OPTIMIZACIÓN DE APERTURAS CODIFICADAS PARA EL MEJORAMIENTO DE LA CALIDAD DE IMÁGENES RECONSTRUIDAS EN UN SISTEMA DE MUESTREO COMPRESIVO DE TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA CON UNA FUENTE DE HAZ DE RAYOS-X EN ABANICO

MIGUEL ANGEL MARQUEZ CASTELLANOS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
ESCUELA DE FÍSICA
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA
BUCARAMANGA
2018

OPTIMIZACIÓN DE APERTURAS CODIFICADAS PARA EL MEJORAMIENTO DE LA CALIDAD DE IMÁGENES RECONSTRUIDAS EN UN SISTEMA DE MUESTREO COMPRESIVO DE TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA CON UNA FUENTE DE HAZ DE RAYOS-X EN ABANICO

MIGUEL ANGEL MARQUEZ CASTELLANOS

Trabajo de investigación para optar por el título de:
Magister en Matemática Aplicada

Director:
Ph.D., HENRY ARGUELLO FUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
ESCUELA DE FÍSICA
MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA
BUCARAMANGA
2018

EN MEMORIA DE: Omar Arciniegas Castellanos
3 de Marzo de 1997 - 28 de Enero de 2018

Para mi amado primo, joven de semblante alegre y mirada risueña, el cual nos brindó siempre su amor incondicional. Primo, el amor nunca muere, por lo tanto, tu siempre vivirás en nuestros corazones hasta el día en el cual nos volvamos encontrar.

DEDICATORIA

A mi hijo, Luis Miguel Marquez. Aquel que con una sonrisa alegra mi corazón, con una mirada me hace olvidar las preocupaciones, con una palabra me da las fuerzas de no rendirme. Por eso, para aquel que me enseño el verdadero amor le dedico este y todos mis logros. Hijo, mi mayor logro eres tú, te amo.

A mi padre, Miguel Antonio Marquez. Hombre de grandes principios y convicciones, los cuales han sido y serán las bases del desarrollo como persona y profesional tanto de mí como de su nieto. "*Si he visto más lejos es porque estoy sentado sobre los hombros de gigantes*", gracias amado padre.

A mi madre, Lola Castellanos. Mujer de reconfortante sonrisa y ojos amables, aquella que me hace sentir como un niño que se siente protegido y reconfortado entre sus brazos.

A mis abuelos, Rosalba Montañez y Luis Antonio Marquez. Aqullos que me han dado su amor y apoyo incondicional, han estado conmigo en todas las etapas de mi vida, y han sido las raíces de mi ser. Por todo ello, exclamo al cielo, Dios bendiga a mis amados abuelos.

A mi esposa, Alexandra Cañizales. Mujer de hermosa sonrisa y ojos soñadores, los cuales, aparte de enamorarme, me dan la fuerza y la confianza para seguir adelante con mis proyectos. Amor mío, gracias por decidir compartir junto a mí tu vida y darme el mayor regalo, nuestro hijo. Te amo.

Índice general

Índice de figuras

Índice de Tablas

Resumen

TITULO: OPTIMIZACIÓN DE APERTURAS CODIFICADAS PARA EL MEJORAMIENTO DE LA CALIDAD DE IMAǴENES RECONSTRUIDAS EN UN SISTEMA DE MUESTREO COMPRESIVO DE TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA CON UNA FUENTE DE HAZ DE RAYOS-X EN ABANICO[1]

AUTOR: MIGUEL ANGEL MARQUEZ CASTELLANOS [2]

PALABRAS CLAVE: Tomografía computarizada, muestreo compresivo, aperturas codificadas, optimización, algoritmos de reconstrucción, función de costos.

La tomograf'ia computarizada (CT, del inglés *computed tomography*) es una t'ecnica no invasiva y no destructiva que permite estimar la estructura interna de un objeto a partir de proyecciones de rayos-X. Sin embargo, la exposici'on prolongada a dosis de radiaci'on puede alterar la estructura interna del objeto, y en procedimientos m'edicos puede aumentar el riesgo de padecer c'ancer. Debido a esto, la teor'ia de muestreo compresivo (CS, del inglés *compressive sensing*) ha sido usada para desarrollar estrategias de muestreo CS en CT que permitan reducir las dosis de radiación sin sacrificar la calidad de la reconstrucción. Uno de los trabajos de CS-CT que mayor impacto ha tenido es la implementaci'on de aperturas codificadas para la modulaci'on del haz de rayos-X. No obstante, estos trabajos no han estudiado el diseño de las aperturas codificadas para obtener matrices de muestreo mejor condicionas, las cuales permitir'ian obtener reconstrucciones con una mayor calidad. Es por ello que en este trabajo se propone el diseño de aperturas codificadas para obtener im'agenes CT de mayor calidad a partir de proyecciones capturadas en una arquitectura de CS-CT con haz de rayos-X en abanico. Para el diseño de las aperturas codificadas se estable una relación directa entre el número de condición y los círculos de Gershgorin asociados a la matriz de muestreo. Con base en esto, se plantean la reducción del área total de la unión de los círculos de Gershgorin mediante el diseño de aperturas codificadas que permitan obtener una matriz de muestreo con filas linealmente independientes. Para lograr esto, se establecen cuatro criterios de muestreo uniforme los cuales son generados a partir del an'alisis de la geometr'ia de muestreo de la arquitectura CS-CT. Espec'ificamente, en este trabajo se estudia la arquitectura CS-CT con una variaci'on en su arreglo de detectores, unidimensional y con un único detector.

[1] Trabajo de Investigación

[2] Facultad de Ciencias Básicas. Escuela de Física. Director, Henry Arguello.

Abstract

TITLE: CODED APERTURE OPTIMIZATION FOR IMPROVING THE RECONSTRUCTION QUALITY IN A COMPRESSIVE COMPUTED TOMOGRAPHY ARCHITECTURE WITH AN X-RAY FAN-BEAM. [1]

AUTHOR:MIGUEL ANGEL MARQUEZ CASTELLANOS

KEYWORDS: Computed tomography, compressive sensing, coded apertures, optimization, Gershgorin circle, conditional number, uniform sensing.

Computed tomography (CT) is a non-invasive technique that estimates the internal structure of an object by using X-ray projections. However, the internal structure of an object can be altered by the radiation emitted by the X-rays, in medical cases, it increases the chance of cancer. Hence the compressive sampling (CS) theory has been applied to CT by developing strategies that can reduce the radiation doses without reducing the quality of image reconstruction. Coded apertures have been one of the most effective CS-CT applications, in the case of CT they are used to modulate the X-ray beam. Nevertheless, the design of the coded apertures has not been studied to obtain sampling matrices specifically for CT. Therefore in this work, the design of coded apertures to obtain higher quality CT images from captured projections of a CS-CT fan-beam architecture is proposed. For this purpose, a direct relation between the condition number and the Gershgorin circles associated with the sampling matrix is established for the design. Further, the reduction of the total area of the Gershgorin circles union is reduced thru the design of coded apertures that obtain a sampling matrix with linearly independent rows. In order to do this, four uniform sampling criterions are established by taking into account the sampling geometry of the CS-CT architecture. Specifically, the CS-CT architectures with a variation in the set of detectors, unidimensional and with a single detector are studied.

[1]Research Work

[2]Facultad de Ciencias Básicas. Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander. Director, Henry Arguello Fuentes.

INTRODUCCIÓN

La tomografía computarizada (CT, por su sigla en inglés) es una técnica no invasiva y no destructiva que permite estimar la estructura interna de un objeto a partir de proyecciones de rayos-X [10]-[14]. En la práctica, las imágenes CT son captadas por tomógrafos, compuestos por una fuente de rayos-X y un arreglo de detectores que rotan simultáneamente alrededor del objeto [10]. Los tomógrafos se clasifican según la estructura del tubo de rayos-X y detectores, y en la forma como estos se desplazan [4]. Debido a la introducción del primer tomógrafo de rayos-X, se generó un gran interés en el desarrollo y optimización del hardware de los tomógrafos clínicos. La arquitectura que ha tenido un mayor impacto tanto en las áreas comerciales como de investigación, son los tomógrafos con un haz de rayos-X en abanico con un ángulo de apertura de $60°$, un arreglo de detectores curvo compuesto por entre 400 a 1000 elementos, y un desplazamiento angular, alrededor del objeto, de $0°$ a $360°$ [9], [17], [6], [18], [12]. Esta arquitectura permite obtener imágenes CT de alta resolución para los diagnósticos médicos. Sin embargo, la principal limitante para obtener imágenes CT de alta resolución son los riesgos de desarrollar cáncer debido a las dosis de radiación de rayos-X [3]-[19]. Debido a esto, el estudio de técnicas de muestreo que permitan reducir las dosis de radiación sin reducir la calidad de las imágenes CT ha sido de gran interés durante los últimos años.

Actualmente, la teoría de muestreo compresivo (CS, de su sigla en inglés) [5], es aplicada al problema de reconstrucción de imágenes CT, denotadas como $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ donde $n \in \mathbb{N}$ es el total de pixeles del objeto, a partir de un número reducido de proyecciones, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, para $m < n$. La reducción de proyecciones en CT es obtenida mediante la implementación de aperturas codificadas [1], las cuales se ubican al frente de la fuente y modulan el haz de rayos-X. Esta estrategia se conoce como muestreo compresivo en tomografía computarizada a partir de aperturas codificadas, y establece que una señal puede ser reconstruida a partir de menos proyecciones que las establecidas por los métodos tradicionales de reconstrucción. La modulación del haz de rayos-X en procedimientos CT implica la obtención de imágenes a partir de menos dosis de radiación, siempre y cuando se cumplan dos criterios fundamentales [5]. El primer criterio establece que la imagen $\mathbf{f}$ debe ser escaza en algún dominio $\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, es decir $|\mathbf{f} - \boldsymbol{\Psi}\mathrm{G}(\boldsymbol{\theta})|_2^2 < \tau$, donde $\mathrm{G}(.)$ es un operador que descarta un porcentaje de los coeficientes más pequeños del vector, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathsf{T}}\mathbf{f}$ es la representación de **f** en $\boldsymbol{\Psi}$, y $\tau \in \mathbb{R}$ es una constante de error. El segundo criterio el cual establece que la coherencia entre la matriz de sensado $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y la base de representación $\boldsymbol{\Psi}$ debe ser baja, es decir $\mu(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}) = \sqrt{n}\,\mathrm{máx}\,(|\boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{\Psi}|)$, donde $\mathrm{máx}(.)$ es una función que retorna el valor máximo de la matriz $\boldsymbol{\Phi\Psi}$. Si se satisfacen estos dos criterios del proceso de adquisición de una imagen CT, a partir de proyecciones moduladas obtenidas por el esquema de muestreo modelado en $\boldsymbol{\Phi}$ las medidas **y** se puede expresar matemáticamente como $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi\Psi\theta}$.

Múltiples trabajos de CS en CT han sido desarrollados con el fin de obtener reconstrucciones de mayor calidad sin aumentar las dosis de radiación [7]. Uno de los trabajos más recientes y de mayor interes es [13], el cual desarrolla y evalúa estrategias de muestreo de CS en CT con aperturas codificadas generadas aleatoriamente. Con base en [13], en [7] se propone la optimización de aperturas codificadas a partir de una función de optimización para el mejoramiento de la calidad de reconstrucción de imágenes CT. Esta función de optimización se constituye de tres criterios, muestreo uniforme en el detector, muestreo uniforme del objeto, y aperturas codificadas con baja autocorrelaci
'on para un sistema de múltiples capturas. Sin embargo a la fecha, el diseño y optimización de la estructura y distribución de las aperturas codificadas se ha desarrollado en arquitecturas CT con arreglos de detectores y fuentes que no tienen desplazamiento angular, es decir captan proyecciones en un solo ángulo de visión [8]-[7].

En esta propuesta de proyecto de grado se aborda el problema de mejorar la calidad en la reconstrución de las imágenes CT, captadas en un tomógrafo con desplazamiento angular de $360°$, reemplazando las aperturas codificadas aleatorias por aperturas diseñadas. Las aperturas diseñadas son generadas por una función de optimización que se basa en el modelamiento matemático del proceso de captura del tomógrafo y la teoría de muestreo compresivo.

Capítulo 1
MARCO TEÓRICO

El 8 de noviembre de 1895, el físico alemán Wilhelm Conrad Röntgen, mediante experimentos de aceleración de electrones descubrió un nuevo tipo de radiación electromagnética, invisible para el ojo humano y con altos niveles de penetración en cuerpos opacos; este nuevo tipo de radiación fue denominado rayos-X, debido a que se desconocía su naturaleza [15]. El descubrimiento de los rayos-X introdujo el concepto de imagen del interior corporal, lo cual ha supuesto una de las mayores contribuciones de todos los tiempos a la medicina.

1.1. FUNDAMENTOS DE LA FÍSICA DE RAYOS-X

En 1912, von Laue, Friedrich y Knipping irradiaron un cristal con rayos-X y confirmaron que dichos rayos son una forma de luz que tiene una longitud de onda muy pequeña. Este experimento llamado difracción (desviación de una onda al chocar con el borde de un cuerpo opaco o al atravesar una abertura), permitió establecer de manera precisa que los rayos-X son una radiación electromagnética de la misma naturaleza que las ondas de radio, las ondas de microondas, los rayos infrarrojos, la luz visible, lo rayos ultravioleta y los rayos gamma [16]-[14].

Los rayos-X surgen de fenómenos extranucleares, a nivel de la órbita electrónica, fundamentalmente producidos por desaceleración de electrones, es decir, cuando una partícula cargada eléctricamente con suficiente energía cinética es frenada rápidamente. Existen tres fenómenos extranucleares que generan rayos-X [11], el primero es comúnmente conocido como “bremsstrahlung” (radiación de frenado), el segundo es la radiación característica de los metales, y el tercero es la radiación generada por el impacto de un electrón con el núcleo. El primer fenómeno extranuclear sucede cuando un electrón de alta energía pasa cerca del núcleo se desvía debido a la interacción electromagnética como se observa en la Figura 1.1a. Como consecuencia de este proceso de desv’io, el electrón pierde energía en forma de rayos-X. El segundo fenómeno extranuclear sucede cuando un electrón de alta

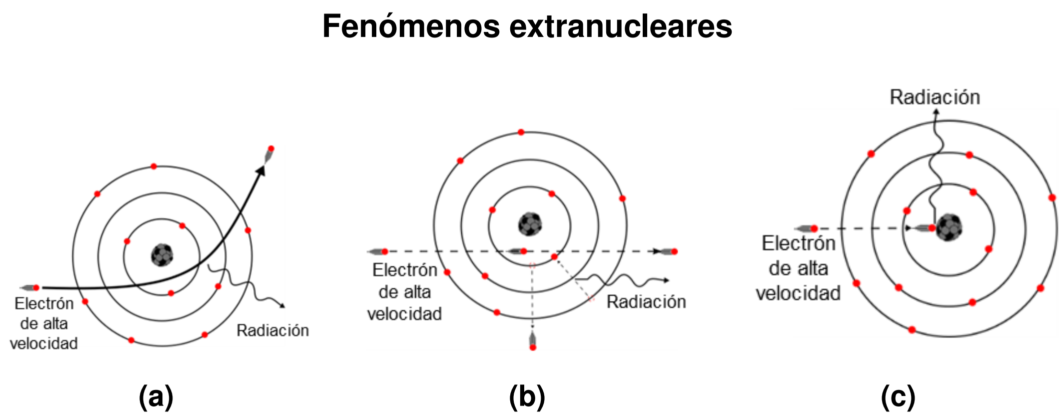


Figura 1.1: Esquema sobre la producción de radiación por fenómenos extranucleares. (a) La radiación de frenado es generada por la desaceleración de un electrón que pasa cerca al núcleo de un átomo y es desviado por fuerzas electromagnéticas. (b) La radiación característica de los metales es generada por el salto de un electrón de una capa superior a una inferior. (c) La radiación generada por el impacto de un electrón directamente con el núcleo de un átomo, liberando energía de rayos-X.

energía produce la salida de un electrón cercano al núcleo, y un electrón de una capa superior con mayor energía rellena la vacante, como se ilustra en la Figura 1.1b. Como consecuencia de este proceso la diferencia de energía entre niveles se transforma en energía de rayos-X. El tercer fenómeno extranuclear, ilustrado en la Figura 1.1c, sucede cuando un electrón de alta velocidad impacta directamente con el núcleo de un átomo. Como consecuencia de este impacto, toda la energía cinética se convierte en energía de rayos-X.

El dispositivo tradicionalmente usado para producir rayos-X, que se muestra en la Figura 1.2, es conocido como tubo de rayos-X, y fue inventado por Willian Crooke. Los tubos de rayos-X son una válvula de vacío compuesta por un c’atodo (filamento, habitualmente de wolframio), el cual es calentado por medio de corriente el’ectrica [15]. Debido al efecto termoiónico, al calentar el filamento de wolframio, se genera una fuerza electroestática que empuja a los electrones hacia el ánodo, los cuales al colisionar con el ánodo, ceden su energía al material. Alrededor de un 99 % de esta energía es emitida en forma de calor y el restante 1 % es emitido en forma de rayos-X, predominantemente en dirección perpendicular a la del haz de electrones [16]. Esta radiación consiste en ondas con un rango de longitud de onda aproximadamente entre 10^{-8} [m] y 10^{-13}[m]. Por lo tanto, la energía de radiación depende de la velocidad de los electrones, V, que a su vez depende de la aceleración del voltaje,

Tubo de rayos-X

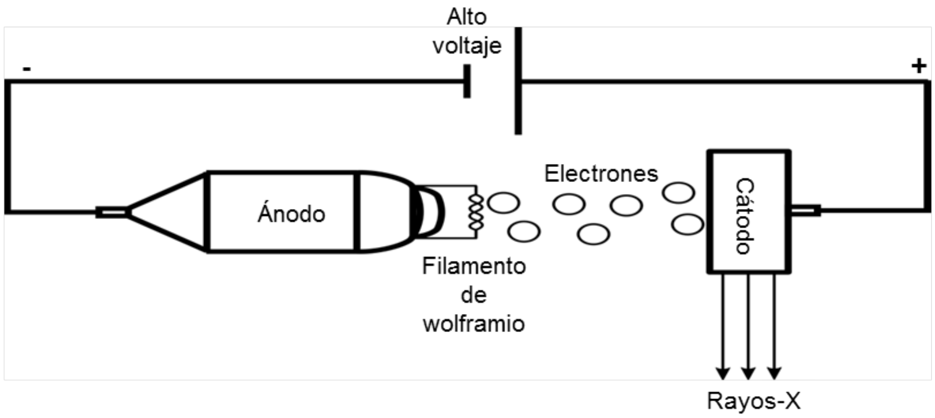


Figura 1.2: Esquema est'atico sobre la producci'on de rayos-X en un tubo convencional de rayos-X.

U_a, entre el cátodo y el ánodo. La velocidad del electrón puede ser determinada con la ecuación de la energía

$$eU_a = 0{,}5 * m_e V^2, \tag{1.1}$$

donde $e = 1{,}602 \times 10^{-19} [C]$ representa la carga del electrón, y $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31} [kg]$ representa la masa de los electrones. Puede suceder, sin embargo, que toda la energía, eU_a, de un electrón se transforme en un solo fotón. Este límite define el máximo de energía de la radiación de rayos X, lo cual se puede expresar matemáticamente como

$$eU_a = hv_{max} = E_{max}, \tag{1.2}$$

donde $h = 6{,}626 \times 10^{-34} [Js]$ es la constante de Planck. El l'imite E_{max} corresponde a la longitud de onda mínima

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU_a}, \tag{1.3}$$

donde $c = 2{,}998 \times 10^8$ es la velocidad de la luz.

1.2. LEY DE LAMBERT-BEER

En óptica, la ley de Lambert-Beer se aplica para todos los mecanismos físicos que conducen a la atenuación de la intensidad de radiación (reducción de fotones), de un haz de rayos-X que pasa a trav'es de un objeto [16], [11]. En pocas palabras, la ley de Lambert-Beer es un método matemático que permite expresar de qué

Ley de Lambert Beer para cuerpos homogéneos

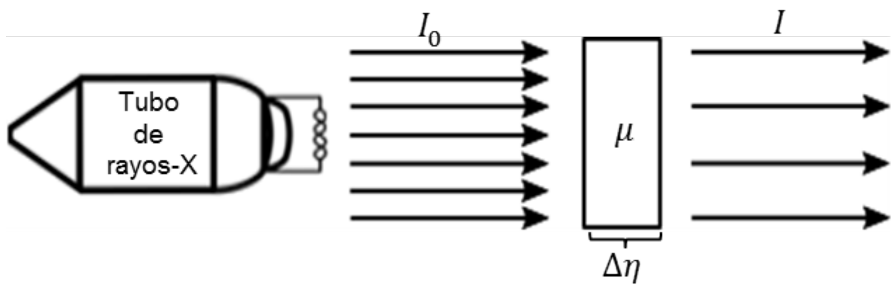


Figura 1.3: Ilustraci'on del efecto de atenuaci'on de un haz de rayos-X, al pasar a trav'es de un cuerpo homog'eneo.

modo la materia absorbe la luz al atravesar un medio con coeficientes de atenuación en funci'on de su ubicación espacial, $\mu(x, y, z)$. Matemáticamente, la intensidad de radiación $I(.)$ de una haz de rayos-X despu'es de pasar a través de un objeto, una distancia $\Delta\eta$ se puede expresar como

$$I(\eta + \Delta\eta) = I(\eta) - \mu(\eta)I(\eta)\Delta\eta. \tag{1.4}$$

Por simple reorganización de la ecuación (1.4), y aplicando l'imites en ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$\lim_{\Delta\eta \to 0} \frac{I(\eta + \Delta\eta) - I(\Delta\eta)}{\Delta\eta} = -\mu(\eta)I(\eta). \tag{1.5}$$

1.2.1 Atenuación de los rayos-X en un medio homogéneo

Si en la ecuación (1.5), se asume un medio homogéneo, como se ilustra en la figura 1.3, la función de atenuación puede expresarse como

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\eta} = -\mu I(\eta), \tag{1.6}$$

que corresponde a una ecuación diferencial de primer orden [16], [14]. Al integrar la ecuación 1.6 en ambos lados, se obtiene

$$ln|I| = -\mu\eta + C. \tag{1.7}$$

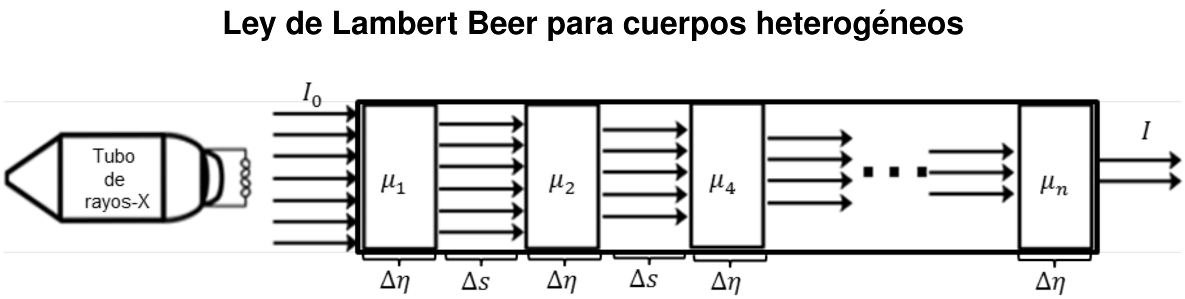


Figura 1.4: Ilustraci'on del efecto de atenuaci'on de un haz de rayos-X, al pasar a trav'es de un cuerpo no homog'eneo, donde $\Delta s \simeq 0$

Al despejar $I(\eta)$, y con la condición de que $I(0) = I_0$, la solución a la ecuación diferencial en (1.7), se puede expresar matemáticamente como

$$I(\eta) = I_0 e^{-\mu\eta}, \tag{1.8}$$

donde I_0 es la intencidad incial del haz de rayos-X.

1.2.2 Atenuación de los rayos-X en un medio no homogéneo

En un cuerpo no homogéneo y con constantes de atenuación no homogéneas, la atenuación de los rayos-X al pasar a través de este cuerpo puede ser calculado mediante la división del objeto en pequeños elementos, como se ilustra en la Fig. 1.4. Si cada elemento es lo suficientemente pequeño, este puede ser considerado como un objeto homogéneo [15], [14]. Basado en el concepto de dividir el cuerpo en varios cuerpos homogéneos y en la ecuación (1.8), la atenuación de rayos-X, en un cuerpo no homogéneo, puede ser expresada matemáticamente como

$$I = I_0 e^{-\mu_1 \Delta\eta} e^{-\mu_2 \Delta\eta} e^{-\mu_3 \Delta\eta} ... e^{-\mu_n \Delta\eta} = I_0 e^{\sum_{i=1}^{n} \mu_i \Delta\eta}, \tag{1.9}$$

donde $\Delta\eta$ es la longitud de cada elemento, μ_i es la constante de atenuación en el $i-th$ elemento y n es el total de elementos en el que es dividido el cuerpo no homogéneo. Si dividimos por I_0 y aplicamos logaritmo natural ambos lados de la ecuación (1.9), se obtiene

$$p = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \Delta\eta. \tag{1.10}$$

Ahora, si se asume que el número de elementos que componen el cuerpo tiende a infinito y la longitud de cada elemento tiende a cero, la ecuación (1.10) se puede reescribir como

$$p = \lim_{n \to \text{ínf}, \Delta\eta \to 0} -\ln(I/I_0) = \int_L \mu(x)\mathrm{d}x, \tag{1.11}$$

donde $\int_L$ representa la integral de línea y L la trayectoria de cada haz de rayos-X al pasar a través del cuerpo.

