática directa, que es mucho más complicada, de la plataforma Stewart-Gough planteada.

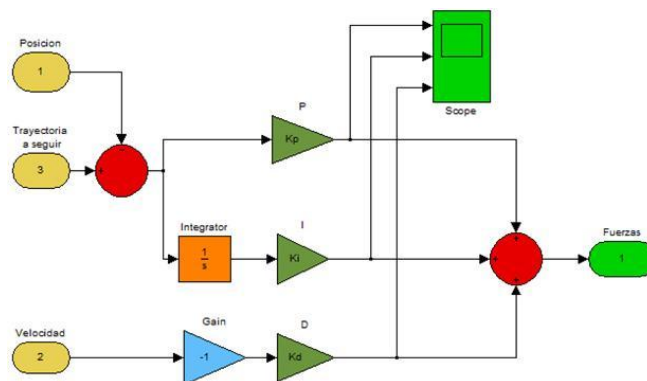
El sistema de control se compone de dos secciones: la trayectoria del actuador y el controlador. La trayectoria del actuador genera las longitudes de los actuadores deseados para cada paso de tiempo. Se inicia con los ángulos de rotación deseados y la posición de la placa superior en cada uno de los tres ejes y después se calcula las longitudes de los actuadores para lograr la posición deseada de la plataforma. La siguiente ecuación calcula la longitud de los actuadores para cada uno de ellos:

$$\|R * p_{t,i} + p) - p_{b,i}\| - l_{n,i}$$

Donde  $R$  es la matriz de rotación relativa de la orientación de la placa superior con respecto a la placa Base,  $p_{t,i}$  es el punto de unión de la pierna  $i$  en la placa superior con respecto al sistema de coordenadas de la placa superior,  $P$  es la posición de la placa superior con respecto a la placa base,  $P_{b,i}$  es el punto de unión de la pierna  $i$  en la placa inferior con respecto al sistema de coordenadas de la placa inferior, y  $L_{(n,i)}$  es la longitud nominal de la pierna  $i$ , distancia entre los puntos de unión respectivos de cada actuador entre la placa superior e inferior. El subsistema de trayectoria de cada actuador y todos los otros bloques en este subsistema son para aplicar esta ecuación en cada uno de los seis actuadores.

### 5.6.1 Control PID simple de bajo nivel

Figura 72. Esquema de un control clásico PID implementado



Fuente: Autores del proyecto.

En primer lugar se implementó un control simple de bajo nivel basado en el diseño de un PID clásico. Las entradas a este controlador son la posición real de la pierna, la velocidad y la posición deseada del actuador. El subsistema que calcula la trayectoria del actuador no genera velocidades en los mismos, aunque uno más complicado podría. Después, se genera un error en la posición y crea una fuerza basada en la ganancia y la integral del error. Y se dispone también de una realimentación de velocidad.

### **5.6.1.1 Ajuste de parámetros**

El objetivo del ajuste de los parámetros PID es lograr que el bucle de control corrija eficazmente y en el mínimo tiempo los efectos de las perturbaciones; se tiene que lograr la mínima integral de error. Si los parámetros del controlador PID (la ganancia del proporcional, integral y derivativo) se eligen incorrectamente, el proceso a controlar puede ser inestable.

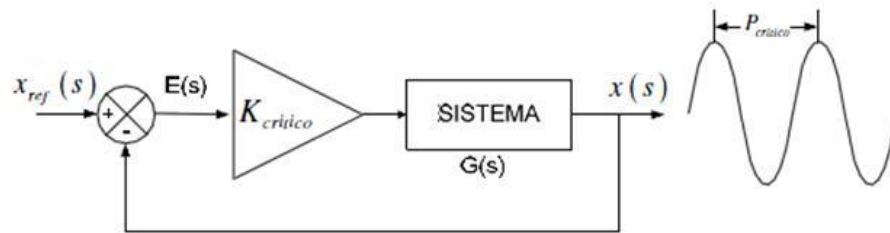
Hay varios métodos para ajustar un lazo de PID. El método más efectivo generalmente requiere del desarrollo de alguna forma del modelo del proceso, para luego elegir KP, KI y KD basándose en los parámetros del modelo dinámico. Otra opción es realizar un ajuste manual.

Un método de ajuste consiste en establecer primero los valores de I y D a cero. A continuación, se incrementa P hasta que la salida del lazo oscile. Se establece P a un valor anterior al configurado previamente. Después se incrementa I hasta que el proceso se ajuste en el tiempo requerido (aunque subir mucho I puede causar inestabilidad). Finalmente, se incrementa D, si es necesario, hasta que el lazo sea lo suficientemente rápido para alcanzar su referencia tras una variación brusca de la carga.

Para el sistema de control implementado el ajuste de los parámetros Kp, Ki, Kd se realizó bajo el método presentado por los autores ZIEGLER Y NICHOLS (1942). Aplicando el método de Ziegler-Nichols presentado en la Figura 73, se debe

procurar un valor de ganancia crítica ( $K_{critico}$ ) que es un sistema oscilante continuamente a lo largo del tiempo. En esta respuesta se mide el periodo crítico ( $P_{critico}$ ) y se aplica la Tabla 5, para obtener los parámetros iniciales del controlador PID.

Figura 73. Método de oscilación permanente de Ziegler-Nichols



Fuente: Autores del proyecto.

Tabla 5. Parámetros de ajuste por el método de Ziegler-Nichols para un controlador PID

	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$0.5 K_{critico}$	-0-	-0-
<b>PI</b>	$0.45 K_{critico}$	$\frac{P_{critico}}{1.2}$	-0-
<b>PID</b>	$0.6 K_{critico}$	$0.5P_{critico}$	$0.125P_{critico}$

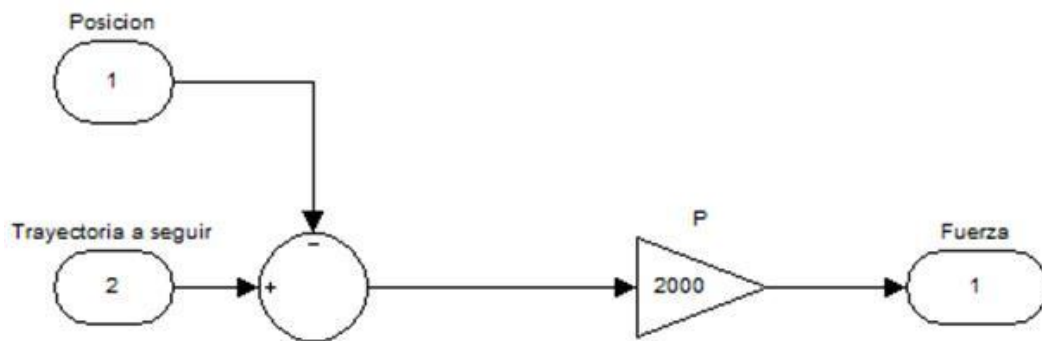
Fuente: Autores del proyecto.

### 5.6.1.2 Calculo del $K_{critico}$

1. Utilizando sólo control proporcional, comenzando con un valor de ganancia pequeño, se incrementó la ganancia hasta que el lazo comenzó a oscilar. Notar

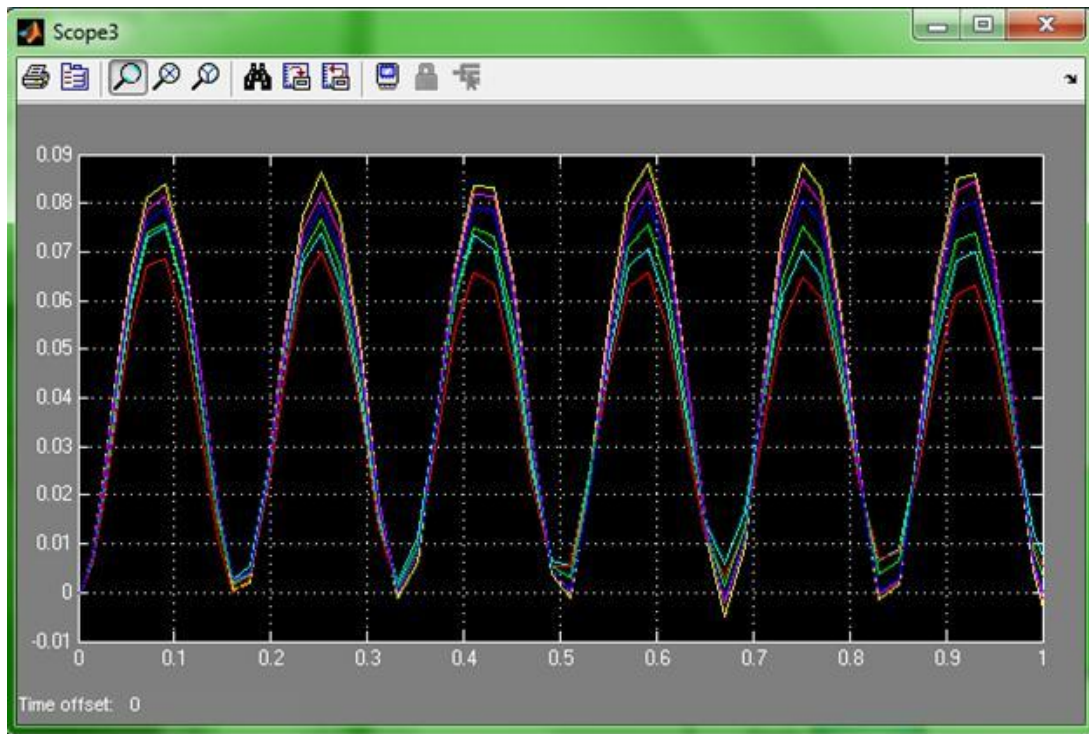
que se requiere oscilaciones lineales y que estas deben ser observadas en la salida del controlador. Se realizó este proceso aplicando una señal escalón con un intervalo de tiempo de 0 Segundos (retardo).

Figura 74. Sistema introducido en el bloque de control



Fuente: Autores del proyecto.

Figura 75. Resultados obtenidos método de oscilación permanente



Fuente: Autores del proyecto.

2. Se registró la ganancia crítica del controlador  $K_p = K_c$  y el período de oscilación de la salida del controlador,  $P_c$ , obteniéndose:

$$K_c=2000$$

$$P_c=0.2$$

Aplicando los parámetros de ajuste, Tabla 5, se obtiene:

Tabla 6. Resultados Obtenidos

	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	1000	-0-	-0-
<b>PI</b>	900	0.1667	-0-
<b>PID</b>	1200	0.1	0.025

Fuente: Autores del proyecto.

Para introducir los valores a Matlab se deben tener en cuenta las siguientes ecuaciones para el cálculo de las constantes que se van a utilizar en el sistema de control.

$$P = K_p$$

$$I = \frac{K_p}{T_i}$$

$$D = K_p T_d$$

Aplicando las ecuaciones se obtienen los siguientes resultados:

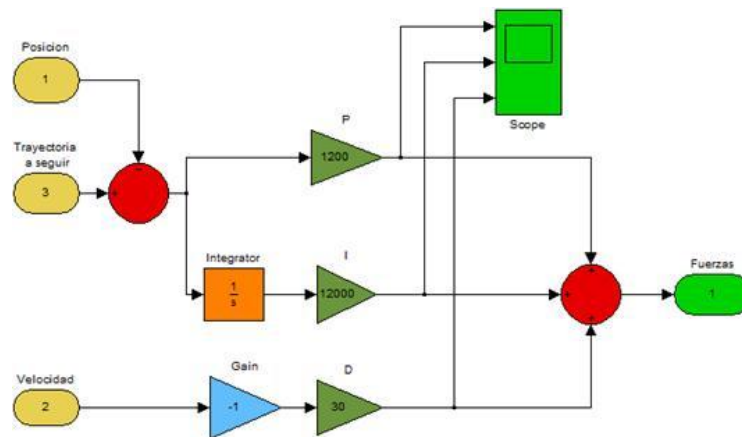
$$P=1200$$

$$I=12000$$

$$D=30$$

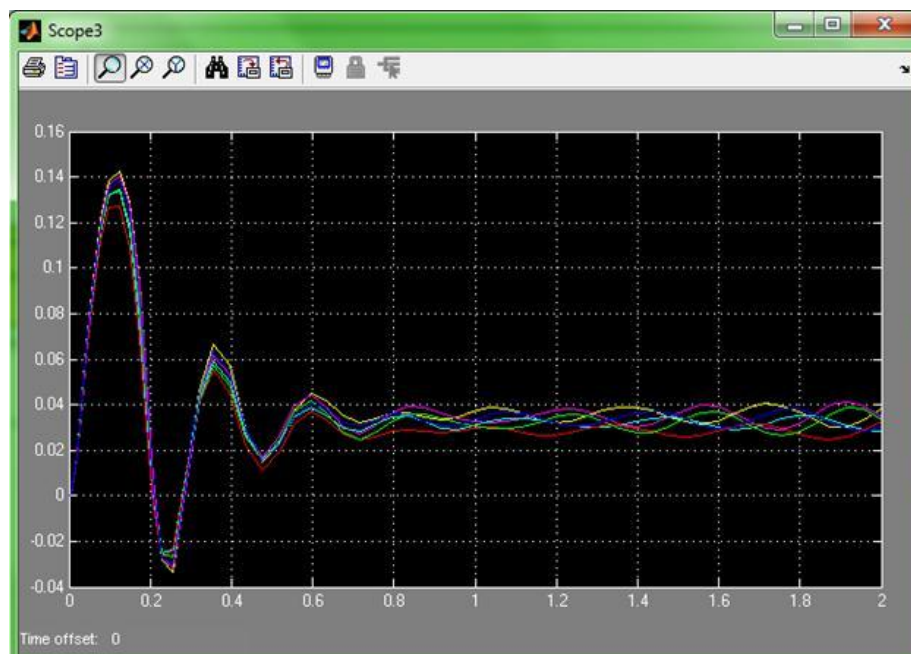
La respuesta del sistema al controlador PID con los parámetros iniciales obtenidos (Tabla 6) por el método de ajuste de Ziegler-Nichols es presentado en la Figura 76 donde se observa un tiempo de estabilización de aproximadamente 0.6 segundos.

Figura 76. Diagrama de control con los parámetros obtenidos



Fuente: Autores del proyecto.

Figura 77. Respuesta del controlador PID con los parámetros obtenidos



Fuente: Autores del proyecto.

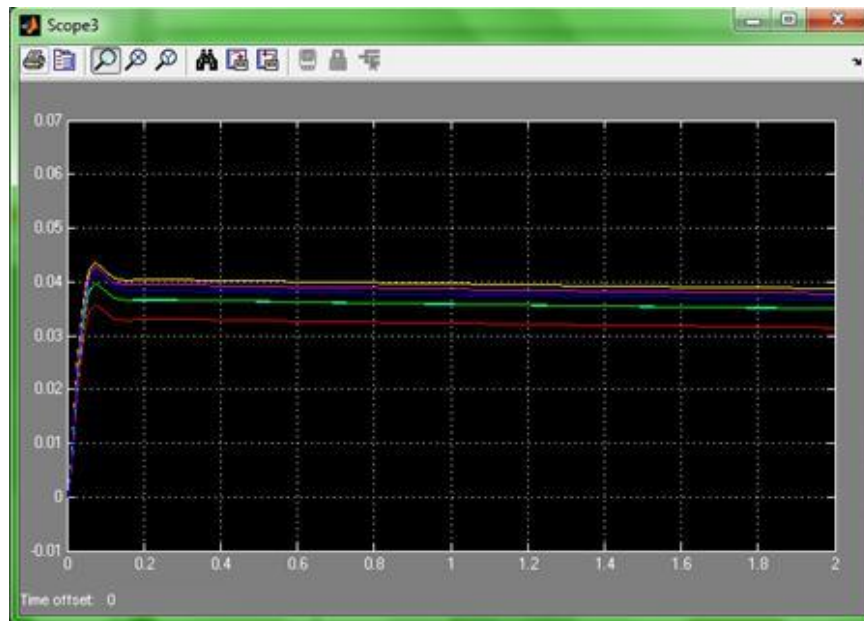
Tabla 7. Parámetros obtenidos del PID sin ajuste manual

Parámetro	Valor aproximado
Tiempo de pico [Tp]	0.12 [S]
Tiempo de asentamiento [Ts]	0.8 [S]
Overshoot [%OS]	250%

Fuente: Autores del proyecto.

Por ser un sistema de control de posición se desea que el sistema tenga una rápida respuesta y que tenga el menor valor de *overshoot* posible, basado en este criterio se realiza un ajuste manual de los parámetros iniciales del controlador PID obteniendo como respuesta la Figura 78. En esta figura se observa que con los valores  $K_p = 4000$ ,  $K_i = 1000$  y  $K_d = 90$  se aumento la rapidez del sistema evitando el *overshoot*.

Figura 78. Respuesta del controlador PID ajustado



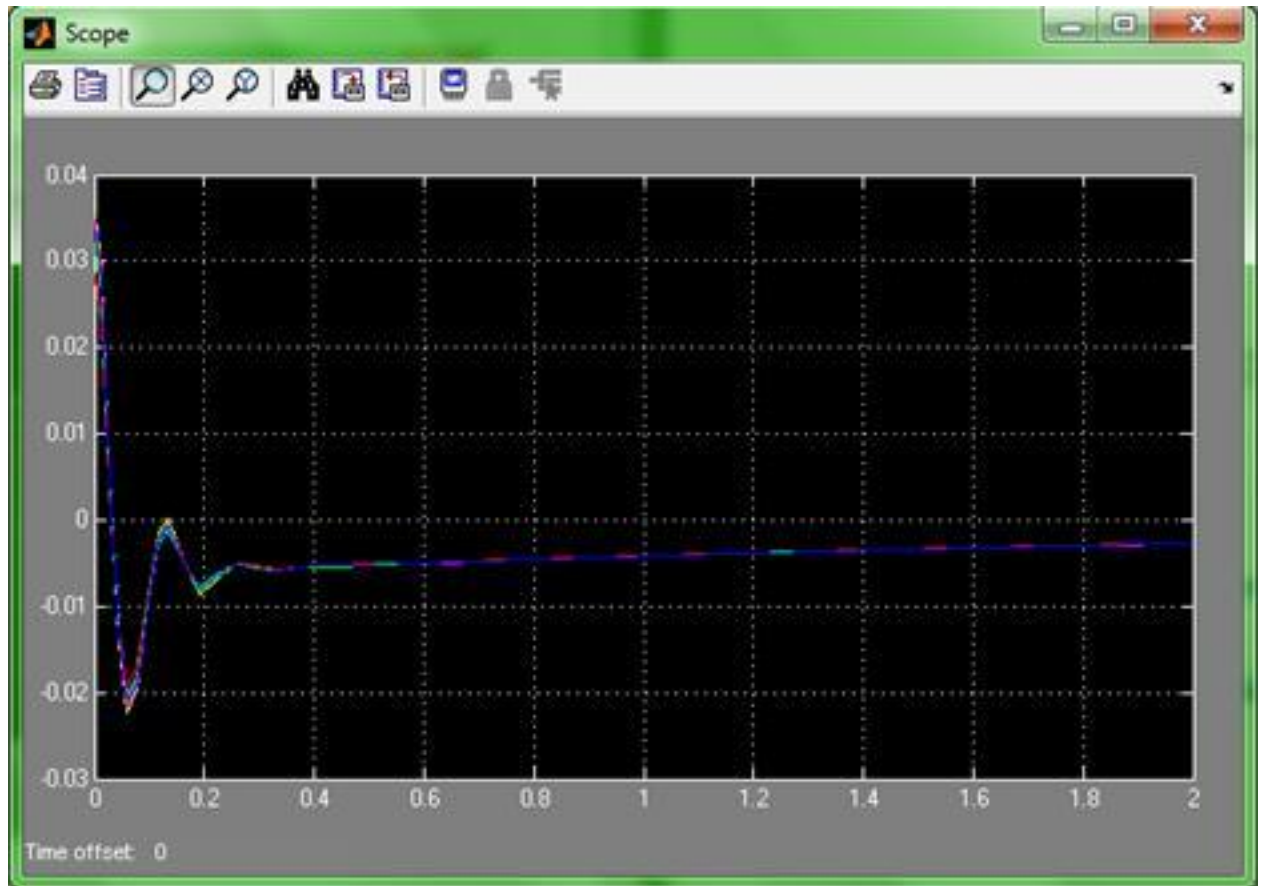
Fuente: Autores del proyecto.

Tabla 8. Parámetros obtenidos del PID ajustado

Parámetro	Valor aproximado
Tiempo de pico [Tp]	0.07 [S]
Tiempo de establecimiento [Ts]	0.125 [S]
Overshoot [%OS]	8%

Fuente: Autores del proyecto.

Figura 79. Señales de error obtenidas con los parámetros ajustados del PID



Fuente: Autores del proyecto.

Con base en los resultados obtenidos en las tablas 7 y 8, el control PID ajustado manualmente ofrece resultados favorables y se ajusta a las necesidades de simulación del presente proyecto.

## **5.7 PROPUESTA DE DISEÑO PARA LA PLATAFORMA STEWART-GOUGH**

### **5.7.1 Diseño conceptual**

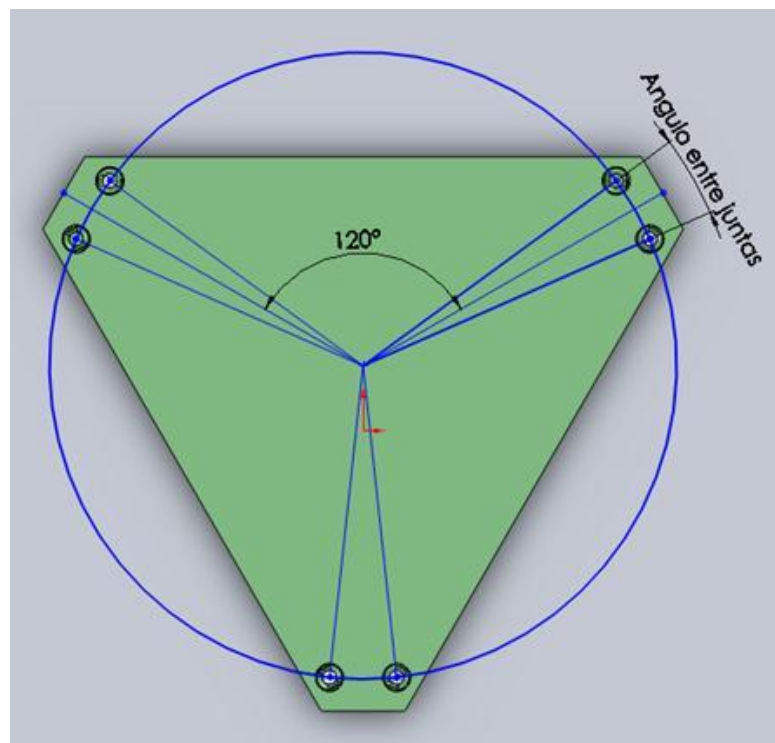
Dentro de las propuestas para el diseño de plataformas paralelas se han presentado diversas alternativas dependiendo del tipo de plataforma y el criterio de diseño. Cuando se habla de criterios se hace referencia al aspecto de la plataforma que se quiere mejorar o en el cual se quiere tener mejor desempeño, dentro de estos se puede contar la rigidez, la dinámica (menores inercias, mayores aceleraciones), la destreza, el espacio de trabajo y criterios combinados [3]. El proceso llevado a cabo generalmente consiste en determinar una geometría a partir de uno de estos criterios para luego verificar su desempeño respecto a los demás. Dentro de las principales características a evaluar se tienen:

- Geométricas: Tamaño de la plataforma, tamaño y forma del volumen de trabajo, ángulo de movimiento de las juntas pasivas y de los actuadores, errores de posición del efector final, facilidad de seguimiento de la trayectoria, singularidades dentro del espacio de trabajo.
- Velocidad: Máximas y mínimas velocidades de los actuadores y la plataforma móvil.
- Estática: Fuerzas y torques sobre los eslabones y la plataforma móvil, rigidez, ubicación del centro de masa.
- Dinámica: Aceleraciones máximas de los actuadores y la plataforma móvil.

