

ESTRUCTURA BORELIANA DE GRUPOS DE HOMEOMORFISMOS DE
ESPACIOS MÉTRICOS Y NUMERABLES

JUAN DAVID FRANCO SALAZAR

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2024

ESTRUCTURA BORELIANA DE GRUPOS DE HOMEOMORFISMOS DE
ESPACIOS MÉTRICOS Y NUMERABLES

JUAN DAVID FRANCO SALAZAR

Trabajo de Grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Director:

Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

Agradecimientos

Agradezco al profesor Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin por su paciencia, tiempo, dedicación y por enseñarme a hacer matemáticas. Mi más sincera admiración para él. Agradezco a mi familia, compañeros, profesores y amigos que hicieron más sencillo este camino.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	8
1. PRELIMINARES	15
1.1. Preliminares topológicos	15
1.2. Rango de Cantor-Bendixson	17
1.3. Complejidad boreliana	19
1.4. Espacios Borel-Estándar	22
1.5. Grupos topológicos	23
2. Estructura boreliana de grupos de homeomorfismos	28
2.1. Complejidad boreliana de grupos de homeomorfismos	32
2.2. Subgrupos polonizables de un grupo polaco	40
2.3. El caso X métrico, localmente compacto y numerable	45
2.4. El caso X métrico, numerable y no localmente compacto	50
2.4.1. $H(\mathbb{Q})$ no tiene topología de grupo polaco	51
2.4.2. El caso X disperso y no localmente compacto	59
3. Otros resultados sobre grupos topológicos	67
3.1. El Teorema de Birkhoff-Kakutani	68
3.2. Grupos monotéticos	75
BIBLIOGRAFÍA	79

RESUMEN

TÍTULO: ESTRUCTURA BORELIANA DE GRUPOS DE HOMEOMORFISMOS DE ESPACIOS MÉTRICOS Y NUMERABLES. *

AUTOR: JUAN DAVID FRANCO SALAZAR. **

PALABRAS CLAVE: GRUPOS DE HOMEOMORFISMOS, COMPLEJIDAD BORELIANA, ESPACIOS MÉTRICOS Y NUMERABLES, ESPACIOS DE FUNCIONES, GRUPOS POLACOS, SUBGRUPOS POLONIZABLES.

DESCRIPCIÓN:

En los últimos años ha recibido atención la interacción de la teoría de grupos topológicos con la Teoría Descriptiva de Conjuntos. Uno de los resultados más interesantes que surgieron de esta conexión es la continuidad automática de homomorfismos. Existen grupos en donde la estructura topológica y algebraica se combinan de forma perfecta, pues admiten una única topología de grupo polaco. Por ejemplo, Kechris y Rosendal demostraron que existe una única topología de grupo topológico no trivial y separable para el grupo de biyecciones de \mathbb{N} en \mathbb{N} , denotado por S_∞ , lo que implica que este grupo posee una única topología de grupo polaco. En contraste, existen grupos que no admiten topología de grupo polaco. Por ejemplo, Christian Rosendal demostró que no existe topología de grupo polaco para el grupo de autohomeomorfismos de \mathbb{Q} . Este trabajo está estrechamente relacionado con la existencia de topologías de grupo polaco que cumplan ciertas características deseables. En particular, estudiamos con detalle la estructura boreliana de grupos de homeomorfismos de espacios métricos y numerables (cuándo estos grupos son polacos y, cuando no son polacos, cuándo se pueden “polonizar” sin modificar sus conjuntos borelianos).

* Trabajo de grado

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN.

ABSTRACT

TITLE: BOREL STRUCTURE OF GROUPS OF HOMEOMORPHISMS OF METRIC AND COUNTABLE SPACES. *

AUTHOR: JUAN DAVID FRANCO SALAZAR. **

KEYWORDS: HOMEOMORPHISMS GROUPS, BOREL COMPLEXITY, METRIC AND COUNTABLE SPACES, FUNCTION SPACES, POLISH GROUPS, POLISHABLE SUBGROUPS.

DESCRIPTION:

In recent years, the interaction between the theory of topological groups and Descriptive Set Theory has received attention. One of the most interesting results from this connection is the automatic continuity of homomorphisms. There are groups where the topological and algebraic structures seamlessly combine, as they admit a unique Polish group topology. For instance, Kechris and Rosendal proved that there exists a unique nontrivial and separable topological group topology for the group of bijections from \mathbb{N} to \mathbb{N} , denoted by S_∞ , implying that this group has a unique Polish group topology. In contrast, there are groups that do not admit a Polish group topology. For example, Christian Rosendal proved that there is no Polish group topology for the group of autohomeomorphisms of \mathbb{Q} . This work is closely related to the existence of Polish group topologies that satisfy certain desirable characteristics. In particular, we delve into the Borel structure of groups of homeomorphisms of metric and countable spaces (examining when these groups are Polish and, when they are not, exploring when they can be retopologized without altering their Borel sets).

* Master Thesis

** Mathematics School. Sciences Faculty. Universidad Industrial de Santander. Director: CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha recibido atención la interacción de la teoría de grupos topológicos con la Teoría Descriptiva de Conjuntos. Al fusionar estas teorías, podemos pensar en el estudio de los grupos polacos (grupos topológicos separables y completamente metrizable). Uno de los resultados más interesantes que surgieron de esta conexión es la continuidad automática de homomorfismos, que dice que todo homomorfismo entre grupos polacos que sea medible Baire es automáticamente continuo.

Existen grupos en donde la estructura topológica y algebraica se combinan de forma perfecta, pues admiten una única topología de grupo polaco. Por ejemplo, Kechris y Rosendal demostraron que existe una única topología de grupo topológico no trivial y separable para el grupo de biyecciones de \mathbb{N} en \mathbb{N} , denotado por S_∞ , lo que implica que este grupo posee una única topología de grupo polaco¹. En contraste, existen grupos que no admiten topología de grupo polaco. Por ejemplo, Christian Rosendal demostró que no existe topología de grupo polaco para el grupo de autohomeomorfismos de \mathbb{Q}^2 .

Este trabajo se enmarca en esta línea de investigación, pues está estrechamente relacionado con la existencia de topologías de grupo polaco que cumplan ciertas características deseables que pasaremos a explicar con más detalle a continuación.

¹ A. Kechris y Rosendal C. "Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures". En: *Proc. London Math. Soc.* 94 (2007), 302–350.

² C. Rosendal. "On the non-existence of certain group topologies". En: *Fundamenta Mathematicae* 187 (2005), págs. 213-228.

El documento está dividido en 3 capítulos. En el Capítulo ??, se presentan definiciones y resultados conocidos en la literatura que son útiles para una comprensión adecuada del contenido del trabajo. En la Sección 1.1, se presentan algunas definiciones y resultados topológicos. En la Sección 1.2 se presenta el concepto de Rango de Cantor-Bendixson. En la Sección 1.3 se define la clase de los borelianos en un grupo topológico y se presentan los principales resultados para definir la jerarquía de Borel. En la Sección 1.4 se presenta el concepto de espacio Borel-Estándar y su conexión con los subconjuntos borelianos de un espacio polaco y finalizamos el capítulo con la Sección 1.5, donde se presenta la definición de grupo polaco y algunos resultados que se usan a lo largo del trabajo.

El Capítulo 2 es el más importante de todo el trabajo y es donde reposan los resultados y preguntas más profundas de toda la investigación. El capítulo trata sobre la estructura boreliana de grupos de autohomeomorfismos de espacios métricos y numerables. Sea X un espacio métrico y numerable. Denotamos por X^X al espacio de funciones de X en X , por $C(X)$ al espacio de funciones continuas de X en X y por $H(X)$ al grupo de autohomeomorfismos de X con la composición de funciones como operación de grupo. Sobre $H(X)$ pueden ponerse al menos tres topologías diferentes:

- Si X es acotado, puede ponerse sobre $C(X)$ la topología dada por la métrica uniforme:

$$d_u(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Por tanto, como $H(X) \subseteq C(X)$, sobre $H(X)$ puede ponerse la topología de subespacio que resulta de poner en $C(X)$ la topología dada por la métrica uniforme. A dicha topología, la denotaremos por τ_u .

- Como X es numerable, X^X con la topología producto es metrizable y $H(X)$ puede dotarse de la topología de subespacio que resulta de poner en X^X la topología producto. A dicha topología la denotaremos por τ_p .
- Por último, sobre $H(X)$ podemos poner también la topología de subespacio que resulta de poner en X_d^X la topología producto, donde X_d es X con la topología discreta. A dicha topología la denotaremos por τ_d . Sobre esta topología, es importante notar que si X es numerable, X_d^X es homeomorfo al espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, el cual es un espacio polaco.

Si X es métrico compacto, es conocido que $C(X)$ con la topología dada por por la métrica uniforme es un espacio polaco y, además, el grupo $(H(X), \tau_u)$ es un grupo polaco.

La topología τ_d es interesante sobre $H(X)$, ya que es la topología de subespacio que $H(X)$ hereda del grupo polaco $S_{\infty}(X)$ (el grupo de biyecciones de X en X que es topológicamente isomorfo al grupo polaco S_{∞} cuando X es numerable).

Introducimos ahora un concepto importante para plantear la pregunta central del trabajo. Dado G un grupo polaco, H un subgrupo boreliano de G y τ_H la topología de subespacio sobre H heredada de G . Diremos que H es un subgrupo **polonizable** (“polishable” en inglés) de G , si existe una topología de grupo polaco τ_P sobre H , tal que $\text{Borel}_{\tau_H}(H) = \text{Borel}_{\tau_P}(H)$. Esta definición puede encontrarse, por ejemplo, en³.

La pregunta central de este trabajo de investigación es: ¿Cuándo es $(H(X), \tau_d)$ un subgrupo polonizable de $S_{\infty}(X)$?

³ T. Tsankov. “Compactifications of \mathbb{N} and Polishable subgroups of S_{∞} ”. En: *Fundamenta Mathematicae* 187 (2005), págs. 213-228.

La complejidad boreliana de $(H(X), \tau_d)$ dentro del grupo polaco $S_\infty(X)$ es importante para la pregunta central pues un subespacio H de un espacio polaco G es polaco, si y solo si, H es G_δ en G . Por ello, en la Sección 2.1 se hace un estudio sobre la complejidad boreliana de $(H(X), \tau_d)$ cuando X es métrico y numerable. En particular, se muestra que si X es métrico y numerable, entonces $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo Π_3^0 del grupo polaco $S_\infty(X)$ (ver Teorema 2.1.1). Por otra parte, se muestra la posición exacta de $(H(X), \tau_d)$ dentro de la jerarquía de Borel, cuando X es métrico, compacto e infinito numerable. Más precisamente, se muestra que si X es métrico, compacto e infinito numerable y tiene un único punto de acumulación, entonces $H(X)$ es un subgrupo abierto-cerrado de $S_\infty(X)$; si tiene una cantidad finita mayor o igual a 2 de puntos de acumulación, $H(X)$ es un subgrupo Σ_2^0 -completo de $S_\infty(X)$ y, si tiene una cantidad infinita de puntos de acumulación, entonces $H(X)$ es un subgrupo Π_3^0 -completo de $S_\infty(X)$ (ver Teorema 2.1.4). En particular, si X es métrico, compacto y numerable con más de un punto de acumulación, $(H(X), \tau_d)$ no es un grupo polaco. Las ideas para la demostración de algunos de estos resultados son variaciones de las ideas usadas por Todor Tsankov⁴.

En la Sección 2.2 se hace un estudio general de los subgrupos polonizables de un grupo polaco. También se introduce el concepto de grupo **g-Borel-Estándar** inspirados en el concepto de espacio Borel-Estándar y se muestra que dicho concepto caracteriza a los subgrupos polonizables de un grupo polaco. Lo que se pretende mostrar en esta sección es que el concepto de subgrupo polonizable de un grupo polaco puede pensarse como una extensión del concepto de espacio Borel-Estándar para grupos polacos.

⁴ Tsankov, ver n. 3, Theorem 3.1, p.274.

En la Sección 2.3, se muestra el primer avance para responder la pregunta central. Precisamente, se muestra que si X es métrico, localmente compacto y numerable, entonces $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$. Para ello, primero se muestra que si X es métrico, compacto y numerable, la topología τ_u es la (única) topología que sirve para “polonizar” a $(H(X), \tau_d)$. Luego, usando la compactificación de Alexandroff y el concepto de grupo g-Borel-Estándar introducido en la Sección 2.2, se extiende el resultado al caso X métrico, localmente compacto y numerable.

Finalizamos el capítulo con la Sección 2.4, donde se aborda el caso en que X es métrico, numerable y no localmente compacto. Este caso se aborda en 2 partes:

1. En la Subsección 2.4.1, se estudia el caso en que X es métrico, numerable, no localmente compacto y no disperso⁵. El espacio \mathbb{Q} es un espacio con estas características y en esta subsección se muestra que no existe topología de grupo polaco para $H(\mathbb{Q})$, lo que implica que $(H(\mathbb{Q}), \tau_d)$ no es un subgrupo polonizable de $S_\infty(\mathbb{Q})$. Este resultado está contenido en⁶. Es conocido que si X es métrico, numerable y no es disperso, entonces X contiene una copia cerrada homeomorfa a \mathbb{Q} . Por tanto, para este caso, queda abierta la siguiente pregunta:

Pregunta: ¿Existe X métrico, numerable y no localmente compacto tal que X contenga una copia cerrada de \mathbb{Q} y $(H(X), \tau_d)$ sea un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$?

⁵ Un espacio topológico X es disperso si para todo $A \subseteq X$ no vacío, se tiene que A tiene un punto aislado en A .

⁶ Rosendal, ver n. 2.

2. En la Subsección 2.4.2 se estudia el caso en que X es métrico, numerable, disperso y no localmente compacto. Para ello, se presenta un espacio M que es métrico, numerable, disperso y no localmente compacto. Este espacio es importante para nuestra pregunta central, pues todo espacio métrico, no localmente compacto, numerable y con un único punto de acumulación es homeomorfo a M . Mostramos que la topología uniforme no es separable en $H(M)$ y, por tanto, no sirve para “polonizar” a $(H(M), \tau_d)$. Además, se caracterizan las funciones continuas de M en M y se construye una métrica completa para $H(M)$; sin embargo, la topología inducida por dicha métrica no es separable. En esta sección, queda completamente abierta la pregunta:

Pregunta: Sea X métrico, numerable, no localmente compacto y disperso. ¿Es $(H(X), \tau_d)$ un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$?

Finalizamos el trabajo con el Capítulo 3 en donde se recogen otros resultados sobre algunos grupos topológicos y las métricas que pueden definirse sobre ellos, que no se enmarcan en la investigación realizada en el capítulo anterior.

En la Sección 3.1 se estudia la demostración del Teorema de Birkhoff-Kakutani, el cual da condiciones necesarias y suficientes para que un grupo topológico admita una métrica compatible e invariante a izquierda. Nuestro interés por el estudio de la demostración de este teorema, es evaluar si dicha demostración es una buena herramienta para generar nuevas métricas invariantes a izquierda sobre algunos grupos topológicos. Sin embargo, los resultados obtenidos muestran todo lo contrario, pues las métricas construidas en la demostración para los grupos topológicos estudiados resultaron ser exactamente las métricas usuales que se consideran en estos grupos topológicos.

En la Sección 3.2, se introduce la extensión topológica para el concepto de grupo cíclico: Un grupo topológico G es **monotético** si existe $g \in G$ tal que $G = \overline{\langle g \rangle}$. El objetivo de esta sección, es mostrar el siguiente resultado:

Teorema: Sea $G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$ con $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$. G es monotético, si y solo si, los $\{m_i\}$ son primos relativos dos a dos.

Este teorema es una extensión natural de un resultado análogo conocido para grupos cíclicos.

1. PRELIMINARES

A continuación presentamos definiciones y resultados conocidos en la literatura que son útiles para la comprensión adecuada del trabajo.

1.1. Preliminares topológicos

Definición 1.1.1. Un espacio topológico es cero dimensional si posee una base compuesta de subconjuntos abierto-cerrados.

El siguiente teorema será útil dentro del trabajo.⁷

Teorema 1.1.2. Todo espacio métrico numerable es cero dimensional.

Corolario 1.1.3. \mathbb{Q} es cero dimensional.

Para el espacio \mathbb{Q} , puede mostrarse sin mucha dificultad la siguiente proposición:

Proposición 1.1.4. Existe una partición infinita numerable de abiertos cerrados para \mathbb{Q} .

Definición 1.1.5. Un subespacio $A \subseteq X$ es **perfecto** si no tiene puntos aislados, es decir, $A' = A$.

Ejemplo 1.1.6. \mathbb{Q} es perfecto.

Definición 1.1.7. Un espacio topológico X es **disperso** si para todo $A \subseteq X$ no vacío, se tiene que A tiene un punto aislado.

Ejemplo 1.1.8. La sucesión convergente $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$ es un espacio disperso.

⁷ J. Camargo y E. Villamizar. *Topología General*. Ediciones UIS, 2020, Corolario 9.36), p.287.

De la definición anterior, se tiene inmediatamente el siguiente resultado.

Proposición 1.1.9. Un espacio topológico X es disperso, si y solo si, X no contiene un subconjunto perfecto no vacío.

El siguiente teorema se usará en el trabajo.⁸.

