

**SIMULACIÓN NUMÉRICA EN ELEMENTOS FINITOS DE LA  
ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE FLUJO DE FLUIDOS EN  
MEDIOS POROSOS PARA UN SISTEMA BIFÁSICO EN 2D**

**JUAN FERNANDO CARREÑO NAVARRO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-QUÍMICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS  
BUCARAMANGA**

**2010**

**SIMULACIÓN NUMÉRICA EN ELEMENTOS FINITOS DE LA  
ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE FLUJO DE FLUIDOS EN  
MEDIOS POROSOS PARA UN SISTEMA BIFÁSICO EN 2D**

**JUAN FERNANDO CARREÑO NAVARRO**

**Trabajo de grado para optar por el título de Ingeniero de Petróleos**

**Director**

**ELKIN RODOLFO SANTAFÉ RANGEL**

**Ing. De Petróleos**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-QUÍMICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS  
BUCARAMANGA**

**2010**

*Este título está dedicado al Amor encarnado en una sola persona...*

*La **Gordita** que Dios me la tiene desde el Cielo cuidándonos.*

*Gracias a Ella todo esto es posible y por Ella este es sólo el primer paso.*

*A Ladyta y John, mis hermanos, quienes fueron mi motivación,  
mi fuerza y mi luz en la distancia para sacar adelante la carrera.*

*A Vale, el rayo de vida que dejó la Gordis...*

## AGRADECIMIENTOS

A Dios siempre gracias.

A mi Papá que tantas veces dudo de mí, pero que en fondo seguía creyendo.

A mi abuelita que quiero tanto y que ahora está en el cielo.

A mis Tías que siempre que llegaba a San Gil me atendían como a un Rey.

A Lilianita que no nos abandono ni un instante cuando mi Mamá estuvo enferma.

A Zarith, Lizeth y toda la Familia, por su apoyo.

A Don Elkin Santafé, una muy buena persona, excelente profesor y muy buen amigo. Gracias por la invitación a este proyecto y por la fortuna de permitirme ser parte de una nueva manera de ver la Investigación en la Escuela de Petróleos.

Al GITAH, a todos y cada uno de sus integrantes, a Nelson, Eyberth, Omar quienes con sus aportes se pudo finalizar este proyecto.

A Carlos Piedrahita, William Agudelo y al Grupo de Petrosismica del ICP.

A Margarita, quien ha sido mi gran compañía durante todo este tiempo lleno de bendiciones, de cosas sencillas y bonitas como ella misma lo es.

A Julio, Carolina, William, Tito, el Enano, Ruby, Velilla, Cardozo, Marlhin, Jorge Luis, y a todos aquellos compañeros Petroleros que en este momento se me escapan y han hecho parte de mi vida por la Universidad, Muchas Gracias.

A los parceros de la Colonia que siempre han estado presente.

## OBJETIVOS

### ■ OBJETIVO GENERAL

Modelar la ecuación fundamental de flujo en medios porosos para un sistema bifásico en 2D por medio del método de elementos finitos y representar computacionalmente dicho modelo a través de un solver de ecuaciones diferenciales.

### ■ OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Revisar y evaluar las formulaciones integro-diferenciales de la ecuación de transporte en medios porosos.
- Estudiar la metodología para la estructuración de problemas de flujo usando el Método del Elemento Finito (MEF).
- Plantear una solución en elementos finitos de la ecuación fundamental de flujo (Ecuación de Difusividad).
- Comparar el modelo por medio un simulador específico de la ingeniería de petróleos.

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>1. Simulación Numérica de Yacimientos</b>	<b>1</b>
1.1. Modelos Matemáticos . . . . .	2
1.2. Ecuación Fundamental de Flujo (Planteamiento De La Ecuación De Difusividad Para Flujo En Medios Porosos En Coordenadas Cartesianas)	3
1.3. Planteamiento de las Ecuaciones Para Flujo Bifásico (Agua-Aceite) . .	6
<b>2. Métodos Numéricos</b>	<b>10</b>
2.1. Método del Elemento Finito . . . . .	11
2.1.1. Concepto Básico . . . . .	11
2.1.2. Estado del Arte . . . . .	13
2.1.3. Aplicabilidad General del Método . . . . .	15