1.3. TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA

La tomografía computarizada (CT, por sus siglas en inglés) es una técnica no invasiva y no destructiva, que permite estimar la estructura interna de un objeto a partir de sus proyecciones. Estas proyecciones son generadas a partir de rayos-X que pasan a través del objeto, las cuales con base en la ecuación (1.9), se pueden expresar matemáticamente como [20]:

$$I(\varphi, \phi) = I_0 e^{-\int_{L(\varphi,\phi)} f(x,y)dxdy}, \tag{1.12}$$

donde ϕ es el ángulo entre el eje-x y la posición en el detector a la que converge el rayo-X, φ es el ángulo entre el eje-x y la fuente del rayos-X, como se ilustra en la Figura 1.5. Note que en la Ecuación 1.12 la integral de linea se realiza sobre la función paramétrica $L(\varphi, \phi)$ definida como $L(\varphi, \phi) = \{(x, y, z)\,|x = r(t\cos(\varphi) + (1-t)\cos(\varphi)), y = r(t\sin(\varphi) + (1-t)\sin(\varphi)), t \in [0, 1]\}$, la cual representa todos los puntos que recorre cada rayo-X, $f(x, y)$ es la función de atenuaciones del objeto, e I_0 es la intensidad inicial del haz de rayos-X al salir de la fuente. Aquí, r es el radio del círculo, que se genera al rotar la fuente alrededor del objeto, y $r \geq \sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Con base en las Ecuaciones (1.11) y (1.12), podemos definir la función de proyecciones $p(\varphi, \phi)$ como [20]

$$p(\varphi, \phi) = \int_{L(\varphi,\phi)} f(x, y)\mathrm{d}s(x, y), \tag{1.13}$$

donde $p(\varphi, \phi)$ es la función de atenuación, también conocida como sinograma, de $f(x, y)$.

Geometría tomógrafo con fuente en abanico

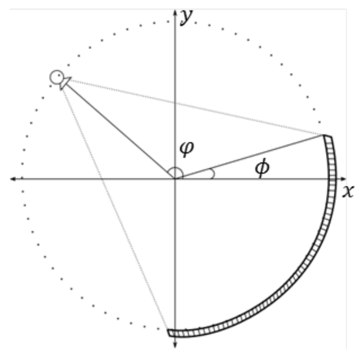


Figura 1.5: Representación gráfica de la geometría de un tomógrafo de haz de rayos-X en abanico y un arreglo de detectores curvo.

1.3.1 Modelo algebraico de tomografía computarizada

En la práctica, las imágenes CT son captadas por escáneres médicos, los cuales están compuestos por un detector de rayos-X y un arreglo de detectores que rotan simultáneamente alrededor del objeto, como se ilustra en la figura 1.5. Por lo tanto, con base en la ecuación (1.13), las proyecciones capturadas por un arreglo de detectores, en cada ángulo de visión, se puede expresar matemáticamente como [16]:

$$I_{i,j} = \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} I_0 e^{-p(G(i,\mathbf{q}_j,t'),\mathbf{q}_j)\mathrm{d}t'}, \tag{1.14}$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{M_2}$ es un vector que contiene los ángulos entre la fuente y el eje-x, con $M_2 \in \mathbb{R}$ como el total de ángulos recorridos por la fuente, $\Delta t \in \mathbb{R}$ representa el tamaño de cada detector, $G(i, \mathbf{q}_j, t') = \mathrm{mod}(\mathrm{mod}(\mathbf{q}_j - 180, 360) + (180)/2\pi r[(i + 1)\Delta t + t' - M_1\Delta t], 360)$ es una función que calcula el ángulo entre el eje-x, con $M_1 \in \mathbb{R}$ como el total de detectores, y donde converge el rayo-X. Aquí, $j_1 = 0, \cdots, M_1 - 1$ y $j_2 = 0, \cdots, M_2 - 1$. Con base en la Ecuación (1.14), las proyecciones captadas por el detector $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$, en los múltiples ángulos de visión, puede ser expresado matemáticamente como [16]:

$$P_{j_1,j_2} = -\ln\left(\frac{I_{i,j}}{I_0}\right). \tag{1.15}$$

Por lo tanto, el objetivo principal de CT es la reconstrucción de $f(x, y)$ a partir de $\mathbf{P}$. En la práctica, la reconstrucción de la función $f(x, y)$ es representada por una

Resoluciń imágenes de tomografía computarizada

(a) (b) (c)

Figura 1.6: Ejemplo de una imagen CT con un diferentes tamaños de pixel. (a) Δs, (b) 4Δs y (c) 8Δs

cuadrícula de p'ixeles cuadrados con una anchura y altura finita, Δs, i.e., una imagen **F** $\in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$, donde $N_1 \in \mathbb{N}$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ representan el total de filas y columnas de la imagen, respectivamente. Matem'aticamente, **F** puede expresarse como [20]:

$$F_{i_1,i_2} = \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} f(x_k + x', y_l + y') \mathrm{d}x' \mathrm{d}y', \tag{1.16}$$

donde (x_k, y_l) representa las coordenadas del punto central del pixel $F_{k,l}$, con $i_1 = 0, \cdots N_1 - 1$ y $i_2 = 0, \cdots N_2 - 1$. El valor de $F_{k,l}$ depende directamente del área del píxel y de los valores de la función. Es decir, si el objeto tiene un borde que pasa a través del área de un píxel $F_{k,l}$, o si el objeto no es homogéneo dentro del área del píxel, el valor de $F_{k,l}$ representará un promedio de todos los coeficientes de atenuación dentro del píxel, como se ilustra en la figura 1.6. Este efecto es comúnmente conocido como *efecto de volumen parcial* (PVE, por sus siglas en inglés).

Con base en la representaci'on discreta de las proyecciones (ecuaci'on 1.15) y de la reconstrucci'on de la funci'on de atenuaciones (ecuaci'on 1.16), se establece un modelo matem'atico lineal para la captura de las proyecciones de las im'agenes CT dado por

$$\mathbf{p} = \mathbf{W}\mathbf{f}, \tag{1.17}$$

donde **W** $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz que representa la geometría de la arquitectura CT, comúnmente conocido como el operador de proyección, como se ilustra en la figura 1.8. Específicamente, las filas de la matriz **W** están compuestas por los porcentajes de área de cada pixel que está contenido en la trayectoria entre la fuente de rayos-X y un detector arbitrario, como se puede ilustrar en la figura 1.7. En la figura 1.7 se

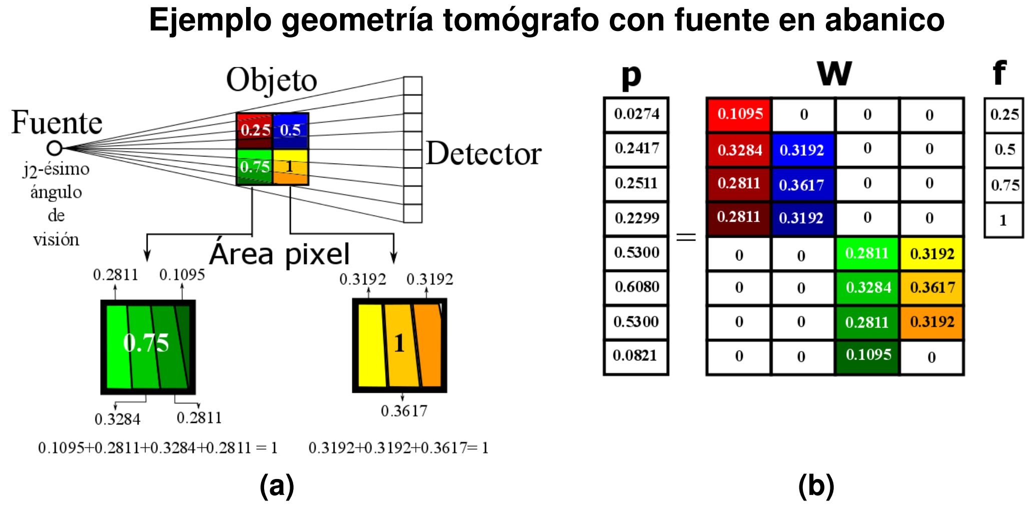
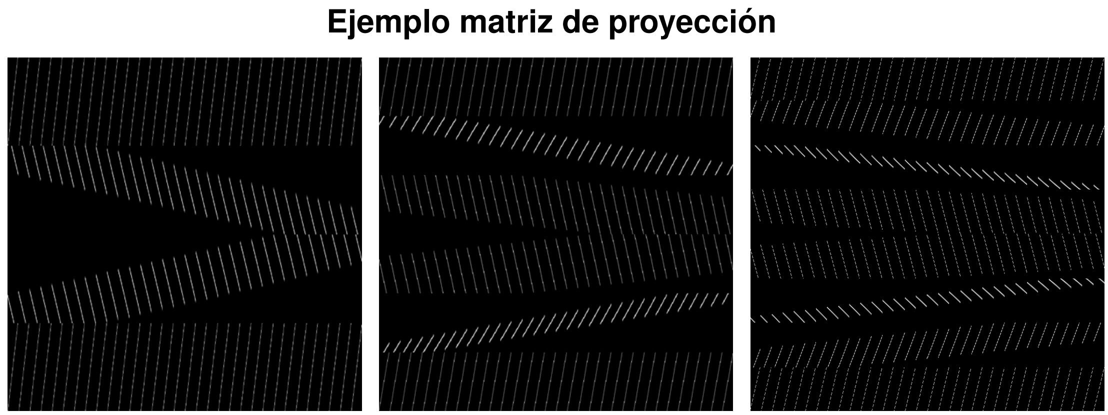


Figura 1.7: Ejemplo de la geometría de muestreo para un tomógrafo en un ángulo de visión para $M_1 = 8$ detectores y un objeto de dimensiones $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Aquí, se ilustra la trayectoria (porcentaje del área de cada pixel que toca el haz) para cada proyección de rayos-X. En (b) se ilustra la matriz resultante a partir de la geometría establecida en (a) y las proyecciones generadas al establecer un objeto de atenuaciones arbitrario.

ilustra un ejemplo de la geometría de muestreo para una arquitectura CT con haz en de rayos-X en abanico con $M_1 = 8$ detectores, en un ángulo de visión arbitrario y un objeto de dimensión 2×2. Aquí, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{M_1 M_2}$ y $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$ son la representaci'on lexicogr'afica de **P** y **F**, respectivamente.

1.4. MUESTREO COMPRESIVO EN TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA

El muestreo compresivo (CS, de sus siglas en inglés) en tomografía computarizada es nuevo paradigma que establece que imágenes CT pueden ser reconstruidas a partir de un número menor de proyecciones de rayos-X que las establecidas por los métodos tradicionales. Esta nueva área de la investigación se conoce como muestreo compresivo en tomografía computarizada (*compressive computed tomography*) [2], y ha generado un gran interés en el estudio de las estrategias de CS en CT dado que tiene el potencial para disminuir las dosis de radiación a los que son expuestos los pacientes. La principal diferencia entre CS en CT y los métodos tradicionales, es la combinación del problema de adquisición y compresión de datos. Matemática-



(a) (b) (c)

Figura 1.8: Ejemplo de una matriz de proyecci'on **W** para una arquitectura CT de haz de rayos-X en abanico y arreglo de detectores curvo. Las matrices fueron creadas con las siguientes especificaciones: $N_1 = N_2 = 32$, $M_1 = 128$, $\Delta t = 0{,}0377[mm]$ y (a) $M_2 = 4$, (b) $M_2 = 6$, (c) $M_2 = 8$,

mente, este proceso de adquisición y compresión puede ser modelado como

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi x}, \tag{1.18}$$

donde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ representa las medidas comprimidas de $\mathbf{x}$, y $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ representa la matriz de muestreo, con $m \ll n$. Con base en la matriz de muestreo $\mathbf{\Phi}$ y las medidas comprimidas $\mathbf{y}$, es posible encontrar una solución para $\mathbf{x}$, siempre que se cumplan dos principios fundamentales, escasez e incoherencia, descritas en subsecciones 1.4.1 y 1.4.2, respectivamente.

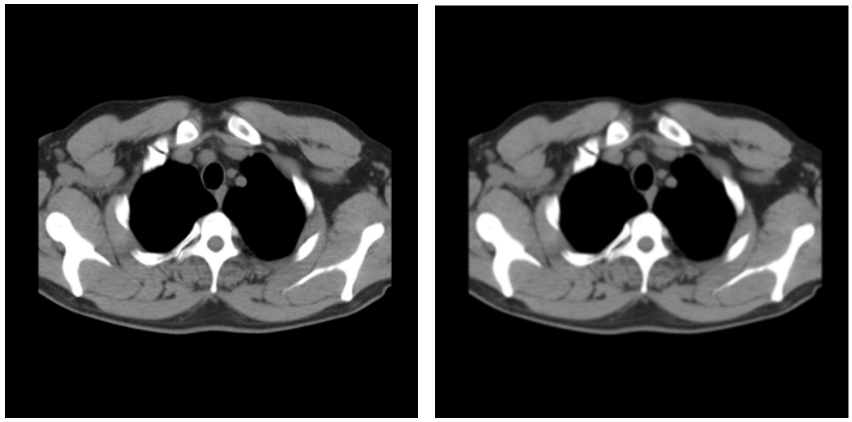
1.4.1 Escasez

El concepto de escasez expresa la idea de que los coeficientes representativos de una señal en alguna base de representación $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, son menores al total de valores de la imagen, como se ilustraba en la figura 1.9. Este concepto implica que los coeficientes más pequeños de una señal, en alguna base de representación, pueden ser descartados (aproximados a cero) sin tener pérdidas significativas en la señal. Esto se puede expresar matemáticamente como [5]:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{\Psi}^T G(\boldsymbol{\theta})|^2 < \tau, \tag{1.19}$$

donde $G(\cdot)$ es un operador que descarta un porcentaje de los coeficientes más pequeños de la señal $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es la señal de interés con su respectiva representación

Ejemplo escasez en imágenes CT



(a) **(b)**

Figura 1.9: (a) Imagen original **x**. (b) Imagen con solo un 25 % de sus coeficientes significativos $\mathbf{\Psi}^T G(\boldsymbol{\theta})$.

$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{\Psi}\mathbf{x}$ y $\tau \in \mathbb{R}$ es la constante de tolerancia. En la figura 1.9 se puede observar un ejemplo para la ecuación X, en la cual a la figura 1.9a se le truncan el 75 % de sus coeficientes menos representativos en la base de representación coseno sin presentar un error significativo al reconstruir la figura 1.9b. Es importante notar que $\mathbf{\Psi}$ es una matriz ortonormal por lo tanto $\mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{\Psi}^T$ y $\mathbf{\Psi}^T\mathbf{\Psi} = \boldsymbol{I}$.

1.4.2 Incoherencia

El concepto de incoherencia, mide la correlación entre los elementos de $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{\Psi}$, como se ilustra en la figura 1.10. CS en CT se enfoca principalmente en problemas de reconstrucción con matrices de muestreo con baja coherencia. La coherencia entre la matriz de muestreo $\mathbf{\Phi}$ y la base de representación $\mathbf{\Psi}$ puede expresarse matemáticamente como [5]

$$\mu(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}) = \sqrt{n} \cdot \max_{i \neq j} |\mathbf{\Phi}_i \cdot \mathbf{\Psi}_j|, \tag{1.20}$$

donde $|\cdot|$ representa la función valor absoluto componente a componente, y $\mu(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}) \in [1, \sqrt{n}]$ la función de correlación entre dos matrices. Si $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{\Psi}$ contienen múltiples elementos correlacionados, la coherencia es grande, de lo contrario, la coherencia es pequeña. Por lo tanto, para que la señal **x** sea recuperada a partir de m medidas con una alta probabilidad, se debe cumplir la siguiente relación [5]

$$m \geq C \cdot S \cdot \log(m) \cdot \mu^2(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Psi}), \tag{1.21}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es alguna constante positiva, y $S \in \mathbb{R}$ representa el total de coeficientes diferentes de cero en $\boldsymbol{\theta}$.

1.5. ALGORITMO DE RECONSTRUCCÍON

El problema de estimar **x** a partir de **y** es llamado un problema inverso lineal (LIP, por sus siglas en inglés *linear inverse problem*); en la mayoría de los escenarios de interés practico, este es un problema inverso mal planteado (IPLIP, por sus siglas en inglés *ill-posed linear inverse problem*), es decir, la matriz Φ es singular y/o mal condicionada. Por lo tanto, para resolver problemas IPLIP se requiere del uso de funciones de regularización o información previa. Una manera de regularizar el problema de estimar **x** a partir de **y**, consiste en el uso de un problema de optimización restringido, el cual se puede expresar matemáticamente como:

$$\text{minimizar}_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) \qquad \text{sujeto a} \qquad ||\Phi\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2 \leq \epsilon, \tag{1.22}$$

donde $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ es el regularizador o la función regularizadora, y $0 \leq \epsilon$ es un parámetro que depende de la varianza del ruido. Con base en la ecuación 1.22, se han establecido varias funciones de optimización y sus respectivos algoritmos para la reconstrucción de **x** a partir de **y**. Particularmente, los algoritmos que hacen uso de la restricción de variación total (TV por sus siglas en inglés *Total Variation*) para el problema de reconstrucción de imágenes de tomografía computarizada han tenido un gran impacto. Con base en lo anterior, para el desarrollo de esta tesis de maestría se implementará el algoritmo C-SALSA (por sus siglas en inglés *Constraint Split Augmented Lagrangian Shrinkage Algorithm*) para la reconstrucción de imágenes CT a partir de proyecciones adquiridas en una arquitectura de muestreo compresivo. Específicamente, la función de optimización que se plantea en el algoritmo C-SALSA es

$$\text{minimizar}_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) + \iota_{E(\epsilon, \mathbf{I}, \mathbf{y})}(\Phi\mathbf{x}) \tag{1.23}$$

para

$$\iota_{E(\epsilon,\mathbf{I},\mathbf{y})} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\Phi\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2^2 \leq \epsilon \\ +\infty & \text{if} \quad \mathbf{x} \notin \mathbb{R}^n : ||\Phi\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2^2 \leq \epsilon \end{cases}, \tag{1.24}$$

donde $\iota_{E(\epsilon,\mathbf{I},\mathbf{y})}$ es una bola cerrada Euclideana de radio ϵ centrada en **y**. Con el fin de resolver la función de optimización [1.24], es necesario establecer los mapas proximales de Moreau [?] asociados con $g_1 = \phi$ y $g_2 = \iota_{E(\epsilon,\mathbf{I},\mathbf{y})}$. Concerniente a g_1, se establece la función

$$\mathbf{\Psi}_{\tau\phi} = \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}||\mathbf{\Phi}\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2^2 + \tau_c\phi(\mathbf{x}), \tag{1.25}$$

para el caso que $\phi(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||_1$, donde $\tau_c \in \mathbb{R}_+$ es un parámetro regularizador y $\mathbf{\Psi}_{\tau_c\phi}$ sea una función umbral con paso suave o comúnmente conocido como *soft threshold*. En el caso que $\phi(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||_{\mathrm{TV}}$ corresponda a la norma TV [?], se hace uso de alguno de los algoritmos rápidos disponibles en el estado del arte. Para la función $g_2 = \iota_{E(\epsilon,\mathbf{I},\mathbf{y})}$, el mapa proximal de Moreau se puede definir como

$$\mathbf{\Psi}_{\iota_{E(\epsilon,\mathbf{I},\mathbf{y})}/\mu}(\mathbf{s}) = \arg\min_{\mathbf{x}} \frac{\iota_{E(\epsilon,\mathbf{I},\mu_c)}(\mathbf{\Phi}\mathbf{x})}{\mu_c} + \frac{1}{2}||\mathbf{\Phi}\mathbf{x} - \mathbf{s}||_2^2, \tag{1.26}$$

la cual es independiente de μ_c y se puede interpretar como la proyección ortogonal de **s** en la esfera cerrada con radio en ϵ y centrada en **y**:

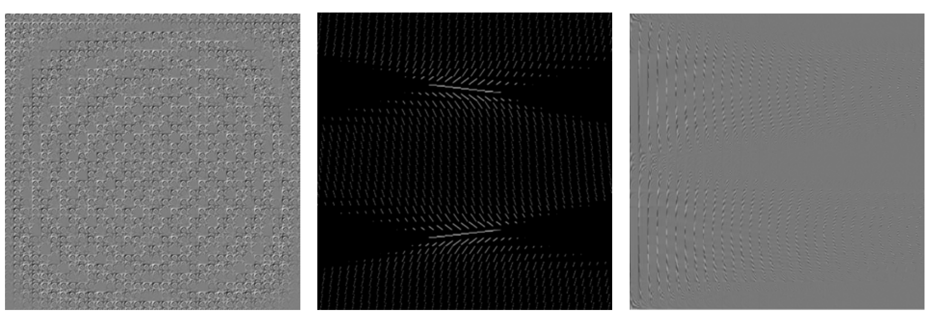
$$\mathbf{\Psi}_{\iota_{E(\epsilon,\mathbf{I},\mathbf{y})}}(\mathbf{s}) = \mathbf{y} + \begin{cases} \epsilon\frac{\mathbf{s}-\mathbf{y}}{||\mathbf{s}-\mathbf{y}||_2}, & \text{if} \quad ||\mathbf{s}-\mathbf{y}||_2 > \epsilon \\ \mathbf{s}-\mathbf{y} & \text{if} \quad ||\mathbf{s}-\mathbf{y}||_2 \leq \epsilon \end{cases}. \tag{1.27}$$

Con base en las ecuaciones 1.25,1.27 y el enfoque ADMM (por sus siglas en inglés *Algorithm Direction Method of Multipliers*) para la solución de problemas de optimización, en [?] se estableció el algoritmo C-SALSA, el cual se puede observar en el Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Algoritmo C-SALSA para reconstrucción de imágenes CT

Entrada: $\mu_c > 0$, $\rho_c > 0$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{\Phi}$, $Iter \in \mathbb{R}$
Resultado: $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$
1: $\mathbf{v}_0^{(1)} = \mathbf{d}_0^{(1)} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$
2: $\mathbf{v}_0^{(2)} = \mathbf{d}_0^{(2)} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$
for $k = 1$ hasta $Iter$ **hacer**
  4: $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0^{(1)} + \mathbf{d}_0^{(1)} + \mathbf{\Phi}^{\mathsf{T}}(\mathbf{v}_0^{(2)} + \mathbf{d}_0^{(2)})$
  5: $\mathbf{u}_{k+1} = \left(\rho_c \mathbf{I} + \mathbf{\Phi}^{\mathsf{T}}\mathbf{\Phi}\right)^{-1} \mathbf{r}_k$
  6: $\mathbf{v}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{\Psi}_{\phi/\mu_c}\left(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{d}_k^{(1)}\right)$
  7: $\mathbf{v}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{\Psi}_{\iota_{E(\epsilon,\mathbf{I},\mathbf{y})}}\left(\mathbf{\Phi}\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{d}_k^{(2)}\right)$
  8: $\mathbf{d}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{d}_k^{(1)} - \mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}^{(1)}$
  9: $\mathbf{d}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{d}_k^{(2)} - \mathbf{\Phi}\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}^{(2)}$
  10: $k = k + 1$
fin for

Ejemplo de la correlación base de representación y matriz de muestreo



(a) **(b)** **(c)**

Figura 1.10: Ejemplo de la correlaci'on entre una base de representaci'on coseno y una matriz de sensado de tomografía computarizada. Donde (a) ilustra la base de representación $\mathbf{\Psi}$, (b) ilustra la matriz de sensado $\mathbf{\Phi}$, y (c) es la matriz de correlación entre (a) y (b).

Capítulo 2
MUESTREO COMPRESIVO EN TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA A PARTIR DE APERTURAS CODIFICADAS

Las arquitecturas tradicionales de tomografía computarizada (2.1a) adquieren proyecciones de rayos-X mediante el uso de estrategias de muestreo uniforme de los pixeles del objeto, como se puede observar en la figura (2.1d). En contraste, las arquitecturas de CS-CT que usan aperturas codificadas (2.1b-2.1c), generadas por una función aleatoria, tienen una alta probabilidad de sobremuestrear y submuestrar los pixeles del objeto, tal como se puede observar en la figura (2.1e-2.1f). Una de las ventajas que presentan las estrategias de muestreo uniforme es que permiten estimar los elementos de la imagen CT con una calidad homogénea. En este capítulo se describe matemáticamente la geometría de adquisición de dos arquitecturas de muestreo compresivo en tomografía computarizada con haz de rayos-X en abanico y aperturas codificadas.