Teorema 1.1.10. (Sierpiński - Fréchet) \mathbb{Q} (con la topología de subespacio heredada de \mathbb{R}) es el único espacio, salvo homeomorfismos, que es no vacío, métrico, numerable y perfecto.

Presentamos ahora una serie de definiciones que serán importantes dentro del trabajo.

Definición 1.1.11. Sea X un conjunto y \mathcal{A} una familia no vacía de subconjuntos de X . Se dice que \mathcal{A} es un **álgebra sobre X** si se cumple:

1. $X \setminus A \in \mathcal{A}$, para todo $A \in \mathcal{A}$.
2. $A \cup B \in \mathcal{A}$, para todo $A, B \in \mathcal{A}$.

Definición 1.1.12. Sea X un conjunto y \mathcal{A} un álgebra sobre X . Decimos que f es un **automorfismo sobre \mathcal{A}** si f es una biyección de \mathcal{A} en \mathcal{A} y se verifica:

1. $f(X) = X$
2. $f(X \setminus A) = X \setminus f(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$.
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, para todo $A, B \in \mathcal{A}$.

Al conjunto de automorfismos sobre \mathcal{A} lo denotaremos por $\text{Aut}(\mathcal{A})$.

⁸ A. Dasgupta. "Countable metric spaces without isolated points". En: *Topology Atlas* (2005).

Definición 1.1.13. Sea X un conjunto, \mathcal{A} un álgebra sobre X y $g \in \text{Aut}(\mathcal{A})$. Definimos el **estabilizador** de g como:

$$\text{stab}(g) = \{A \in \mathcal{A} : (\forall B \in \mathcal{A} \text{ con } B \subseteq A)(g(B) = B)\}.$$

Note que $\text{Aut}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}^{\mathcal{A}}$ es un grupo con la composición y puede dotarse de la topología de subespacio que resulta de poner en $\mathcal{A}^{\mathcal{A}}$ la topología producto (viendo a \mathcal{A} como un espacio discreto). Esta topología es equivalente a la generada por los abiertos subbásicos de la forma $\{h \in \text{Aut}(\mathcal{A}) : h(A) = B\}$, donde $A, B \in \mathcal{A}$.

Definición 1.1.14. Sea X un conjunto y \mathcal{A} un álgebra sobre X . Decimos que una subálgebra $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ es **densa** en \mathcal{A} si para todo $A \in \mathcal{A}$ no vacío, existe $U \in \mathcal{U}$ no vacío, tal que $U \subseteq A$.

1.2. Rango de Cantor-Bendixson

Definiremos un concepto que se usará dentro del trabajo, conocido como el **rango de Cantor-Bendixson**. Para ello, primero definiremos la derivada de un conjunto cerrado.

Sea X un espacio métrico con una base numerable y $K \subseteq X$ un conjunto cerrado. Definimos la **derivada de Cantor-Bendixson** de la siguiente manera:

$$K' = \{x \in K : x \text{ no es aislado en } K\}.$$

Podemos repetir esta operación y obtener la cadena $K^{(\alpha)}$ de subconjuntos de K . Más precisamente, podemos definir usando recursión transfinita:

$$K^{(1)} = K'$$

$$K^{(\alpha+1)} = (K^{(\alpha)})'$$

$$K^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha < \lambda} (K^{(\alpha)}), \text{ si } \lambda \text{ es un ordinal l\u00edmite.}$$

El siguiente Teorema muestra que el proceso anterior se detiene, es decir, que existe un ordinal β , tal que $K^{(\beta)} = K^{(\beta+1)}$.

Teorema 1.2.1. (Teorema de Cantor-Bendixson) Sea X un espacio m\u00e9trico con una base numerable. Para todo subconjunto cerrado A de X , existe un conjunto perfecto P y un conjunto numerable C , tal que $A = P \cup C$.

El siguiente teorema muestra que el proceso se detiene a lo m\u00e1s en un ordinal numerable.

Teorema 1.2.2. Sea X un espacio m\u00e9trico con una base numerable. Sea $(A_\alpha)_{\alpha < \beta}$ una sucesi\u00f3n estrictamente mon\u00f3tona de subconjuntos abiertos (cerrados) de X , entonces $\beta < \omega_1$.

Si β es el primer ordinal tal que $K^{(\beta)} = K^{(\beta+1)}$, es f\u00e1cil verificar que $(K^{(\alpha)})_{\alpha < \beta}$ es una cadena estrictamente decreciente de conjuntos cerrados y, por tanto, sabemos que $\beta < \omega_1$. A este ordinal β se le llama el **rango de Cantor-Bendixson** de K y usualmente se denota por $|K|_{CB}$.

La siguiente proposici\u00f3n puede ser mostrada usando inducci\u00f3n transfinita sobre el rango de Cantor-Bendixson:

Proposici\u00f3n 1.2.3. Si X un espacio m\u00e9trico, compacto y numerable y $x \in X$ es un punto de acumulaci\u00f3n de X , entonces existe una sucesi\u00f3n de puntos aislados que converge a x .

1.3. Complejidad boreliana

Definición 1.3.1. La **clase de los borelianos** de (X, τ) , que denotaremos como $\text{Borel}_\tau(X)$, es la menor σ -álgebra de conjuntos de X que contiene a los abiertos. Un conjunto que pertenece a $\text{Borel}_\tau(X)$ se llama un conjunto boreliano.

Definición 1.3.2. $\Sigma_1^0(X)$ es la clase de los abiertos de X y $\Pi_1^0(X)$ es la clase de los cerrados y

$$\Delta_1^0(X) = \Sigma_1^0(X) \cap \Pi_1^0(X).$$

Para una clase \mathcal{G} , definimos el operador $\sigma(\mathcal{G})$ como la clase de todas las posibles uniones de elementos de \mathcal{G} y el operador $c\mathcal{G}$ como la clase de los complementos de elementos de \mathcal{G} . Así, recursivamente definimos para $\alpha < \omega_1$ (donde ω_1 es el primer ordinal no numerable):

$$\Sigma_\alpha^0(X) = \sigma\left(\bigcup\{\Pi_\xi^0(X) : \xi < \alpha\}\right),$$

$$\Pi_\alpha^0(X) = c\Sigma_\alpha^0(X), \text{ y}$$

$$\Delta_\alpha^0(X) = \Sigma_\alpha^0(X) \cap \Pi_\alpha^0(X).$$

Una notación muy usada para los conjuntos $\Sigma_2^0(X)$ y $\Pi_2^0(X)$ es, respectivamente, F_σ y G_δ .

Puede mostrarse sin mucha dificultad⁹ que para cualquier espacio polaco X y $\alpha < \beta$, se cumple:

⁹ C. Di Prisco y C. Uzcátegui. *Una introducción a la teoría descriptiva de Conjuntos*. Ediciones Uniandes, 2020, p.44.

$$\Sigma_{\alpha}^0(X) \subset \Sigma_{\beta}^0(X),$$

$$\Sigma_{\alpha}^0(X) \subset \Pi_{\beta}^0(X),$$

$$\Pi_{\alpha}^0(X) \subset \Sigma_{\beta}^0(X),$$

$$\Pi_{\alpha}^0(X) \subset \Pi_{\beta}^0(X).$$

Observación 1.3.3. Lo anterior, muestra que podemos ver a los conjuntos borelianos de un espacio polaco dentro de una jerarquía, la cual se conoce como **jerarquía de Borel**. Cuando nos referimos a complejidad boreliana de un subconjunto de un espacio polaco, nos referimos a su posición (si la tiene) dentro de la jerarquía de Borel. Dadas las contencencias anteriores, observamos que si $A \in \text{Borel}_{\tau}(X)$ y existe α tal que $A \in \Sigma_{\alpha}^0(X)$ o $A \in \Pi_{\alpha}^0(X)$, entonces para todo $\beta > \alpha$, se tiene que $A \in \Delta_{\beta}^0(X)$. Así, si quisiéramos demostrar que un conjunto es $\Sigma_{\alpha}^0(X)$ y no aparece antes dentro de la jerarquía de borel, basta mostrar que este conjunto es $\Sigma_{\alpha}^0(X)$ y no pertenece a la clase $\Pi_{\alpha}^0(X)$. Análogamente, si quisiéramos demostrar que un conjunto es $\Pi_{\alpha}^0(X)$ y no aparece antes dentro de la jerarquía de borel, basta mostrar que este conjunto es $\Pi_{\alpha}^0(X)$ y no pertenece a la clase $\Sigma_{\alpha}^0(X)$.

La complejidad boreliana es fundamental para determinar si un subespacio de un espacio polaco es polaco. Al respecto, tenemos el siguiente teorema clásico de la teoría descriptiva de conjuntos¹⁰.

Teorema 1.3.4. Sean Y un espacio polaco y $X \subseteq Y$. Entonces X es polaco, si y solo si, X es G_{δ} en Y .

Daremos algunas definiciones que serán útiles dentro del trabajo que sirven como

¹⁰ Di Prisco y Uzcátegui, ver n. 9, Teoremas 1.27 y 1.28, p.24-25.

herramienta para determinar la posición exacta de un boreliano dentro de la jerarquía de borel.

Definición 1.3.5. Sean X, Y conjuntos y $A \subseteq X, B \subseteq Y$. Una **reducción** de A a B es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que $f^{-1}(B) = A$, es decir, $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. Si X, Y son espacios topológicos, decimos que A es **reducible según Wadge** a B , en símbolos $A \leq_W B$, si existe una reducción continua (**reducción Wadge**) de A a B .

La definición anterior da otra noción de complejidad para subconjuntos de un espacio topológico, en donde si $A \leq_W B$, pensaremos que A es “más simple” que B . El objetivo es establecer una relación entre la jerarquía de Borel y la noción de complejidad dada por la relación \leq_W .

Definición 1.3.6. Sea Γ una clase de conjuntos en espacios polacos. Si Y es un espacio polaco, diremos que $A \subseteq Y$ es Γ -fuerte si $B \leq_W A$, para cualquier $B \in \Gamma(X)$, donde X es un espacio polaco cero-dimensional. Además, si $A \in \Gamma(Y)$, diremos que A es Γ -completo.

El siguiente teorema, muestra una relación entre la jerarquía de Borel y la jerarquía Wadge en el contexto de espacios polacos cero dimensionales¹¹.

Teorema 1.3.7. (Wadge). Sea (X, τ) un espacio polaco cero-dimensional. Entonces $A \subseteq X$ es Σ_ξ^0 -completo, si y solo si, $A \in \Sigma_\xi^0 \setminus \Pi_\xi^0$. Más aún, $A \in \text{Borel}_\tau(X)$ es Σ_ξ^0 -fuerte, si y solo si, $A \notin \Pi_\xi^0$ y similarmente intercambiando Σ_ξ^0 y Π_ξ^0 .

Este teorema muestra que podemos establecer la complejidad exacta de un conjunto dentro de la jerarquía de borel en espacios polacos cero-dimensionales, construyendo reducciones Wadge a conjuntos cuya complejidad ya sea previamente conocida. Este hecho será relevante para la demostración y la adecuada interpretación de los alcances del Teorema 2.1.4.

¹¹ A. Kechris. *Classic descriptive Set Theory*. Springer, Verlag, 1994, Theorem 22.10, p.169.

1.4. Espacios Borel-Estándar

Un espacio de medida (X, \mathcal{A}) es **Borel-Estándar** si existe un espacio polaco \mathcal{Y} y un isomorfismo de medida $f : (\mathcal{Y}, \text{Borel}(\mathcal{Y})) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ ¹². El objetivo de esta sección será enunciar los resultados necesarios para mostrar que los subconjuntos borelianos de un espacio polaco con la σ -álgebra inducida son espacios Borel-Estándar. Estos resultados pueden encontrarse en¹³.

Lema 1.4.1. Sean (X, τ) polaco y $B \subseteq X$ τ -cerrado. Sea τ_B la topología generada por $\tau \cup \{B\}$. Entonces B es τ_B -abierto-cerrado, (X, τ_B) es polaco y $\text{Borel}_\tau(X) = \text{Borel}_{\tau_B}(X)$.

Lema 1.4.2. Sean (X, τ) polaco, $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de topologías polacas sobre X tales que $\tau \subseteq \tau_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la topología τ_∞ generada por $\bigcup_n \tau_n$ es polaca. Si además $\tau_n \subseteq \text{Borel}_\tau(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{Borel}_{\tau_\infty}(X) = \text{Borel}_\tau(X)$.

Teorema 1.4.3. Sean (X, τ) polaco y $B \in \text{Borel}_\tau(X)$. Entonces existe una topología τ_B sobre X que contiene a τ tal que B es τ_B -abierto-cerrado, (X, τ_B) es polaco y $\text{Borel}_\tau(X) = \text{Borel}_{\tau_B}(X)$.

El siguiente lema caracteriza los borelianos relativos a un subespacio.

Lema 1.4.4. Sean (X, τ) polaco y $B \in \text{Borel}_\tau(X)$. Sea

$$\text{Borel}_\tau(X) \upharpoonright B = \{A \cap B : A \in \text{Borel}_\tau(X)\}.$$

Entonces $\text{Borel}_\tau(B) = \text{Borel}_\tau(X) \upharpoonright B$.

¹² Que $f : (\mathcal{Y}, \text{Borel}(\mathcal{Y})) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ sea un isomorfismo de medida, se refiere a que f es una biyección tal que $B \in \text{Borel}(\mathcal{Y})$ si y solo si $f(B) \in \mathcal{A}$.

¹³ Di Prisco y Uzcátegui, ver n. 9, p.64.

Teorema 1.4.5. Sean (X, τ) un espacio polaco y $B \in \text{Borel}_\tau(X)$. Entonces $(B, \text{Borel}_\tau(X) \upharpoonright B)$ es Borel-Estándar.

A continuación, presentamos un resultado que muestra que los subespacios Borel-Estándar de un espacio polaco, son justamente los conjuntos borelianos.

Teorema 1.4.6. Sean X es un espacio polaco y $B \subseteq X$. Si $(B, \text{Borel}_\tau(X) \upharpoonright B)$ es Borel-Estándar, entonces B es boreliano.

1.5. Grupos topológicos

Un *grupo topológico* es un grupo $(G, \cdot, 1_G)$ junto con una topología sobre G tal que la función $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ en G es continua. La condición de que la función $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ sea continua es equivalente a las dos siguientes condiciones:

Las funciones $\cdot : (x, y) \mapsto xy$ de $G \times G$ en G , e $\text{inv} : x \mapsto x^{-1}$ de G en G son ambas continuas.

Ejemplo 1.5.1. \mathbb{R} y \mathbb{C} con la suma y la topología usual son grupos topológicos.

Ejemplo 1.5.2. Cualquier grupo G con la topología discreta es un grupo topológico.

Los grupos topológicos no son necesariamente abelianos. El siguiente ejemplo ilustra ese hecho.

Ejemplo 1.5.3. Considere $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n} : \det(A) \neq 0\}$ con el producto de matrices. Para dotar a $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ de una topología, identificamos cada matriz con un elemento de \mathbb{R}^{n^2} y ponemos la topología de subespacio inducida de \mathbb{R}^{n^2} . No es difícil ver que con estas condiciones, $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ es grupo topológico y, como el producto de matrices no es conmutativo, se trata de un grupo topológico no abeliano.

Ejemplo 1.5.4. La recta \mathbb{R} con la suma y la topología del límite inferior (también conocida como la topología de Sorgenfrey), i.e, la topología generada por la base

$\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ no es grupo topológico pues la inversión no es continua. En efecto, $\text{inv}^{-1}([a, b)) = (-b, -a]$ no es abierto en \mathbb{R} con la topología del límite inferior.

A continuación presentamos algunos resultados que son consecuencias directas de la definición de grupo topológico.

Si U y V son subconjuntos de G , extendemos naturalmente el producto de elementos a conjuntos así: $UV = \{uv : u \in U, v \in V\}$. Para simplificar, el producto $\{u\}V = \{uv : v \in V\}$, se escribirá uV . Análogamente, Uv representará al producto $U\{v\}$. Además, el conjunto de los elementos inversos de un conjunto U , se denotará como $U^{-1} = \{u^{-1} : u \in U\}$.

Usando la definición de grupo topológico, sigue directamente la siguiente proposición que suele ser útil en algunas pruebas.

Proposición 1.5.5. Sea G grupo topológico.

1. Sea $U \subseteq G$ abierto. Si $xy \in U$, entonces existen abiertos V y W tales que $x \in V$, $y \in W$, y $xy \in VW \subseteq U$.
2. Sean $x \in G$ y U abierto tal que $x^{-1} \in U$. Entonces existe un abierto V con $x \in V$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.
3. Sea $x \in G$. Las siguientes funciones de G en G son homeomorfismos:
 $r_x : y \mapsto yx$, $l_x : y \mapsto xy$ e inv .
4. Sean U y S subconjuntos de G . Si U es abierto en G , entonces US y SU son abiertos en G .

5. Si $F \subseteq G$ es cerrado en G y $x \in G$, entonces xF y Fx son cerrados en G . Si además U es un subconjunto finito de G , entonces UF y FU son cerrados en G .

Definición 1.5.6. Un espacio topológico X es **homogéneo** si para todo $x, y \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que $h(x) = y$.

La anterior definición significa que dos puntos cualesquiera de un espacio topológico homogéneo tienen exactamente las mismas *propiedades topológicas*, i.e., propiedades que se preservan por homeomorfismos.

