

**LAS MATEMÁTICAS PRECOLOMBINAS
COMO RECURSO PEDAGÓGICO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007**

**LAS MATEMÁTICAS PRECOLOMBINAS
COMO RECURSO PEDAGÓGICO**

**Trabajo de grado para optar el título de
Licenciada en Matemáticas**

JOHANNA CAROLINA MARTINEZ AVENDAÑO

**Director:
GABRIEL YÁÑEZ CANAL
Phd. En Matemática Educativa**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007**

*A mis padres por estar
siempre a mi lado,
brindándome cariño y apoyo.*

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus más sinceros agradecimientos:

Al profesor Gabriel Yáñez Canal de la Escuela Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, por brindar la orientación necesaria para la realización de este proyecto.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	
1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	3
1. 1. CULTURAS PRECOLOMBINAS	4
1.1.1 Cultura Guane	7
1.1.1.1 Numeración y Cálculo del Tiempo	16
1.1.1.2 Guane	19
1.1.2 Cultura Inca	21
1.1.2.1. Aritmética, yupana y quipu	33
1.2. EL SISTEMA POSICIONAL DE NUMERACIÓN	50
2. PRUEBA DIAGNÓSTICA	58
2.1. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA	59
3. TALLERES	63
3.1. Guía 1	66
3.2. Guía 2	67
3.3. Guía 3	69
3.4. Guía 4	71
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LOS TALLERES	72
5. CONCLUSIONES	79
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81
7. ANEXOS	83

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Quipucamayo	34
Figura 2. Yupana 1	34
Figura 3. Tabla de madera	35
Figura 4. Tiza	35
Figura 5. Piedras pequeñas	35
Figura 6. Yupana 2	35
Figura 7. Yupana 3	36
Figura 8. Yupana 4	36
Figura 9. Yupana 5	37
Figura 10. Yupana 6	37
Figura 11. Yupana 7	38
Figura 12. Yupana 8	38
Figura 13. Yupana 9	39
Figura 14. Yupana 10	39
Figura 15. Quipu	42
Figura 16. Quipu Liso	47
Figura 17. Partes del quipu	49
Figura 18. Conjunto A1	53
Figura 19. Conjunto A2	53
Figura 20. Conjunto B	56
Figura 21. Conjunto C.	57
Figura 22. Mujer Indígena	63
Figura 23. Quipu	63
Figura 24. Yupana 1	64

Figura 25. Yupana 1	64
Figura 26. Mujer Indígena	85
Figura 27. Quipu	87
Figura 28. Lazo Principal	87
Figura 29. Cuerdas de Colores	87
Figura 30. Ejemplo de Construcción de un Quipu	91
Figura 31. Yupana 1	93
Figura 32. Tabla de madera	94
Figura 33. Tiza	94
Figura 34. Piedras pequeñas	94
Figura 35. Yupana 2	94
Figura 36. Yupana 3	95
Figura 37. Yupana 4	95
Figura 38. Yupana 5	96
Figura 39. Yupana 6	96
Figura 40. Yupana 7	97
Figura 41. Yupana 8	97
Figura 42. Yupana 9	98
Figura 43. Yupana 10	98
Figura 44. Yupana 11	99
Figura 45. Yupana 12	99
Figura 46. Yupana 13	99
Figura 47. Yupana 14	99
Figura 48. Yupana 1	101
Figura 49. Yupana en base dos	101
Figura 50. Yupana 2 en base dos	102
Figura 51. Yupana 3 en base dos	102
Figura 52. Yupana 2 en base dos	102
Figura 53. Yupana 4 en base dos	102
Figura 54. Yupana 5 en base dos	103

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Tipos de cuerdas	88
Tabla 2. Tipos de nudo	89
Tabla 3. Estado civil de los indígenas Guanes	91
Tabla 4. Censos de los años 1734, 1745, 1764, 181 de hombres de la etnia Guane.	92

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo 1. Prueba diagnóstica	83
Anexo 2. Guía N° 1. Numeración Guane	85
Anexo 3. Guía N° 2. Practiquemos con el quipu	87
Anexo 4. Guía N° 3. Practiquemos con la yupana	93
Anexo 5. Guía N° 4. Avancemos con la yupana	101
Anexo 6. Estudiantes 7-3 trabajando con la yupana	104
Anexo 7. Estudiantes 7-3 trabajando con el quipu	105
Anexo 8. Monumentos de la cultura Inca	106
Anexo 9. Escritura ideográfica de la cultura Guane	107
Anexo 10. Pueblo de Guane actualmente	108

SUMMARY

TITLE: THE PRE-COLOMBIN MATEMATICS LIKE A PEDAGOGIC SOURCE

AUTHOR: JOHANNA CAROLINA MARTINEZ AVENDAÑO**

KEY WORDS: Pre-colombin cultures, positional system of numeration, yupana, quipu, Guane and Inca cultures.

DESCRIPTION:

Inside the mathematical history there is the possibility to know the sources of the pre-colombin mathematic, to create and re-create history-mathematic situations into the school, in order to obtain a significative learning for students.

The research has a mathematic-history character, and are presented the mathematical concepts into the Inca y Guane cultures of our pre-colombin America. Also is presented a didactical purpose into the research of the classroom, including a constructivist vision about how is learned and taught the mathematic, in order to joint the history of this science with the educative practice and the didactic theory, studying the efficacy of the methodology of solutions of problems for the learning about "Positional System of Numeration".

About research of techniques, abilities, likewise to count, measure, classify, arrange, infer and calculate, all used by the pre-colombin cultures, is attempted to promote the use of history, employing tools of the Inca culture such as the "yupana" and the "quipu" and the ways for to count of Guane culture like a pedagogical tool to bring near to the student toward the theoretical concepts of "Positional System of Numeration" through practical situations.

The research was developed 7th level of secondary basic education, of the "Institución Educativa Colegio Nacional San José de Guanentá Integrado de San Gil", during second semester of 2006.

** Faculty of Sciences. Licenciature in Mathematic.
Advisor Gabriel Yáñez Canal.

RESUMEN

TÍTULO: LAS MATEMÁTICAS PRECOLOMBINAS COMO RECURSO PEDAGÓGICO.

AUTOR: JOHANNA CAROLINA MARTINEZ AVENDAÑO**

PALABRAS CLAVES: Culturas precolombinas, Sistema Posicional de numeración, Cultura Guane, Cultura Inca, yupana, quipu.

DESCRIPCIÓN:

En estudio de la historia de las matemáticas se da posibilidad de conocer los recursos de la matemática precolombina y poder crear o recrear situaciones histórico-matemáticas en la escuela que permitan un aprendizaje significativo en los estudiantes.

Esta investigación tiene un carácter matemático-histórico, en ella se da a conocer las concepciones matemáticas de las culturas Inca y Guane de nuestra América Precolombina. Además se presenta una propuesta didáctica en el marco de la investigación en el aula y con una visión constructivista sobre cómo se aprende y se enseña matemática, para ligar la historia de esta ciencia con la práctica educativa y la teoría didáctica estudiando la eficacia de la metodología de resolución de problemas para el aprendizaje del tema “Sistema Posicional de Numeración”.

En el desarrollo de la investigación de las técnicas, habilidades, al igual que las prácticas de contar, medir, clasificar, ordenar, inferir y calcular empleadas por las culturas precolombinas, se intenta promover el uso de la historia, usando herramientas de la cultura Inca como son la yupana y el quipu y las formas de contar de la cultura Guane como un instrumento pedagógico para acercar al estudiante a los conceptos teóricos de Sistema Posicional de Numeración a través de situaciones prácticas.

La investigación se desarrolló en el grado séptimo de básica secundaria, de la institución educativa Colegio Nacional San José de Guanentá Integrado de San Gil, en el segundo semestre de 2006.

** Facultad de Ciencias. Licenciatura en Matemáticas.
Director Gabriel Yáñez Canal.

PRESENTACIÓN

Esta investigación que se ha titulado “Las Matemáticas Precolombinas Como Recurso Pedagógico”, es una opción para que otros maestros que inician en el apasionante estudio de la historia de las matemáticas tengan la posibilidad de conocer los recursos de la matemática precolombina y puedan crear o recrear situaciones histórico-matemáticas en sus propias aulas, claro está adaptándolos a las necesidades de su escuela.

En la aplicación de la historia precolombina de la matemática al tema de Sistema Posicional de Numeración del plan curricular del área de matemáticas, se presentan situaciones históricas y recursos variados que llevaron a nuestros aborígenes a la creación intelectual de conceptos, que tienen su procedencia en la práctica vinculada a los procesos reales del mundo.

La importancia de este trabajo radica en brindar un enfoque histórico para la enseñanza del Sistema Posicional de Numeración que posibilite la comprensión de algunos aspectos de este tema por los estudiantes. Las actividades didácticas pretenden intensificar la interacción de los estudiantes con la numeración escrita.

La enseñanza matemática no sólo debe ser dirigida a lograr un desarrollo del pensamiento y las capacidades intelectuales, sino también tiene la tarea de reafirmar los sentimientos patrióticos y rescatar valores morales. Al hacer uso de la historia precolombina en la educación matemática, se pretende que el estudiante reconozca su patria como una república multicultural y se comprometa a proteger la diversidad étnica y cultural de la nación, que pueda alejarse de su

pensamiento discriminador que concede al indígena la categoría de “salvaje”, y que aprecie el valor inherente a las culturas y al saber indígenas.

En el primer capítulo se exponen los fundamentos teóricos, que soportan este trabajo, con algunos resultados del ICMI (the Internacional comisión of Mathematics Instruction), de cómo el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas pueden ser mejoradas a través de la integración de la historia de las matemáticas en todos los aspectos de educación matemática. Luego se hace una revisión histórica de las culturas Inca y Guane y algunos de sus desarrollos en el área de las matemáticas. En la parte final se presenta una revisión del tema Sistema de Numeración Posicional.

En el segundo capítulo se presenta la prueba diagnóstica y sus resultados, que orientaron el diseño de los talleres.

En el tercer capítulo se expone una propuesta metodológica soportada en la integración de la historia de la matemática en la educación matemática en el tema Sistema de Numeración Posicional.

En el cuarto capítulo se incluyen los resultados del análisis de la información obtenida a partir de la implementación de la propuesta didáctica.

El documento finaliza con las conclusiones y referencias bibliográficas, seguidas de algunos anexos.

1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este capítulo revisaremos algunos contenidos técnicos acerca de la integración de la historia de las matemáticas en la educación matemática, apoyados en los resultados obtenidos de las investigaciones realizadas por el ICMI (the Internacional comisión of Mathematics Instruction). Estas investigaciones sobre la integración de historia de las matemáticas a la enseñanza de las matemáticas tienen un carácter de investigación cualitativa, pues se centra en la comprensión de los procesos, concepciones y acciones de los profesores y estudiantes enmarcados en un contexto.

La matemática es una ciencia que sigue un curso evolutivo que la escuela no puede hacer. En la escuela se ofrecen los resultados matemáticos bajo una fuerte sistematización de sus teorías, proposiciones, procedimientos, etc. Ante la necesidad de dinamizar y mejorar el proceso de enseñanza hacia el logro de los objetivos educacionales, el ICMI plantea en Flauver J. y Maanen J. (2000): “la enseñanza matemática viene a ser mucho más que una compleja intención de exponer los bien organizados desarrollos matemáticos. Esta debería incluir una oportunidad de *hacer* matemáticas. En este respecto la historia de las matemáticas parecen un recurso natural para exponer el hacer matemáticas en la cotidianidad, y así esta puede jugar un rol muy importante en la educación matemática” (p. 202).

Dentro de la educación matemática el ICMI establece cinco principales aspectos que soportan, mejoran y enriquecen la enseñanza de las matemáticas a través de la integración de la historia matemática Flauver J. y Maanen J. (2000):”a) el aprendizaje de las matemáticas; b) el desarrollo de una visión sobre la naturaleza y la actividad matemática; c) los antecedentes didácticos de profesores y sus repertorios pedagógicos; d) la predisposición afectiva hacia la matemática; e) la apreciación de las matemáticas como un esfuerzo cultural humano” (p. 203).

Al hacer uso de la historia en la educación matemática el ICMI menciona los siguientes recursos pedagógicos en Flauver J. y Maanen J. (2000): “a) aprendizaje histórico, por la provisión directa de información histórica; b) aprendizaje de temas matemáticos, siguiendo una enseñanza y aprendizaje aproximado inspirado por la historia; c) el desarrollo profundo del conocimiento, desde la matemática misma y del contexto social y cultural en que las matemáticas tuvieron que hacerse” (p. 208).

El uso de la historia matemática en el aula de clase según resultados del ICMI y experiencias de profesores a través del mundo Flauver J. y Maanen J. (2000) contribuye en :”a)comprender más profundamente el significado de conceptos, teorías, métodos, y pruebas en matemáticas; b)identificar pasos cruciales, dificultades y obstáculos en la evolución de un tema; c)organizar la enseñanza para mejorar y proporcionar motivación en el estudio de un tema; d)constituye una reserva de ejemplos, problemas y diferentes alternativas alrededor de un tema; e)apreciar las matemáticas como un proceso creativo; f)ver las matemáticas como un esfuerzo humano con relación a otras actividades humanas; g)mantiene una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas” (p. 241).

Las anteriores y muchas otras razones son argumentos claros a favor de la integración de la historia de las matemáticas en el aula de clase en la enseñanza de temas y conceptos matemáticos.

1.1. CULTURAS PRECOLOMBINAS

Para integrar la historia de las matemáticas de manera apropiada en el proceso educativo es necesario conocerla, por tanto a continuación se expone ampliamente la historia de las culturas Inca y Guane. Esta información histórica fue recopilada por Ardila, I. (1978) y Espinoza, W. (1990).

Según Gail Fitzsimons en Flauver J. y Maanen J. (2000) “el soporte histórico es valioso para estudiantes de todas las edades; no menos, para adultos buscando un desarrollo de su destreza numérica. Por ejemplo es usualmente fascinante para un estudiante de cualquier edad reflexionar acerca del sistema numérico comúnmente usado. ¿De donde vienen los dígitos?, ¿cómo se desarrollaron?, ¿qué produjo el cambio de los números romanos?, ¿cuál es la evolución de la historia de los puntos decimales, porcentajes, operaciones básicas, exponentes numéricos, etc.?, ¿cuál es la historia popular de los fraccionarios?, ¿qué hay acerca de los sistemas de conteo de las culturas no europeas, del cálculo con los dedos, de los sistemas de conteo con el cuerpo, etc.?. Tales preguntas generadas por profesores y estudiantes provocan la comprensión que las matemáticas como las conocemos hoy no siempre fueron así, y que estas fueron una necesidad histórica a través de muchas culturas en las soluciones matemáticas para cambios y problemas de la humanidad” (p.253). Nos detendremos en responder la última pregunta, ¿qué hay acerca de los sistemas de conteo de las culturas no europeas, del cálculo con los dedos, de los sistemas de conteo con el cuerpo, etc.?, específicamente las concepciones matemáticas del sistema de numeración de las culturas Inca y Guane. En primer lugar trataremos de conocer un poco acerca de las culturas precolombinas, para luego centrarnos en la historia de las culturas Inca y Guane.

Cuando llegaron los europeos a América, a partir del año 1492, encontraron numerosas comunidades aborígenes que tenían distintos niveles de desarrollo cultural.

Muy pocos eran nómadas, vivían de la pesca y de la recolección. Otras comunidades más numerosas eran seminómadas y habían iniciado la práctica de la agricultura, la producción artesanal, etc., y completaban su alimentación con la caza y la recolección.

Otras comunidades ya se habían establecido permanentemente en aldeas agrícolas; en Centro América, y en los Andes suramericanos florecieron las llamadas altas culturas que en muchos aspectos igualaban las culturas del viejo mundo, y en otros aspectos las superaban.

Los mayas fueron un antiguo pueblo de América Central, cuya área de influencia comprendía un vasto territorio situado entre los actuales países de Guatemala, Belice, el área occidental de Honduras y El Salvador, y los estados Mexicanos de Yucatán, Campeche, Quintana Roo, Tabasco y Chipas. La civilización maya se caracterizó por el uso de escritura jeroglífica, la aplicación de un particular sistema de cubrir los edificios con falsas bóvedas, el establecimiento de un calendario solar, entre otros.

Los aztecas fueron un pueblo con una extraordinaria organización militar, que crearon un gran imperio, cuya lengua era el náhuatl. La historia azteca se divide en tres momentos distintos: la etapa inicial corresponde a la llegada de los aztecas al valle de México y a su asentamiento en Tula, hacia el 1214 d.C., en el segundo período, que finaliza en 1428, se funda la capital, Tenochtitlán, entre 1325 y 1370. Durante la tercera etapa, el imperio alcanza su momento de máxima expansión y desarrollo. La civilización azteca desaparece en 1520 con la llegada de los conquistadores españoles, bajo el mando de Hernán Cortés.

La cultura inca fue la resultante de la fusión de tres culturas que le antecedieron: la cultura tiahuanaco de la región del lago Titicaca, la cultura nazca, de la zona meridional de Perú; y la cultura mochica-michú, de la costa septentrional.

El imperio inca, llegó a construir un perfecto sistema de organización social, económica y política, realizó grandes e importantes obras de ingeniería y construcción (carreteras, sistemas de riego, etc.) y alcanzó un alto grado de desarrollo cultural; por todo ello, los incas son considerados el imperio más próspero y organizado de la América precolombina.

El imperio Inca llegó a extenderse desde el norte de Ecuador hasta el centro de Chile, abarcando territorios de Perú, Bolivia y Argentina, y contó aproximadamente con seis millones de habitantes. Se cree que el fundador del imperio incaico fue el inca *Manco Capac*, quien condujo a su pueblo desde Cuzco e inició su expansión hasta construir un estado fuertemente centralizado desde la ciudad del Cuzco. El último inca fue *Atahualpa*, ejecutado por *Francisco Pizarro* en 1533

Aunque el conocimiento actual de los sistemas de numeración de la América Precolombina no es muy completo, es posible afirmar que poseían herramientas de conteo y cálculo con las que realizaron estimaciones con una apreciable exactitud.

1.1.1. Cultura Guane

Antes de iniciar el relato de la situación social, económica, cultural y religiosa de los Guanes, es necesario observar que existe muy poca literatura que trate específicamente de este gran pueblo. Por eso muchas veces es necesario aducir datos referentes a toda la raza indígena y en particular a los Chibchas, los que lógicamente cobijan a los Guanes y de los cuales llegamos a concluir, con las noticias que tenemos de este pueblo, las características de los primitivos habitantes de la Provincia de Guane.

Es necesario recordar que desafortunadamente muchos de los datos de la Conquista se quedaron sepultados en el silencio de los siglos, debido a la rigurosa censura de la Corte Española, acerca de los libros que se escribieron sobre el descubrimiento y posesión de las tierras en América.

Los guanes subsistieron hasta mediados del siglo XIX. Lentamente se fueron mezclando y así podemos concluir que hoy, aun cuando se conservan varios apellidos Guanes y aparecen familias con rasgos aparentemente indios y con el ángulo facial bastante agudo, es muy difícil creer que existan descendientes directos y de sangre pura de los Guanes.

Los Guanes eran uno de los grupos que integraban la familia Chibcha, Muisca o Mosca. Naturalmente en una extensión tan grande y sin medios de comunicación, las diversas tribus tenían que diferenciarse en sus características idiomáticas y en sus costumbres, no pudiendo así catalogarse dentro del marco riguroso de la confederación Chibcha, que ocupaba el centro de esta gran familia, en la altiplanicie andina, sin que por esto los numerosos idiomas y dialectos de los habitantes de tan dilatada región, dejara de tener filiación chibcha. El grupo Guane hizo parte de la familia Chibcha, pero con algunas manifestaciones culturales diferentes a los de sus vecinos del sur, los Muiscas. Así el dialecto guane no sólo estaba emparentado con el chibcha, sino que era una variedad regional o dialecto de este idioma.

Los Guanes ciertamente fueron “una nación diferente” con su “constitución civil” propia, pero proveniente de los Chibchas. El idioma era diverso, pero filial de aquella gran familia; sus costumbres y sus ritos, no podían ser exactamente iguales, pero si bastante parecidos. Los Chibchas y los guanes no empleaban la “r” ni la “d”, los españoles españolizaron muchas palabras indígenas.