2.1. TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA CON ARREGLO UNIDIMENSIONAL DE DETECTORES

2.1.1 Modelo continuo Una de las arquitecturas tradicionales de CS-CT es la arquitectura de haz de rayos-X en abanico con arreglo de detectores curvo y aperturas codificadas [**?**]. Esta arquitectura está basada en la tercera generación de tomógrafos, por lo tanto, la fuente, la apertura y el detector, giran alrededor del objeto simultáneamente. En cada ángulo de visión se emite un haz de rayos-X, el cual es modulado mediante el uso de un objeto físico que bloquea o permite el paso de los rayos-X. Este objeto es comúnmente conocido como apertura codificada y en la Figura 2.1 se ilustra un ejemplo de una arquitectura con y sin apertura codificada. Posteriormente, el haz de rayos-X modulado pasa a través del objeto y sus atenuaciones son capturadas por el arreglo de detectores. Con base en la ecuación (1.14), Ejemplo geometría de muestreo para tres tomógrafos

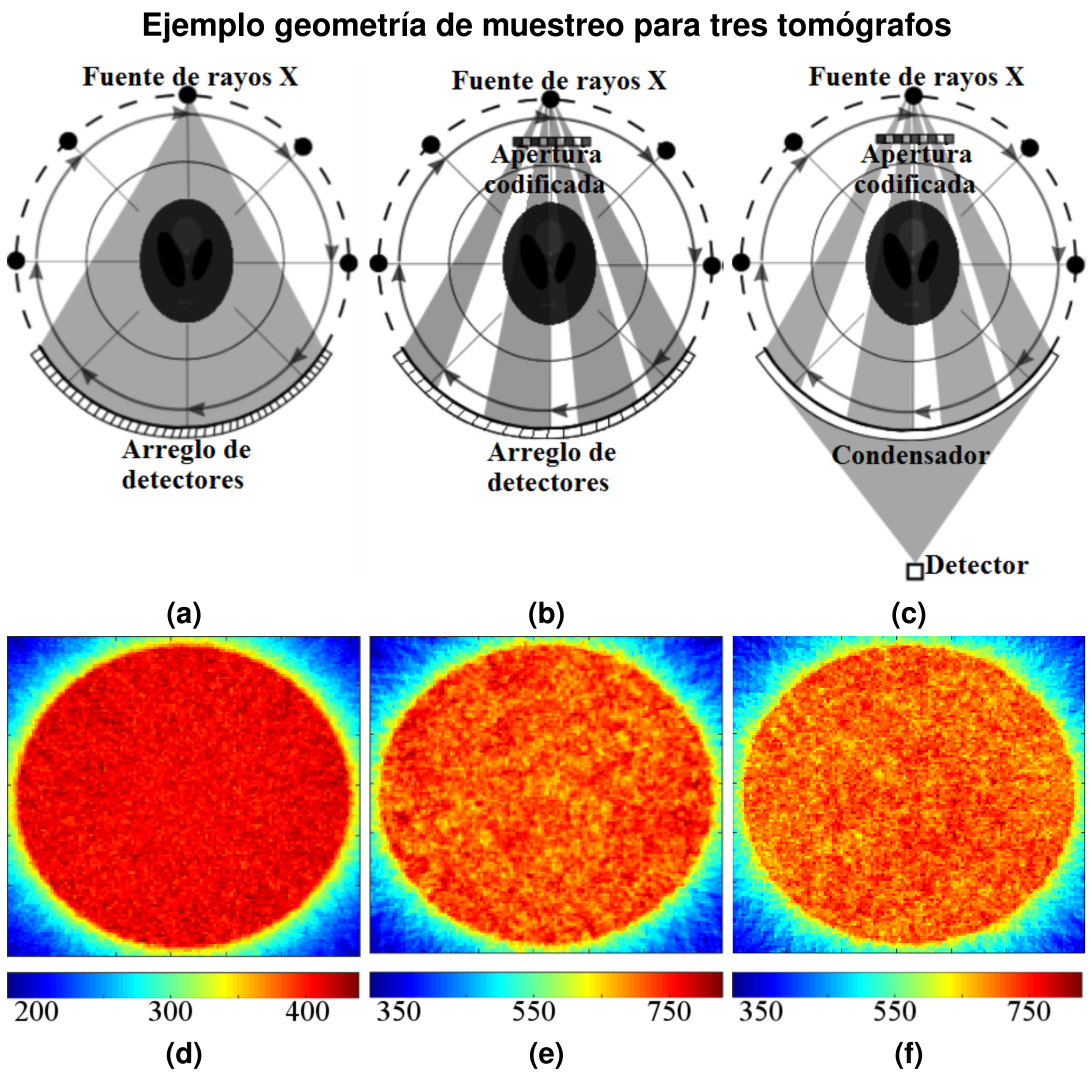


Figura 2.1: (a)-(c) Se ilustra la geometría de muestreo de tres arquitecturas de tomografía computarizada con haz de rayos-X en abanico. Arquitectura rotacional con (a) arreglo completo de detectores, (b) arreglo completo de detectores con aperturas codificadas, (c) un único detector con aperturas codificadas. Además, (d)-(e) ilustra un ejemplo del número de veces que cada pixel del objeto es muestreado en las arquitecturas (a)-(c), respectivamente.

el modelo de atenuación del haz de rayos-X, después de pasar a través del objeto $f(x, y)$ a lo largo de la línea $L(\varphi, \phi) = \{(x, y, z)\,|x = r(t\cos(\varphi) + (1-t)\cos(\varphi)), y = r(t\sin(\varphi) + (1-t)\sin(\varphi)), t \in [0, 1]\}$, puede expresarse como

$$I(\varphi, \phi) = h(\varphi, \phi)\, e^{-\int_{L(\varphi,\phi)} f(x,y)dxdy}, \tag{2.1}$$

donde $h(\varphi, \phi)$ es una función que representa la modulación de la apertura codificada. Aquí $h(\varphi, \phi) = I_0 e^{-c\kappa(\varphi,\phi)}$, donde $\kappa(\varphi, \phi) \in \{0, I_0\}$ representa el coeficiente de atenuación en el punto donde la linea $L(\varphi, \phi)$ se intersecta con la apertura codificada. Específicamente, $\kappa(\varphi, \phi) \approx 0$ o $\kappa(\varphi, \phi) \approx I_0$ para el elemento que bloquea o permite el paso del rayo-X, respectivamente. Con el fin de reconstruir $f(x, y)$ a partir de las proyecciones moduladas y con base en la ecuación (1.15), la ecuación (2.1) puede ser reescrita como

$$p(\varphi, \phi) = -\ln\left(\frac{I(\varphi, \phi)}{h(\varphi, \phi)}\right) = \int_{L(\varphi,\phi)} f(x, y)dxdy. \tag{2.2}$$

2.1.2 Modelo discreto

En la práctica, el modelo matemático descrito en la ecuación (2.2) necesita ser finito dado que solo un número discreto de proyecciones pueden ser capturadas. Por lo tanto, con base en las ecuaciones (2.1)-(2.2), la intensidad del haz de rayos-X medido por el detector puede ser descrito como

$$(\mathbf{p}_{j_2}^{j_3})_{j_1} = -\ln\left(\frac{(\mathbf{I}_{j_2})_{j_1}}{(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1}}\right), \tag{2.3}$$

donde $(\mathbf{I}_{j_2})_{j_1}$ y $(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1}$ es dado por

$$(\mathbf{I}_{j_2})_{j_1} = \int_{-\frac{1}{2}\Delta\phi}^{\frac{1}{2}\Delta\phi} I((\boldsymbol{\varphi}_{j_2})_{j_1}, \boldsymbol{\phi}_{j_2} + \phi')d\phi', \tag{2.4}$$

y

$$(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1} = \int_{\frac{1}{2}\Delta\phi}^{\frac{1}{2}\Delta\phi} h((\boldsymbol{\varphi}_{j_2})_{j_1}, \boldsymbol{\phi}_{j_2} + \phi')d\phi', \tag{2.5}$$

para $j_1 = \{0, ..., M_1 - 1\}$, $j_2 = \{0, ..., M_2 - 1\}$ y $j_3 = \{0, ..., M_3 - 1\}$, donde $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{M_2}$ y $\boldsymbol{\varphi}_{j_2} \in \mathbb{R}^{M_1}$ son vectores que contienen la posición angular de la fuente con respecto al eje-X, y la posición angular entre el centro de cada elemento del detector con respecto al eje-X para el j_2-ésimo ángulo de visión, respectivamente. Con base en las ecuaciones (1.16),(2.3),(2.4), el modelo discreto de captura de proyecciones moduladas de rayos-X en una arquitectura con múltiples ángulos de visión y un arreglo unidimensional de detectores puede escribirse como

$$\mathbf{p}_{j_2} = \mathbf{C}_{j_2}\mathbf{W}_{j_2}\mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}_{j_2}, \tag{2.6}$$

donde $\mathbf{p}_{j_2} \in \mathbb{R}^{r_{j_2}}$ representa las proyecciones adquiridas en el j_2-ésimo ángulo de visión, $\mathbf{W}_{j_2} \in \mathbb{R}^{M_1 \times n}$ es la matriz de que simula la geometría de adquisición del tomógrafo para el j_2-ésimo ángulo de visión, y $\mathbf{C}_{j_2} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_1}$ es una versión matricial del código de apertura $\mathbf{h}_{j_2} \in \mathbb{R}^{M_1}$ con $\mathbf{C}_{j_2} = \text{diag}(\mathbf{h}_{j_2})$. Con el fin de simplificar el proceso de captura para los múltiples ángulos de visión, basándose en la ecuación (2.6), se establece que

$$\mathbf{p} = \Phi\mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{2.7}$$

donde $\mathbf{p} = \left[\mathbf{p}_0^{\mathsf{T}}, ..., \mathbf{p}_{M_2-1}^{\mathsf{T}}\right]^{\mathsf{T}}$ representa el vector de proyecciones, $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^{r_{j_2}}$ es el ruido agregado a las proyecciones, $\mathbf{C} = \text{diag}\left(\mathbf{C}_0, ..., \mathbf{C}_{M_2-1}\right)$ representa la apertura codificada, $\mathbf{W} = \left[\mathbf{W}_0^{\mathsf{T}}, ..., \mathbf{W}_{M_2-1}^{\mathsf{T}}\right]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{M_1 M_2 \times n}$ es la matriz que simula la geometría de captura del tomógrafo, $\boldsymbol{\epsilon} = \left[\boldsymbol{\epsilon}_0^{\mathsf{T}}, ..., \boldsymbol{\epsilon}_{M_2-1}^{\mathsf{T}}\right]^{\mathsf{T}}$ es el vector de ruido y $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ representa la matriz de captura para $\Phi = \mathbf{CW}$ y $m = M_1 M_2$. Formalmente, la estructura de $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ se puede expresar como

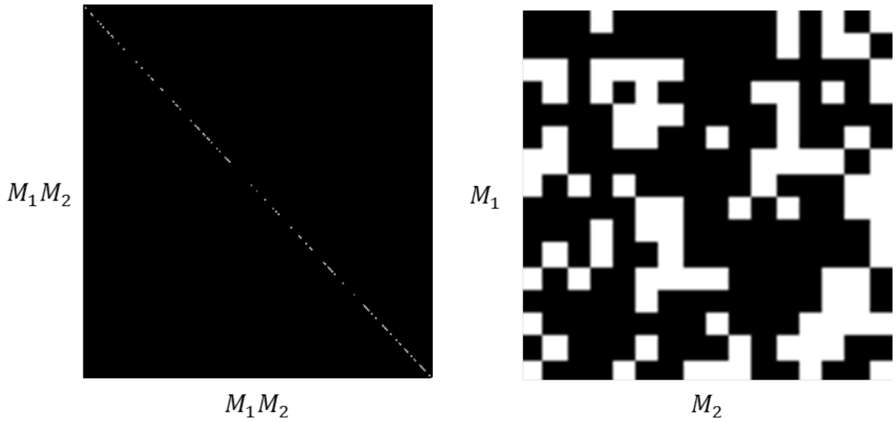
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \text{diag}(\mathbf{h}_0) & \mathbf{0}_{M_1 \times M_1} & \cdots & \mathbf{0}_{M_1 \times M_1} \\ \mathbf{0}_{M_1 \times M_1} & \text{diag}(\mathbf{h}_1) & \cdots & \mathbf{0}_{M_1 \times M_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{M_1 \times M_1} & \mathbf{0}_{M_1 \times M_1} & \cdots & \text{diag}(\mathbf{h}_{M_2-1}) \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

donde $\text{diag}(\mathbf{h}_{j_2})$ es una matriz diagonal de tamaño $M_1 \times M_1$ cuyas entradas son los elementos de la apertura codificada vectorizada $\mathbf{h}_{j_2}$. Otra representación del código de apertura planteado en (2.8), se puede expresar matemáticamente como

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} (\mathbf{h}_0)_0 & (\mathbf{h}_0)_1 & \cdots & (\mathbf{h}_0)_{M_2-1} \\ (\mathbf{h}_1)_0 & (\mathbf{h}_1)_1 & \cdots & (\mathbf{h}_1)_{M_2-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{h}_{M_1-1})_0 & (\mathbf{h}_{M_1-1})_1 & \cdots & (\mathbf{h}_{M_1-1})_{M_2-1} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

donde $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$ es una representación matricial del código de apertura que

Ejemplo apertura codificada



(a) **(b)**

Figura 2.2: Ejemplo de un código de apertura en sus dos representaciones matriciales (a) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M_1M_2 \times M_1M_2}$ y (b) $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$, con $M_1 = M_2 = 32$

permite realizar diferentes análisis cualitativos y cuantitativos, como se ilustra en la figura (2.2b).

2.2. TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA CON UN ÚNICO DETECTOR

Debido al gran impacto que ha tenido el uso de las estrategias de muestreo compresivo en CT, se ha generado un gran interés en el desarrollo de arquitecturas que permitan explotar eficientemente la teoría de CS, por ejemplo, la implementación de aperturas codificadas o la reducción de los ángulos de visión. Sin embargo, la arquitectura que mejor explota la téoria de CS es la arquitectura CT con un único detector. Específicamente, esta arquitectura está compuesta por una fuente de rayos-X, una apertura codificada, un condensador de rayos-X y un único detector. Esta arquitectura está basada en la tercera generación de tomógrafos, por lo tanto, la fuente, la apertura, el condensador y el único detector, giran alrededor del objeto simultáneamente. En cada ángulo de visión se emite un haz de rayos-X, el cual es modulado por la apertura codificada. Posteriormente, el haz de rayos-X modulado pasa a través del objeto, las atenuaciones son condensadas y capturadas por el único detector. Es importante establecer que la arquitectura CT con un único detector es una arquitectura de múltiples capturas, es decir, en cada ángulo de visión se capturan múltiples proyecciones condensadas y para cada captura se usa una apertura codificada diferente. Debido a que la arquitectura CS-CT de un único detector se basa en la tercera generación de tomógrafos, el modelo continuo de atenuación de rayos-X puede ser representado por las ecuaciones (2.1) y (2.2) [13].

2.2.1 Modelo discreto

En la práctica, el modelo matemático descrito en la ecuación (2.2) necesita ser finito dado que solo un número discreto de proyecciones pueden ser capturadas. Por lo tanto, con base en las ecuaciones (2.3)-(2.4) y teniendo en cuenta el proceso de condensación, la intensidad del haz de rayos-X medido por el unico detector puede ser descrito como

$$(p_{j_2}^{j_3})_{j_1} = \sum_{j_1=0}^{M_1-1} -\ln\left(\frac{\mathbf{I}_{j_1,j_2}}{(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1}}\right), \tag{2.10}$$

donde $\mathbf{I}_{j_1,j_2}$ es descrito por la ecuación (2.4). Con base en las ecuaciones (1.16),(2.3),(2.4), el modelo discreto de captura de proyecciones moduladas de rayos-X en una arquitectura con múltiples ángulos de visión y un arreglo unidimensional de detectores puede escribirse como

$$p_{j_2}^{j_3} = \mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{C}_{j_2}^{j_3}\mathbf{W}_{j_2}\mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}_{j_2}\right), \tag{2.11}$$

donde $\mathbf{1}_{M_1} \in \mathbb{R}^{M_1}$ es un vector de unos, $\mathbf{C}_{j_2}^{j_3} = \text{diag}(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3}) \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_1}$ es una versión matricial del código de apertura $\mathbf{h}_{j_2}^{j_3} \in \mathbb{R}^{M_1}$, y $p_{j_2}^{j_3} \in \mathbb{R}$ representa las proyecciones adquiridas en el j_2-ésimo ángulo de visión y para la j_3-ésimo captura para $j_3 = \{0, ..., M_3 - 1\}$. Con el objetivo de simplificar el proceso de captura de la arquitectura de CS en CT con un único detector, se establece que la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M_1 M_2 M_3 \times M_1 M_2}$ contiene la concatenación de todas las aperturas codificadas y esta puede expresarse como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{M_2-1} \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

donde $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{M_1 M_3 \times M_1}$ es una matriz de ceros, y $\mathbf{A}_{j_2} \in \mathbb{R}^{M_1 M_3 \times M_1}$ se define como la matriz que concatena las aperturas codificadas en el j_2-ésimo angulo de visión $\mathbf{A}_{j_2} = [(\mathbf{C}_{j_2}^{0})^{\mathsf{T}}, (\mathbf{C}_{j_2}^{1})^{\mathsf{T}}, ..., (\mathbf{C}_{j_2}^{M_3-1})^{\mathsf{T}}]$. Otra representación de la apertura codificada planteada en (2.12), se puede expresar matemáticamente como

$$\mathbf{Z}^{j_3} = \begin{pmatrix} (\mathbf{h}_0)_0^{j_3} & (\mathbf{h}_0)_1^{j_3} & \cdots & (\mathbf{c}_0)_{M_2-1}^{j_3} \\ (\mathbf{h}_1)_0^{j_3} & (\mathbf{h}_1)_1^{j_3} & \cdots & (\mathbf{h}_1)_{M_2-1}^{j_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{h}_{M_1-1})_0^{j_3} & (\mathbf{h}_{M_1-1})_1^{j_3} & \cdots & (\mathbf{h}_{M_1-1})_{M_2-1}^{j_3}, \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

donde $\mathbf{Z}^{j_3} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$ representa la apertura codificada para la j_3-ésimo captura. Además, se define la matriz $\mathbf{D} = \mathbf{I}_{M_2M_3 \times M_2M_3} \otimes \mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}}$, donde $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{M2_M3 \times M_1M_2M_3}$ representa la matriz de condensación, $\mathbf{1}_{M_1} \in \mathbb{R}^{M_1}$ es un vector de unos, $\mathbf{I}_{M_2M_3 \times M_2M_3} \in \mathbb{R}^{M_2M_3 \times M_2M_3}$ representa una matriz identidad y $\otimes$ representa el producto Kronecker entre matrices. Con base en lo anterior, se establece la ecuación

$$\mathbf{p} = \Phi\mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{2.14}$$

donde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ representa el vector de proyecciones, $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ representa la matriz de captura para $\Phi = \mathbf{DAW}$ y $m = M_2M_3$.

Capítulo 3
OPTIMIZACIÓN DE APERTURAS CODIFICADAS

Tradicionalmente, dos de las métricas mas usadas para determinar que tan bien condicionada esta una matriz de muestreo Φ es el número de condición, $C_{num} \in \mathbb{C}$, y la coherencia $C_h \in \mathbb{R}$ [**?**].

Definición 1: Sean λ_{max} y λ_{min} los valores propios máximo y mínimo de la matriz $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ o $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$. El número de condición de $\mathbf{A}$ se puede expresar matemáticamente como

$$C_{num} = \sqrt{\lambda_{max}}/\sqrt{\lambda_{min}} \tag{3.1}$$

con $\lambda_{min} \neq 0$.

Definición 2 : Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz con columnas $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ ℓ_2 normalizadas, es decir, para todo $||\mathbf{a}_i||_2 = 1$ con $i = \{1, ..., n\}$. La coherencia de una matriz $\mathbf{A}$ se define como

$$C_h := \max_{1\leq i\neq j\leq n}| < \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j > |. \tag{3.2}$$

En los problemas de reconstrucción donde $m < n$, estas dos métricas se relacionan directamente por el siguiente teorema.

Teorema 1: Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una matriz cons sus columnas ℓ_2 normalizadas y sea $s \subset [n]$. Para todo vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ que sea s-escaso se cumple

$$(1 - C_h(s-1))||\mathbf{x}||_2^2 \leq ||\mathbf{A}\mathbf{x}||_2^2 \leq (1 + C_h(s-1))||\mathbf{x}||_2^2 \tag{3.3}$$

los valores propios de la matriz $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ están contenidos en el intervalo $[1-C_h(s-1), 1+C_h(s-1)]$. En particular, si $C_h(s-1) < 1$, entonces $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ es invertible.

En este trabajo se diseñaron aperturas codificadas que permiten reducir el número de condición de la matriz Φ. Para este propósito se hace uso del teorema circular de Gershgorin [**?**].

Teorema 2: Sea $A =\in \mathbb{C}^{m\times n}$ con columnas $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ ℓ_2 normalizadas. Para cada $i = \{1, 2, ..., n\}$ consideremos los círculos del plano complejo

$$R_i := \sum_{i \neq j} |\mathbf{A}^* \mathbf{A}| = \sum_{i \neq j} | < \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j > | \leq C_h(s-1) \tag{3.4}$$

donde

$$D_i = D(a_{ii}, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathbf{a}_i^\mathsf{T} \mathbf{a}_i| \leq R_i\} \tag{3.5}$$

A tales círculos se les llama *círculos de Gershgorin*. Cada círculo D_i tiene su centro en $\mathbf{a}_i^\mathsf{T} \mathbf{a}_i$ y su radio es R_i.

Definición 3: Sea λ un valor propio de A y sea $0 \neq x = (x_j)$ un vector propio asociado a λ. Llamemos x_i a la coordenada de **x** de mayor módulo. Claramente $|x_i| > 0$ pues en otro caso sería $x = 0$. Se verifica $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$, es decir

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i \;\; \forall i = 1, ..., n. \tag{3.6}$$

De forma equivalente $\sum_{i \neq j} a_{ij} x_j = \lambda x_i - a_{ii} x_i$ y dividiendo ambos miembros entre x_i y tomando módulos

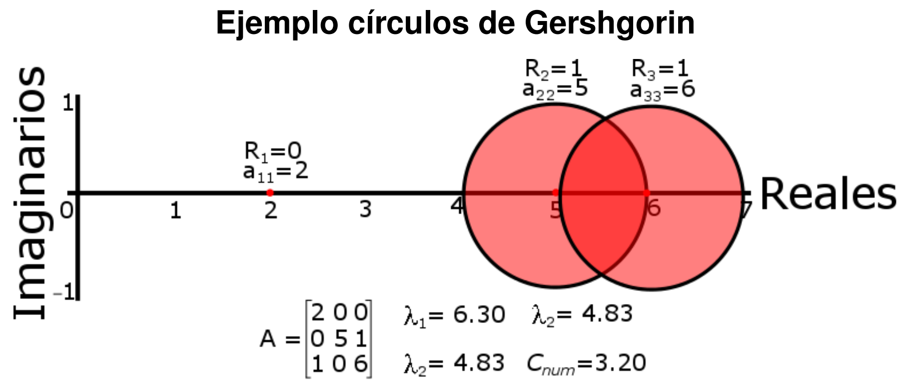
$$|\lambda - a_{ii}| = \frac{|\sum_{i \neq j} a_{ij} x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{i \neq j} \frac{|a_{ij} x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| = R_i. \tag{3.7}$$

Es decir, los valores propios de **A** est'an contenidos en la unión de circunferencias $\lambda \in D(a_{ii}, R_i)$. En la figura (3.1) se ilustra un ejemplo del cálculo de los círculos de Gershgorin asociados a una matriz arbitraria **A**.

Por lo tanto, para optimizar aperturas codificadas en CT que reduzcan el número de condición de la matriz $\mathbf{\Phi}$, se hace uso de las **Definiciones** 1-3 para establecer una relación directa entre los círculos de Gershgorin y el número de condición asociados a la matriz $\mathbf{\Phi}$.

Observación 1: Sean λ_i y $D(a_{ii}, R_i)$ los valores propios y círculos de Gershgorin asociados a la matriz **A**, respectivamente. Para todo $i = 1, ..., n$, se tiene que si

$$\lim_{R_i \to 0} |\lambda - a_{ii}| = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i \neq j} |a_{ii} - a_{jj}| \approx 0 \tag{3.8}$$



(a)

Figura 3.1: Ejemplo del cálculo de los círculos de Gershgorin asociados a la matriz **A**. Como se puede observar, los valores propios de **A** se encuentran contenidos en la unión de sus círculos de Gershgorin asociados.

entonces

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \rightarrow 1 \qquad \forall i \neq j \tag{3.9}$$

lo cual implica que el número de condición C_{num} de la matriz **A** tiende a 1.

Con base en la **Observación 1**, se establece que para reducir el número de condición C_{num} de la matriz Φ, se deben diseñar las aperturas codificadas con el fin de que se cumplan los criterios de la ecuación (3.8). Es decir, los radios R_i y la distancia entre los centros a_{ii} de los círculos de Gershgorin asociados a la matriz Φ deben tender a cero.

3.1. CÍRCULOS DE GERSHGORIN EN CT

Como se observa en las **Definiciones 1-3** y los **Teoremas 1-2**, la matriz de muestreo debe ser ℓ_2 normalizada en sus columnas. Sin embargo, la matriz de muestreo CT no cumple dicha condición. Por lo tanto, para poder hacer uso de las **Definiciones 1-3** y los **Teoremas 1-2**, es necesario modificar la ecuación 2.7 como

$$\mathbf{p} = \tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{f}} + \epsilon, \tag{3.10}$$

donde $\tilde{\Phi} = \Phi\mathbf{B}_1$ es una matriz con sus columnas ℓ_2 normalizadas, $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}_2\mathbf{f}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices diagonales con $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 = \mathbf{I}_{n\times n}$. La matriz $\mathbf{B}_1$ se puede expresar matemáticamente como

$$(B_1)_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{m-1}(\Phi_{k,i})^2}}, & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}. \tag{3.11}$$

para $\sqrt{\sum_{k=0}^{m-1}(\Phi_{k,i})^2} \neq 0$. Dado que, $\mathbf{B}_1$ es una matriz diagonal con elementos diferentes de cero en su diagonal principal y $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 = \mathbf{I}_{n\times n}$, entonces se tiene que $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_1^{-1}$.

Observación 2: sea $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ una imagen natural y $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices diagonales asociadas a $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tal que, $\boldsymbol{\Phi}\mathbf{B}_1$ es una matriz con sus columnas ℓ_2 normalizadas y $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 = \mathbf{I}_{n\times n}$. Para todo $i = \{0, ..., n-1\}$ y $j = \{0, ..., n-1\}$, se tiene que si

$$|(B_1)_{i,i} - (B_1)_{j,j}| \to 0 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1}(\Phi_{k,i})^2} \neq 0 \tag{3.12}$$

entonces

$$||\boldsymbol{\Psi}\mathbf{f}||_1 \to ||\boldsymbol{\Psi}\tilde{\mathbf{f}}||_1 \qquad \text{ó} \qquad ||\boldsymbol{\Psi}\mathbf{f}||_{TV} \to ||\boldsymbol{\Psi}\tilde{\mathbf{f}}||_{TV} \tag{3.13}$$

donde $\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ representa una base de representación arbitraria, por ejemplo, la base coseno 2D. La Ecuación 3.13 indica que siempre que se cumplan las condiciones expuestas en la Ecuación 3.12, al normalizar la matriz de muestreo $\boldsymbol{\Phi}$, la señal de interés $\tilde{\mathbf{f}}$ conserva sus propiedades de suavidad y escases inherentes en la imagen $\mathbf{f}$.

Con base en la Ecuación 3.10 y las **Observaciones 1-2**, se procede a analizar la estructura de la matriz $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathsf{T}}$ con el fin de determinar el comportamiento de los círculos de Gershgorin asociados a la matriz $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ en función de las aperturas codificadas. Para este propósito, se define la matriz $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{j_3}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{j_3})^{\mathsf{T}}$ para la j_3-ésima captura como

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{j_3}(\tilde{\boldsymbol{\Phi}}^{j_3})^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{0,0} & \mathbf{G}_{0,1} & \cdots & \mathbf{G}_{0,M_2-1} \\ \mathbf{G}_{1,0} & \mathbf{G}_{1,1} & \cdots & \mathbf{G}_{1,M_2-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{M_2-1,0} & \mathbf{G}_{M_2-1,1} & \cdots & \mathbf{G}_{M_2-1,M_2-1} \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

para

$$\mathbf{G}_{k,j} = \mathbf{C}_k^{j_3}\mathbf{W}_k\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{W}_k^{\mathsf{T}}(\mathbf{C}_j^{j_3})^{\mathsf{T}} = \mathbf{C}_k^{j_3}\mathbf{W}_k\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{W}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{C}_j^{j_3}, \tag{3.15}$$

y

$$\left(G_{k,j}^{j_3}\right)_{\iota_1,\iota_2} = \sum_{\iota_3=0}^{n-1}\left(\frac{(W_k^{j_3})_{\iota_1,\iota_3}(W_j^{j_3})_{\iota_2,\iota_3}(h_k^{j_3})_{\iota_1}(h_j^{j_3})_{\iota_2}}{\sqrt{\sum_{\iota_4=0}^{m-1}(W_k^{j_3})^2_{\iota_4,\iota_3}(h_k^{j_3})_{\iota_4}}\sqrt{\sum_{\iota_5=0}^{m-1}(W_j^{j_3})^2_{\iota_5,\iota_3}(h_j^{j_3})_{\iota_5}}}\right), \tag{3.16}$$

donde $\mathbf{G}_{k,j} \in \mathbb{R}^{M_1\times M_1}$, $k = \{0, ..., M_2 - 1\}$, $j = \{0, ..., M_2 - 1\}$, $j_3 = \{1, ..., M_3 - 1\}$, $\iota_1 = \{0, ..., M_1 - 1\}$ y $\iota_2 = \{0, ..., M_1 - 1\}$.