---

2.1.4.	Aplicaciones Del Método De Elementos Finitos . . . . .	15
2.1.5.	Descripción General Del Método . . . . .	16
2.1.6.	Paquetes De Cómputo Para Elementos Finitos . . . . .	18
<b>3.</b>	<b>Metodología</b>	<b>20</b>
3.1.	Planteamiento del Problema a Realizar . . . . .	20
3.1.1.	Modelo Matemático . . . . .	20
3.2.	Modelamiento Mediante el MEF . . . . .	22
3.2.1.	Modelo Numérico . . . . .	22
3.2.2.	Métodos de Aproximación . . . . .	23
3.2.3.	Pasos Para Resolver por Medio del MEF . . . . .	27
<b>4.</b>	<b>Implementaciones Computacionales Basadas en MEF</b>	<b>44</b>
4.1.	Descripción General . . . . .	44
4.1.1.	<i>FlexPDE</i> . . . . .	45
4.1.2.	Operación del <i>FlexPDE</i> . . . . .	48
4.1.3.	<i>WinBOAST</i> . . . . .	53
4.1.4.	Operación del <i>WinBoast</i> . . . . .	56

---

4.2. Validación De La Formulación Mef Desarrollada Mediante MDF . . . .	58
4.3. Modelos de Estudio . . . . .	64
4.3.1. Guia de Construcción de los modelos de estudio . . . . .	64
4.3.2. Modelo 1 Areal (Inyección de Agua) . . . . .	66
4.3.3. Modelo 2 Vertical (Inyección de agua con zonas de múltiple completamiento) . . . . .	81
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>107</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>109</b>
<b>APENDICE</b>	<b>110</b>
.1. Descripción De Los Codigos Auxiliares Desarrollados . . . . .	110
.1.1. PROCESADOR.exe . . . . .	110
.1.2. ERROR.exe . . . . .	113
.2. Códigos Auxiliares . . . . .	114
.2.1. PROCESADOR.exe . . . . .	114
.2.2. ERROR.exe . . . . .	119
.3. Códigos de WinBoast y FlexPDE . . . . .	121

---

.3.1.	Modelo 1 . . . . .	121
.3.2.	Modelo 2 . . . . .	136

<b>REFERENCIAS</b>	<b>159</b>
--------------------	------------

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

1.1. Modelo infinitesimal para el balance de masa. . . . .	3
2.1. Modelado de un puente por medio de Elementos Finitos. . . . .	12
2.2. Idealización de una circunferencia por poligonos expresando cada arista de estos como un elemento finito. . . . .	13
3.1. Dominio Idealizado . . . . .	22
3.2. Elementos básicos para modelos bidimensionales . . . . .	28
3.3. Elementos básicos para modelos tridimensionales . . . . .	29
3.4. Dominio discretizado por elementos finitos triangulares. . . . .	32
3.5. Representación gráfica del polinomio de aproximación en una diimensión. . . . .	36
4.1. Frame inicial del <i>FlexPDE</i> . . . . .	46

4.2. Definición de pozos usando las condiciones de limite. . . . .	61
4.3. Distribución de un caudal de $1750 \left[\frac{stb}{d}\right]$ , ubicado en la posición (26,26), la función es máxima es dicha posición. . . . .	62
4.4. Refinamiento local <i>FlexPDE</i> , usado en las zonas de altos gradientes (pozos). . . . .	63
4.5. A) Modelo 1 areal WinBOAST (inyección de agua), (B) Modelo 1 areal FlexPDE (inyección de agua) . . . . .	67
4.6. Modelo de permeabilidades relativas en base a la ecuación 4.13. para el caso 1, modelo 1. . . . .	72
4.7. Perfil de presiones WinBOAST a 1710 días (Ruptura) generado en MATLAB . . . . .	72
4.8. Perfil de presiones FLEXPDE a 1680 días (Ruptura) . . . . .	73
4.9. Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 1710 días (Ruptura) gen- erado en MATLAB . . . . .	74
4.10. Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 1680 días (Ruptura) . . . . .	75
4.11. Presión promedio del yacimiento . . . . .	76
4.12. Error relativo promedio al WINBOAST . . . . .	77
4.13. Producción Acumulada . . . . .	77
4.14. Error relativo de producción al WinBOAST . . . . .	78