Teniendo en cuenta que para el diseño de una plataforma Stewart-Gough se deben considerar una gran cantidad de parámetros, por ejemplo, para la ubicación de las juntas se necesitan 36 parámetros (3 coordenadas para cada uno de los 12 puntos), se sugiere realizar varias suposiciones para llevar a cabo la reducción de parámetros.

Hay que definir la geometría de las placas y con base en ella definir la ubicación de cada uno de los 6 actuadores los más proporcional posible, con lo cual se propone que las juntas tanto en la plataforma base como en la móvil estén contenidas en una circunferencia y que su disposición sea simétrica respecto a tres ejes que se encuentran a  $120^\circ$  como se observa en la figura 80.

Figura 80. Geometría de las placas de la plataforma Stewart-Gough



Fuente: Autores del proyecto.

Adicionalmente se deben determinar las longitudes de los actuadores (mínima y máxima) para cada uno de los 6 actuadores.

En cuanto a las juntas pasivas, se decidió utilizar articulaciones universales en ambos anillos por facilidad de manufactura ya que las juntas esféricas accesibles en el mercado local tienen poca amplitud de movimiento y su montaje es complicado.

Finalmente para establecer una propuesta de diseño y teniendo en cuenta que hasta el momento el objetivo del presente proyecto es el modelado matemático y simulación de la plataforma, no se está estableciendo para una aplicación en especial y que se pretende construir dicha plataforma en un proyecto futuro como ejemplar de estudio en el grupo de investigación DICBOT y en los grupos de sistemas dinámicos, Ingeniería de control y el futuro curso de robótica, se sugieren unas dimensiones de una plataforma Stewart-Gough comprendidas en el rango establecidas dentro del plan de proyecto de grado; las cuales podrán ser consultadas en el Anexo E.

## 6. CONCLUSIONES

- Se realizó el modelo matemático y simulación de una plataforma de 6 grados de libertad “Plataforma Stewart-Gough” mediante la combinación del método Newton-Euler con la formulación de Lagrange, obteniéndose un sistema de ecuaciones ajustado al sistema.
- Se desarrolló el modelo cinemático y dinámico inverso de la plataforma, posteriormente se introdujo este sistema de ecuaciones en el Software de Matlab-Simulink con su respectiva interfaz gráfica, mediante la cual se pueden observar resultados que servirán para posteriores diseños.
- Haciendo uso de la aplicación SimMechanics que está basado en Simscape que abarca el modelado y el diseño de sistemas de acuerdo con los principios físicos básicos, se creó el modelo de la plataforma incorporando el Software SolidWorks con Matlab y se obtuvo el modelado mediante bloques que representan componentes físicos, posteriormente se realizó la simulación mediante el uso de una interfaz gráfica y finalmente se observó el comportamiento de la plataforma frente a diferentes datos de entrada.
- Se propuso un control PID básico de la plataforma Stewart-Gough el cual ofrece muy buenos resultados, con un tiempo de asentamiento de 0.125 [S] y Overshoot del 8% aproximadamente; por otro lado se da una propuesta de diseño y se anexan planos de construcción para el mismo así como una propuesta de selección del actuador.

## 7. RECOMENDACIONES

- La simulación de la plataforma Stewart-Gough realiza movimientos a partir de funciones descritas para el centroide de la plataforma superior, sería recomendable establecer una aplicación específica con la cual desarrollar un estudio más concreto contemplando así todos sus posibles campos de acción y poder establecer un tipo de control adecuado para la aplicación requerida.
- El estudio e implementación de la robótica esta tomando cada mas importancia en el mundo por lo cual se recomienda crear y poner en funcionamiento un curso y “o” laboratorio en la Universidad Industrial de Santander específicamente en la Escuela de ingeniería mecánica como un excelente complemento en el aprendizaje de la ingeniería mecánica, tomando como material intangible este proyecto y todos los demás referentes al tema.
- Continuar con el estudio de la plataforma Stewart-Gough, implementando una mejor estrategia de control, adecuada para la aplicación requerida, su posterior construcción y puesta en funcionamiento, teniendo como soporte el material suministrado en este proyecto.
- La Universidad industrial de Santander cuenta con licencia de uso de diferentes programas entre ellos Matlab Y SolidWorks, se recomienda que la escuela de Ingeniería mecánica promueva el uso de estas importantes herramientas informáticas con la realización de cursos dirigidos e invitar a conferencistas a dictar seminarios de manejo de estas herramientas tan potentes; todo esto como complemento para lograr la formación de ingenieros adaptados al uso de nuevas tecnologías.

- Se recomienda en un estudio posterior calcular el espacio de trabajo que va a tener la plataforma con el fin de poder visualizar dicho espacio y tomar mejores decisiones en el diseño y optimización.
- En el análisis matemático realizado en la presente tesis no se tuvieron en cuenta los efectos relacionados con la fricción, por lo tanto en estudios posteriores se recomienda mejorar el sistema de ecuaciones incluyendo los efectos de la fricción y obtener mejores resultados que se acerquen aun mas al comportamiento real.

## 8. BIBLIOGRAFIA

- [1] **BARRIENTOS, Antonio, PEÑÍN, Luís, BALAGUER, Carlos, ARACIL, Rafael.** Fundamentos de robótica. 1a. ed. Madrid: MacGraw-Hill, 1997.
- [2] **BEER, F. Johnston E. Mecânica Vetorial para Engenheiros,** Estática. 3 ed. São Paulo, McGraw-Hill. 1980.
- [3] **CLAVIJO, Juan Carlos y RAMIREZ, Luis Reinaldo.** Diseño, modelamiento y simulación de una mesa sísmica unidireccional hidráulica. Trabajo de grado Ingeniero Mecánico. Bucaramanga. Universidad Industrial de Santander. Facultad de ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de ingeniería mecánica, 2011. 122 p.
- [4] **COVELLI, Javier Fernando y DUARTE, Fredy Alonso.** Desarrollo de un modelo matemático para simular la dinámica y la generación de trayectorias de un manipulador con cinco grados de libertad. Trabajo de grado Ingeniero Mecánico. Bucaramanga. Universidad Industrial de Santander. Facultad de ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de ingeniería mecánica, 2005. 110 p.
- [5] **F. YANES.** Modelación y simulación de un manipulador basado en un mecanismo paralelo tipo plataforma Stewart. Tesis Magíster en Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile, 1997.
- [6] **H. GUO and LI.** Dynamics analysis and simulation of a six degree of freedom Stewart Platform manipulator. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Journal of Mechanical Engineering Science, Volumen 220, Number 1, 2006.

- [7] **K.J. Astrom and T. Hagglund.** PID Controllers: Theory, Design and Tuning. Instrument Society of America, 1995.
- [8] **MERLET Jean-pierre.** Parallel Robots. 2 ed, Sophia-Antipolis, France: Springer, 2006. 417 p.
- [9] **NISE, Norman.** Ingeniería de Control para Ingeniería. 3 ed. México D.F.: COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL., 2004. 970 p.
- [10] **OGATA, Katsuhiko.** Ingeniería de Control Moderna. Traducido por Miguel Ángel Martínez Sarmiento. 3 ed. Naucalpan de Juárez: Pearson Educación, 1998. 997 p. ISBN 970-17-0048-1.
- [11] **RAMIREZ, Daniel Andrés.** Diseño de una plataforma robótica paralela de 6 DOF para asistente quirúrgico en cirugías de reconstrucción cráneo-facial. Tesis presentada como requisito parcial para obtener el título de maestría en ingeniería Automatización industrial. Bogotá D.C. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de ingeniería, 2010. 161 p.
- [12] **R. ARACIL, R. SALTAREN, J. SABATER y O. REINOSO.** Robots paralelos: máquinas con un pasado para una robótica del futuro. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, Vol. 3, Núm. 1, pp. 16-28, 2006.
- [13] **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.
- [14] **SILVA, Luis Ángel.** Control visual de robots paralelos. Análisis, desarrollo y aplicación a la plataforma robotenis. Tesis doctoral. Madrid. Escuela técnica

superior de estudios industriales. Departamento de automática, ingeniería electrónica e informática industrial, 2005. 329 p.

[15] **STEWART, D.** "A platform with 6 degrees of freedom", Proceedings of the Institution of mechanical engineers, vol 180, 1965. P. 371-386.

[16] **WELS, Dare.** Teoría y problemas de dinámica de Lagrange con un estudio de ecuaciones del movimiento de Euler, principio y ecuaciones de Hamilton. 1er. ed. México-México D.F.: MacGraw-Hill, 1972. 371 p.

[17] **ZABALZA, Isidro.** Síntesis cinemática y dinámica de mecanismos. Manipuladores paralelos 6-RKS. Memoria para optar al grado de Doctor ingeniero industrial. Pamplona. Universidad Pública de Navarra. Departamento de ingeniería mecánica energética y de materiales. 1999. 267 p.

## **ANEXOS**

## ANEXO A. SIMBOLOGIA Y ALGEBRA DE MATRICES

La cinemática y cinética del sistema son analizadas mediante vectores. Sin embargo, por la complejidad y la gran cantidad de operaciones que implica el desarrollo analítico, se ha expresado cada término vectorial en forma de matriz con la finalidad de desarrollar el análisis en forma compacta. Por tanto, es necesario mostrar el significado de la simbología y las principales propiedades del algebra matricial.

### SIMBOLOGÍA

El conocimiento de está es fundamental para la lectura de expresiones matemáticas. Además cada término vectorial se encuentra expresado como una matriz 3x1.

Simbología de términos matemáticos

DESCRIPCIÓN	EJEMPLO
Los términos con letra minúscula o mayúscula con estilo cursivo son escalares o variables escalares	$l, \varphi$
Los términos con minúscula o mayúscula con estilo cursivo y negrita, son matrices 3x1	$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$ $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]^T$
La transpuesta de matrices como $\mathbf{n}$ o $\mathbf{Q}$ , es un matriz 1x3	$\mathbf{n}^T = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]$ $\mathbf{Q}^T = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]$
Los términos con letra minúscula o mayúscula con estilo negrita, son matrices 3x3	$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} \\ R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,3} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} \end{bmatrix}$
El término $\mathbf{I}$ se define como matriz identidad	$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Fuente: Autores del proyecto.

En algunos casos es difícil expresar con términos matriciales un producto escalar o vectorial, se representan tales operaciones en forma vectorial para el mejor entendimiento del desarrollo analítico.

Operaciones matemáticas con matrices.

OPERACIÓN MATEMÁTICA	RESULTADO
$\frac{d}{dt}(al), \frac{d}{dt}\left(\frac{a}{l}\right)$ <p>Derivada de una matriz variable multiplicada por una variable escalar, en función del tiempo.</p>	<p>Sea <math>l</math> una variable escalar, se define</p> $\frac{d}{dt}(al) = \dot{a}l + a\left(\frac{dl}{dt}\right)$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{l}\right) = \frac{\dot{a}l + a(dl/dt)}{l^2}$
$\frac{\partial T}{\partial a}$ <p>Derivada parcial de una variable escalar respecto de una matriz variable.</p>	<p>Si <math>T</math> es una variable escalar, se define</p> $\frac{\partial T}{\partial a} = \left[ \frac{\partial T}{\partial a_1} \quad \frac{\partial T}{\partial a_2} \quad \frac{\partial T}{\partial a_3} \right]^T$
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\right) - \frac{\partial T}{\partial a} = F_a$ <p>Notación compacta de la formulación de Lagrange para tres coordenadas generalizadas.</p>	<p>Sean <math>a_1, a_2, a_3</math> las coordenadas generalizadas de un sistema y <math>T</math> una variable escalar, la notación extendida resulta ser</p> $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial a_1} = F_{a_1}$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial a_2} = F_{a_2}$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial a_3} = F_{a_3}$
<p>Matriz de matrices</p>	<p>Sea <math>I</math> la matriz identidad y <math>R</math> una matriz 3x3, se define:</p> $\begin{bmatrix} I & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + Rb$

Fuente: Autores del proyecto.

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  términos vectoriales en forma de matriz (3x1) donde las componentes pueden ser constantes o dependientes del tiempo.

Simbología de operaciones matemáticas.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO MATEMÁTICO
$\tilde{n}$ , operador de asimetría diagonal ( $\sim$ ).	$\tilde{n} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$
$\tilde{n}^T$ , traspuesta de una matriz 3x3.	$\tilde{n}^T = \tilde{n}$
$a \cdot b$ , producto escalar.	$a \cdot b = a^T b$
$a \times b$ , producto cruz.	$a \times b = \tilde{a}b$

Fuente: Autores del proyecto.

## PROPIEDADES

Sea  $R$  un matriz 3x3,  $p$  y  $\omega$  matrices 3x1 y  $l$  un escalar se tiene:

Propiedades con matrices.

PROPIEDAD	REFERENCIA
Sea $P_b = Rp$ , se define $P_b = R\tilde{p}R^T$	C1
Sea $\tilde{P}_b = R\tilde{p}R^T$ , se define $\tilde{P}_b^T = R\tilde{p}^T R^T$	C2
Sea $P_b = Rp$ , se define $\tilde{\omega}Rp = \tilde{\omega}P_b = \tilde{P}_b^T \omega$	C3
Sea $P_a = lp$ , se define $\tilde{P}_a = l\tilde{p}$	C4
$RR^T = R^T R = I$	C5

Fuente: Autores del proyecto.

Sea  $a$  y  $c$  vectores en general, y  $n$  es un vector unitario, se define

Propiedades especiales con matrices.

PROPIEDAD	REFERENCIA
$\tilde{a}\tilde{c} = ca^T - a^TcI$	C6
$\tilde{n}^T\tilde{n} = I - nn^T$	C7
$(ac)^T = c^T a^T$	C8

Fuente: Autores del proyecto.

## ANEXO B. VARIABLES CINEMATICAS

En este anexo se desarrolla detalladamente la deducción de parámetros cinemáticos y dinámicos, con el objetivo de demostrar los resultados logrados en el capítulo denominado modelamiento dinámico.

### Velocidad y Aceleración en forma general

Término  $\dot{q}_{pj}$ .

$$\dot{q}_{pjp} = \dot{t}_p + \omega_p \times p_{jp}$$

$$R\dot{q}_{pjp} = R[\dot{t}_p + \omega_p \times p_{jp}]$$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + R[\omega_p \times p_{jp}]$$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + R\tilde{\omega}_p p_{jp}$$

Como:  $R^T R = I$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + R\tilde{\omega}_p I p_{jp}$$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + R\tilde{\omega}_p (R^T R) p_{jp}$$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + (R\tilde{\omega}_p R^T) R p_{jp} \tag{1}$$

Aplicando la propiedad C1 se tendrá:

$$\omega = R\omega_p$$

$$R\tilde{\omega}_p R^T = \tilde{\omega}$$

Reemplazando en (1).

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + (\tilde{\omega}) R p_{jp}$$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + \omega \times R p_{jp}$$

Término  $\ddot{q}_{pj}$ .

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{pj} &= \ddot{t}_p + \alpha_p \times p_{jp} + \omega_p \times (\omega_p \times p_{jp}) \\ R\ddot{q}_{pj} &= R[\ddot{t}_p + \alpha_p \times p_{jp} + \omega_p \times (\omega_p \times p_{jp})] \\ R\ddot{q}_{pj} &= R\ddot{t}_p + R(\alpha_p \times p_{jp}) + R[\omega_p \times (\omega_p \times p_{jp})] \\ \ddot{q}_{pj} &= \ddot{t} + R \tilde{\alpha}_p p_j + R\tilde{\omega}_p(\tilde{\omega}_p p_{jp})\end{aligned}$$

Como:  $R^T R = I$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{pj} &= \ddot{t} + R \tilde{\alpha}_p p_j + R\tilde{\omega}_p I(\tilde{\omega}_p p_{jp}) \\ \ddot{q}_{pj} &= \ddot{t} + R \tilde{\alpha}_p (R^T R)p_j + R\tilde{\omega}_p (R^T R)(\tilde{\omega}_p (R^T R)p_{jp}) \\ \ddot{q}_{pj} &= \ddot{t} + (R \tilde{\alpha}_p R^T)Rp_j + (R\tilde{\omega}_p R^T)(R\tilde{\omega}_p R^T)Rp_{jp}\end{aligned}\quad (2)$$

De forma análoga se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha &= R \tilde{\alpha}_p \\ R \tilde{\alpha}_p R^T &= \tilde{\alpha}\end{aligned}$$

Reemplazando en (2).

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{pj} &= \ddot{t} + \tilde{\alpha} Rp_j + \tilde{\omega}\tilde{\omega}Rp_{jp} \\ \ddot{q}_{pj} &= \ddot{t} + \alpha \times Rp_j + \omega \times (\omega \times Rp_{jp})\end{aligned}$$

### Velocidad y aceleración en forma matricial

Término  $\dot{q}_{pj}$ .

$$\begin{aligned}\dot{q}_{pj} &= \dot{t} + \omega \times Rp_{jp} \\ \dot{q}_{pj} &= \dot{t} - (Rp_{jp} \times \omega)\end{aligned}$$

Sea  $P_{bj} = Rp_{jp}$ .

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} - \tilde{P}_{bj}\omega$$

Como  $-\tilde{P}_{bj} = \tilde{P}_{jb}^T$

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + \tilde{P}_{jb}^T\omega$$

Aplicando la propiedad C2 de se tendrá:

$$\dot{q}_{pj} = \dot{t} + R\tilde{P}_{jb}^T R^T \omega$$

$$\dot{q}_{pj} = [I \quad R\tilde{P}_{jb}^T R^T] \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \omega \end{bmatrix} = [I \quad R\tilde{P}_{jb}^T R^T] \dot{q}$$

Término  $\ddot{q}_{pj}$ .

$$\ddot{q}_{pj} = \ddot{t} + \alpha \times Rp_j + \omega \times (\omega \times Rp_{jp})$$

$$\ddot{q}_{pj} = \ddot{t} + \tilde{\alpha} Rp_j + \tilde{\omega} \tilde{\omega} Rp_{jp}$$

Aplicando la propiedad C2 y C3 de la tabla se obtiene:

$$\ddot{q}_{pj} = \ddot{t} + (R\tilde{p}_{jp}^T R^T) \alpha + \tilde{\omega}^2 Rp_{jp}$$

$$\ddot{q}_{pj} = [I \quad R\tilde{p}_{jp}^T R^T] \begin{bmatrix} \ddot{t} \\ \alpha \end{bmatrix} + \tilde{\omega}^2 Rp_{jp} = [I \quad R\tilde{p}_{jp}^T R^T] \ddot{q} + \tilde{\omega}^2 Rp_{jp}$$

### Velocidad del vástago y cilindro del actuador

Término  $v_{tj}$ .

$$v_{tj} = \dot{q}_{pj} + \omega_{Lj} \times (-l_t n_j)$$

Sea  $\omega_{Lj} = \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j}$

$$v_{tj} = \dot{q}_{pj} + \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j} \times (-l_t n_j) = \dot{q}_{pj} + (l_t n_j) \times \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j}$$

$$v_{tj} = \dot{q}_{pj} + \frac{l_t \tilde{n}_j \tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j} = \dot{q}_{pj} + \frac{l_t \tilde{n}_j^2 \dot{q}_{pj}}{l_j}$$

$$v_{tj} = \left[ I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right] \dot{q}_{pj}$$

Término  $v_{bj}$ .

$$v_{bj} = \omega_{Lj} \times (l_b n_j)$$

$$v_{bj} = \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j} \times (l_b n_j) = (-l_b n_j) \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j}$$

Aplicando operaciones vectoriales de la tabla 2.3 se tendrá:

$$v_{bj} = \left( \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) \dot{q}_{pj}$$

### Energía del actuador

$$T_{GUOj} = \frac{1}{2} \left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \dot{q}_{pj} \right)^T m_t \left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \dot{q}_{pj} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j} \right)$$

Dando forma a los siguientes términos utilizando la propiedad C7 de la tabla 2.4 tenemos:

$$\left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \dot{q}_{pj} \right)^T = \dot{q}_{pj}^T \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)^T$$

$$\left( \frac{\tilde{n}_j \dot{q}_{pj}}{l_j} \right)^T = \dot{q}_{pj}^T \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right)^T$$

Se tiene:

$$T_{GUOj} = \frac{1}{2} \dot{q}_{pj}^T \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \dot{q}_{pj} + \frac{1}{2} \dot{q}_{pj}^T \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right)^T \dot{q}_{pj}$$

$$T_{GUOj} = \frac{1}{2} \dot{q}_{pj}^T \left( \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) + \frac{1}{2} \dot{q}_{pj}^T \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right)^T \right) \dot{q}_{pj}$$

Dónde:

$$M_{aj} = \frac{1}{2} \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)^T m_t \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)$$

$$M_{bj} = \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right)^T (I_t + I_b) \left( \frac{\tilde{n}_j}{l_j} \right)$$

Remplazando:

$$T_{GUOj} = \frac{1}{2} \dot{q}_{pj}^T (M_{aj} + M_{bj}) \dot{q}_{pj}$$

**Término Inercial de Lagrange**

$$\frac{\partial T_{GUOj}}{\partial \dot{q}_{pj}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} \left( \frac{1}{2} \dot{q}_{pj}^T (M_{aj} + M_{bj}) \dot{q}_{pj} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} (\dot{q}_{pj}^T M_{aj} \dot{q}_{pj} + \dot{q}_{pj}^T M_{bj} \dot{q}_{pj})$$

$$\frac{\partial T_{GUOj}}{\partial \dot{q}_{pj}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} (q_{pj}^T M_{aj} \dot{q}_{pj}) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} (q_{pj}^T M_{bj} \dot{q}_{pj}) \right)$$

Donde:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} (q_{pj}^T M_{aj} \dot{q}_{pj}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pjx}} (q_{pj}^T M_{aj} \dot{q}_{pj}) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pjy}} (q_{pj}^T M_{aj} \dot{q}_{pj}) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pjz}} (q_{pj}^T M_{aj} \dot{q}_{pj}) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} (q_{pj}^T M_{bj} \dot{q}_{pj}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pjx}} (q_{pj}^T M_{bj} \dot{q}_{pj}) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pjy}} (q_{pj}^T M_{bj} \dot{q}_{pj}) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pjz}} (q_{pj}^T M_{bj} \dot{q}_{pj}) \end{bmatrix}$$

Sean las matrices:

$$M_{aj} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{bj} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Desarrollando la derivada obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} (\dot{q}_{pj}^T M_{aj} \dot{q}_{pj}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjx}(a_{11}) + \dot{q}_{pjy}(a_{12} + a_{21}) + \dot{q}_{pjz}(a_{13} + a_{31})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjy}(a_{22}) + \dot{q}_{pjz}(a_{32} + a_{23}) + \dot{q}_{pjx}(a_{12} + a_{21})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjz}(a_{33}) + \dot{q}_{pjx}(a_{13} + a_{31}) + \dot{q}_{pjy}(a_{32} + a_{23})) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{pj}} (\dot{q}_{pj}^T M_{bj} \dot{q}_{pj}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjx}(b_{11}) + \dot{q}_{pjy}(b_{12} + b_{21}) + \dot{q}_{pjz}(b_{13} + b_{31})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjy}(b_{22}) + \dot{q}_{pjz}(b_{32} + b_{23}) + \dot{q}_{pjx}(b_{12} + b_{21})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjz}(b_{33}) + \dot{q}_{pjx}(b_{13} + b_{31}) + \dot{q}_{pjy}(b_{32} + b_{23})) \end{bmatrix}$$

Finalmente se tiene:

$$\frac{\partial T_{GUOj}}{\partial \dot{q}_{pj}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjx}(a_{11}) + \dot{q}_{pjy}(a_{12} + a_{21}) + \dot{q}_{pjz}(a_{13} + a_{31})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjy}(a_{22}) + \dot{q}_{pjz}(a_{32} + a_{23}) + \dot{q}_{pjx}(a_{12} + a_{21})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjz}(a_{33}) + \dot{q}_{pjx}(a_{13} + a_{31}) + \dot{q}_{pjy}(a_{32} + a_{23})) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjx}(b_{11}) + \dot{q}_{pjy}(b_{12} + b_{21}) + \dot{q}_{pjz}(b_{13} + b_{31})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjy}(b_{22}) + \dot{q}_{pjz}(b_{32} + b_{23}) + \dot{q}_{pjx}(b_{12} + b_{21})) \\ \frac{1}{2} (2\dot{q}_{pjz}(b_{33}) + \dot{q}_{pjx}(b_{13} + b_{31}) + \dot{q}_{pjy}(b_{32} + b_{23})) \end{bmatrix}$$

Si las matrices  $M_{aj}$  y  $M_{bj}$  fueran simétricas el resultado sería:

$$\frac{\partial T_{GUOj}}{\partial \dot{q}_{pj}} = (M_{aj} + M_{bj}) \dot{q}_{pjx}$$

## Fuerza generalizada

Término  $Q_{mtj}$ .