La capital del imperio de los Guanes era Guanentá, región cercana al actual Guane. El epíteto: Guanentá que lleva nuestra provincia, es en recordatorio toponímico de la organización tribal indígena de los Guanes; etimológicamente significa: Arboleda. Dicho nombre fue dado por los primeros españoles que conquistaron, sometieron, pacificaron y exterminaron dicha comunidad indígena.

En términos aproximados, el número de pobladores del territorio Guane, al momento de la conquista española, según el cronista don Juan de Castellanos, afirma: “los indios tenían una población innumerable, pues el circuito solamente de los propiamente llamados Guanes, tenía 30.000 casas pobladas de dos o tres vecinos cada una y en ella, sus mujeres y familias, de manera que la provincia toda era un manantial de naturales”.

El historiador e investigador socorrano, doctor Horacio Rodríguez Plata, en la Revista Estudio, dice que: “antes de la conquista española habían unos 100.000 nativos Guanes” en el circuito de lo que propiamente llaman guane. Los Guanes, con todos los cacicazgos comprendidos en su extenso territorio llegaban a 200.000.

Los Guanes se ubicaron en la región de Guanentá, desde Vélez hasta la meseta de Bucaramanga, comprendiendo los territorios de Charalá, San Gil, Socorro, Piedecuesta, la Vega de Saravita, y la margen occidental del río Chicamocha. Los antiguos mapas del Reino de los Chichas llegaban por el norte hasta el río Lenguaruco, excluyendo la ciudad de Suaita, como del Reino de los Guanes. Y por el sur, dice Simón, “la tierra de los Guanes distante de la ciudad de Vélez, a la parte del este veinte leguas escasas”. Fijados estos dos extremos, norte y sur, los límites más probables de esta provincia son:

Por el Norte, tenían como vecinos a los Chitarreros, desde la confluencia del río de Oro con el Suratá y éste arriba, en dirección oriental, hasta encontrar el filo de la Mesa de Juan Rodríguez y luego bordeando la misma hasta llegar al río Guaca.

Continúa por el Oriente rindiendo pleitesía a los Lanches, río Guaca al medio, hasta su caída al Chicamocha; sigue por esta último arriba a encontrar el río Onzaga y sube por el mismo hacia la cordillera en dirección sur.

Por el Sur eran sus colindantes los Chibchas, continuando hacia el occidente por la cordillera a dar al nacimiento del río Lenguaruco y por éste aguas a bajo, hasta su confluencia con el río Saravita o Suárez.

Por el Occidente, río Suárez al medio, lindando con los Agataes y después con los indomables Yariguies, por la cordillera del mismo nombre; y por esta a dar frente a Zapatota, para luego caer al Sogamoso; continua aguas abajo Hasta el punto más cercano al río de Oro y descender al punto de partida.

En este inmenso territorio Guane, hoy están fundadas cuarenta y cuatro poblaciones, filiales a Guane.

Los guanes hacían sus transacciones comerciales con los Chibchas del Reino: para este fin existió un gran mercado en el sitio de Sorocotá, que estaba a distancia promedia entre los dos grandes Imperios. Se realizaba cada ocho soles. Allí los guanes llevaban algodón, ayo y demás productos propios de estas tierras, artefactos de fique; y traían la sal, algunas joyas y tal vez los caracoles marinos para hacer sus collares y adornos.

Nuestros Guanes no dejaron monumentos grandiosos, pero sí muestra de una cultura superior, como dice Aguado, “era gente de los más agudos ingenios y tenía tanto concierto y orden en el gobierno y regimiento de sus reinos y provincias, por cuanto por su historia se puede ver”.

Los Guanes tuvieron su propia escritura, una forma de representación grafica de sus pensamientos. Parece indiscutiblemente que solamente emplearon la escritura ideográfica, representando por símiles las personas, los hechos u objetos. En las figuras no aparecen figuras humanas con sus facciones propias, sino que pintaban al hombre por medio de monos, ranas o líneas cubistas con algunos adornos, para la diferenciación de sexos y categorías. Hasta ahora sólo se ha comprobado que nuestros aborígenes escribieron sobre piedras, con tintas al parecer vegetales y en lugares defendidos del agua, o con líneas grabadas en hondo en superficies descubiertas.

La población Guane fue uno de los sitios donde más se practicó la fabricación de cerámica, usaban la greda ferruginosa para la confección de utensilios más comunes como: ollas, mucuras, cántaros y tazas; y arcillas plásticas muy densas como especie de caolina, que empleaban para jarros y vasos, ornamentados con mucha habilidad y refinado gusto. Además de la cerámica, tejían para el consumo familiar y para venta a cambio de otros productos.

Los Guanés eran ante todo agricultores, y en este trabajo también tomaban parte las mujeres, pues los hombres debían abastecer el hogar de carnes, como frutos de la caza y la pesca; por esto los hombres preparaban la tierra y dejaban a las esposas e hijos la siembra, conservación y recolección de los cultivos. Los principales cultivos de los Guanés eran la auyama, el maíz, las habas, la yuca, el fique, el tabaco y el algodón.

No es probable que los Guanés explotaran las minas de oro de aluvión en el río de Oro. No hay de esto la menor noticia de los historiadores y las búsquedas en la tumbas o en las cuevas sepulcrales de esta familia indígena, prueban que estos tenían muy poco oro, las escasas joyas que se han encontrado de este metal, es muy probable que las obtuvieran de sus vecinos, los chibchas, a cambio de algodón y mantas.

La constitución social de los Guanés estaba formada por clanes, es decir, por grupos de familias del mismo parentesco por línea materna. La unidad primigenia de la sociedad de los Chibchas era el clan, constituido por personas que pertenecían a una misma familia por un vínculo biológico unilateral, es decir, por línea femenina, tanto hombres como mujeres estaban ligados por línea materna y por eso pertenecían al clan de las mujeres y no del varón, pero vivían con el padre. Varios clanes formaban una tribu y varias tribus una confederación, como la que gobernaba el cacique Guane. La autoridad del cacique era considerada de origen sagrado; los indígenas creían que su poderío procedía del Sol y de la Luna; por esto se les respetaba muchísimo y se les obedecía ciegamente.

Los indígenas consideraban como a Señor universal y aún a Dios de los dioses a Bochita, era el especial protector de los caciques y capitanes.

Fray Pedro Simón pondera así la presentación y los atractivos de los habitantes de esta región: “son los indios bien dispuestos, de buenas caras y más blancos que colorados. Las mujeres son de muy buen parecer, blancas y bien dispuestas y más amorosas de lo que es menester, en especial con los españoles, aliñosas en todo”.

Y Castellanos escribió así de los Guanes: “tienen disposición y gallardía; y es gente blanca, limpia, curiosa, los rostros aguileños y facciones de linda y agraciada compostura. Y las que sirven a los españoles es de maravillar cuan breve toman el idioma castellano, tan bien articulados los vocablos como si les viniese por herencia”.

Fernández de Piedrahita se une a los anteriores, en su buena apreciación de los Guanes, cuando escribe: “son todos estos naturales, así hombres como mujeres, por la mayoría de hermosos rostros y buena disposición. Y singularmente en jurisdicción de Tunja y en Guane y Chanchon, de la Provincia de Vélez, donde las mujeres son hermosísimas y bien parecidas.” .

Los conceptos de los historiadores dan la mayoría de votos y aplausos al buen parecer de nuestros Guanes y nos permite concluir que dada la diversidad de tribus que componían la Provincia y el vivir unos bajo los quemantes soles de las hoyas del Chicamocha o del Saravita y otros recibiendo el aire frío de las cordilleras, no es posible catalogar a todos los naturales del Reino de los Guanes como “de linda y agraciada compostura”.

Por el estudio de los materiales osteológicos hallados en cuevas sepulcrales de los Guanes (Mesa de Heridas y Espinal vereda del actual Villanueva) se advierte que los cuerpos de los hombres eran fuertes y algunos alcanzaban una estatura hasta de un metro con sesenta centímetros.

La dentadura en general era muy buena: en los cráneos encontrados se ven muy buenos molares, aún perfectamente sanos, en algunos casos se advierte el efecto

de la caries, a pesar de los medios que empleaban para conservar íntegra su dentadura.

Se han hallado cráneos deformados; seguramente usaban la deformación de la cabeza, pues las líneas encefálicas no son naturales, parece que acostumbraban el sistema de deformación tabular oblicua, mediante el empleo de tablillas que ponían a los niños en el frontal y en el occipital, colocadas en forma inclinada y atadas entre sí por cuerdas. Parece que también usaron la deformación erecta, aplicando tablillas en sentido vertical.

En los cráneos hallados por el profesor Justus Wolfran Schottelius en la “Cueva de los Indios”, en la mesa de los Santos, en su excursión científica a esa población, realizada en 1940, escribió el mismo que había encontrado cráneos diferentes:

-Cráneos dolicocefalos con deformaciones sumamente particulares, la mayor parte aparentemente de sexo masculino.

-Cráneos braquicefalos, en parte muy altos, este tipo predomina en las momias.

Entre los cráneos de esta clase advierten formas típicas de los cráneos chibchas.

Según la observación de Schottelius, de que la mayor parte de los cráneos deformados eran aparentemente de sexo masculino, es posible creer que procuraban dar esa forma a sus cabezas para facilitar sostener el pretal de las cargas que transportaban. En uno de los cráneos hallados en “El Espinal” se observa un hundimiento manifestado en toda la frente, posiblemente por el constante cargue de bultos.

Hoy no es posible delinear el rostro que tenían nuestros indígenas, sino observando los ángulos faciales de los cráneos encontrados. Pero no podemos hallar, fácil y seguramente un “doble” indígena, en el rostro de quienes hoy, especialmente en nuestros campos, creemos que perfilan la imagen de nuestros antepasados. El cruce de sangres, el paso de los siglos, la diversidad de climas y de alimentación, han hecho que casi seguramente se haya borrado la verdadera figura de nuestros Guanes.

Nuestros aborígenes, que podían respirar el aire puro de nuestras montañas, sin ninguna de las contaminaciones actuales, que se alimentaban de vegetales y de pescado o carne de tinajos, armadillos, venados y aves de cacería, es muy seguro que era gente fornida y valerosa.

Los Guanes, de agrupación y dialectos diversos de los Chibchas, eran sin embargo de la misma familia y con ellos se distinguían de las otras agrupaciones indígenas por su mayor grado de civilización, demostrado entre otras cosas por el vestido. Mientras otras familias primitivas sólo usaban el guayuco o únicamente un tapa sexo, los Chibchas y los Guanes vestían con mantas de hilo.

Llevaban, tanto hombres como mujeres, una manta ceñida a la cintura y otra que pendía del hombro izquierdo, donde la unían con un nudo, los caciques y los principales de la tribu y sus mujeres unían el manto con alfileres de oro y podían llevarlo largo hacía atrás hasta los talones. El cacique podía conceder esto mismo a los que se distinguían de la tribu por su valentía.

En la cabeza usaban casquetes, lo más de ellos de animales bravos, matizados de plumería de todos los colores y en las frentes medias lunas de oro o plata, con las puntas hacía arriba. En los brazos se ponían por brazaletes sartales de cuentas de piedra o hueso; chagualas de oro en las narices y orejas, que para este efecto horadaban, y la mayor gala consistía en pintarse el rostro y el cuerpo con vija colorada que con facilidad se destiñe o con pintas negras de jagua que permanece muchos días.

Las mujeres usaban una manta cuadrada, que llamaban chircate ceñida a la cintura con una faja que llamaban chumbe o maure, y sobre los hombros otra manta pequeña, nombrada liquira, prendida en los pechos con un alfiler grande de oro o plata, que tienen la cabeza como un cascabel y llaman topo, de suerte que los pechos quedaban casi descubiertos.

En cuanto al cabello, hombres y mujeres llevaban los cabellos largos, los varones hasta los hombros y partidos en forma nazarena o abierta en dos por una carrera central. Las mujeres lo tenían suelto y una de sus mayores gracias era tenerlo

muy largo, valiéndose para esto de yerbas que creían tenían la propiedad de hacer crecer la cabellera. Y como la humanidad ha sido siempre la misma, procuraban disimular el paso atrevido de de los años, entonces como ahora, conservando siempre el cabello negro, mediante el empleo de tintas o sumergiéndolo en aguas y lejías fuertes.

Los indios se enorgullecían de su cabello, no sólo como adorno, sino aun como parte importante de su digna presentación, por esto una de las mayores afrentas era cortárselo, y en sus leyes penales, era este uno de los más ignominiosos castigos.

De ordinario se cubrían la cabeza con gorros o cofias de diversas formas, hechas de fique o algodón o de pieles de animales salvajes; los personajes más importantes de las tribus llevaban gorros muy lujosos y las mujeres los pintaban con rayas y dibujos apropiados. En las fiestas y cuando salían a la guerra usaban vistosas coronas de plumajes de varios colores, que con el movimiento de la marcha brillaban hermosamente y daban a todo grupo un aspecto excepcionalmente llamativo y agradable.

El color de sus vestidos era el blanco de sus mantas, para el común del pueblo en los días ordinarios, pero las tenían también pintadas o tejidas con hilos rojos o verdes, en franjas simétricas o formando graciosas figuras rectangulares. Naturalmente los vestidos de los caciques y principales señores, eran hechos en telas más hermosas y artísticamente fabricados y decorados.

Es muy de anotar el color del luto, como en algunos países asiáticos, era el rojo, por esto en los casos de muerte de una persona de la tribu se vestían con mantas de este color y teñían su cuero con achiote.

El calzado si fue totalmente desconocido en nuestros indígenas, por esto siempre yendo descalzos, tenían los pies dilatados, los dedos abiertos y las plantas endurecidas, llevando el vestigio de de los largos caminos recorridos en los años de su vida.

Sus adornos consistían en narigueras de piedra muy fina labrada y para los grandes del pueblo labradas en oro, orejeras vegetales o de muy fino metal,

collares y brazaletes hechos de huesos muy bien pulimentados y debidamente perforados, o de pequeños rodetes sacados de caracoles o de semillas con cubiertas óseas.

Usaban también como adornos, pectorales de diversas figuras, labrados en oro, cobre o piedras muy finas.

Otro de sus adornos eran los cinturones, con los cuales sostenían la manta que llevaban como túnica y que eran muy sencillos para el común de los Guanes, pero para los principales de la tribu eran tejidos de diversos colores y llevaban otras figuras decorativas, de acuerdo con la categoría de las personas.

Los adornos de oro, eran escasos entre los Guanes, eran propios de los caciques o de príncipes o eran concedidos algunas veces a sus vasallos, como premio a alguna acción valerosa en defensa de la tribu. También a los sacerdotes o a los Jaques se les adornaba, después de sus largos años de preparación, con las joyas que correspondían a su cargo.

1.1.1.1. Numeración y Cálculo del Tiempo. Según los cronistas los primitivos habitantes de estas tierras chibchas y guanes se valían para contar, en primer lugar de los dedos de las manos, para contar de diez en adelante se servían de los dedos de los pies, anteponiendo la palabra *quijicha*, que significa pie a los diez primeros números.

Así contaban hasta diez:

Uno, ata.

Dos, boza.

Tres, mica,

Cuatro, muijica.

Cinco, jizca.

Seis, ara.

Siete, cunjupcua.

Ocho, sujuza.

Nueve, aca o acan.

Diez, unebibico.

De diez en adelante contaban así: once, quijicha ata; doce, quijicha boza; trece, quijicha mica, y así en adelante.

Al número veinte le llamaban *gueta*, después sumaban por veintes, un veinte, dos veintes, tres veintes, etc.

El número gueta lo dividían en cinco partes: 5, 10, 15, 20 de los cuales se servían ellos para sus cuentas y negocios.

Los Chibchas y por tanto los Guanes, dividían el tiempo en años, meses y días. No parece que contaran propiamente las horas. Pero junto a las casas de los señores principales de la tribu tenían un poste clavado, muy recto, que les servía con su sombra para indicar el avance del día., era un verdadero reloj de sombra, a este poste lo llamaban "ta" y por semejanza daban al tiempo el mismo nombre que al palo que tenían para indicarlo. Empleaban la palabra Pcuaxiana que significa "hora", Pero en el sentido de instante de momento.

El jeroglífico del tiempo era un poste, con una cuerda atada a la parte alta, aludiendo así al sacrificio de Gueza, al que inmolaban atado al palo indicador de adelanto de la luz solar, al concluir el periodo de veinte años lunares.

Al día lo llamaban zua y al día completo zuansinca. Al día lo dividían en dos partes: Suamena o mena y tarde, Suameca o meca.

A la noche la llamaban zajasa o za; a la primera mitad de la noche, zasca o zaca y a la segunda mitad zagui o caqui.

No dicen nada los cronistas si tenían el día de descanso semanal, lo que parece muy natural; como el mercado principal era cada ocho soles, es posible que ese día fuera el de descanso o suspensión de trabajo agrícola.

Los meses los contaban por las lunas, con sus menguantes y crecientes, dividiendo cada una de estas dos partes en otras dos; así resultaban cuatro partes del mes, nuestras semanas. Los meses los contaban por las fases de la luna; principiaban a contar el mes desde el plenilunio que ellos llamaban Ubchihica, a

los ocho días, el cuarto menguante o Cujupcua; venía luego la oscuridad total de la luna denominada por ellos Mujjica o cosa negra, al siguiente día, luna nueva, lo llamaban Jizca o unión de la luna y el sol, que ellos creían eran las nupcias de esos dos astros; después llegaban al cuarto creciente o Mica para llegar de nuevo al plenilunio.

Tenían también el año de doce lunas, el cual llamaban Zocam o Chocan y que principiaban con el tiempo de preparar la tierra para sus siembras, que mas o menos era en nuestro enero. Así procuraban igualar el año lunar con el año solar. El año terminaba con el fin de sus cosechas.

Para significar el pasado decían Zocamana (Chocamana) y el año presente Zocamata (Chocamata).

Llevaban cuenta de los años: de manera que jamás decían solamente Zocam, sino que le añadían el número que le correspondía: zocm-ata, zocan-bozaa, zocam-mica, etc.

Seguramente tenían su calendario basado en hechos muy importantes de su historia, que marcaban el principio de las edades o épocas; pero esto es hoy un enigma indescifrable, ya que los conquistadores no se preocupaban por averiguar esas tradiciones.

Tenían también un periodo de tiempo de cuatro lustros, el termino de los primeros años lo llamaban jizca; el segundo lustro terminaba con ica (10); el tercero finalizaba con quichajizca (15) y el último concluía en gueta (20). Era un periodo de veinte años lunares, al concluir ofrecían el sacrificio de un joven, al cual llamaban "Guez" que quería decir sin casa., por que eran jóvenes a quienes de ordinario tomaban como prisioneros de las guerras, o niños que desde tierna edad los sacaban de sus casas y los llevaban a sitios especiales, donde los cuidaban esmeradamente. Llegado el día del sacrificio organizaban una solemne procesión que encabezaba la victima; llegados al lugar escogido le arrancaban las entrañas y lo ofrecían a sus dioses en el palo o "ta", como propiciación por toda su tribu. En esta víctima ellos tenían el vocero que expresaría a la luna todas las penalidades y angustias, de los que vivían en este mundo.

1.1. 1. 2. Guane. Guane es un pequeño corregimiento cuya patrona es Santa Lucía, la reina de los ciegos y en honor a ella se construyó en el año de 1600 la iglesia que lleva el mismo nombre. Ubicado diagonal al templo se encuentra el "Museo paleontológico, arqueológico y antropológico", fundado en 1970 por Isaías Ardila Díaz. . En la segunda sala encontramos cerámicas de la cultura Tairona, flechas de los motilones del Norte de Santander y el escudo con su significado: la punta de plata representa las tierras de Guane, el chevrón en rojo la sangre del indígena que bañó al pueblo en la conquista y la cruz, la iglesia que defendió al indio”.

En la primera sala se encuentra la sección de paleontología podemos observar algunos fósiles y animales marinos que se petrificaron.” Esta región fue mar hace unos 120 millones de años, por eso se han encontrado fósiles. La parte positiva del caracol se llama Amonita porque está en alto relieve y en pose de espiral. La huella es la parte negativa del caracol. También hay madera fosilizada, proceso que ocurre cuando está dentro del agua sin oxígeno y se vuelve piedra. Peces completos, serpientes, semillas de fruta, restos de mastodonte de más de un millón de años”.

Este lugar sólo cuenta con dos salas pero en él se encuentran guardados varios tesoros de la cultura Guane, de la que se pueden aprender datos sobre sus indígenas. Por ejemplo queda claro que ellos cultivaban tabaco y coca, se dedicaban a la caza y a la pesca, tejían finas mantas y cerámicas que las cambiaban a los chibchas por oro, sal y otros productos.