Corolario 1.5.7. Todo grupo topológico es homogéneo.

Note que por la homogeneidad de los grupos topológicos, es posible trasladar bases de vecindades de 1_G , es decir, dado $x \in G$, si \mathcal{B} es una base de vecindades de 1_G , entonces las familias $x\mathcal{B} = \{xB : B \in \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{B}x = \{Bx : B \in \mathcal{B}\}$ son bases de vecindades para x . Se obtiene por tanto el siguiente resultado:

Corolario 1.5.8. Un grupo topológico es 1-numerable, si y solo si, existe una base de vecindades numerable de 1_G .

Definición 1.5.9. Dos grupos topológicos G y H son **topológicamente isomorfos** si existe un isomorfismo de grupos entre G y H que es también un homeomorfismo.

Definición 1.5.10. Un espacio topológico es **polaco** si es separable y completamente metrizable.

Definición 1.5.11. Un grupo topológico es **polaco** si es polaco como grupo topológico.

Daremos algunas definiciones que serán importantes a lo largo del trabajo y enunciaremos un resultado sobre un fenómeno conocido como **continuidad automática** que muestra que la interacción entre las estructuras algebraicas y topológicas tiene un efecto sobre la continuidad de los homomorfismos.

Definición 1.5.12. Un espacio topológico X es **Baire** si la intersección numerable de abiertos densos de X es densa en X . Un grupo topológico será **Baire** si es Baire como espacio topológico.

Definición 1.5.13. Sea X un espacio topológico. Entonces $A \subseteq X$ es **nunca denso** si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Definición 1.5.14. Sea X un espacio topológico. Decimos que $U \subseteq X$ es **magro** si es la unión numerable de conjuntos nunca densos.

Definición 1.5.15. Sea X un espacio de Baire. Decimos que $A \subseteq X$ tiene **la propiedad de Baire** si existe un subconjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $A \Delta U$ es magro.

Definición 1.5.16. Sea X un espacio de Baire. Decimos que $A \subseteq X$ es **medible Baire** si pertenece a la σ -álgebra formada por todos los elementos que tienen la propiedad de Baire.

Enunciamos ahora el fenómeno de la continuidad automática de homomorfismos¹⁴).

Teorema 1.5.17. (Continuidad automática). Sean G, H grupos topológicos y $\phi : G \rightarrow H$ es un homomorfismo. Si G es Baire, H es separable y ϕ es medible Baire, entonces ϕ es continua.

El siguiente teorema será útil dentro del trabajo. Una demostración puede encontrarse en¹⁵.

Teorema 1.5.18. Sean X, Y espacios polacos, $A \subseteq X$ boreliano y $f : X \rightarrow Y$ una función boreliana. Si f es inyectiva sobre A , entonces $f(A) \subseteq Y$ es boreliano.

¹⁴ Kechris, ver n. 11, Theorem 9.10, p.61.

¹⁵ Di Prisco y Uzcátegui, ver n. 9, Teorema 4.7, p. 79.

Enunciamos un Teorema que será útil dentro del trabajo. Una prueba de este Teorema se encuentra en¹⁶.

Teorema 1.5.19. Si G un grupo topológico, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. G es Baire.
2. G no es magro.
3. Ningún subconjunto abierto no vacío de G es magro.
4. Existe un subconjunto abierto de G que no es magro.
5. Existe un subconjunto de G que no es magro y que tiene la propiedad de Baire.

El siguiente teorema será útil dentro del trabajo y muestra que la interacción de la estructura de grupo con la estructura de espacio topológico, tiene un efecto sobre la complejidad boreliana de los subgrupos polacos de un grupo polaco. Una demostración puede encontrarse en¹⁷.

Teorema 1.5.20. Sea G un grupo polaco y H un subgrupo de G con la topología de subespacio. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. H es polaco.
2. H es G_δ en G .
3. H es cerrado en G .

¹⁶ S. Gao. *Invariant Descriptive Set Theory*. Chapman y Hall/CRC, 2009, Proposition 2.3.1, p.51.

¹⁷ Gao, ver n. 16, Proposition 2.2.1, p.45.

2. Estructura boreliana de grupos de homeomorfismos

Sea X un espacio métrico y numerable. Denotaremos por X^X al espacio de funciones de X en X , por $C(X)$ al espacio de funciones continuas de X en X y por $H(X)$ al grupo de autohomeomorfismos de X con la composición de funciones como operación de grupo. $H(X)$ puede dotarse de tres topologías diferentes:

- Si X es acotado, puede ponerse sobre $C(X)$ la topología dada por la métrica uniforme:

$$d_u(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Por tanto, como $H(X) \subseteq C(X)$, sobre $H(X)$ puede ponerse la topología de subespacio que resulta de poner en $C(X)$ la topología dada por la métrica uniforme. A dicha topología, la denotaremos por τ_u .

- Como X es numerable, X^X con la topología producto es metrizable. $H(X)$ puede dotarse de la topología de subespacio que resulta de poner en X^X la topología producto. A dicha topología la denotaremos por τ_p .
- Por último, sobre $H(X)$ podemos poner también la topología de subespacio que resulta de poner en X_d^X la topología producto, donde X_d es X con la topología discreta. A dicha topología la denotaremos por τ_d . Sobre esta topología, es importante notar que si X es numerable, X_d^X es homeomorfo al espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, el cual es polaco.

Si X es métrico compacto, es conocido que $C(X)$ con la topología dada por por la métrica uniforme es un espacio polaco (ver, por ejemplo,¹⁸). Además, el grupo

¹⁸ J. Guerrero. "Espacios Polacos Universales". Tesis de Maestría en Matemáticas. Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2021, Teoremas 1.18 y 1.19, p.13, 14.

$(H(X), \tau_u)$ es un grupo polaco (ver, por ejemplo¹⁹).

La topología τ_d es interesante sobre $H(X)$, ya que es la topología de subespacio que $H(X)$ hereda del grupo polaco $S_\infty(X)$ (el grupo de biyecciones de X en X que es topológicamente isomorfo al grupo polaco S_∞ cuando X es numerable). Más aún, en la Sección 2.3, se muestra que si X es disperso se tiene que, sobre $H(X)$, $\tau_p = \tau_d$ (Ver Proposición 2.3.3).

Introducimos ahora un concepto importante para plantear la pregunta central del capítulo. Dado G un grupo polaco, H un subgrupo boreliano de G y τ_H la topología de subespacio sobre H heredada de G . Diremos que H es un subgrupo **polonizable** (“polishable” en inglés) de G , si existe una topología de grupo polaco τ_P sobre H , tal que $\text{Borel}_{\tau_H}(H) = \text{Borel}_{\tau_P}(H)$. Esta definición puede encontrarse, por ejemplo, en²⁰.

La pregunta central de este capítulo es la siguiente:

Pregunta 2.0.1. Sea X métrico y numerable. ¿Cuándo es $(H(X), \tau_d)$ un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$?

La complejidad boreliana de $(H(X), \tau_d)$ dentro del grupo polaco $S_\infty(X)$ es importante para la pregunta central pues un subespacio H de un espacio polaco G es polaco si, y solo si, H es G_δ en G (ver Teorema 1.3.4). Por ello, en la Sección 2.1 se hace un estudio sobre la complejidad boreliana de $(H(X), \tau_d)$ cuando X es métrico y numerable. En particular, se muestra que si X es métrico y numerable, entonces $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo Π_3^0 del grupo polaco $S_\infty(X)$ (ver el Teorema 2.1.1). Por otra parte,

¹⁹ Guerrero, ver n. 18, Teorema 1.24 y Ejemplo 216, p.17, p.28.

²⁰ Tsankov, ver n. 3.

se muestra la posición exacta de $(H(X), \tau_d)$ dentro de la jerarquía de Borel, cuando X es métrico, compacto e infinito numerable. Más precisamente, se muestra que si X es métrico, compacto e infinito numerable y tiene un único punto de acumulación, entonces $H(X)$ es un subgrupo abierto-cerrado de $S_\infty(X)$; si tiene una cantidad finita mayor o igual a 2 de puntos de acumulación, $H(X)$ es un subgrupo Σ_2^0 -completo de $S_\infty(X)$ y, si tiene una cantidad infinita de puntos de acumulación, entonces $H(X)$ es un subgrupo Π_3^0 -completo de $S_\infty(X)$ (ver Teorema 2.1.4). En particular, si X es métrico, compacto y numerable con más de un punto de acumulación, $(H(X), \tau_d)$ no es un grupo polaco. Las ideas para la demostración de algunos de estos resultados son variaciones de las ideas usadas por Todor Tsankov (ver²¹).

En la Sección 2.2 se hace un estudio general de los subgrupos polonizables de un grupo polaco. También se introduce el concepto de grupo **g-Borel-Estándar** inspirados en el concepto de espacio Borel-Estándar y se muestra que dicho concepto caracteriza a los subgrupos polonizables de un grupo polaco. Lo que se pretende mostrar en esta sección, es que el concepto de subgrupo polonizable de un grupo polaco puede pensarse como una extensión del concepto de espacio Borel-Estándar para grupos polacos.

En la Sección 2.3, se muestra el primer avance para responder la Pregunta 2.0.1. Precisamente, se muestra que si X es métrico, localmente compacto y numerable, entonces $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$. Para ello, primero se muestra que si X es métrico, compacto y numerable, la topología τ_u es la (única) topología que sirve para “polonizar” a $(H(X), \tau_d)$. Luego, usando la compactificación de Alexandroff y el concepto de grupo g-Borel-Estándar introducido en la

²¹ Tsankov, ver n. 3, Theorem 3.1, p.274.

Sección 2.2, se extiende el resultado al caso X métrico, localmente compacto y numerable.

Finalmente, en la Sección 2.4 aborda el caso en que X es métrico, numerable y no localmente compacto. Este caso se aborda en 2 partes:

1. En la Subsección 2.4.1, se estudia el caso en que X es métrico, numerable, no localmente compacto y no disperso. El espacio \mathbb{Q} es un espacio con estas características y en esta subsección se muestra que no existe topología de grupo polaco para $H(\mathbb{Q})$, lo que implica que $(H(\mathbb{Q}), \tau_d)$ no es un subgrupo polonizable de $S_\infty(\mathbb{Q})$. Este resultado está contenido en²². Note que si X es métrico, numerable y no es disperso, entonces X contiene una copia cerrada homeomorfa a \mathbb{Q} (por el Teorema 1.1.10 y el Teorema 1.2.1). Por tanto, para este caso, queda abierta la siguiente pregunta:

Pregunta 2.0.2. ¿Existe X métrico, numerable y no localmente compacto tal que X contenga una copia cerrada de \mathbb{Q} y $(H(X), \tau_d)$ sea un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$?

2. En Subsección 2.4.2 se estudia el caso en que X es métrico, numerable, disperso y no localmente compacto. Para ello, se presenta un espacio M que es métrico, numerable, disperso y no localmente compacto. Este espacio es importante para nuestra pregunta central, pues todo espacio métrico, no localmente compacto, numerable y con un único punto de acumulación es homeomorfo a M . Mostramos que la topología uniforme no es separable en $H(M)$ y, por tanto, no sirve para “polonizar” a $(H(M), \tau_d)$. Además, se caracterizan las funciones continuas de M en M y se construye una métrica completa para

²² Rosendal, ver n. 2.

$H(M)$, sin embargo, la topología inducida por dicha métrica no es separable. En esta sección, queda completamente abierta la pregunta:

Pregunta 2.0.3. Sea X métrico, numerable, no localmente compacto y disperso. ¿ $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$?

2.1. Complejidad boreliana de grupos de homeomorfismos

El objetivo de esta sección es mostrar que si X es métrico y numerable, entonces $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo Π_3^0 del grupo polaco $S_\infty(X)$ ($S_\infty(X)$ es grupo polaco pues es topológicamente isomorfo a S_∞). Más aún, usando algunas ideas de²³, podremos dar razón de la complejidad exacta de $H(X)$ cuando X es métrico, compacto y numerable. Concretamente, mostraremos que si X es infinito numerable y tiene un solo punto de acumulación, entonces $H(X)$ es un subgrupo abierto-cerrado de $S_\infty(X)$; si X es infinito numerable y tiene una cantidad finita mayor o igual a 2 de puntos de acumulación, entonces $H(X)$ es un subgrupo Σ_2^0 -completo de $S_\infty(X)$ y, finalmente, si X es infinito numerable y tiene una cantidad infinita de puntos de acumulación, entonces $H(X)$ es un subgrupo Π_3^0 -completo de $S_\infty(X)$.

Teorema 2.1.1. Si X es métrico y numerable, entonces $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo Π_3^0 del grupo polaco $S_\infty(X)$.

Demostración. Dados $x, y \in X$, $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $f : X \rightarrow X$, considere $C(f, x, y, n, m)$ a la propiedad

$$d(x, y) < \frac{1}{m} \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n},$$

²³ Tsankov, ver n. 3.

y $A(f, x, y, n, m)$ a la propiedad

$$d(x, y) < \frac{1}{m} \Rightarrow d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) < \frac{1}{n}.$$

Considere los conjuntos:

$$Co(x, y, n, m) = \{f \in S_\infty(X) : \text{vale } C(f, x, y, n, m)\}$$

y

$$Ab(x, y, n, m) = \{f \in S_\infty(X) : \text{vale } A(f, x, y, n, m)\}.$$

Veamos que dados $x, y \in X$ y $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, el conjunto $Co(x, y, n, m) \cap Ab(x, y, n, m)$ es cerrado en $S_\infty(X)$. Sea $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $Co(x, y, n, m) \cap Ab(x, y, n, m)$ que τ_d -converge a $f \in S_\infty(X)$. Como $S_\infty(X)$ es grupo topológico, se tiene que $(f_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ τ_d -converge a f^{-1} .

Entonces $f_i(x) \rightarrow f(x)$, $f_i(y) \rightarrow f(y)$, $f_i^{-1}(x) \rightarrow f^{-1}(x)$ y $f_i^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(y)$ en el espacio discreto X . Así existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_i(x) = f(x)$, $f_i(y) = f(y)$, $f_i^{-1}(x) = f^{-1}(x)$ y $f_i^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ si $i \geq i_0$. Luego, si $d(x, y) < \frac{1}{m}$, entonces $d(f(x), f(y)) = d(f_{i_0}(x), f_{i_0}(y)) < \frac{1}{n}$ y $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(f_{i_0}^{-1}(x), f_{i_0}^{-1}(y)) < \frac{1}{n}$. Así $f \in Co(x, y, n, m) \cap Ab(x, y, n, m)$.

Ahora, note que la siguiente es una representación Π_3^0 para $H(X)$ en $S_\infty(X)$:

$$f \in H(X)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall x \in X)(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(\exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(\forall y \in X)(A(f, x, y, n, m) \wedge C(f, x, y, n, m)).$$

Por lo tanto, $H(X)$ es un subgrupo Π_3^0 de $S_\infty(X)$.

□

Corolario 2.1.2. Si X es métrico y numerable, entonces $(H(X), \tau_d)$ es un espacio Borel-Estándar.

Demostración. Por el Teorema 2.1.1, $H(X) \in \text{Borel}_{\tau_d}(S_\infty(X))$ y, por el Teorema 1.4.5, entonces $(H(X), \tau_d)$ es un espacio Borel-Estándar. □

Mostraremos un lema que nos ayudará a demostrar la complejidad exacta de $(H(X), \tau_d)$ cuando X es métrico, compacto y numerable.

Lema 2.1.3. Si X es métrico, compacto, numerable y tiene al menos dos puntos de acumulación, entonces $(H(X), \tau_d)$ no es cerrado en $S_\infty(X)$ y, por tanto, no es polaco.

Demostración. Sean d_0 y d_1 dos puntos de acumulación distintos de X . Por la Proposición 1.2.3, existen $(x_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ y $(x_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones en X de puntos aislados tales que $x_{0,n} \rightarrow d_0$ y $x_{1,n} \rightarrow d_1$. Considere la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $H(X)$, donde $f_n(x_{0,k}) = x_{1,k}$ y $f_n(x_{1,k}) = x_{0,k}$ para todo $k \leq n$ y f_n es la identidad para los demás elementos de X . Tenemos que $f_n \rightarrow f$ donde $f(x_{0,n}) = x_{1,n}$ y $f(x_{1,n}) = x_{0,n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y f es la identidad en los demás elementos de X . Note que $f \notin H(X)$ pues $x_{0,n} \rightarrow d_0$ y $f(x_{0,n}) = x_{1,n} \rightarrow d_1 \neq d_0 = f(d_0)$. Así $(H(X), \tau_d)$ no es cerrado en $S_\infty(X)$ y, por el Teorema 1.5.20, $(H(X), \tau_d)$ no es G_δ en $S_\infty(X)$ y, por el Teorema 1.3.4, $(H(X), \tau_d)$ no es polaco. □

Mostraremos ahora el siguiente resultado que trata sobre la complejidad exacta de $H(X)$ cuando X es métrico, compacto y numerable. Algunas ideas para la prueba de este teorema (más precisamente en la construcción de la reducción Wadge y en las representaciones para $H(X)$) son variaciones de la demostración de un Teorema

análogo mostrado por Todor Tsankov²⁴.