Partiendo del principio del trabajo virtual tenemos:

$$\delta W_j = Q_{mtj}^T \delta q_{pj} = (m_b g)^T \delta s_{mtj} \quad (3)$$

Luego utilizamos la ecuación (2.33) en su forma diferencial.

$$\delta s_{mtj} = \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \delta q_{pj}$$

Y reemplazando en (3) obtenemos:

$$\delta W_j = Q_{mtj}^T \delta q_{pj} = (m_t g)^T \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \delta q_{pj}$$

Donde  $g$  es una matriz de tres filas y una columna. Como la matriz  $\left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right)$  es simétrica es posible efectuar el siguiente paso:

$$(m_t g)^T \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) \delta q_{pj} = \left[ \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) (m_t g) \right]^T \delta q_{pj}$$

Obteniendo finalmente:

$$Q_{mtj} = \left( I + \frac{l_t \tilde{n}_j^2}{l_j} \right) (m_t g)$$

Término  $Q_{mbj}$ .

Análogamente a  $Q_{mtj}$  se tiene:

$$\delta W_j = Q_{mbj}^T \delta q_{pj} = (m_b g)^T \delta s_{mbj} \quad (4)$$

Utilizando la ecuación (2.33) en forma diferencial.

$$\delta S_{mbj} = \left( I + \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) \delta q_{pj}$$

Remplazando en (4).

$$\delta W_j = Q^T_{mbj} \delta q_{pj} = (m_b g)^T \left( I + \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) \delta q_{pj}$$

Donde  $g$  es una matriz de tres filas y una columna. Como la matriz  $\left( I + \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right)$  es simétrica es posible efectuar el siguiente paso:

$$(m_b g)^T \left( I + \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) \delta q_{pj} = \left[ \left( \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) (m_b g) \right]^T \delta q_{pj}$$

Para finalmente obtener:

$$Q_{mbj} = \left( \frac{l_b \tilde{n}_j^T \tilde{n}_j}{l_j} \right) (m_b g)$$

Término  $Q_{fpj}$ .

Partiendo del principio del trabajo virtual.

$$\delta W_j = Q^T_{fpj} \delta q_{pj} = (f_{pj})^T \delta s_{fpj} \quad (5)$$

De la configuración se sabe que:

$$\delta s_{fpj} = \delta q_{pj}$$

Remplazando la anterior expresión en (5) tenemos:

$$\delta W_j = Q^T_{fpj} \delta q_{pj} = (f_{pj})^T \delta q_{pj}$$

Para finalmente:

$$Q_{fpj} = \delta q_{pj}$$

### Término $\dot{H}_G$

El vector  $\dot{H}_G$  se define como la derivada de la cantidad de movimiento angular con respecto al sistema fijo  $XYZ$ , proyectado al sistema fijo  $XYZ$ . Sin embargo por simplicidad la deducción se realizará a partir de la proyección en el sistema móvil  $X_pY_pZ_p$  ( $H_{Gp}$ ). Usando el concepto de cinética de un cuerpo rígido en el espacio, proyectado en el sistema  $X_pY_pZ_p$ , se define lo siguiente:

$$\sum M_{Gp} = \dot{H}_{Gp} = (H_{Gp})_{x_p y_p z_p} + \Omega \times H_{Gp} \quad (6)$$

Dónde:

$H_{Gp}$  Cantidad de movimiento angular proyectado en el sistema  $X_pY_pZ_p$ .

$\dot{H}_{Gp}$  Derivada del vector  $H_{Gp}$  con respecto al sistema fijo  $XYZ$ .

$(\dot{H}_{Gp})_{x_p y_p z_p}$  Derivada del vector  $H_{Gp}$  con respecto al sistema móvil  $X_pY_pZ_p$ .

$\Omega \times H_{Gp} = H_{Gpx} \frac{di}{dt} + H_{Gpy} \frac{dj}{dt} + H_{Gpz} \frac{dk}{dt}$  Consecuencia de la rotación del sistema  $X_pY_pZ_p$  proyectado en  $X_pY_pZ_p$

Sea:

$$H_{Gp} = I_p \omega_p$$

$$(\dot{H}_{Gp})_{x_p y_p z_p} = \dot{H}_{Gpx} i + \dot{H}_{Gpy} j + \dot{H}_{Gpz} k$$

$$(\dot{H}_{Gp})_{x_p y_p z_p} = \frac{dH_{Gp}}{dt} = \frac{d(I_p \omega_p)}{dt}$$

$$(\dot{H}_{Gp})_{x_p y_p z_p} = I_p \dot{\omega}_p = I_p \alpha_p$$

Como el sistema  $X_p Y_p Z_p$  es solidario a la plataforma móvil, se tiene:

$$\Omega = \omega_p$$

Reemplazando en (6) se tiene:

$$\sum M_{Gp} = I_p \alpha_p + \omega_p \times (I_p \omega_p)$$

Como se trabajó respecto al sistema  $X_p Y_p Z_p$ , para pasar al sistema  $XYZ$  se premultiplica por la matriz de rotación  $R$ .

$$R \left( \sum M_{Gp} \right) = R \left( I_p \alpha_p + \omega_p \times (I_p \omega_p) \right)$$

$$R \left( \sum M_{Gp} \right) = R I_p \alpha_p + R \left( \omega_p \times (I_p \omega_p) \right)$$

$$R \left( \sum M_{Gp} \right) = R I_p \alpha_p + R (\tilde{\omega}_p I_p \omega_p)$$

Aplicando la propiedad C5 de la tabla 2.4 tenemos:

$$\sum M_{Gp} = R I_p R^T R \alpha_p + R \tilde{\omega}_p R^T R I_p R^T R \omega_p \quad (7)$$

Ahora aplicando las propiedades C1 y C2 de la tabla 2.4 tenemos:

$$\sum M_{Gp} = \dot{H}_{Gp}$$

$$R \alpha_p = \alpha ; R \omega_p = \omega ; R \tilde{\omega}_p R^T = \tilde{\omega}$$

### Sumatorias de fuerzas y momentos.

Término  $\sum F_G$ .

$$m_p \ddot{t} = [m_p I \quad 0] \ddot{q}$$

Remplazando en (2.66) tenemos:

$$[m_p I \quad 0] \ddot{q} = - \sum_{j=1}^6 (f_{pj}) + m_p g$$

Término  $\sum M_G$ .

Remplazando  $\dot{H}_G$  en la ecuación (2.67) obtenemos:

$$R I_G R^T \alpha + \tilde{\omega} R I_G R^T \omega = - \sum_{j=1}^6 (R p_{jp} \times f_{pj}) \quad (8)$$

Dándole forma compacta a la ecuación anterior, tenemos:

$$[0 \quad R I_p R^T] \ddot{q} + [0 \quad \tilde{\omega} R I_p R^T] \dot{q} = - \sum_{j=1}^6 (R p_{jp} \times f_{pj})$$

**Ecuación dinámica de la plataforma.**

$$H_{(q)} F = \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} I \\ R \tilde{p}_{jp} R^T \end{bmatrix} Q_{fj} \right) \quad (9)$$

$$Q_{fj} = n_j f_j \quad (10)$$

Remplazando (10) en (9):

$$H_{(q)} F = \sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} I \\ R \tilde{p}_{jp} R^T \end{bmatrix} n_j f_j \right)$$

$$\sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} I \\ R \tilde{p}_{jp} R^T \end{bmatrix} Q_{fj} \right) = \begin{bmatrix} I \\ R \tilde{p}_{1p} R^T \end{bmatrix} n_1 f_1 + \begin{bmatrix} I \\ R \tilde{p}_{2p} R^T \end{bmatrix} n_2 f_2 + \begin{bmatrix} I \\ R \tilde{p}_{3p} R^T \end{bmatrix} n_3 f_3$$

$$+ \begin{bmatrix} I \\ R\tilde{p}_{4p}R^T \end{bmatrix} n_4 f_4 + \begin{bmatrix} I \\ R\tilde{p}_{5p}R^T \end{bmatrix} n_5 f_5 + \begin{bmatrix} I \\ R\tilde{p}_{6p}R^T \end{bmatrix} n_6 f_6$$

$$\sum_{j=1}^6 \left( \begin{bmatrix} I \\ R\tilde{p}_{jp}R^T \end{bmatrix} Q_{fj} \right) = \begin{bmatrix} n_1 f_1 \\ (R\tilde{p}_{1p}R^T n_1) f_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_2 f_2 \\ (R\tilde{p}_{2p}R^T n_2) f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_3 f_3 \\ (R\tilde{p}_{3p}R^T n_3) f_3 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} n_4 f_4 \\ (R\tilde{p}_{4p}R^T n_4) f_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_5 f_5 \\ (R\tilde{p}_{5p}R^T n_5) f_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_6 f_6 \\ (R\tilde{p}_{6p}R^T n_6) f_6 \end{bmatrix}$$

Y dándole forma matricial a la ecuación anterior obtenemos:

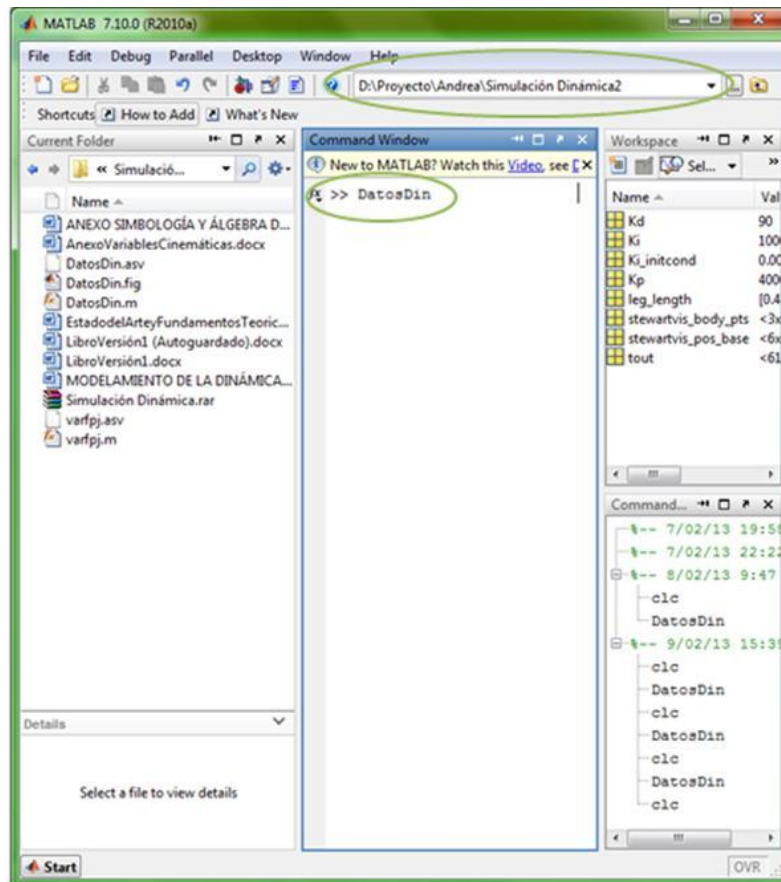
$$H_{(q)}^F = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ R\tilde{p}_{1p}R^T n_1 & R\tilde{p}_{2p}R^T n_2 & R\tilde{p}_{3p}R^T n_3 & R\tilde{p}_{4p}R^T n_4 & R\tilde{p}_{5p}R^T n_5 & R\tilde{p}_{6p}R^T n_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

## ANEXO C. USO DE LA INTERFAZ GRAFICA DEL MODELADO REALIZADO EN MATLAB DE LA CINEMATICA Y DINAMICA INVERSA

A continuación se enuncian los pasos a seguir para hacer uso de la interfaz creada.

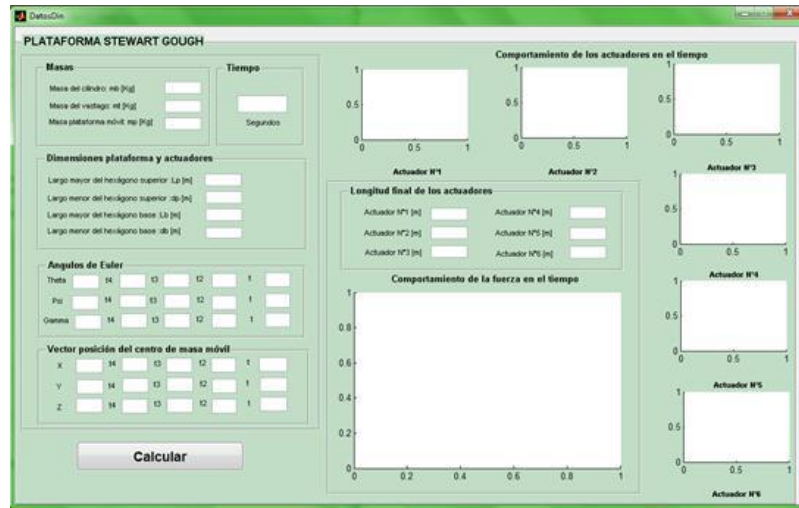
En primer lugar hay que tener abierta la carpeta en la cual esta contenida toda la información necesaria para realizar la simulación, después se procede a ejecutar el programa “*DatosDin*”, ya sea digitando desde el “*CommandWindow*” o abriéndolo desde la opción “*open*” del menú “*File*”.

Pantalla principal de Matlab para ejecutar interfaz



Fuente: Autores del proyecto.

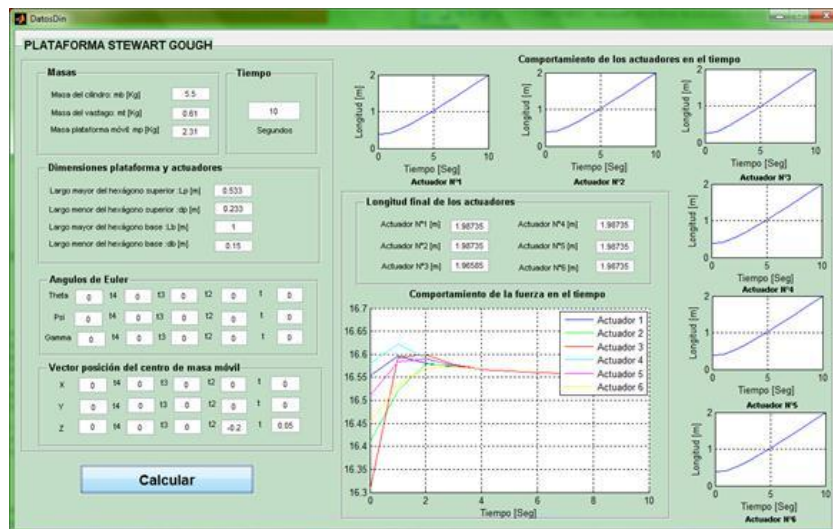
## Interfaz gráfica simulación cinemática y dinámica inversa



Fuente: Autores del proyecto.

En la interfaz resultante, se introducen los datos ya mencionados que son necesarios para realizar la simulación del sistema de ecuaciones, tras hacer esto, se procede a dar Click sobre el botón ejecutar y se podrán observar los resultados obtenidos para cada caso determinado.

Introducción de datos y resultados obtenidos



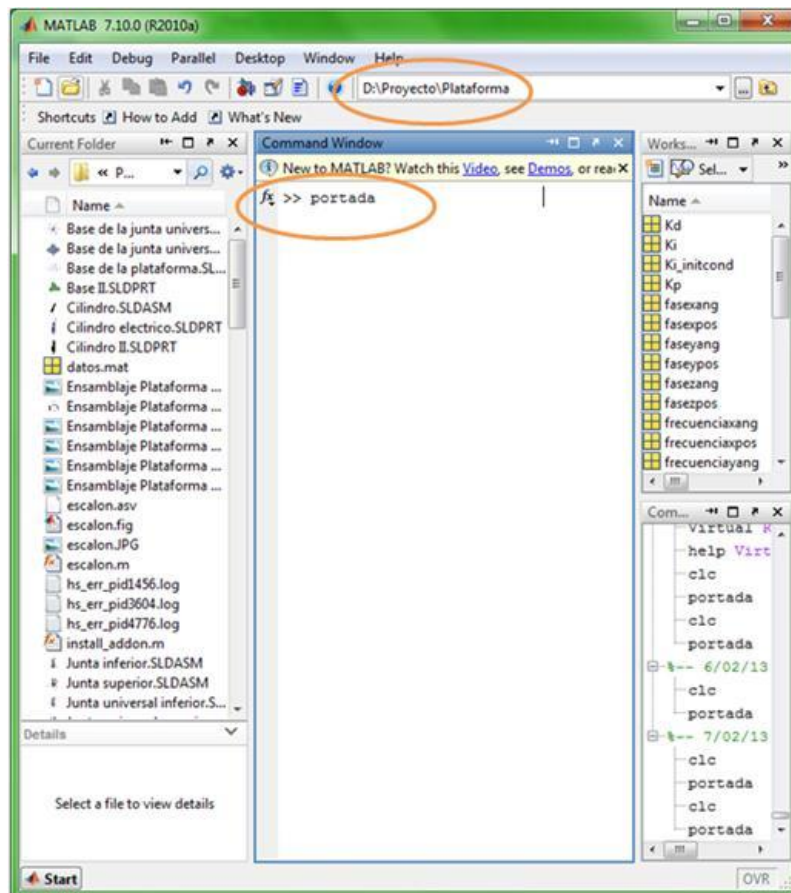
Fuente: Autores del proyecto.

## ANEXO D. USO DE LA INTERFAZ GRÁFICA DEL MODELO REALIZADO EN SIMMECHANICS

A continuación se enuncian los pasos a seguir para hacer uso del programa de control de la plataforma:

En primer lugar hay que tener abierta la carpeta en la cual está contenida toda la información tanto de la interfaz como de los bloque de Simulink, después se procede a ejecutar el programa “*portada*”, ya sea digitando desde el “*CommandWindow*” o abriéndolo desde la opción “*open*” del menú “*File*”.

Pantalla principal de Matlab para ejecutar interfaz



Fuente: Autores del proyecto.

Interfaz grafica para el control de movimiento de la plataforma



Fuente: Autores del proyecto.

Después que desaparece la ventana principal de portada, se activa la ventana de “*menú*”, que da las opciones para seleccionar el tipo de señal deseada y más apropiada para el movimiento que se quiere simular en la plataforma Stewart-Gough.

Ventana menú de la interfaz grafica

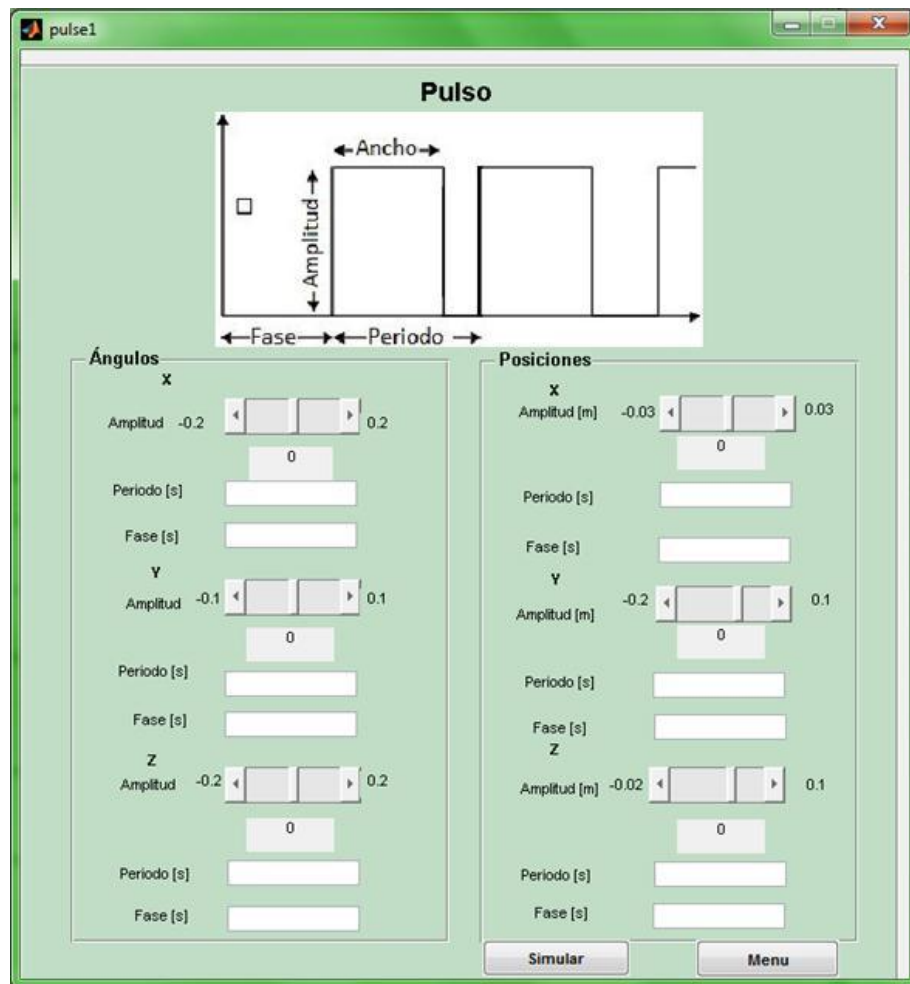


Fuente: Autores del proyecto.

Los tipos de señal ofrecidas son:

**Pulso:** En esta opción se ofrecen señales de movimiento a la plataforma superior en cada uno de sus 6 grados de libertad, las 3 rotaciones y las 3 traslaciones en los ejes X, Y, Z, en forma de onda cuadrada a intervalos regulares. Los parámetros del bloque en forma de onda son, amplitud, ancho de pulso, período y retardo de fase, para determinar la forma de la onda de salida. Para facilitar la introducción de datos se ha preintroducido un valor de 5% del periodo para el ancho de pulso, y los tres restantes serán definidos por el usuario.