Observación 3: sea $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ una matriz arbitraria y R_j el j-ésimo radio de su j-ésimo círculo de Gershgorin asociado. Para todo $k = 0, ..., m$ e $j = 0, ..., m$, se tiene que si

$$G_{j,j} \neq 0 \qquad y \qquad R_j \to 0 \tag{3.17}$$

entonces

$$||\mathbf{G} - d\mathbf{I}_{m\times m}||_{\mathsf{F}} < \epsilon, \tag{3.18}$$

donde $\mathbf{I}_{m\times m} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es una matriz identidad y $d \in \mathbb{C}$ es una constante arbitraria.

Con base en las ecuaciones 3.14 -3.16, el **Teorema 2** y la **Observación 3**, se concluye que si la matriz $\tilde{\mathbf{\Phi}}^{j_3}(\tilde{\mathbf{\Phi}}^{j_3})^{\mathsf{T}}$ tiende a ser una diagonal, el radio de los círculos de Gershgorin asociados a $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ tienden a cero. Para lograr este propósito, se analizaron las matrices establecidas en las ecuaciones 3.14 -3.16 y se establecen las siguientes correspondencias que deben cumplir las matrices de la ecuación 3.14:

Caso 1: para $k = j$ y $\iota_1 = \iota_2$ se tiene que

$$\left(G_{k,k}^{j_3}\right)_{\iota_1,\iota_1} = \sum_{\iota_3=0}^{n-1}\left(\frac{(W_k^{j_3})^2_{\iota_1,\iota_3}(h_k^{j_3})_{\iota_1}}{\sum_{\iota_4=0}^{m-1}(W_k^{j_3})^2_{\iota_4,\iota_3}(h_k^{j_3})_{\iota_4}}\right) \neq 0. \tag{3.19}$$

Caso 2: para $k = j$ y $\iota_1 \neq \iota_2$ se tiene que

$$\left(G_{k,k}^{j_3}\right)_{\iota_1,\iota_2} = \sum_{\iota_3=0}^{n-1}\left(\frac{(W_k^{j_3})_{\iota_1,\iota_3}(W_k^{j_3})_{\iota_2,\iota_3}(h_k^{j_3})_{\iota_1}(h_k^{j_3})_{\iota_2}}{\sum_{\iota_4=0}^{m-1}(W_k^{j_3})^2_{\iota_4,\iota_3}(h_k^{j_3})_{\iota_4}}\right) = 0. \tag{3.20}$$

Caso 3: para $k \neq j$ y $\iota_1 \neq \iota_2$ se tiene que

$$\left(G_{k,j}^{j_3}\right)_{\iota_1,\iota_2} = \sum_{\iota_3=0}^{n-1}\left(\frac{(W_k^{j_3})_{\iota_1,\iota_3}(W_j^{j_3})_{\iota_2,\iota_3}(h_k^{j_3})_{\iota_1}(h_j^{j_3})_{\iota_2}}{\sqrt{\sum_{\iota_4=0}^{m-1}(W_k^{j_3})^2_{\iota_4,\iota_3}(h_k^{j_3})_{\iota_4}}\sqrt{\sum_{\iota_5=0}^{m-1}(W_j^{j_3})^2_{\iota_5,\iota_3}(h_j^{j_3})_{\iota_5}}}\right) \rightarrow 0, \tag{3.21}$$

Para que se cumplan los **Casos 1** y **2** (Ecuación 3.19-3.20) la matriz $\mathbf{G}_{k,k}$ debe ser de rango completo en sus filas, lo cual se cumple si se garantiza que en cada ángulo de visíon se muestrea una única vez cada pixel del objeto. En el caso específico de las matrices de CT, los **Casos 1** y **2** implican que las filas de la matriz $\mathbf{W}_j^{j_3}\mathbf{h}_j^{j_3}$ sean ortogonales entre ellas. Para analizar el **Caso 3**, se establece el siguiente problema de minimización

$$\text{mín}\left(\sum_{\iota_1\neq\iota_2, j\neq k}(G_{k,j}^{j_3})_{\iota_1,\iota_2}\right) \qquad \text{s.t.} \qquad (G_{k,k}^{j_3})_{\iota_1,\iota_1} \neq 0 \tag{3.22}$$

del cual se puede establecer que una solución óptima se encuentra cuando el total de proyecciones capturadas en cada ángulo de visión tiende a ser hmogéneo, lo cual permite reducir el número de intersecciones entre las trayectorias de los rayos-X.

Con base en el análisis matemático realizado en esta sección, se concluye que al optimizar aperturas codificadas con un enfoque de muestreo uniforme de los pixeles del objeto y las proyecciones, se garantiza el cumplimiento de los **Casos 1-3** y de la restricción establecida en la **Observación 2** y Ecuación 3.11. En la siguiente subsecciones se establecen una serie de criterios de optimizaci'on y el respectivo algoritmo para generar aperturas codificadas.

3.2. CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN PARA EL MUESTREO UNIFORME

Para obtener un muestreo uniforme de los pixeles del objeto, sin modificar la geometría de muestreo de la arquitectura de tomografía computarizada, es necesario diseñar las aperturas codificadas. Por lo tanto, se establece una función de optimización de aperturas codificadas compuesta por cuatro criterios de muestreo uniforme. Estos criterios buscan minimizar la varianza de las aperturas codificadas con respecto al total de elementos de paso en cada ángulo de visión $\sigma_1^2 \in \mathbb{R}$, el total de elementos de paso capturados en cada detector $\sigma_2^2 \in \mathbb{R}$, el total de elementos

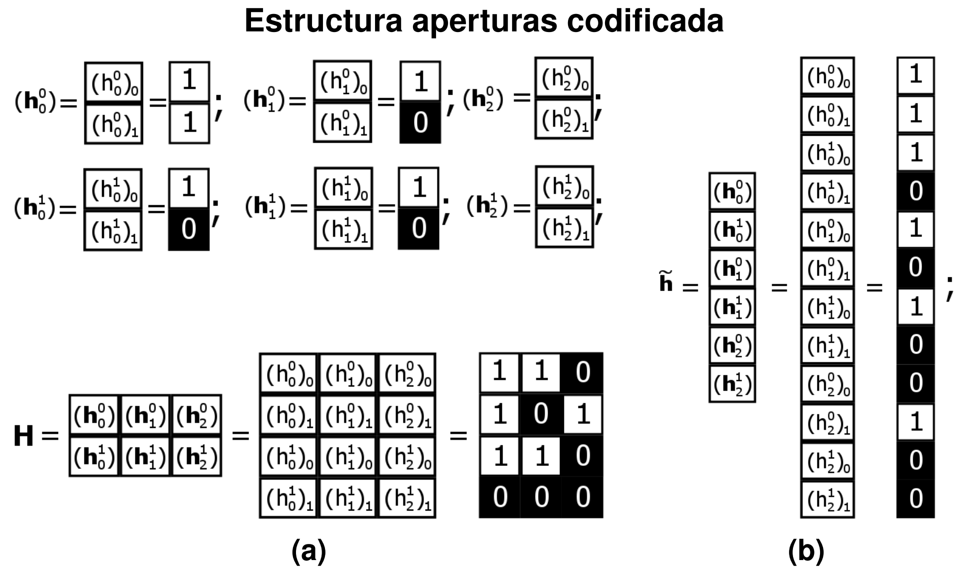


Figura 3.2: Ejemplo ilustrado de una apertura codificada (a) $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{M_1 M_3 \times M_2}$ y su versión vectorial (b) $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{M_1 M_2 M_3}$ con los parametros $M_1 = 2$, $M_2 = 3$, y $M_3 = 2$.

adquiridos en cada captura $\sigma_3^2 \in \mathbb{R}$, y el total del veces que cada pixel del objeto es muestreado $\sigma_4^2 \in \mathbb{R}$. Para este propósito, se establece la matriz

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} (\mathbf{h}_0^0) & (\mathbf{h}_1^0) & \cdots & (\mathbf{h}_{M_2-1}^0) \\ (\mathbf{h}_0^1) & (\mathbf{h}_1^1) & \cdots & (\mathbf{h}_{M_2-1}^1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{h}_0^{M_3-1}) & (\mathbf{h}_1^{M_3-1}) & \cdots & (\mathbf{h}_{M_2-1}^{M_3-1}), \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

y su versión vectorial

$$\tilde{\mathbf{h}} = [(\mathbf{h}_0^0)^\mathsf{T}, (\mathbf{h}_0^1)^\mathsf{T}, ..., (\mathbf{h}_{M_3-1}^0)^\mathsf{T}, (\mathbf{h}_1^0)^\mathsf{T}, (\mathbf{h}_1^1)^\mathsf{T}, ..., (\mathbf{h}_1^{M_3-1})^\mathsf{T}, ..., (\mathbf{h}_{M_2-1}^0)^\mathsf{T}, (\mathbf{h}_{M_2-1}^1)^\mathsf{T}, ..., (\mathbf{h}_{M_2-1}^{M_3-1})^\mathsf{T}]^\mathsf{T}. \tag{3.24}$$

En las figuras 3.2.(a)-3.2.(b) se establece un ejemplo ilustrado de la matriz **H** y su versión vectorial $\tilde{\mathbf{h}}$, respectivamente. Este ejemplo es usado a lo largo de la sección con el fin de ilustrarle al lector la intuición matemática usada para el desarrollo de los criterios 1-3 de muestreo uniforme propuestos. Para el desarrollo del criterio 4 se hace uso del ejemplo establecido en la figura 1.7 y las aperturas codificadas esta representadas como se definió en la ecuación (2.12). A continuación se establecen los cuatro criterios de muestreo uniforme:

- **Criterio 1** *muestreo uniforme en los ángulos de visión:* el total de proyecciones adquiridas en cada ángulo de visión debe ser aproximadamente el mismo. Para este propósito, lo primero es calcular el total de elementos de paso en cada ángulo de visión, lo cual, con base en la matriz **H**, se puede expresar matemáticamente como

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{M_1M_3}, \tag{3.25}$$

donde $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^{M_2}$ es un vector el cual su j_2-ésimo elemento corresponde al total de elementos de paso del j_2-ésimo ángulo de visión y $\mathbf{1}_{M_1M_3} \in \mathbb{R}^{M_1M_3}$ es un vector es un vector de longitud M_1M_3 con valores de 1 en todos sus elementos. Con base en la ecuación (3.25), la media del total de elementos de paso en los ángulos de visión se puede expresar como

$$\bar{\mu}_1 = \frac{1}{M_2}\mathbf{1}_{M_2}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{M_2}\mathbf{1}_{M_2}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{M_1M_3}, \tag{3.26}$$

donde $\bar{\mu}_1 \in \mathbb{R}$ representa la media de elementos de paso en los ángulos de visión y $\mathbf{1}_{M_2} \in \mathbb{R}^{M_2}$ es un vector de longitud M_2 con valores de 1 en todos sus elementos. En las figuras 3.3.(a)-(b) se puede apreciar un ejemplo del cálculo de las ecuaciones (3.25) y (3.26) en función de **H**, respectivamente. Las ecuaciones (3.25)-(3.26) se pueden reescribir como

$$(\mathbf{v}_1)_{j_2} = \sum_{j_3=0}^{M_3-1}\sum_{j_1=0}^{M_1-1}(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1} \tag{3.27}$$

$$\bar{\mu}_1 = \frac{1}{M_2}\sum_{j_2}^{M_2-1}\sum_{j_3=0}^{M_3-1}\sum_{j_1=0}^{M_1-1}(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1}, \tag{3.28}$$

respectivamente. Con base en las ecuaciones (3.27) y (3.28), podemos establecer la varianza del total de elementos de paso en cada ángulo de visión como

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{M_2}\sum_{j_2=0}^{M_2-1}\left(\sum_{j_3=0}^{M_3-1}\sum_{j_1=0}^{M_1-1}(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1} - \bar{\mu}_1\right)^2, \tag{3.29}$$

donde $\sigma_1^2 \in \mathbb{R}$. Con el fin de establecer un función de optimización que minimice una única variable $\tilde{\mathbf{h}}$, la ecuación (3.29) se reescribe en forma matricial como

$$\sigma_1^2 = \tau_1||(\mathbf{D}_1 - \mathbf{\Pi}_1)\tilde{\mathbf{h}}||_2^2, \tag{3.30}$$

para $\mathbf{\Pi}_1 = \frac{1}{M_2}\mathbf{1}_{M_2}\mathbf{1}_{M_2}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_1 \in \mathbb{R}^{M_2 \times M_1 m}$ es una matriz de reduccióny $\tau_1 = \frac{1}{M_2}$. Aquí, $\mathbf{D}_1 = \mathbf{I}_{M_2 \times M_2} \otimes \mathbf{1}_{M_1 M_3}^{\mathsf{T}}$, donde $\mathbf{I}_{M_2 \times M_2} \in \mathbb{R}^{M_2 \times M_2}$ es una matriz identidad y $\mathbf{1}_{M_1 M_3} \in \mathbb{R}^{M_1 M_3}$ es un vector de unos con longitud $M_1 M_3$.

- **Criterio 2** *aperturas codificadas complementarias entre capturas:* cuando $M_3 > 1$, para un ángulo de visión arbitrario, el conjunto de aperturas codificadas son diseñadas de tal manera que el total de elementos de paso en una posición espacial arbitraria debe ser aproximadamente la misma. Específicamente, el conjunto de aperturas codificadas son diseñadas de tal manera que se garantiza que en cada ángulo de visión no se muestrea más de una vez la misma proyección. Para este propósito, lo primero es calcular el total de elementos de paso para cada posición espacial en un ángulo de visión arbitrario, lo cual, con base en la matriz $\mathbf{H}$, se puede expresar matemáticamente como

$$\mathbf{V}_2 = (\mathbf{1}_{M_3}^{\mathsf{T}} \otimes \mathbf{I}_{M_1 \times M_1})\mathbf{H}, \tag{3.31}$$

donde $\mathbf{V}_2 \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$ es una matriz que contiene el total de elementos de paso para la j_1-ésima posición espacial en el j_2-ésimo ángulo de visión y $\mathbf{1}_{M_3} \in \mathbb{R}^{M_3}$ es un vector de unos con longitud M_3 y $\mathbf{I}_{M_1 \times M_1} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_1}$ es una matriz identidad. Con base en la ecuación (3.31), la media del total de elementos de paso en los ángulos de visión se puede expresar como

$$\bar{\mu}_2 = \frac{1}{M_1 M_2}\mathbf{1}_{M_2}^{\mathsf{T}}(\mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}_2)^{\mathsf{T}} = \frac{1}{M_1 M_2}\mathbf{1}_{M_2}^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}}((\mathbf{1}_{M_3}^{\mathsf{T}} \otimes \mathbf{I}_{M_1 \times M_1})\mathbf{H})\right)^{\mathsf{T}}, \tag{3.32}$$

donde $\bar{\mu}_2 \in \mathbb{R}$ representa la media de elementos de paso en cada posición

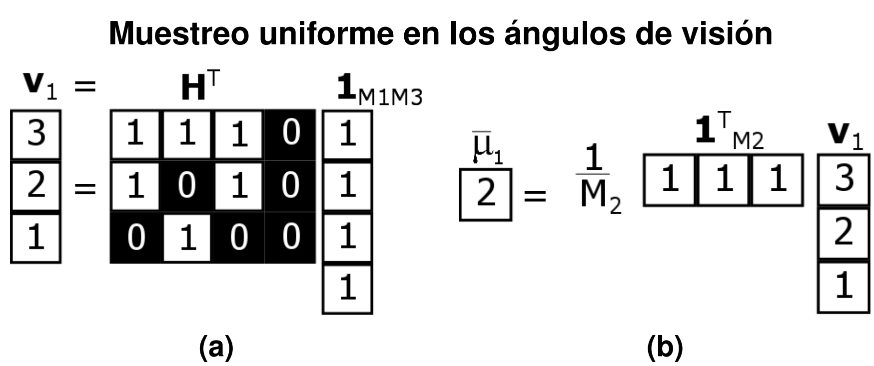


Figura 3.3: Cálculo del total de elementos de paso en cada ángulo de visión (a) $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^{M_2}$ y su media (b) $\bar{\mu}_1$.

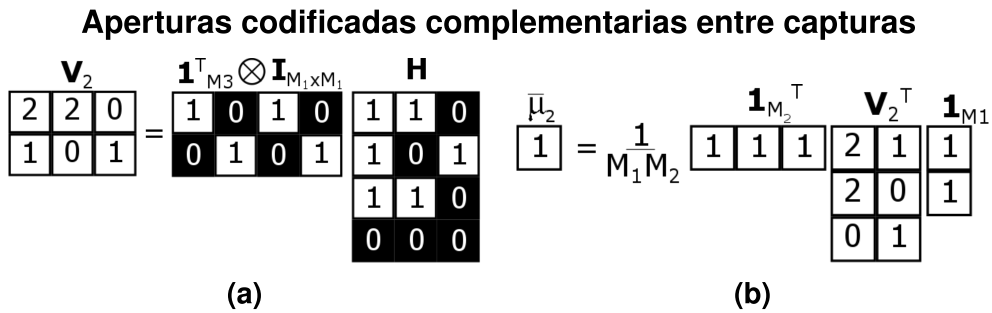


Figura 3.4: Cálculo del total de elementos de paso para cada posición espacial de los detectores (a) $\mathbf{V}_2 \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$ y su media (b) $\bar{\mu}_2$.

espacial. En las figuras 3.4.(a)-(b) se puede apreciar un ejemplo del cálculo de las ecuaciones (3.31) y (3.32) en función de **H**, respectivamente. La ecuaciones (3.31)-(3.32) se pueden reescribir como

$$((\mathbf{V}_2)_{j_2})_{j_1} = \sum_{j_3=0}^{M_3-1} (\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1}, \tag{3.33}$$

y

$$\bar{\mu}_2 = \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \sum_{j_2=0}^{M_2-1} \sum_{j_3=0}^{M_3-1} (\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1}, \tag{3.34}$$

respectivamente. Con base en las ecuaciones (3.33) y (3.34), podemos establecer la varianza del total de elementos de paso en cada posición espacial como

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{j_2=0}^{M_2-1} \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \left(\sum_{j_3=0}^{M_3-1} (\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1} - \bar{\mu}_2 \right)^2, \tag{3.35}$$

donde $\sigma_2^2 \in \mathbb{R}$. Con el fin de establecer un función de optimización que minimice una única variable $\tilde{\mathbf{h}}$, la ecuación (3.35) se reescribe en forma matricial como

$$\sigma_2^2 = \tau_2 ||(\mathbf{D}_2 - \mathbf{\Pi}_2)\tilde{\mathbf{h}}||_2^2, \tag{3.36}$$

para $\mathbf{\Pi}_2 = \frac{1}{M_1 M_2} \mathbf{1}_{M_1 M_2} \mathbf{1}_{M_1 M_2}^\mathsf{T} \mathbf{D}_2$, donde $\mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{M_1 M_2 \times M_1 m}$ es una matriz de reducción, $\mathbf{1}_{M_1 M_2} \in \mathbb{R}^{M_1 M_2}$ es una matriz de unos con longitud $M_1 M_2$ y $\tau_2 = \frac{1}{M_1 M_2}$. Aquí, $\mathbf{D}_2 = \mathbf{I}_{M_2 \times M_2} \otimes (\mathbf{1}_{M_3}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}_{M_1 \times M_1})$.

- **Criterio 3** *muestreo uniforme en las capturas:* el total de proyecciones adquiridas en cada captura debe ser aproximadamente el mismo. Para este propósito,

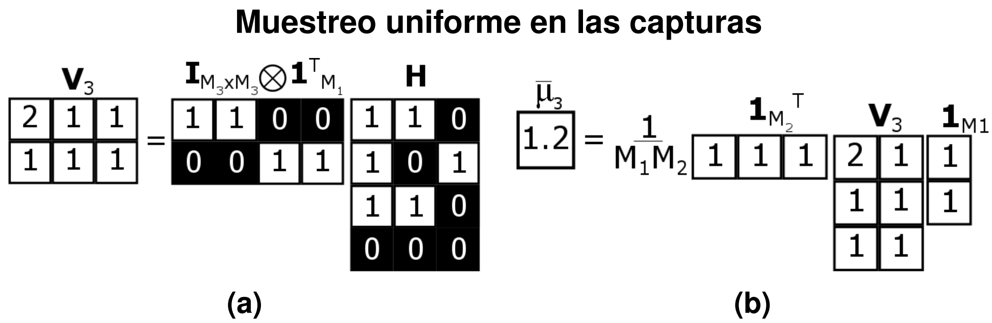


Figura 3.5: Cálculo del total de elementos de paso para cada captura (a) $\mathbf{V}_3 \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2}$ y su media (b) $\bar{\mu}_3$.

lo primero es calcular el total de elementos de paso para cada captura del tomografo, lo cual, con base en la matriz $\mathbf{H}$, se puede expresar matemáticamente como

$$\mathbf{V}_3 = (\mathbf{I}_{M_3 \times M_3} \otimes \mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}})\mathbf{H}, \tag{3.37}$$

donde $\mathbf{V}_3 \in \mathbb{R}^{M_3 \times M_2}$ es una matriz que contiene el total de elementos de paso para usados en cada captura del tomógrafo, $\mathbf{1}_{M_1} \in \mathbb{R}^{M_1}$ es un vector de unos con longitud M_1 y $\mathbf{I}_{M_3 \times M_3} \in \mathbb{R}^{M_3 \times M_3}$ es una matriz identidad. Con base en la ecuación (3.37), la media del total de elementos de paso en las capturas se puede expresar como

$$\bar{\mu}_3 = \frac{1}{M_2 M_3} \mathbf{1}_{M_2}^{\mathsf{T}} (\mathbf{1}_{M_3}^{\mathsf{T}} \mathbf{V}_3)^{\mathsf{T}} = \frac{1}{M_2 M_3} \mathbf{1}_{M_2}^{\mathsf{T}} \left(\mathbf{1}_{M_3}^{\mathsf{T}} ((\mathbf{I}_{M_3 \times M_3} \otimes \mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}})\mathbf{H}) \right)^{\mathsf{T}}, \tag{3.38}$$

donde $\bar{\mu}_3 \in \mathbb{R}$ representa la media de elementos de paso en captura. En las figuras 3.5.(a)-(b) se puede apreciar un ejemplo del cálculo de las ecuaciones (3.37) y (3.38) en función de $\mathbf{H}$, respectivamente. La ecuaciones (3.37)-(3.38) se pueden reescribir como

$$((\mathbf{V}_3)_{j_2}^{j_3}) = \sum_{j_1=0}^{M_1-1} (\mathbf{h}_{j_2}^{j_3})_{j_1}, \tag{3.39}$$

y

$$\bar{\mu}_3 = \frac{1}{M_2 M_3} \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \sum_{j_2=0}^{M_2-1} \sum_{j_3=0}^{M_3-1} (\mathbf{h}_{j_1})_{j_2}^{j_3}, \tag{3.40}$$

respectivamente. Con base en las ecuaciones (3.39) y (3.40), podemos establecer la varianza del total de elementos de paso en cada posición espacial como

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{M_2M_3}\sum_{j_2=0}^{M_2-1}\sum_{j_3=0}^{M_3-1}\left(\sum_{j_1=0}^{M_1-1}(\mathbf{h}_{j_1})_{j_2}^{j_3} - \bar{\mu}_3\right)^2. \tag{3.41}$$

Con el fin de establecer un función de optimización que minimice una única variable $\tilde{\mathbf{h}}$, la ecuación (3.41) se reescribe en forma matricial como

$$\sigma_3^2 = \tau_3||(\mathbf{D}_3 - \mathbf{\Pi}_3)\tilde{\mathbf{h}}||_2^2, \tag{3.42}$$

para $\mathbf{\Pi}_3 = \frac{1}{M_2M_3}\mathbf{1}_{M_2M_3}\mathbf{1}_{M_2M_3}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}_3$, donde $\mathbf{1}_m \in \mathbb{R}^m$ es un vector de unos con longitud m, $\mathbf{D}_3 \in \mathbb{R}^{M_2M_3\times M_1M_2M_3}$ es una matriz de reducción y $\tau_3 = \frac{1}{M_2M_3}$. Aquí, $\mathbf{D}_3 = \mathbf{I}_{M_2M_3\times M_2M_3} \otimes \mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}}$, donde $\mathbf{I}_{M_2M_3\times M_2M_3} \in \mathbb{R}^{M_2M_3\times M_2M_3}$ es una matriz identidad.