Todo esto se descubre en la parte arqueológica del museo. "De los indígenas Guane conocemos sus adornos, una nariguera mezcla de cobre y de oro; y un pectoral que lo llevaba la mujer en el pecho, además, tenemos unas agujas de madera que utilizaban para tejer mantas. Eran de los mejores tejedores de la región. Los Guane no conocían el hierro ni el alfabeto, y ya no existen indígenas

de esta etnia, sólo quedan algunos apellidos como Arquichire, Guaracao, Sinú, Guaitero, entre otros. Además, quedan nombres de sitios, rasgos y costumbres"

La institución también tiene algunos de los elementos que utilizaban los españoles que colonizaron la región. Por ejemplo, cuenta con una antigua vitrola, con uno de los primeros trapiches que existieron para exprimir la caña y una prensa de tabaco. "Es un tornillo sin fin que aún se usa para prensar el tabaco. También hay costales de fique, una tubería de barro del primer acueducto de Guane y objetos de arte religioso como una puerta del sagrario del siglo XVII forrada en hojilla de oro, el Santo Sepulcro del Viernes Santo de 1658, hecho en madera y forrado en hojilla de oro".

Barichara y Guane están unidos por un hermoso Camino Real que fue declarado Monumento Nacional (mediante resolución 020 de 1977 y bajo el decreto 0790 de 1988). Los historiadores aseguran que éste hizo parte del Camino Real del Centro-Oriente colombiano, que integró la ruta de Santa fe de Bogotá, Tunja, Bucaramanga, Pamplona y Cúcuta, con ramales que conducían hacia Cartagena y Venezuela; un Camino que se extendía entonces por los departamentos de Cundinamarca, Boyacá y Norte de Santander. En la actualidad muchas personas realizan el recorrido como una ruta ecoturística. Otros, prefieren verlo desde los miradores de Barichara.

Historia, paisajes encantadores, gente amable teñida con el mismo color de su rojiza tierra y con manos de talladores; escenarios cercanos donde hay cultura, recreación y mucha diversión, todo esto sumado a una deliciosa comida, como dicen las señoras que cuidadosamente continúan realizando las delicias de esta tierra como la pepitoria, el mute o su famosa arepa santandereana que no sólo se prepara con maíz sino que además tiene chicharrón y yuca, preparan un delicioso sabajón tradicional, de café y arequipe.

1.1.2. Cultura Inca

Casi al mismo tiempo que los aztecas se establecían en la meseta Central de México, en los territorios de América del Sur (desde Colombia hasta el norte de Chile y el noreste argentino) se consolida un vasto imperio, el de los incas. Este era un pueblo que llegó a los Andes centrales peruanos desde un lugar aun no certeramente establecido. Gracias a su gran poderío militar, conquistaron los muy desarrollados pueblos que allí habitaban. Los incas se decían descendientes del Sol. Según una leyenda, Viracocha el creador, hizo salir al mundo por una cueva a cuatro hermanos y cuatro hermanas. Manco Capac, uno de aquellos, mato a sus tres hermanos y, llevándose a sus hermanas, se asentó en las cercanías de Cuzco, en un terreno que juzgo fértil. Los sucesores de Manco Capac, fundarían con el tiempo, el imperio inca. La lengua oficial era el quechua (que aun hoy se habla en vastas zonas sudamericanas) y hablado en la mayoría de las comunidades hasta la llegada de los españoles, pero al menos 20 dialectos locales subsistieron en varias partes del imperio.

En el Cuzco (capital del imperio y que significaba "ombligo del mundo"), se levantaba uno de los famosos templos, el de Coricancha.

Los Incas fueron los dirigentes del imperio americano más grande. Cerca del fin del siglo XIV, el imperio comenzó a extenderse de su región inicial en la región de Cuzco hasta la región sur de las montañas Andinas de América del Sur. Esta terminó brutalmente con la invasión española dirigida por Francisco Pizarro, en 1532. En el momento de su rendición, el imperio controlaba una población estimada en 12 millones de habitantes.

Los incas fueron gobernantes que recopilaron y dieron gran extensión a una serie de costumbres que ancestralmente existían en los Andes. Su valor no se halla tanto en su capacidad creativa, sino en su habilidad para difundir, ordenar y

administrar el sistema andino en un amplio territorio. La base de la cultura y la organización andina se encuentra en el parentesco, es decir, en el ayllu, un conjunto de personas que se consideran parientes pues creían descender de un antepasado común. Éstos están a su vez unidos por vínculos de reciprocidad, es decir, están comprometidos a ayudarse mutuamente en las labores cotidianas; a este tipo de trabajo se le conoce con el nombre de ayni. También estaban en la obligación de trabajar juntos para el beneficio de todo el ayllu: este trabajo se conoce como minca. Los miembros de un ayllu responden a la autoridad de sus curacas (caciques, que son los encargados de regular las relaciones sociales, de ejecutar las fiestas, de almacenar recursos, repartir las tierras entre su gente y disponer de la mano de obra). La economía inca no conoció ni la moneda, ni el mercado, por lo tanto los intercambios y la fuerza laboral se obtenían a través de lazos de parentesco o por reciprocidad. Entre parientes existía un intercambio de energía constante, pero también se daba trabajo para la autoridad, conocido como mita. El inca pedía como tributo exclusivamente mano de obra, que era enviada a trabajar sus tierras, a hacer cerámica, a construir andenes o grandes obras arquitectónicas. A cambio, el inca devolvía estos servicios organizando rituales, manteniendo los caminos, repartiendo bienes en caso de necesidad o en fiestas; esta relación por la cual el inca devolvía el trabajo del ayllu se conoce como redistribución.

En el cenit de su poderío, los incas habían desarrollado un sistema político y administrativo no superado por ningún otro pueblo nativo de América. El Imperio incaico era una teocracia basada en la agricultura y en el sistema de ayllus, o grupos de parentesco, dominada por el inca, que era adorado como un dios viviente. En la organización política inca llama la atención la existencia de un sistema de poder dual, donde todas las autoridades aparecían siempre emparejadas: por ejemplo, en el caso del inca, se propone la existencia de dos incas que gobiernan en simultáneo, un inca hanan ('arriba') y un inca hurin ('abajo'). De igual forma, las autoridades a nivel local eran también duales: a nivel

de los ayllus, las máximas autoridades fueron los curacas; todo ayllu tenía dos curacas, uno hanan y otro hurin. Por debajo de los incas, se encontraban las familias de los antiguos incas, las cuales formaban grupos de parentesco conocidos como panacas ('familia noble'), quienes se encargaban de mantener el recuerdo del inca fallecido, de realizar ceremonias en su nombre y de cuidar de sus bienes y alianzas hechas en vida. Las panacas tenían gran influencia en la decisión del nombramiento de los sucesores al cargo de inca. Debajo de este sector se encontraban los jefes de los pueblos conquistados por los incas, los cuales, en caso de no ser rebeldes, recibían una educación cuzqueña y una serie de privilegios. El siguiente nivel de autoridad lo constituían los curacas, jefes de los ayllus. La gente común estaba agrupada en la categoría de hatun runa, se trataba de campesinos miembros de un ayllu, éstos tenían la obligación de ir a la mita (trabajo por turnos) para el Estado inca. Algunos salían temporalmente de esta condición y eran movilizados fuera de su lugar de origen: a estos se les conoce como mitimaes o mitmaqunas, población que era movilizaba a distintas zonas con diferentes objetivos, como obtener recursos o poblar regiones. Finalmente estaban los yanaconas, quienes eran separados definitivamente de su ayllu y pasaban a depender directamente del inca, para quien desempeñaban una labor especializada.

Administrativamente, todo el territorio estaba dividido en cuatro grandes regiones o suyos ('parte'), a ello debe su nombre Tahuantinsuyu (una palabra quechua que significa literalmente 'Tierra de los Cuatro Cuarteles' o 'de las Cuatro Partes'), que estaba, a su vez, subdividido en cuatro: Antisuyu, Collasuyu, Cuntisuyu y Chinchasuyu.

Fue el inca un pueblo de agricultores avanzados: para cada zona desarrollaron una estrategia que permitía obtener el máximo provecho. Utilizaron andenes o terrazas de cultivo para aprovechar las laderas de los cerros, camellones o waru waru en zonas altas inundables, irrigaciones, etc. Es destacable la existencia de un arado de pie conocido como chaquitacla. Los cultivos más importantes fueron

la papa (patata) y el maíz, además del ají, la chirimoya, la papaya, el tomate y el frijol. Las llamas fueron los animales básicos de transporte; también se domesticaron las vicuñas y alpacas por su fina lana. Otros animales domesticados fueron guanacos, perros, cobayas y ocas. Las principales manufacturas incas fueron la cerámica, los tejidos, los ornamentos metálicos y las armas con bellas ornamentaciones. A pesar de no contar con caballos, ni vehículos de ruedas ni un sistema de escritura, las autoridades de Cuzco lograron mantenerse en estrecho contacto con todas las partes del Imperio. Una compleja red de caminos empedrados que conectaban las diversas zonas de las regiones, permitía esta comunicación; mensajeros entrenados (los chasquis) actuando en relevos, corrían 402 Km. al día a lo largo de esos caminos. Botes construidos con madera de balsa constituían un modo de transporte veloz a través de ríos y arroyos.

Durante el imperio incaico el Estado se encargaba de sostener a la Iglesia, un caso único en la América indígena. Los fines principales de la iglesia eran el incremento de las reservas alimenticias y la curación de los enfermos.

El dios supremo era Viracocha. Era inmortal y era el creador de todas las cosas de la tierra y el universo.

También fueron adoradores del Sol, Inti, el dios principal, protector de la dinastía real. Se lo presentaba con una humana de la que salían rayos. Tenía un templo, el Coricancha. Le seguía en importancia el dios del Trueno, llamado Illapa, el agua de la lluvia –creían que venía de una fuente celestial, la Luna, Manaquilla, era la esposa del Sol.

El planeta Venus, era muy importante consideraban que cuidaba a los humanos. El grupo de estrellas de las Pléyades protegía a las semillas.

Las diosas, de la tierra, Pachamama; y Mamacocha, del mar, eran muy importantes para la agricultura y la pesca.

Las ofrendas a los dioses se colocaban en altares, a la vera de los caminos, eran llamados huacas. Existían también santuarios de piedra para orar, llamados apachetas. También reverenciaban a las cumbres cubiertas por nieves eternas. Lo significativo es que, prácticamente, no tenían templos pues, las ceremonias religiosas se desarrollaban al aire libre, en patios, que estaban en los centros ceremoniales. El culto de los muertos era importantísimo. Después de la muerte, las personas eran momificadas y transcurrido un tiempo, eran llevadas a sus casas. Los sacerdotes estaban divididos en categorías, el Sumo Sacerdote llevaba el nombre de Villac Umu, y era siempre algún pariente cercano del Inca. Para obtener el perdón de los pecados, los fieles debían confesarse ante el sacerdote. También creían en la adivinación y en la interpretación de presagios.

El Inca, o jefe supremo del pueblo inca, era para su pueblo un dios viviente, con poderes totales y absolutos. En los primeros tiempos los incas se casaban con las hijas de los monarcas vecinos, pero más tarde se consideró que el linaje perdería su pureza y solo se casaban con sus hermanas. Además de su hermana, o esposa principal, tenía un harén de esposas secundarias que eran llamadas mujeres escogidas, por esto tenían muchísimos hijos que con el tiempo formaban un ayllu especial (llamado panaca), que constituía la gran nobleza.

Los sucesores del trono eran los hijos, elegidos por su inteligencia. Solo podían sucederle aquellos que hubieran tenido con la coya, o esposa principal. El elegido era educado directamente por sus padres, pues a nadie se le hubiera ocurrido educar a un dios. Nadie podía presentarse de cara al emperador y durante las entrevistas, este permanecía oculto tras un cortinado. Al verlo se debía estar descalzo y soportar una pequeña carga en la espalda para indicar sumisión. Su adorno más característico era una banda, de unos 10 cm., confeccionada con tubitos de oro, de los que colgaban borlas rojas. Eran transportados en literas, con toldos y cortinas bordadas, de manera que podía viajar sin que le vieran la cara. Las leyes del Inca eran aceptadas por todos, sin chistar, pues se consideraba que habían sido elaboradas por un dios. Los nobles más importantes eran los

descendientes directos del Inca y se caracterizaban por llevar grandes orejeras de oro. Los nobles de importancia menor, eran los curacas. Todos gozaban de privilegios: No pagaban impuestos, eran mantenidos por el gobierno, se les daba tierras en premio, y además, podían tener otras esposas, ser transportados en litera, usar quitasoles y usar ropas parecidas a las del Inca.

Entre las expresiones artísticas más impresionantes de la civilización inca se hallan los templos, los palacios, las obras públicas y las fortalezas estratégicamente emplazadas, como Machu Picchu. Enormes edificios de mampostería encajada cuidadosamente sin argamasa, como el Templo del Sol en Cuzco, fueron edificados con un mínimo de equipamiento de ingeniería. Otros logros destacables incluyen la construcción de puentes colgantes a base de sogas (algunos de casi cien metros de longitud), de canales para regadío y de acueductos. El bronce se usó ampliamente para herramientas y ornamentos.

Hacia finales del siglo XI, los Incas emigraron desde el centro de Bolivia hacia la zona norte de Perú. Hacia el siglo XV comenzaron a expandirse, luchando contra los pueblos vecinos. Los artífices de este crecimiento fueron el Inca Pachacutec Yupanqui y su hijo Topa Inca, que lograron, en tan breve lapso, incrementar sus fronteras a más de 5.000 Km., abarcando una superficie de 900.000 Km² . Fueron maestros en el arte de la guerra y la ingeniería, crearon un sistema de reparto tripartito de la tierra que aseguraba tranquilidad a todos los habitantes del imperio. La red de carreteras permitía unir Colombia con Tucumán, en Argentina. Pese a su grandeza fueron derrotados, por una pequeña minoría de españoles, en 1534.

Hacia fines del siglo XI el pueblo Inca emigró desde las proximidades del centro de Bolivia, hasta el fértil valle del Cuzco en la actual República del Perú. Según la leyenda Manco Cápac y sus hermanas deambularon por las sierras hasta que un bastón de oro que llevaban se hundió en la tierra en un sitio que está al este del actual Cuzco. Luego de una serie de terribles peleas con los moradores del lugar, lograron establecerse y la primera construcción, que hicieron fue el Coricancha, el

templo del Sol. Durante bastante tiempo los Incas permanecieron en la nueva zona y no pasaban de ser una de las tantas tribus que peleaban entre sí. De manera alguna, habían desarrollado la idea de extenderse o apropiarse de más territorios de los que tenían. Recién el cuarto monarca, Mayta Cápac, comenzó la expansión. De hecho fue el primer conquistador al sojuzgar el país desde el nacimiento del Titicaca hasta las cuencas fluviales de la costa. Sin embargo, hubo que esperar hasta el octavo monarca, Viracocha Inca (que tomó su nombre del dios creador del mundo) para que los incas iniciaran su gran expansión. Fue el primero que tuvo como objetivo el dominio permanente de pueblos no incas. Hasta este momento los pueblos vecinos eran derrotados, pero sin condiciones, tales como la imposición de gobernantes. Secundado por sus hábiles generales, comenzó rápidamente a incorporar otros territorios a sus dominios.

Los lupacas y los collas del Lago Titicaca, muy al sureste de Cuzco, eran dos tribus de lengua aimará que, juntos a los incas, eran los grupos más poderosos de la región. Inmediatamente al oeste de Cuzco estaban los quechuas, de la misma sangre, idioma y cultura que los incas; al oeste de éstos los chancas, que durante los primeros tiempos del reinado de Viracocha había ocupado los territorios quechuas. Los primeros en quedar "fuera de competencia" fueron los lupacas, a quienes los collas derrotaron porque no deseaban que se aliaran con los incas. Un poco más tarde los chancas fueron rechazados heroicamente por los incas, que los expulsaron de su territorio. La muerte de Viracocha Inca marcó el fin de un periodo que tiene bastante de leyenda, para entrar el ciclo conocido como imperio histórico, cuyo gran personaje es el inca Pachacutec. Entre él y su hijo, Topa Inca Yupanqui lograron, en menos de 50 años, extender el imperio desde el norte del Ecuador hasta el centro de Chile, lo que hace una distancia de 5.800 Km. y una superficie de 900.000 Km².

Fueron los creadores de la mitima, el traslado en masa de un pueblo vencido a otra región geográfica bien distante (tal como le hicieron los españoles a los indios Quilmes, en la Argentina). Finalmente, después de vencer a los rebeldes collas y

lupacas, (que aprovechando que los ejércitos del inca se hallaban lejos habían decidido insurreccionarse) y los poderosos chimús. Topa Inca Yupanqui se dedicó a la tarea de organizar el país. El centro de la vida era el ayllu. Esto es como una inmensa familia, con muchos parientes y primos. El ayllu era el grupo social fundamental en el Perú y existía mucho antes del imperio Inca. En los primeros tiempos, cada ayllu tenía tierras de cultivo y un jefe, el Sinchi, al que le debían obediencia. En la época imperial, los incas desplazaron al Sinchi, por otro funcionario llamado curaca también familiar, pero nombrado directamente por el Inca. Esto le permitía tener un gran control sobre todas las comunidades. Los ayllu de una región estaban agrupados en sayas (secciones) y estas formaban un huamán (provincia). Cada provincia tenía su capital. Las provincias estaban agrupadas en cada uno de los cuatro cuartos (suyus) en los que se dividía el imperio a saber: El Cuzco era la capital inca, centro del imperio. El cuarto noroeste o Chinchasuyu, abarcaba Ecuador y el norte Peruano; el Antisuyu comprendía el noroeste y el Collasuyu, hacia el sureste, ocupaba las tierras altas de los aimarás, la cuenca del lago Titicaca, la mayor parte de Bolivia, y las tierras altas del noroeste de Argentina y el norte de Chile. El imperio, en su total recibía el nombre de Tahuantisuyu, "la tierra de los cuatro cuartos". Los gobernadores de los cuatro cuartos formaban parte del Concejo de Estado, con sede en Cuzco y, generalmente, eran parientes del Inca.

Los gobernadores mandaba a los curacas, que tenían distintas categorías según cuantos hombres o contribuyentes tuvieran bajo su jefatura, así el de mayor categoría era el que controlaba a 10.000 y el de menor a 100. Al frente de grupos más pequeños estaba los capataces, plebeyos nombrados por curacas. La estructura social era similar a la de un moderno ejército, con cabos y sargentos dirigiendo grupos reducidos, y oficiales para los grupos mayores.

El Estado ejercía muy importantes funciones en la sociedad incaica. La tierra era de su propiedad y la mayor parte de explotaba comunalmente, también le pertenecía los rebaños de llamas y las minas. El estado protegía a la

población del hambre, la explotación y de cualquier necesidad; pero el precio era duro, los individuos estaban muy reglamentados, no se podía salir de la comunidad sin permiso. De todas maneras, los nobles y sacerdotes eran mantenidos por el trabajo del pueblo. Las tierras tenían, entonces un reparto tripartito; esto es el Estado, la Iglesia (sacerdotes), y el pueblo. A cada persona se le daba tierra para que pudiera alimentar bien a su familia. Los límites de los campos estaban marcados y su destrucción era considerada delito gravísimo. Las tierras no comunales eran cultivadas primero. Cuando llegaba la época de siembra o cosecha llegaban los funcionarios para avisar que era hora de ocuparse de los campos sagrados. Los cosechados en los campos del Estado o de los sacerdotes, era guardado en depósitos separados y lo obtenido era para alimentar a sacerdotes o nobles.

En las zonas de pastura de tierras montañosas, la mayor parte de las llamas pertenecían al gobierno que almacenaba la lana y luego la repartía entre las familias, según sus necesidades. El campesino tenía como propios la casa, el establo, pequeños animales domésticos (perros, cobayos, patos y gallinas sin cola) y el granero, además de los útiles de labranza. Es importante señalar que las comunidades de montaña poseían tierras en zonas costeras y viceversa, así no se producían saturaciones con un mismo tipo de alimento. El pueblo debía además realizar trabajos públicos, (servicio en el ejército, construcción de carreteras, puentes o fuertes) a esto se le denominaba mita.