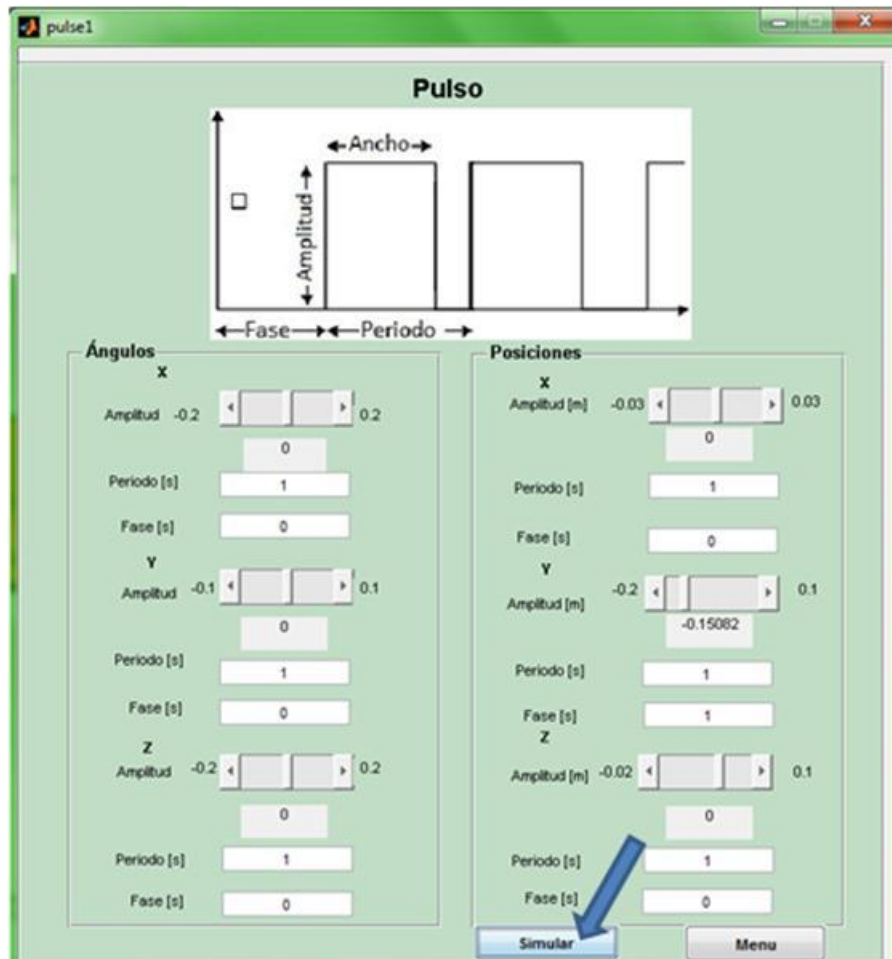
Interfaz obtenida tras seleccionar como señal de entrada “Pulso”



Fuente: Autores del proyecto.

En esta interfaz se seleccionan los datos necesarios para obtener la trayectoria deseada. Por ejemplo si deseo que la plataforma suba y baje en forma continua y siguiendo una onda cuadrada podría fijar solo datos para la posición en Y de la Amplitud, periodo y Fase.

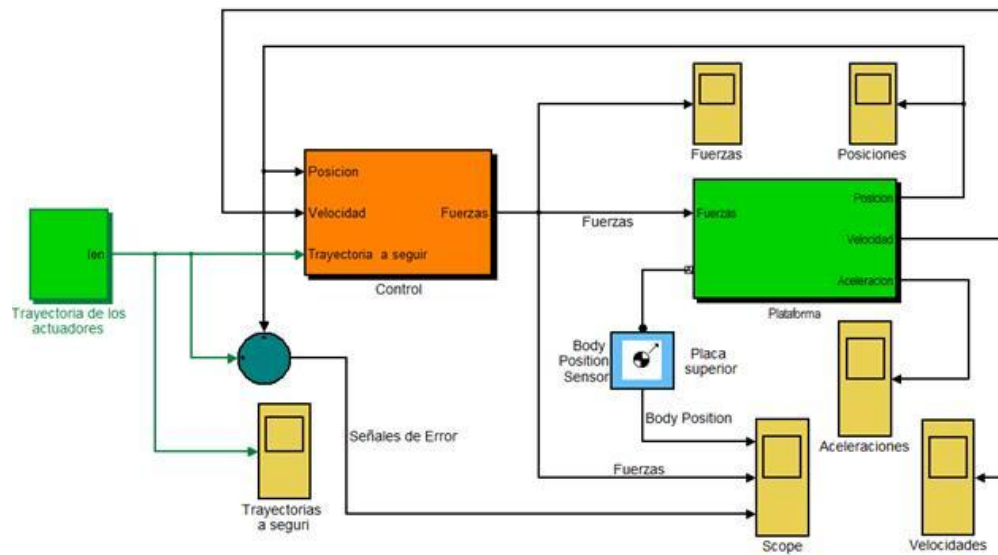
Datos introducidos para simular un movimiento vertical continuo



Fuente: Autores del proyecto.

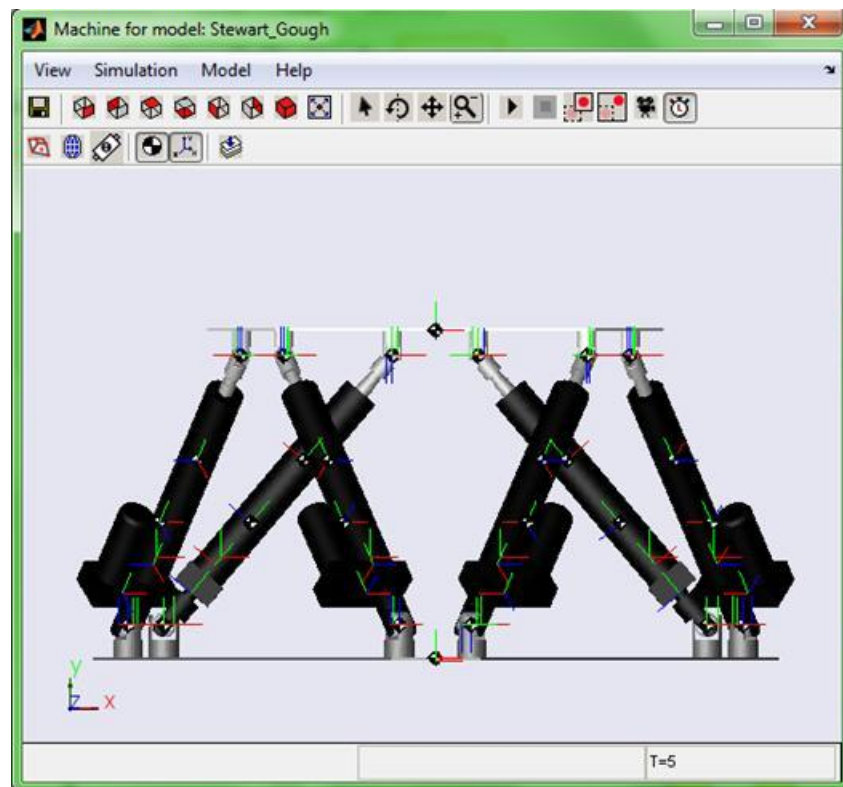
Tras introducir los datos se da Click sobre el botón Simular y se desplegara la pantalla de Simulink con el sistema de bloques diseñado para simular la plataforma y posteriormente se ejecutara automáticamente la simulación de la plataforma con el movimiento deseado.

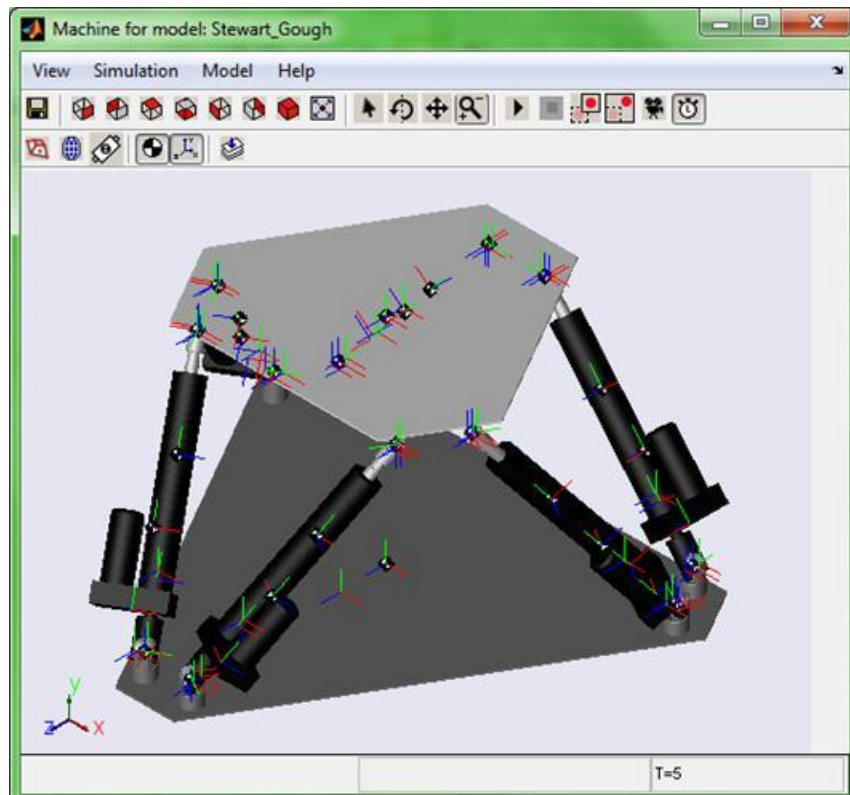
Primer pantallazo tras dar Click en el bloque Simular



Fuente: Autores del proyecto.

Segundo pantallazo tras dar click en el bloque Simular





Fuente: Autores del proyecto.

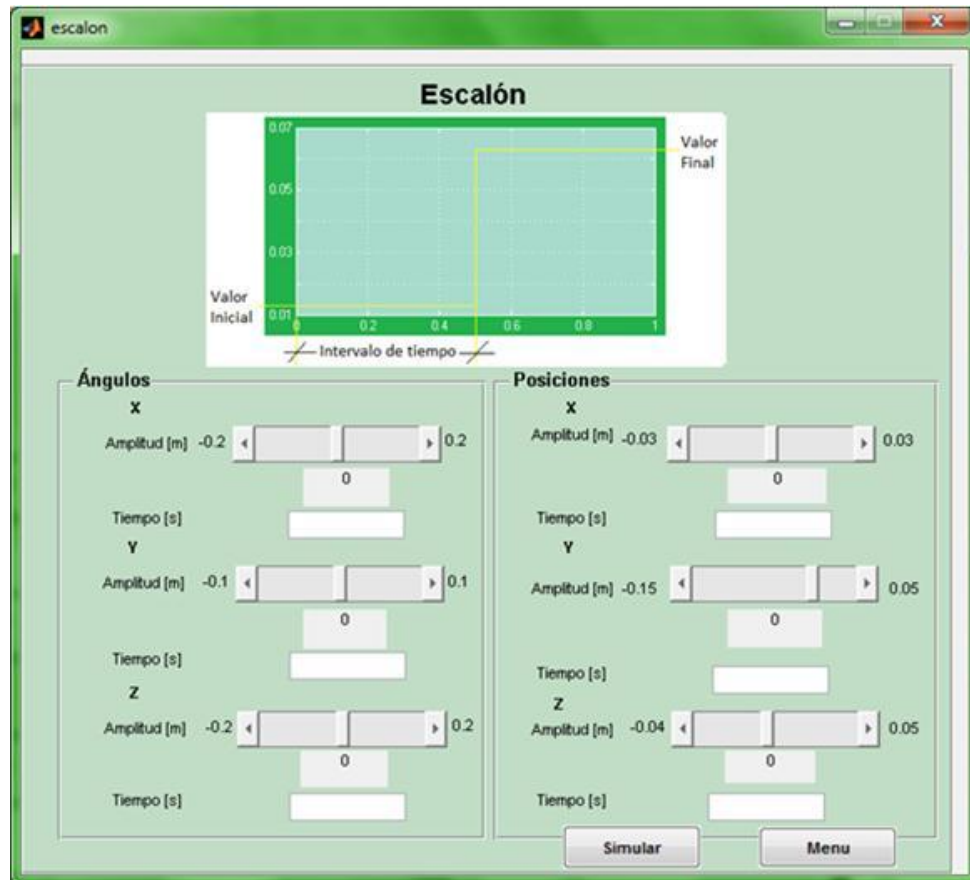
Siendo esta última la sección en la cual se podrá visualizar el movimiento obtenido tras ingresar los datos.

**Nota:** Si se desea obtener un poco más de información acerca de la simulación realizada, como graficas de posición, fuerza etc. se puede ver los resultados directamente del sistema de bloques de Simulink en los bloques Scope establecidos en la figura “Primer pantallazo tras dar Click en el bloque Simular”.

**Escalón:** Proporciona un paso entre dos niveles en un momento determinado a la plataforma superior en cada uno de sus 6 grados de libertad, las 3 rotaciones y las 3 traslaciones en los ejes X, Y, Z. Los parámetros del bloque en forma de onda son, tiempo de paso, valor inicial, valor final y tiempo de muestreo, para determinar la forma del paso de salida. Para facilitar la introducción de datos se han definido solo 2 parámetros a modificar la amplitud (definida como la diferencia

entre el valor final y el valor inicial, tomando como 0 el valor inicial) y el tiempo de paso, el tiempo de muestreo se ha predeterminado como 0.

Interfaz obtenida tras seleccionar como señal de entrada “Escalón”



Fuente: Autores del proyecto.

En esta interfaz podemos seguir el mismo proceso descrito en el tipo de señal anterior “Pulso”; y lograr el tipo de movimiento deseado bajo este tipo de señal.

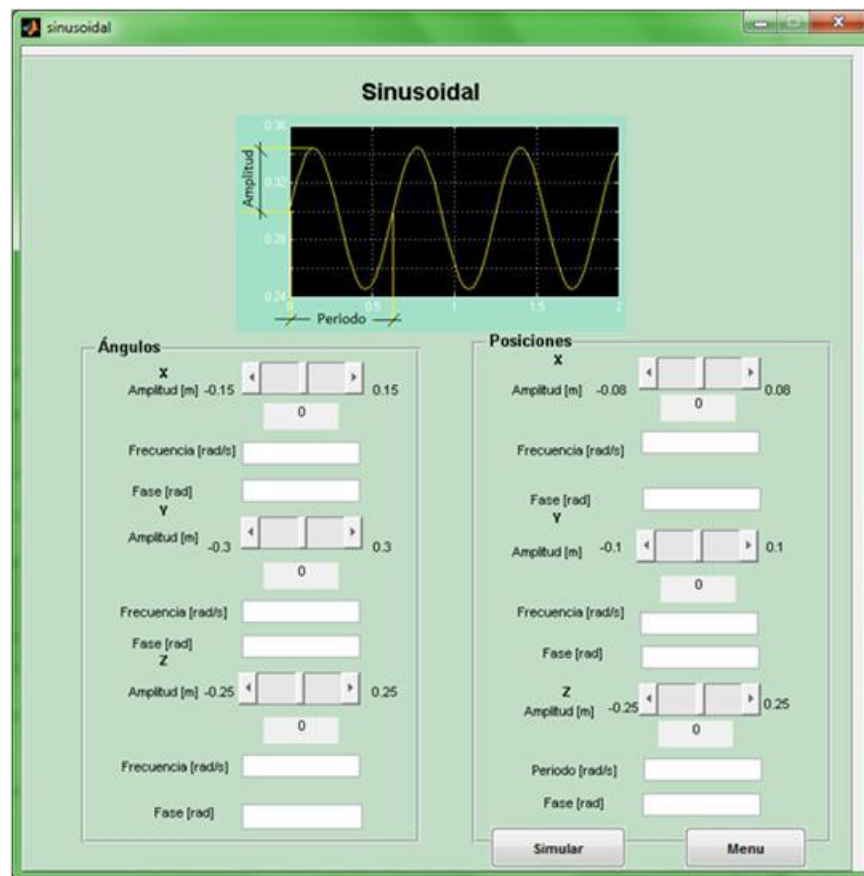
**Onda Sinusoidal:** Proporciona una senoide que obedece la siguiente función:

$$O(t) = Amp * Sin(Freq * t + Phase) + Bias$$

Esta senoide será la señal de entrada a la plataforma superior en cada uno de sus 6 grados de libertad, las 3 rotaciones y las 3 traslaciones en los ejes X, Y, Z.

Los parámetros del bloque en forma de onda son, Amplitud, Bias, Frecuencia, Fase y tiempo de muestreo, que determinan la forma de la onda deseada. Para facilitar la introducción de datos se han definido solo 3 parámetros a modificar: la amplitud, la frecuencia y la fase; el tiempo de muestreo y el número de Bias se ha predeterminado como 0.

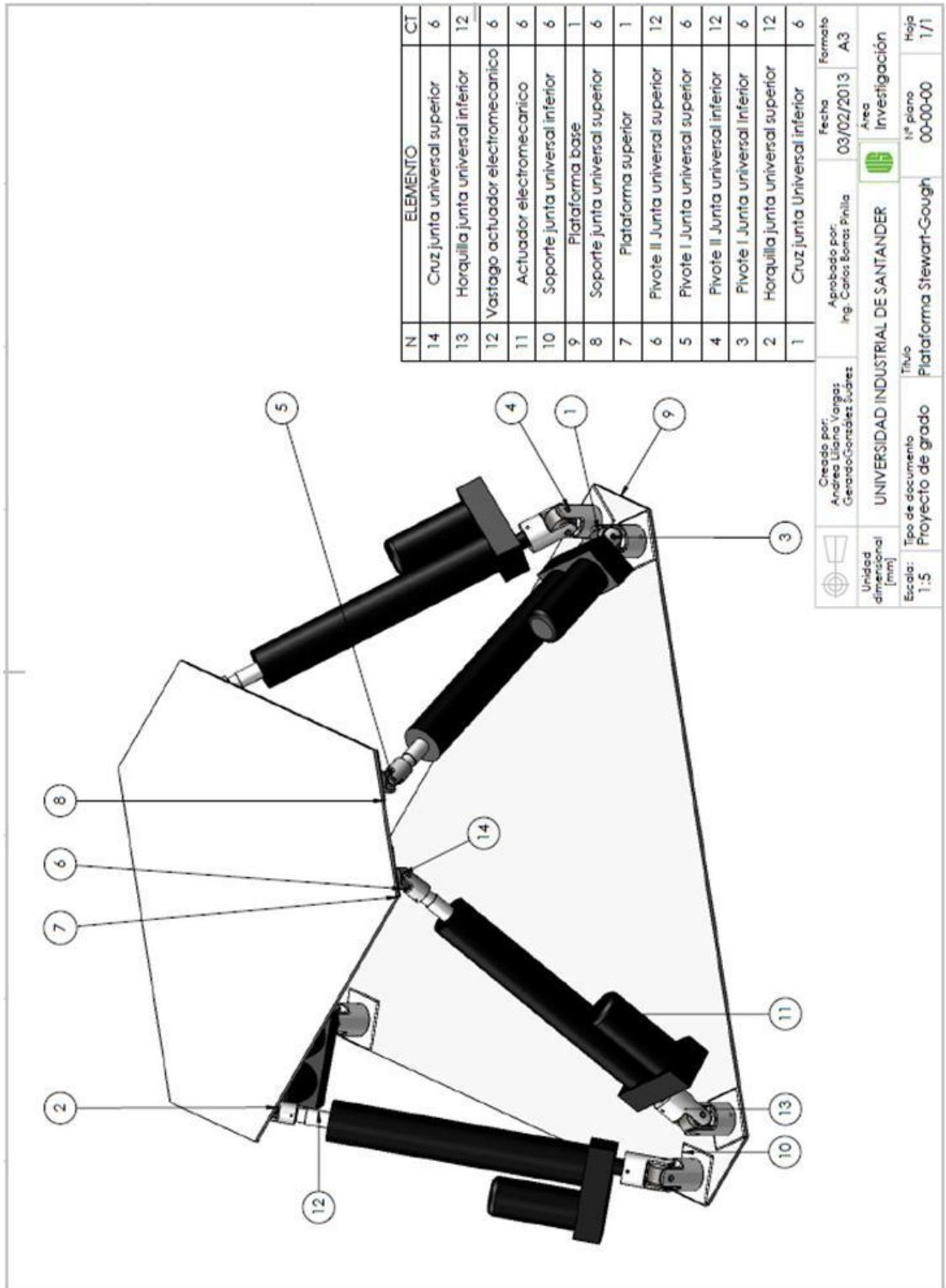
Interfaz obtenida tras seleccionar, “Onda Sinusoidal”

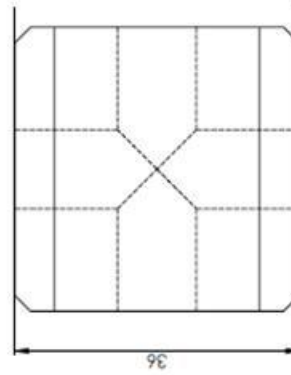
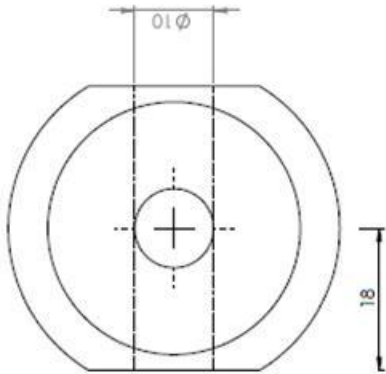
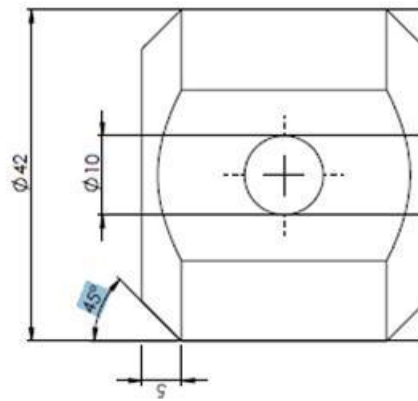
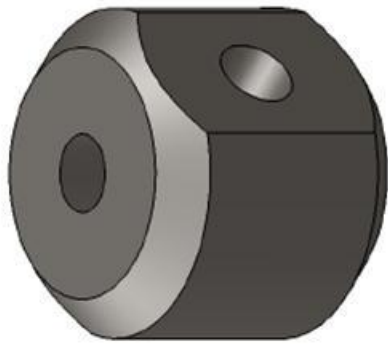


Fuente: Autores del proyecto.

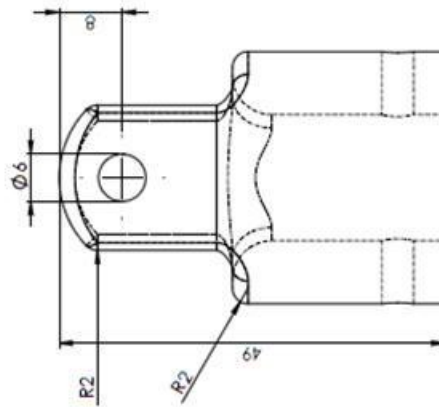
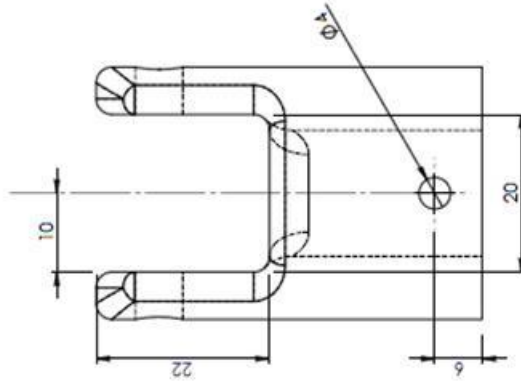
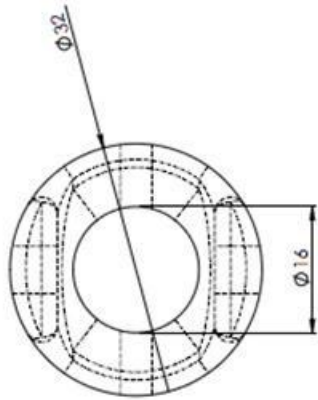
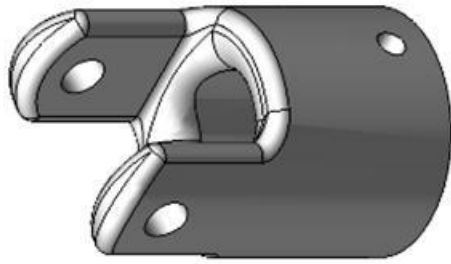
En esta interfaz podemos seguir el mismo proceso descrito para los numerales anteriores “Pulso y Escalón”; y lograr el tipo de movimiento deseado bajo este tipo de señal.