- **Criterio 4** *muestreo uniforme de los pixeles del objeto:* el total de veces que cada pixel del objeto es muestreado deber ser aproximadamente el mismo. Para este propósito, lo primero es calcular el total de veces que cada pixel del objeto es muestreado, lo cual, con base en las matrices **W** y **A**, se puede expresar matemáticamente como

$$\mathbf{V}_4 = (\mathbf{A}\mathbf{\Omega})^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{M_1M_2M_3}, \tag{3.43}$$

donde $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ es un vector que contiene el total de veces que cada pixel del objeto es muestreado, $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{M_1M_2\times n}$ es una versión binaria de la matriz **W**, **A** es la representación de la apertura codificada como se define en la ecuación (2.12) y $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ es un vector de longitud n con unos en todos sus elementos. Con base en la ecuación (3.43), la media del total de veces que cada pixel del objeto es muestreado se puede expresar como

$$\bar{\mu}_4 = \frac{1}{n}\mathbf{1}_n^{\mathsf{T}}\mathbf{V}_4 = \frac{1}{n}\mathbf{1}_n^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}\mathbf{\Omega})^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{M_1M_2M_3}, \tag{3.44}$$

donde $\bar{\mu}_4 \in \mathbb{R}$. En las figuras 3.6.(a)-(b) se puede apreciar un ejemplo del cálculo de las ecuaciones (3.43) y (3.44) en función de **A** y Ω, respectivamente. La ecuaciones (3.43)-(3.44) se pueden reescribir como

$$(\mathbf{V}_4)_i = \sum_{j_2=0}^{M_2-1}\sum_{j_3=0}^{M_3-1}\mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3} \circ \boldsymbol{\omega}_{j_2}^{i}\right) \tag{3.45}$$

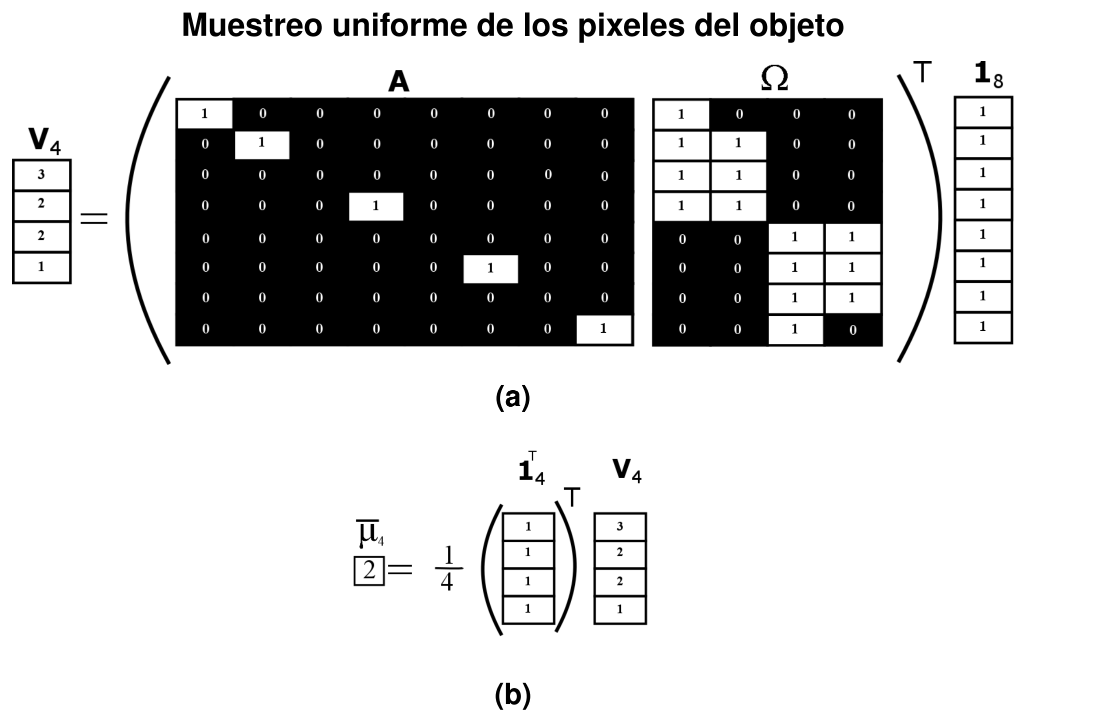


Figura 3.6: Calculo del total de veces que cada pixel del objeto es muestreado (a) $\mathbf{V}_4$ y la media $\bar{\mu}_4$.

y

$$\bar{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{M_2-1}\sum_{j_3=0}^{M_3-1}\mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3}\circ\boldsymbol{\omega}_{j_2}^{i}\right), \tag{3.46}$$

donde $\Omega = [\Omega_0^{\mathsf{T}}, ..., \Omega_{M_2-1}^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}}$ con $\Omega_{j_2} = [(\boldsymbol{\omega}^0)_{j_2}, ..., (\boldsymbol{\omega}^{n-1})_{j_2}]$ como la versión binaria de $\mathbf{W}_{j_2}$ (matriz que emula la geometría de muestreo en el j_2-ésimo ángulo de visión), y $\circ$ representa el producto Hadamard entre matrices. Con base en las ecuaciones (3.45) y (3.46), podemos establecer la varianza del total de veces que cada pixel del objeto de muestreado como

$$\sigma_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j_2=0}^{M_2-1}\sum_{j_3=0}^{M_3-1}\mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}}(\mathbf{h}_{j_2}^{j_3}\circ\boldsymbol{\omega}_{j_2}^{i}) - \bar{\mu}_4\right)^2. \tag{3.47}$$

La ecuación (3.47) puede ser expresada matricialmente como

$$\sigma_4^2 = \tau_4||(\mathbf{I}_{n\times n} - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^{\mathsf{T}})\Omega^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}_4^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_n||_2^2, \tag{3.48}$$

donde $\mathbf{D}_4 = \mathbf{I}_{n\times n}\otimes\mathbf{1}_{M_1M_2M_3}^{\mathsf{T}}$ y $\tau_4 = \frac{1}{b}$. A diferencia de los criterios 1-3, la versión matricial del criterio 4 esta en función de la matriz **A**, lo cual no permite establecer un problema de optimización que minimice una única variable.

3.3. FUNCIÓN Y ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN DE APERTURAS CODIFICADAS

Con base en los cuatro criterios descritos en (3.30)-(3.48), se establece una función de optimización para la generación de aperturas codificadas optimzas que permitan obtener medidas incoherentes mediante el uso de una estrategia de muestreo uniforme del objeto. Por lo tanto, las aperturas codificadas son diseñadas a partir de la siguiente función de optimización

$$\begin{aligned}\text{argmin}_{\tilde{\mathbf{h}},\mathbf{A}} & \tau_1||(\mathbf{D}_1-\mathbf{\Pi}_1)\tilde{\mathbf{h}}||_2^2+\tau_2||(\mathbf{D}_2-\mathbf{\Pi}_2)\tilde{\mathbf{h}}||_2^2+\tau_3||(\mathbf{D}_3-\mathbf{\Pi}_3)\tilde{\mathbf{h}}||_2^2 \\ & +\tau_4||(\mathbf{I}_{n\times n}-\tfrac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^{\mathsf{T}})\mathbf{\Omega}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{D}_4^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_n||_2^2+||\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{h}}-\alpha||_2^2,\end{aligned} \tag{3.49}$$

para $\tau_1=\frac{1}{M_2}$, $\tau_2=\frac{1}{M_1M_2}$, $\tau_3=\frac{1}{m}$, $\tau_4=\frac{1}{b}$, donde $\alpha\in\mathbb{N}$ representa el total de elementos de paso en la apertura codificada y $||\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{h}}-\alpha||_2^2$ es un término de optimización que garantiza que la apertura codificada posea una determinada cantidad de elementos de paso. Sin embargo, el problema de optimizacíon establecido en 3.49 requiere la minimización de las dos variables $\tilde{\mathbf{h}}$ y **A**. Con el fin de establecer un problema de optimización en función de una única variable de optimización $\tilde{\mathbf{h}}$, se establece un criterio de optimización equivalente al de la ecuación 3.48. Para establecer este criterio, primero se realizó un análisis de la geometría de muestreo CT con aperturas codificadas. En dicho análisis se encontró que el total de veces que cada pixel del objeto es muestreado en un ángulo de visión arbitrario puede ser establecido a partir de la distribución de los elementos de paso de la apertura codificada, como se puede observar en la figura (3.7). Es decir, si los elementos de paso en la apertura codificada están distribuidos de tal manera que mantienen una distancia contante entre ellos, se garantiza un muestreo uniforme de los pixeles del objeto en cada ángulo de visión. Para este propósito, se diseña un filtro $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{e\times e\times e}$, como se ilustra en la figura (3.8), con el fin de crear la matriz $\Xi\in\mathbb{R}^{m\times m}$, la cual al multiplicarla por la apertura codificada $\tilde{\mathbf{h}}$ nos indica la concentración de elementos de paso en cada posición de la apertura codificada con respecto a un vecindario cubico de tamaño

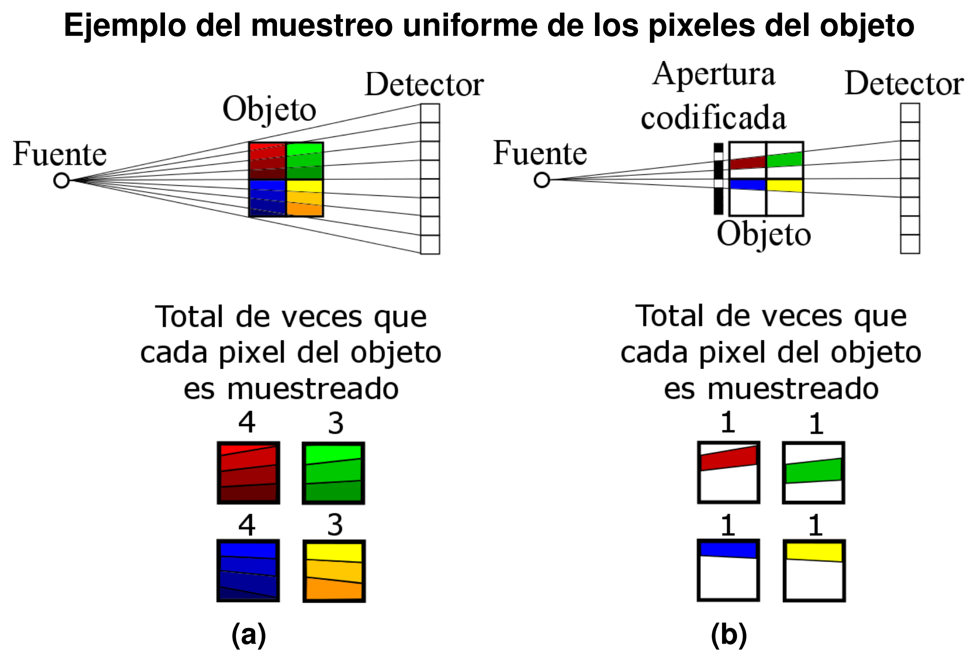


Figura 3.7: Ejemplo del total de veces que cada pixel del objeto es muestreado en una arquitectura CT (a) sin y (b) con aperturas codificadas.

$e \times e \times e$ con $e \in \mathbb{N}$. Con base en el filtro Ξ, la ecuación (3.49) se reescribe como

$$\begin{array}{c} \arg\min_{\tilde{\mathbf{h}}} \tau_1||(\mathbf{D}_1 - \bar{\Pi}_1)\tilde{\mathbf{h}}||_2^2 + \tau_2||(\mathbf{D}_2 - \bar{\Pi}_2)\tilde{\mathbf{h}}||_2^2 + \\ \tau_3||(\mathbf{D}_3 - \bar{\Pi}_3)\tilde{\mathbf{h}}||_2^2 + \tau_4||\Xi\tilde{\mathbf{h}}||_2^2 + ||\mathbf{1}_m^T\tilde{\mathbf{h}} - \alpha||_2^2 \end{array}. \tag{3.50}$$

Algoritmo 2 Optimización de aperturas codificadas para una arquitectura CT con un único detector

Entrada: $M_1 \in \mathbb{N}$, $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_3 \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}$Resultado: $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{UVK}$
1: $\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2 \times M_3}$ **for hacer**$\iota = 1$ to α 2: $\mathbf{h} \leftarrow$ Vectorized version of $\mathbf{H}$ 3: $\gamma_1 = (\mathbf{D}_1\mathbf{h}) \otimes \mathbf{1}_{UK}$ 4: $\gamma_2 = (\mathbf{I}_{V\times V} \otimes (\mathbf{1}_k \otimes \mathbf{I}_{U\times U}))\mathbf{D}_2\mathbf{h}$ 5: $\gamma_3 = (\mathbf{D}_3\mathbf{h}) \otimes \mathbf{1}_U$ 6: $\gamma_4 = \Xi\mathbf{h}$ 7: $\gamma = \frac{\gamma_1}{\text{Sup}(\gamma_1)} + \frac{\gamma_2}{\text{Sup}(\gamma_2)} + \frac{\gamma_3}{\text{Sup}(\gamma_3)} + \frac{\gamma_4}{\text{Sup}(\gamma_4)} + \text{Sup}(\gamma)\mathbf{h}$ 8: $\Gamma \in \mathbb{R}^{U\times K\times V} \leftarrow$ Matrix version of γ 9: $s^* = \{s|\Gamma_s = \text{Inf}(\Gamma), s \subseteq S\}$ 10: $z \leftarrow$ Chooses randomly a tuple of s^*
11: $H_z = 1$ **fin for**

Para obtener aperturas codificadas que satisfagan el problema de optimizaci'on establecido en la ecuación (3.50), se propone el Algoritmo 2, el cual, en cada iteraci'on agrega un único elemento de paso. Específicamente, en la línea 1 del Algoritmo 2 se inicializa un cubo de ceros al cual iterativamente se le van a agregar

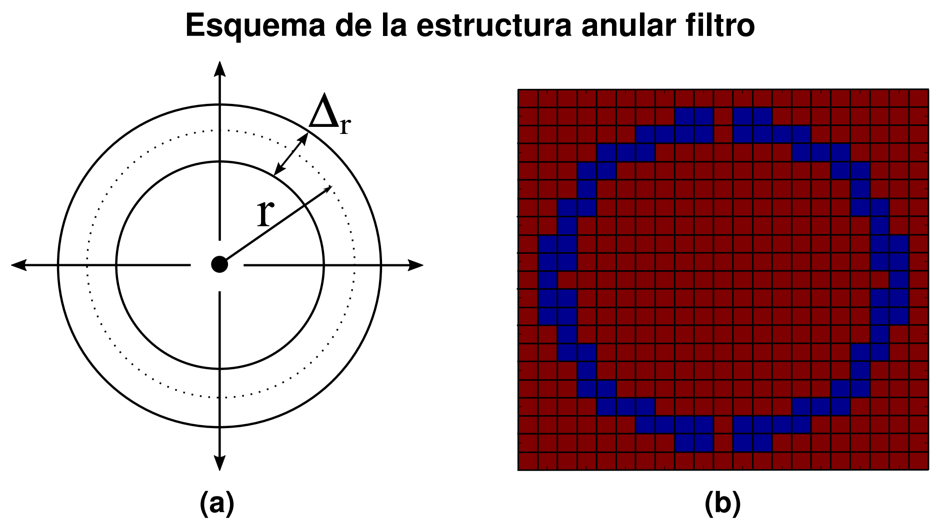


Figura 3.8: (a) Esquema de la estructura anular del filtro. (b) Ejemplo de un filtro con estructura anular con $r = 9$ y $\Delta_r = 1$. Aquí, los valores 0 y 1 son representados por los pixeles azul y rojo, respectivamente.

$\alpha \in \mathbb{N}$ elementos de paso. Las posiciones en las cuales se agregan los elementos de paso son seleccionados a partir de la estimación de una matriz de pesos $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{M_1 \times M_2 \times M_3}$ en función de la apertura codificada $\tilde{\mathbf{h}}$. La matriz $\mathbf{\Gamma}$ es calculada en la línea 8 y está compuesta por los cuatro criterios de optimización propuestos en la sección anterior, muestreo uniforme en los ángulos de visión (línea 3), aperturas codificadas complementarias (línea 4), muestreo uniforme en las capturas (línea 5), y muestreo uniforme de los pixeles del objeto a partir del uso de filtros radiales (línea 6). Seguidamente, en la línea 9 se calcula el conjunto de posiciones espaciales que concuerden con el ínfimo de la matriz de pesos $\mathbf{\Gamma}$, y a partir de este conjunto se selecciona aleatoriamente una posición espacial para agregar el elemento de paso 1. Es importante aclarar que la matriz de pesos es calculada en cada iteración del algoritmo con base en los criterios de muestreo uniforme y en la apertura codificada. Además, dado a la inicialización con una apertura codificada con elementos ceros en todas sus posiciones, la selección aleatoria de las posiciones de los ínfimos en la matriz de pesos, y la cantidad establecida de elementos de paso agregados, la estructura de las aperturas codificadas generadas por el algoritmo propuesto tienen una baja probabilidad de repetirse.

3.4. ALGORITMO DE RECONSTRUCIÓN

Para el desarrollo de esta tesis de maestría se hace uso del Algoritmo 1, el cual fue previamente estudiado en la sección 1.5. En este algoritmo es importante tener en cuenta que en la línea 5, se establece la inversa de la matriz $\left(\mathbf{I}+\Phi^{\mathsf{T}}\Phi\right)=\mathbf{E}^{\mathsf{T}}\mathbf{E}$ con $\mathbf{E}=[\mathbf{I}^{\mathsf{T}},\Phi^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}}$, dado que $\mathbf{E}$ es una matriz con columnas linealmente independientes o comúnmente conocido en inglés como *full colunm rank*, lo cual garantiza que existe la inversa de $\mathbf{E}^{\mathsf{T}}\mathbf{E}$. Sin embargo, esta inversión plantea una alta complejidad computacional en problemas donde $\Phi\in\mathbb{R}^{m\times n}$ con $m\ll n$. Por lo tanto, para este trabajo se propone una modificación del algoritmo C-SALSA mediante el uso del lema de Sherman-Morrison-Woodbury (SMW) para inversión de matrices, con lo cual la línea 5 del Algoritmo 1 se puede rescribir como

$$\left(\rho_c\mathbf{I}+\Phi^{\mathsf{T}}\Phi\right)^{-1}\mathbf{r}_k=\left(\frac{1}{\rho_c}\mathbf{I}_{n\times n}-\frac{1}{\rho_c}\Phi^{\mathsf{T}}\left(\Phi\Phi^{\mathsf{T}}+\rho_c\mathbf{I}_{m\times m}\right)^{-1}\Phi\right)\mathbf{r}_k, \tag{3.51}$$

donde $\rho\in\mathbb{R}_+$ es un parametro arbitrario, $\mathbf{I}_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{I}_{m\times m}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ son matrices identidad. La modificación del algoritmo C-SALSA se puede apreciar en Algoritmo 3.

Algoritmo 3 Algoritmo C-SALSA usando el lema SMW para la inversión de matrices.

Entrada: $\mu_c>0$, $\rho_c>0$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$, $\Phi\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $Iter\in\mathbb{N}$ Resultado: $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$
1: $\mathbf{v}_0^{(1)}=\mathbf{d}_0^{(1)}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$
2: $\mathbf{v}_0^{(2)}=\mathbf{d}_0^{(2)}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^m$
for $k=1$ hasta $Iter$ **hacer**
4: $\mathbf{r}=\mathbf{v}_0^{(1)}+\mathbf{d}_0^{(1)}+\Phi^{\mathsf{T}}(\mathbf{v}_0^{(2)}+\mathbf{d}_0^{(2)})$
5: $\mathbf{u}_{k+1}=\left(\frac{1}{\rho_c}\mathbf{I}_{n\times n}-\frac{1}{\rho_c}\Phi^{\mathsf{T}}\left(\Phi\Phi^{\mathsf{T}}+\rho_c\mathbf{I}_{m\times m}\right)^{-1}\Phi\right)\mathbf{r}_k$
6: $\mathbf{v}_{k+1}^{(1)}=\Psi_{\phi/\mu_c}\left(\mathbf{u}_{k+1}-\mathbf{d}_k^{(1)}\right)$
7: $\mathbf{v}_{k+1}^{(2)}=\Psi_{\iota_{E(\epsilon,\mathbf{I},\mathbf{y})}}\left(\Phi\mathbf{u}_{k+1}-\mathbf{d}_k^{(2)}\right)$
8: $\mathbf{d}_{k+1}^{(1)}=\mathbf{d}_k^{(1)}-\mathbf{u}_{k+1}+\mathbf{v}_{k+1}^{(1)}$
9: $\mathbf{d}_{k+1}^{(2)}=\mathbf{d}_k^{(2)}-\Phi\mathbf{u}_{k+1}+\mathbf{v}_{k+1}^{(2)}$
10: $k=k+1$
fin for

Capítulo 4
SIMULACIONES Y RESULTADOS

Se realizaron simulaciones para mostrar el rendimiento de los diseños de aperturas codificadas para la reconstrucción de imágenes de tomografía computarizada en una arquitectura CT con haz de rayos-X en abanico. Además, se determinó también la transmitancia óptima y el número mínimo de proyecciones requeridas para cada conjunto de aperturas codificadas. Para el desarrollo de este trabajo se hace uso de 12 imágenes reales de tomografía computarizada. Estas imágenes contienen información de la estructura interna de un tórax humano y poseen un tamaño espacial de 128×128 y pueden ser observadas en la figura 4.1. El rendimiento de las aperturas codificadas se midió con la métrica (Peak Signal to Noise Ratio) razón pico señal a ruido (PSNR, por sus siglas en inglés). Específicamente, la métrica $PSNR$ se puede definir matemáticamente como

$$PSNR = 20\text{log}_{10}\frac{|\text{max}(\mathbf{x})|}{\sqrt{||\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}||_2^2}}, \tag{4.1}$$

donde **x** representa la imagen original, $\hat{\mathbf{x}}$ la imagen reconstruida, y max$(.)$ es una función que retorna el valor máximo de **x**. Además, el rendimiento de las aperturas codificadas también es medido en función del nivel de ruido agregado en las proyecciones (SNR, por siglas en inglés). Específicamente, el nivel de ruido en la señal se puede calcular por la función

$$SNR = 10\text{log}_{10}\left(\frac{\sigma_g^2}{\sigma_n^2}\right), \tag{4.2}$$

donde σ_g^2 es la varianza de las proyecciones **p**, y σ_n^2 es la varianza del ruido. En este trabajo se usan tres niveles de ruido $SNR = \{10, 15, 20\}$ [dB], en el cual 10 [dB] es el nivel más alto de ruido y 20 [dB] el más bajo. Para la reconstrucción de imágenes CT a partir de proyecciones de rayos-X capturadas en una arquitectura CT con múltiples ángulos de visión, haz de rayos-X en abanico, apertura codificada y un arreglo unidimensional de detectores o un único detector, se hace uso del Algoritmo

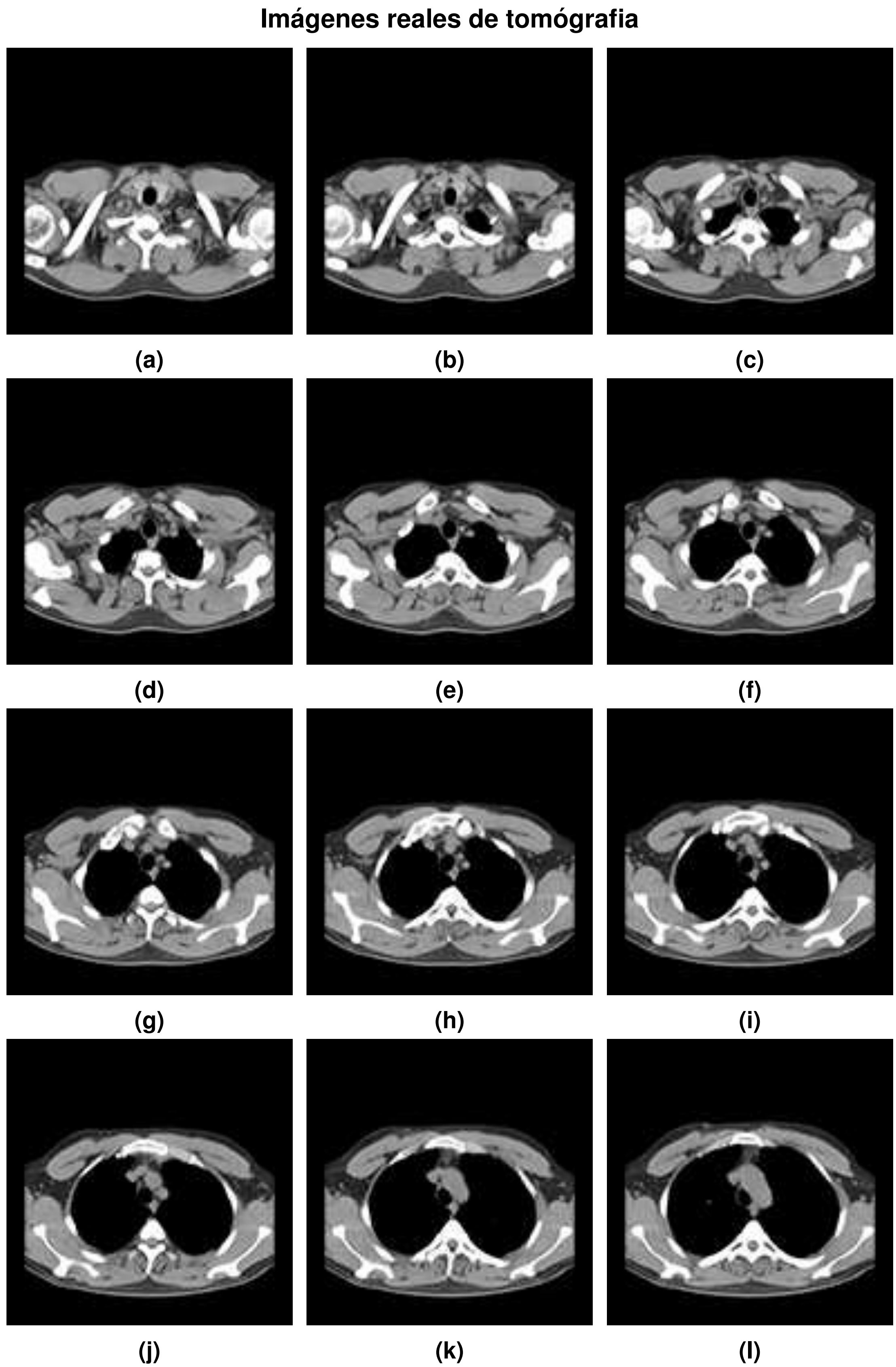


Figura 4.1: Imágenes reales de tomografía computarizada que contienen información de la estructura interna de un tórax humano.

3. Todos los experimentos se realizaron usando el software Matlab 2015a, sobre un procesador Intel Core i7-4790 3.6 GHz con 32 GB de memoria RAM. Los resultados presentados son el promedio de 100 realizaciones para cada caso.