---

4.15. Producción diaria . . . . .	78
4.16. Error de Producción relativo al WinBOAST . . . . .	79
4.17. Modelo de permeabilidad relativa Caso 2, Modelo 1. . . . .	80
4.18. Perfil de presiones WINBOAST a 3600 días (Ruptura) generado en MATLAB. . . . .	81
4.19. Perfil de presiones FLEXPDE a 3600 días. . . . .	82
4.20. Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 3600 días (Ruptura) gen- erado en MATLAB. . . . .	83
4.21. Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 3600 días. . . . .	84
4.22. Presión promedio del yacimiento. . . . .	85
4.23. Error relativo al WinBOAST . . . . .	85
4.24. Producción Acumulada. . . . .	86
4.25. Error de la producción acumulada. . . . .	86
4.26. Producción diaria. . . . .	87
4.27. Error relativo al WinBOAST. . . . .	87
4.28. Modelo 2 Vertical WINBOAST (ZONA DE INYECCION). . . . .	88
4.29. Modelo 2 Vertical FLEXPDE (ZONA DE INYECCION) . . . . .	89
4.30. Perfil de presiones WINBOAST a 180 días, generado en MATLAB. . . .	93

---

4.31. Perfil de presiones FLEXPDE a 180 días. . . . .	93
4.32. Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 180 días, generado en MATLAB. . . . .	94
4.33. Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 585 días, generado en MATLAB. . . . .	94
4.34. Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 180 días. . . . .	95
4.35. Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 720 días. . . . .	95
4.36. Presión promedio de las arenas. . . . .	96
4.37. Error relativo al WINBOAST . . . . .	97
4.38. Producción Acumulada. . . . .	98
4.39. Error relativo al WINBOAST . . . . .	98
4.40. Producción diaria. . . . .	99
4.41. Error relativo al WINBOAST. . . . .	99
4.42. Perfil de presiones WINBOAST a 180 días, generado en MATLAB. . . .	100
4.43. Perfil de presiones FlexPDE a 180 días. . . . .	100
4.44. Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 180 días, generado en MATLAB. . . . .	101

---

4.45. Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 803 días, generado en MATLAB. . . . .	101
4.46. Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 180 días. . . . .	102
4.47. Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 881 días. . . . .	102
4.48. Presión promedio de las arenas . . . . .	103
4.49. Error relativo al WinBOAST . . . . .	104
4.50. Producción Acumulada. . . . .	105
4.51. Error relativo al WINBOAST . . . . .	105
4.52. Producción diaria. . . . .	106
4.53. Error relativo al WinBOAST. . . . .	106

# ÍNDICE DE TABLAS

---

4.1. Metodología General usada para la validación de los modelos basados en MEF . . . . .	45
4.2. Estructura general de un script en FlexPDE. . . . .	49
4.3. Consideraciones y limitaciones del WinBOAST. . . . .	55
4.4. Dimensiones del Modelo 1. . . . .	68
4.5. Propiedades de la roca y fluidos del Modelo 1. . . . .	68
4.6. Condiciones iniciales para el modelo 1. <i>WinBOAST</i> . . . . .	69
4.7. Restricciones de Pozo. <i>WinBOAST</i> . . . . .	70
4.8. Dimensiones del Modelo 2. . . . .	88
4.9. Propiedades de la roca y fluidos del Modelo 2. . . . .	90
4.10. Condiciones iniciales para el modelo 2. <i>WinBOAST</i> . . . . .	90
4.11. Restricciones de Pozo. <i>WinBOAST</i> . . . . .	92

**TÍTULO :** SIMULACIÓN NUMÉRICA EN ELEMENTOS FINITOS DE LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS PARA UN SISTEMA BIFÁSICO EN 2D\*.

**AUTORES :** CARREÑO NAVARRO, Juan Fernando. †

**PALABRAS CLAVES :** Método del Elemento Finito, Ley de Darcy, Simulación Numérica de Yacimientos, Ecuación de difusividad.