## ANEXO E. PLANOS

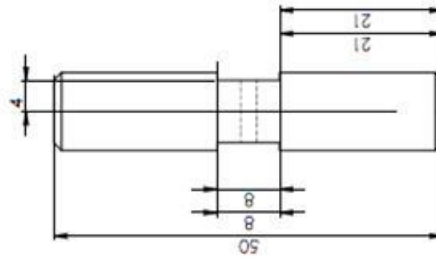
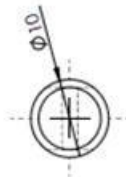
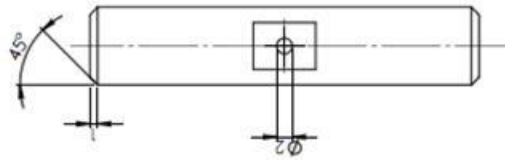




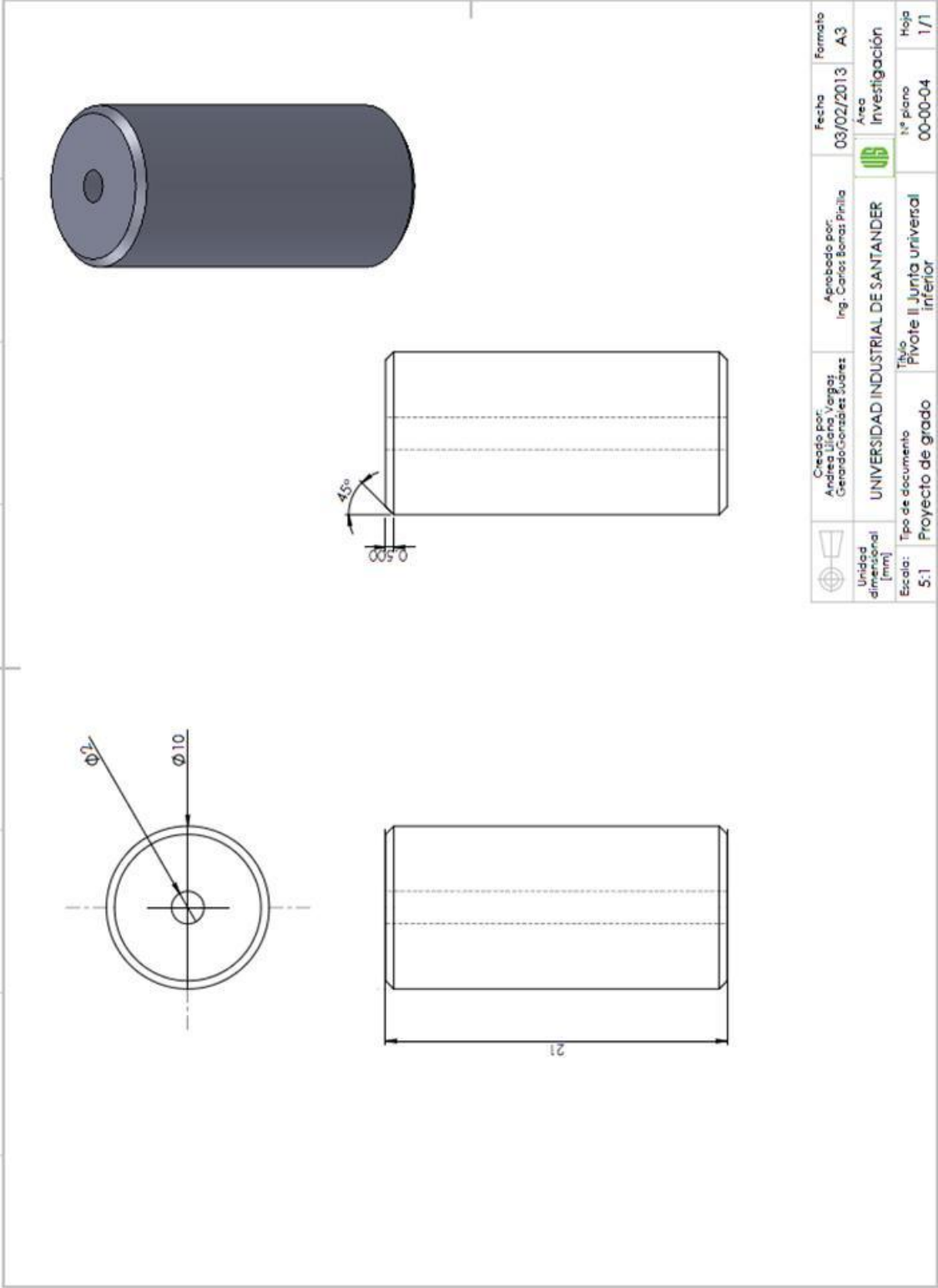
	Creado por: Andrés Guzmán Juárez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonas Pinilla	Fecha: 03/02/2013	Formato: A3
Unidad dimensional [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER			Área: Investigación
Escala: 2:1	Tipo de documento: Proyecto de grado	Título: Cruz junta universal inferior	Nº plano: 00-00-01	Hoja: 1/1



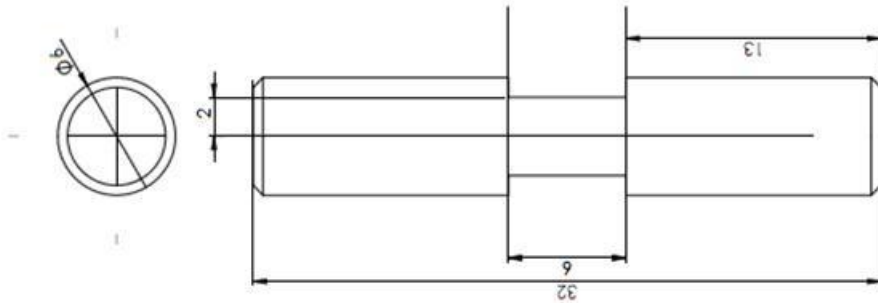
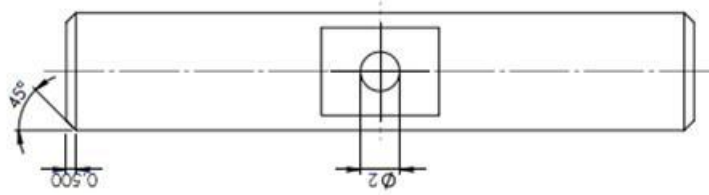
	Creado por: Andrea Lilián Vargas Gerardo González Suárez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonas Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
Unidad dimensional [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER		Área Investigación	
Escala: 2:1	Tipo de documento Proyecto de grado		Nº plano 00-00-02	Foja 1/1
	Título Horquilla junta universal superior			



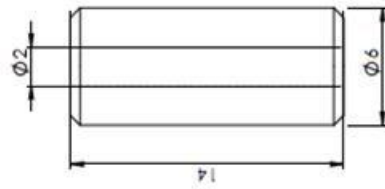
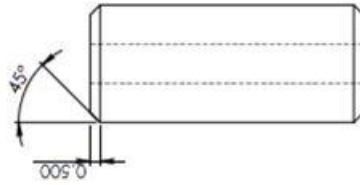
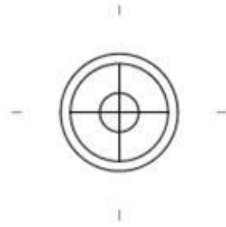
	Creado por: Andrea Lliana Vargas Gerardo Gonzalez Suarez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonas Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
Unidad dimensional [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER		Area 	Investigación
Escala: 2:1	Tipo de documento Proyecto de grado	Título Pivote I Junta universal inferior	Nº plano 00-00-03	Hoja 1/1



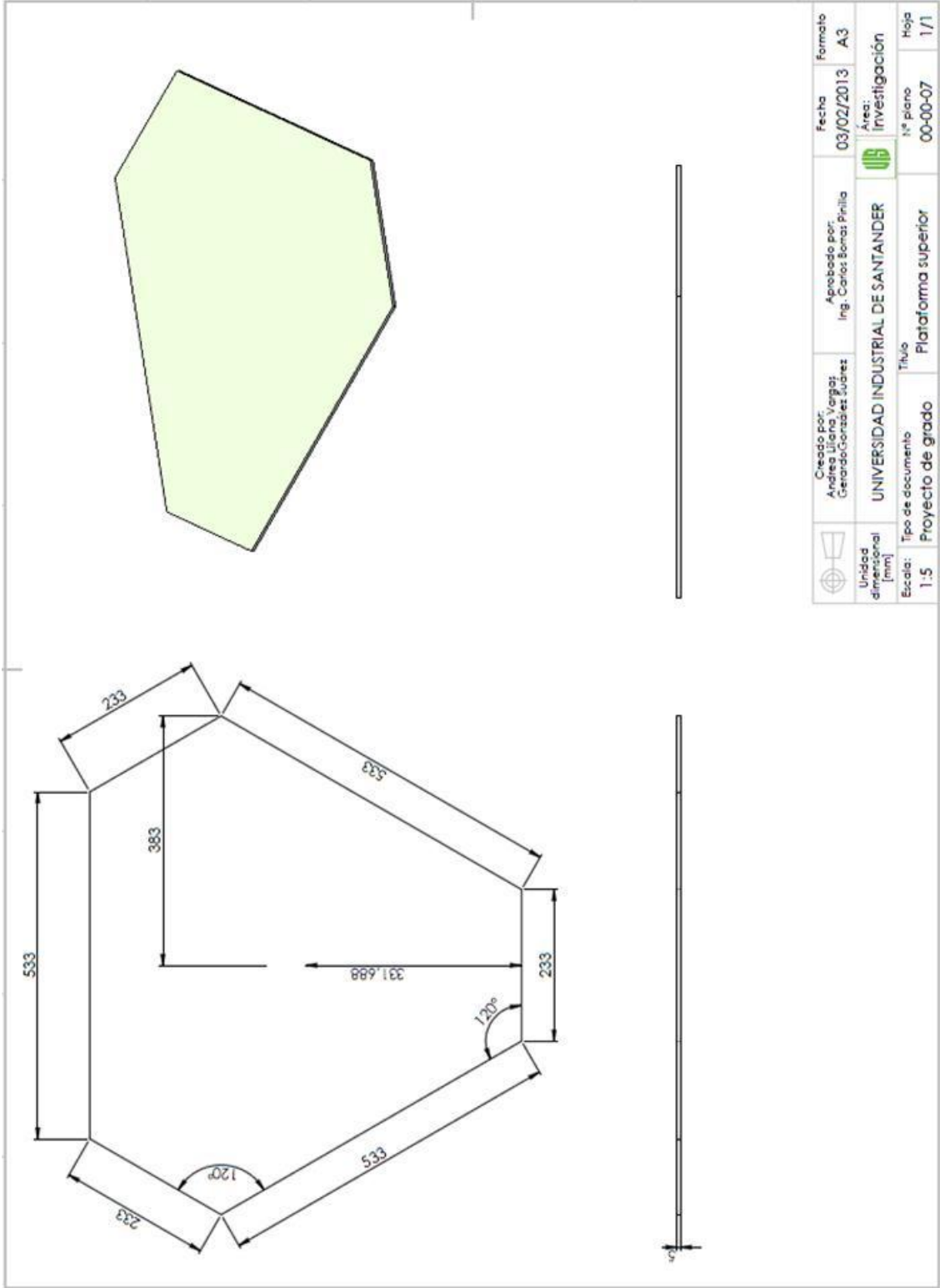
	Creado por: Andrea Liliána Vargas Gerardo Gonzales Suárez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonas Pinilla	Fecha: 03/02/2013	Formato: A3
Unidad de medida: [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER			Área:  Investigación
Escala: 5:1	Tipo de documento: Proyecto de grado	Título: Pivote II Junta universal inferior	N° plano: 00-00-04	Hoja: 1/1

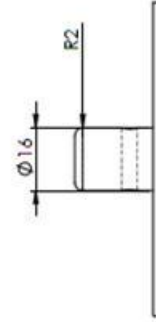
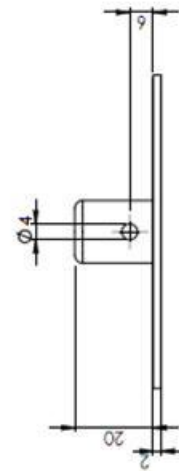
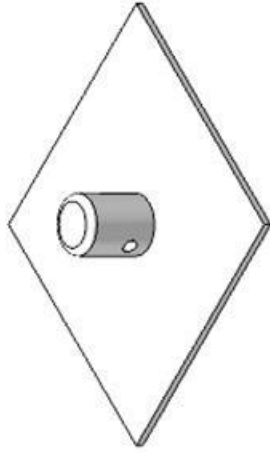
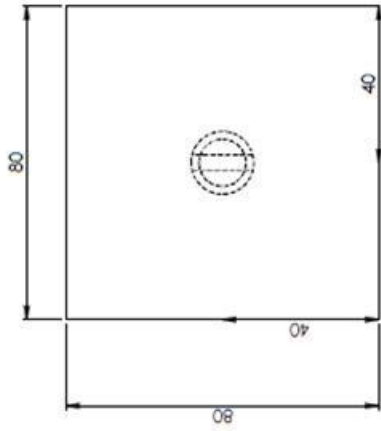



	Creado por: Andrés Lujano Vargas; Gerardo González Suárez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonas Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
Unidad dimensional [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER		Área  Investigación	Hoja 1/1
Escala: 5:1	Tipo de documento Proyecto de grado	Título Pivote I Junta universal superior	Nº plano 00-00-05	

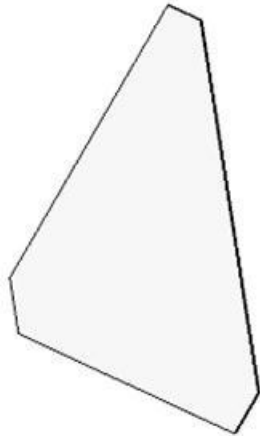
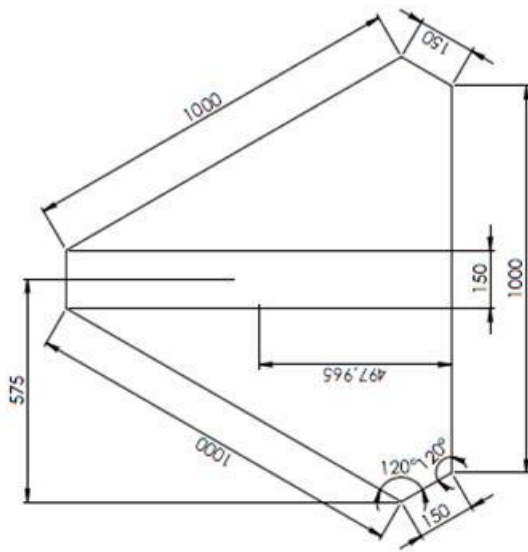


	Creado por: Andrea Litcha Vargas Gerardo Gonzales Suarez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonas Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
Unidad dimensional [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER		Area Investigación	
Escala:	Tipo de documento 5:1	Título Pivote II Junta universal superior	Nº plano 00-00-06	Hoja 1/1

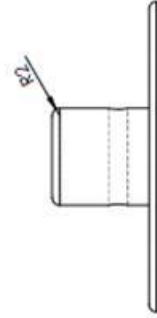
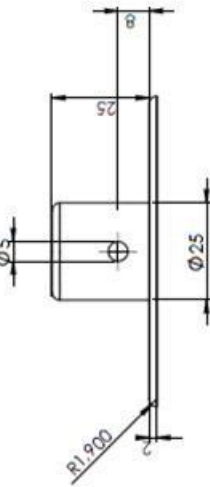
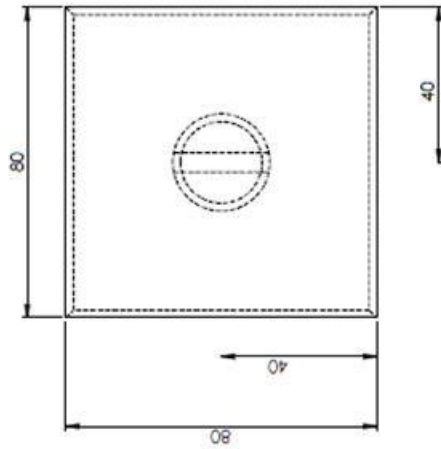
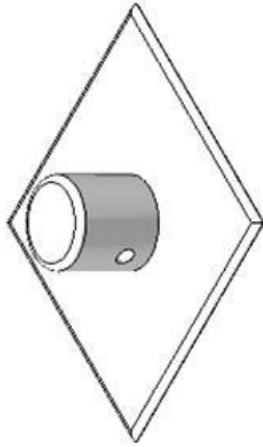




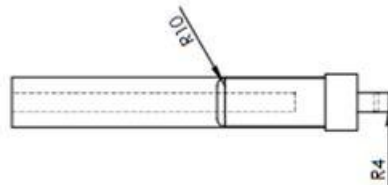
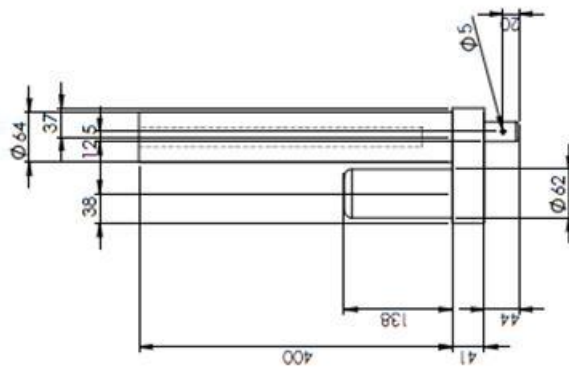
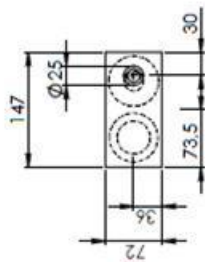
	Creado por: Andrea Ujano Vargas Gerardo Gonzalez Suarez	Aprobado por: Ing. Carlos Barros Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
Unidad dimensional [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER		Area: Investigación	
Escala: 1:1	Tipo de documento Proyecto de grado	Título Soporte junta universal superior	Nº plano 00-00-08	Hoja 1/1




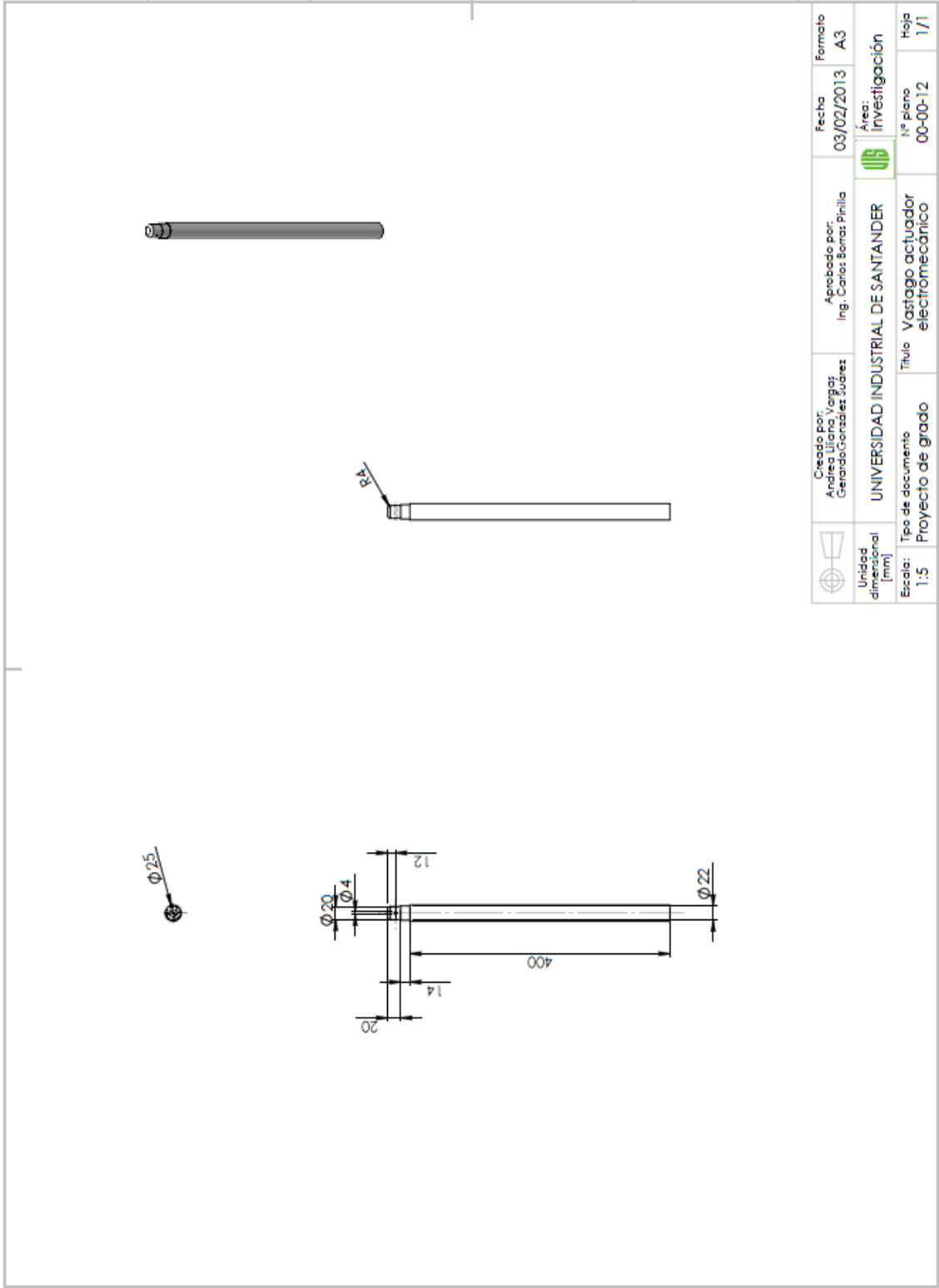
	Creado por: Andrea Liliana Vargas Gerardo Gonzalez Juarez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonas Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
Unidad dimensional [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER			Área: Investigación
Escala: 1:10	Tipo de documento Proyecto de grado	Título Plataforma base	Nº plano 00-00-09	Hoja 1/1



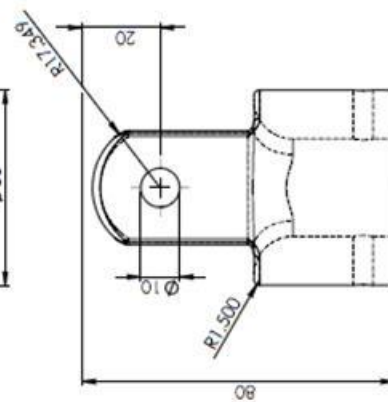
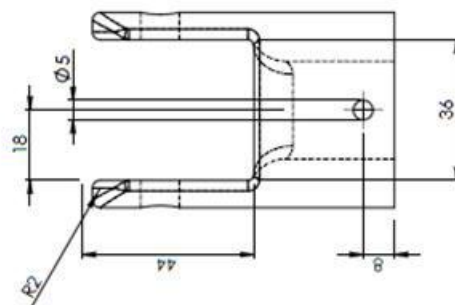
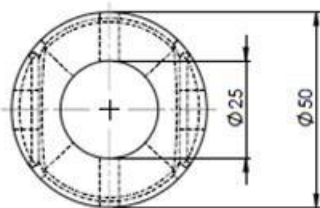
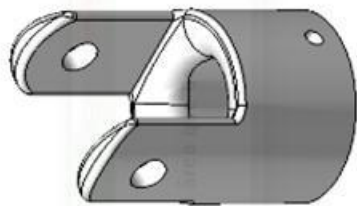
	Creado por: Andrea Liliana Vargas Gerardo Gonzalez Suarez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonas Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
Unidad dimensional [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER			Área: Investigación
Escala: 1:1	Tipo de documento Proyecto de grado	Título Soporte junta universal superior	Nº plano 00-00-10	Hoja 1/1



	Creado por: Andrea Liliana Vargas Gerardo González Suárez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonas Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
Unidad dimensional [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER		Área:  Investigación	Hoja 1/1
Escala: 1:5	Tipo de documento Proyecto de grado	Título Actuador electromecánico	Nº plano 00-00-11	