El tiempo de la mita era variable y podía extenderse durante bastante tiempo. De este servicio, obligatorio entre los 18 y los 50 años, estaban exentos los artistas y artesanos. Los yanaconas eran jóvenes separados muy temprano de los ayllus y eran utilizados, ya sea para tareas en la corte o en la agricultura. A diferencia de la mita, que después de cumplida autorizaba a regresar a su tierra, los yanaconas no regresaban más. Como en ocasiones se los entregaba para el servicio personal de los curacas, con el tiempo podían ellos mismos tener ese cargo. Las niñas más bellas e inteligentes eran llevadas a ser educadas en los templos o ser destinadas

al sacrificio. Algunas, las que mejores dotes demostraran eran educadas para ser Vírgenes del Sol, sacerdotisas que debían hacer votos de castidad perpetua. Las menos bonitas, las reservaban para tareas comunales y eran llamadas huasipascunas, muchachas descartadas. Con los incas la guerra logró un grado de desarrollo tan grande que no fue igualado por ningún otro pueblo de la América india. Si bien las primeras guerras tuvieron para los incas motivos económicos; posteriormente, las causas no respondían a otro propósito que el deseo del Inca de aumentar su prestigio, pues cada emperador inca tenía el deseo de sobrepasar a los anteriores. Los incas no exigían tributo de los pueblos conquistados, como los aztecas, simplemente se les obligaba a reverenciar al Inti y a Viracocha. Se les dejaban sus antiguos dioses, y a los jefes locales se los nombraba curacas. A veces, las zonas que conquistaban eran tan pobres que más que ganancia, era una responsabilidad. Como la vida estaba tan ordenada la guerra era la única manera de competir y sobresalir. Se estilaba la lucha cuerpo a cuerpo, pues no usaban ni arcos, ni flechas; en cambio, empleaban hondas, boleadoras y mazas que tenían encajadas, un palo afilado y escudos. Se usaban con ambas manos. También empleaban espadas de madera durísima, llamadas macanas, además de hachas de guerra con hojas de piedra o cobre y largas lanzas de madera, con la punta endurecida al fuego. Para protegerse usaban camisas de algodón acolchados y eran tan eficaces que los españoles las adoptaron descartando las suyas de acero, calurosas y pesadas. En la cabeza usaban cascos de madera o caña trenzada. Los alimentos estaban asegurados, pues a lo largo de la red caminera había depósitos de provisiones, siempre a punto; si debían desplazarse muy lejos recuas de llamas, eran las encargadas de transportar lo necesario. Los soldados llevaban ídolos, altares y también estatuillas con la figura de incas fallecidos para que les dieran suerte. Al vencer al enemigo se hacían un censo de la población y posteriormente, se elegía una nueva capital donde se asentaban los edificios oficiales. Las poblaciones eran trasladadas cerca de campos cultivables. Si eran muy belicosos, se trasladaba a la población integra a otro lugar geográfico distante. Este operativo se llamaba mitima. En todos los caminos había tambos o

posadas y pequeños puestos que eran los lugares de relevo de los chasquis o mensajeros. Para cruzar los impetuosos ríos de montaña hicieron puentes colgantes. Asimismo, edificaron en las laderas de las montañas (basándose en conocimiento de otras culturas), grandes terrazas de cultivo, similares a escaleras gigantes, que servían para aprovechar al máximo la difícil naturaleza. La economía incaica se basaba esencialmente en la agricultura. Sus cultivos principales eran las papas (de las que tenían cerca de 200 variedades) y el maíz. También de muchos tipos. Cultivaban también porotos, zapallos, ulluco (tubérculo), calabazas, quinoa (de granitos parecidos al arroz y considerada la reserva alimenticia del siglo XXI), maníes, guayabas, y algodón. Como fertilizantes usaban la bosta de viñucas y llamas. La coca era cultivada en las áreas selváticas y era usada en las ceremonias religiosas. El sembrado se efectuaba abriendo la tierra con mazas, para después agujerearla con una pala angosta, con soportes para apoyar el pie llamada taklla. Las semillas eran colocadas en las hileras de orificios y luego se las tapaba. La naturaleza montañosa les hizo copiar sistemas de cultivo de antiguas tribus de la región, que consistían en terrazas hechas con paradores de piedras en las laderas de la montaña. Vistas desde lejos parecen escaleras de gigantes. Tenían sistemas de riego y desagües perfectos. El grano se almacenaban en depósitos llamados colcas. La ganadería, exclusiva de las zonas montañosas, estaban constituida por llamas y alpacas, que eran totalmente domesticas, de ellas se obtenía la leche; además se las utilizaba para el transporte; guanacos y viñucas eran salvajes y había que cazarlos. De las viñucas se aprovechaba la lana y después de esquilas eran dejadas en libertad; del guanaco se consumía la carne. Los pueblos de la costa consumían pescado y mariscos; para sus áreas cultivadas usaban como fertilizantes el guano (deposiciones de aves marinas).

La educación en el imperio incaico estaba reservada a los nobles y se impartía en escuelas ubicadas en la ciudad de Cuzco. Se les enseñaba aritmética y astronomía. Teniendo en cuenta que la economía estaba basada en la agricultura

se comprende la importancia de estas ciencias para medir las tierras, y calcular los cambios de estaciones. Los amautas eran los encargados de enseñar los preceptos religiosos, los conocimientos políticos, históricos y el manejo de los quipus. El resto del pueblo no tenía acceso a una educación sistemática. Se procuraba, no obstante, que todos los habitantes del imperio aprendieran el quechua, pero más por intereses políticos, que educativos.

Los incas se destacaron por sus obras de ingeniería y sobre todo por la red caminera. Había dos caminos principales de norte a sur, uno a lo largo de la costa y otro que atraviesa las tierras altas. Estaban cruzados por caminos transversales y caminos secundarios que unían todas las aldeas y pueblos. La carretera principal partía de Tumbes, pasaba a Arequipa y a Chile. La vía de comunicación más larga partía desde Colombia, seguía hasta Cuzco, proseguía hasta Ayavire donde se bifurcaba en dos ramales que rodeaba el lago Titicaca, seguía hacia el sureste hasta Tucumán, Argentina. De allí partía un ramal que llegaba hasta Coquimbo, Chile, siguiendo de allí hasta la actual Santiago. Otro ramal desembocaba en el actual valle mendocino de Uspallata. A este lugar los incas trasladaron poblaciones de cantidad de mitimas. Se tiene como cierto que la construcción de las actuales acequias se debe a la influencia incaica. Estas carreteras estaban pavimentadas con losa de piedra y medían entre 4,5 y 6 metros, son una altura de 1 y 2 metros. En la zona costera, las carreteras eran rectas y donde era imposible hacerlas (como los desiertos arenosos) se indicaba la ruta con estacas. Fundamentalmente circulaban por estos caminos los chasquis, mensajeros que se iban relevando mediante el sistema de postas. Cada kilómetro y medio había una casilla donde siempre estaban dos chasquis o mensajeros. Se los preparaba especialmente para el trabajo que formaba parte de su mita (tarea de la comunidad). El camino entre Lima y Cuzco (675 Km.) era recorrido en tres días.

La indumentaria incaica era la típica de todos los pueblos andinos y los de la costa. El Estado Incaico tenía el monopolio de las fibras textiles: la lana en las

tierras altas y el algodón en la costa. El comercio posibilitó que las prendas confeccionadas en esos materiales se usaran en todo el territorio. Los hombres usaban un taparrabos que se pasaba entre las piernas y se ajustaba con un cinturón. También llevaban ponchos y, en ocasiones, capa. Transportaban siempre una bolsita conteniendo hojas de coca, efectos personales y amuletos. Las mujeres vestían una especie de camisola que llegaba hasta los tobillos y se ajustaba con un cinturón. Empleaban un largo manto que se ponía sobre los hombros y era sujetado por un largo alfiler llamado topo. Llevaban el pelo largo, con raya al medio y nunca lo cortaban. Los que más se adornaban eran los hombres y solo los nobles usaban orejeras y narigueras. Todos llevaban el pelo moderadamente largo y utilizaban binchas de color. Ambos sexos llevaban sandalias confeccionadas con piel de llama sin curtir.

1.1.2.1. Aritmética, yupana y quipus. La civilización del imperio inca no llegó a desarrollar la escritura y, en consecuencia, carecía de la posibilidad de guardar registros escritos, eso no fue impedimento para que desarrollasen una manera de registrar cantidades y de representar números mediante un sistema de numeración decimal posicional y sus operaciones las llevaban a efecto mediante dos tecnologías:

- **El ábaco o yupana (contador):** "Yupana" es un vocablo quechua que significa "lo que sirve para contar", GUAMAN POMA describe la yupana o "tabla de contar" a través de la siguiente ilustración:



Figura 1. Quipucamayo

Es un excelente tablero rectangular de cinco hileras y cuatro casilleros, en los que redistribuían series de cinco granos de maíz para el cálculo de los matemáticos andinos, quienes se colocaban en la parte más larga de la tabla, al lado de los casilleros con más círculos para evitar movimientos innecesariamente largos. Lo usaban utilizando piedrecillas y granos (quinua, maíz), movilizándolos de unos hoyuelos a otros, según sus colores (blanco y negro). Con la yupana llevaban a cabo operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Constituía una calculadora perfecta. El cronista José de Acosta (1590) se quedó perplejo ante la destreza y exactitud puntualísima de los yupanacamayos, que nunca erraban ni en una tilde, más rápidos que los mejores contadores españoles que empleaban papel y tinta, y a los cuales aventajaban enormemente.

La yupana permite calcular unidades, decenas, centenas, unidades de millar y decenas de millar:

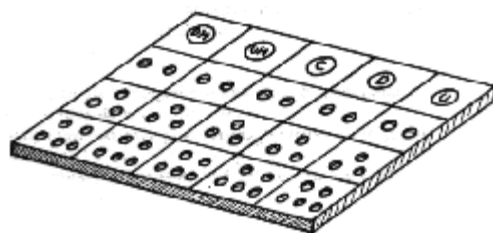


Figura 2. Yupana 1

¿Cómo construir una yupana?

Para construir una yupana básica, que sólo consta de unidades y decenas se necesita los siguientes materiales:



Figura 3.
Tabla de madera



Figura 4.
Tiza



Figura 5.
Piedras pequeñas

Pasos para construir la yupana.

Divida la tabla de la siguiente manera:



Figura 6. Yupana 2

En el interior de los cuadrados perfore o dibuje orificios redondos de la siguiente manera y cantidad. Los tres cuadros de la derecha serán para las unidades y los tres de la izquierda para las decenas.

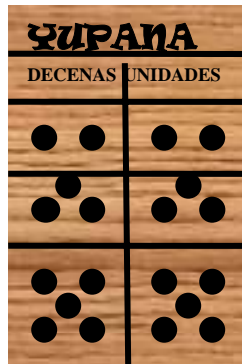


Figura 7. Yupana 3

Las piedras se utilizan para ir realizando las operaciones sobre la yupana:



Figura 8. Yupana 4

Funcionamiento de la yupana

Una yupana básica consta de decenas y de unidades, las decenas están a la izquierda y las unidades en la derecha:

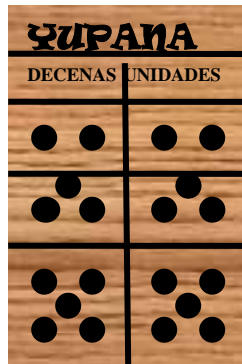


Figura 9. Yupana 5

Como se sabe, 10 unidades hacen una decena. De manera que, por ejemplo, el número 36 se representa de la siguiente forma en la yupana:

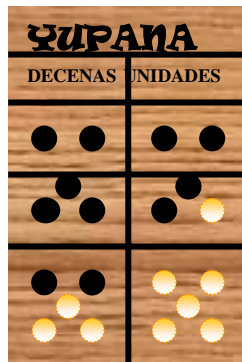


Figura 10. Yupana 6

La yupana nos ayuda a sumar o a restar. Por ejemplo, realizaremos la siguiente operación con nuestra yupana: $36 - 10 - 4 + 2 = ?$

Primero, procederemos a armar en la yupana el número 36:

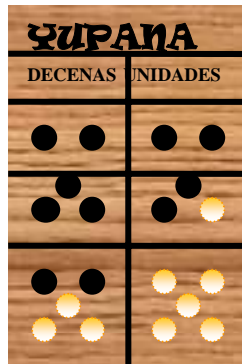


Figura 11. Yupana 7
36

Para continuar con la operación $36 - 10 - 4 + 2 = ?$, procederemos a quitar una decena de la yupana, es decir procedemos a realizar la primera resta: $36 - \underline{10} - 4 + 2 = ?$

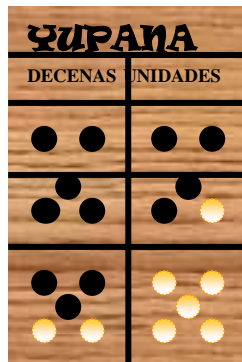


Figura 12. Yupana 8
26

Después continuamos con la segunda resta ($36 - 10 - \underline{4} + 2 = ?$) quitando cuatro unidades de la yupana:

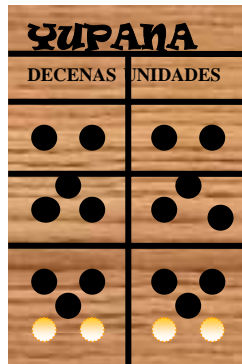


Figura 13. Yupana 9
22

Finalmente realizamos la suma ($36 - 10 - 4 + \underline{2} = ?$) agregando dos unidades a la yupana:



Figura 14. Yupana 10

Por tanto... la operación esta resuelta: $36 - 10 - 4 + 2 = \underline{24}$.

Una reciente interpretación sobre el uso de la yupana fue introducida por el ingeniero italiano Nicolino de Pasquale, profesor de un instituto técnico de Pescara. Los resultados de Nicolino de Pasquale además de sorprendentes son realmente interesantes, pero no los tendremos en cuenta en el diseño de las actividades didácticas porque es más significativo para los estudiantes partir de

los conocimientos previos, como es el sistema decimal, para poder profundizar en el tema Sistema Posicional de Numeración.

A continuación se expone una idea general, a manera de información para el lector, del análisis realizado por Nicolino de Pasquale alrededor del uso aritmético que los Incas daban a la yupana.

Se trata en realidad de "extender" el concepto de notación posicional de los números. Como es bien sabido, una vez elegida una base de representación β , todo número natural n se puede escribir de la siguiente manera:

$$n = \sum_i \alpha_i \beta^i$$

$$\text{con } 0 \leq \alpha_i < \beta - 1$$

Los números α_i son generalmente representados con símbolos diversos e independientes unos de otros: en la notación decimal se usan las cifras 0,1,2,3,...,9. Pero la aritmética que subyace en la calculadora inca requiere en cambio que las cifras sean a su vez representadas en notación posicional, pero esta vez de un tipo diverso.

Cada cifra α_i en realidad se escribe como

$$\alpha_i = \sum_j a_j f_j \quad (1)$$

donde f_j es un peso que viene asignado a la cifra a_j , y por lo tanto no necesariamente es una potencia de una base fija. En este caso específico se trata de cuatro términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci:

$$f_1 = 1; f_2 = 2; f_3 = 3; f_4 = 5;$$

y donde a_j satisface la restricción

$$0 \leq a_j \leq f_j$$

Bajo estas condiciones, la fórmula (1) representa (aunque no en modo unívoco) todos los números comprendidos entre 1 y 39 y, desde un punto de vista concreto, permite la interpretación numérica de la figura que se forma posicionando granos de maíz en los espacios de la siguiente tabla.

00000	000	00	0
-------	-----	----	---

Por ejemplo, las siguientes dos tablas representan al número 4.

00000	00	●●	0
-------	----	----	---

00000	00●	00	●
-------	-----	----	---

De esta manera se codifican las cifras α_i . Para los primeros 39 números se trata entonces de una representación del tipo Fibagonacci (una extensión de la conocida representación de Fibonacci). El paso sucesivo para indicar un número natural cualquiera se efectúa usando una escritura en base 40, y esto lleva a la forma bidimensional de la yupana esquematizada en la siguiente figura. La última columna fue agregada aquí para señalar el peso de la fila y el máximo número representable en cada compartimento (escrito entre paréntesis).

00000	000	00	0	$40^2(40000, 14400, 6400, 1600)$
00000	000	00	0	$40^1(1000, 360, 160, 40)$
00000	000	00	0	$40^0(25, 9, 4, 1)$

El valor de cada grano está representado en la siguiente tabla

8000	4800	3200	1600
200	120	80	40

5	3	2	1
---	---	---	---

Se trata por lo tanto de una escritura donde la notación posicional habitual se desarrolla en altura y el cero es simplemente la ausencia de maíz en la fila. De todas maneras no hay ambigüedad en la interpretación, ya que la escritura se desarrolla desde la parte superior (posición de potencia mayor) hacia la parte inferior y no de izquierda a derecha, donde es necesario indicar explícitamente el cero. Obviamente nada prohíbe la representación de fracciones.

La precisión de 40^{15} que se obtiene con un abaco de 15 filas, como los representados en algunos jarrones andinos, consentía a los incas la respetable precisión de cerca 25 cifras decimales.

En tanto observamos que probablemente los "salvajes" incas debían aprender una tabla pitagórica menos onerosa que la usada por el mundo "civil".

- Quipus:



Figura 15. Quipu

La palabra *quipu* pertenece al quechua, la lengua del pueblo inca, y su significado es "nudo". El uso de esta palabra para designar a ese conjunto de cuerdas con nudos que hemos comentado anteriormente parece, pues, natural. En la actualidad se tiene constancia de la existencia de cuatrocientos quipus auténticos guardados en museos de Europa Occidental y América. La carencia ya mencionada de un sistema de escritura por parte de los incas les llevaría a tener

que emplear dispositivos nemotécnicos que les permitiesen recordar la información. Es por ello que los nudos se emplearían con esa función primordial de registrar y preservar la información. Al no existir documentos escritos por la cultura inca, los únicos medios para comprender el uso del quipu son el análisis de los propios quipus y el estudio en profundidad de las crónicas del pueblo inca relatadas por los soldados, los sacerdotes y los administradores españoles del siglo XVI. Se atribuye a Locke [1912; 1923] ser la persona que consiguió descifrar parte del misterio existente alrededor de los quipus y su uso. De hecho, suyo es el descubrimiento de que los quipus eran dispositivos utilizados para almacenar números empleando un sistema en base decimal.

En vista de lo anterior, el quipu se convirtió en la herramienta empleada para mantener las detalladas cuentas y registros que debían existir en una sociedad tan bien organizada como la inca y en la que convivían unos seis millones de habitantes. El español Cieza de León [1962] (que hizo un registro entre 1547 y 1550) incidía en que dos características importantes del imperio inca eran precisamente su orden y su organización. Así, indica que el rey inca disponía de un inventario con todos los recursos existentes (producción agrícola, ganado, armamento y personas) y que éste se actualizaba a diario. Con ello, cualquier información que se necesitase consultar sería detallada y actualizada.

Esa labor de almacenamiento y actualización de la información la llevaban a cabo un grupo de funcionarios especiales que recibían el nombre de quipucamayos (lo cual se podría traducir por los “guardianes de los nudos”), quienes transmitían su conocimiento práctica y oralmente a sus herederos o a otras personas interesadas. Había quipucamayos para anotar todo lo concerniente a las cuestiones contables, en lo cual los quipus eran infalibles, aunque servían también como instrumentos nemotécnicos en lo que atañe a la conservación de relatos literarios, jurídicos, históricos, etc.

Ellos eran los encargados de guardar los registros correspondientes a los censos oficiales de población, producción, animales y armas en una determinada ciudad. Es por ello que cada ciudad tenía su propio quipucamayo, llegando a 30 el número

de quipucamayos adscritos si la ciudad era muy grande. En la sociedad inca, los quipucamayos disfrutaban de una posición social elevada, incluso dentro del propio cuerpo de funcionarios estatales. No obstante, la capacidad de interpretar y usar quipus estaba ampliamente extendida entre todos los funcionarios incas.

Toda esta información registrada en los quipus y protegida por los quipucamayos era enviada a la capital del imperio, Cuzco. Para ello se empleaba una especie de servicio oficial de mensajería cuyos miembros, llamados chasquis, eran corredores de relevos que llevaban los quipus a través del territorio montañoso que constituía el imperio inca. Estos corredores habitaban por parejas en unas pequeñas casas de postas que, según Cieza [1962], estaban distribuidas a lo largo de los caminos imperiales a intervalos aproximados de una milla. Cada chasqui iba de una casa de posta a la siguiente, donde daba los quipus al chasqui que allí se encontraba. Este sistema de mensajería permitía enviar un mensaje a Cuzco desde una distancia de 300 millas en un lapso de tiempo no superior a 24 horas.