**DESCRIPCIÓN :** El fenómeno de flujo de fluidos en medios porosos es en principio la razón por la cual producen los pozos y por ende los yacimientos producen petróleo, dicho fenómeno ha sido estudiado durante por décadas incrementando la calidad y la confiabilidad en los resultados. Convencionalmente se ha usado el Método de Diferencias Finitas (MDF) como el método numérico por excelencia para la obtención de la solución a las ecuaciones diferenciales parciales que el modelo matemático propone, este trabajo se fundamenta en la utilización del Método del Elemento Finito (MEF) como alternativa de solución.

Se planteó el modelo matemático de flujo de agua y aceite para un medio con propiedades constantes y se propuso la formulación numérica del mismo; este modelo se aplicó computacionalmente por medio de FlexPDE 5.0; Se realizó un análisis de sensibilidad alterando el valor de algunas variables principales, validando los resultados con WinBOAST, una herramienta de uso libre muy conocida en la academia de la Ingeniería de Petróleos. Los resultados indican la consistencia del modelo y sugieren una extensión del estudio para mejorar el detalle en la formulación para poder obtener más exactitud, menos tiempo de computo y modelos mucho más complejos.

---

\*Trabajo de Grado

†Facultad de Ingenierías Físico-Químicas, Escuela de Ingeniería de Petróleos, Elkin Rodolfo Santafé (Director).

**TITLE :** FINITE ELEMENT NUMERIC SIMULATION OF FLUIDS FLOW FUNDAMENTAL EQUATION ON A POROUS MEDIA FOR A TWO PHASES AND TWO DIMENSION SYSTEM\*.

**AUTORES :** CARREÑO NAVARRO, Juan Fernando. †.

**KEY WORDS :** Finite Element Method, Darcy's Law, Reservoir Numeric Simulation, Diffusivity Equation.

**DESCRIPTION :** The fluid flow phenomenon in a porous media is the main reason of wells and temporarily oil fields production, this phenomenon has been studied during a lot of time, increasing the results quality and reliance. Usually the Finite Diference Method (FDM) has been used as the main method of numeric solving to the partial differential equations that the mathematical model suggest instead the proposed method. This work is based on the use of the Finite Element Method (FEM) as an alternative method.

The mathematics model of oil-water flow across a porous media with constant properties and its numeric formulation are established and simulated using the software flexPDE 5.0, this work include a sensibility analysis of the numerical model; the results obtained was compared with the WinBOAST's results, a free tool well knows on Petroleum Engineer Academy, the result obtained show the method's consistence and suggest an additional study for enhance the mathematical formulation to improve the accuracy, a minimal computation time and a management of complex geometries.

---

\*Work of Degree

†Faculty of Physical-Chemical Engineering, School of Petroleum Engineering, Elkin Rodolfo Santafé (Director)

# INTRODUCCIÓN

---

Uno de los objetivos de la simulación de yacimientos es adquirir un mejor conocimiento de las características del reservorio de tal manera se pueda estimar las reservas recuperables, definir un óptimo esquema de explotación que permita recuperar la mayor cantidad de hidrocarburos a bajo costo, además de predecir el comportamiento futuro del yacimiento, partiendo del hecho de que las condiciones reales del mismo se pueden representar a través de un modelo que bajo condiciones de prueba apropiadas arrojen información acertada y útil. En general los modelos pueden clasificarse como físicos y matemáticos. Los físicos son reproducciones de laboratorio que trata de imitar lo que ocurre en el yacimiento; las ecuaciones que describen de manera teórica este comportamiento constituyen el modelo matemático. Ambos tipos de modelos han jugado un papel importante en la industria del petróleo. Por ejemplo, las leyes que gobiernan el flujo de fluidos en un medio poroso fueron descubiertas y delineadas empleando modelos físicos. La ley de Darcy, los conceptos de permeabilidad relativa, presión capilar, densidad y correlaciones de viscosidad, entre otras, tienen sus orígenes en experimentos con modelos físicos, sin embargo, tienen la gran limitante de escalar un extenso dominio a un estudio de pequeña escala, el enfoque matemático resulta en estos casos indispensable.