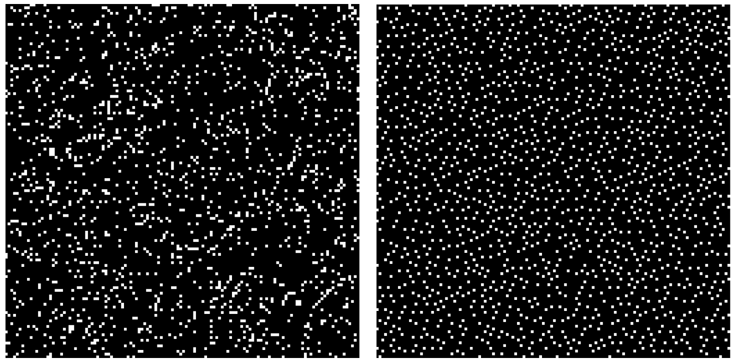
4.1. MATRIZ DE MUESTREO EN CT

Para crear la matriz **W** que representa la geometría de muestreo en una arquitectura de CT con haz de rayos-X en abanico, se hace uso de la herramienta ASTRA (por sus siglas en inglés *All Scale Tomographic Reconstruction Antwerp*)[22]-[21]. El desempeño de la herramienta ASTRA con respecto a la implementación de un tomógrafo real ha sido validado en varios trabajos de investigación, entre los cuales resaltan [8]-[13]. En este trabajo se hace uso de los parámetros establecidos en [13], en el cual se analiza estrategias de muestreo compresivo en CT mediante el uso de aperturas codificadas generadas por una función aleatoria. En [13] se validaron los parámetros establecidos para la creación de matrices de muestreo mediante el uso la herramienta ASTRA. Esta validación fue desarrollado mediante la captura de proyecciones compresas en un tomógrafo real y su posterior reconstrucción usando dichas matrices. Específicamente, los parámetros usados en este trabajo para crear la matriz **W** son: tamaño de cada detector $0{,}377[mm]$, distancia fuente-objeto $484[mm]$, distancia objeto-detector $290[mm]$, número de detectores $M_1 = 512$, y tamaño del objeto $N_1 = N_2 = 128$. El total de ángulos de visión M_2 y capturas por ángulo M_3 varia con respecto al nivel de compresión deseado y la arquitectura.

4.2. APERTURAS CODIFICADAS

En esta sección se analizan las aperturas codificadas no diseñadas (Figura 4.2.a) y optimizadas (Figura 4.2.b) para tres niveles de compresión y para las dos arquitecturas presentadas en la Figura 2.1(b)-(c). Específicamente, se analizan las aperturas codificadas en función de los cuatros criterios de muestreo uniforme establecidos en la sección 3. En las Tablas 4.1 y 4.2 se resumen los valores numéricos obtenidos en los cuatro criterios de muestreo uniforme para aperturas codificadas en una arquitectura CT con único detector y un arreglo unidimensional de detectores, respectivamente. En estas tablas se puede observar que las aperturas generadas por el Algoritmo 2 obtienen una varianza máxima de $\sigma_4^2 = 48{,}91$ en contraste por la varianza máxima obtenida por los no diseñados $\sigma_4^2 = 851{,}47$. En el criterio 4 se

Aperturas aleatorias y optimizadas



(a) (b)

Figura 4.2: Ejemplo de la distribución de una apertura codificada generada por una función aleatorio (a) y optimizada (b).

Análisis criterios de muestreo uniforme en arquitectura con un único detector

Compresión $c_{\%}$	Codigo	Criterio 1 σ_1^2	Criterio 2 σ_2^2	Criterio 3 σ_3^2	Criterio 4 σ_4^2
0	Aleatorio	493.79	0.99	3.92	851.47
	Diseñado	0.5	0.002	0.0059	48.91
0.25	Aleatorio	381.14	0.73	3.899	619.51
	Diseñado	0	0.188	0	165.37
0.5	Aleatorio	244.82	0.49	3.91	44.36
	Diseñado	0	0.25	0	13.65

Tabla 4.1: Análisis de los cuatro criterios de muestreo uniforme para aperturas codificadas aleatorias y diseñadas para una arquitectura CT con un único detector.

estableció que si los elementos de paso en las aperturas codificadas eran equidistantes entre ellos, se garantizaba una mayor uniformidad en el muestreo de los pixeles del objeto. El cumplimiento de este criterio se puede evidenciar en las Tablas 4.1 y 4.2, en las cuales la varianza del total de veces que cada pixel del objeto es muestreado en las aperturas diseñas es menor en comparación al obtenido por las no diseñadas. En las Figuras 4.3 y 4.4, se ilustra el total de veces que cada pixel del objeto es muestreado en las arquitecturas CT con un único detector y con arreglo unidimensional de detectores, respectivamente. En estas figuras, la columna izquierda representa las aperturas no diseñadas y la derecha las diseñadas. En dichas figuras se puede apreciar de manera visual que las aperturas diseñadas obtienen un muestreo más uniforme de los pixeles del objeto en contraste al muestreo obtenido por las aperturas no diseñadas.

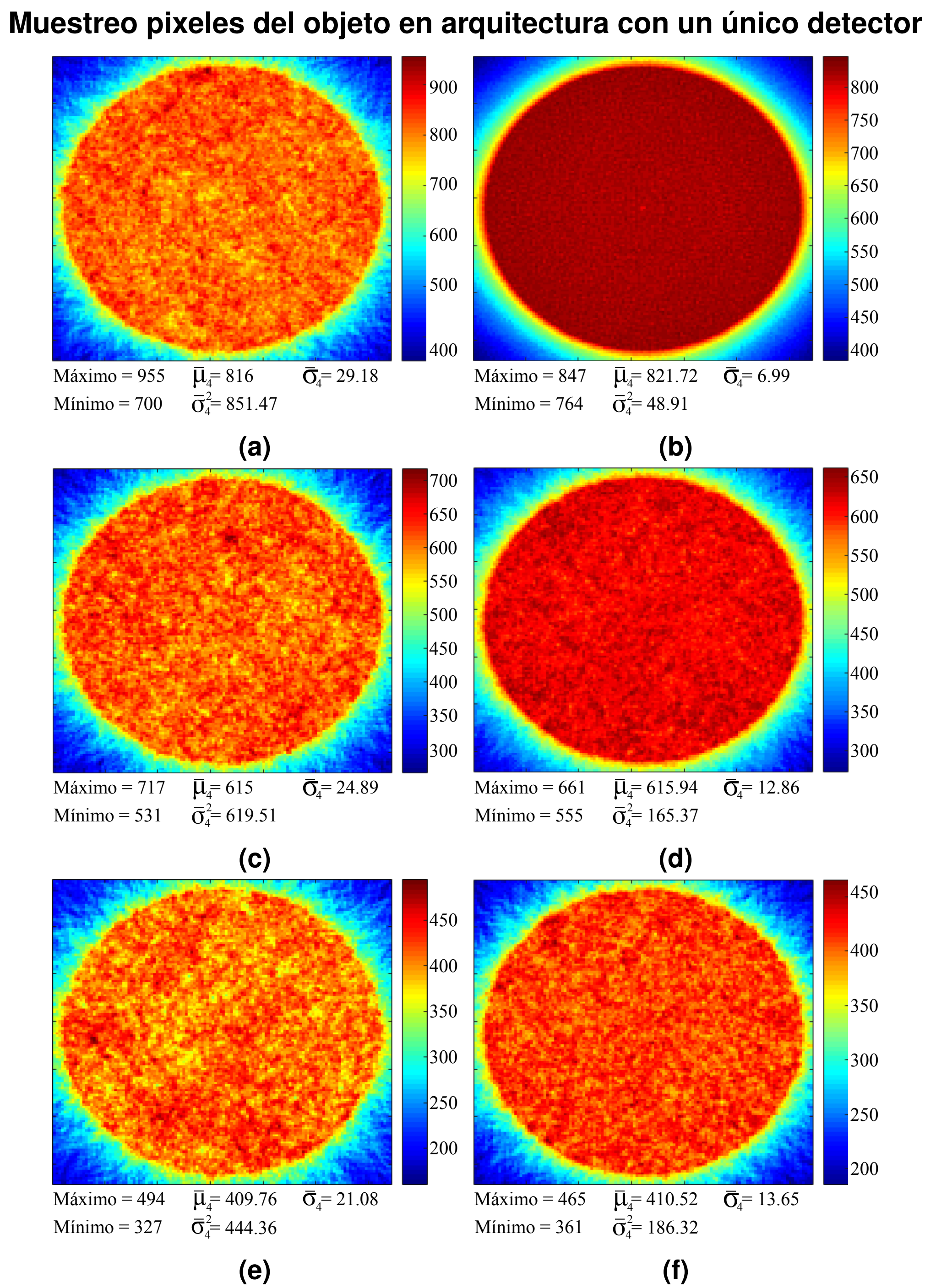


Figura 4.3: Total de veces que cada pixel del objeto es muestreado en una arquitectura CT con un único detector mediante el uso de aperturas codificadas aleatorias (columna izquierda) y diseñadas (columna derecha). Este análisis es realizada para aperturas con un nivel de compresión de 0 (primera fila), 0.25 (segunda columna) y 0.5 (tercera columna).

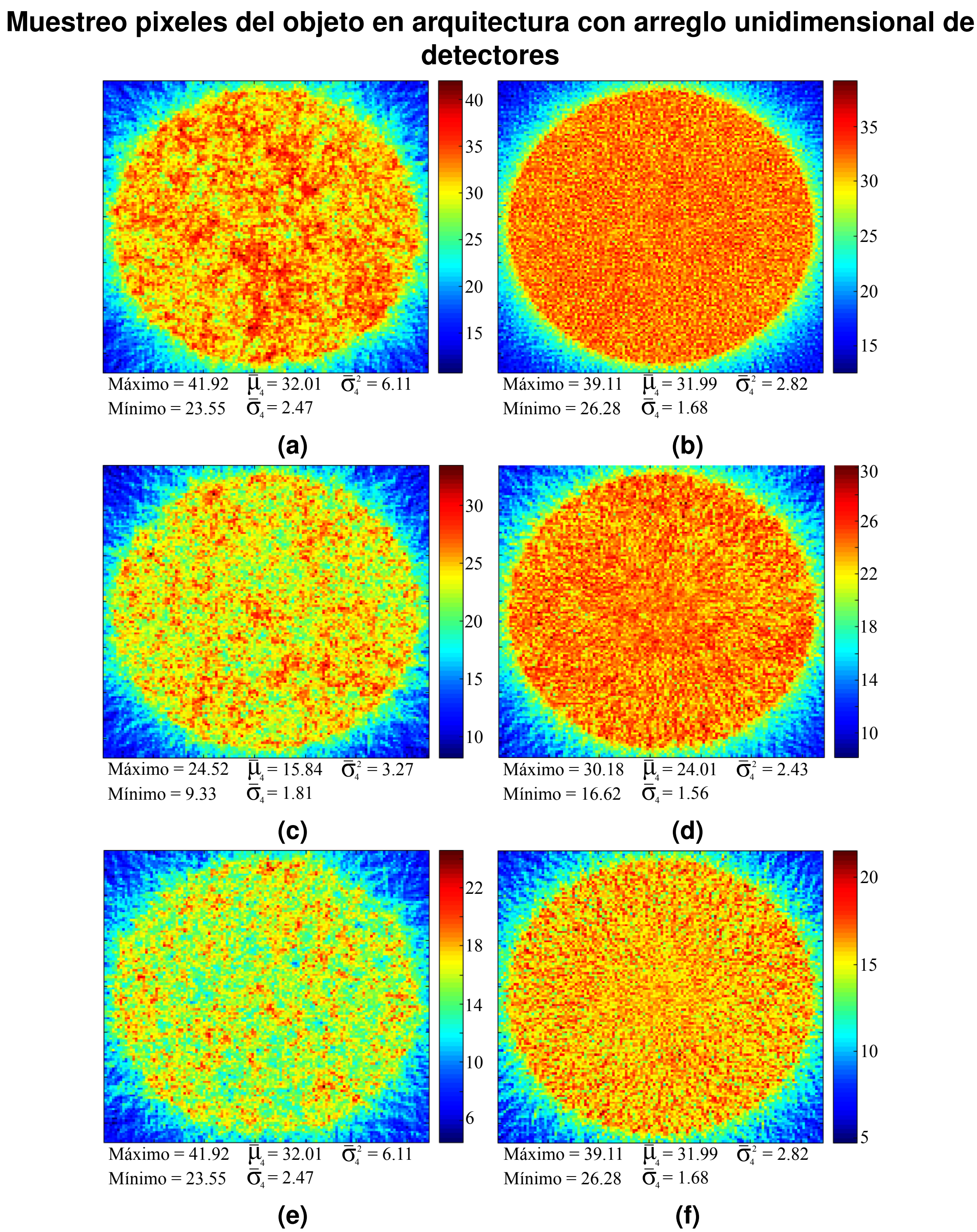


Figura 4.4: Total de veces que cada pixel del objeto es muestreado en una arquitectura CT con un arreglo unidimensional de detectores mediante el uso de aperturas codificadas aleatorias (columna izquierda) y diseñadas (columna derecha). Este análisis es realizada para aperturas con un nivel de compresión de 0 (primera fila), 0.25 (segunda columna) y 0.5 (tercera columna).

Análisis criterios de muestreo uniforme en arquitectura con arreglo unidimensional de detectores

Compresión $c_{\%}$	Codigo	Criterio 1 σ_1^2	Criterio 2 σ_2^2	Criterio 3 σ_3^2	Criterio 4 σ_4^2
0	Aleatorio	64.10	0	64.10	2.47
	Diseñado	1.65	0	1.65	1.68
0.25	Aleatorio	43.14	0	43.14	1.81
	Diseñado	0.15	0	0.15	1.56
0.5	Aleatorio	29.10	0	29.10	2.47
	Diseñado	0.53	0	0.53	1.68

Tabla 4.2: Análisis de los cuatro criterios de muestreo uniforme para aperturas codificadas aleatorias y diseñadas para una arquitectura CT con un arreglo unidimensional de detectores.

Luego de garantizar que las aperturas codificadas diseñadas cumplen los cuatro criterios de muestreo uniforme, se procede a realizar el análisis de los círculos de Gershgorin asociados a la matriz de muestreo Φ que se genera a partir de estas aperturas. Este análisis se ilustra en las Figuras 4.5 y 4.6 para la arquitectura CT con un único detector y un arreglo unidimensional de detectores, respectivamente. Las figuras incluye el número de condición C_{num}, los centros de los círculos de Gershgorin, el radio R_i mayor y los valores propios λ_i de la matriz Φ en función de las aperturas codificadas. Como se puede apreciar en estas figuras, los números de condición obtenidos por las matrices Φ generadas a partir de las aperturas diseñadas es mucho menor al obtenido por las aperturas no diseñadas. Además, tanto los radios R_i como la distancia entre los centros de los círculos tienden a disminuir al usar las aperturas codificadas diseñadas. Estos resultados, indican que el número de condición de la matriz Φ está directamente relacionado a sus círculos de Gershgorin.

4.3. AN'ALISIS DE LOS PAR'AMETROS DE MUESTREO EN UNA ARQUITECTURA CT CON UN ARREGLO UNIDIMENSIONAL DE DETECTORES

La relación de compresión en las arquitecturas CT con un arreglo unidimensional de detectores es inversamente proporcional al total de elementos de paso en la apertura codificada, lo cual se puede expresar como $c_{\%} = 1 - \sum_{j2=0}^{M_2} \mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}} \mathbf{c}_{j_2}/(n)$.

Círculos de Gershgorin asociados a la arquitectura CT con un único detector

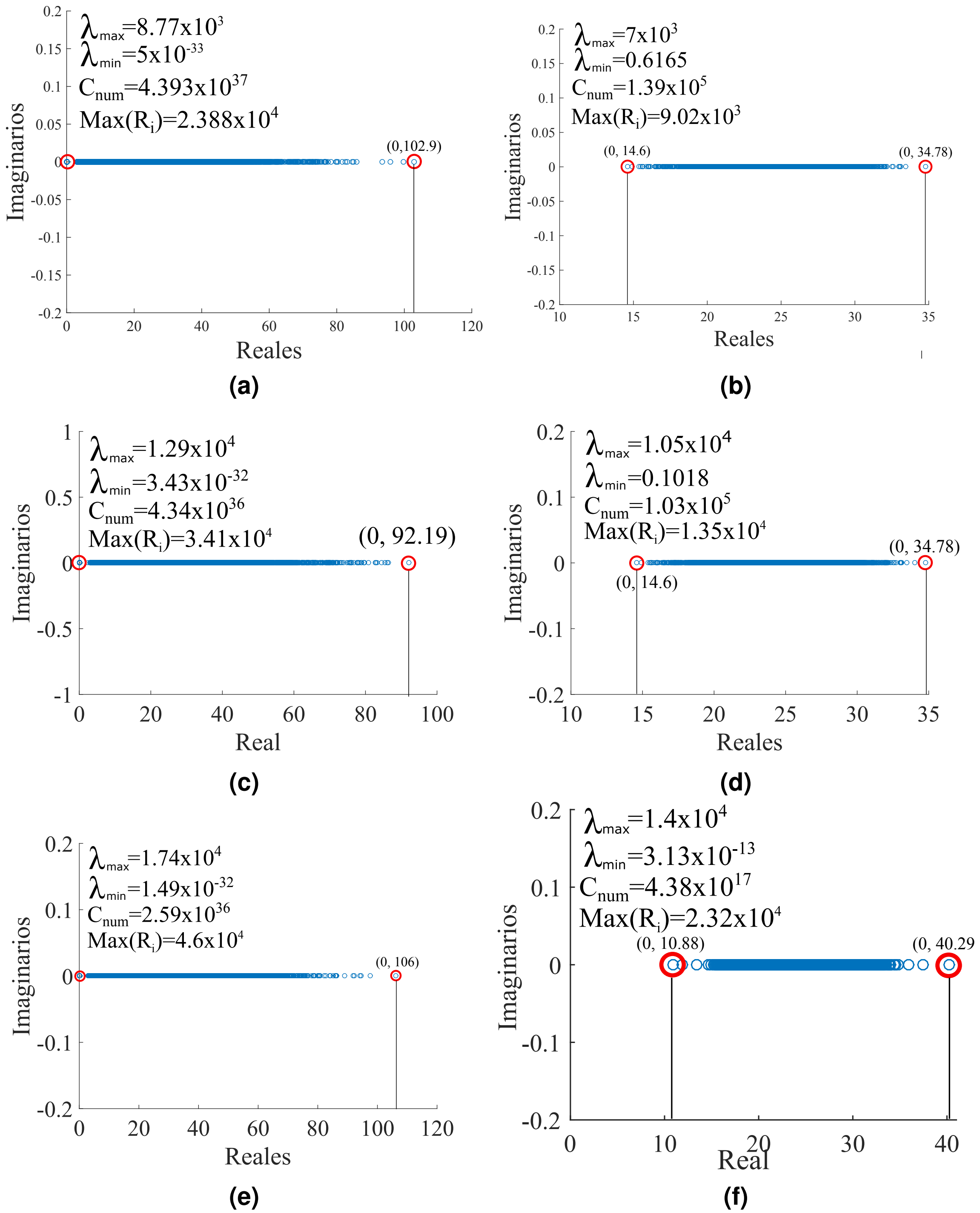


Figura 4.5: Análisis de los círculos de Gershgoring asociados a la matriz de muestreo en una arquitectura CT con un único detector $\mathbf{\Phi}$, en función de las aperturas codificadas aleatorias (columna izquierda) y diseñadas (columna derecha). Se analiza para los niveles de compresión 0 (fila 1), $0{,}25$ (fila 2) y $0{,}5$ (fila 3).

Círculos de Gershgorin asociados a la arquitectura CT con arreglo unidimensional de detectores

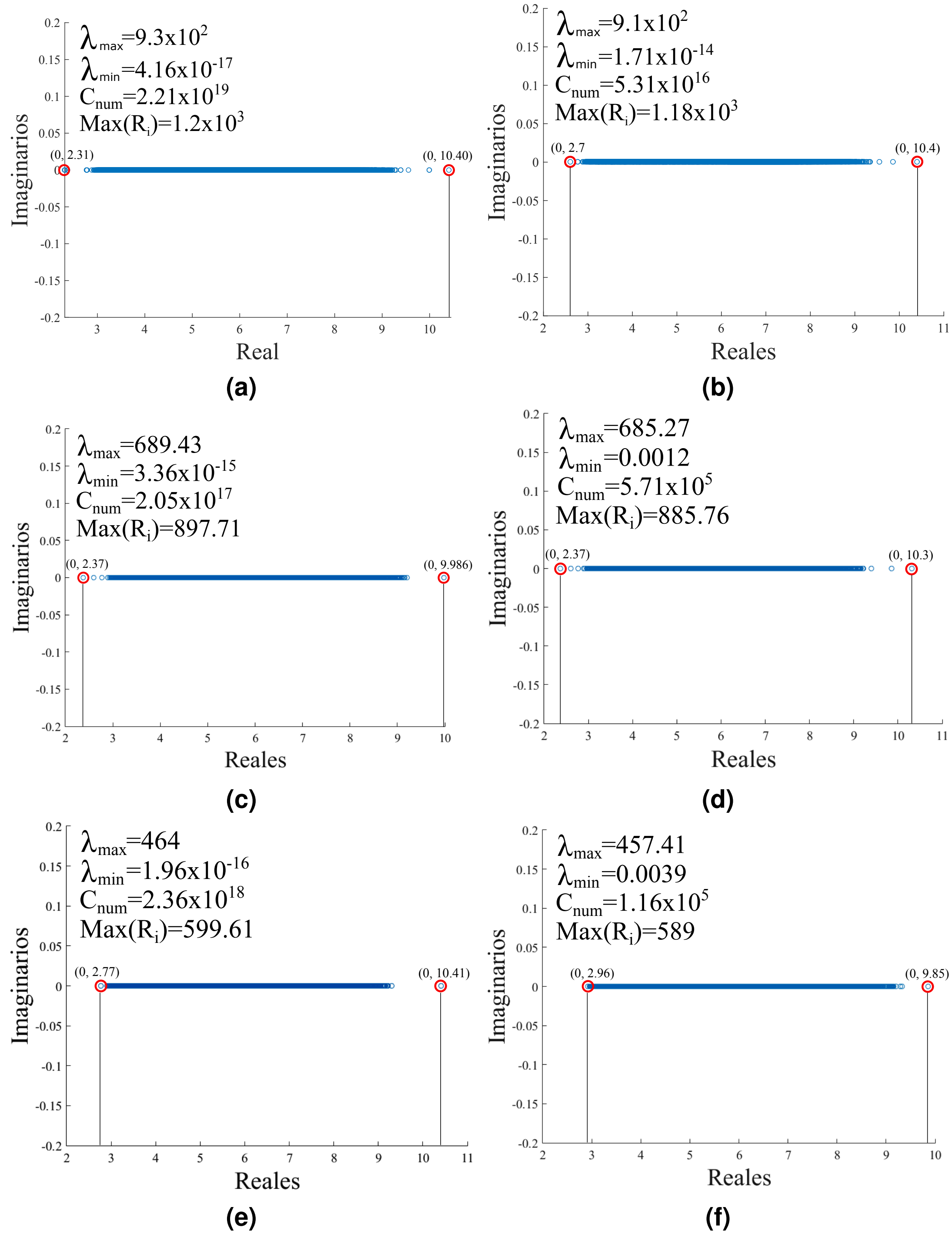


Figura 4.6: Análisis de los círculos de Gershgoring asociados a la matriz de muestreo en una arquitectura CT con un arreglo unidimensional de detectores Φ, en función de las aperturas codificadas aleatorias (columna izquierda) y diseñadas (columna derecha). Se analiza para los niveles de compresión 0 (fila 1), $0{,}25$ (fila 2) y $0{,}5$ (fila 3).

Para esta arquitectura, la relación de compresión $c_{\%}$ varía en función de M_2 y el total de elementos de paso $Tr = \sum_{j2=0}^{M_2} \mathbf{1}_{M_1}^{\mathsf{T}} \mathbf{c}_{j_2}/(M_1 M_2)$, dado que $M_1 = 512$ y $M_3 = 1$ son constantes. Por lo tanto, para seleccionar el M_2 y T_r que permita obtener el mejor desempeño en la reconstrucción del objeto en términos de PSNR, se realiza un análisis de sus posibles combinaciones en el rango de la compresión deseada. Este experimento es resumido en la figura (4.7) y sus resultados numéricos están contenidos en las tablas (3)-(5) en la secci'on de anexos. Por lo tanto, para los niveles de compresión $c_{\%} = \{0{,}5, 0{,}25, 0\}$ se establecen los parametros $(M_2, T_r) = \{(257, 0{,}0623), (257, 0{,}0934), (257, 0{,}1245)\}$, respectivamente. Además, se realiza un análisis de los parámetros regularizadores μ_c y ρ_c que permitan obtener el mejor desempeño del Algoritmo 3 en términos de PSNR, se busca el rango óptimo de las variables. Por lo tanto, para los niveles de compresión $c_{\%} = \{0{,}5, 0{,}25, 0\}$ se establecen los parámetros $(\mu_c, \rho_c) = \{(1{,}5, 1 \times 10^3), (1, 1 \times 10^3), (0{,}75, 1 \times 10^3)\}$.

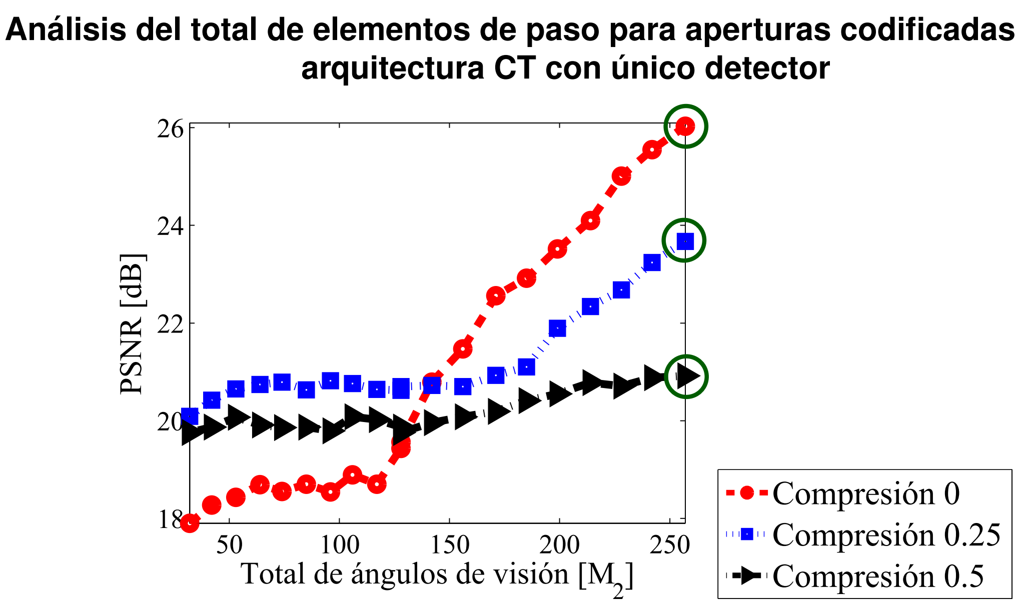


Figura 4.7: Análisis del total de ángulos de visión para una arquitectura CT con arreglo unidimensional de detectores. En este experimento el total de elementos de paso en cada apertura codificada, varia en función de la compresión y de los ángulos de visión.