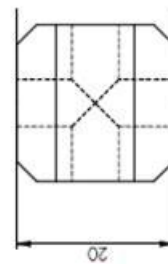
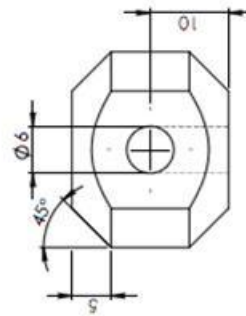
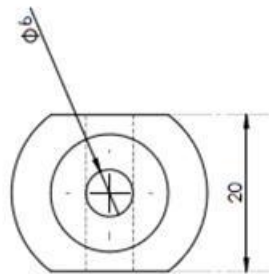


	Creado por: Andrea Liliana Vargas Gerardo Gonzalez Suarez	Aprobado por: Ing. Carlos Barros Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
Unidad dimensional [mm]	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER		Área: Investigación	
Escala: 1:5	Tipo de documento Proyecto de grado	Título Vástago actuador electromecánico	Nº plano 00-00-12	Hoja 1/1



Proyecto de curso  
 Ingeniería en Mecánica

	Unidad dimensional (mm)		Creado por: Andrés Liliana Vargas Gerardo González Juárez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonat Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
Escala: 1:1	Tipo de documento Proyecto de grado	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER		Área: Investigación	Nº plano 00-00-13	Hoja 1/1
		Título Horquilla junta universal inferior				



	Creado por: Andrés Luján Vargas Gerardo González Suárez	Aprobado por: Ing. Carlos Bonas Pinilla	Fecha 03/02/2013	Formato A3
	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER			Área: Investigación
Unidad dimensional [mm]	Título Cruz Juinta universal superior			Hoja 00-00-14 1/1
Escala: 2:1	Tipo de documento Proyecto de grado			

## ANEXO F. SENSORES Y ACTUADORES EN ROBOTICA

### ACTUADORES EN ROBOTICA

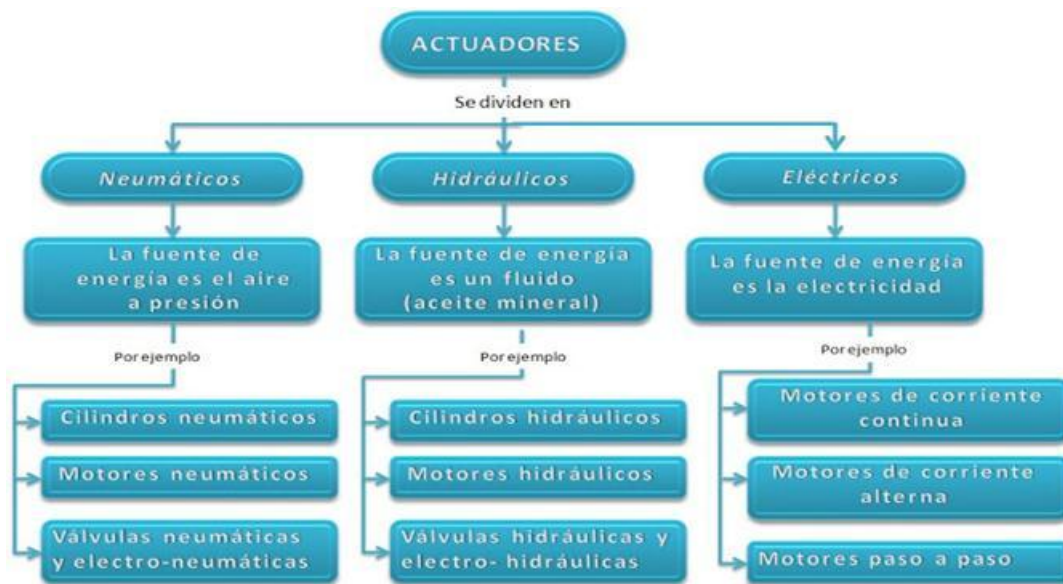
Un actuador es un dispositivo capaz de transformar energía hidráulica, neumática o eléctrica en energía mecánica. Los actuadores pueden verse como transductores; por ejemplo, el motor convierte energía eléctrica (se conecta a una fuente de alimentación) en energía mecánica rotacional (movimiento). Recuérdese que un transductor es cualquier elemento que convierte una forma de energía en otra forma de energía.

Existen diferentes tipos de actuadores:

- Hidráulico.
- Neumáticos.
- Eléctricos.

El siguiente mapa conceptual muestra la clasificación de los actuadores según el tipo de energía empleada:

Clasificación de los actuadores según el tipo de energía empleada.



Fuente: <http://solorobotica.blogspot.com/2011/08/actuadores-en-robotica.html>

La siguiente tabla presenta las ventajas y desventajas de cada tipo de actuador:

Cuadro comparativo de las ventajas y desventajas de cada tipo de actuador

TIPO DE ACTUADOR	VENTAJAS	DESVENTAJAS
<i>Neumático</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bajo costo</li> <li>• Rapidez,</li> <li>• Sencillos</li> <li>• Robustos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Requieren de instalaciones especiales</li> <li>• Ruidosos</li> </ul>
<i>Hidráulico</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rápidos</li> <li>• Alta capacidad de carga</li> <li>• Presentan estabilidad frente a cargas estáticas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Requieren instalaciones especiales.</li> <li>• Son de difícil mantenimiento.</li> <li>• Resultan poco económicos.</li> </ul>
<i>Eléctrico</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Precisos y fiables.</li> <li>• Silenciosos.</li> <li>• Su control es sencillo</li> <li>• Son de una fácil instalación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Potencia limitada</li> </ul>

Fuente: <http://solorobotica.blogspot.com/2011/08/actuadores-en-robotica.html>

## **Actuadores neumáticos.**

Los actuadores neumáticos transforman la energía acumulada en el aire comprimido en trabajo mecánico de movimiento circular o movimiento rectilíneo. Los actuadores neumáticos se clasifican en dos grandes grupos: cilindros neumáticos y motores neumáticos.

En ellos la fuente de energía es aire a presión entre 5 y 10 bar. Existen dos tipos de actuadores neumáticos:

- Cilindros neumáticos.
- Motores neumáticos (de aletas rotativas o de pistones axiales).

En los primeros se consigue el desplazamiento de un embolo encerrado en un cilindro, como consecuencia de la diferencia de presión a ambos lados de aquel. Los cilindros neumáticos pueden ser de simple o doble efecto. En los primeros, el embolo se desplaza en un sentido como resultado del empuje ejercido por el aire a presión, mientras que en el otro sentido se desplaza como consecuencia del efecto de un muelle (que recupera al embolo a su posición en reposo). En los cilindros de doble efecto el aire a presión es el encargado de empujar al embolo en las dos direcciones, al poder ser introducido de forma arbitraria en cualquiera de las dos cámaras.

Normalmente, con los cilindros neumáticos solo se persigue un posicionamiento en los extremos del mismo y no un posicionamiento continuo. Esto último se puede conseguir con una válvula de distribución (generalmente de accionamiento directo) que canaliza el aire a presión hacia una de las dos caras del embolo alternativamente. Existen no obstante sistemas de posicionamiento continuo de accionamiento neumático, aunque debido a su coste y calidad todavía no resultan competitivos.

Principales características:

- Movimiento lineal de un émbolo debido a diferencia de presión.
- Simple efecto y doble efecto.
- Posicionamiento en los extremos y dificultad de posicionamiento continuo.
- Funcionamiento simple y mantenimiento económico.
- Repetitividad inferior a otros tipos de actuadores.
- Adecuados para manipulación de piezas pequeñas.

Cilindro neumático



Fuente: [http://www.festo.com/cms/es-co\\_co/16809.htm](http://www.festo.com/cms/es-co_co/16809.htm)

Para obtener más información de este tipo de actuadores, disponibles en Colombia y poder seleccionar el adecuado se sugiere consultar la siguiente página: [http://www.festo.com/cms/es-co\\_co/16809.htm](http://www.festo.com/cms/es-co_co/16809.htm).

### **Actuadores hidráulicos.**

Este tipo de actuadores no se diferencia mucho de los neumáticos. En ellos, en vez de aire se utilizan aceites minerales a una presión comprendida normalmente entre los 50 y 100 bar, llegándose en ocasiones a superar los 300bar. Los actuadores hidráulicos se clasifican en tres grandes grupos: cilindros hidráulicos, motores hidráulicos y válvulas hidráulicas. La principal ventaja de estos actuadores es su relación potencia/peso.

Sin embargo las características del fluido utilizado en los actuadores hidráulicos marcan ciertas diferencias con los neumáticos. En primer lugar, el grado de compresibilidad de los aceites usados es considerablemente menor al del aire, por lo que la precisión obtenida en este caso es mayor. Por motivos similares, es más fácil en ellos realizar un control continuo, pudiendo posicionar su eje en todo un rango de valores (haciendo uso de servocontrol) con notable precisión.

Frente a estas ventajas existen ciertos inconvenientes. Por ejemplo, las elevadas presiones a las que se trabaja propician la existencia de fugas de aceite a lo largo de la instalación. Asimismo, esta instalación es más complicada que la necesaria para los actuadores neumáticos y mucho más que para los eléctricos, necesitando de equipos de filtrado de partículas, eliminación de aire, sistemas de refrigeración y unidades de control de distribución.

Los accionamientos hidráulicos se usan con frecuencia en aquellos robots que deben manejar grandes cargas (de 70 a 205kg).

Principales características:

- Funcionamiento similar a los neumáticos.
- Grado compresibilidad del aceite muy inferior al del aire: mayor precisión.
- Elevadas fuerzas y pares: Cargas de hasta 200Kg.
- Mantenimiento no muy complejo.
- Repetitividad entre (2.3 y 0.2 mm).
- No presentan problemas de refrigeración.

**Cilindros:** Iguales a los neumáticos.

# Catalogo fabricante de cilindros hidráulicos de doble efecto

**ww-DWZ**

700 Bar  
**Double Acting Cylinder**

ISO9001:2008 | Made in Eichstätt / Germany

**Double acting steel cylinders** have been produced for applications in all mounting positions and are highly recommended in frequent use and for fast working. Hard-chromium plated piston prevents gouge formation and corrosion. Scraper rings remove contamination on piston, therefore service life of cylinders extends.

**For the operations with manual pumps the retrofit kit ww-WW4/3 is required**

**All DWZ-Cylinders are delivered with high pressure quick release coupling.**

**Wiper seal prevents pollution and corrosion**

**High quality steel body**

**Hard-chrom plated piston with end stop**

**Wiper seal prevents pollution and corrosion**


**Clear threads**

**Cylinders have a male thread on the cylinder head and a female thread on piston rod.**

**DWZ Cylinders are equipped with grooved saddles.**







**Technical Data**

Type	Capacity (l/min) (P=14.8)	Stroke Area (mm²)	Oil cap. (mm³)	Height A (mm)	Weight (kg)	
DWZ-010-160	10	150	16	255	310	6,4
DWZ-010-250	10	250	31	398	400	8
DWZ-025-050	25	50	33,2	166	180	9
DWZ-025-100	25	100	33,2	332	232	12
DWZ-025-150	25	150	33,2	498	280	15
DWZ-040-100	40	100	63,6	636	305	18
DWZ-040-150	40	150	63,6	954	355	23
DWZ-040-300	40	300	63,6	1.908	505	35
DWZ-075-160	75	160	104	1.661	338	42
DWZ-075-320	75	320	104	3.322	512	60,6
DWZ-100-100	100	100	132,7	1.328	270	34
DWZ-100-150	100	150	132,7	1.992	320	50
DWZ-100-320	100	320	132,7	4.248	490	75
DWZ-150-050	150	50	201	1.005	258	66
DWZ-150-150	150	150	201	3.015	378	90
DWZ-150-300	150	300	201	6.029	528	119
DWZ-200-050	200	50	314	1.570	274	105
DWZ-200-150	200	150	314	4.710	394	151
DWZ-200-300	200	300	314	9.420	544	191

**Sizes**

Type	B	D	C	F	T	T1	Q	G
DWZ-010-160	60	1" - 8	28	2 3/4" - 14	32	14	M6	32
DWZ-010-250	85	1 1/2" - 16	55	3 5/16" - 12	52,5	15	M10	50
DWZ-025-050	120	M50 x 2,5	85	M118 x 2,5	60	15	M12	50
DWZ-025-100	150	1 3/4" - 12	61	5 3/4" - 12	100	15	1/2" - 13	50
DWZ-025-150	176	M70 x 2,5	90	M175 x 2,5	100	15	M12	50
DWZ-040-100	215	2 1/2" - 12	88	8" - 12	158	25	3/4" - 16	55
DWZ-040-150	265	2 1/2" - 12	111	9 3/4" - 12	127	25	1" - 8	55
DWZ-040-300								

**More strokes and/or larger forces available on request.**

Werner Weifner GmbH Sollnau 14, D-85072 Eichstätt • Tel: + 49 8421 9816-0 • Fax: + 49 8421 9816-88 • info@werner-weifner.com  
 Official Web Site: [www.werner-weifner.com](http://www.werner-weifner.com) | Marketing Platform: [www.weibertools.com](http://www.weibertools.com) | Distributed by **SUBICON**

Fuente: <http://www.weitertools.com/products/DWZ.htm>

## ACTUADORES ELECTRICOS

Se le da el nombre de actuadores eléctricos cuando se usa la energía eléctrica para que el robot ejecute sus movimientos. Los actuadores eléctricos se utilizan para robots de tamaño mediano, pues éstos no requieren de tanta velocidad ni potencia como los robots diseñados para funcionar con actuadores hidráulicos. Los robots que usan la energía eléctrica se caracterizan por una mayor exactitud y repetibilidad.

Los sistemas de acondicionamiento eléctrico han llegado a ser los que más predominan en los ambientes robóticos industriales. Aunque no proporcionan la velocidad o la potencia de los sistemas hidráulicos, los dispositivos eléctricos ofrecen una mayor exactitud y repetitividad, necesitan de un menor espacio de piso y, como consecuencia, son muy adecuados para el trabajo preciso, como el ensamblaje.

Por lo general, los robots se pueden accionar con un acondicionamiento eléctrico, por medio de los motores paso a paso o de los servomotores. En la actualidad, los motores paso a paso predominan en los robots “instructores” pequeños, los cuales se emplean en las instituciones educativas o en los ambientes de laboratorios automatizados.

Los actuadores eléctricos son los más utilizados en los robots industriales actuales por las siguientes características:

- Fáciles de controlar.
- Sencillos, pero de construcción delicada.
- Precisos.

- Alta repetitividad.

Más pesados que los neumáticos e hidráulicos a igualdad de potencia.

### **Actuadores electromecánicos Zwick**

Los actuadores electromecánicos son adecuados para usos muy diversos, tanto para aplicaciones de tracción como de compresión. Igualmente se pueden integrar de forma muy flexible en otros sistemas de ensayo. Su campo de acción comprende desde el ensayo de materiales y componentes hasta el ensayo de productos acabados. Asimismo, permiten la realización de ensayos durante ciertas fases de producción, como el ensamblaje, montaje etc. y también son ideales para realizar ensayos cíclicos con grandes recorridos.

Disponible en seis capacidades diferentes: 1, 2, 5, 10, 20 y 30 kN.

Altas velocidades de ensayo de hasta 30 m/min garantizan una gran eficacia.

Cambio suave entre los modos de control por fuerza y control de posición.

El actuador electromecánico se monta mediante una brida de unión o un pasador de fijación, permitiendo así un uso muy flexible y cómodo.

Para las diferentes tareas de ensayo existe una amplia gama de módulos estándar, tales como células de carga, herramientas de ensayo, software de ensayo y la electrónica estándar Zwick.

Para su fácil integración en la línea de producción, existen interfaces y tarjetas adicionales.

Fácil instalación y una gran duración aseguran una operación baja en mantenimiento.

Tipo de cilindros electromecánicos ofrecidos por Swick



Fuente: <http://www.zwick.es/es/productos/maquinas-de-ensayo-estaticas/actuadores-electromecanicos.html>.

Catalogo actuador electromecánico Festo Colombia



Fuente: [https://www.festo.com/cat/es-co\\_co/data/doc\\_es/PDF/ES/DNCE\\_ES.PDF](https://www.festo.com/cat/es-co_co/data/doc_es/PDF/ES/DNCE_ES.PDF)

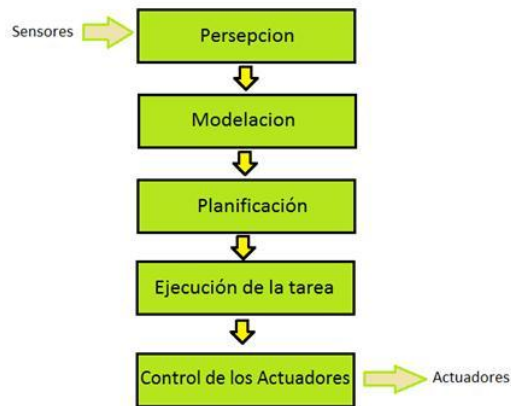
Para obtener más información de este tipo de actuadores, disponibles en Colombia y poder seleccionar el adecuado se sugiere consultar la siguiente página: [http://www.festo.com/cms/es-co\\_co/9665.htm](http://www.festo.com/cms/es-co_co/9665.htm)

## SENSORES EN ROBOTICA

Los sensores son dispositivos físicos que miden cantidades físicas, tales como distancia, luz, sonido, olor, temperatura, etc. El objetivo de los sensores es permitir que los robots puedan recibir y percibir información desde el mundo que los rodea. Su función es similar a la de nuestros sentidos, con el cual logramos luego de un proceso poder interactuar con nuestro medio, tal como se muestra a continuación.

Propiedad Física	Tecnología
Contacto	Switch, sensor de contacto
Distancia	Ultrasonido, radar, infrarrojo
Luz	Diodo infrarrojo, Fotorresistencia
Nivel de luz/Imagen	Cámaras
Sonido	Micrófono
Olor	Química
Temperatura	Termal, infrarrojo
Inclinación	Inclinometro, giroscopio
Altitud	Altímetro
.....	.....

Fuente: Autores del proyecto.



Fuente: Autores del proyecto.

Los sensores permiten al robot percibir su medio ambiente y su estado interno. Así se pueden clasificar dos tipos básicos: Sensores de estado interno y Sensores de estado externo.

También desde otro punto de vista se pueden clasificar en: Activos (emiten energía o modifican el ambiente) y Pasivos (reciben energía pasivamente).

Se deben tener en consideración al momento de elegir sensores lo siguiente:

- Campo de vista.
- Rango de operación.
- Exactitud y resolución.
- Velocidad (operación en tiempo real por el periodo de muestreo).
- Requerimientos computacionales.
- Potencia, peso y tamaño.

- Robustez (redundancia).
- Sensitividad (Grado de cambio de la señal de salida del sensor en función del cambio de la señal física medida)

Tal como se menciono los sensores se pueden clasificar en:

### **Sensores Internos**

Sensores de presencia.

Sensores de Posición.

Sensores de Velocidad.

Sensores de Fuerza.

### **Sensores Externos.**

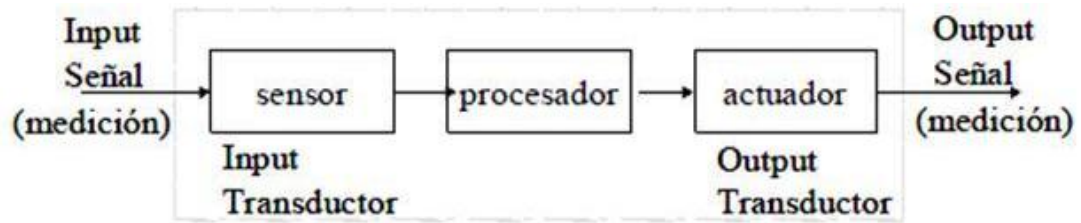
Sensores de Presencia.

Sensores de Distancia.

### **Características Generales.**

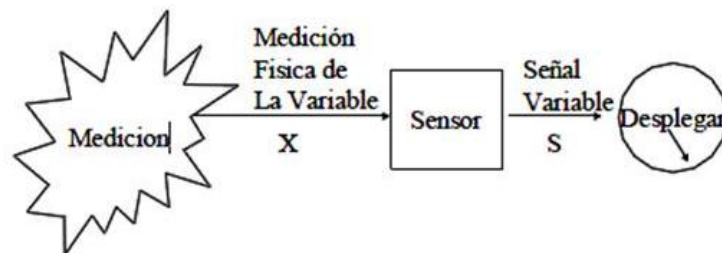
Los transductores son dispositivos que convierte señales desde un medio físico a una señal correspondiente teniendo una diferente forma física tal como mecánico, magnético, eléctrico, óptico, químico, etc. Los transductores pueden modificar o conservar la energía.

Por otra parte un sensor es un dispositivo que recibe y responde a señales o estímulos. Esto es en el concepto de borde que incluye la extensión de nuestras capacidades de percepción para adquirir información de las cantidades físicas. Dentro de este contexto los actuadores corresponde a las salida del transductor y el sensor corresponde a la entrada del transductor.



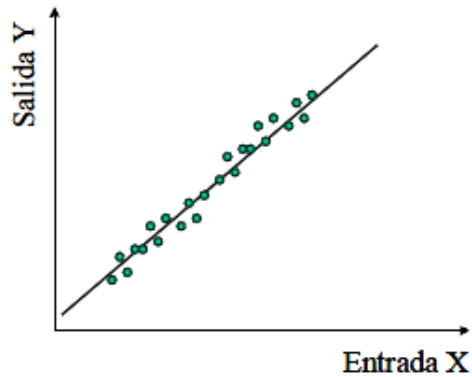
Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

Para realizar la medición con un simple instrumento, se requiere de un modelo del instrumento. Dada una variable observable  $X$  obtenida de la medición mediante alguna manera (temperatura, masa, etc.) el sensor genera una señal variable que puedes ser manipulada (procesada, transmitida o desplegada).



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

El proceso de calibración consiste en determinar la relación entre la medida física de la variable  $X$  y la señal de la variable de salida  $S$ . Por lo tanto un sensor es calibrado aplicando un número conocido de entradas y registrando la respuesta del sistema.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

Los sensores tienen características estáticas y dinámicas. Las características estáticas de los sensores son: Precisión, discriminación, exactitud, error, sensibilidad, linealidad, histéresis.

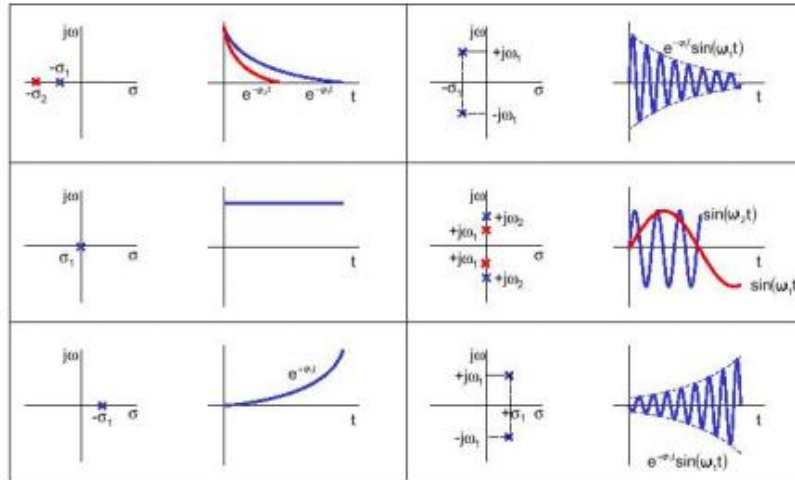
Dentro de las características dinámicas de los sensores se pueden clasificar en sistemas de orden cero, de primer orden o de segundo orden por lo que se puede representar el sistema lineal mediante una función de transferencia para conocer el tipo de respuesta que este tendrá antes de estabilizarse en régimen permanente. Del sistema dinámico se puede llegar al siguiente planteamiento:

$$L = \left[ a_k \frac{d^k y}{dt^k} + \dots a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{d^1 y}{dt^1} + a_0 y(t) = x(t) \right]$$

$$(a_k s^k + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0) Y(s) = X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{a_k s^k + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0}$$

Dependiendo de la ubicación de los polos del sistema será la respuesta del sensor, tal como se puede apreciar en la siguiente figura.