El deseo de optimizar los diversos procesos que se ejecutan en la industria de hidro-

carburos con algún grado de exactitud, hizo trasladar los modelos realizados a pequeña escala a los yacimientos de gran extensión, con soluciones que no están limitadas a ser puntuales; sino que su uso se extiende al estudio de fenómenos locales alrededor de la cara del pozo demostrando ser superiores, en este aspecto, a los modelos físicos. El modelo matemático más familiar es la ecuación de balance de materia; este es un modelo matemático o simulador de yacimiento en todo sentido, se basa en un concepto físico fundamental: *el principio de conservación*, que indica en nuestro caso el volumen que puede atravesar un fluido (llámese agua, aceite o gas) en un medio poroso. Cabe resaltar que el término “solución numérica” expresa un proceso físico cuya ocurrencia se da en alguna región de dimensiones finitas que al estar modelado por medio de una ecuación matemática (o conjunto de ellas) determinan la interacción de un punto en el interior de dicha región con los demás a un instante de tiempo dado, prediciendo así el comportamiento que toma dicho proceso.

Dado el caso de ecuaciones matemáticas no muy complejas, la solución estará dada por una fórmula la cual puede ser subsecuentemente manipulada para calcular los parámetros deseados; a este tipo de solución se le conoce como analítica. Sin embargo, cuando las ecuaciones son muy complejas y no pueden resolverse analíticamente. Se debe reemplazar la ecuación original por un conjunto más simple de ecuaciones que sea fácil de resolver y que esté relacionado, con la ecuación original. Sin embargo, en lugar de obtener otra(s) fórmula(s), se puede llegar a soluciones de las ecuaciones más simples en forma de tablas de valores numéricos, cada uno de los cuales se refiere a puntos discretos en dentro de la región. Esto se conoce como solución numérica, la cual representa una aproximación a la ecuación original que se quería resolver.

En términos generales, podría decirse que un simulador numérico está integrado por tres modelos: el diferencial, el numérico y el de computador. El modelo diferen-

cial está conformado por el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen los procesos físico-químicos que ocurren en el yacimiento en función del espacio y del tiempo. El modelo numérico constituye la forma en que se da solución al modelo diferencial, existen al menos tres formas de hacer este modelo:

- Diferencias finitas, que es el más usado.
- Elementos finitos, el cual se enfoca en este proyecto.
- Elementos de volumen de control.

Con el fin de dar solución a este gran número de ecuaciones se requiere la elaboración de un programa de computador conocido como el modelo de computador del simulador.

# Simulación Numérica de Yacimientos

---

---

## GENERALIDADES

La simulación de un yacimiento se refiere a la construcción y operación de un modelo cuyo comportamiento asume las características del yacimiento real, el modelo por si mismo puede ser físico o matemático. Un modelo matemático es simplemente un grupo de ecuaciones que se encuentran sujetas a ciertas consideraciones que describen el proceso físico activo en el medio. Aunque el modelo mismo no es real, su comportamiento se asume valido en la descripción del comportamiento de un campo real.

Un yacimiento de petróleo es, en un atrevido resumen, un medio poroso que contiene agua e hidrocarburos. La meta principal de la simulación de yacimientos es predecir el futuro desempeño de un yacimiento y encontrar los caminos y medios para optimizar el recobro de los hidrocarburos presentes. Las dos características más importantes de un yacimiento de petróleo son la naturaleza de la roca y de los flu-

idos que la llenan\*; porque el modelo matemático resultante va a ser función tanto del espacio y el tiempo como de las propiedades poseen el medio discreto.

## 1.1 Modelos Matemáticos

En 1959 Douglas, Peaceman y Rachford propusieron los métodos "Leap-Frog" y "Simultaneous Solution" para resolver problemas bidimensionales de flujo bifásico. En 1960 Stone y Sheldchmod presentaron en famoso método IMPES (Implicit Pressure - Explicit Saturation).