Las cuerdas en cuyos nudos anotaban los guarismos. En éstos cada nudo figuraba el número 1; y conforme aumentaban los bultitos también crecían las cifras. Dependían de la colocación de los nudos para saber si equivalían a unidades, decenas y millares. En el Cusco cada manojo de quipus tenía un color respectivo, los cuales representaban algo, por ejemplo el rojo significaba guerra, el amarillo oro; el blanco plata; y así sucesivamente. Sin embargo los colores y muchos nudillos no tenían un valor universal en todas las etnias del Tahuantinsuyo. De manera que si el amarillo significaba el oro en el Cusco, en Carangue tenía otra connotación, y en Cajamarca una distinta, y así subsiguientemente. Los quipus por lo tanto, sólo podían ser leídos por sus respectivas sedes y por sus propios quipucamayos.

Por eso un quipucamayos de Quito no podía leer los quipus de Lipés; y los de Lipés no entendían a los de Guayacondo. Con todo, es dable de que se hayan existido algunos quipucamayos que dominaran las técnicas y los secretos de las cuerdas de otras áreas. El hecho alerta de que en caso de descubrirse la clave

para leer los quipus del Cusco, ella no valdría para leer los quipus de Chachapoyas ni demás etnias andinas.

Pero es en el cálculo donde mostraban mucha preocupación para registrar las cuentas del Estado. De allí que la formación de quipucamayos ocupaba un lugar importante. Y si bien aplicaban el sistema decimal no consiguieron inventar un símbolo para indicar el cero. Sabían sumar y restar con gran pericia.

Lo quipucamayos, como funcionarios integraban los cuadros subalternos, no obstante era una función extraordinaria y altamente especializada. Llevaban la contabilidad hasta de lo más mínimo de lo que entraba y salía de los bienes del Estado. Apuntaban con exactitud encomiable las estadísticas demográficas del Estado de acuerdo a los grupos de edad, desde el nacimiento hasta la muerte, el número de efectivos militares, el material logístico, de mitayos en actividad, de los próximos a mitar, de los recién casados, de los exceptuados de mitas, etc. Existían quipus para todo, a los que guardaban tanto los quipucamayos residentes en el Cusco como otros pertenecientes a cada etnia. En este aspecto funcionaban auténticas quiputeacas, como lo evidenciaron los señores huancas en 1560-1562 sacando sus cordones para probar ante los poderes del Estado colonial como habían auxiliado a Francisco Pizarro para destruir el imperio de los Inca. Tales cuerdas, que fueron vertidas al castellano en los años indicados, patentizan también que podíanse conservar en ellas la ubicación de los acontecimientos históricos, en el sentido de conocer que ocurrió antes y que ocurrió después de tal o cual hecho; pero nunca los años, meses ni días precisos. Incas, aposuyos, turicuts, visitadores y curacas tenían sus quipucamayos; siendo, por lo tanto, unos magníficos archiveros y hasta “historiadores”.

Las constataciones arqueológicas han demostrado que al quipu ya se lo manejaba desde el Horizonte Medio (Huari, Puquina/Tiahuanaco). Pero los informes más excelentes corresponden al incario, en el cual tuvieron un amplísimo desarrollo debido al control demográfico y contable que exigía el Estado para vigilar las cantidades de personas y de productos que entraban y salían de sus almacenes, talleres y granjas estatales y de las adjudicadas a las divinidades. El

desarrollo del quipu no tuvo razones mágicas ni sagradas, sino exclusivamente prácticas.

Construcción e interpretación de un quipu.

Gran parte de la información de que se dispone acerca de los quipus se debe a una carta de Felipe Guamán Poma de Ayala [1936] al rey de España en la que Aparecían varios quipus dibujados.

Un quipu consiste en un conjunto de cuerdas dispuestas de cierta manera y en las que se hacen una serie de nudos. A la hora de construir un quipu debía tenerse en cuenta que se empleaban diferentes tipos de cuerda. Cada cuerda tenía al menos dos hebras, de modo que un extremo acababa en forma de lazo y el otro en punta con un pequeño nudo. Según la disposición que presentase una cuerda, esta podía ser de uno de los tipos siguientes:

- **Cuerda principal:** es la mas gruesa de todas y de la que parten directa o indirectamente todas las demás.
- **Cuerdas colgantes:** son todas las cuerdas que penden de la principal hacia abajo.
- **Cuerdas superiores:** son cuerdas que se enlazan a la principal, pero dirigiéndolas hacia arriba.
- **Cuerda colgante final:** es una cuerda cuyo extremo en forma de lazo está unido y apretado al extremo de la cuerda principal. Era opcional, por lo que no aparecía en todos los quipus.
- **Cuerdas secundarias o auxiliares:** son cuerdas que se unen a cualquiera de las que están enlazadas a la principal. A las cuerdas auxiliares se les podía a su vez unir otra cuerda auxiliar. La cuerda auxiliar se ataba a la mitad de la cuerda de la que procedía. Una utilidad que le daban a la cuerda superior era la de agrupar cuerdas colgantes. Para ello, bastaba con recoger las cuerdas colgantes que se querían mediante una cuerda superior, obteniendo así grupos separados. De este

modo se construía un quipu que tuviese todas las cuerdas que se necesitaran para la ocasión y siguiendo las reglas indicadas respecto a los tipos de cuerdas.

A este quipu aún sin nudos se le llamaba *quipu liso*

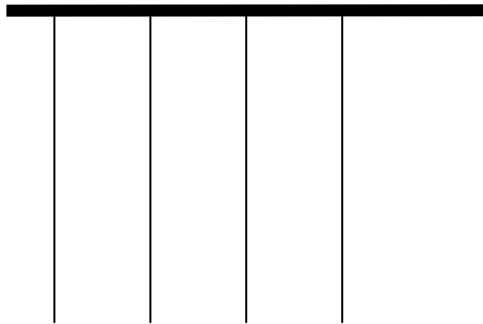


Figura 16. Quipu Liso

En Joseph [2000] se comenta que los quipus solían tener un mínimo de tres cuerdas y un máximo de 2000.

En la construcción de los quipus había un aspecto más a considerar: el color de las cuerdas como lo vimos anteriormente; el color era el código primario que se utilizaba para identificar lo que representaba el número almacenado en dicha cuerda. Gracias a los datos recogidos por los primeros cronistas españoles, se tiene constancia de este uso de colores para representar diversos significados, empleaban el blanco; para el oro, el amarillo; y para los soldados, el rojo. No obstante, en los quipus que han llegado hasta nuestro tiempo predominan el blanco mate y diversos tonos de marrón (aunque esos tonos pudieran ser debidos a una diferencia de años entre los quipus).

En la actualidad no estamos acostumbrados a usar códigos exclusivamente cromáticos con el fin de distinguir cantidades y operaciones, pero esta forma de actuar no era extraña en las civilizaciones antiguas. Hasta este momento solo se ha hecho referencia a la manera de construir un quipu con las cuerdas del tipo y color pertinentes, pero no se ha dicho nada aún de cómo se almacenaban los números en este instrumento:

En cada una de las cuerdas del quipu (a excepción de la cuerda principal) se representaba un número mediante grupos de nudos y empleando un sistema de numeración decimal posicional. Si se fija una cuerda, cada grupo de nudos correspondía a una potencia de diez y las diferentes posiciones de estos grupos indicaban a qué potencia de diez correspondía dicha posición.

El Inca Garcilaso escribió en 1539 en el Capítulo VIII del Libro VI de [Inca Garcilaso, 1960] que los grupos de nudos se contaban según el siguiente orden: unidad, decena, centena y así hasta la centena de millar, a la que no se solía llegar. De este modo, en cada cuerda se representaban los números poniendo en lo más alto la decena de millar, después la unidad de millar y así hasta llegar a la unidad en el extremo inferior de la cuerda. Por lo tanto, cuando se leía el número representado en una cuerda colgante, había que contar cuántos nudos había en el grupo más cercano a la cuerda principal, ya que ése daría el dígito de mayor valor del número. Cada vez que se pasase a un nuevo grupo de nudos en esa misma cuerda, iríamos bajando al dígito del orden inmediatamente inferior. De este modo llegaríamos hasta el orden de las unidades, que sería el último grupo de nudos y que estaría situado en el extremo de la cuerda. Para distinguir al grupo de nudos correspondientes a las unidades de los demás grupos, se empleaban los tres tipos de nudos distintos (dos de ellos para las unidades) que se indican a continuación:

- Nudo largo con cuatro vueltas: indicaba que el grupo de nudos correspondía al orden de las unidades y se empleaba cuando el dígito de este orden era superior a uno. En ese caso se ponían tantos nudos de estos como indicase el dígito.
- Nudo flamenco o en forma de ocho: indicaba también la posición de las unidades, pero indicando que el dígito era el "1". Por tanto, en las unidades solo aparecía un nudo de este tipo.
- Nudo corto o sencillo: era el que se empleaba en las restantes posiciones y se ponían tantos como correspondiese al dígito a representar.

Para representar al dígito cero en alguna posición del número, bastaba con no poner ningún nudo en dicha posición. Para que la ausencia del grupo de nudos correspondiente a una posición pudiese observarse sin dar lugar a ninguna

ambigüedad, era fundamental que el espacio situado entre los grupos de nudos fuese aproximadamente siempre el mismo. De este modo, cuando aparecía un espacio considerable sin nudos entre dos grupos de nudos entonces debía haber un cero en la posición o las posiciones entre ambos grupos.

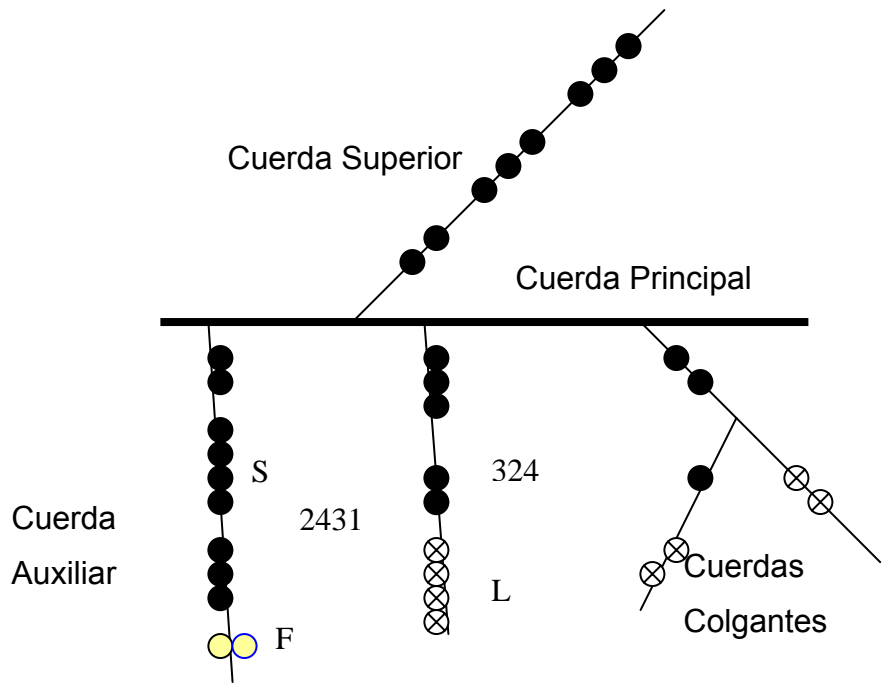


Figura 17. Partes del quipu

- Nudo Flamenco (F)
- Nudo Corto (S)
- ⊗ Nudo Largo (L)

Antes dijimos que las cuerdas superiores de un quipu se utilizaban para agrupar cuerdas colgantes, pero existía una segunda utilidad de las cuerdas superiores y que era muy frecuente: representar la suma de los números representados en las cuerdas colgantes.

1.2. EL SISTEMA POSICIONAL DE NUMERACIÓN

Sistema de numeración Verbal. Existen múltiples sistemas de numeración verbales, los cuales mantiene características propias del lenguaje y de la cultura de procedencia.

Estos sistemas están compuestos de palabras numéricas las cuales son enunciadas en un orden específico (uno, dos, tres,...) y desempeñan funciones particulares dependiendo de las características de los agrupamientos del sistema.

Los sistemas de valor de nombre pueden ser regulares o irregulares; en los sistemas regulares de valor de nombre la palabra numérica es dicha y después es nombrado explícitamente el valor de esa palabra numérica (cuatro miles siete cientos), con pocas palabras se pueden generar grandes segmentos de la serie numérica oral; en los sistemas irregulares de valor de nombre la palabra numérica es arbitraria o no refleja los agrupamientos el sistema. Muchos idiomas tiene sistemas regulares de valor de nombre, pero presentan algunas irregularidades.

El sistema de numeración verbal del idioma español presenta diversas irregularidades, aunque existe un patrón que facilita el dominio de este sistema, donde las primeras quince palabras son, en cierta manera, arbitrarias y que a partir de dieciséis, los números hasta el noventa y nueve se forman sobre la base de una combinación de la decena correspondiente y los números del uno al nueve, pero dicho patrón no refleja el hecho de que el sistema es una serie ordenada compuesta de diferentes grupos (miles, cientos y dieces) y de unidades simples; por ejemplo al decir “once” y no “diez y uno” se pierde la idea de que dicho número está formado por un grupo de diez y una unidad, o en “veintinueve” que es visto como compuesto por veintinueve unidades y no por dos grupos de diez y nueve unidades simples.

Sistema de numeración Escrito. En los sistemas posicionales de numeración la posición de una cifra nos dice si son decenas, centenas... o en general la potencia

de la base correspondiente. Sólo tres culturas además de la india lograron desarrollar un sistema de este tipo: babilonios, chinos y mayas en distintas épocas llegaron al mismo principio. La ausencia del cero impidió a los chinos un desarrollo completo hasta la introducción del mismo. Los sistemas babilónico y maya no eran prácticos para operar porque no disponían de símbolos particulares para los dígitos, usando para representarlos una acumulación del signo de la unidad y la decena. El hecho que sus bases fuesen 60 y 20 respectivamente no hubiese representado en principio ningún obstáculo. Los mayas por su parte cometían una irregularidad a partir de las unidades de tercer orden, ya que detrás de las veintenas no usaban $20 \times 20 = 400$ sino $20 \times 18 = 360$ para adecuar los números al calendario, una de sus mayores preocupaciones culturales. Fueron los hindús antes del siglo VII los que idearon el sistema tal y como hoy lo conocemos, sin más que un cambio en la forma en la que escribimos los nueve dígitos y el cero. Aunque con frecuencia nos referimos a nuestro sistema de numeración como árabe, las pruebas arqueológicas y documentales demuestran el uso del cero tanto en posiciones intermedias como finales en la India. Los árabes transmitieron esta forma de representar los números y sobre todo el cálculo asociado a ellas, aunque tardaron siglos en ser usadas y aceptadas. Una vez más se produjo una gran resistencia a algo por el mero hecho de ser nuevo o ajeno, aunque sus ventajas eran evidentes. Sin esta forma eficaz de numerar y efectuar cálculos difícilmente la ciencia hubiese podido avanzar.

Es decir, los hindús se idearon un sistema de numeración posicional que los árabes modificaron ligeramente y lo llevaron a Europa hace más de mil años. A los símbolos que se utilizan en este sistema se les dio el nombre de números arábigos.

Desde la antigüedad el hombre se preocupó por hallar métodos y procedimientos en la representación de los números cardinales de los conjuntos en forma simbólica. Los símbolos ideados evolucionaron con el transcurso del tiempo.

El interés por estos símbolos se fue intensificando a medida que se necesitó considerar conjuntos cada vez más grandes, y teniendo en cuenta que todo

número cardinal tiene uno siguiente, vemos que es imposible asignar símbolos diferentes e independientes a todos los cardinales de los conjuntos.

El problema al parecer fue resuelto por los hindúes, quienes idearon el sistema de numeración; dicho sistema ligeramente modificado se emplea actualmente, y se conoce con el nombre de sistema de numeración decimal.

Los árabes lo llevaron a Europa en el momento de su establecimiento en España. Aproximadamente en el siglo XV el sistema de numeración decimal se empleaba en toda Europa. El sistema decimal se consolidó por razones históricas (la principal de las cuales, que el número de dedos de las manos es diez), pero no por razones matemáticas.

A los símbolos que se utilizan en este sistema se les dio el nombre de números arábigos, a cada uno de los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se le llama dígito (digitus = dedo). Como el sistema solo utiliza diez dígitos, toma el nombre de sistema decimal o sistemas de base diez.

Si se tiene un conjunto A tal que su cardinal sea mayor a 9 (el último dígito), podríamos determinar el cardinal de dos maneras: la primera, inventando nuevos símbolos, lo cual sería imposible; y la segunda, utilizando los símbolos anteriormente descritos.

Cuando utilizamos los símbolos del 0 al 9, el cardinal de un conjunto de $9+1$ elementos lo representamos con 10, y decimos que empleamos un sistema de numeración base diez. Observamos que para representar el cardinal de un conjunto de $9+1$ elementos, hemos utilizado dos de los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en una posición determinada. De allí que digamos que el sistema de numeración decimal es un sistema de posición o sistema posicional.

En el sistema decimal para determinar el cardinal de un conjunto agrupamos sus elementos en subconjuntos, cada uno de cardinal 10.

Consideremos el conjunto A ,

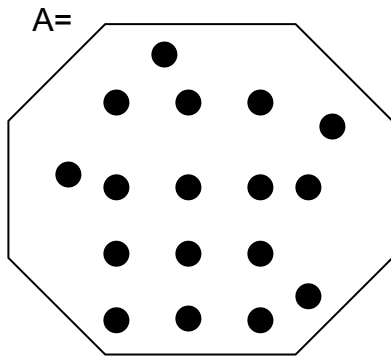


Figura 18. Conjunto A1

Observemos que en el conjunto podemos formar un subconjunto de 10 elementos y 7 subconjuntos de un elemento.

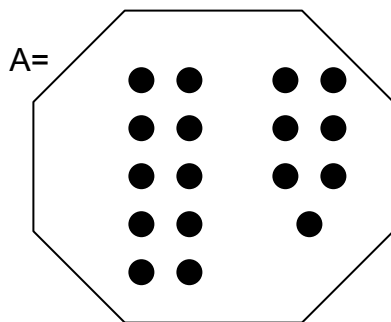


Figura 19. Conjunto A2

Entonces representamos el cardinal de A por 17, donde se convierte en que el 1 de la izquierda indica un subconjunto de cardinal 10 y el 7 de la derecha el subconjunto restante. Luego, el cardinal de A es $17 = 1 \times 10 + 7$

En la escritura familiar de los números se procede como en el ejemplo anterior, así:

$$69 = 6 \times 10 + 9$$

$$38 = 3 \times 10 + 8$$

$$55 = 5 \times 10 + 5$$

Para las cifras que ocupan el último lugar de la derecha decimos que ocupan la primera posición, así 9, 8, 5 son la cifras de la primera posición en los números anteriores respectivamente y se les llama cifra de las unidades o unidades de primer orden.

Para las cifras que ocupan el segundo lugar de derecha a izquierda decimos que ocupan la segunda posición. Así 6, 3, 5 son las cifras de la segunda posición respectivamente y se les llama cifra de las decenas o unidades de segundo orden,

Observamos que al pasar de una posición a otra de derecha a izquierda, la cifra adquiere un valor 10 veces mayor.

Consideremos el número 987 en el sistema decimal, tenemos:

$$987 = 9 \times 10 \times 10 + 8 \times 10 + 7$$

$$987 = 9 \times 100 + 8 \times 10 + 7$$

$$987 = 9 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

A la cifra de la tercera posición se le llama cifra de las centenas o unidades de tercer orden.

Consideremos el número 3.471 en el sistema decimal, entonces:

$$3.471 = 3 \times 10 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 \times 10 + 7 \times 10 + 1$$

$$3.471 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

A la cifra de la cuarta posición se le llama cifra de los miles o unidades de cuarto orden. En los números de más de cuatro cifras se procede en la misma forma.

En el sistema de numeración decimal vemos pues la base es 10 y que cualquier posición después de la primera tiene un valor diez veces mayor que la posición inmediata a la derecha y por tanto que, todo número expresado en este sistema se puede escribir como una suma de productos de cada una de sus cifras por una potencia de diez de acuerdo con su posición y se denomina descomposición polinómica del número.