Teorema 2.1.4. Si X es métrico, compacto e infinito numerable, se cumple lo siguiente:

1. Si X tiene un único punto de acumulación, entonces $(H(X), \tau_d)$ es abierto cerrado en $S_\infty(X)$.
2. Si X tiene una cantidad finita mayor o igual a 2 de puntos de acumulación, $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo Σ_2^0 -completo de $S_\infty(X)$.
3. Si X tiene una cantidad infinita de puntos de acumulación, entonces $H(X)$ es un subgrupo Π_3^0 -completo de $S_\infty(X)$.

Demostración.

1. Considere d el único punto de acumulación de X y veamos que

$$H(X) = \{f \in S_\infty(X) : f(d) = d\}.$$

Claramente si $f \in H(X)$, entonces $f(d) = d$, pues d es el único punto de acumulación de X . Recíprocamente, suponga que $f \in S_\infty(X)$ y que $f(d) = d$. Para mostrar la continuidad de f , basta mostrar la continuidad en d . Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de rango infinito tal que $x_n \rightarrow d$. Como $f \in S_\infty(X)$, entonces la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tiene rango infinito. Considere U abierto de X tal que $d \in U$. Como X es métrico compacto y d es el único punto límite de X , se tiene que $X \setminus U$ es finito y, por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \in U$ para todo $n \geq n_0$. Así, $f(x_n) \rightarrow d = f(d)$. Como f es una biyección continua y X es métrico compacto, entonces $f \in H(X)$. Como $\{f \in S_\infty(X) : f(d) = d\}$ es abierto cerrado en $S_\infty(X)$, la afirmación 1 queda demostrada.

²⁴ Tsankov, ver n. 3, Theorem 3.1, p.274.

2. Por el Lema 2.1.3 y la Observación 1.3.3, basta exhibir una representación Σ_2^0 para $(H(X), \tau_d)$ en $S_\infty(X)$. Sean $(x_i)_{i \in \{0, \dots, k\}}$ los puntos de acumulación de X y, sin pérdida de generalidad, considere d una métrica sobre X tal que $d(x_i, x_j) = 1$ para $i \neq j$. Veamos que, dados $\sigma \in S_{k+1}$, $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m \in X \setminus \{x_0, \dots, x_k\}$ e $i \in \{0, \dots, k\}$, el conjunto:

$$A = \left\{ f \in S_\infty(X) : d(m, x_i) < \frac{1}{t} \Rightarrow d(f(m), x_{\sigma(i)}) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

es cerrado en $S_\infty(X)$. Sea $(f_s)_{s \in \mathbb{N}}$ una sucesión en A tal que $f_s \rightarrow f \in S_\infty(X)$. Entonces $f_s(m) \rightarrow f(m)$ en el espacio discreto X . Así, existe $S \in \mathbb{N}$ tal que $f_S(m) = f(m)$. Por tanto, si $d(m, x_i) < \frac{1}{t}$, entonces $d(f(m), x_{\sigma(i)}) = d(f_S(m), x_{\sigma(i)}) \leq \frac{1}{2}$. Luego $f \in A$, mostrando que A es cerrado en $S_\infty(X)$.

Así, tenemos la siguiente descripción Σ_2^0 para $(H(X), \tau_d)$ en $S_\infty(X)$:

$$f \in H(X)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\exists \sigma \in S_{k+1})(\exists t \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(\forall m \in X \setminus \{x_0, \dots, x_k\})(\forall i \in \{0, \dots, k\}) \left(d(m, x_i) < \frac{1}{t} \Rightarrow d(f(m), x_{\sigma(i)}) \leq \frac{1}{2} \right).$$

3. Note que, por el Teorema 2.1.1, tenemos que $H(X)$ es Π_3^0 en $S_\infty(X)$. Considere el conjunto Π_3^0 -completo $\mathcal{C} \subseteq 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ definido por:

$$A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\{t : (n, t) \in A\} \text{ es finito}).^{25}$$

²⁵ Acá consideramos a los elementos de $2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ como subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Para más información sobre conjuntos Π_3^0 -completos ver Kechris, ver n. 11, 23.A, p.179.

Construiremos una función continua $\Phi : 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \rightarrow S_\infty(X)$ tal que:

$$A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Phi(A) \in H(X),$$

es decir, construiremos una reducción Wadge de \mathcal{C} a $H(X)$ (ver Definición 1.3.5 y el Teorema 1.3.7). Para la demostración consideraremos, sin pérdida de generalidad, que X está encajado en la recta \mathbb{R} y primero construiremos una copia cerrada del ordinal $w^2 + 1$ dentro de X . Para ello, fije una sucesión estrictamente creciente y de rango infinito $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ formada por puntos de acumulación distintos de X tales que $x_k \rightarrow d$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, por la Proposición 1.2.3, podemos fijar una sucesión estrictamente creciente de puntos aislados distintos $(p_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $p_{k,j} \rightarrow x_k$ y con la condición de que la asignación $(k, j) \rightarrow p_{k,j}$ sea inyectiva. Note que

$$Y = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{p_{k,j} : k, j \in \mathbb{N}\} \cup \{d\}.$$

es justamente la copia cerrada de $w^2 + 1$ dentro de X que queríamos construir.

Considere ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, las sucesiones $(b_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$ y $(c_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$ donde $b_{k,j} = p_{k,2j}$ y $c_{k,j} = p_{k,2j+1}$. Note que una sucesión (p_{k_n, j_n}) converge a un punto de acumulación, si y solo si, $k_n \rightarrow \infty$ (en ese caso $p_{k_n, j_n} \rightarrow d$), o si k_n es eventualmente constante y $j_n \rightarrow \infty$ (en ese caso $p_{k_n, j_n} \rightarrow x_{\lim_k k_n}$).

Definamos Φ de la siguiente manera:

$$\Phi(A)(x) = \begin{cases} b_{2k+1,j}, & \text{si } (k,j) \in A \text{ y } x = b_{2k,j}; \\ b_{2k,j}, & \text{si } (k,j) \in A \text{ y } x = b_{2k+1,j}; \\ x, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Para ver que Φ está bien definida, basta notar que para todo A , $\Phi(A)$ solamente realiza permutaciones a los $b_{k,j}$, es decir, la función $\Phi(A)$ es la función identidad de X (la cual es una biyección) salvo algunas permutaciones que dependen de A . Esto se puede mostrar sin mucha dificultad haciendo una enumeración de casos.

Para la continuidad de Φ , sea $x \in X$ y considere $\Pi_x : S_\infty(X) \rightarrow X$, dada por $\Pi_x(f) = f(x)$. Entonces tendremos que Φ es continua, si y solo si, para todo $x \in X$, $\Pi_x \circ \Phi : 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \rightarrow X$ es continua.

Note que:

$$(\forall x \in X)(\Pi_x \circ \Phi : 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \rightarrow X) \text{ es continua.}$$



$$(\forall x \in X)(\forall y \in X)\{A \in 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : \Phi(A)(x) = y\} \text{ es abierto.}$$

Veamos que, dados $x, y \in X$, el conjunto $\mathcal{A} = \{A \in 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : \Phi(A)(x) = y\}$ es abierto en $2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Si $x \notin \{b_{k,j} : k, j \in \mathbb{N}\}$. Entonces, si $y = x$, $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ y, si $y \neq x$, entonces $\mathcal{A} = \emptyset$.

Caso 2: Si $x \in \{b_{k,j} : k, j \in \mathbb{N}\}$ y $y \notin \{b_{k,j} : k, j \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{A} = \emptyset$.

Caso 3: Si $x = b_{2k,j}$ y $y = b_{2k'+1,j'}$. Entonces, si $(k',j') \neq (k,j)$, $\mathcal{A} = \emptyset$ y, si $(k',j') = (k,j)$, $\mathcal{A} = \{A \in 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : (k,j) \in A\}$ que es abierto cerrado en $2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.

Caso 4: Si $x = b_{2k,j}$ y $y = b_{2k',j'}$. Entonces, si $(k',j') \neq (k,j)$, $\mathcal{A} = \emptyset$ y, si $(k',j') = (k,j)$, $\mathcal{A} = \{A \in 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : (k,j) \notin A\}$.

Caso 5: Si $x = b_{2k+1,j}$ y $y = b_{2k',j'}$. Entonces, si $(k',j') \neq (k,j)$, $\mathcal{A} = \emptyset$ y, si $(k',j') = (k,j)$, $\mathcal{A} = \{A \in 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : (k,j) \in A\}$.

Caso 6: Si $x = b_{2k+1,j}$ y $y = b_{2k'+1,j'}$. Entonces, si $(k',j') \neq (k,j)$, $\mathcal{A} = \emptyset$ y, si $(k',j') = (k,j)$, $\mathcal{A} = \{A \in 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : (k,j) \notin A\}$.

Así, hemos mostrado que Φ es continua. Veamos ahora que Φ es una reducción de \mathcal{C} a $H(X)$.

Si $A \in \mathcal{C}$, veamos que $\Phi(A) \in H(X)$. Veamos la continuidad para los puntos de acumulación de X . Sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión infinita en X tal que $z_n \rightarrow z$. Como z es un punto de acumulación de X , entonces $\Phi(A)(z) = z$, pues $\Phi(A)$ solo mueve puntos aislados.

Caso 1: Si $z \notin Y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $z_n \notin Y$. De modo que, para todo $n \geq n_0$, se tiene que $\Phi(A)(z_n) = z_n$, pues $\Phi(A)$ solo mueve elementos de Y .

Caso 2: Si $z \in Y$ y la sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una cantidad finita de elementos de Y o no tiene elementos de Y , entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $z_n \notin Y$. Así, para todo $n \geq n_0$, se tiene que $\Phi(A)(z_n) = z_n$, pues $\Phi(A)$ solo mueve elementos de Y .

Caso 3: Si $z \in Y$ y la sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una cantidad infinita de elementos de Y , como $\Phi(A)$ solamente mueve elementos de $\{p_{k,j} : k,j \in \mathbb{N}\}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que toda la sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está contenida en $\{p_{k,j} : k,j \in \mathbb{N}\}$.

Caso 3a: Si $z = x_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n = p_{k,j_n}$

si $n \geq n_0$. Ahora, como $A \in \mathcal{C}$, el conjunto $\{j_n : (k, j_n) \in A\}$ es finito y, como los z_n eventualmente son de la forma p_{k, j_n} , se tiene que $\Phi(A)$ solo mueve una cantidad finita de elementos de la sucesión z_n , es decir, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi(A)(z_n) = z_n$ si $n \geq n_1$.

Caso 3b: Si $z = d$, dado $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ solo tiene una cantidad finita de elementos de la forma p_{k, j_n} . Por tanto, la sucesión $(\Phi(A)(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ solo tiene una cantidad finita de elementos de la forma p_{k, j_n} , esto es $(\Phi(A)(z_n))_{n \in \mathbb{N}} = (p_{k_m, j_m})_{m \in \mathbb{N}}$ donde $k_m \rightarrow \infty$ y, así, $(\Phi(A)(z_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow d = \Phi(A)(d)$. Finalmente, como X es métrico compacto y $\Phi(A)$ es continua, se sigue que $\Phi(A) \in H(X)$.

Si $A \notin \mathcal{C}$, mostraremos que $\Phi(A) \notin H(X)$. En efecto, como $A \notin \mathcal{C}$, existe $k \in \mathbb{N}$ y un conjunto infinito $J \subseteq \mathbb{N}$ tal que $(k, j) \in A$ para todo $j \in J$. Así, $\Phi(A)(b_{2k+1, j}) = b_{2k, j}$ y $\Phi(A)(b_{2k, j}) = b_{2k+1, j}$ para todo $j \in J$. Si suponemos que $\Phi(A) \in H(X)$, entonces $\Phi(A)$ debe permutar x_{2k} con x_{2k+1} , pero esto no puede ocurrir porque $\Phi(A)((c_{k, j})) = c_{k, j} \rightarrow x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, $\Phi(A) \notin H(X)$.

□

2.2. Subgrupos polonizables de un grupo polaco

Dado G un grupo polaco, H un subgrupo boreliano de G y τ_H la topología de subespacio sobre H heredada de G . Diremos que H es un subgrupo **polonizable** (“polishable” en inglés) de G , si existe una topología de grupo polaco τ_P sobre H , tal que $\text{Borel}_{\tau_H}(H) = \text{Borel}_{\tau_P}(H)$. Note que el concepto de subgrupo polonizable se puede pensar como una extensión de los espacios Borel-Estándar para grupos topológicos. En efecto, todo subgrupo polonizable de un grupo polaco es un espacio Borel-Estándar ya que todo subgrupo polonizable es boreliano y todo subconjunto boreliano de un espacio polaco es Borel-Estándar.

En esta sección, se precisa esta similitud entre los conceptos y se presenta una caracterización para los subgrupos polonizables de un grupo polaco que, dentro del trabajo, hemos llamado grupos **g-Borel-Estándar**.

Primero estudiaremos algunas propiedades importantes de los subgrupos polonizables de un grupo polaco que son consecuencia directa de la continuidad automática de homomorfismos. El primer resultado muestra que la topología que poloniza a un subgrupo polonizable de un espacio polaco extiende a la topología de subespacio.

Proposición 2.2.1. Sea G un grupo polaco y H un subgrupo polonizable de G . Si τ_H es la topología de subespacio sobre H heredada de G y τ_P es la topología que poloniza a H , entonces $\tau_H \subseteq \tau_P$.

Demostración. Considere el homomorfismo

$$i : (H, \tau_P) \rightarrow (H, \tau_H)$$

$$f \mapsto f.$$

Como $\text{Borel}_{\tau_H}(H) = \text{Borel}_{\tau_P}(H)$, se tiene que i es una función boreliana y, como (H, τ_P) es polaco y (H, τ_H) es separable, por el Teorema 1.5.17, se tiene que i es continua y, así, $\tau_H \subseteq \tau_P$. □

El siguiente resultado muestra que la topología que poloniza a un subgrupo polonizable de un grupo polaco es única.

Proposición 2.2.2. Sea G un grupo polaco y H un subgrupo polonizable de G . Si τ_1 y τ_2 son topologías que polonizan a H , entonces $\tau_1 = \tau_2$.

Demostración. Considere el homomorfismo

$$i : (H, \tau_1) \rightarrow (H, \tau_2)$$

$$f \mapsto f.$$

Como $\text{Borel}_{\tau_1}(H) = \text{Borel}_{\tau_H}(H) = \text{Borel}_{\tau_2}(H)$, entonces i es boreliana y, como (H, τ_1) y (H, τ_2) son polacos, por el Teorema 1.5.17, i es continua. De donde $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Análogamente se muestra que $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

□

A continuación, mostramos que los subgrupos cerrados de subgrupos polonizables de un grupo polaco son también polonizables.

Proposición 2.2.3. Sea X un espacio métrico y numerable. Si $H \subseteq G \subseteq S_\infty(X)$, (G, τ_d) es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$ y H es un subgrupo cerrado en (G, τ_d) , entonces H es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$.

Demostración. Sea τ la topología sobre G tal que (G, τ) es grupo polaco y $\text{Borel}_{\tau_d}(G) = \text{Borel}_\tau(G)$. Por la Proposición 2.2.1, se tiene que $\tau_d \subseteq \tau$ y, como H es τ_d -cerrado en G , entonces H es τ -cerrado en G y, así, se tiene que (H, τ) es polaco.

Además, como $\tau_d \subseteq \tau$, se tiene que $\text{Borel}_{\tau_d}(H) \subseteq \text{Borel}_\tau(H)$.

Sea V τ -abierto de H . Como H es τ -cerrado en G , entonces $V \in \text{Borel}_\tau(G)$ y, como $\text{Borel}_{\tau_d}(G) = \text{Borel}_\tau(G)$, entonces $V \in \text{Borel}_{\tau_d}(G)$ y, por el Lema 1.4.4, $V \in \text{Borel}_{\tau_d}(H)$. Por lo tanto, $\tau \subseteq \text{Borel}_{\tau_d}(H)$ y, así, $\text{Borel}_\tau(H) \subseteq \text{Borel}_{\tau_d}(H)$.

□

A continuación, presentamos una caracterización para los subgrupos polonizables de un grupo polaco. La idea que se quiere transmitir con esta caracterización es que el hecho de ser subgrupo polonizable de un grupo polaco se puede interpretar como un fenómeno intrínseco de los grupos topológicos; lo único que aporta el grupo polaco ambiente es la topología de subespacio que hereda al subgrupo polonizable y,

si fijamos dicha topología sobre el subgrupo, podemos “olvidarnos” del grupo polaco ambiente. Esta caracterización será útil en la Sección 2.3 para mostrar que si X es métrico, localmente compacto y numerable, entonces $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$.

Definición 2.2.4. Sea G un grupo topológico. Decimos que G es **g -Borel-Estándar** si existe H grupo polaco y $\varphi : G \rightarrow H$ isomorfismo de grupos que es también un isomorfismo de Borel.

Teorema 2.2.5. Sea (G, \circ_G, τ_G) grupo polaco y (H, \circ_H, τ_H) un subgrupo de G donde τ_H es la topología de subespacio que hereda de G . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. H es g -Borel-Estándar.
2. H es un subgrupo polonizable de G .

Demostración. (1) \Rightarrow (2). Como H es g -Borel-Estándar, existe (J, \circ_J, τ_J) grupo polaco y $\varphi : (H, \tau_H) \rightarrow (J, \tau_J)$ isomorfismo de grupos que también es un isomorfismo de Borel.