Los modelos matemáticos de simulación de yacimientos consisten básicamente de un grupo de ecuaciones diferenciales parciales que expresan conservación de masa o energía; adicionalmente los modelos llevan consigo varias leyes o principios que describen el proceso activo en el yacimiento, como pueden ser la ley de Darcy (flujo en medios porosos) o la de Fourier (flujo de calor) entre otras. Finalmente varias consideraciones pueden ser tenidas en cuenta, como lo son: flujo en varias dimensiones y flujo multifásico o monofásico; con uno o varios componentes, además de la posibilidad de despreciar la presión capilar y la gravedad dependiendo de la configuración del modelo.

Las ecuaciones del modelo son no lineales debido a que tanto las permeabilidades relativas como la presión capilar y los factores volumétricos de formación son función de la saturación y de la presión respectivamente por lo que requieren soluciones numéricas.

---

\*Chen, et al

Los resultados calculados generalmente consisten en presiones y saturaciones de los fluidos en cada uno de los cientos de puntos nodales en todo el yacimiento<sup>†</sup>.

## 1.2 Ecuación Fundamental de Flujo (Planteamiento De La Ecuación De Difusividad Para Flujo En Medios Porosos En Coordenadas Cartesianas)

La ecuación fundamental de flujo es la expresión diferencial de la ley de la conservación de la masa. Su forma depende de la geometría de flujo, la naturaleza del fluido en movimiento, el número de fases en el fluido y el tipo de flujo.

Supóngase un elemento infinitesimal de volumen en un medio poroso continuo a través del cual ocurre flujo monofásico en la dirección  $x$ , tal como se ilustra en la figura 1.1

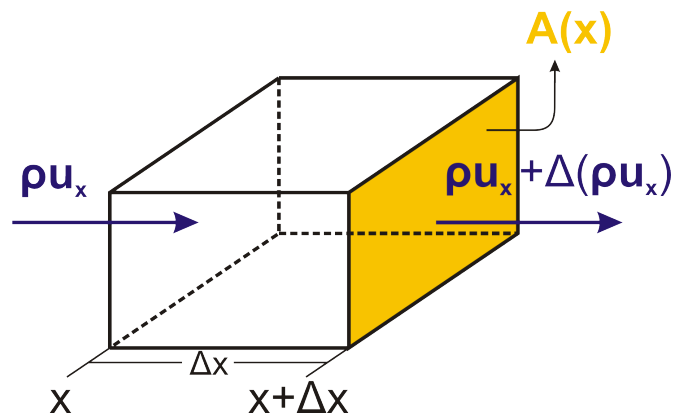


Figura 1.1: Modelo infinitesimal para el balance de masa.

<sup>†</sup>COATS

Siendo  $u_x$  la velocidad volumétrica de flujo en la dirección  $x$ , definida así:

$$u_x = \frac{\text{Volumen}}{\text{Tiempo} \times \text{Area}} \quad (1.1)$$

El flujo másico, definido como el flujo de masa por unidad de tiempo por unidad de área, está dado por:

$$\text{Flujo másico} = \rho u_x \quad (1.2)$$

Si se efectúa un balance de la masa dentro del elemento infinitesimal durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , se tiene:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Masa} \\ \text{entrante} \end{array} \right]_{\Delta t} - \left[ \begin{array}{c} \text{Masa} \\ \text{Saliente} \end{array} \right]_{\Delta t} \pm \left[ \begin{array}{c} \text{Masa que entra o sale} \\ \text{por fuentes o sumideros} \end{array} \right]_{\Delta t} = \left[ \begin{array}{c} \text{Acumulación (+) o} \\ \text{Agotamiento (-)} \end{array} \right]_{\Delta t}$$

Cada término de la ecuación anterior se determina del siguiente modo:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Masa} \\ \text{entrante} \end{array} \right]_{\Delta t} = \rho u_x A_x \Delta t \quad (1.3)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Masa} \\ \text{saliente} \end{array} \right]_{\Delta t} = [\rho u_x A_x + \Delta (\rho u_x A_x)] \Delta t \quad (1.4)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Masa que entra o sale} \\ \text{por fuentes o sumideros} \end{array} \right]_{\Delta t} = \pm \tilde{q} \Delta V \Delta t = \pm \tilde{q} A_x \Delta x \Delta t \quad (1.5)$$

Siendo  $\tilde{q}$  la cantidad de masa que entra o sale por fuentes o sumideros, por unidad de volumen del yacimiento por unidad de tiempo.