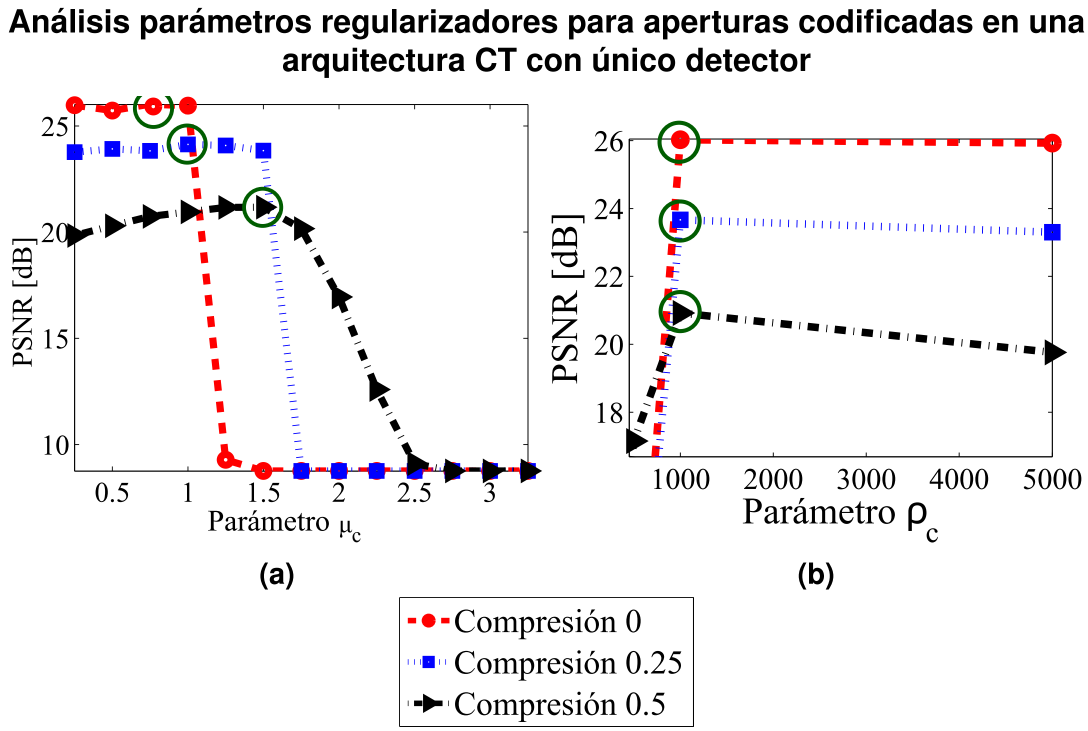


Figura 4.8: Análisis de los parámetros (a) μ_c y (b) ρ_c para la reconstrucción de imágenes CT en los tres niveles de compresión $(0, 0{,}25, 0{,}5)$ para una arquitectura CT con un arreglo unidimensional de detectores.

4.4. ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS DE MUESTREO EN UNA ARQUITECTURA CT CON UN ÚNICO DETECTOR

La relación de compresión en las arquitecturas CT con un único detector es inversamente proporcional al total de proyecciones capturadas , lo cual se puede se puede expresar como $c_{\%} = 1 - \frac{M_2 M_3}{n}$. Para esta arquitectura, la relación de compresión $c_{\%}$ varía en función de M_2 y M_3. Por lo tanto, para seleccionar los parámetros M_2, y M_3, que permitan obtener el mejor desempeño en la reconstrucción del objeto en términos de PSNR, se realiza un análisis de sus posibles combinaciones en el rango de la compresión deseada. Este experimento es resumido en la figura (4.10) y sus resultados numéricos están contenidos en las tablas (3)-(5) en la sección de anexos. Por lo tanto, para los niveles de compresión $c_{\%} = \{0{,}5, 0{,}25, 0\}$ se establecen los parámetros $(M_2, M_3) = \{(128, 64), (128, 96), (128, 128)\}$, respectivamente. Como se puede observar en la definición de $c_{\%}$, el total de elementos de paso en las aperturas codificadas no afecta el nivel de compresión deseado, sin embargo, si

Análisis de los parámetros μ_c y ρ_c para arquitectura CT con un único detector

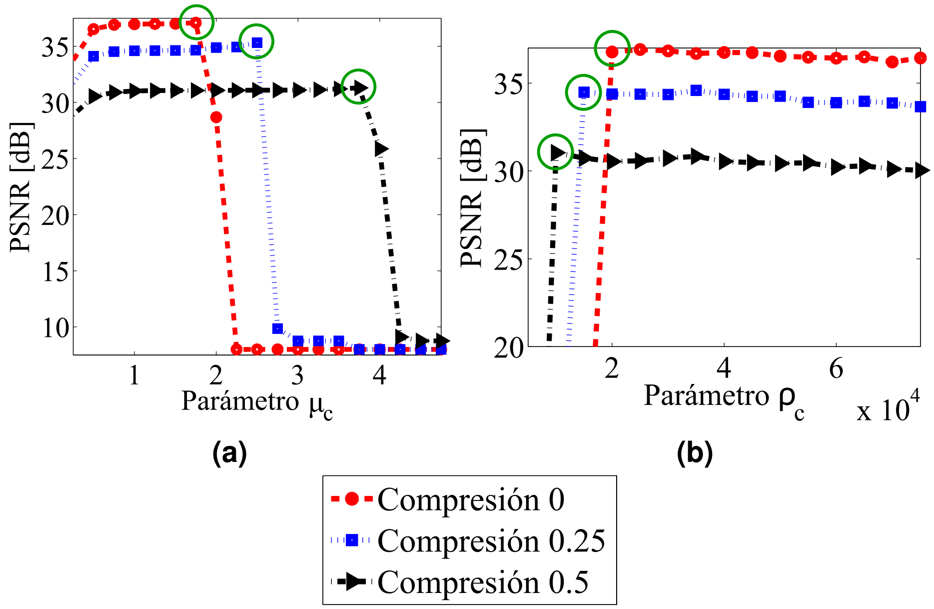


Figura 4.9: Análisis de los parámetros (a) μ_c y (b) ρ_c para la reconstrucción de imágenes CT en los tres niveles de compresión $(0, 0{,}25, 0{,}5)$ para una arquitectura CT con un único detector.

afecta la calidad de la reconstrucción. Por lo tanto, para seleccionar el parámetro T_r que permita obtener el mejor desempeño en la reconstrucción del objeto en términos de PSNR, se realiza un análisis de los diferentes niveles de transmitancia para los parámetros óptimos de M_2 y M_3. En la figura 4.10b.(b) se resumen los resultados de este análisis, en el cual se concluye que la transmitancia óptima para los tres niveles de compresión es $T_r = 0{,}0078$.

4.5. RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES CT A PARTIR DE APERTURAS CODIFICADAS ALEATORIAS Y OPTIMIZADAS

En esta sección se procede a evaluar el desempeño de las aperturas codificadas optimizadas con base en los parámetros establecidos en la sección 5.4 y 5.5 para las arquitecturas CT con un arreglo unidimensional y un único detector, respectivamente. Los resultados de estos experimentos están resumidos en las tablas (4.3)-(4.6), para tres niveles de compresión y ruido. Específicamente, en las tablas (4.3)-(4.5) se analizan los resultados obtenidos para la arquitectura CT con un único detector, en las cuales se concluye que las reconstrucciones obtenidas mediante

Análisis de la reconstrucción de x a partir de proyecciones y capturadas por una arquitectura CT con un único detector

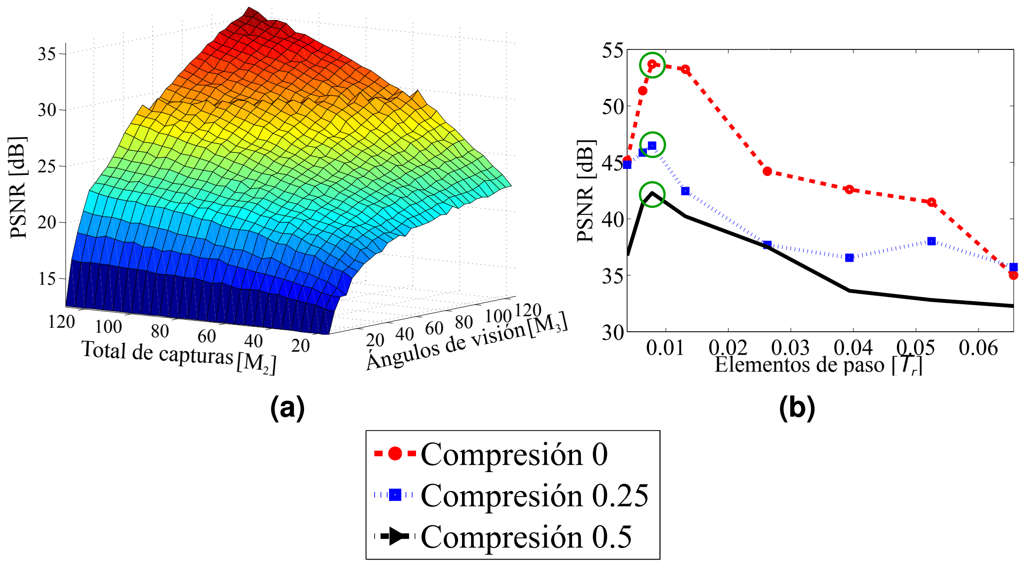


Figura 4.10: Análisis de la reconstrucción de **x** a partir de proyecciones **y** capturadas por una arquitectura CT con un ńico detector donde se varia en términos de PSNR en función de los parámetros (a) M_2 y M_3 y el total de elementos de paso en la apertura T_r.

el uso de las aperturas diseñadas obtienen en promedio una ganancia de hasta 7.31 [dB] con respecto a las aperturas generadas por una función aleatoria. Por otro lado, en la tabla 4.6, se analizan los resultados obtenidos para la arquitectura CT con un arreglo unidimensional de detectores para tres niveles de compresión y un nivel de ruido $SNR = 10[dB]$. A partir de esta tabla se concluye que el uso de las aperturas diseñadas obtienen en promedio una ganancia de hasta 1 [dB] con respecto al uso de aperturas generadas por una función aleatoria. Con el fin de mostrar la mejora en la calidad visual de las imágenes CT reconstruidas por el uso de las aperturas optimizadas, en contraste con las reconstrucciones obtenidas por las aperturas aleatorias, en la figura (4.11) y (4.12) se ilustran la reconstrucción de 4 cortes transversales. Específicamente, se ilustran las reconstruccionesde imágenes CT a partir de proyecciones con un nivel compresión $c_{\%} = 0{,}5$ y un nivel de ruido $SNR = 10[dB]$. En las figuras (4.11)-(4.12), la primera fila ilustra las imágenes CT originales, en la segunda y tercera fila la reconstrucciones obtenidas mediante el uso de la aperturas codificadas aleatorias y optimizadas, respectivamente. Además, para apreciar con mayor detalle la calidad de las reconstrucciones, en las filas 4 y 5 se ilustra el error absoluto entre la imagen original y las reconstrucciones obtenidas usando las aperturas optimizadas y aleatorias, respectivamente. Se puede concluir que tanto en calidad visual y en términos de PSNR, las aperturas optimizadas obtienen un mejor desempeño en contraste al uso de aperturas generadas por una función aleatoria.

Reconstrucción de imágenes CT para arquitectura con único detector

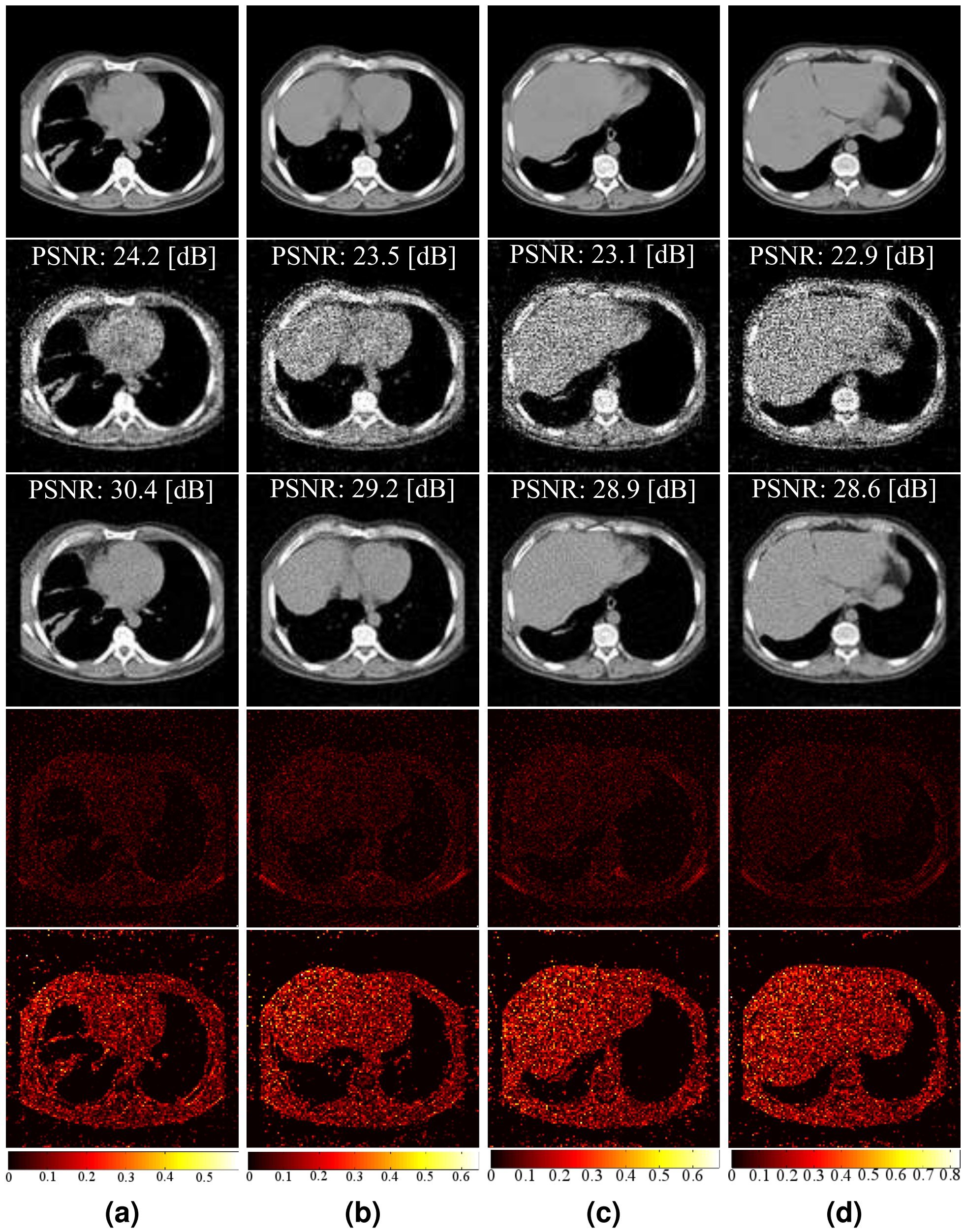


Figura 4.11: Reconstrucción de los cortes transversales (a) 1, (b) 4, (c) 8, y (d) 12 (primera fila), mediante el uso de aperturas codificadas aleatorias (segunda fila) y aperturas optimizadas (tercera fila) en una arquitectura CT con un único detector. Se ilustra el error absoluto entre los cortes transversales originales y las reconstrucciones obtenidas por las aperturas aleatorias (tercera fila) y optimizada (cuarta fila).

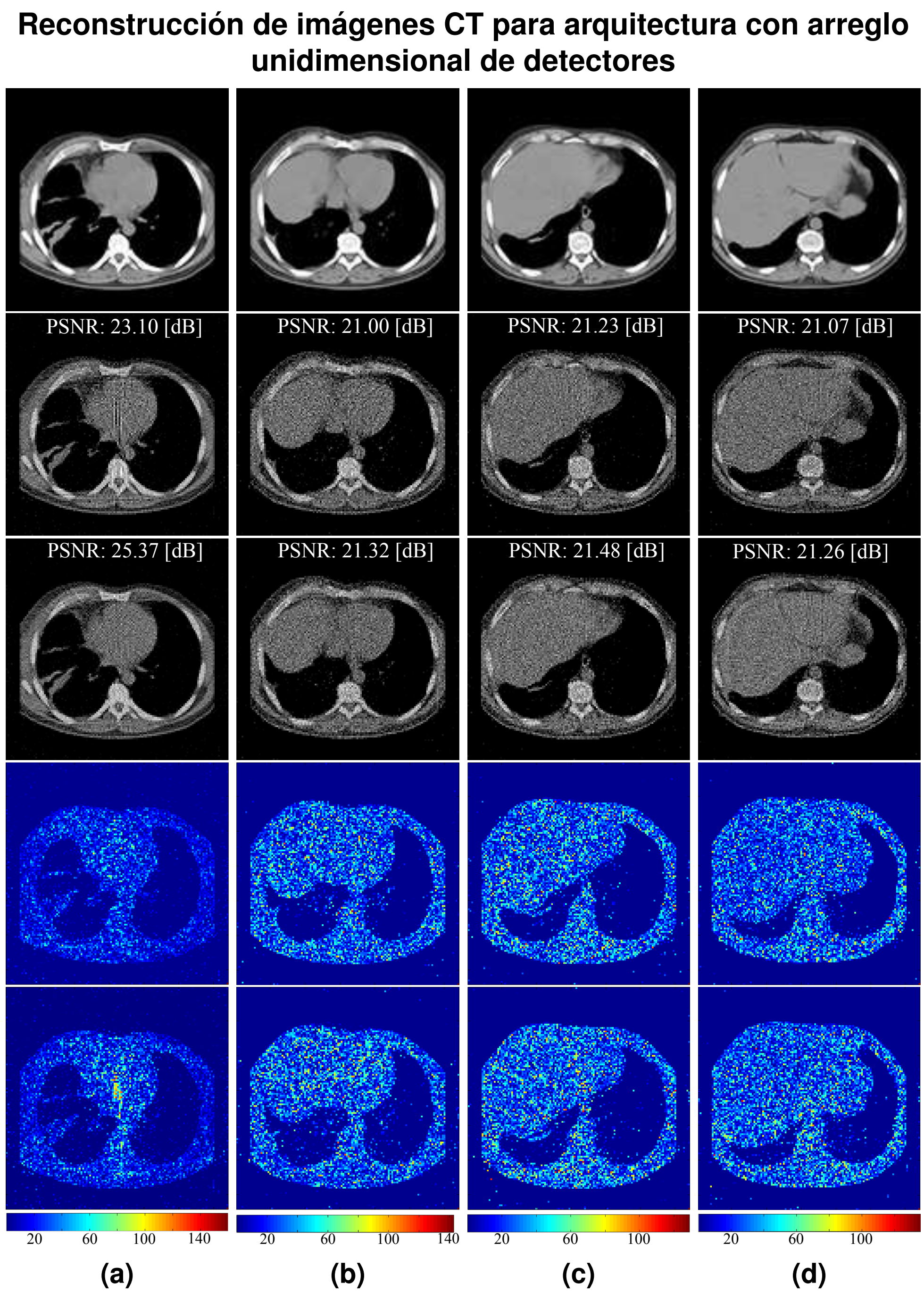


Figura 4.12: Reconstrucción de los cortes transversales (a) 1, (b) 4, (c) 8, y (d) 12 (primera fila), mediante el uso de aperturas codificadas aleatorias (segunda fila) y aperturas optimizadas (tercera fila) en una arquitectura CT con un arreglo unidimensional de detectores. Se ilustra el error absoluto entre los cortes transversales originales y las reconstrucciones obtenidas por las aperturas aleatorias (tercera fila) y optimizada (cuarta fila).

Resultados de reconstrucción para tres niveles de ruido y compresión del $0{,}5$ en arquitectura CT con único detector

SNR	Aperturas	PSNR											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	Aleatorias	24.2	23.7	23.6	23.5	23.4	23.5	23.6	23.1	23.3	22.9	23.2	22.9
	Optimizada	**30.4**	**30.0**	**29.2**	**29.2**	**29.1**	**29.2**	**29.2**	**28.9**	**29.0**	**28.9**	**28.8**	**28.6**
15	Aleatoria	28.8	28.1	27.5	27.7	27.4	27.6	27.6	27.4	27.4	27.4	27.5	27.0
	Optimizada	**36.6**	**35.9**	**34.5**	**34.5**	**34.4**	**34.2**	**34.4**	**34.1**	**34.1**	**34.1**	**33.8**	**33.2**
20	Aleatoria	34	33.3	32.2	32.1	32.0	32.1	32.0	31.8	32.0	31.8	31.7	31.5
	Optimizada	**41.2**	**40.0**	**38.4**	**38.2**	**38.1**	**38.0**	**38.2**	**37.8**	**38.0**	**37.9**	**37.4**	**36.0**

Tabla 4.3: Recopilación de los resultados obtenidos por la reconstrucción de 12 imágenes CT a partir de proyecciones con tres niveles de ruido $SNR = \{10, 15, 20\}[dB]$ y un nivel de compresión de $0{,}5$. Aquí, las proyecciones CT son simuladas para una arquitectura con un único detector y mediante el uso de aperturas codificada aleatorias y optimizadas.

Resultados de reconstrucción para tres niveles de ruido y compresión del $0{,}2$ en arquitectura CT con único detector

SNR	Apertura	PSNR											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	Aleatorio	25.5	25.1	24.9	24.7	24.7	24.8	24.7	24.4	24.4	24.3	24.3	24.1
	Optimizado	**32.8**	**32.2**	**31.5**	**31.4**	**31.2**	**31.1**	**31.3**	**31.1**	**31.1**	**30.9**	**30.6**	**30.3**
15	Aleatorio	30.7	30.2	29.4	29.7	29.3	29.4	29.3	29.1	29.2	29.0	29.2	28.7
	Optimizado	**41.1**	**40.7**	**39.5**	**39.6**	**39.5**	**39.4**	**39.5**	**39.4**	**39.3**	**39.1**	**38.6**	**37.9**
20	Aleatorio	38.2	37.3	36.4	36.2	36.0	36.0	36.1	35.9	35.8	35.5	35.1	34.5
	Optimizado	**48.1**	**47.7**	**46.5**	**46.4**	**46.3**	**46.4**	**46.4**	**46.3**	**46.2**	**45.7**	**45.3**	**44.2**

Tabla 4.4: Recopilación de los resultados obtenidos por la reconstrucción de 12 imágenes CT a partir de proyecciones con tres niveles de ruido $SNR = \{10, 15, 20\}[dB]$ y un nivel de compresión de $0{,}25$. Aquí, las proyecciones CT son simuladas para una arquitectura con un único detector y mediante el uso de aperturas codificada aleatorias y optimizadas.

Resultados de reconstrucción para tres niveles de ruido y compresión del 0 en arquitectura CT con único detector

SNR	Aperturas	PSNR											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	Aleatorio	26.3	26.0	25.8	25.7	25.6	25.6	25.4	25.3	25.3	25.4	25.2	25.0
	Optimizado	**33.9**	**33.2**	**32.7**	**32.6**	**32.2**	**32.2**	**32.6**	**32.2**	**32.2**	**31.9**	**31.8**	**31.5**
15	Aleatorio	32.1	31.5	30.8	30.6	30.5	30.4	30.5	30.3	30.5	30.2	29.9	29.6
	Optimizado	**43.1**	**42.3**	**41.6**	**41.6**	**41.2**	**41.2**	**41.3**	**41.4**	**41.1**	**40.9**	**40.5**	**40.0**
20	Aleatorio	40.5	39.7	38.6	38.5	38.4	38.2	38.5	38.1	38.3	37.9	37.4	36.9
	Optimizado	**50.5**	**49.6**	**48.9**	**48.9**	**48.8**	**48.5**	**49.0**	**48.7**	**48.5**	**48.2**	**48.0**	**47.3**

Tabla 4.5: Recopilación de los resultados obtenidos por la reconstrucción de 12 imágenes CT a partir de proyecciones con tres niveles de ruido $SNR = \{10, 15, 20\}[dB]$ y un nivel de compresión de 0. Aquí, las proyecciones CT son simuladas para una arquitectura con un único detector y mediante el uso de aperturas codificada aleatorias y optimizadas.

Resultados de reconstrucción para un nivel de ruido $10NSR$ y tres niveles de compresión del $\{0, 0{,}25, 0{,}5\}$ en arquitectura CT con arreglo unidimensional de detectores

Compresión	Aperturas	PSNR											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	Aleatorio	30,2	29,1	28,4	28,1	27,9	27,8	27,7	28,0	27,6	27,1	26,4	26,0
	Optimizado	**30,8**	**29,9**	**29,1**	**29,0**	**28,8**	**28,4**	**28,7**	**28,8**	**28,5**	**28,0**	**27,5**	**27,1**
0.25	Aleatorio	29,51	28,39	27,4	27,3	26,5	26,6	27,3	26,7	26,4	25,8	25,0	23,6
	Optimizado	**30,5**	**29,3**	**28,1**	**28,3**	**27,5**	**27,3**	**27,5**	**27,8**	**27,6**	**26,9**	**26,2**	**25,38**
0.5	Aleatorio	23,1	21,3	21,1	21,0	20,7	21,0	21,2	21,2	20,8	20,9	21,0	21,0
	Optimizado	**25,3**	**23,2**	**21,2**	**21,3**	**21,1**	**21,3**	**21,2**	**21,4**	**21,1**	**21,0**	**21,06**	**21,2**

Tabla 4.6: Recopilación de los resultados obtenidos por la reconstrucción de 12 imágenes CT a partir de proyecciones con un nivele de ruido $SNR = \{10\}[dB]$ y tres niveles de compresión de $\{0, 0{,}25, 0{,}5\}$. Aquí, las proyecciones CT son simuladas para una arquitectura con un arreglo unidimensional de detectores y mediante el uso de aperturas codificada aleatorias y optimizadas.