Definamos ahora una topología τ sobre H como sigue:

$$V \in \tau \Leftrightarrow \varphi(V) \in \tau_J.$$

Es claro que τ es una topología sobre H y que φ es también un isomorfismo de grupos topológicos entre (H, τ) y (J, τ_J) . Así, tenemos que (H, \circ, τ) es un grupo polaco.

Veamos ahora que $\text{Borel}_\tau(H) = \text{Borel}_{\tau_H}(H)$. Sea $V \in \tau$, entonces por definición de τ , sigue que $\varphi(V) \in \tau_J$ y, como φ es un isomorfismo de Borel, se tiene que $V = \varphi^{-1}(\varphi(V)) \in \text{Borel}_{\tau_H}(H)$. Así $\tau \subseteq \text{Borel}_{\tau_H}(H)$ y, por tanto, tenemos que $\text{Borel}_\tau(H) \subseteq$

$\text{Borel}_{\tau_H}(H)$. Recíprocamente, sea $V \in \tau_H$ y, como φ es un isomorfismo de Borel, entonces $\varphi(V) \in \text{Borel}_{\tau_J}(J)$. Luego, como α es continua, se tiene que $\alpha^{-1}(\varphi(V)) = \varphi^{-1}(\varphi(V)) = V \in \text{Borel}_{\tau}(H)$. Así $\tau_H \subseteq \text{Borel}_{\tau}(H)$ y, por tanto, $\text{Borel}_{\tau_H}(H) \subseteq \text{Borel}_{\tau}(H)$.

Veamos que $H \in \text{Borel}_{\tau_G}(G)$. Sea τ una topología sobre H tal que (H, τ) es un grupo polaco y $\text{Borel}_{\tau_H}(H) = \text{Borel}_{\tau}(H)$. Considere

$$I : (H, \tau) \rightarrow (G, \tau_G)$$

$$f \mapsto f.$$

Note que I es boreliana. En efecto, sea $V \in \text{Borel}_{\tau_G}(G)$. Entonces, por el Lema 1.4.4, $I^{-1}(V) = V \cap H \in \text{Borel}_{\tau_H}(H) = \text{Borel}_{\tau}(H)$. Además, claramente I es inyectiva y, como (H, τ) y (G, τ_G) son polacos, se tiene por el Teorema 1.5.18, que $I(H) = H \in \text{Borel}_{\tau_G}(G)$.

(2) \Rightarrow (1). Sea τ una topología sobre H tal que (H, τ) es grupo polaco y $\text{Borel}_{\tau_H}(H) = \text{Borel}_{\tau}(H)$. Considere la función

$$i : (H, \tau_H) \rightarrow (H, \tau)$$

$$f \mapsto f.$$

Como $\text{Borel}_{\tau_H}(H) = \text{Borel}_{\tau}(H)$, entonces i es un isomorfismo de Borel que también es un isomorfismo de grupos.

□

Finalizamos la sección mostrando que la propiedad de ser g-Borel-Estándar se preserva bajo isomorfismos topológicos.

Proposición 2.2.6. Sean G y H grupos topológicamente isomorfos. Si G es g -Borel-Estándar, entonces H es g -Borel-Estándar.

Demostración. Sean $\phi : H \rightarrow G$ isomorfismo topológico y X un grupo polaco tal que $\varphi : G \rightarrow X$ es un isomorfismo de grupos que es también isomorfismo de Borel. Así $\varphi \circ \phi : H \rightarrow X$ es un isomorfismo de grupos que es también isomorfismo de Borel. □

2.3. El caso X métrico, localmente compacto y numerable

En esta sección, se muestra que si X es métrico, localmente compacto y numerable, entonces $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$. Para ello, primero mostraremos el resultado para el caso en que X es métrico, compacto y numerable y se extenderá el resultado para el caso localmente compacto, usando la compactificación de Alexandroff por un punto.

Primero presentamos algunos resultados que muestran que en todo espacio métrico, localmente compacto y numerable, las topologías τ_p y τ_d coinciden.

Proposición 2.3.1. Todo espacio métrico, compacto y numerable es disperso.

Demostración. Suponga que existe X métrico, compacto, numerable y $Y \subseteq X$ tal que $Y' = Y$ y $Y \neq \emptyset$. Note que Y es compacto (pues es un cerrado en el compacto X), cero dimensional (todo espacio métrico numerable es cero dimensional) y sin puntos aislados. Por otro lado, es bien conocido que el espacio de Cantor es el único espacio, salvo homeomorfismos, que es métrico, compacto, cero dimensional y sin puntos aislados (ver, por ejemplo,²⁶). Así, Y es homeomorfo al espacio de Cantor, lo cual es absurdo porque el espacio de Cantor no es numerable.

²⁶ Di Prisco y Uzcátegui, ver n. 9, Theorem 1.51, p.37.

□

El resultado anterior también vale para espacios métricos, localmente compactos y numerables:

Proposición 2.3.2. Si X es métrico, localmente compacto y numerable, entonces X es disperso.

Demostración. Si X no es disperso, existe $Y \subseteq X$ cerrado, numerable y perfecto. Así, Y es localmente compacto por ser cerrado en X y es homeomorfo a \mathbb{Q} por el Teorema 1.1.10, lo cual es absurdo porque \mathbb{Q} no es localmente compacto. □

El siguiente resultado tomado de²⁷, muestra que sobre el grupo $H(X)$, las topologías τ_p y τ_d coinciden:

Proposición 2.3.3. (Maxime Gheysens). Si X es un espacio disperso, entonces sobre $H(X)$ las topologías τ_d y τ_p coinciden.

Demostración. Por un lado, es claro que $\tau_p \subseteq \tau_d$. Recíprocamente, sea (g_j) una red de autohomeomorfismos de X que τ_p -converge a un homeomorfismo g . Sean $x \in X$ y α el (único) ordinal tal que $x \in X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$. Como g y g_j son homeomorfismos para cada j , entonces $g(x) \in X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$ y $g_j(x) \in X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$ para cada j . Es decir, $(g_j(x))$ converge a $g(x)$ en el espacio discreto $X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$. Luego, $(g_j(x))$ es eventualmente igual a $g(x)$, es decir, (g_j) τ_d -converge a g . □

Así, de las tres topologías iniciales, τ_d , τ_p y τ_u para $H(X)$, mostramos que, en el caso X métrico, localmente compacto y numerable, en realidad tenemos solamente dos, pues τ_d y τ_p coinciden en $H(X)$. Así, podemos ver a $(H(X), \tau_p)$ como un subgrupo

²⁷ M. Gheysens. “The homeomorphism group of the first uncountable ordinal”. En: *L'Enseignement Mathématique* 67 (2021), 145–159, Proposition 1.

del grupo polaco $S_\infty(X)$.

El siguiente resultado muestra que las topologías τ_d y τ_u no son necesariamente iguales sobre $H(X)$.

Proposición 2.3.4. Si X es métrico, compacto, numerable y tiene al menos dos puntos de acumulación, entonces $\tau_u \not\subseteq \tau_d$.

Demostración. Suponga que $\tau_u \subseteq \tau_d$. Como $\tau_d \subseteq \tau_u$, entonces $\tau_d = \tau_u$. Así, $(H(X), \tau_d)$ es polaco, contradiciendo el Lema 2.1.3. \square

Los siguientes resultados muestran que si X es métrico, compacto y numerable, entonces $(H(X), \tau_u)$ es la (única) polonización de $(H(X), \tau_d)$.

Veamos primero $(H(X), \tau_p)$ y $(H(X), \tau_u)$ tienen los mismos conjuntos borelianos.

Proposición 2.3.5. Si X es métrico, compacto y numerable, entonces $(H(X), \tau_p)$ y $(H(X), \tau_u)$ tienen los mismos conjuntos borelianos.

Demostración. Como $\tau_p \subseteq \tau_u$, $\text{Borel}_{\tau_p}(H(X)) \subseteq \text{Borel}_{\tau_u}(H(X))$. Para ver la otra contención, dado $f \in H(X)$ y $\varepsilon > 0$, considere la bola cerrada:

$$B_{d_u}[f; \varepsilon] = \{g \in H(X) : d_u(f, g) \leq \varepsilon\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} B_{d_u}[f; \varepsilon] &= \{g \in H(X) : \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\} \leq \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{x \in X} \{g \in H(X) : d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Es decir, cada bola cerrada de $H(X)$ con la topología uniforme es un cerrado de $H(X)$ con τ_p . Ahora bien, cada bola abierta es unión numerable de bolas cerradas y, como $(H(X), \tau_u)$ métrico y separable, se tiene que cada abierto es unión numerable

de bolas abiertas. Por tanto, cada abierto de $(H(X), \tau_u)$ es F_σ en $(H(X), \tau_p)$. Así, $\tau_u \subseteq \text{Borel}_{\tau_p}(H(X))$, de donde $\text{Borel}_{\tau_u}(H(X)) \subseteq \text{Borel}_{\tau_p}(H(X))$.

□

Luego, juntando la Proposición 2.2.2, la Proposición 2.3.5 y el hecho que $(H(X), \tau_u)$ es un grupo polaco, hemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 2.3.6. Sea X métrico, compacto y numerable. Entonces $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable del grupo polaco $S_\infty(X)$ y su (única) polonización es $(H(X), \tau_u)$.

Corolario 2.3.7. Si X es métrico, compacto, numerable y tiene un único punto de acumulación, entonces $\tau_d = \tau_u$.

Demostración. Por el Teorema 2.1.4, $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo abierto cerrado del polaco $S_\infty(X)$ y, por tanto, polaco. Así, τ_d también se poloniza a sí misma. Luego, por la Proposición 2.2.2, se tiene que $\tau_d = \tau_u$. □

Podemos extender el Teorema 2.3.6 para espacios métricos, localmente compactos y numerables, así:

Teorema 2.3.8. Sea X métrico, localmente compacto y numerable. Entonces $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable del grupo polaco $S_\infty(X)$.

Demostración. Como X es métrico y localmente compacto, entonces podemos compactificar a X con un punto. Sea $p \notin X$ y considere $\gamma(X) = X \cup \{p\}$ la compactificación por un punto de X . Luego, $\gamma(X)$ es un espacio métrico (pues X es numerable), compacto y numerable y, por el Teorema 2.3.6, tenemos que $(H(\gamma(X)), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable del grupo polaco $S_\infty(\gamma(X))$ y su única polonización es $(H(\gamma(X)), \tau_u)$.

Considere la siguiente función:

$$\phi : (H(X), \tau_d) \rightarrow (H(\gamma(X)), \tau_d)$$

$$f \mapsto \phi(f) = f^*$$

donde $f^*(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ y $f^*(p) = p$.

Veamos que ϕ está bien definida. Sea $f \in H(X)$ y mostremos que $f^* \in H(\gamma(X))$. Para ver que f^* es continua, basta mostrar la continuidad en p . Tome una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \rightarrow p$. Suponga que $(f^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}} = (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a p en $\gamma(X)$. Pasando a una subsucesión de ser necesario, tenemos que $f(x_n) \rightarrow y \in X$, y como $f \in H(X)$, $x_n \rightarrow f^{-1}(y)$. Por tanto, $f^{-1}(y) = p$, lo cual es absurdo. Así, $f^*(x_n) = f(x_n) \rightarrow p = f^*(p)$. Como f^* es continua, biyectiva y $\gamma(X)$ es compacto, entonces $f^* \in H(\gamma(X))$.

Veamos que ϕ es continua. Sea $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $H(X)$ tal que $f_i \rightarrow f \in H(X)$. De la definición de ϕ , se tiene que $f_i^*(p) = p$ y $f^*(p) = p$ y, así, $f_i^*(p) \rightarrow f^*(p)$. Por lo tanto, para todo $x \in \gamma(X)$, se tiene que $f_i^*(x) \rightarrow f^*(x)$, mostrando que ϕ es continua.

Veamos que ϕ^{-1} es continua en $\phi(H(\gamma(X)), \tau_d)$. Sea $(f_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\phi(H(\gamma(X)), \tau_d)$ que converge a f^* en $\phi(H(\gamma(X)), \tau_d)$. Entonces para todo $x \in \gamma(X)$, $f_i^*(x) \rightarrow f^*(x)$. Así, para todo $x \in X$, se tiene que $f_i(x) = f_i^*(x) \rightarrow f^*(x) = f(x)$, mostrando que ϕ^{-1} es continua en $\phi(H(\gamma(X)), \tau_d)$.

Claramente ϕ es inyectiva y, por tanto, ϕ es una inmersión topológica. Veamos que ϕ es un homomorfismo de grupos. En efecto, si $x \in X$, entonces $\phi(f \circ g)(x) = (f \circ g)^*(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f^*(g^*(x)) = (f^* \circ g^*)(x) = (\phi(f) \circ \phi(g))(x)$. Para p , se tiene que $\phi(f \circ g)(p) = (f \circ g)^*(p) = p = f^*(g^*(p)) = (\phi(f) \circ \phi(g))(p)$.

Por lo tanto, tenemos que $H(X)$ y $\phi(H(X))$ son topológicamente isomorfos.

Veamos que $\phi(H(X))$ es τ_d -cerrado en $H(\gamma(X))$. Sea $(f_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\phi(H(X))$ tal que $f_i^* \rightarrow g \in H(\gamma(X))$. Así, para todo $x \in \gamma(X)$, se tiene que $f_i^*(x) \rightarrow g(x)$. En particular, $f_i^*(p) = p \rightarrow g(p)$, de donde $g(p) = p$. Por lo tanto, $g \in \phi(H(X))$ (g es la imagen bajo ϕ de la restricción de g a X).

Ahora, como $\phi(H(X)) \subseteq H(\gamma(X)) \subseteq S_\infty(\gamma(X))$, $(H(\gamma(X)), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable de $S_\infty(\gamma(X))$ y $\phi(H(X))$ es un subgrupo τ_d -cerrado en $H(\gamma(X))$, por la Proposición 2.2.3, se tiene que $\phi(H(X))$ es un subgrupo polonizable de $S_\infty(\gamma(X))$.

Como $\phi(H(X))$ es un subgrupo polonizable de $S_\infty(\gamma(X))$, por el Teorema 2.2.5, se tiene que $\phi(H(X))$ es g -Borel-Estándar. Ahora, como $\phi(H(X))$ y $H(X)$ son topológicamente isomorfos, de la Proposición 2.2.6, se tiene que $H(X)$ es g -Borel-Estándar. Así, nuevamente por el Teorema 2.2.5, se tiene que $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$.

□

En la siguiente sección, se muestra que la conclusión del Teorema 2.3.8 no es necesariamente cierta para espacios métricos, numerables que no son localmente compactos.

2.4. El caso X métrico, numerable y no localmente compacto

En esta sección, se estudia la siguiente conjetura:

Conjetura 2.4.1. Si X es métrico, infinito numerable y no localmente compacto, entonces $(H(X), \tau_d)$ no es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$.

En la Subsección 2.4.1, se estudia el caso en que X es métrico, numerable, no localmente compacto y no disperso. El espacio \mathbb{Q} tiene estas características y, en esta

subsección, se muestra que no existe topología de grupo polaco para $H(\mathbb{Q})$, lo que implica que $(H(\mathbb{Q}), \tau_d)$ no es un subgrupo polonizable de $S_\infty(\mathbb{Q})$. Este resultado está contenido en²⁸. Note que si X es métrico, numerable y no es disperso, entonces X contiene una copia cerrada homeomorfa a \mathbb{Q} (por el Teorema 1.1.10 y el Teorema 1.2.1). Por tanto, para este caso con relación a la Conjetura 2.4.1, queda abierta la siguiente pregunta:

Pregunta 2.4.2. ¿Si X es métrico, numerable, no localmente compacto y contiene una copia cerrada de \mathbb{Q} , entonces $(H(X), \tau_d)$ no es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$?

En Subsección 2.4.2, se estudia el caso en que X es métrico, numerable, disperso y no localmente compacto. Para ello, se presenta un espacio M que es métrico, numerable, disperso y no localmente compacto. Este espacio es importante para nuestra conjetura, pues todo espacio métrico, no localmente compacto, numerable y con un único punto de acumulación es homeomorfo a M . Mostramos que la métrica uniforme no sirve para “polonizar” a $(H(M), \tau_d)$, lo cual indica que la estrategia que se usó en el caso localmente compacto, no funciona para mostrar que $(H(M), \tau_d)$ es polonizable. Finalmente, se construye una métrica completa sobre $H(M)$, sin embargo, la topología inducida por esta métrica no es separable. En esta sección, con relación a la Conjetura 2.4.1, queda abierta la pregunta:

Pregunta 2.4.3. ¿Si X es métrico, numerable, no localmente compacto y disperso, entonces $(H(X), \tau_d)$ no es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$?

2.4.1. $H(\mathbb{Q})$ no tiene topología de grupo polaco El objetivo de esta sección es mostrar que no existe una topología de grupo polaco para $H(\mathbb{Q})$. Este resultado está

²⁸ Rosendal, ver n. 2.

contenido en²⁹.

Mostraremos lema que nos ayudará a mostrar que $H(\mathbb{Q})$ no admite topología de grupo polaco.