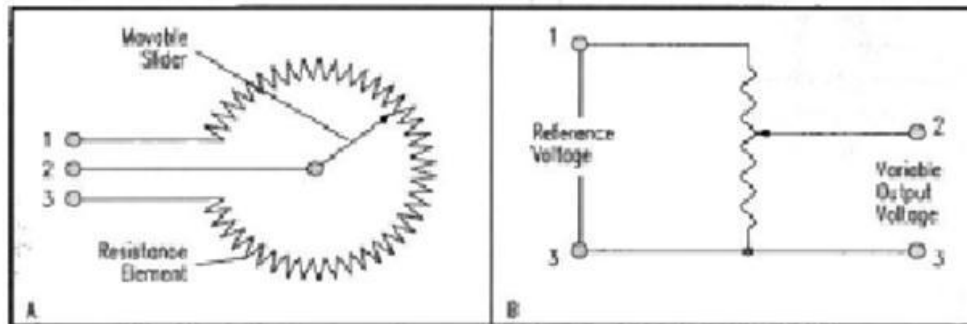


Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

### Sensores de posición

#### Potenciómetro.

Dentro del conocimiento de la posición angular se tienen los potenciómetros, que varía su resistencia.

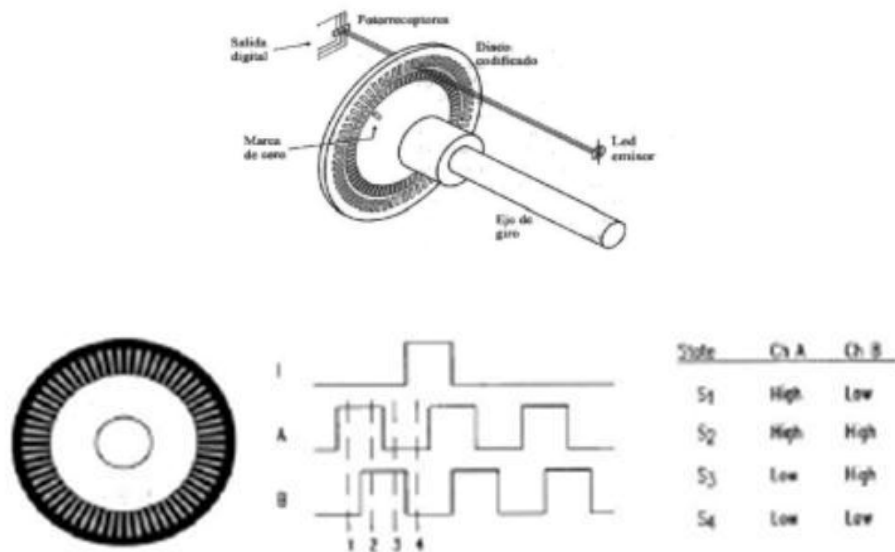


Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

Inconvenientes: Desgaste, Ruido Eléctrico, Velocidad Limitada.

### Codificadores ópticos incrementales

Los encoders ópticos convierten movimientos en una secuencia de pulsos digitales, contando un solo bit o decodificando un conjunto de ellos, los pulsos se pueden convertir en medidas de posiciones relativas o absolutas. La configuración lineal o rotativa (más utilizada). Los rotativos se componen de un disco plástico (transparente), al cual se acopla el eje cuya posición se quiere medir, con una serie de marcas (opacas) colocadas radialmente y equidistantes entre si; de elementos emisores de luz y de fotorreceptores. A medida que el eje gira, el haz de luz se interrumpe con las marcas y se generan pulsos en el receptor. Contando estos pulsos es posible conocer la posición del eje. Problema de detección del sentido de giro.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

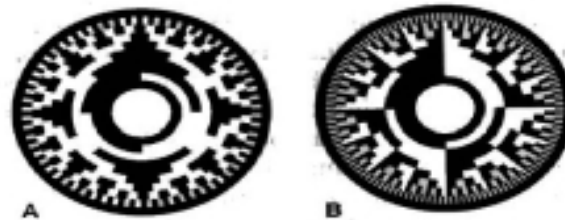
## Encoders ópticos incrementales.

Los encoders ópticos incrementales miden posiciones relativas, mediante dos trenes de pulsos desfasados de  $90^\circ$  para determinar sentido de giro. Señal de paso por cero y se pueden contar hasta 100.000 pulsos por vuelta para lo cual se requiere de una electrónica adicional.



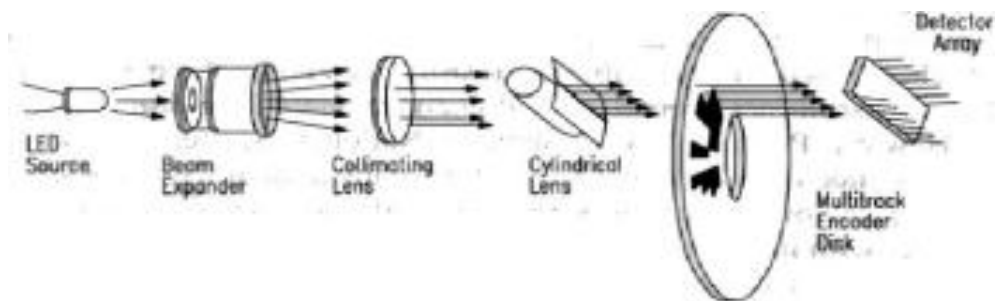
Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

## Codificadores ópticos absolutos:



A - Código Gray

B- Código binario



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

### **Encoders ópticos absolutos.**

Miden posiciones absolutas.

El disco transparente se divide en sectores.

Cada Sector posee un código binario único.

Resolución Fija.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

**Código Gray (cíclico) frente a código binario.**

**Código Gray**

b2	b1	b0
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

**Código Binario**

b2	b1	b0
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

**Resolver / Sincroresolvers**

Es una bobina móvil conectada al eje de giro, y varias bobinas fijas. Al excitar la bobina móvil con una señal sinusoidal ( $\approx 400\text{Hz}$ ), en las bobinas fijas se inducen tensiones que dependen del ángulo girado.

Resolver, dos bobinas fijas desfasadas 90°.

$$V_1 = V \sin(\omega t) \sin(q); \quad V_2 = V \sin(\omega t) \cos(q)$$

Sincroresolver, tres bobinas fijas desfasadas 120° (estrellas):

$$V_{13} = \sqrt{3} V \cos(\omega t) \sin(q);$$

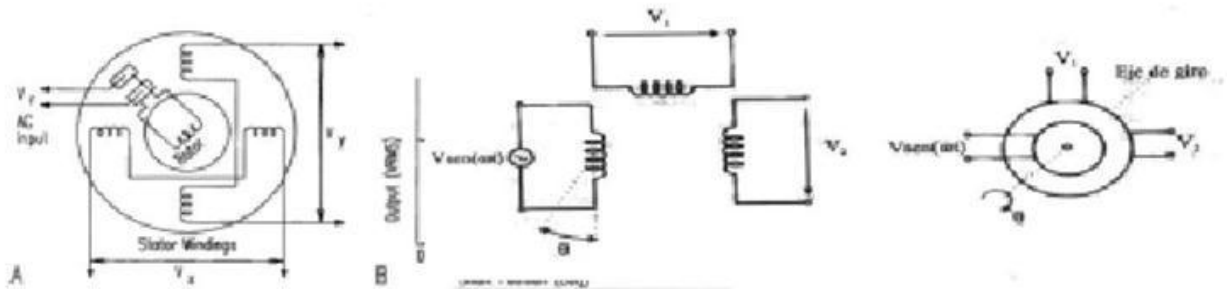
$$V_{32} = \sqrt{3} V \cos(\omega t) \sin(q + 120);$$

$$V_{21} = \sqrt{3} V \cos(\omega t) \sin(q + 240);$$

Tecnología analógica.

Resolución infinita.

Bajo Momento de inercia.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

### Reglas Magnéticas (Inductosyn)

Funcionamiento similar al de los resolvers.

Los devanados secundarios son móviles y el primario es fijo.

Al alimentar el devanado fijo con una tensión alterna, en los secundarios se inducen tensiones proporcionales al desplazamiento del eje:  $e_2 = E \text{sen}(at + d)$

Bajo rozamiento.

Resolución infinita.

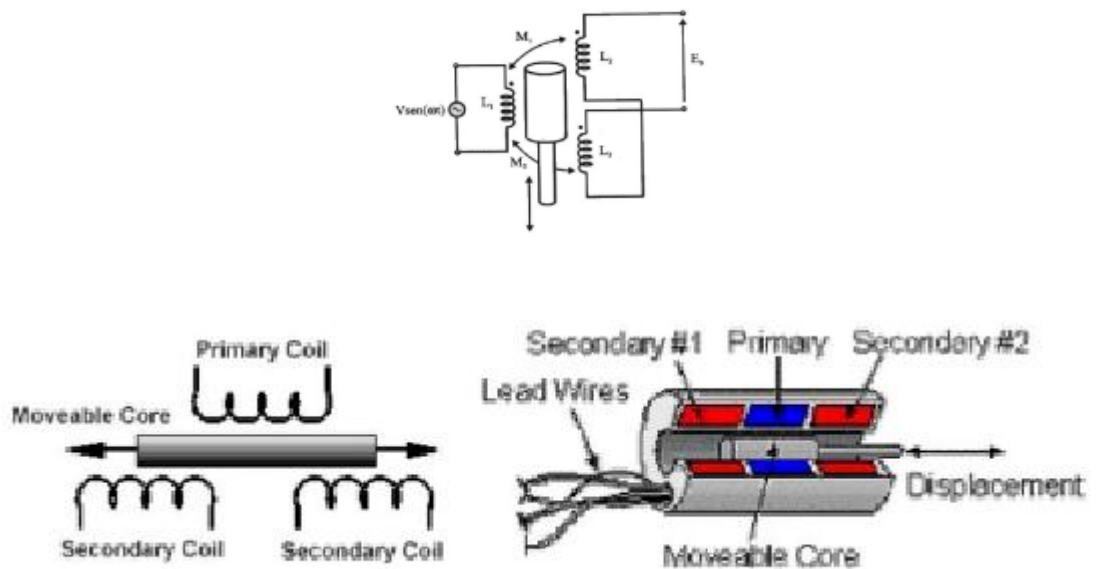
### Otros sensores de posición

Transformador diferencial de variación lineal (LVDT).

Núcleo ferromagnético, unido al eje cuyo desplazamiento se quiere medir, entre el devanado primario y dos devanados secundarios.

Al mover el núcleo, la tensión alterna del primario induce tensiones diferentes en los secundarios (aumenta en uno y disminuye en otro), que son proporcionales al desplazamiento del eje.

Alta linealidad y repetitividad, resolución infinita, bajo rozamiento.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

Comparación de los sensores de posición angular.

	Robustez Mecánica	Rango dinámico	Resolución	Estabilidad térmica	Mantenimiento
Encoder	Regular	Media	Regular	Buena	Bueno
Resolver	Buena	Buena	Buena	Buena	Bueno
Potenciómetro	Regular	Mala	Regular	Mala	Malo

### **Sensor de la velocidad.**

Necesarios para mejorar el comportamiento dinámico de los actuadores. Se pueden utilizar los sensores de posición para medir velocidad, teniendo en cuenta el tiempo que se tarda en alcanzar una determinada posición.

### **Tacómetros**

El motor ya sea de corriente continua o alterna, dotado de imán permanente y unido al eje del cual se quiere medir la velocidad, induce una tensión en el estator que es proporcional a la velocidad de giro con resoluciones de 10mV/rpm.

### **Sensores de Fuerza.**

### **Convertidores de frecuencia-tensión.**

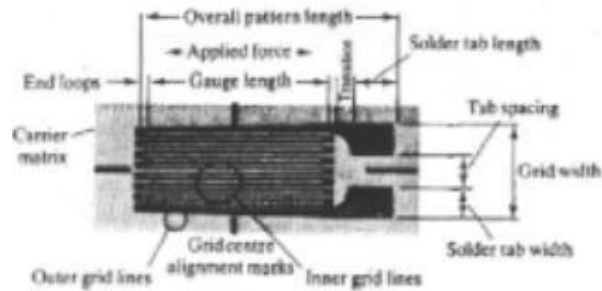
Tecnología electrónica. Producen una tensión de salida proporcional a la frecuencia de un tren de pulsos, que pueden provenir de un sensor de posición digital, o bien de un sensor de posición analógico a través de una conversión analógica-digital.

### **Medición de Esfuerzos.**

Permiten determinar las fuerzas y pares ejercidos sobre el elemento terminal, durante la ejecución de una tarea. Pueden utilizarse para percibir la forma o

posición de un objeto, midiendo la fuerza ejercida en la superficie de contacto sobre un cierto número de captadores puntuales.

### Galgas Extensométricas.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

Varían su resistencia eléctrica al deformarse.

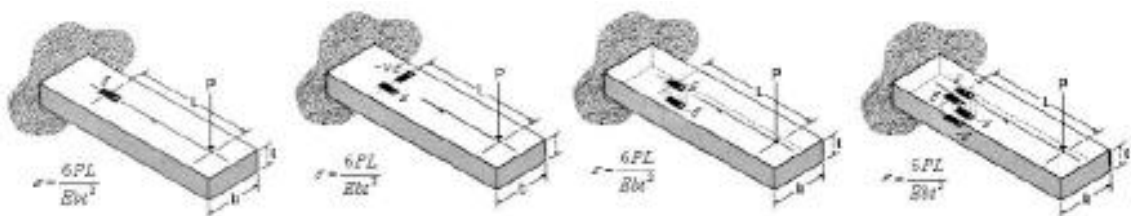
Galgas de hilo: Hilo dispuesto en forma de zigzag sobre un soporte elástico.

Galgas de semiconductor.

Pista de semiconductor en un núcleo de silicón.

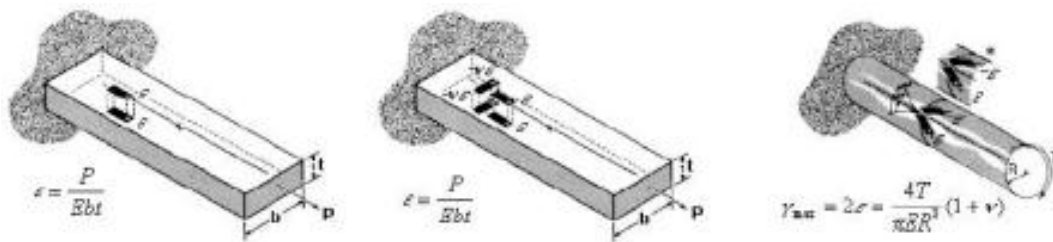
En ambos casos al someter a tracción a la galga, se estira y disminuye su sección, con lo que varía su resistencia eléctrica.

Montaje y calibración meticulosa.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

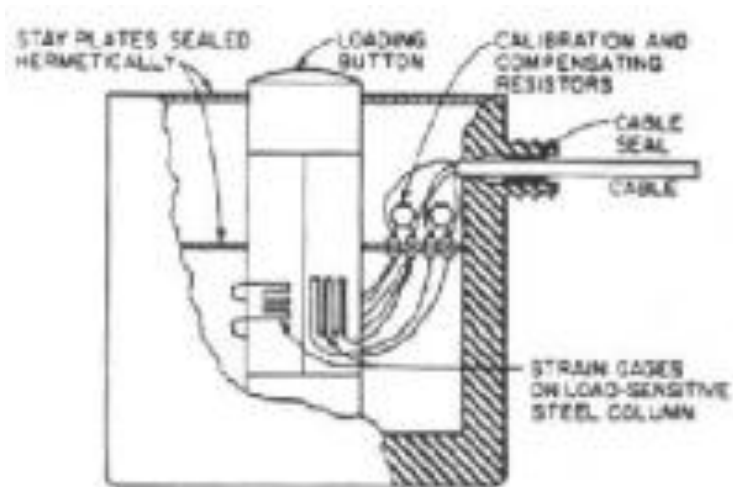
## Medida de fuerzas de tracción y torsión.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

## Células de carga:

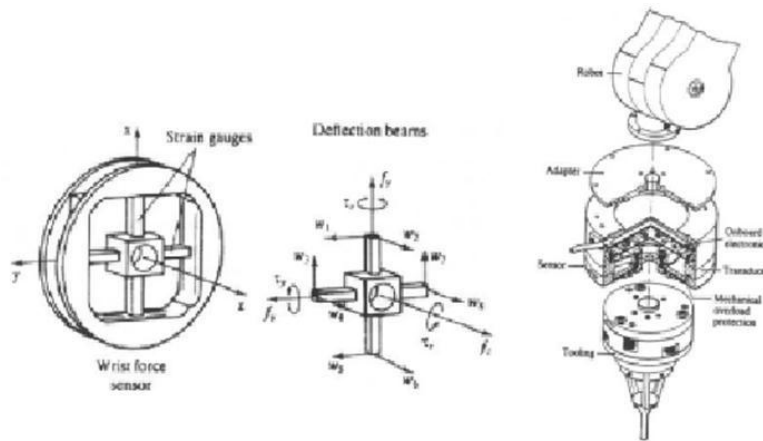
Conjunto integrado de galgas formando un elemento unitario de medida de fuerzas o pares.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

Galgas Extensométricas:

Disposición en la muñeca de un robot.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

### **Sensores de Presencia.**

Mecánicos: Fines de Carrera.

Problemas de mantenimiento: mecánico y desgaste de contactos.

### **Ópticos:**

Emisor y receptor en un único encapsulado.

Emisor y receptor independientes: barreras fotoeléctricas.

Inductivo.

Detección de variación de consumos debidos a corrientes de Foucault.

Sólo sirve para materiales metálicos.

Capacitivo.

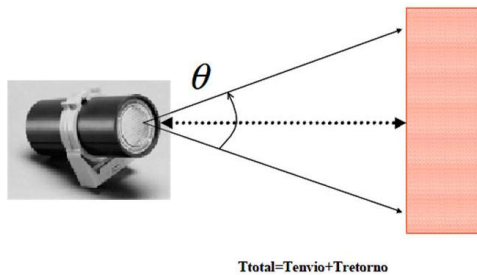
Medida de variación de capacidad.

Materiales metálicos y no metálicos.

## Sensores de Distancias.

### Ultrasonidos.

Los sensores de ultrasonido emiten una onda de sonido y una vez que rebota sobre un objeto se puede determinar la distancia a la que este se encuentra una vez que se calcula el tiempo en ir y volver de la onda.



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

Rangos de 0.15 [m] a 20[m]

Poca precisión:

Depende de condiciones ambientales.

Incertidumbre de la procedencia del eco.

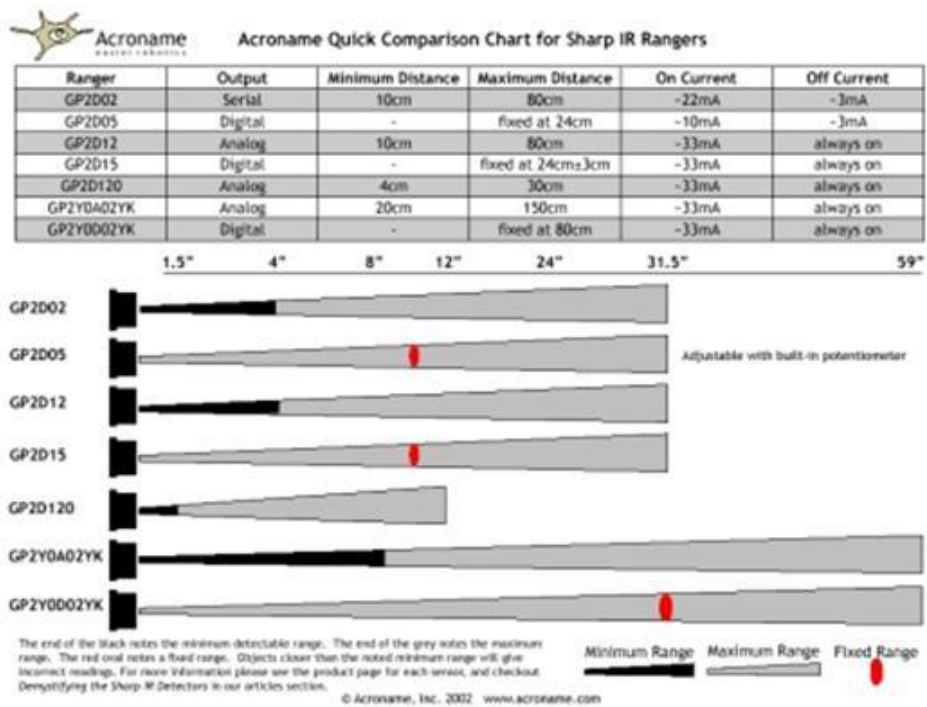
### Infrarrojo



Fuente: **RUIZ, J., SALAZAR, r.** Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

Este tipo de sensores son de gran uso ya que envía emita un haz de luz y el rebote permite determinar una relación de distancia, esta varia entre 0 [cm] a 150 [cm]. Algunas desventajas son que depende de las condiciones ambientales y del color de los elementos.

A continuación se muestra una gama de distintos infrarrojos con sus especificaciones.



Fuente: RUIZ, J., SALAZAR, r. Sensores, Actuadores y Efectores. Introducción a la robótica, Cap. 2. 41 p.

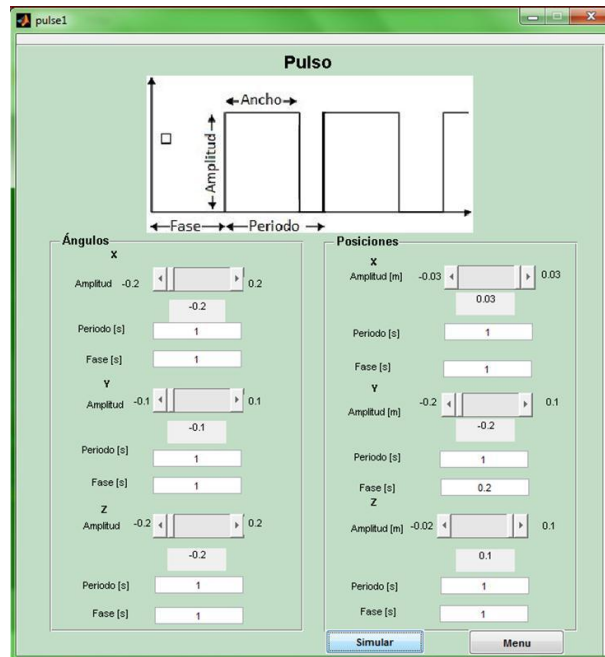
## ANEXO G. SELECCIÓN DEL ACTUADOR CON BASE EN LOS RESULTADOS GRÁFICOS OBTENIDOS MEDIANTE SIMULACIÓN

Tomando en cuenta los diferentes tipos de movimientos a ejecutar por la plataforma se calculo la potencia promedio necesaria en el actuador y la fuerza critica que ejerce, con base en este parámetro y la longitud necesaria del actuador, se selecciono el actuador adecuado para la plataforma.

Los resultados de estas simulaciones solamente son útiles para corroborar el procedimiento analítico realizado en capítulos anteriores. Sin embargo, al tener definido el tipo de plataforma que se quiere construir, es posible optimizar el diseño mecánico y el control.