A la primera posición le corresponde la potencia 10^0

A la segunda posición le corresponde la potencia 10^1

A la tercera posición le corresponde la potencia 10^2

A la cuarta posición le corresponde la potencia 10^3

Y así sucesivamente a la n -ésima posición le corresponde 10^{n-1}

Para leer un número en el sistema decimal es necesario tener en cuenta los nombres de las cifras, el valor de posición y el nombre de la clase entendiendo por ésta todo agrupamiento correspondiente a tres posiciones de derecha a izquierda, así:

Primera clase: 1^a posición: unidades

2^a posición: decenas

3^a posición: centenas

Segunda clase: 4^a posición: unidades de mil

5^a posición: decenas de mil

6^a posición: centenas de mil

Cada dos clases forman un período.

Primer período: miles: primera clase

Segunda clase

El segundo período se nombra en forma similar y se llaman millones.

El tercer período se denomina período de los billones y así sucesivamente.

Ejemplo: El número 4. 567. 890. 563 observamos que posee dos períodos, es decir corresponde a los millones y se lee: cuatro mil quinientos sesenta y siete millones ochocientos noventa mil quinientos sesenta y tres.

Sistema de numeración en base b .

Es posible definir como se ha hecho en el sistema decimal, sistemas de numeración posicionales con cualquier base b siempre que b pertenezca a los naturales y sea diferente de uno.

Uno puede escoger cualquier cantidad b de símbolos para formar su sistema posicional b -ario, de base b , o simplemente sistema b -esimal. Si en las bases que sean menores que diez empleamos para los b símbolos de la base los primeros b de los arábigos, el 2, por ejemplo, se escribirá 2 si es $b \geq 3$, pero 10 si la base es dos; 11 será tres en el sistema binario, pero cuatro en el ternario.

Ejemplo:

1. Sistema de numeración de base 8. Consideremos el conjunto B, ¿cuántos elementos tiene B, formando subconjuntos de 8 elementos?

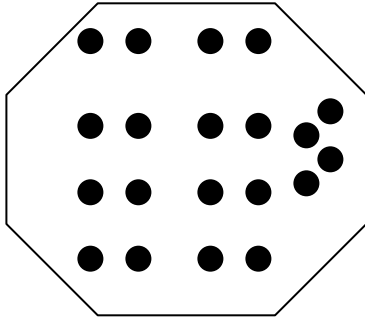


Figura 20. Conjunto B

Observemos que hay 2 subconjuntos de 8 elementos y 4 subconjuntos de 1 elemento, luego el número de elementos es $2 \times 8 + 4$; en este caso la base del sistema es 8 y escribimos el número de la siguiente forma 24_8 , donde el 8 escrito en la parte inferior del número es la base, leemos ese número dos, cuatro en base 8.

Para pasar del sistema de numeración en base 8 al sistema decimal, se realiza la descomposición polinómica del número con relación a la base 8. Así:

$$345 = 3 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$

$$345 = 3 \times 64 + 4 \times 8 + 5 \times 1$$

$$345 = 192 + 32 + 5$$

$$345_8 = 229_{10}$$

2. Sistema de numeración en base 2. Después del sistema decimal, el sistema de numeración posicional más importante es el sistema de base $b = 2$, llamado sistema binario de numeración.

Consideremos el conjunto C, si agrupamos sus elementos en subconjuntos de 2 elementos.

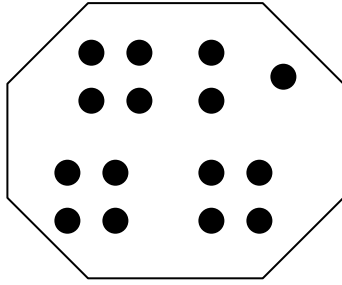


Figura 21. Conjunto C

En este caso vamos a contar los elementos de A de acuerdo con dicha agrupación. Observamos que hay: un subconjunto de un elemento, un subconjunto de 2 elementos, 1 subconjunto de 2×2 elementos y un subconjunto de $2 \times 2 \times 2$ elementos. Luego el número de elementos de A, expresado en base 2 es:

$$1(2 \times 2 \times 2) + 1(2 \times 2) + 1 \times 2 + 1, \text{ que escribimos como } 1111_2$$

Observamos además que en el número 1111_2 la primera cifra de la derecha, el 1, representa un subconjunto unitario. La cifra 1 en la segunda posición de derecha a izquierda representa un subconjunto de 2 elementos. La cifra 1 en la tercera posición representa un subconjunto de 2×2 elementos, y la cifra 1 en la cuarta posición representa un subconjunto de $2 \times 2 \times 2$ elementos.

En el sistema binario de de numeración sólo hacen falta dos cifras distintas: 0 y 1 para expresar cualquier número cardinal.

El hecho de que sólo se utilicen dos cifras para escribir cualquier número hace que sea el sistema que generalmente se emplea en las computadoras.

Para leer un número en el sistema binario de numeración se procede de la siguiente forma: se leen cada una de las cifras de izquierda a derecha y se menciona la base 2. Así el número 101011_2 se lee: uno, cero, uno, cero, uno, uno en base dos.

En general un número xyz_b representa en el sistema decimal al número $xxb^2 + yxb^1 + zxb^0$.

2. PRUEBA DIAGNÓSTICA

Esta prueba diagnóstica se planteó para identificar las debilidades y fortalezas de los estudiantes en el tema Sistema Posicional de Numeración.

En la elaboración de la prueba diagnóstica se tuvo en cuenta los conceptos básicos del tema Sistema Posicional de Numeración como son: base, principio posicional, principio aditivo y desarrollo polinómico del numeral.

La prueba diagnóstica consta de once puntos, donde el estudiante además de resolverlos deben justificar sus respuestas; está programada para ser resuelta en un tiempo máximo de dos horas. Si el lector desea ver la presentación completa de la prueba diagnóstica se puede dirigir al anexo uno.

Los resultados de la prueba diagnóstica orientaron el diseño y la elaboración de los talleres.

Implementación de la Prueba Diagnóstica

La prueba diagnóstica se implementó en el grado séptimo tres de básica secundaria, un grupo conformado por 41 estudiantes, de edades entre 12 a 14, de clase media, de la institución educativa Colegio Nacional San José de Guanentá Integrado de San Gil, en el segundo semestre de 2006.

La prueba diagnóstica se llevó a cabo de manera individual y los estudiantes la desarrollaron en el tiempo que estaba programado, en el lugar y horario habitual de clase de matemáticas. Como profesora provisional me encontraba presenciando el desarrollo de la prueba por parte de los estudiantes y resolviendo algunas inquietudes presentadas.

Al entregarles a los estudiantes la prueba diagnóstica se aclaró que la idea no era copiar respuestas, pues lo realmente importante era identificar las debilidades y fortalezas, para así poder diseñar actividades didácticas del tema Sistema Posicional de Numeración adecuadas a sus propias necesidades.

2.1. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

En esta prueba diagnóstica se consideraron cuatro aspectos: la escritura de los números, el principio posicional, el principio aditivo y bases.

En la revisión de las respuestas de los estudiantes en la prueba diagnóstica, se pudo apreciar las dificultades que los estudiantes tienen en la completa comprensión del funcionamiento del sistema decimal, a pesar que desde muy temprana edad están en contacto con su sistema de numeración. Es probable que estas dificultades sean causas del formalismo y rigurosidad en las que son presentadas las propiedades y características de un sistema de numeración que le llevó siglos a la humanidad construir.

En las siguientes preguntas se consideró la escritura de números:

Escriba (V) si la proposición es verdadera o (F) si es falsa:

- a. En el sistema decimal sólo se utilizan nueve símbolos.
- b. El sistema decimal es un sistema posicional.
- c. Cada símbolo del sistema decimal se llama dígito.
- d. El sistema binario utiliza tres dígitos

Escriba el número que corresponda a cada frase:

- e. Cuatrocientos cuarenta
- f. Un mil dos
- g. Once mil treinta y cinco.

La mayoría de los estudiantes (80%) respondieron correctamente. En la comprensión del significado de los símbolos del sistema decimal para representar

un número, se nota la asociación de la forma escrita 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 con las cantidades que representan, esto se evidenció en el aula de clase, pues a medida que la mayoría de los estudiantes escribían los símbolos del sistema decimal los representaban con los dedos de las manos. El error más frecuente en los demás estudiantes fue considerar: “los símbolos son dos, porque sólo tiene punto (.) y coma (,)”, “se requiere del punto para establecer la cifra”, ó, “los símbolos se escriben así: 0,12 , 0,00076” , confundiendo así el sistema decimal con los números decimales; otro error que presentó un solo estudiante fue: “los símbolos son +, -, *, /...”, considerando símbolo a todos los signos del lenguaje formal de la matemática.

En la escritura y lectura de números multidigitales del grupo de las decenas del sistema decimal, los estudiantes se sintieron inseguros, la mayoría buscó aprobación para continuar. Esta situación se puede entender al observar un poco que en el sistema de numeración verbal del idioma español, pueden distinguirse irregularidades como las palabras numéricas once, doce, trece, catorce, quince, veinte, ..., en las cuales no se reflejan los agrupamientos. El mismo problema se presentó en números multidigitales mayores a las unidades de miles, en las que además de lo anterior, el poco o nulo manejo de estas cantidades en su cotidianidad les dificultó pensar en su escritura y lectura.

En las siguientes preguntas se consideró el principio posicional:

¿Cuál de los siguientes números es más cercano a una centena?

- a) 36 b) 78 c) 96 d) 110

¿Cuál de los siguientes números es más cercano a una unidad de mil?

- a) 724 b) 994 c) 1234 d) 1. 101

¿Cuántos dígitos se necesitan para representar: decenas, centenas, unidades de mil y centenas de mil?

Escriba qué significa, por su posición, el dígito 6 en cada uno de los siguientes números:

- a) 6. 001 b) 69 c) 236 d) 1267

Un poco más de la mitad de los estudiantes (61%) respondieron correctamente. Los estudiantes no manejan profundamente el concepto posicional aplicado a los sistemas numéricos, aunque en la práctica aparentemente demuestran una adecuada aplicación del principio posicional. En los ejercicios de estimación que consisten en seleccionar un número estimando que tan próximo está a una potencia de diez, los estudiantes por ejemplo, sólo observaban los dígitos, especialmente los que tenían unos y ceros, pocos analizaron si uno tenía más decenas que el otro o cuantas unidades le faltaban o sobraban a cada número para completar la potencia de diez; muchos conciben los números como un todo y una minoría como entidades compuestas de grupos de diez elementos, que al avanzar de izquierda a derecha esos grupos son potencias de diez.

Los resultados acerca del principio aditivo son buenos, las preguntas que fueron consideradas son:

Escriba el número que corresponda a cada frase:

- a. Cuatrocientos cuarenta
- b. Un mil dos
- c. Once mil treinta y cinco

A partir del numeral 15. 670, explique brevemente qué significa cada una de las siguientes expresiones:

- a) Unidades de mil b) Decenas c) Decenas de mil
d) Centenas e) Unidades

La mayoría de los estudiantes (80%) resolvieron adecuadamente las preguntas. Los estudiantes fueron capaces de descomponer los números de forma polinómica; cabe aclarar que las respuestas con desarrollos polinómicos

separados con comas, +, e y, todas se consideraron correctas y que al resolver estas preguntas se apoyaron en el contenido de la prueba misma.

En las siguientes preguntas se considero el conocimiento de bases:

En la numeración con base menor que diez se utilizan tantos dígitos como requiere la base. Para un sistema de numeración con base mayor que diez. ¿Cuántos dígitos se requieren?

Si en el sistema de base diez hay diez símbolos, si en la base ocho hay ocho símbolos, si la base es dos hay dos símbolos. Determine cuántas cifras deben utilizarse en un sistema de numeración en base b:

a) $b = 8$,

b) $b = 5$,

c) $b = 12$

La base dos incluye dos dígitos, 0 y 1, la base seis incluye seis dígitos el 0, 1, 2, 3, 4, y 5. ¿Qué dígitos utilizaría para la base 8?

Es correcto escribir $356_{(6)}$, ¿por qué?

Pocos estudiantes (30%) conocían la existencia de otras bases y trataron de resolver las preguntas. Las opiniones generalizadas fueron: “no sé”, “expresar un número en otra base es quitarle la coma y organizar los dígitos”, “los números decimales alterados en su forma de ser”, “los números decimales expresados en otras bases son resultados de la división”. Dando a entender los estudiantes que sólo se concentran en aprender procedimientos, dejando a un lado las ideas fundamentales de los sistemas de numeración en otras bases.

El análisis de resultados de la prueba diagnósticas permitió identificar en los estudiantes concepciones y dificultades en la completa comprensión del tema sistema de numeración posicional; por lo cual se consideró relevante la realización de actividades didácticas de refuerzo del sistema de numeración en todos los aspectos considerados en la prueba diagnóstica, que facilitaran la reestructuración de concepto y por lo tanto mejorar la comprensión de este.

3. TALLERES

Los talleres presentan algunos de los saberes y tecnologías de las culturas Inca y Guane, escogiendo sólo aquellos aspectos históricos que permiten facilitar el aprendizaje del tema Sistema Posicional de Numeración.

Cada guía esta dividida en dos partes. La primera parte es una descripción de la guía, los objetivos propuestos y la forma como puede desarrollarse en el aula de clase. La segunda parte es un apoyo didáctico, con el cual se pretende alcanzar los objetivos propuestos, el documento completo de las actividades recomendadas se encuentra en los anexos.

Las secciones de trabajo pueden darse en forma individual o grupal, pero requieren de un espacio de integración donde los estudiantes compartan sus estrategias se solución y sus descubrimientos.

Las guías a desarrollar son:

3.1. GUÍA N° 1



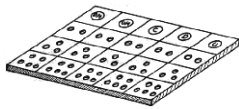
Figura 22. Mujer Indígena.

3.2. GUÍA N° 2



Figura 23. Quipu.

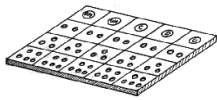
3.3. GUÍA N° 3



PRACTIQUEMOS CON LA YUPANA

Figura 24. Yupana 1

3.4. GUÍA N° 4



AVANCEMOS CON LA YUPANA

Figura 25. Yupana 1

Implementación de los talleres

La experiencia didáctica en la que se puso a prueba el modelo pedagógico de integrar la historia con la educación matemática se llevó a cabo a mediados del mes de octubre de 2006 y finalizó a mediados del mes de noviembre del mismo año, sin ningún inconveniente.

Las actividades se implementaron en el curso de séptimo grado de la institución educativa Colegio Nacional San José de Guanentá Integrado de San Gil. Este curso se escogió sin tener en cuenta ninguna característica especial como grupos étnico o situación socio- económica, entre otros; sólo que fuera un grupo de los primeros grados de educación básica.

El escenario de trabajo donde se realizaron las actividades siempre fue el salón del área de matemáticas de la institución.

La experiencia se puso en marcha con el envío de una carta a la rectora de la de la institución educativa Colegio Nacional San José de Guanentá Integrado De San Gil por parte de la Universidad Industrial de Santander, en la que se solicitó el

debido permiso para implementar las actividades didácticas respecto al tema Sistema de Numeración Posicional. De esta manera como profesora provisional del curso séptimo tres, la rectora decidió invitar a los estudiantes de este grupo a participar de la investigación, a lo cual aceptaron gustosos.

Las actividades didácticas se iniciaron con la aplicación de la prueba diagnóstica, y una vez se concluyó el análisis de los resultados de la prueba, se pudo hacer algunos ajustes a los talleres.

Una vez terminó la implementación de las actividades se prosiguió a hacer un análisis de la experiencia didáctica teniendo presentes los objetivos de la investigación y los objetivos específicos propuestos en la primera parte de los talleres.

3.1. GUÍA N° 1

NUMERACIÓN GUANE

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Objetivos:

- ✚ Conocer la importancia de la numeración guane desde el punto de vista histórico y cultural.
- ✚ Transformar un número del sistema decimal a la numeración guane y viceversa.
- ✚ Establecer comparaciones entre el sistema de numeración decimal y la numeración guane.
- ✚ Reconocer la necesidad de recurrir a símbolos para representar el número de elementos de un conjunto.

Desarrollo de la guía:

El primer paso de las actividades de la guía consiste en que el estudiante utilice la información dada para expresar algunos números en base decimal a numeración guane, el siguiente paso consiste en realizar el procedimiento inverso.

Se terminará la actividad invitando a los estudiantes a escribir un número de cuatro o más cifras en numeración guane y a responder otras preguntas como: ¿Se puede concluir que la cultura guane conocía una palabra para designar el cero?, ¿Qué importancia tiene el cero en un sistema de numeración?

Para ver las actividades propuestas para la guía N° 1 diríjase al anexo dos.

3.2. GUÍA N° 2

PRACTIQUEMOS CON EL QUIPU

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Objetivos:

- ✚ Conocer la definición y características del quipu.
- ✚ Construir un quipu.
- ✚ Interpretar en un número el principio posicional

Desarrollo de la guía:

Para dar inicio a esta actividad se realiza una lectura comprensiva del texto de la Guía N° 2, es muy importante el acompañamiento del docente, pues la lectura es un poco extensa y su contenido es totalmente desconocido para la mayoría de los estudiantes. Lo más recomendable sería que a medida que avanza la lectura ir presentando las partes de un quipu real, para que el estudiante al visualizar el quipu aclare sus ideas. Al finalizar la lectura los grupos de trabajo estarán listos para elaborar su propio quipu.

Los estudiantes deben llevar al aula los siguientes materiales: un lazo grueso para la cuerda principal y por lo menos quince cuerdas de distintos colores. Una vez construyan el quipu empezaran a registrar los datos de la Tabla N°4 en el quipu y escribir en sus cuadernos el código primario utilizado para identificar la cantidad de hombres que pertenecen a cada intervalo de edad.

Para continuar con el desarrollo la guía se necesita que los estudiantes manejen algunos conceptos básicos de estadística como son: frecuencia absoluta y frecuencia relativa.

Se puede pedir a los estudiantes que intenten leer los quipus de sus compañeros y continuar con preguntas cómo: ¿Los quipus sólo pueden ser leídos en sus propias sedes y por sus propios quipucamayos?

Para ver las actividades propuestas para la guía N° 2 dirijase al anexo tres.

3.3. GUÍA N° 3

PRACTIQUEMOS CON LA YUPANA

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Objetivos:

- ✚ Conocer la definición y características de la yupana.
- ✚ Construir una yupana básica.
- ✚ Interpretar en un número el principio aditivo.

Desarrollo de la guía:

Para iniciar la actividad se realiza una lectura comprensiva del texto de la Guía N° 3, se recomienda que un estudiante la realice en voz alta en forma dirigida por el docente.

Luego cada grupo de trabajo reúne los siguientes materiales llevados al aula por sus integrantes: un tablero de madera e 30 cm. Por 20 cm., un marcador o algo para escribir en madera y pequeñas piedras o granos de maíz. En la Guía N° 3 se encuentran ilustradas las instrucciones paso a paso para la elaboración de la yupana.

Además en la guía están expuestos algunos ejemplos de adición y sustracción, se proponen ejercicios para que el estudiante practique y a partir de estas dos operaciones se espera que el estudiantes deduzca al reflexionar, analizar y explorar ¿Cómo los yupanacamayos llevaban a cabo operaciones de multiplicación y división?

Finalizando la guía es de gran importancia alentar a los estudiantes a compartir sus soluciones, inquietudes y a responder preguntas como: ¿por qué en la yupana tan sólo dibujamos diez puntos en cada columna?, ¿qué significan los diez puntos dibujados en la tercera columna?, ¿podemos representar números con sólo dibujar nueve puntos en cada columna?

Para ver las actividades propuestas para la guía N° 3 diríjase al anexo cuatro.

3.4 GUÍA N° 4

AVANCEMOS CON LA YUPANA

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Objetivos:

- ✚ Construir una yupana en base ocho y dos.
- ✚ Realizar operaciones en el sistema binario con ayuda de la yupana.
- ✚ Comprender los conceptos de agrupación y valor posicional de sistemas de numeración en diferentes bases.

Desarrollo de la guía:

La actividad es muy parecida a la anterior y se tiene en cuenta para la generalización del procedimiento de construcción de yupanas en diferentes bases.

Con el conocimiento adquirido del sistema decimal y manejo de la yupana en base diez el estudiante intentará deducir las características de cualquier sistema de numeración posicional; se espera además que logre realizar al menos la operación básica de adición en otros sistemas de numeración con la ayuda de las yupanas modificadas.