Lema 2.4.4. Sea X un conjunto y \mathcal{A} un álgebra sobre X . Suponga que G es un subgrupo de $\text{Aut}(\mathcal{A})$ que satisface:

1. Para todo $A \in \mathcal{A}$ no vacío, existen $A_0, A_1 \in \mathcal{A}$ no vacíos y $k \in G$ tales que $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, $A_0, A_1 \subseteq A$, $A^c \in \text{stab}(k)$, $k(A_0) = A_1$ y $k(A_1) = A_0$.
2. Para todo $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subseteq B \subsetneq X$, existe $k \in G$ tal que $k(A) = A$ y $k(B \cap A^c) \cap B = \emptyset$.
3. Dados $A, B \in \mathcal{A}$ con $\emptyset \neq A, B \subsetneq X$, existe $k \in G$ tal que $k(A) = B$.

Asuma además que \mathcal{A} tiene una subálgebra densa y numerable \mathcal{U} y que G es un grupo topológico Hausdorff y Baire. Entonces la topología sobre G extiende a la topología producto.

Demostración. Para evitar casos triviales, asumiremos que $\mathcal{A} \neq \{\emptyset, X\}$. La estrategia es hacer la demostración en 3 pasos:

(I) Dado $C \in \mathcal{A}$, el conjunto $\{g \in G : C \in \text{stab}(g)\}$ es cerrado en G .

(II) Dados $A, B \in \mathcal{A}$, el conjunto $\{g \in G : B \subseteq g(A)\}$ es cerrado en G .

(III) Existe $C \in \mathcal{A}$ con $\emptyset \neq C \subsetneq X$ tal que $G_{(C)} = \{g \in G : g(C) = C\}$ es un subgrupo abierto de G .

Luego a partir de (III), podremos demostrar el resultado. Para la afirmación (I), mos-

²⁹ Rosendal, ver n. 2.

traremos la siguiente equivalencia:

$$C \in \text{stab}(g) \Leftrightarrow g \in \bigcap_{\substack{C^c \in \text{stab}(k) \\ k \in G}} \{f \in G : fk = kf\}.$$

Suponga que $C \in \mathcal{A}$, $g \in G$ y que $C \notin \text{stab}(g)$. Entonces existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq C$ y $g(B) \neq B$, de donde $B \cap g(B)^c \neq \emptyset$ o $g(B) \cap B^c \neq \emptyset$.

Si $B \cap g(B)^c \neq \emptyset$, considere $A = B \cap g(B)^c$. Claramente se tiene que $\emptyset \neq A \subseteq C$ y $A \cap g(A) = \emptyset$. Si $g(B) \cap B^c \neq \emptyset$, tome $\emptyset \neq A = g^{-1}(g(B) \cap B^c) \subseteq B \subseteq C$ y también se tiene que $A \cap g(A) = \emptyset$. Luego, por la hipótesis (1), existen $A_0, A_1 \in \mathcal{A}$ no vacíos con $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, $A_0, A_1 \subseteq A$ y $k \in G$ tales que $C^c \subseteq A^c \in \text{stab}(k)$, $k(A_0) = A_1$ y $k(A_1) = A_0$.

Como $A \cap g(A) = \emptyset$ y $g \in \text{Aut}(\mathcal{A})$, se sigue que $g(A_0) \subseteq g(A) \subseteq A^c \in \text{stab}(k)$ y, por tanto, se tiene que $k(g(A_0)) = g(A_0) \neq g(A_1) = g(k(A_0))$. Así, g y k no conmutan.

Ahora, si $C \in \text{stab}(g)$ y dado $k \in G$ tal que $C^c \in \text{stab}(k)$, entonces g y k conmutan. En efecto, sea $P \in \mathcal{A}$. Escriba $P = (P \cap C) \cup (P \cap C^c)$. Se tiene que $k(g(P)) = g(k(P)) = k(P \cap C) \cup g(P \cap C^c)$. Así, hemos mostrado la equivalencia anterior.

Para la afirmación (I) basta mostrar que, dado $k \in G$, el conjunto

$M = \{f \in G : fk = kf\}$ es cerrado en G . Sea (f_j) una red en M que converge a f en G . Como G es grupo topológico, $(f_j k)$ converge a fk y $(k f_j)$ converge a kf . Como $f_j \in M$ para todo j , se tiene que $(f_j k) = (k f_j)$ y, puesto que G es Hausdorff, el límite es único y $fk = kf$.

Para la afirmación (II), mostraremos la siguiente equivalencia:

$$B \subseteq g(A) \Leftrightarrow g \in \bigcap_{A \in \text{stab}(k)} \{f \in G : B \in \text{stab}(f k f^{-1})\}.$$

Para ello, primero note que dados $g, k \in G$, se tiene que

$$\text{stab}(g k g^{-1}) = g \cdot \text{stab}(k).$$

En efecto, sea $C \in \text{stab}(g k g^{-1})$. Entonces se tiene que $C = g k g^{-1}(C)$. Veamos que $k g^{-1}(C) \in \text{stab}(k)$. Sea $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq k g^{-1}(C)$. Luego $g(B) \subseteq C$ y como $C \in \text{stab}(g k g^{-1})$, se sigue que $B = k(B)$. Recíprocamente, sea $g(P)$, donde $P \in \text{stab}(k)$ y sea $B \subseteq g(P)$. Tenemos que $g^{-1}(B) \subseteq P$ y como $P \in \text{stab}(k)$, se tiene que $k g^{-1}(B) = g^{-1}(B)$. Por tanto, $g k g^{-1}(B) = B$.

Ahora, para la equivalencia, sean $A, B \in \mathcal{A}$ y $k \in G$, tales que $B \subseteq g(A)$ y $A \in \text{stab}(k)$. Entonces $g(A) \in g \cdot \text{stab}(k) = \text{stab}(g k g^{-1})$, de donde $B \in \text{stab}(g k g^{-1})$. Recíprocamente, si $B \not\subseteq g(A)$, se sigue que $g^{-1}(B) \cap A^c \neq \emptyset$. Luego, por la hipótesis (1), existen $B_0, B_1 \in \mathcal{A}$ no vacíos, con $B_0 \cap B_1 = \emptyset$, $B_0, B_1 \subseteq g^{-1}(B) \cap A^c$ y existe $k \in G$ tal que $k(B_0) = B_1$, $k(B_1) = B_0$ y $A \cup g^{-1}(B)^c \in \text{stab}(k)$. Así, tenemos que $A \in \text{stab}(k)$ y $g^{-1}(B) \notin \text{stab}(k)$, de donde $B \notin g \cdot \text{stab}(k) = \text{stab}(g k g^{-1})$.

Como G es grupo topológico, la función $f \mapsto f k f^{-1}$ es continua. Así, usando (I) y la equivalencia, tenemos que dados $A, B \in \mathcal{A}$, el conjunto $\{g \in G : B \subseteq g(A)\}$ es una intersección de conjuntos cerrados y, por tanto, cerrado en G , mostrando (II).

Para la afirmación (III), sean $A, B \in \mathcal{A}$ con $\emptyset \neq A, B \subsetneq X$ y $g \in G$. Entonces como \mathcal{U}

es una subálgebra densa de \mathcal{A} y $g \in \text{Aut}(\mathcal{A})$, tenemos lo siguiente:

$$B \not\subseteq g(A) \Leftrightarrow g^{-1}(B) \not\subseteq A \Leftrightarrow (\exists C \in \mathcal{U} \setminus \{\emptyset, X\})(C \subseteq g^{-1}(B) \wedge C \cap A = \emptyset).$$

Así, el conjunto abierto $\{g \in G : B \not\subseteq g(A)\}$ es la unión numerable de los conjuntos cerrados $\{g \in G : C \subseteq g^{-1}(B)\}$, donde $C \in \mathcal{U} \setminus \{\emptyset, X\}$ y $C \cap A = \emptyset$. Además, como G es Baire, por el Teorema 1.5.19, $\{g \in G : B \not\subseteq g(A)\}$ no es magro. Luego, al menos uno de los cerrados $\{g \in G : C \subseteq g^{-1}(B)\}$ tiene interior no vacío, es decir, existe $C \in \mathcal{U} \setminus \{\emptyset, X\}$ tal que $V = \text{int}\{g \in G : C \subseteq g^{-1}(B)\} \neq \emptyset$.

Sean $f \in V$ y $D = f^{-1}(B)$. Note que $C \subseteq f^{-1}(B) = D \subsetneq X$ y que $f^{-1}V$ es una vecindad abierta de la identidad 1_G en G . Más aún, para cualquier $h = f^{-1}g \in f^{-1}V$, se tiene que $h(C) = f^{-1}g(C) \subseteq f^{-1}(B) = D \subsetneq X$. Ahora, usando la hipótesis (2), existe $k \in G$ tal que $k(C) = C$ y $k(D \cap C^c) \cap D = \emptyset$. Entonces, para cualquier $h \in f^{-1}V$, se tiene que

$$khk^{-1}(C) = kh(C) \subseteq k(D) \subseteq C \cup D^c.$$

Por lo tanto, si $h \in W := (f^{-1}V) \cap (kf^{-1}Vk^{-1})$, tenemos que $h(C) \subseteq D \cap (C \cup D^c) = C$. Es fácil ver que W es una vecindad abierta de 1_G y si $h \in W \cap W^{-1}$, entonces $h(C) = C$. Así, el subgrupo $G_{(C)} = \{g \in G : g(C) = C\}$ contiene el conjunto abierto $W \cap W^{-1}$ y, así, $G_{(C)}$ es abierto en G , mostrando (III).

Asuma ahora que $\emptyset \neq E \subsetneq X$ es un elemento arbitrario de \mathcal{A} . Entonces, por la hipótesis (3), existe $h \in G$, con $h(C) = E$, de donde $G_{(E)} = hG_{(C)}h^{-1}$ es abierto en G .

Esto muestra que para cualquier elemento $E \in \mathcal{A}$, $G_{(E)}$ es abierto en G . Ahora, sean $A, B \in \mathcal{A}$ y consideremos varios casos:

Caso 1: Si $A = B = X$ o $A = B = \emptyset$, entonces $\{g \in G : g(A) = B\} = G$ es abierto en G .

Caso 2: Si tenemos que $A = X$ o $A = \emptyset$ y, además, $B \neq X$ y $B \neq \emptyset$, entonces $\{g \in G : g(A) = B\} = \emptyset$ es abierto en G . Análogamente si $B = X$ o $B = \emptyset$ y, además, $A \neq X$ y $A \neq \emptyset$

Caso 3: Si $\emptyset \neq A, B \subsetneq X$, entonces por la hipótesis (3), existe $k \in G$ tal que $k(A) = B$. Así, como G es grupo topológico, se tiene que $\{g \in G : g(A) = B\} = k \cdot G_{(A)}$ es abierto en G .

Por tanto, se tiene que la topología sobre G extiende a la topología producto. □

Con el lema anterior, podemos mostrar que $H(\mathbb{Q})$ no admite topología de grupo polaco.

Teorema 2.4.5. No existe topología de grupo polaco para $H(\mathbb{Q})$.

Demostración. Considere $\mathcal{A} = \text{CO}(\mathbb{Q}) = \{A \subseteq \mathbb{Q} : A \text{ es abierto y cerrado}\}$ la cual es claramente un álgebra de conjuntos. Identificamos a cada elemento $h \in H(\mathbb{Q})$ con $\widehat{h} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, dada por $\widehat{h}(C) = h(C)$ para $C \in \mathcal{A}$. Es claro que $\widehat{h} \in \text{Aut}(\mathcal{A})$ ya que h es un homeomorfismo. Veamos que dicha representación es fiel, es decir, veamos que dados $h_1, h_2 \in H(\mathbb{Q})$ con $h_1 \neq h_2$, se tiene que $\widehat{h}_1 \neq \widehat{h}_2$. En efecto, si $h_1 \neq h_2$, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $h_1(x) \neq h_2(x)$. Como \mathbb{Q} es cero dimensional, existe un abierto cerrado C de \mathbb{Q} tal que $x \in C$ y $h_1(C) \cap h_2(C) = \emptyset$. Así, podemos considerar a $G = H(\mathbb{Q})$ como un subgrupo de $\text{Aut}(\mathcal{A})$.

Veamos entonces que $G = H(\mathbb{Q}) \leq \text{Aut}(\mathcal{A})$ satisface las condiciones (1), (2) y (3) del Lema 2.4.4.

Primero, sean dos abiertos cerrados $\emptyset \neq A, B \subsetneq \mathbb{Q}$, como \mathbb{Q} es el único espacio (salvo homeomorfismos) que es no vacío, numerable, metrizable y perfecto (ver Teorema 1.1.10), se tiene que existe un homeomorfismo f de A en B y un homeomorfismo g de A^c en B^c . Considere $k = f \cup g$ ³⁰ que es un homeomorfismo de \mathbb{Q} en \mathbb{Q} tal que $k(A) = B$. Con esto mostramos (3).

Ahora, note que dado un abierto cerrado no vacío $A \subseteq \mathbb{Q}$, existen $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$. Como \mathbb{Q} es cero dimensional, se tiene que existen P_1 y P_2 abiertos cerrados de \mathbb{Q} con $x_1 \in P_1$ y $x_2 \in P_2$ y $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Considere $A_1 = P_1 \cap A \in \mathcal{A}$ y $A_2 = P_2 \cap A \in \mathcal{A}$. Se tiene que $A_1, A_2 \subseteq A$, A_1, A_2 son no vacíos y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y, nuevamente por el Teorema 1.1.10, existe $k \in H(\mathbb{Q})$ tal que k es la identidad en $A^c \cup (A_1 \cup A_2)^c$, $k(A_1) = A_2$ y $k(A_2) = A_1$. Con esto mostramos (1). Con un argumento similar, se muestra (2).

Como \mathbb{Q} es cero dimensional y 2-numerable, existe una base numerable de abiertos cerrados, la cual podemos cerrar bajo intersecciones finitas y complementos sin perder la numerabilidad. Por tanto, existe una subálgebra densa \mathcal{U} de \mathcal{A} .

Suponga que existe una topología de grupo polaco τ sobre $H(\mathbb{Q})$. Entonces, por el Lema 2.4.4, tenemos que τ extiende a la topología producto y, por tanto, dado un abierto cerrado C de \mathbb{Q} , el subgrupo $\{g \in H(\mathbb{Q}) : g(C) = C\}$ es abierto en $H(\mathbb{Q})$.

³⁰ es decir, $k : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $k(t) = f(t)$ si $t \in A$ y $k(t) = g(t)$ si $t \in A^c$.

Tomemos ahora una partición infinita y numerable de \mathbb{Q} en abiertos cerrados disjuntos no vacíos $N_n \subseteq \mathbb{Q}$ (ver Proposición 1.1.4). Sea $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$. Como $N_0 \in \text{CO}(\mathbb{Q})$ y $\bigcup_{\alpha(n)=1} N_{n+2} \cup N_0 \in \text{CO}(\mathbb{Q})$, por el Teorema 1.1.10, existe $g_\alpha \in H(\mathbb{Q})$ tal que

$$g_\alpha(N_0) = \bigcup_{\alpha(n)=1} N_{n+2} \cup N_0.$$

Así $g_\alpha(N_0) \neq g_\beta(N_0)$ para todo $\alpha \neq \beta$. Considere los siguientes conjuntos abiertos no vacíos

$$\{f \in H(\mathbb{Q}) : f(N_0) = g_\alpha(N_0)\} = g_\alpha \cdot \{f \in H(\mathbb{Q}) : f(N_0) = N_0\},$$

los cuales son una familia no numerable de abiertos dos a dos disjuntos, contradiciendo la separabilidad de $H(\mathbb{Q})$. □

En contraste con el resultado anterior, tenemos el siguiente resultado para el grupo de automorfismos de orden de \mathbb{Q} denotado por $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$. Es interesante notar que $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq) \subseteq H(\mathbb{Q})$.

Proposición 2.4.6. El grupo de automorfismos de orden de \mathbb{Q} denotado por $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq) \subseteq S_\infty(\mathbb{Q})$ es un grupo polaco.

Demostración. Por un lado $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$ es un grupo topológico pues es un subgrupo de $S_\infty(\mathbb{Q})$. Veamos que $(\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq))$ es cerrado en $S_\infty(\mathbb{Q})$.

Sea $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$ tal que $f_i \rightarrow f \in S_\infty(\mathbb{Q})$. Así, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f_i(x) = f(x)$ y $f_i(y) = f(y)$.

Como $f_i \in \text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$, tenemos que:

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) = f_i(x) \leq f_i(y) = f(y).$$

Mostrando que $f \in \text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$. Así $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$ es un cerrado en el polaco $S_\infty(\mathbb{Q})$ y, por tanto, $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$ es un grupo polaco. \square

Note que si X es métrico, numerable y no es disperso, entonces X contiene una copia cerrada y homeomorfa a \mathbb{Q} (por el Teorema 1.1.10 y el Teorema 1.2.1). Queda abierta la siguiente pregunta con relación a la Conjetura 2.0.1:

Pregunta 2.4.7. ¿Existe X métrico, numerable y no localmente compacto tal que X contenga una copia cerrada de \mathbb{Q} y sea $(H(X), \tau_d)$ un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$?

2.4.2. El caso X disperso y no localmente compacto En esta sección, se estudia la siguiente conjetura:

Conjetura 2.4.8. Si X es métrico, numerable, disperso y no localmente compacto, entonces $(H(X), \tau_d)$ no es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$.