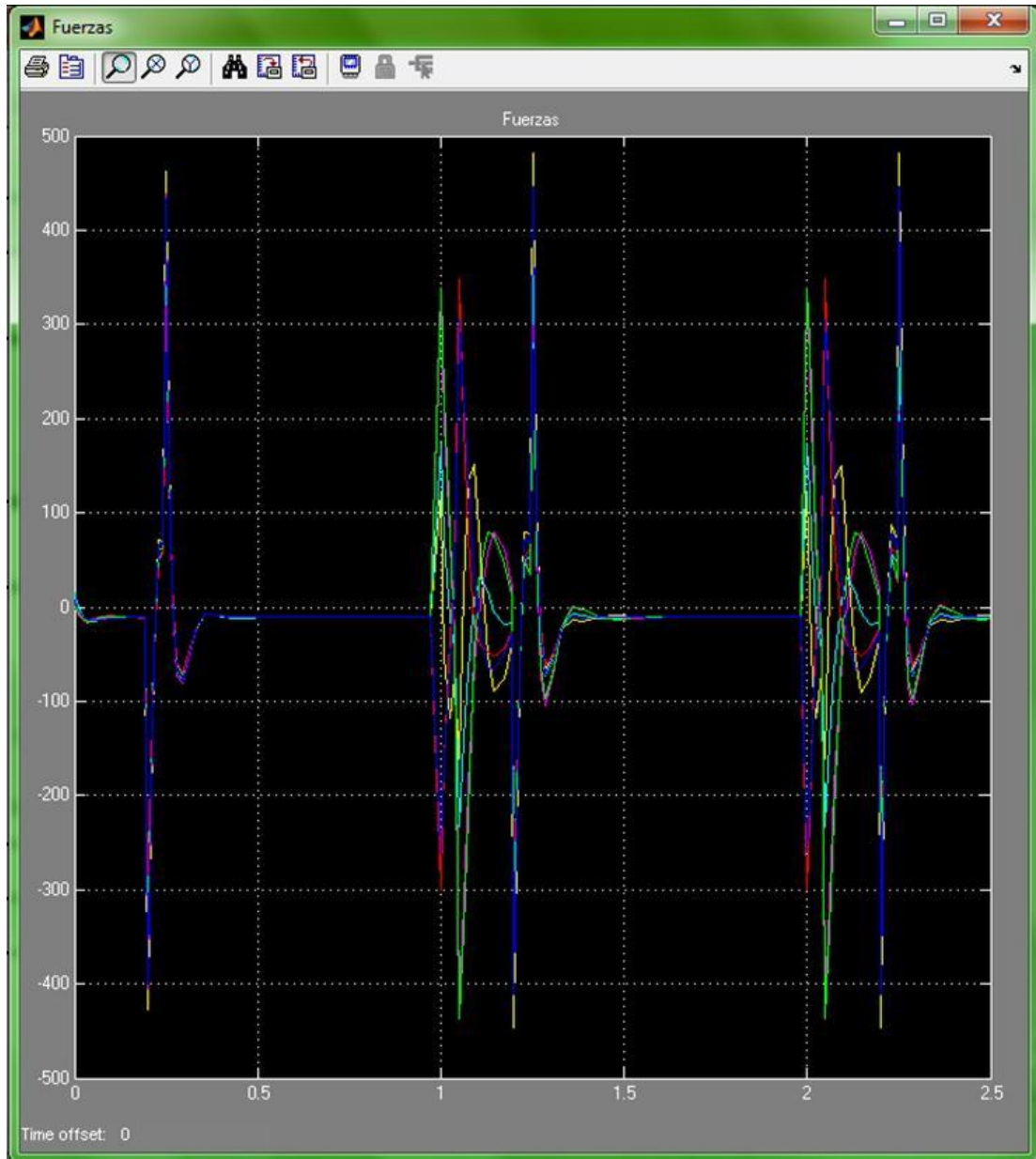
Gráficas obtenidos para el tipo de señal pulso:

Introducción de datos en la interfaz grafica.



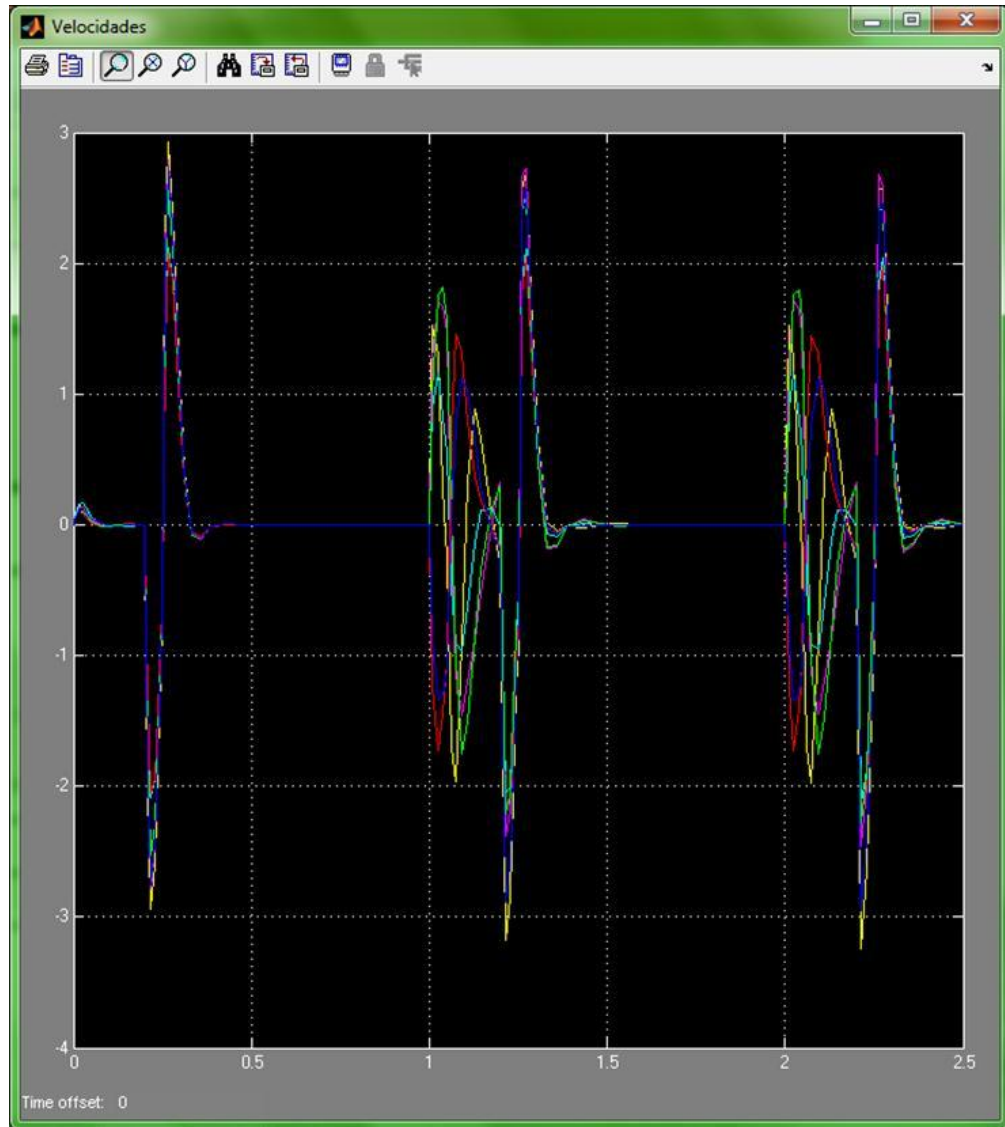
Fuente: Autores del proyecto.

Fuerzas obtenidas en los actuadores [N]



Fuente: Autores del proyecto.

Velocidades de los actuadores [m/s]



Fuente: Autores del proyecto.

Podemos observar:

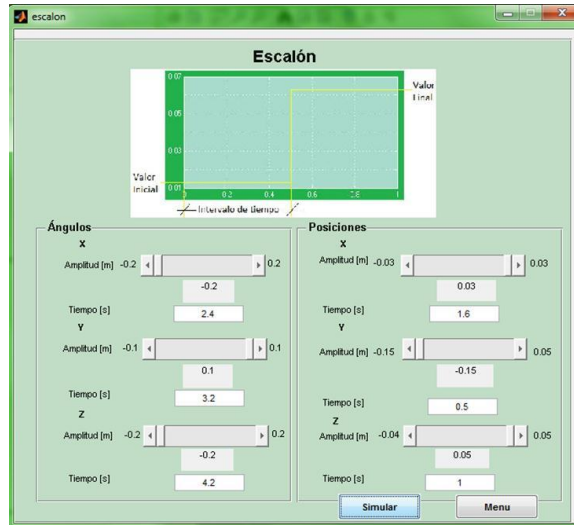
$$F_{max} = 450 [N]$$

$$V_{max} = 3 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$P = F * V = 1.35 [kw]$$

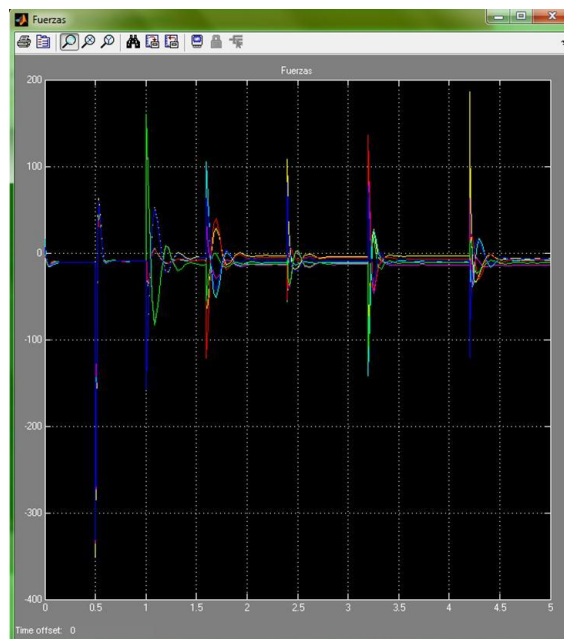
Graficas obtenidos para el tipo de señal Escalón:

Introducción de datos en la interfaz grafica.



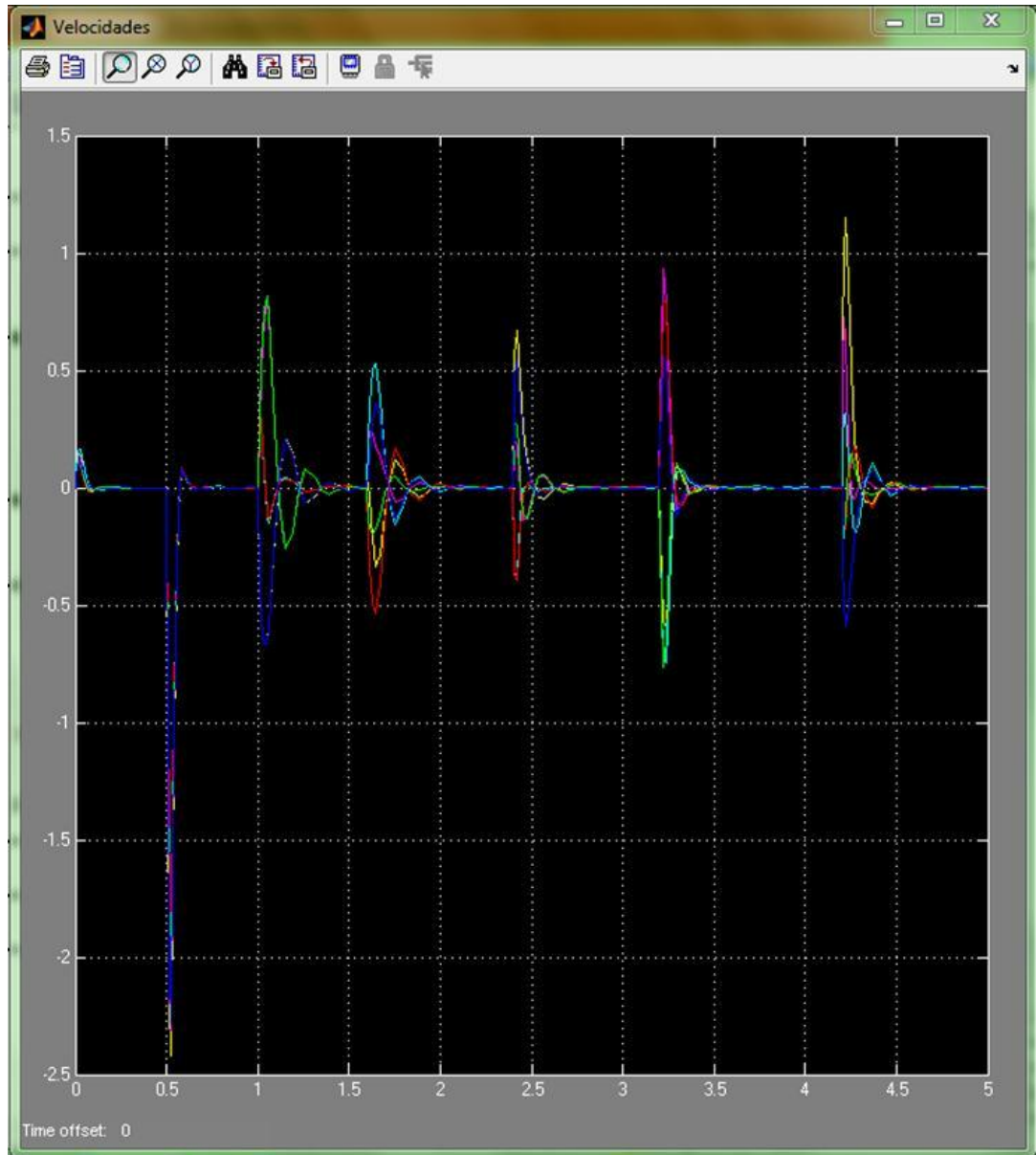
Fuente: Autores del proyecto.

Fuerzas obtenidas en los actuadores [N]



Fuente: Autores del proyecto.

Velocidades obtenidas en los actuadores [m/s]



Fuente: Autores del proyecto.

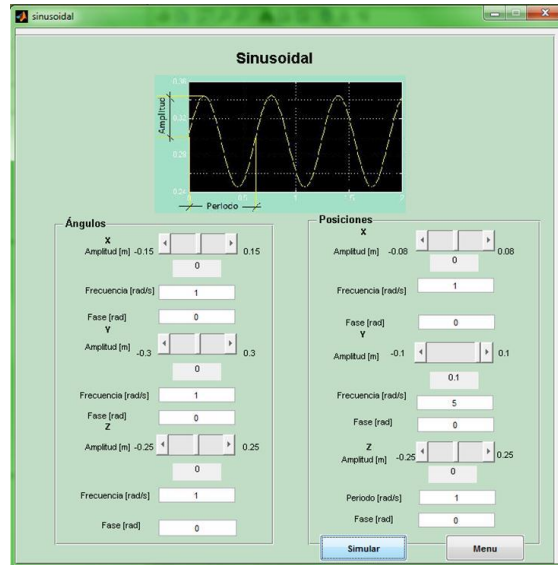
$$F_{max} = 350 [N]$$

$$V_{max} = 2.4 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$P = F * V = 0.84 [kw]$$

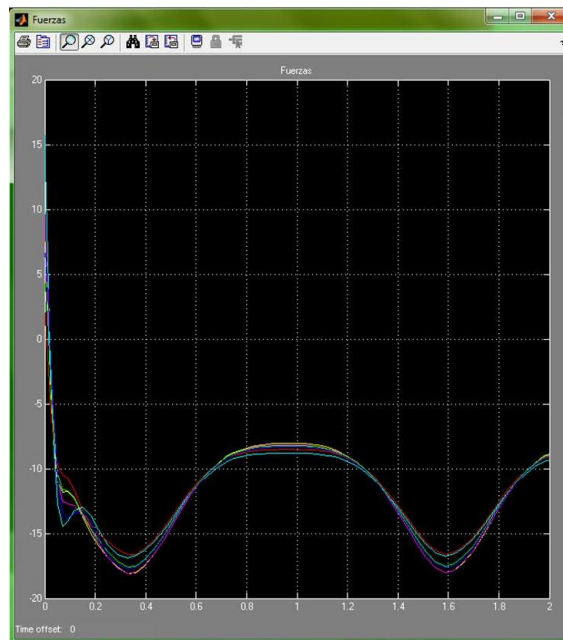
Graficas obtenidos para el tipo de señal Onda Sinusoidal:

Introducción de datos en la interfaz grafica.



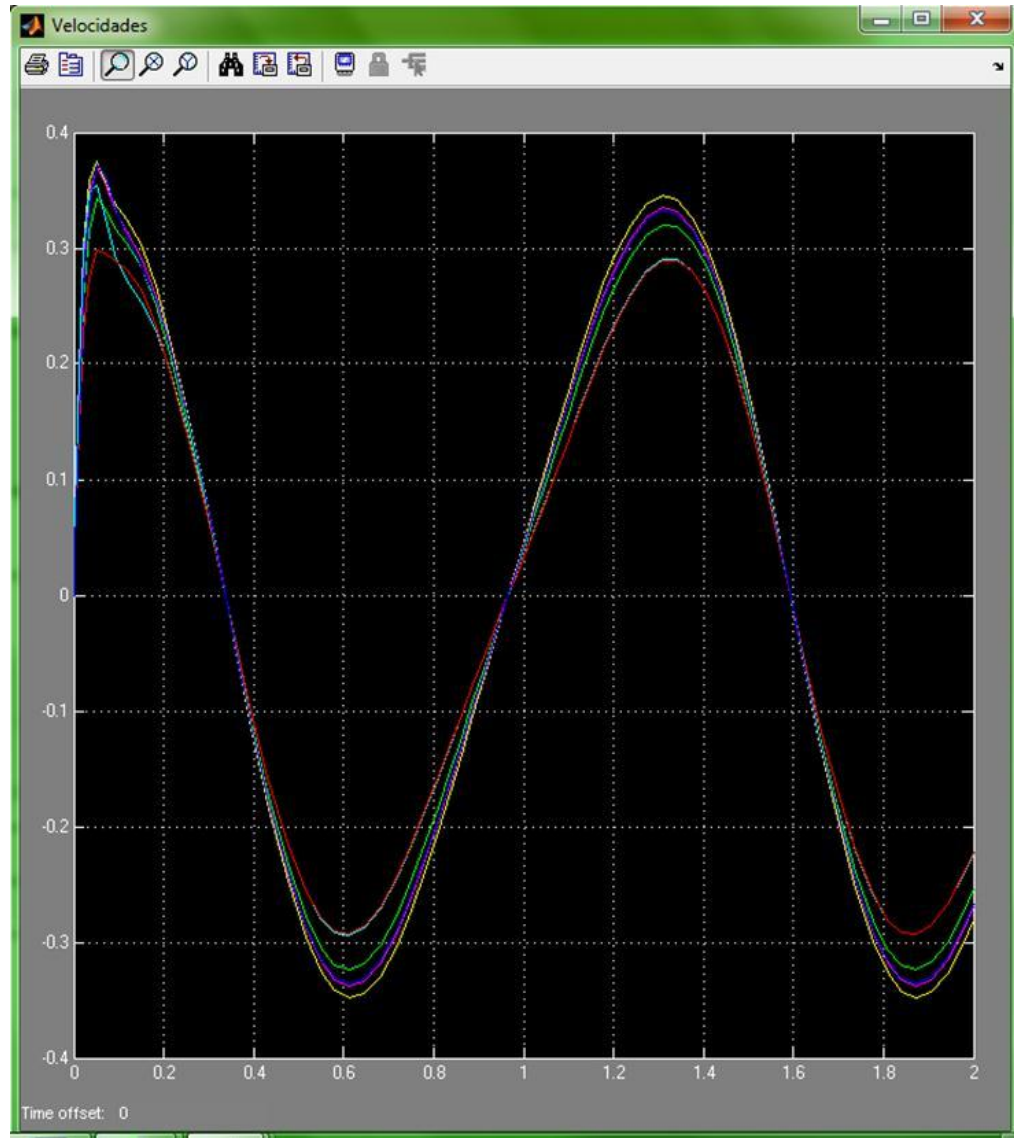
Fuente: Autores del proyecto.

Fuerzas obtenidas en los actuadores [N]



Fuente: Autores del proyecto.

Velocidades obtenidas en los actuadores [m/s]



Fuente: Autores del proyecto.

$$F_{max} = 20 \text{ [N]}$$

$$V_{max} = 0.4 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$P = F * V = 8 \text{ [w]}$$

Con base en los datos obtenidos se selecciona el actuador con los siguientes datos:

$$F_{max} = 450 [N]$$

$$V_{max} = 3 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

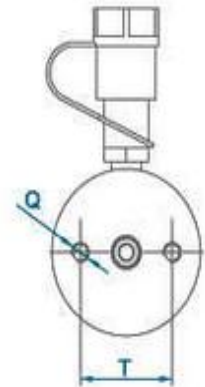
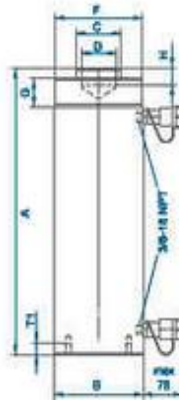
$$P = F * V = 1.35 [kw]$$

$$L_{actuador} = 500[mm]$$

$$Carrera_{max} = 20 [cm]$$

Catálogo de selección del actuador Hidráulico.

*Cilindros DWZ están equipados con  
silletas estriadas.*



DATOS TÉCNICOS

Tipo	Capacidad		Stroke (mm)	Area (cm <sup>2</sup> )	Capacidad de aceite (cm <sup>3</sup> )	Altura A (mm)	Peso (kg)
	(Ton)	(kN) (Push / Pull)					
DWZ - 010 a 160	10	109/20	160	16	255	310	6,4
DWZ - 010 a 250			250	31	398	400	8
DWZ - 025 a 050	25	227/40	50	33,2	166	180	9
DWZ - 025 a 100			100	33,2	332	232	12
DWZ - 025 a 150			150	33,2	498	280	15
DWZ - 040 a 100	40	436/209	100	63,6	636	305	18
DWZ - 040 a 150			150	63,6	954	355	23
DWZ - 040 a 300			300	63,6	1.908	505	35
DWZ - 075 a 160	75	712/140	160	104	1.664	338	42
DWZ - 075 a 320			320	104	3.322	512	60,6
DWZ - 100 hasta 100	100	911/189	100	13,7	1.328	270	34
DWZ - 100 - 150			150	132,7	1.992	320	50
DWZ - 100 hasta 320			320	132,7	4.248	490	75
DWZ - 150 a 050	150	1,380 / 370	50	201	1.005	258	66
DWZ - 150 hasta 150			150	201	3.015	378	90
DWZ - 150 - 300			300	201	6.029	528	119
DWZ - 200 a 050	200	2,156 / 560	50	314	1.570	274	105
DWZ - 200 hasta 150			150	314	4.710	394	151
DWZ - 200 - 300			300	314	9.420	544	191

TAMAÑOS

Tipo	B	D	C	F	T	T1	Q	G
	(Mm)							
DWZ - 010 a 160	60	1" - 8	28	2 1/4" - 14	32	14	M6	32
DWZ - 010 a 250								
DWZ - 025 a 050	85	1 1/2" - 16	55	3 5/16 a 12	52,5	15	M10	50
DWZ - 025 a 100								
DWZ - 025 a 150								
DWZ - 040 a 100	120	M50 X 2,5	65	M118 X 2,5	60	15	M12	50
DWZ - 040 a 300								
DWZ - 075 a 160	150	1 3/4" - 12	81	3 3/4" - 12	100	15	1/2" - 13	50
DWZ - 075 a 320								
DWZ - 100 hasta 100	176	M70 X 2,5	90	M175 x 2,5	100	15	M12	50
DWZ - 100 - 150								
DWZ - 100 hasta 320								
DWZ - 150 a 050	215	2 1/2" - 12	88	8" - 12	158	25	3/4" - 16	55
DWZ - 150 hasta 150								
DWZ - 150 - 300								
DWZ - 200 a 050	265	2 1/2" - 12	11	9 3/4" - 12	127	25	1" - 8	55
DWZ - 200 hasta 150								
DWZ - 200 - 300								

Fuente: <http://www.directindustry.es/prod/werner-weitner-gmbh/cilindros-hidraulicos-de-doble-efecto-58778-383661.html>

Como podemos observar el actuador seleccionado cumple con todos los requerimientos del sistema, aunque los datos que conllevaron a la selección de este actuador fueron la carrera y la longitud del actuador los demás datos podrían ser satisfechos por cualquier otro actuador.