Capítulo 5
CONTRIBUCIONES Y TRABAJO FUTURO

- Se propone un problema de optimización y un algoritmo para el diseño de aperturas codificadas en una arquitectura CT con haz de rayos-X en abanico.
- Se establece una relación entre el número de condición, el muestreo uniforme, y los círculos de Gershgorin asociados a la matriz de muestreo Φ.
- Se desarrolla el modelo de captura continuo y discreto para las arquitecturas CT con aperturas codificadas y un arreglo unidimensional de detectores y único detector.

5.1. CONTRIBUCIONES

- La extrapolación del problema de optimización de aperturas codificadas a otras generaciones de tomógrafos CT.
- La extrapolación del problema de optimización de aperturas codificadas en una arquitectura de muones con un único detector.

5.2. TRABAJO FUTURO

- La implementación real de las aperturas codificadas en una arquitectura CT con un único detector y un arreglo unidimensional.
- El uso de las aperturas codificadas diseñadas en una arquitectura de muones.

Capítulo 6
CONCLUSIONES

- El uso de aperturas codificadas optimizadas en las arquitecturas CT permite obtener una mayor calidad de reconstrucción en términos visuales y de PSNR con respecto al uso de aperturas generadas por una función aleatoria.
- El desempeño de las aperturas codificadas en la reconstrucción de las imágenes CT está directamente relacionado con los círculos de Gershgorin asociados a la matriz de muestreo Φ.
- El número de condición de la matriz de muestreo Φ está directamente relacionado con los círculos de Gershgorin.
- El diseño de aperturas codificadas a partir de los cuatro criterios de muestreo uniforme propuestos permite obtener matrices de muestreo con un número de condición menor a los obtenidos por las aperturas aleatorias.
- Las aperturas codificadas optimizadas obtuvieron una mayor ganancia en términos visuales y de PSNR en la arquitectura CT con un único detector.
- El problema de optimización propuesto puede ser usado para optimizar aperturas codificadas en otras generaciones de arquitecturas CT.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Arce, G. R., Brady, D. J., Carin, L., Arguello, H., and Kittle, D. S. (2014). Compressive coded aperture spectral imaging: An introduction. *IEEE Signal Processing Magazine*, 31(1):105–115.

[2] Brady, D. J., Mrozack, A., MacCabe, K., and Llull, P. (2015). Compressive tomography. *Advances in Optics and Photonics*, 7(4):756–813.

[3] Brady, Z. (2012). Radiation doses and risks from paediatric computed tomography.

[4] Buzug, T. M. (2008). *Computed tomography: from photon statistics to modern cone-beam CT*. Springer Science & Business Media.

[5] Candes, E. J. and Wakin, M. B. (2008). An introduction to compressive sampling. *IEEE signal processing magazine*, 25(2):21–30.

[6] Choi, K. and Brady, D. J. (2009). Coded aperture computed tomography. In *SPIE Optical Engineering+ Applications*, pages 74680B–74680B. International Society for Optics and Photonics.

[7] Cuadros, A., Wang, K., Peitch, C., Arguello, H., and Arce, G. (2015). Coded aperture design for compressive x-ray tomosynthesis. In *Computational Optical Sensing and Imaging*, pages CW2F–2. Optical Society of America.

[8] Cuadros, A. P., Arce, G. R., and Arguello, H. (2014). Coded aperture design in compressive x-ray tomography. In *Signal and Information Processing (GlobalSIP), 2014 IEEE Global Conference on*, pages 656–659. IEEE.

[9] Gondrom, S., Zhou, J., Maisl, M., Reiter, H., Kröning, M., and Arnold, W. (1999). X-ray computed laminography: an approach of computed tomography for applications with limited access. *Nuclear engineering and design*, 190(1):141–147.

[10] Heilbrun, M. P., Roberts, T. S., Apuzzo, M. L., Wells Jr, T. H., and Sabshin, J. K. (1983). Preliminary experience with brown-roberts-wells (brw) computerized

tomography stereotaxic guidance system. *Journal of neurosurgery*, 59(2):217–222.

[11] Hsieh, J. (2009). Computed tomography: principles, design, artifacts, and recent advances. SPIE Bellingham, WA.

[12] Joseph, P. M. and Schulz, R. A. (1980). View sampling requirements in fan beam computed tomography. *Medical physics*, 7(6):692–702.

[13] Kaganovsky, Y., Li, D., Holmgren, A., Jeon, H., MacCabe, K. P., Politte, D. G., O'Sullivan, J. A., Carin, L., and Brady, D. J. (2014). Compressed sampling strategies for tomography. *JOSA A*, 31(7):1369–1394.

[14] Kak, A. C. and Slaney, M. (1988). *Principles of computerized tomographic imaging*. IEEE press.

[15] MOrgan, C. L. (1983). *Basic Principles of Computed Tomography*. University Perk Press.

[16] Natterer, F. (1986). *The mathematics of computerized tomography*, volume 32. Siam.

[17] Peters, T. and Lewitt, R. (1977). Computed tomography with fan beam geometry. *Journal of computer assisted tomography*, 1(4):429–436.

[18] Scarfe, W. C., Farman, A. G., Sukovic, P., et al. (2006). Clinical applications of cone-beam computed tomography in dental practice. *Journal-Canadian Dental Association*, 72(1):75.

[19] Smith-Bindman, R., Lipson, J., Marcus, R., Kim, K.-P., Mahesh, M., Gould, R., de González, A. B., and Miglioretti, D. L. (2009). Radiation dose associated with common computed tomography examinations and the associated lifetime attributable risk of cancer. *Archives of internal medicine*, 169(22):2078–2086.

[20] van Aarle, W., Batenburg, K. J., Van Gompel, G., Van de Casteele, E., and Sijbers, J. (2014). Super-resolution for computed tomography based on discrete tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(3):1181–1193.

[21] van Aarle, W., Palenstijn, W. J., Cant, J., Janssens, E., Bleichrodt, F., Dabravolski, A., De Beenhouwer, J., Batenburg, K. J., and Sijbers, J. (2016). Fast and flexible x-ray tomography using the astra toolbox. *Optics express*, 24(22):25129–25147.

[22] van Aarle, W., Palenstijn, W. J., De Beenhouwer, J., Altantzis, T., Bals, S., Batenburg, K. J., and Sijbers, J. (2015). The astra toolbox: A platform for advanced algorithm development in electron tomography. *Ultramicroscopy*, 157:35–47.

BIBLIOGRAFÍA

Afonso, Manya V., José M. Bioucas-Dias, and Mário AT Figueiredo. “An augmented Lagrangian approach to the constrained optimization formulation of imaging inverse problems”. IEEE Transactions on Image Processing 20.3 (2011): 681-695.

Arce, Gonzalo R., et al. “Compressive coded aperture spectral imaging: An introduction”. IEEE Signal Processing Magazine 31.1 (2014): 105-115.

Arguello, Henry, and Gonzalo R. Arce. “Colored coded aperture design by concentration of measure in compressive spectral imaging”. IEEE Transactions on Image Processing 23.4 (2014): 1896-1908.

Arguello, Henry, Yuri Mejia, and Gonzalo Arce. “Colored coded apertures optimization in compressive spectral imaging by restricted isometry property”. Image Processing (ICIP), 2014 IEEE International Conference on. IEEE, 2014.

Bian, Junguo, et al. “Evaluation of sparse-view reconstruction from at-panel-detector conebeam CT”. Physics in medicine and biology 55.22 (2010): 6575.

Brady, Zoe. “Radiation doses and risks from paediatric computed tomography”. (2012).

Buzug, Thorsten M. “Computed tomography: from photon statistics to modern cone-beam CT”. Springer Science Business Media, 2008.

Candes, Emmanuel J., and Michael B. Wakin. “An introduction to compressive sampling”. IEEE signal processing magazine 25.2 (2008): 21-30.

Chambolle, Antonin. “An algorithm for total variation minimization and applications.” Journal of Mathematical imaging and vision 20.1 (2004): 89-97.

Choi, Kerkil, and David J. Brady. “Coded aperture computed tomography”. Proc. SPIE. Vol. 7468. No. 2009. 2009.

Cline, Alan K., et al. “An estimate for the condition number of a matrix.” SIAM Journal on Numerical Analysis 16.2 (1979): 368-375.

Cuadros, Angela, et al. “Coded aperture design for compressive X-ray tomosynthesis”. Computational Optical Sensing and Imaging. Optical Society of America, 2015.

Cuadros, Angela P., Gonzalo R. Arce, and Henry Arguello. “Coded aperture design in compressive X-ray tomography”. Signal and Information Processing (Global-

SIP), 2014 IEEE Global Conference on. IEEE, 2014.

De Jong, Pim A., et al. “Estimation of cancer mortality associated with repetitive computed tomography scanning”. American journal of respiratory and critical care medicine 173.2 (2006): 199-203.

De Lathauwer, Lieven, Bart De Moor, and Joos Vandewalle. “A multilinear singular value decomposition.” SIAM journal on Matrix Analysis and Applications 21.4 (2000): 1253-1278.

Gondrom, S., et al. “X-ray computed laminography: an approach of computed tomography for applications with limited access”. Nuclear engineering and design 190.1 (1999): 141-147.

Heilbrun, M. Peter, et al. “Preliminary experience with Brown-Roberts-Wells (BRW) computerized tomography stereotaxic guidance system”. Journal of neurosurgery 59.2 (1983): 217-222.

Hsieh, Jiang. “Computed tomography: principles, design, artifacts, and recent advances”. Vol. 114. SPIE press, 2003.

Joseph, Peter M., and Raymond A. Schulz. “View sampling requirements in fan beam computed tomography”. Medical physics 7.6 (1980): 692-702.

Kak, Avinash C., and Malcolm Slaney. “Principles of computerized tomographic imaging”. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

Kaganovsky, Yan, et al. “Compressed sampling strategies for tomography”. JOSA A 31.7 (2014): 1369-1394.

Kan, Chao, and Wen Song. “The Moreau envelope function and proximal mapping in the sense of the Bregman distance”. Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications 75.3 (2012): 1385-1399.

Kittle, David, et al. “Multiframe image estimation for coded aperture snapshot spectral imagers”. Applied optics 49.36 (2010): 6824-6833.

Lanksch, Wolfgang, Ekkehard Kazner, and Thomas Grumme. “Basic Principles of Computed Tomography”. Computed Tomography in Head Injuries. Springer Berlin Heidelberg, 1979. 1-16.

McBroom, R. J., et al. “Prediction of vertebral body compressive fracture using quantitative computed tomography”. JBJS 67.8 (1985): 1206-1214.

Morgan, Hugh T. “Multiple fan beam computed tomography system”. U.S. Patent No. 6,229,870. 8 May 2001.

Natterer, Frank. “The mathematics of computerized tomography”. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

Ozgen, Canan. “Compressed Sensing Based Computerized Tomography Imaging”. no. February (2012).

Peters, T. M., and R. M. Lewitt. “Computed tomography with fan beam geometry”. Journal of computer assisted tomography 1.4 (1977): 429-436.

Scarfe, William C., Allan G. Farman, and Predag Sukovic. “Clinical applications of cone-beam computed tomography in dental practice”. Journal-Canadian Dental Association 72.1 (2006): 75.

Shannon, Claude Elwood. “Communication in the presence of noise”. Proceedings of the IRE 37.1 (1949): 10-21.

Shrimpton, P. C., et al. “Doses from computed tomography (CT) examinations in the UK-2003 review”. Vol. 67. NRPB, 2005.

Smith-Bindman, Rebecca, et al. “Radiation dose associated with common computed tomography examinations and the associated lifetime attributable risk of cancer”. Archives of internal medicine 169.22 (2009): 2078-2086.

Thomas, Benjamin A., et al. “PETPVC: a toolbox for performing partial volume correction techniques in positron emission tomography”. Physics in medicine and biology 61.22 (2016): 7975.

van Aarle, Wim, et al. “Fast and exible X-ray tomography using the ASTRA toolbox”. Optics express 24.22 (2016): 25129-25147.

Van Aarle, Wim, et al. “Super-resolution for computed tomography based on discrete tomography”. IEEE Transactions on Image Processing 23.3 (2014): 1181-1193.

Van Aarle, Wim, et al. “The ASTRA Toolbox: A platform for advanced algorithm development in electron tomography”. Ultramicroscopy 157 (2015): 35-47.

Varga, R. S. “Gershgorin and His Circles”, in Springer Series in Computational Mathematics, 36.”(2004).

Wu, Yuehao, et al. “Development of a digital-micromirror-device-based multishot snapshot spectral imaging system”. Optics letters 36.14 (2011): 2692-2694.

ANEXOS

Análisis del parámetro μ_c para la reconstrucción de imágenes CT capturadas en una arquitectura de un único detector

μ_c	M_3		
	64	96	128
0,1	27,87	30,28	32,11
0,5	30,54	34,11	36,53
0,75	30,89	34,52	36,92
1	31,02	34,60	36,97
1,25	31,05	34,61	36,99
1,5	31,06	34,63	37,00
1,75	31,06	34,65	37,10
2	31,07	34,88	28,68
2,25	31,08	34,93	8,00
2,5	31,09	35,32	8,00
2,75	31,09	9,85	8,00
3	31,10	8,76	8,00
3,25	31,12	8,76	8,00
3,5	31,20	8,76	8,00
3,75	31,29	8,00	8,00
4	25,86	8,00	8,00
4,25	9,10	8,00	8,00
4,5	8,76	8	8,00
4,75	8,76	8,00	8,00

Tabla 1: Análisis del parámetro μ_c para la reconstrucción de imágenes CT capturadas en una arquitectura de un único detector con $M_3 = [64, 96, 128]$. El valor μ_c óptimo para $M_3 = [64, 96, 128]$, son $\mu_c = [3{,}75, 2{,}5, 1{,}75]$, respectivamente.

Análisis del parámetro ρ_c para la reconstrucción de imágenes CT capturadas en una arquitectura de un único detector

ρ_c	M_3		
	64	96	128
5	8,761	8,761	8,761
50	8,761	8,761	8,761
250	8,761	8,761	8,761
500	8,761	8,761	8,761
750	8,761	8,761	8,761
2500	8,761	8,761	8,761
5000	8,761	8,761	8,761
7500	8,761	8,761	8,761
1×10^4	31,04	8,760964	8,761
$1,5 \times 10^4$	30,73	34,49058	8,761
2×10^4	30,54	34,37911	36,779
$2,5 \times 10^4$	30,583	34,372	36,917
3×10^4	30,72	34,35798	36,841
3.5 $\times 10^4$	**30,84**	**34,58983**	36,692
4 $\times 10^4$	30,55	34,36164	**36,746**
$4,5 \times 10^4$	30,48	34,25215	36,739
5×10^4	30,434	34,262	36,541
$5,5 \times 10^4$	30,47	33,9057	36,479
6×10^4	30,22	33,89321	36,428
$6,5 \times 10^4$	30,29	33,97333	36,496
7×10^4	30,113	33,87	36,208
$7,5 \times 10^4$	30,04	33,660	36,432
8×10^4	30,26	33,51925	36,235
$8,5 \times 10^4$	30,02	33,34526	35,875
$2,5 \times 10^5$	28,266	30,888	33,098
5×10^5	26,747	29,069	30,567
$7,5 \times 10^5$	25,831	27,771	29,280

Tabla 2: Análisis del parámetro ρ_c para la reconstrucción de imágenes CT capturadas en una arquitectura de un único detector con $M_3 = [64, 96, 128]$. El valor ρ_c óptimo para $M_3 = [64, 96, 128]$, son $\rho_c = [3{,}5 \times 10^4, 3{,}5 \times 10^4, 4 \times 10^4]$, respectivamente.

Análisis parámetros $M_2 \in (16, 128)$ y $M_3 \in (1, 49)$, para la arquitectura de un único detector

	Ángulo de visión M_2												
M_3	**1**	**5**	**9**	**13**	**17**	**21**	**25**	**29**	**33**	**37**	**41**	**45**	**49**
16	12,3	14,4	15,6	15,6	17,0	17,6	18,1	18,4	18,8	18,9	19,5	19,8	20,0
20	12,5	14,5	15,6	16,2	17,6	17,9	18,4	19,2	19,2	19,8	20,0	20,2	20,2
24	12,4	14,8	15,8	16,7	17,8	18,4	19,0	19,6	19,9	20,2	20,5	20,7	20,7
28	12,5	14,9	16,1	16,9	18,1	18,8	19,5	20,0	20,2	20,8	20,8	20,9	21,3
32	12,5	15,1	16,2	17,2	18,7	19,3	19,7	20,3	20,7	20,9	21,2	21,5	21,7
36	12,5	15,2	16,5	17,4	18,8	19,5	20,2	20,5	21,0	21,1	21,6	21,8	22,1
40	12,5	15,4	16,6	17,6	18,9	19,9	20,3	20,8	21,2	21,5	21,9	22,0	22,5
44	12,6	15,4	16,8	18,0	19,4	20,3	20,7	21,3	21,3	21,9	22,1	22,4	22,7
48	12,5	15,6	16,9	18,3	19,5	20,2	21,1	21,4	21,8	22,0	22,7	22,8	22,9
52	12,6	15,6	17,0	18,1	19,8	20,4	21,0	21,5	21,9	22,4	22,7	23,0	23,6
56	12,5	15,5	17,2	18,4	20,2	20,6	21,4	21,6	22,1	22,5	23,0	23,6	23,8
60	12,6	15,7	17,3	18,7	20,3	20,9	21,5	21,9	22,4	22,7	23,2	23,7	24,1
64	12,6	15,9	17,5	18,7	20,3	21,0	21,8	22,3	22,7	23,2	23,5	24,0	24,4
68	12,6	15,8	17,9	18,9	20,4	21,3	22,0	22,4	22,7	23,4	23,6	24,4	24,4
72	12,6	15,9	17,8	18,9	20,6	21,4	22,0	22,4	23,0	23,3	23,9	24,4	24,8
76	12,6	16,1	17,8	19,3	20,9	21,5	22,0	22,5	23,0	23,8	24,0	24,6	25,1
80	12,6	16,1	18,0	19,4	20,9	21,8	22,2	22,7	23,4	23,9	24,3	25,0	25,5
84	12,6	16,2	18,0	19,5	21,1	21,7	22,3	22,9	23,4	24,0	24,5	25,2	25,9
88	12,6	16,1	18,2	19,5	21,3	22,1	22,4	23,1	23,7	24,4	24,9	25,5	25,9
92	12,6	16,2	18,0	19,8	21,4	22,0	22,8	23,2	23,8	24,5	25,2	25,7	26,5
96	12,6	16,3	18,3	19,9	21,6	22,1	22,8	23,4	23,9	24,6	25,3	26,2	26,5
100	12,6	16,4	18,2	20,0	21,6	22,3	22,9	23,4	24,2	24,7	25,5	26,3	26,7
104	12,6	16,4	18,6	20,2	21,6	22,5	23,0	23,6	24,4	25,0	25,6	26,5	27,2
108	12,6	16,4	18,5	20,1	21,9	22,6	23,1	23,8	24,4	25,3	26,0	26,8	27,2
112	12,6	16,5	18,7	20,3	21,9	22,7	23,4	23,9	24,6	25,2	26,1	27,0	27,8
116	12,6	16,5	18,9	20,4	22,0	22,7	23,2	24,0	24,7	25,6	26,3	27,1	27,6
120	12,6	16,5	18,7	20,4	22,1	22,8	23,5	24,1	24,8	25,6	26,3	27,4	28,1
124	12,6	16,5	18,8	20,5	22,2	23,0	23,6	24,2	25,0	25,6	26,6	27,6	28,2
128	12,6	16,6	18,9	20,7	22,5	23,0	23,6	24,2	25,0	25,9	26,9	27,7	28,4

Tabla 3: Análisis de la reconstrución de la imagen CT en terminos de PSNR en función de $M_2 \in [16, 128]$ y $M_3 \in [1, 49]$, para la arquitectura de un único detector.

Análisis parámetros $M_2 \in [16, 128]$ y $M_3 \in [53, 101]$, para la arquitectura de un único detector

	Ángulo de visión M_2												
M_3	**53**	**57**	**61**	**65**	**69**	**73**	**77**	**81**	**85**	**89**	**93**	**97**	**101**
16	19,8	20,4	20,4	20,5	20,7	20,8	21,1	21,0	21,6	21,3	21,6	21,6	21,9
20	20,4	20,8	21,1	21,2	21,3	21,5	21,6	21,9	21,9	22,2	22,3	22,3	22,4
24	21,1	21,1	21,5	21,7	22,0	22,1	22,2	22,5	22,5	22,7	22,8	23,0	23,2
28	21,6	22,0	22,1	22,2	22,6	22,5	22,9	23,0	22,8	23,1	23,4	23,5	23,9
32	22,2	22,3	22,4	22,8	22,8	23,2	23,3	23,3	23,7	23,8	24,0	24,3	24,3
36	22,4	22,6	22,9	23,1	23,3	23,6	23,7	23,8	24,1	24,3	24,5	24,6	24,9
40	22,8	23,0	23,3	23,4	23,8	23,9	24,1	24,4	24,8	24,6	24,9	25,1	25,6
44	23,1	23,3	23,6	24,0	24,1	24,5	24,8	24,8	25,1	25,4	25,6	25,6	26,2
48	23,6	23,8	24,0	24,3	24,6	24,8	25,1	25,5	25,5	25,8	26,1	26,3	26,6
52	23,8	23,9	24,2	24,5	25,1	25,1	25,5	25,9	26,1	26,3	26,7	27,0	27,2
56	24,1	24,3	24,8	25,1	25,4	25,7	26,0	26,2	26,6	26,7	27,3	27,4	27,8
60	24,4	24,7	24,9	25,5	25,6	26,2	26,5	26,8	27,1	27,3	27,7	28,1	28,5
64	24,8	25,1	25,4	25,7	26,3	26,5	26,9	26,9	27,3	28,0	28,4	28,6	29,0
68	25,0	25,5	25,7	26,1	26,3	26,8	27,3	27,5	28,0	28,6	28,9	29,2	29,3
72	25,3	25,6	26,0	26,5	26,9	27,1	27,6	28,0	28,3	29,0	29,2	29,9	28,8
76	25,8	26,0	26,4	27,0	27,4	27,8	28,1	28,5	28,9	29,3	29,5	29,9	29,4
80	26,0	26,2	26,7	27,3	27,5	28,1	28,6	28,7	29,4	29,8	29,3	29,7	29,6
84	26,1	26,5	26,8	27,8	28,1	28,5	28,9	29,5	29,6	29,1	29,6	29,8	30,1
88	26,3	26,8	27,3	27,9	28,3	28,8	29,4	29,8	29,2	29,3	30,0	30,1	30,6
92	26,8	27,3	27,7	28,2	28,8	29,2	29,7	29,0	29,2	29,8	30,3	30,6	31,0
96	26,9	27,5	28,0	28,4	29,1	29,6	29,1	29,4	29,9	30,0	30,5	30,7	31,4
100	27,4	28,0	28,4	28,9	29,4	29,6	29,5	29,6	30,1	30,5	30,8	31,3	31,5
104	27,4	27,9	28,6	29,1	29,6	29,2	29,6	29,8	30,4	30,6	31,2	31,6	31,8
108	28,0	28,5	28,8	29,6	29,0	29,4	29,9	30,1	30,7	30,9	31,5	31,9	32,2
112	28,1	28,5	29,3	29,3	29,3	29,7	30,3	30,5	30,8	31,3	31,6	32,0	32,6
116	28,5	28,9	29,4	29,0	29,4	30,0	30,5	30,5	31,2	31,4	32,1	32,4	32,8
120	28,6	29,3	29,3	29,2	29,5	30,1	30,4	30,8	31,3	31,5	32,3	32,6	33,0
124	28,6	29,6	28,7	29,2	29,9	30,3	30,8	31,2	31,6	32,1	32,5	32,9	33,2
128	29,1	28,5	29,0	29,5	30,1	30,5	31,1	31,5	32,0	32,3	32,8	33,3	33,5

Tabla 4: Análisis de la reconstrución de la imagen CT en terminos de PSNR en función de $M_2 \in (16, 128)$ y $M_3 \in (53, 101)$, para la arquitectura de un único detector.

Análisis parámetros $M_2 \in [16, 128]$ y $M_3 \in [104, 128]$, para la arquitectura de un único detector

	Ángulo de visión M_2					
M_3	**104**	**108**	**112**	**116**	**120**	**128**
16	105	109	113	117	121	125
20	21,9	21,8	22,0	22,3	22,4	22,4
24	22,5	22,8	23,1	23,0	23,1	23,3
28	23,3	23,4	23,5	23,7	23,8	24,0
32	24,0	24,1	24,2	24,4	24,6	24,8
36	24,7	24,7	24,9	24,8	25,2	25,3
40	25,1	25,3	25,6	25,9	26,0	26,1
44	25,7	26,1	26,2	26,2	26,8	26,9
48	26,4	26,6	26,9	27,1	27,3	27,5
52	26,8	27,0	27,5	27,7	27,9	28,4
56	27,7	27,7	28,2	28,6	28,6	28,9
60	28,3	28,6	28,7	29,1	29,4	30,1
64	28,5	29,2	29,3	29,5	30,0	29,3
68	29,3	29,7	29,5	29,3	29,5	30,0
72	30,1	29,2	29,4	29,8	30,1	30,3
76	29,3	29,4	30,0	30,3	30,5	30,9
80	29,9	30,2	30,5	30,5	31,0	31,4
84	30,4	30,3	30,7	31,0	31,5	31,7
88	30,8	30,8	31,2	31,6	32,0	32,1
92	30,9	31,3	31,7	32,0	32,2	32,5
96	31,3	31,7	31,8	32,2	32,6	32,9
100	31,7	32,1	32,2	32,7	32,8	33,2
104	32,0	32,1	32,7	33,1	33,3	33,6
108	32,3	32,6	33,0	33,4	33,6	34,0
112	32,4	33,1	33,4	33,7	33,8	34,1
116	32,9	33,3	33,6	33,8	34,4	34,8
120	33,3	33,6	33,9	34,2	34,5	35,0
124	33,5	34,0	33,9	34,5	34,9	34,9
128	33,8	34,1	34,5	34,7	35,2	35,5

Tabla 5: Análisis de la reconstrución de la imagen CT en terminos de PSNR en función de $M_2 \in [16, 128]$ y $M_3 \in [104, 128]$, para la arquitectura de un único detector.