Para el estudio de esta conjetura, se introduce el espacio

$$M = \{1/n + 1/(n^2m) : n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}.$$

Es interesante notar que todo espacio métrico, no localmente compacto, numerable y con un único punto de acumulación es homeomorfo a M ³¹. Con relación al espacio M , se plantea la siguiente pregunta:

Pregunta 2.4.9. ¿Es $(H(M), \tau_d)$ un subgrupo polonizable de $S_\infty(M)$?

En esta subsección, mostramos que la topología inducida por la métrica uniforme en $H(M)$ no es separable y, por tanto, no es polaca. Así, vemos que la estrategia usada para mostrar que $(H(X), \tau_d)$ es un subgrupo polonizable de $S_\infty(X)$ en el caso

³¹ W. Gillam. "Embeddability properties of countable metric spaces". En: *Topology and its Applications* 148 (2005), 63–82.

métrico, localmente compacto y numerable, no funciona para el caso métrico, numerable, disperso y no localmente compacto. Finalizamos la subsección definiendo una métrica completa λ sobre $H(M)$, sin embargo, la topología inducida por dicha métrica tampoco es separable.

Sobre $H(M)$, sabemos por el Teorema 2.1.1 que es Π_3^0 en $S_\infty(M)$ y, además, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4.10. $(H(M), \tau_d)$ no es cerrado en $S_\infty(M)$.

Demostración. Considere la siguiente sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H(M)$ donde para todo $n \geq 0$, se tenga que $f_n \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$, $f_n \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 1 + \frac{1}{k+1}$ para todo $k \leq n$ y f_n es la identidad en los demás elementos de M .

Dicha sucesión converge a la función f tal que $f \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$ y $f \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 + \frac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y es la identidad en los demás elementos de M y $f \notin H(M)$ ya que la sucesión $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 y la sucesión $\left(f \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $1 \notin M$, es decir, no converge en M .

□

Corolario 2.4.11. $(H(M), \tau_d)$ no es G_δ en $S_\infty(M)$ y, por tanto, no es polaco.

Demostración. $(H(M), \tau_d)$ es grupo topológico por ser subgrupo del grupo polaco $S_\infty(M)$ y, como no es cerrado, por el Teorema 1.5.20, se tiene que $(H(M), \tau_d)$ no es G_δ en $S_\infty(M)$ y, por tanto, no es polaco. □

A continuación, mostramos que la estrategia utilizada para mostrar que $(H(X), \tau_d)$ es polonizable en el caso X métrico, localmente compacto y numerable, no funciona para $(H(M), \tau_d)$. Concretamente, mostraremos que $(H(M), \tau_u)$ no es separable

y, por tanto, no es polaco.

Considere sobre $H(M)$ la métrica uniforme d_u , dada por:

$$d_u(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in M\}.$$

Para M , consideremos los conjuntos de puntos aislados P_k con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, así:

$$P_k = \left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2 m} : m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Con dicha definición, tenemos que:

$$M = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} P_k \right) \cup \{0\}.$$

Proposición 2.4.12. $(H(M), \tau_u)$ no es separable y, por tanto, no es polaco.

Demostración. Note que $P_1 = \{1 + \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ y $P_2 = \{\frac{1}{2} + \frac{1}{4m} : m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Para cada $A \in \mathcal{P}(P_1)$, defina $f_A \in H(M)$ como

$$f_A \left(1 + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4m}$$

y

$$f_A \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4m} \right) = 1 + \frac{1}{m},$$

si $1 + \frac{1}{m} \in A$ y f_A es la identidad en los demás elementos de M .

Veamos que la familia

$$\mathcal{B} = \left\{ B_{d_u} \left(f_A; \frac{1}{4} \right) : A \in \mathcal{P}(P_1) \right\}$$

es una familia dos a dos disjunta. En efecto, sean $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(P_1)$ con $A_1 \neq A_2$. Sin pérdida de generalidad, asuma que $A_2 \not\subseteq A_1$ y tome $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $1 + \frac{1}{m} \in A_2$ y $1 + \frac{1}{m} \notin A_1$. Así:

$$f_{A_1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) = 1 + \frac{1}{m}$$

y

$$f_{A_2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4m}.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\left| f_{A_1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) - f_{A_2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right| = \left| 1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4m} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{3}{4m} \right| > \frac{1}{2}.$$

Así, $d_u(f_{A_1}, f_{A_2}) > \frac{1}{2}$. Suponga que existe $f \in B_{d_u}(f_{A_1}; \frac{1}{4}) \cap B_{d_u}(f_{A_2}; \frac{1}{4})$. Entonces $d_u(f, f_{A_1}) < \frac{1}{4}$ y $d_u(f, f_{A_2}) < \frac{1}{4}$, de donde

$$d_u(f_{A_1}, f_{A_2}) \leq d_u(f_{A_1}, f) + d_u(f, f_{A_2}) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

lo cual es imposible. Por lo tanto, $B_{d_u}(f_{A_1}; \frac{1}{4}) \cap B_{d_u}(f_{A_2}; \frac{1}{4}) = \emptyset$. Así, \mathcal{B} es una familia no numerable de abiertos disjuntos 2 a 2 de $(H(M), \tau_u)$ y, por tanto, $(H(M), \tau_u)$ no es separable. □

Veremos que existe una métrica completa sobre $H(M)$, sin embargo, dicha métrica induce una topología que no es separable. Para ello, primero mostraremos una caracterización para la continuidad en M :

Considere siguiente función $\rho : M^M \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}^{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$, dada por

$$\rho(f)(n) = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : f^{-1}(P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n) \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_k\}.$$

La siguiente proposición muestra cuando ρ es, en efecto, una función.

Proposición 2.4.13. $f \in M^M$ es continua, si y solo si, la función ρ está bien definida.

Demostración. Suponga primero que ρ no está bien definida. Entonces existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que:

$$\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : f^{-1}(P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n) \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_k\} = \emptyset.$$

Así, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existe $x_k \in f^{-1}(P_1 \cup \dots \cup P_n)$ y $x_k \notin P_1 \cup \dots \cup P_k$. Luego la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ cumple que $x_k \rightarrow 0$ y $f(x_k) \not\rightarrow 0$, pues $f(x_k) \in P_1 \cup \dots \cup P_n$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Por tanto, f no es continua en 0.

Suponga ahora que existe una sucesión $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $x_m \rightarrow 0$ y $f(x_m) \not\rightarrow 0$. De allí se tiene que $f(x_m) \rightarrow y$ donde y es aislado o $f(x_m)$ no converge en M . En cualquier caso, existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $(f(x_m))_{m \in \mathbb{N}} \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_n$. Tome $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y, como $x_m \rightarrow 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \notin P_1 \cup \dots \cup P_k$. Así, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in f^{-1}(P_1 \cup \dots \cup P_n)$ y $x_m \notin P_1 \cup \dots \cup P_k$. Concluimos entonces que

$$\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : f^{-1}(P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n) \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_k\} = \emptyset$$

y, por tanto, ρ no está bien definida. □

Damos ahora algunas nociones para construir una métrica completa sobre $H(M)$.

Como M es numerable, considere una enumeración $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para M . Sobre $S_\infty(M)$,

puede definirse la métrica d_p que es compatible con la topología τ_d , así:

$$d_p(f, g) = \begin{cases} 0, & \text{si } f = g \\ 2^{-n}, & \text{si } f \neq g \text{ y } n \text{ es el menor tal que } f(m_n) \neq g(m_n). \end{cases}$$

Ahora bien, la siguiente es una métrica completa sobre $S_\infty(M)$ que lo hace grupo polaco³²:

$$D(f, g) = d_p(f, g) + d_p(f^{-1}, g^{-1}).$$

Definimos una nueva métrica λ sobre $H(M)$ así:

$$\lambda(f, g) = D(f, g) + d_u(f, g) + d_u(f^{-1}, g^{-1}).$$

Mostraremos que λ es una métrica completa sobre $H(M)$. Para ello, mostraremos algunas proposiciones que serán útiles para tal fin.

Proposición 2.4.14. Si $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(M)$ que converge uniformemente a f en M^M , entonces $f \in C(M)$.

Demostración. Suponga que $f \notin C(M)$. Por la Proposición 2.4.13, existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existe

$$x \in f^{-1}(P_1 \cup \dots \cup P_n) \text{ y } x \notin P_1 \cup \dots \cup P_k \tag{1}$$

Como $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f , existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$|f_{m_0}(x) - f(x)| < d(P_n, P_{n+1})$ para todo $x \in M$. Como $f_{m_0} \in C(M)$, por la Proposi-

³² Gao, ver n. 16, p.54.

ción 2.4.13, existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que

$$f_{m_0}^{-1}(P_1 \cup \dots \cup P_n) \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_k.$$

Por otro lado, por (1), existe $x \in M$ tal que $x \in f^{-1}(P_1 \cup \dots \cup P_n)$ y $x \notin P_1 \cup \dots \cup P_k$. De allí que $f(x) \in P_1 \cup \dots \cup P_n$ y, como $|f_{m_0}(x) - f(x)| < d(P_n, P_{n+1})$ para todo $x \in M$, entonces $f_{m_0}(x) \in P_1 \cup \dots \cup P_n$. Así, $x \in f_{m_0}^{-1}(P_1 \cup \dots \cup P_n)$ y $x \notin P_1 \cup \dots \cup P_k$, lo que contradice que $f_{m_0}^{-1}(P_1 \cup \dots \cup P_n) \subseteq P_1 \cup \dots \cup P_k$. \square

Proposición 2.4.15. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es d_u -Cauchy en M^M y $f_n \rightarrow f$ puntualmente, entonces $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

Demostración. Suponga que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existen $n \geq N$ y $x \in M$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon. \quad (2)$$

Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es d_u -Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_2$, se tiene que $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $x \in M$. Para $N_2 \in \mathbb{N}$, existen (por (2)), $n \geq N_2$ y $x \in M$ tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \quad (3)$$

Para $x \in M$, existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_3$, se tiene que $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tome $N^* = \max\{N_2, N_3\}$ y $m \geq N^*$ y, así,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (4)$$

En (3) y (4) hay una contradicción. \square

Teorema 2.4.16. La métrica λ es una métrica completa sobre $H(M)$.

Demostración. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión λ -Cauchy en $H(M)$, entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es D -Cauchy y d_u -Cauchy y la sucesión $(f_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ es d_u -Cauchy por la definición de λ .

Como D es una métrica completa sobre $S_\infty(M)$, entonces existe $f \in S_\infty(M)$, tal que $f_n \rightarrow f$ y $f_n^{-1} \rightarrow f^{-1}$ puntualmente. Luego, por la Proposición 2.4.15, se tiene que $f_n \rightarrow f$ y $f_n^{-1} \rightarrow f^{-1}$ uniformemente. Por tanto, por la Proposición 2.4.14, $f \in C(M)$ y $f^{-1} \in C(M)$. Como $f \in S_\infty(M)$, entonces $f \in H(M)$ y, como $f_n \rightarrow f \in S_\infty(M)$ puntualmente y, además $f_n \rightarrow f$ y $f_n^{-1} \rightarrow f^{-1}$ uniformemente, entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λ -converge a f , mostrando que λ es completa sobre $H(M)$.

□

Observación 2.4.17. Usando un razonamiento análogo al de la Proposición 2.4.12, puede mostrarse que la familia

$$\mathcal{B} = \left\{ B_\lambda \left(f_A; \frac{1}{4} \right) : A \in \mathcal{P}(P_1) \right\}$$

es disjunta dos a dos, mostrando que $(H(M), \lambda)$ no es separable.

Finalizamos estableciendo dos preguntas para $H(M)$:

Pregunta 2.4.18. ¿ $(H(M), \lambda)$ es grupo topológico?

Pregunta 2.4.19. ¿Existe topología de grupo polaco para $H(M)$?

3. Otros resultados sobre grupos topológicos

En este capítulo se recopilan algunos resultados adicionales que se obtuvieron sobre grupos topológicos y las métricas que se pueden definir sobre ellos.

En la Sección 3.1 se estudia la demostración del Teorema de Birkhoff-Kakutani, el cual da condiciones necesarias y suficientes para que un grupo topológico admita una métrica compatible e invariante a izquierda. Nuestro interés por el estudio de la demostración de este teorema, es evaluar si dicha demostración es una buena herramienta para generar nuevas métricas invariantes a izquierda sobre algunos grupos topológicos. Sin embargo, los resultados obtenidos muestran todo lo contrario, pues las métricas construidas en la demostración para los grupos topológicos estudiados resultaron ser exactamente las métricas usuales que se consideran en estos grupos topológicos.

En la Sección 3.2, se introduce la extensión topológica para el concepto de grupo cíclico: Un grupo topológico G es **monotético** si existe $g \in G$ tal que $G = \overline{\langle g \rangle}$. El objetivo de esta sección, es mostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.0.1. Sea $G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$ con $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$. G es monotético, si y solo si, los $\{m_i\}$ son primos relativos dos a dos.

El Teorema anterior es una extensión natural del siguiente teorema bien conocido para grupos cíclicos:

Teorema 3.0.2. $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{m_i}$ es cíclico, si y solo si, los m_i son primos relativos dos a dos.

3.1. El Teorema de Birkhoff-Kakutani

Precisaremos las nociones necesarias para estudiar la demostración del Teorema de Birkhoff-Kakutani. Uno de nuestros principales intereses al estudiar las demostraciones del Teorema de Birkhoff-Kakutani es evaluar si la prueba sirve como herramienta para construir métricas invariantes a izquierda distintas para algunos grupos topológicos.

Definición 3.1.1. Un grupo topológico G es **metrizable** si existe una métrica d sobre G cuyas bolas abiertas generan la topología en G . Si d induce la topología en un grupo topológico G , diremos que d es una **métrica compatible** con la topología de G .

Definición 3.1.2. Sea G un grupo topológico. Una métrica d es **invariante a izquierda** si $d(gh, gk) = d(h, k)$, para todo $g, h, k \in G$.

Definición 3.1.3. Sea G un grupo topológico. Una métrica d es **invariante a derecha** si $d(hg, kg) = d(h, k)$, para todo $g, h, k \in G$.

Definición 3.1.4. Sea G un grupo topológico. Una métrica d es **invariante por ambos lados** si $d(g_1hg_2, g_1kg_2) = d(h, k)$, para todo $g_1, g_2, h, k \in G$.

Para espacios topológicos, no es suficiente ser Hausdorff y 1-numerable para ser metrizable. En efecto, la recta \mathbb{R} con la topología del límite inferior es Hausdorff, 1-numerable y separable, pero no es 2-numerable y, por tanto, no puede ser metrizable³³. Por otro lado, es conocido que si un espacio topológico es metrizable, es Hausdorff y 1-numerable.

³³ Camargo y Villamizar, ver n. 7, Ejemplo 5.40, p.183.

Teorema 3.1.5. (Birkhoff-Kakutani). Sea G un grupo topológico. Entonces G es metrizable, si y solo si, G es Hausdorff y 1-numerable. Más aún, G admite una métrica compatible e invariante a izquierda.

Shizuo Kakutani demostró en 1936 el teorema anterior. Dicha demostración fue recogida esencialmente en el libro Terence. Tao. *Hilbert's Fifth Problem and Related Topics*. American Mathematical Society, 2014, Theorem 1.5.2, p.91 y pasa por la prueba del siguiente lema que el autor del libro, el Dr. Terence Tao, llama "Lema de tipo Urysohn"³⁴.

Lema 3.1.6. (Lema de tipo Urysohn) Sea G un grupo topológico Hausdorff y 1-numerable. Entonces existe una función continua y acotada $f : G \rightarrow [0, 1]$ con las siguientes propiedades:

- (Único máximo) $f(1_G) = 1$ y $f(x) < 1$ para todo $x \in G \setminus \{1_G\}$.
- Los conjuntos $\{x \in G : f(x) > 1 - \frac{1}{n}\}$ para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ forman una base de vecindades de 1_G .
- Para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad abierta U de 1_G tal que $|f(gx) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $g \in U$ y $x \in G$.

Se puede mostrar, a partir del lema anterior, el Teorema de Birkhoff-Kakutani definiendo la siguiente métrica a partir de la función f del lema:

$$d_f(g, h) = \sup\{|f(g^{-1}x) - f(h^{-1}x)| : x \in G\}.$$

También en 1936, Garrett Birkhoff en G. Birkhoff. "A note on topological groups". En: *Compositio Mathematica* 3 (1936), págs. 427-430 demostró, de forma independiente

³⁴ Terence. Tao. *Hilbert's Fifth Problem and Related Topics*. American Mathematical Society, 2014, Lemma 1.5.4, p.91.

a Kakutani, el Teorema de Birkhoff-Kakutani. A continuación, daremos un esquema de la demostración de Garrett Birkhoff que seguiremos de³⁵, con el fin de enunciar algunas preguntas y presentar algunos ejemplos.

Demostración. (**Garrett Birkhoff-1936**) Nos ocuparemos de la dirección no trivial, es decir, veamos que si G es un grupo topológico Hausdorff y 1-numerable, entonces es metrizable. Sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de 1_G . Sin pérdida de generalidad, asuma que $U_0 = G$. Como G es Hausdorff, entonces $\bigcap_n U_n = \{1_G\}$. Definimos una sucesión $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de vecindades abiertas de 1_G que cumplen:

1. $V_0 = G, V_{n+1} \subseteq V_n$
2. $V_n = V_n^{-1}$
3. $V_{n+1}^3 \subseteq V_n$
4. $V_n \subseteq U_n$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es fácil construir recursivamente dicha familia.