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Acumulación (+) o} \\ \text{Agotamiento (-)} \end{array} \right]_{\Delta t} = [A_x \Delta x \phi \rho]_{t+\Delta t} - [A_x \Delta x \phi \rho]_{\Delta t} \quad (1.6)$$

La sustitución y simplificación de estos resultados en la ecuación general da como resultado:

$$\rho u_x A_{(x)} \Delta t - [\rho u_x A_{(x)} \Delta t + \Delta (\rho u_x A_{(x)})] \Delta t = \pm \tilde{q} \Delta V \Delta t + \Delta [A_{(x)} \Delta x \phi \rho]_t \quad (1.7)$$

Para el caso particular de flujo unidimensional se tiene que:

$$-\frac{\partial (\rho u_x A_{(x)})}{\partial x} \pm \tilde{q} A_x = A_x \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} \quad (1.8)$$

Considerando el equilibrio de un elemento perteneciente a determinado cuerpo. El caudal que por este circula puede ser calculado por medio de la ley de Darcy.

$$u = -\frac{k}{\mu} \Delta \Phi \quad (1.9)$$

Donde:

$\Phi =$  Caída de Presión total ( $P - \rho gh$ )

$k =$  Tensor de permeabilidad efectiva

$\mu =$  Viscosidad del fluido

Extendiendo estos cálculos para un flujo tridimensional se obtiene la ecuación general:

$$-\nabla \cdot (\alpha \rho u) = \alpha \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} \pm \alpha \tilde{q} \quad (1.10)$$

Donde,

$\nabla$  = Operador nabla aplicado al campo vectorial, dominio a trabajar.

$u$  = Vector velocidad volumétrica, dado por la ley de darcy

$\alpha$  = Coeficiente que depende de la dimensión a trabajar, esto es:

$\alpha = 1$  Para flujo tridimensional.

$\alpha = H$  Es el espesor para flujo bidimensional.

$\alpha = A$  Es el área de sección transversal para flujo unidimensional.

### 1.3 Planteamiento de las Ecuaciones Para Flujo Bifásico (Agua-Aceite)

En el yacimiento interactúan mezclas de fluidos tanto miscibles como inmiscibles; si partimos de un modelo físico que contiene solamente dos fases, agua y aceite completamente inmiscibles entre si,<sup>‡</sup> se puede llegar al planteamiento de una ecuación matemática que es de particular interés en áreas como el recobro secundario, ya que

---

<sup>‡</sup>No existe intercambio de masa.

describiría un comportamiento correspondiente a un ejemplo sencillo de inyección de agua, por no hablar de otros casos.

Como son dos los fluidos que se modelan y como no hay transferencia de masa entre ellos introducen el concepto de saturación que se define como la fracción del volumen poroso ocupada por algún fluido. De lo anterior se observa que en el modelo de flujo bifásico:

$$S_w + S_o = 1 \quad (1.11)$$

Donde  $S_w$  y  $S_o$  son las saturaciones de agua<sup>§</sup> y aceite respectivamente.

Debido a la diferencia de presiones que existe en la interface o tensión superficial de la interface se identifica la denominada presión capilar, de la cual se hablara más adelante y se calcula mediante la relación:

$$P_c = P_{\text{fase no mojante}} - P_{\text{fase mojante}} \quad (1.12)$$

La cual es función de la saturación, particularmente de  $S_w$ .

El planteamiento de las ecuaciones para el balance utiliza los mismos términos para cada fase presente. El término de acumulación de masa para un flujo 3D se calcula de acuerdo a la ecuación.

---

<sup>§</sup>Fase mojante en la mayoría de los casos.

$$\frac{\partial (\phi \rho_\beta S_\beta)}{\partial t} * \alpha \quad (1.13)$$

En general la ecuación fundamental para flujo en 3D a condiciones de yacimiento queda:

$$-\nabla \cdot (\alpha \rho_\beta u_\beta) = \alpha \frac{\partial (\phi \rho_\beta S_\beta)}{\partial t} \pm \alpha \tilde{q}_\beta \quad (1.14)$$

Donde  $\beta$  es fase del fluido ya sea aceite o agua que nos indica en una primera instancia la idea de que va a ser un sistema de dos ecuaciones que resultaran del planteamiento matemático del modelo.