Para ver las actividades propuestas para la guía N° 4 diríjase al anexo cinco.

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LOS TALLERES

En el análisis de los resultados de las actividades implementadas en el aula de clase, se tuvo en cuenta las opiniones generalizadas en el grupo, considerando tres aspectos: las actitudes de los estudiantes, el desempeño de estos en las guías y el logro de los objetivos propuestos en cada taller.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA GUÍA N° 1

NUMERACIÓN GUANE

En la implementación de la guía N° 1 considero relevante la actitud positiva de los estudiantes, la lectura se hizo interesante, la mayoría de los estudiantes se veían concentrados, mostraron tanto interés por el contenido histórico y cultural de la lectura que aprendieron rápidamente los nombres de los números en dialecto guane; también se divirtieron recreando situaciones históricas de caciques indígenas con las palabras que acababan de aprender.

Esta actividad permitió a los estudiantes observar y conocer un sistema de numeración verbal de valor de nombre diferente al ya conocido del idioma español, el sistema de numeración verbal de valor de nombre de la cultura Guane. Con las diez palabras que representan a los números del uno al diez: *uno, ata; dos, boza; tres, mica; cuatro, muijica; cinco, jizca; seis, ta; siete, cujupcua; ocho, sujuza; nueve, aca o acan; diez, quijicha;* y la que representa el veinte: *gueta* los estudiantes formaron diferentes palabras numéricas en un rango entre uno y cien

comparándolas con los números escritos en el sistema decimal. Con los dos primeros puntos de la guía N° 1 que se presentan a continuación, se pretendió facilitar la etapa de reconocimiento del sistema verbal de valor de nombre de la cultura Guane.

1. Escriba los siguientes numerales en el dialecto de los Guanes:

- a) 12 b) 17 c) 23 d) 40 e) 80 f) 96

2. Escriba en el sistema decimal los siguientes números escritos en dialecto Guane:

- a) quijicha ta b) quijicha sujuza c) gueta d) aca gueta

Esta etapa de reconocimiento fue superada rápidamente por la regularidad de las palabras numéricas del uno al veinte. Los estudiantes comenzaron a tener dificultades al intentar escribir números mayores de veinte y múltiplos del mismo, al tratar de resolver las siguientes preguntas de la guía N° 1.

3. ¿Crees que el sistema de numeración Guane permite representar cualquier número cardinal?

4. ¿Cuál crees que es la base que utilizaban los Guanes?

Se presentó un gran dilema entre los estudiantes, si la respuesta a la tercera pregunta era afirmativa podrían escribir cualquier número, por ejemplo: un millón; y si la respuesta era negativa entonces debían descartar la hipótesis inicial de creer que el sistema de numeración verbal de valor de nombre de la cultura Guane es exactamente igual al sistema decimal. Se preguntaban unos otros: “¿no necesitaremos más palabras para formar números más grandes?”, “¿No te parece que hace falta una palabra para el cero?”, “¿será que podemos sumar?”, “¿cómo hacemos para escribir ese millón en guane?”.

En el desarrollo de la guía y a partir de las preguntas anteriores se pudo observar en los estudiantes la necesidad de establecer el tamaño de los agrupamientos (de diez ó de veinte), el orden existe entre los agrupamientos y las unidades, el uso del conectivo “y” o el signo “+”, y el uso de símbolos para representar una colección de objetos. La necesidad de establecer el tamaño de los agrupamientos que determinan la base del sistema, surgió en el manejo por los estudiantes de dos patrones en la escritura de números en la numeración verbal de valor de nombre de la cultura Guane, el primer patrón para escribir los números hasta el

diecinueve, formado sobre la base de la combinación de la palabra *quijicha* seguida de una de las palabras para los números del uno al nueve; y el segundo patrón para escribir números mayores de veinte. La necesidad de establecer el orden entre los agrupamientos y las unidades, también surge de los dos patrones descritos anteriormente, pero no por la existencia misma de los dos, sino porque en el primer patrón se describe el agrupamiento y luego las palabras para las unidades, en cambio en el segundo patrón sucede lo contrario, claro esta con diferente fin. La necesidad de usar el conectivo “y” o el signo “+”, nace al tratar de escribir palabras numéricas que usan los dos patrones. Por ultimo la necesidad de usar símbolos para representar una colección de objetos, se explica en el ahorro de espacio y tiempo en la escritura de números mayores de cien.

Es evidente que los estudiantes al estar en contacto con un sistema de numeración verbal diferente al ya memorizado y aceptado sistema de numeración verbal del idioma español, se da la posibilidad de tener más claridad acerca de las características del sistema escrito de numeración decimal.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA GUÍA N° 2

PRACTIQUEMOS CON EL QUIPU

Durante el desarrollo de la guía N° 2 se notó la participación de todos los estudiantes. La lectura del texto despertó la curiosidad de los estudiantes sobre el significado de palabras como quechua, quipucamayos entre otras, además se animaron a realizar aportes de datos de la cultura Inca.

En la construcción del quipu se notó la dedicación, entrega y mucha colaboración entre los estudiantes.

En el registro de los datos de la tabla N° 3 los estudiantes pudieron comparar que la cultura Inca, para hacer correspondencia con los objetos hacían nudos en el quipu y que sus cálculos se basaban en el sistema de numeración decimal, con la única diferencia que actualmente se utilizan los numerales 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Estas comparaciones llevaron a los estudiantes a concebir los símbolos que representan una colección de objetos como un acuerdo cultural, que se desarrolla independientemente en diferentes culturas y que el concepto de conteo subyace en estas representaciones. Los estudiantes también pudieron distinguir la noción de orden al orientar la posición de los nudos, ubicándolos de abajo hacia arriba, y compararla con el orden de ubicación del sistema decimal escrito, que ubica sus cifra de izquierda a derecha.

Al tratar de hacer el registro de los números una inquietud que surgió en los estudiantes fue el espacio que se debía dejar entre unidades, decenas, centenas,..., este espacio se podía establecer de manera arbitraria, pero fue de gran importancia, pues los estudiantes se dieron cuenta que a medida que iban avanzando desde el extremo inferior de una cuerda secundaria hacia la cuerda principal, la misma cantidad de nudos no significaban lo mismo, unos podían indicar unidades, decenas, centenas, sólo tenían que prestar mucha atención para no equivocarse en los espacios a la hora de registrar en su quipu.

Algunos de los estudiantes por iniciativa propia emprendieron la tarea de registrar un número de siete cifras, para demostrarles a sus compañeros que se podía registrar cualquier cantidad.

El quipu es una manera sencilla de introducir a los estudiantes en la cripto-aritmética, pues para descifrar el registro se necesita identificar el tipo de nudo y el significado del color de cada cuerda.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA GUÍA N° 3

PRACTIQUEMOS CON LA YUPANA

En el trabajo de la guía N° 3 los estudiantes se entusiasmaron mucho en la construcción de la yupana, incluso se logró captar la atención de los estudiantes apáticos a la matemática.

A lo largo del desarrollo de la actividad con la yupana los estudiantes tuvieron la oportunidad de familiarizarse con el doble significado de grupo de diez, como un número de objetos y como el nombre de un grupo de objetos. Además se facilitó el reconocimiento del valor de cada dígito dependiendo del lugar ocupado en la yupana; al registrar la cantidad en la yupana, los estudiantes descubrieron que podían representar el mismo número ubicando las piedrecillas en cualquiera de los puntos dibujados, desde que no cambiaran de columna, y que por ejemplo: una piedrecilla en la columna de las decenas era lo mismo que tener llenos todos los puntos de la columna de las unidades.

Avanzando en el desarrollo de la guía los estudiantes emprendieron la realización de las operaciones básicas adición, sustracción, multiplicación y división”. En la guía N° 3 se expone la forma de hacer las operaciones adición y sustracción, el avance de los estudiantes consistió en buscar una estrategia para realizar sobre la yupana las operaciones de multiplicación y división. Estos son algunos de los comentarios de los estudiantes acerca de sus estrategias: “simplemente como la multiplicación es sumar infinitamente un número hasta llegar a la cantidad deseada, por ejemplo: $4 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$, esto es lo que debe hacerse en la yupana, en la división es sólo seguir el mismo ritmo que en la multiplicación, por ejemplo: $30 / 15 = 15 + 15$ ”, “haciendo grupos, tantos como el número a multiplicar con el número siguiente y se suman, ejemplo. $5 \cdot 4 =$ sumar 5 grupos de 4”. En los

comentarios anteriores podemos ver que los estudiantes utilizaron estrategias de conteo, el resultado de la multiplicación es la suma de sumandos iguales, y el resultado de la división el número de veces que tenían que sumar el divisor hasta llegar al dividendo.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA GUÍA N° 4

AVANCEMOS CON LA YUPANA

Como en las anteriores actividades los estudiantes los estudiantes se encontraban muy animados e interesados en la nueva guía.

En la construcción de la yupana en base dos, los estudiantes tuvieron la oportunidad de comparar los sistemas de numeración binario y decimal, ellos comentaron: “el valor en la nueva yupana de una piedrecilla, depende de la columna en donde está”, “en la yupana de base diez se dibujaban diez puntos y en esta de base dos puntos”, además lograron inferir “en la yupana binaria en la primera columna son dos elementos, en la segunda dos grupos de dos, o sea cuatro elementos similar a la yupana decimal”.

Al animar a los estudiantes a reagrupar algunas piedrecillas en pequeños grupos de dos elementos en la yupana de base dos, los estudiantes descubrieron que en la yupana podían trabajar en cualquier base con solo cambiar el número de puntos dibujados en cada columna. Continuando con la misma idea de reagrupar el mismo conjunto de piedrecillas, pero en grupos de ocho elementos, aplicaron lo anteriormente descubierto y empezaron a diseñar la yupana para base ocho.

Fue interesante advertir que los estudiantes comprendieron que podían representar una colección de objetos en diferentes bases y que el sistema posicional binario y octal tenían características similares al decimal.

5. CONCLUSIONES

A través de la integración de la historia de la matemáticas de las culturas Inca y Guane en la educación matemática, docentes y estudiantes tuvimos la oportunidad de ampliar nuestro universo cultural, de acceder a la creación matemática de estas culturas, para llegar a reconocer los sistemas de numeración posicional como el resultado de un proceso continuo de actividad intelectual, que tiene su procedencia en la práctica vinculada a procesos reales del mundo, y no como una estructura rigurosa y formal.

De este modo se generó un ambiente optimista, fomentando pensamientos positivos en los estudiantes hacia la matemática, descubriendo que la creatividad y el esfuerzo humano juegan un papel fundamental en el quehacer matemático.

Por otro lado la historia de la matemática precolombina repercutió en los estudiantes en la formación de valores y principios morales de respeto, agradecimiento y admiración por nuestros indígenas, afianzando así los sentimientos de patriotismo.

La experiencia didáctica constituye un ejemplo del uso de la historia de la matemática llevada al aula de clase, indica la forma como puede dinamizarse la enseñanza del tema Sistema de Numeración Posicional. A pesar de la existencia de factores inherentes al proceso educativo como son los ritmos de aprendizaje, la problemática social y cultural, entre otros, con estas actividades se pudo mejorar la comprensión de la mayoría de los estudiantes de su sistema de numeración, aunque es algo que no se puede medir de forma inmediata, esto se observará en la aplicación que los estudiantes hagan en el momento oportuno de estos conceptos.

Las actividades didácticas sirvieron para estimular el proceso de comprensión de lectura; como base para la discusión de las características de los sistemas de numeración de las cultura Inca y Guane en relación con la nuestra, incluyendo

ventajas y desventajas, logrando que los estudiantes redescubrieran las propiedades y características del sistema de numeración decimal.

El uso de material didáctico como el quipu y la yupana, permitieron modelar la secuencia verbal de los números y la orientación en la posición de los dígitos, ya que reflejan la estructura del concepto, y por lo tanto facilitó a los estudiantes usar la estructura de representación para construir un modelo mental del concepto.

Un aspecto importante en el desarrollo de las actividades didácticas es enfatizar la necesidad de incluir más actividades que propicien el contacto por los estudiantes con los diferentes sistemas de numeración, ya que a pesar de que ellos identificaron que los sistemas de numeración en otras bases cumplen características y propiedades similares al sistema de numeración decimal, no se logró que los estudiantes concibieran la idea de realizar cálculos en otras bases.

Sería interesante adecuar estas y otras actividades didácticas en la enseñanza de la numeración escrita en los primeros grados de escolaridad. En este aspecto Buenrostro (2003) resalta la importancia del uso de material didáctico: “en los esfuerzos por lograr que los niños comprendan las características del sistema de numeración ha jugado un papel importante el empleo de material manipulable junto con otras formas de representación simbólica y pictórica”. Al iniciar desde temprana edad la construcción del sistema de numeración con apoyo de actividades didácticas, los estudiantes de educación básica probablemente podrían avanzar en la comprensión de diferentes sistemas de numeración, ir más allá del simple reconocimiento, llegar a entender por lo menos los sistemas de numeración utilizados en la computación, la naturaleza bi-estable de los componentes electrónicos de un computador, pasar de la sola representación de cantidades a efectuar cálculos usando la aritmética binaria.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ascher, M. y Ascher, R. (1999). *Mathematics of the Incas; code of the Quipu*. Mineola.

Ascher, M. (1991). *Ethnomathematics: a multicultural view of mathematical ideas*. Pacific Grove, California, USA: Brooks/Cole Publishing Company.

Trejos, H. E. (2003). *Matemática en la roca: La piedra y la mente precolombina en el Alto Magdalena, Colombia*.

<http://rupestreweb.tripod.com/matematica.html>

Morales, L. (2000). *Comparación del Sistema Numérico Maya con otros Sistemas de Numeración Antiguos*. Panama.

Boyer, C. (1985). *A History of Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Londoño, N y Bedoya, H. (1985). *Matemática Progresiva*. Editorial Norma. Colombia.

Berrio, I. (1994). *Matemática Universal de Sexto*. Bedout Editores. Medellín, Colombia.

Alonso, Elisalde, Vásquez, Blanco, Fernández Caso, Gurevich. (1993). *América en el mundo contemporáneo 3^{er} CICLO E.G.B.* Editorial AIQUE

Ardila, I. (1978). *El pueblo de los Guanes, raíz gloriosa y fecunda de Santander*. División de comunicaciones del SENA.

Espinoza, W. (1990). Los Incas. *Economía, Sociedad y Estado en la era de Tahuantinsuyo*. Amaru Editores.

Fauvel, J. y Maanen, J. (2000). *History Mathematics Education, the ICMI study*. Kluwer Academia Publishers.

<http://www.di.unipi.it/~lagana/yupana/yup.html>

<http://incas.perucultural.org.pe/galemon801.htm>

Buenrostro, A. (2003). *Aritmética y Bajo Rendimiento Escolar, Diseño e implementación de dos modelos de enseñanza*. Tesis doctoral no publicada. México D. F.

7. NEXOS

ANEXO 1. PRUEBA DIAGNÓSTICA

PRUEBA DIAGNÓSTICA

Las Matemáticas no son un recorrido prudente por una autopista despejada, sino un viaje a un terreno salvaje y extraño, en el cual los exploradores se pierden a menudo.

W.S. Anglin (1992)

1. Escriba (V) si la proposición es verdadera o (F) si es falsa:
 - a) En el sistema decimal sólo se utilizan nueve símbolos.
 - b) El sistema decimal es un sistema posicional.
 - c) Cada símbolo del sistema decimal se llama dígito.
 - d) El sistema binario utiliza tres dígitos.

2. Escriba el número que corresponda a cada frase:
 - a) Cuatrocientos cuarenta
 - b) Un mil dos
 - c) Once mil treinta y cinco

3. A partir del numeral 15. 670, explique brevemente qué significa cada una de las siguientes expresiones:

a) Unidades de mil	b) Decenas	c) Decenas de mil
d) Centenas	e) Unidades	

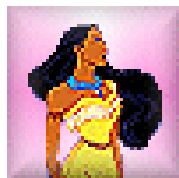
4. ¿Cuál de los siguientes números es más cercano a una centena?

a) 36	b) 78	c) 96	d) 110
-------	-------	-------	--------

5. ¿Cuál de los siguientes números es más cercano a una unidad de mil?
a) 724 b) 994 c) 1234 d) 1.101
6. ¿Cuántos dígitos se necesitan para representar: decenas, centenas, unidades de mil y centenas de mil?
7. Escriba qué significa, por su posición, el dígito 6 en cada uno de los siguientes números:
a) 6.001 b) 69 c) 236 d) 1267
8. En la numeración con base menor que diez se utilizan tantos dígitos como requiere la base. Para un sistema de numeración con base mayor que diez. ¿Cuántos dígitos se requieren?
9. Si en el sistema de base diez hay diez símbolos, si en la base ocho hay ocho símbolos, si la base es dos hay dos símbolos. Determine cuántas cifras deben utilizarse en un sistema de numeración en base b :
a) $b = 8$, b) $b = 5$, c) $b = 12$
10. La base dos incluye dos dígitos, 0 y 1, la base seis incluye seis dígitos el 0, 1, 2, 3, 4, y 5. ¿Qué dígitos utilizaría para la base 8?
11. Es correcto escribir $356_{(6)}$, ¿por qué?

ANEXO 2. GUÍA N° 1. NUMERACIÓN GUANE

GUÍA N° 1



NUMERACIÓN GUANE

Figura 26. Mujer Indígena.

Según los cronistas los primitivos habitantes de estas tierras chibchas y guanes se valían para contar, en primer lugar de los dedos de las manos, para contar de diez en adelante se servían de los dedos de los pies, anteponiendo la palabra quijicha, que significa pie a los diez primeros números.

Así contaban hasta diez:

Uno, ata.

Dos, boza.

Tres, mica,

Cuatro, muijica.

Cinco, jizca.

Seis, ta.

Siete, cujupcua.

Ocho, sujuza.

Nueve, aca o acan.

Diez, quijicha

De diez en adelante contaban así: once, quijicha ata; doce, quijicha boza y así en adelante. Al número veinte le llamaban gueta, después sumaban por veintes, un veinte, dos veintes, tres veintes, etc.

1. Escriba los siguientes numerales en el dialecto de los Guanes:

- a) 12 b) 17 c) 23 d) 40 e) 80 f) 96

2. Escriba en el sistema decimal los siguientes números escritos en dialecto Guane:

- a) quijicha ta
- b) quijicha sujuza
- c) gueta
- d) aca gueta

3. ¿Crees que el sistema de numeración Guane permite representar cualquier número cardinal?

4. ¿Cuál crees que es la base que utilizaban los Guanes?

ANEXO 3. GUÍA N° 2. PRACTIQUEMOS CON EL QUIPU

GUÍA N° 2



Figura 27. Quipu

La palabra quipu pertenece al quechua, la lengua del pueblo inca, y su significado es “nudo”. Un quipu consiste en un conjunto de cuerdas dispuestas de cierta manera y en las que se hacen una serie de nudos. Esa labor de almacenamiento y actualización de la información la llevaban a cabo un grupo de funcionarios especiales que recibían el nombre de quipucamayos (lo cual se podría traducir por los “guardianes de los nudos”).

I. Construyamos un quipu

Para construir un quipu se necesita los siguientes materiales:

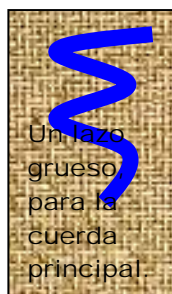


Figura 28. Lazo principal Figura 29. Cuerdas de colores

Sigue las instrucciones y recomendaciones para construir un quipu:

- 1) Para poder construir un quipu debemos tener en cuenta que se empleaban diferentes tipos de cuerda. Cada cuerda tiene al menos dos hebras, de modo que un extremo acababa en forma de lazo y el otro en punta con un pequeño nudo. Según la disposición que presentase una cuerda, esta podía ser de uno de los tipos siguientes:

Cuerda principal	Es la mas gruesa de todas y de la que parten directa o indirectamente todas las demás.
Cuerdas colgantes	Son todas las cuerdas que penden de la principal hacia abajo.
Cuerdas superiores	Son cuerdas que se enlazan a la principal, pero dirigiéndolas hacia arriba.
Cuerdas secundarias o auxiliares	Son cuerdas que se unen a cualquiera de las que están enlazadas a la principal. A las cuerdas auxiliares se les podía a su vez unir otra cuerda auxiliar. La cuerda auxiliar se ataba a la mitad de la cuerda de la que procedía. Una utilidad que le daban a la cuerda superior era la de agrupar cuerdas colgantes. Para ello, bastaba con recoger las cuerdas colgantes que se querían mediante una cuerda superior, obteniendo así grupos separados. De este modo se construía un quipu que tuviese todas las cuerdas que se necesitaran para la ocasión y siguiendo las reglas indicadas respecto a los tipos de cuerdas.
Cuerda colgante final	Es una cuerda cuyo extremo en forma de lazo está unido y apretado al extremo de la cuerda principal. Era opcional, por lo que no aparecía en todos los quipus.