Por (4), tenemos que $\bigcap_n V_n = \{1_G\}$. Definamos

$$\rho(h, k) = \inf\{2^{-n} : h^{-1}k \in V_n\}.$$

Se puede mostrar que ρ verifica todas las propiedades de una métrica excepto la desigualdad triangular y además ρ satisface la siguiente propiedad (*): Para todo

³⁵ Gao, ver n. 16, Theorem 2.1.1, p.40.

$\varepsilon > 0$, si $\rho(g_0, g_1) \leq \varepsilon$, $\rho(g_1, g_2) \leq \varepsilon$ y $\rho(g_2, g_3) \leq \varepsilon$, entonces $\rho(g_0, g_3) \leq 2\varepsilon$.

Construimos la métrica a partir de ρ como sigue:

$$d(h, k) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^l \rho(g_i, g_{i+1}) : g_0 = h, g_{l+1} = k; g_1, \dots, g_l \in G, l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Puede mostrarse sin mucha dificultad que d es una pseudométrica invariante a izquierda. Para probar que es una métrica, faltaría ver que si $h \neq k$, entonces $d(h, k) \neq 0$. Para ello puede mostrarse usando la propiedad (*), que se cumple $\rho(h, k) \leq 2d(h, k)$ para $h \neq k$.

Finalmente, usando que $\rho(h, k) \leq 2d(h, k)$ para $h \neq k$, puede mostrarse que d es compatible con la topología sobre G .

□

En la demostración anterior del Teorema de Birkhoff-Kakutani, a ρ solamente le falta verificar la desigualdad triangular para ser una métrica. Al respecto, demostramos la siguiente proposición que establece una relación entre ρ y d en la demostración anterior del Teorema de Birkhoff-Kakutani en el caso en que ρ verifique la desigualdad triangular.

Proposición 3.1.7. En la demostración del Teorema de Birkhoff-Kakutani, si ρ verifica la desigualdad triangular, entonces $\rho = d$.

Demostración. Primero note que $d(x, y) \leq \rho(x, y)$. En efecto, si tomamos $g_0 = g_1 = x$ y $g_2 = g_3 = y$, tenemos que $\sum_{i=0}^2 \rho(g_i, g_{i+1}) = \rho(x, y)$ y, por definición de ínfimo, se tiene que $d(x, y) \leq \rho(x, y)$ para todo $x, y \in G$. Suponga que existen $x, y \in G$ tales

que $d(x, y) < \rho(x, y)$. Entonces, existen $g_1, g_2, \dots, g_l \in G$ tales que

$$\rho(x, g_1) + \sum_{i=1}^{l-1} \rho(g_i, g_{i+1}) + \rho(g_l, y) < \rho(x, y),$$

para algún $l \in \mathbb{N}$.

Ahora, usando repetidamente la desigualdad triangular, obtenemos

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, g_1) + \rho(g_1, y) \leq \dots \leq \rho(x, g_1) + \sum_{i=1}^{l-1} \rho(g_i, g_{i+1}) + \rho(g_l, y) < \rho(x, y).$$

Un absurdo. Luego, $\rho = d$. □

Esta proposición nos muestra también que, en los casos en los que ρ llegue a ser métrica, se puede obtener una demostración más corta para el Teorema de Birkhoff-Kakutani, sin tener que “reparar” la desigualdad triangular. De allí, nace la siguiente pregunta:

Pregunta 3.1.8. ¿Para cuáles grupos topológicos (Hausdorff y 1-numerables) se tiene que ρ verifica la desigualdad triangular?

Sea G un grupo topológico Hausdorff y 1-numerable y \mathcal{V} una base numerable de la unidad que cumple las propiedades (1), (2), (3) y (4) de la demostración del Teorema 3.1.5, denotaremos por $dB_G(\mathcal{V})$ a la métrica construída en la demostración del Teorema 3.1.5.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de grupos polacos y las métricas $dB_G(\mathcal{V})$ respecto a una base \mathcal{V} particular. Para estos ejemplos, es pertinente introducir la siguiente notación.

Al conjunto de sucesiones finitas de \mathbb{N} , lo denotaremos por $\mathbb{N}^{<\omega}$ y, para cada $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $|s|$ denotará la longitud de s . Si $|s| = n$ y $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por $s \widehat{\{m\}}$ a la sucesión finita de longitud $n + 1$ definida por $s \widehat{\{m\}}(k) = s(k)$ si $k < n$ y $s \widehat{\{m\}}(n) = m$.

Ejemplo 3.1.9. Consideremos el grupo $\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$, donde $m_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y la operación es la suma módulo m_i en la componente i -ésima. Podemos considerar $\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y es fácil ver que es un grupo topológico. Metrizamos al grupo $\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$ con la métrica usual heredada de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, i.e.,

$$d_1(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 2^{-n}, & \text{si } x \neq y \text{ y } n \text{ es el menor tal que } x(n) \neq y(n) \end{cases}$$

Comparemos d_1 con la métrica generada en la demostración del Teorema de Birkhoff-Kakutani.

Para ello, definamos una familia de sucesiones finitas $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, como sigue:

$$s_0 = \emptyset$$

$$s_{n+1} = s_n \widehat{\{0\}}.$$

Definimos los V_n (de la demostración), siendo $n \in \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

$$V_n = \{\alpha \in \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i} : \alpha(i) = s_n(i) \text{ para todo } i \in \text{dom}(s_n)\}.$$

Se puede mostrar que la familia $\{V_n\}$ verifica todas las condiciones (1), (2), (3) y (4) de la demostración del Teorema 3.1.5 requeridas para definir ρ .

Definimos entonces

$$\rho(x, y) = \inf\{2^{-n} : x^{-1} + y \in V_n\},$$

donde $+$ representa la suma módulo m_i componente a componente.

Veamos que ρ coincide con d_1 . En efecto, si $x = y$, se tiene que $\rho(x, y) = 0$. Si $x \neq y$, sea n el primer natural tal que $x(n) \neq y(n)$. Por tanto, $x(m)^{-1} + y(m) = 0 \pmod{m}$, para $m < n$ y $x(n)^{-1} + y(n) \neq 0 \pmod{n}$. Así, $x^{-1} + y \in V_n$ y $x^{-1} + y \notin V_{n+1}$. Por tanto, $\rho(x, y) = 2^{-n} = d_1(x, y)$. Luego, ρ resulta ser una métrica y cumple la desigualdad triangular. Entonces, por la Proposición 3.1.7, $\rho = d$ y, por tanto, $d_1 = d$.

Un caso particular es el grupo de Cantor $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ con la suma módulo 2 componente a componente, que es exactamente igual a $2^{\mathbb{N}}$ con la diferencia simétrica Δ como operación de grupo, i.e, si $\alpha, \beta \in 2^{\mathbb{N}}$, entonces $(\alpha \Delta \beta)(n) = 0$, si $\alpha(n) = \beta(n)$ y $(\alpha \Delta \beta)(n) = 1$, si $\alpha(n) \neq \beta(n)$.

Usando un argumento muy similar al del ejemplo anterior, podemos mostrar el mismo hecho para el grupo de biyecciones de \mathbb{N} en \mathbb{N} .

Ejemplo 3.1.10. Consideremos el conjunto de biyecciones de \mathbb{N} en \mathbb{N} que denotaremos como S_{∞} , el cual es un grupo polaco³⁶ con la composición de funciones como operación entre los elementos de S_{∞} y la topología de subespacio heredada de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Metrizamos a S_{∞} con la métrica definida en el ejemplo anterior. En este caso, definimos la familia de sucesiones finitas $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, como sigue:

$$s_0 = \emptyset$$

$$s_{n+1} = s_n \hat{\ } \{n\}.$$

Definimos los V_n igual que en el ejemplo anterior. Puede mostrarse con un argumento similar al anterior que la métrica construida en la demostración del Teorema

³⁶ Kechris, ver n. 11, Example 7) Section 9.B, p.59.

de Birkhoff-Kakutani coincide con la métrica heredada de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Los ejemplos anteriores muestran que las métricas que se construyen en la demostración del Teorema de Birkhoff-Kakutani, son exactamente las métricas “naturales” sobre los grupos $\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$, donde $m_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y S_{∞} , lo que es evidencia de que la prueba del Teorema de Birkhoff-Kakutani no parece ser una buena herramienta para construir nuevas métricas sobre grupos polacos.

3.2. Grupos monotéticos

Introducimos una definición que será importante a lo largo de la subsección.

Definición 3.2.1. Un grupo topológico G es **monotético** si existe $g \in G$ tal que $G = \overline{\langle g \rangle}$.

Podemos pensar que el concepto de grupo monotético extiende topológicamente el concepto de grupo cíclico. En efecto, todo grupo cíclico es trivialmente monotético. El objetivo de esta subsección es dar condiciones necesarias y suficientes para que $\prod_{n \in A} \mathbb{Z}_n$ para algún $A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sea monotético.

Concretamente, mostraremos que el grupo $\prod_{n \in A} \mathbb{Z}_n$ es monotético, si y solo si, los elementos de A son primos relativos dos a dos. Para ello, primero mostraremos el resultado para grupos cíclicos y lo extenderemos para grupos monotéticos.

Proposición 3.2.2. Dos grupos cíclicos finitos con el mismo orden son isomorfos.

Demostración. Sean G_1 y G_2 dos grupos cíclicos de orden n , generados por a y b respectivamente, es decir $G_1 = \{a, a^2, a^3, \dots, a^n = 1_{G_1}\}$ y $G_2 = \{b, b^2, b^3, \dots, b^n = 1_{G_2}\}$. Es fácil ver que la función $f : G_1 \rightarrow G_2$ dada por $f(a^r) = b^r$ es un isomorfismo de grupos entre G_1 y G_2 . □

Proposición 3.2.3. Sean $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces el grupo $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ es cíclico e isomorfo a \mathbb{Z}_{mn} , si y solo si, m y n son primos relativos.

Demostración. Suponga que $\gcd(m, n) > 1$. Sea $d = \gcd(m, n)$ y claramente se tiene que d divide tanto a m como a n . Así, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $m = dx$ y $n = dy$. Luego $x = \frac{m}{d} \in \mathbb{Z}$ y $y = \frac{n}{d} \in \mathbb{Z}$. Mostraremos que si $(r, s) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, entonces el orden de (r, s) es menor que mn . Considere el entero $\frac{mn}{d}$ y note que $\frac{mn}{d}(r, s) = (\frac{mn}{d}r, \frac{mn}{d}s) = (ymr, xnr) = (0, 0)$. Así, el orden de (r, s) es menor o igual a $\frac{mn}{d}$ y, como $d > 1$, el orden de (r, s) es menor a mn , mostrando que $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ no es cíclico.

Recíprocamente, sean m y n primos relativos. Note que $1 \in \mathbb{Z}_m$ tiene orden m y $1 \in \mathbb{Z}_n$ tiene orden n . Veamos que $(1, 1) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ tiene orden mn . En efecto el orden de $(1, 1) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ es $\text{lcm}(m, n)$ ³⁷ y, como m y n son primos relativos, sigue que el orden de $(1, 1) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ es mn y, como el orden de $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ es mn , sigue que $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ es cíclico y, por la Proposición 3.2.2, se tiene que \mathbb{Z}_{mn} es cíclico. \square

Proposición 3.2.4. $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{m_i}$ es cíclico, si y solo si, los m_i son primos relativos dos a dos y $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{m_i} = \langle (1, 1, \dots, 1) \rangle$.

Demostración. Razonaremos por inducción sobre n . Claramente la afirmación vale para $n = 1$. Suponga que la afirmación vale para $n - 1$. Así, por la Proposición 3.2.2, se tiene que $\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}_{m_i}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \dots m_{n-1}}$ y, así, $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{m_i}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \dots m_{n-1}} \times \mathbb{Z}_{m_n}$ y, como los m_i son primos relativos dos a dos, se tiene que $\gcd(m_1 m_2 \dots m_{n-1}, m_n) = 1$ y, así, por la Proposición 3.2.3, se tiene que $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \dots m_{n-1}} \times \mathbb{Z}_{m_n}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \dots m_n}$.

Haciendo un razonamiento similar al de la Proposición 3.2.3, puede mostrarse también que $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{m_i} = \langle (1, 1, \dots, 1) \rangle$.

³⁷ J. Gallian. *Contemporary Abstract Algebra Ninth Edition*. CENGAGE Learning, 2017, Theorem 8.1, p.158.

□

Extenderemos el resultado anterior para grupos monotéticos.

Consideramos a $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y lo dotamos de la métrica usual heredada de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, i.e.,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 2^{-n}, & \text{si } x \neq y \text{ y } n \text{ es el menor tal que } x(n) \neq y(n). \end{cases}$$

Lema 3.2.5. Si $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$ con $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ es monotético, entonces para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tiene que $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{m_i}$ es cíclico.

Demostración. Sea $a \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$ tal que $\overline{\langle a \rangle} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Afirmanos que

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{m_i} = \langle (a(1), a(2), \dots, a(n)) \rangle.$$

En efecto, considere $x \in \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{m_i}$. Extendemos a x con ceros, es decir, consideremos

$$t = (x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots, 0, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$$

y considere la bola $B_d(t, 2^{-(n+1)})$. Como $\overline{\langle a \rangle} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$, existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $ka(p) = t(p)$ para todo $p < n+1$. Así, $k(a(1), a(2), \dots, a(n)) = (x(1), x(2), \dots, x(n))$. □

Teorema 3.2.6. Sea $G = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$ con $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$. G es monotético, si y solo si, los $\{m_i\}$ son primos relativos dos a dos.

Demostración. Consideramos nuevamente a $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y lo dotamos de la métrica usual heredada de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Veamos primero que si los $\{m_i\}$ son primos relativos 2 a 2, entonces $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$ es monotético. Afirmamos que $\prod_{m \in A} \mathbb{Z}_m = \overline{\langle (1, 1, \dots, 1, \dots) \rangle}$. En efecto sea $x \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$ y considere $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 3.2.4, se tiene que $\prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{Z}_{m_i}$ es cíclico y generado por $(1, 1, \dots, 1)$. Se sigue entonces que existe $k \leq n + 1$, tal que $y = k(1, 1, \dots, 1, \dots)$ verifica que $y(p) = x(p)$ si $p \leq n + 1$. Así $d(x, y) \leq 2^{-(n+1)} < 2^{-n}$ y, por tanto, $x \in \overline{\langle (1, 1, \dots, 1, \dots) \rangle}$.

Para la otra dirección, suponga que los $\{m_i\}$ no son primos relativos 2 a 2 y que $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}$ es monotético y lleguemos a una contradicción. Sean $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que $\gcd(m_r, m_s) > 1$. Considere $p = \max\{r, s\}$ y, por el Lema 3.2.5 se tendría que $\prod_{i=1}^p \mathbb{Z}_{m_i}$ es cíclico, lo que contradice la Proposición 3.2.4.

□

BIBLIOGRAFÍA

- Birkhoff, G. “A note on topological groups”. En: *Compositio Mathematica* 3 (1936), págs. 427-430 (vid. pág. 69).
- Camargo, J. y E. Villamizar. *Topología General*. Ediciones UIS, 2020 (vid. págs. 15, 68).
- Dasgupta, A. “Countable metric spaces without isolated points”. En: *Topology Atlas* (2005) (vid. pág. 16).
- Di Prisco, C. y C. Uzcátegui. *Una introducción a la teoría descriptiva de Conjuntos*. Ediciones Uniandes, 2020 (vid. págs. 19, 20, 22, 26, 45).
- Gallian, J. *Contemporary Abstract Algebra Ninth Edition*. CENGAGE Learning, 2017 (vid. pág. 76).
- Gao, S. *Invariant Descriptive Set Theory*. Chapman y Hall/CRC, 2009 (vid. págs. 27, 64, 70).
- Gheysens, M. “The homeomorphism group of the first uncountable ordinal”. En: *L'Enseignement Mathématique* 67 (2021), 145–159 (vid. pág. 46).
- Gillam, W. “Embeddability properties of countable metric spaces”. En: *Topology and its Applications* 148 (2005), 63–82 (vid. pág. 59).
- Guerrero, J. “Espacios Polacos Universales”. Tesis de Maestría en Matemáticas. Colombia: Universidad Industrial de Santander, 2021 (vid. págs. 28, 29).

Kechris, A. *Classic descriptive Set Theory*. Springer, Verlag, 1994 (vid. págs. 21, 26, 36, 74).

Kechris, A. y Rosendal C. “Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures”. En: *Proc. London Math. Soc.* 94 (2007), 302–350 (vid. pág. 8).

Rosendal, C. “On the non-existence of certain group topologies”. En: *Fundamenta Mathematicae* 187 (2005), págs. 213-228 (vid. págs. 8, 12, 31, 51, 52).

Tao, Terence. *Hilbert’s Fifth Problem and Related Topics*. American Mathematical Society, 2014 (vid. pág. 69).

Tsankov, T. “Compactifications of \mathbb{N} and Polishable subgroups of S_∞ ”. En: *Fundamenta Mathematicae* 187 (2005), págs. 213-228 (vid. págs. 10, 11, 29, 30, 32, 35).