Tabla 1. Tipos de cuerdas

- 2) En la construcción de los quipus hay que considerar: el color de las cuerdas. El color es el código primario que se utilizaba para identificar lo que representaba el número almacenado en dicha cuerda. Por ejemplo el color blanco, representaba el oro.
- 3) En la construcción del quipu hay otro aspecto más a considerar: el tipo de nudo.

<p>Nudo largo con cuatro vueltas Nudo Largo (L) ⊗</p>	<p>Indicaba que el grupo de nudos corresponde al orden de las unidades y se emplea cuando el dígito de este orden es superior al número uno. En ese caso se pone tantos nudos de estos como indica el dígito.</p>
<p>Nudo flamenco o en forma de ocho Nudo Flamenco (F)</p> <p style="text-align: center;">⊙⊙</p>	<p>Indicaba también la posición de las unidades, pero indicando que el dígito era el “1”. Por tanto, en las unidades solo aparecía un nudo de este tipo.</p>
<p>Nudo corto o sencillo Nudo Corto (S)</p> <p style="text-align: center;">●</p>	<p>Era el que se empleaba en las restantes posiciones y se ponían tantos como correspondiese al dígito a representar. Para representar al dígito cero en alguna posición del número, bastaba con no poner ningún nudo en dicha posición. Para que la ausencia del grupo de nudos correspondiente a una posición pudiese observarse sin dar lugar a ninguna ambigüedad, era fundamental que el espacio situado entre los grupos de nudos fuese aproximadamente siempre el mismo. De este modo, cuando aparecía un espacio considerable sin nudos entre dos grupos de nudos entonces debía haber un cero en la posición o las posiciones entre ambos grupos.</p>

Tabla 2. Tipos de nudos

II. Como representar datos en el quipu

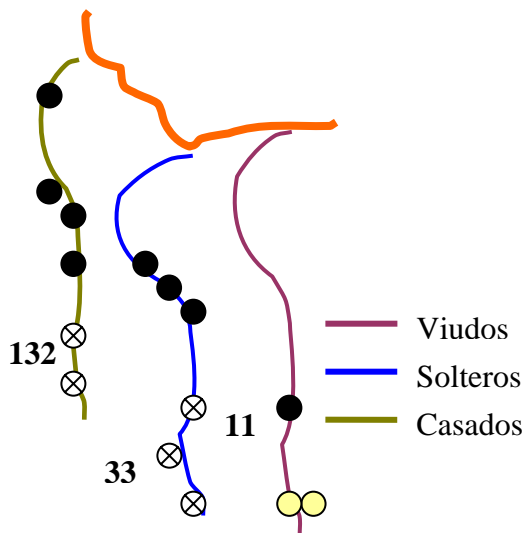
- 1) En cada una de las cuerdas del quipu (a excepción de la cuerda principal) se representaba un número mediante grupos de nudos y empleando un sistema de numeración decimal posicional.
- 2) Se fija una cuerda, cada grupo de nudos corresponde a una potencia de diez y las diferentes posiciones de estos grupos indican a qué potencia de diez corresponde a dicha posición.
- 3) En cada cuerda se representaban los números poniendo en lo más alto la decena de millar, después la unidad de millar y así hasta llegar a la unidad en el extremo inferior de la cuerda. Por lo tanto, cuando se lee el número representado en una cuerda colgante, hay que contar cuántos nudos hay en el grupo más cercano a la cuerda principal, ya que ése daría el dígito de mayor valor del número. Cada vez que se pasase a un nuevo grupo de nudos en esa misma cuerda, iríamos bajando al dígito del orden inmediatamente inferior. De este modo llegaríamos hasta el orden de las unidades, que sería el último grupo de nudos y que estaría situado en el extremo de la cuerda.
- 4) Para distinguir al grupo de nudos correspondientes a las unidades de los demás grupos, se empleaban los tres tipos de nudos distintos (dos de ellos para las unidades).

III. Veamos como funciona el quipu

El quipu nos ayuda a registrar. Por ejemplo, registraremos los datos del estado civil de algunos indígenas Guanes en nuestro quipu:

Estado civil	Números de personas
Casados	132
Solteros	33
Viudos	11

Tabla 3. Estado civil de los indígenas Guanes



En esta ilustración de quipu aparece la cuerda principal en color naranja y más gruesa que las demás. Las cuerdas secundarias están sujetas a la cuerda principal, cada una en diferente color, pues cada una representa un estado civil de los indígenas Guanes.

La cuerda de color verde representa los casados, aparece registrado el número 132, iniciando el registro de unidades en el extremo inferior de la cuerda. El dígito de las unidades es dos, como es mayor que uno se hacen dos nudos largos de cuatro vueltas; el dígito de las centenas es tres, por tanto se deja un espacio y se hacen tres nudos sencillos; el dígito de las centenas es uno, se trata de dejar el mismo espacio y se hace un nudo sencillo para la centenas.

En la cuerda de color azul aparece registrados los 33 solteros y en la cuerda de color violeta aparecen registrados los 11 viudos.

Figura 30. Ejemplo de construcción de un Quipu

¡Ahora si estamos listos para practicar con el quipu !

1. Registra los siguientes datos como un quipucamayó.

a) Los siguientes datos son un valiosísimo trabajo sobre la etnia Guane, con base en los censos de los años 1734, 1745, 1764, 1810, de hombres residentes en las

parcialidades de Butaregua, Corotá y Macaregua, Choaguete y Chachón, Moncora y Ubigará realizado por el historiador Manuel Lucena Salmoral.

Edades	Hombres
0 - 4	320
5 - 9	274
10 - 14	192
15 - 19	196
20 - 24	170
25 - 29	113
30 - 34	126
35 - 39	82
40 - 44	57
45 - 49	41
50 - 54	33
55 y más	4
Ausentes	131
Edad no establecida	85
Total de todas las edades	1824

Tabla 4. Censos de los años 1734, 1745, 1764, 1810, de hombres de la etnia Guane

b) Ardila, I. (1978). Los Guanes, con todos los cacicazgos comprendidos en su extenso territorio llegaban a 200.000. Los indígenas Guanes tenían la ley de exogamia, según la cual el pretendiente debía buscar a su esposa fuera de la tribu, para evitar matrimonios entre parientes muy cercanos. Según un estudio del historiador Manuel Lucena Salmoral: “La exogamia de las parcialidades de Guane es un hecho evidente, tanto que representa el 73% de los varones y de las mujeres casadas, frente a una endogamia insignificante”.

ANEXO 4. GUÍA N° 3. PRACTIQUEMOS CON LA YUPANA

GUÍA N° 3



Figura 31. Yupana 1

"Yupana" es un vocablo quechua que significa "lo que sirve para contar". Es un excelente tablero rectangular de cinco hileras y cuatro casilleros, en los que redistribuían series de cinco granos de maíz para el cálculo de los matemáticos andinos, quienes se colocaban en la parte más larga de la tabla, al lado de los casilleros con más círculos para evitar movimientos innecesariamente largos. Lo usaban utilizando piedrecillas y granos (quinua, maíz), movilizándolos de unos hoyuelos a otros, según sus colores (blanco y negro). Con la yupana llevaban a cabo operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Constituía una calculadora perfecta. El cronista José de Acosta (1590) se quedó perplejo ante la destreza y exactitud puntualísima de los yupanacamayos, que nunca erraban ni en una tilde, más rápidos que los mejores contadores españoles que empleaban papel y tinta, y a los cuales aventajaban enormemente.

I. Construyamos una yupana básica, esta sólo consta de unidades y decenas.

Para construir una yupana se necesitan los siguientes materiales:



Figura 32.
Tabla de madera



Figura 33.
Tiza



Figura 34.
Piedras pequeñas

Sigue los siguientes pasos para construir la yupana:

- 1) Divida la tabla con el marcador de la siguiente manera:



Figura 35. Yupana 2

- 2) En el interior de los cuadrados dibuje puntos de la siguiente manera y cantidad. Los tres cuadros de la derecha serán para las unidades y los tres de la izquierda para las decenas:

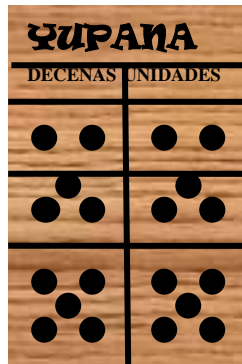


Figura 36. Yupana 3

3) Las piedras o los granos de maíz se utilizan para ir realizando las operaciones sobre la yupana:

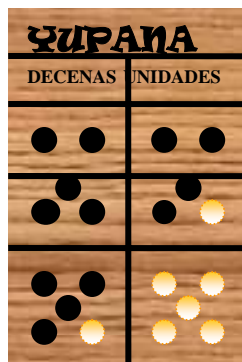


Figura 37. Yupana 4

II. Veamos como funciona la yupana

Una yupana básica consta de decenas y de unidades, las decenas están a la izquierda y las unidades en la derecha:

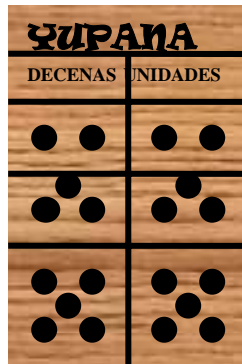


Figura 38. Yupana 5

Como se sabe, 10 unidades hacen una decena. De manera que, por ejemplo, el número 27 se representa de la siguiente forma en la yupana:



Figura 39. Yupana 6

La yupana nos ayuda a sumar o a restar. Por ejemplo, realizaremos la siguiente operación con nuestra yupana:

$$36 - 10 - 4 + 2 = ?$$

Primero, procederemos a armar en la yupana el número 36:

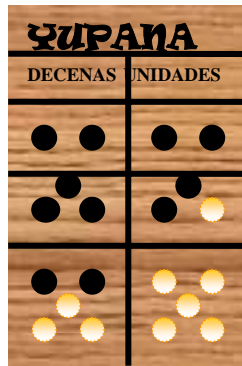


Figura 40. Yupana 7

36

Para continuar con la operación $36 - 10 - 4 + 2 = ?$, procederemos a quitar una decena de la yupana, es decir procedemos a realizar la primera resta: $36 - \underline{10} - 4 + 2 = ?$

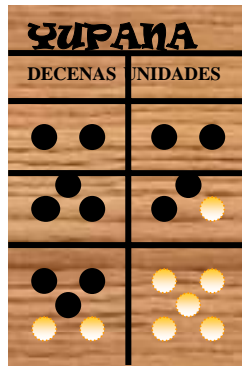


Figura 41. Yupana 8

26

Después continuamos con la segunda resta ($36 - 10 - \underline{4} + 2 = ?$) quitando cuatro unidades de la yupana:

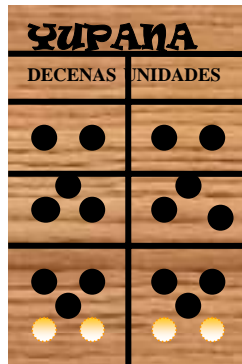


Figura 42. Yupana 9
22

Finalmente realizamos la suma ($36 - 10 - 4 + 2 = ?$) agregando dos unidades a la yupana:



Figura 43. Yupana 10

Por tanto... la operación esta resuelta: $36 - 10 - 4 + 2 = \underline{24}$.

¡Ahora si estamos listos para practicar con la Yupana

1. ¿Qué cantidad esta registrada en la yupana?

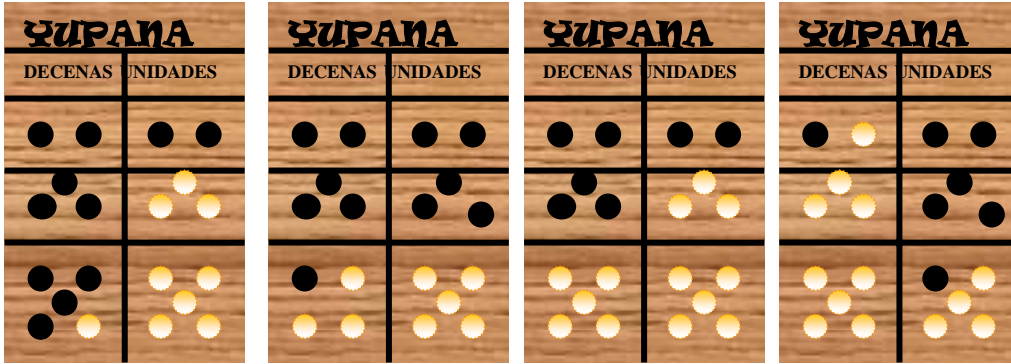


Figura 44. Yupana 11 Figura 45. Yupana 12 Figura 46. Yupana 13 Figura 47. Yupana 14

2. Realiza las siguientes operaciones en la yupana

- a) $34 - 5 + 6$
- b) $25 + 4 + 2 - 8$
- c) $15 + 20 + 5 - 2$
- d) $75 + 9 - 13$

3. ¿Como podríamos multiplicar sobre la yupana?

Resuelve las siguientes multiplicaciones sobre la yupana

- a) 4×2
- b) 8×6
- c) 4×12
- d) 5×15

4. ¿Como podríamos dividir sobre la yupana?

Resuelve las siguientes divisiones sobre la yupana

- e) $26 \div 2$
- f) $48 \div 6$

g) $24 \div 12$

h) $30 \div 15$

5. ¿Qué tendríamos que hacer para poder trabajar con unidades del mil, o centenas de mil en la yupana?

6. ¿Cómo construiríamos una yupana para trabajar en otras bases?

ANEXO 5. GUÍA N° 4. AVANCEMOS CON LA YUPANA
GUÍA N° 4



Figura 48. Yupana 1

I. Construyamos una yupana para el sistema binario o de base dos, esta sólo consta de unidades, grupos de dos elementos y grupos de cuatro elementos.

a) Pasos para construir la yupana para el sistema binario. Divida la tabla de la siguiente manera:

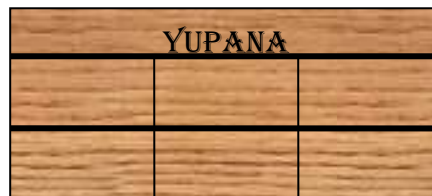


Figura 49. Yupana en base dos

En el interior de los cuadrados perfore o dibuje orificios redondos de la siguiente manera y cantidad. El cuadro de la derecha será para las unidades, el siguiente para los grupos de dos elementos y el de la izquierda para los grupos de cuatro elementos.

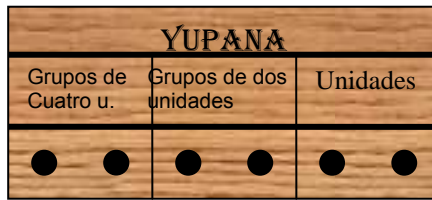


Figura 50. Yupana 2 en base dos

Las piedras se utilizan para ir realizando las operaciones sobre la yupana:

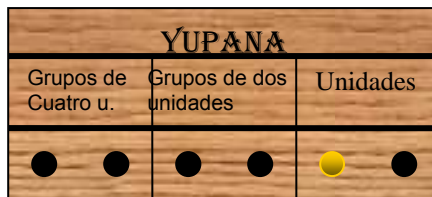


Figura 51. Yupana 3 en base dos

Funcionamiento de la yupana

Una yupana para el sistema binario o de base dos, esta sólo consta de unidades, grupos de dos elementos y grupos de cuatro elementos:

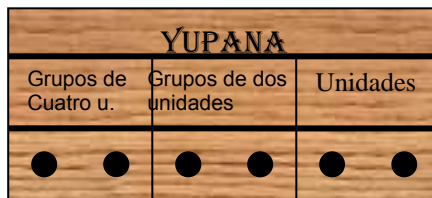


Figura 52 . Yupana 2 en base dos

El número 2 se representa de la siguiente forma en la yupana:



Figura 53. Yupana 4 en base dos

¡Ahora si estamos listos para practicar con la Yupana en base dos!

1. ¿Qué cantidad esta registrada en la yupana?

YUPANA					
Grupos de Cuatro u.		Grupos de dos unidades		Unidades	
●	●	●	●	●	●

Figura 54. Yupana 5 en base dos

YUPANA					
Grupos de Cuatro u.		Grupos de dos unidades		Unidades	
●	●	●	●	●	●

Figura 55. Yupana 6 en base dos

2. Con la yupana modificada represente los cinco primeros dígitos del sistema decimal en el sistema binario.

3. Realiza sumas en el sistema binario con ayuda de la yupana, como:

a) $1_{(2)} + 10_{(2)}$

b) $1_{(2)} + 11_{(2)}$

4. Intenta diseñar una yupana para el sistema octal posicional.

ANEXO 6. ESTUDIANTES 7-3 TRABAJANDO CON LA YUPANA



ANEXO 7. ESTUDIANTES 7-3 TRABAJANDO CON EL QUIPU



ANEXO 8. MONUMENTOS DE LA CULTURA INCA



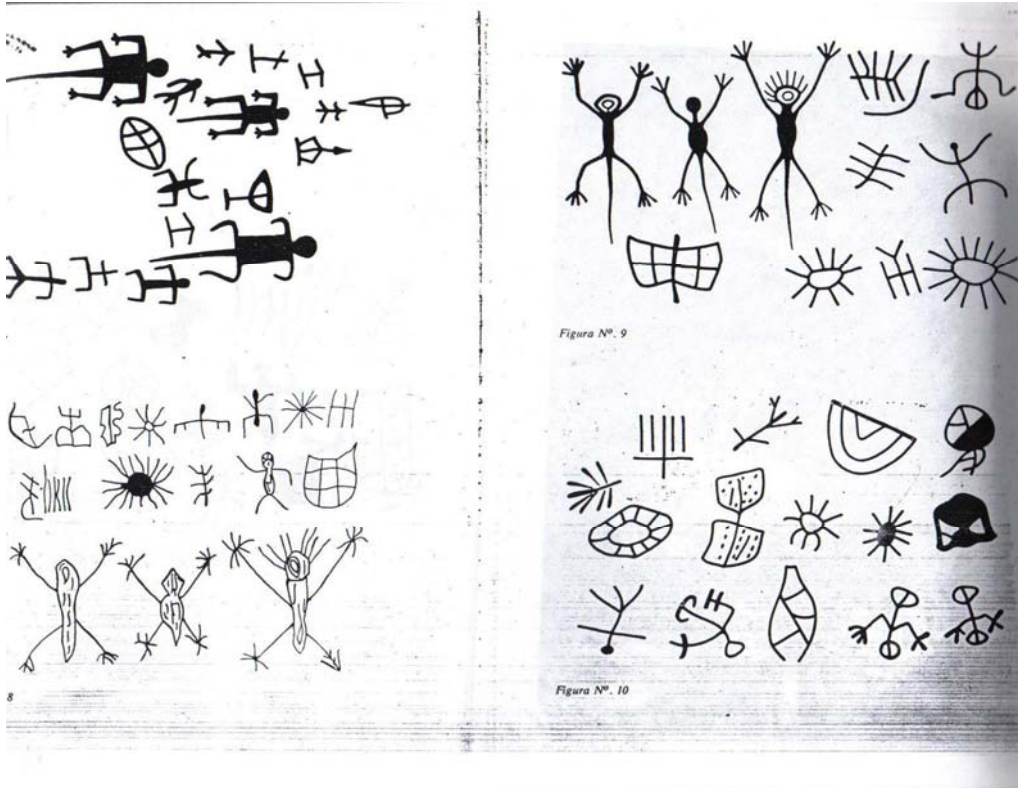
Machu Picchu



Tipón.

Fotografías tomadas de <http://incas.perucultural.org.pe/galemon801.htm>

ANEXO 9. ESCRITURA IDEOGRÁFICA DE LA CULTURA GUANE



Imágenes tomadas de Ardila, I. (1978). *El pueblo de los Guanes, raíz gloriosa y fecunda de Santander*.

ANEXO 10. PUEBLO DE GUANE ACTUALMENTE



Calle de Guane



Iglesia de Guane



Único establecimiento educativo de Guane