De acuerdo a la ley de darcy la velocidad de cada fluido puede ser expresada:

$$u_\beta = -\frac{1}{\mu_\beta} k_\beta \frac{\rho_\beta}{B_\beta} (\nabla \Phi) \quad (1.15)$$

Con:

$$\Phi = \int \frac{dP}{\rho_\beta} + gh \quad (1.16)$$

Puesto que el flujo simultaneo de dos fluidos ocasiona que el uno interfiera con el otro, el término  $k_\beta$  representa la permeabilidad efectiva al fluido, calculada por medio de la relación

$$k_\beta = k_{r\beta} k \quad (1.17)$$

Siendo  $k$  la permeabilidad absoluta del medio poroso y  $k_{r\beta}$  la permeabilidad relativa a la fase.

Hay que resaltar que al considerar el flujo a condiciones normales, la ecuación planteada tendría que considerar el flujo de gas puesto que el gas estaría disperso tanto en el agua como en el aceite y también se encontraría en estado libre, pero en este caso como únicamente se considera flujo bifásico se desprecia y las ecuaciones son las señaladas anteriormente. Por medio del concepto de presión capilar,

$$P_w = P_o - P_c \quad (1.18)$$

La ecuación de difusividad para flujo bifásico queda en función de la saturación de agua (permeabilidades relativas y presiones capilares) y la distribución de presiones (viscosidades, factores volumétricos) como podemos observar a continuación si consideramos un modelo de flujo bifásico, donde se cancela el término de gravedad para el caso de una dimensión. Se obtiene entonces los perfiles:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\alpha k k_{ro} \rho_o}{\mu_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) - \alpha q_o = \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o \phi S_o) \quad (1.19)$$

Para el aceite, y

$$\nabla \cdot \left( \frac{\alpha k k_{rw} \rho_w}{\mu_w} \frac{\partial P_w}{\partial x} \right) - \alpha q_w = \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w \phi S_w) \quad (1.20)$$

Para el agua.

## Métodos Numéricos

---

En términos generales, podría decirse que un simulador numérico está integrado por tres modelos: el modelo diferencial (o matemático), el numérico y el computacional. El modelo diferencial está conformado por el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen los procesos físico y/o químicos que ocurren en el yacimiento en función del espacio, del tiempo y de muchas otras variables como puede ser la presión o temperatura.

El modelo numérico constituye la forma en que se da solución al modelo diferencial. Existen por lo menos tres formas de crear este modelo:

1. **DIFERENCIAS FINITAS (MDF):** Usado en la mayoría de casos.
2. **ELEMENTOS FINITOS (MEF):** Modelo a utilizar.
3. **ELEMENTOS DE VOLUMEN DE CONTROL:** Modelo con fuerte crecimiento en el área de métodos numéricos.

Estos métodos numéricos surgen debido a que las ecuaciones diferenciales parciales que se plantean en el modelo diferencial poseen una alta no-linealidad que no es posible resolver analíticamente cuando se trata de problemas medianamente complejos. En contraste con las soluciones analíticas, las soluciones numéricas dan valores de presión y saturación de fluidos únicamente en puntos discretos de espacio y tiempo.

Discretización es el proceso de convertir ecuaciones diferenciales parciales - EDP en ecuaciones algebraicas. Varios métodos numéricos pueden ser usados para discretizar las EDP; sin embargo, la aproximación más común en la industria hoy en día como se menciono es el método de diferencias finitas.

Comparado con el MDF, la introducción del MEF ha sido reciente. Las ventajas que presenta la utilización de este último son que las condiciones en los límites, el dominio de geometrías complejas y las propiedades variables de los materiales pueden ser manejadas con relativa facilidad. También la estructura clara y versátil del método hace posible el desarrollo de software general para distintas aplicaciones.

## **2.1 Método del Elemento Finito**

### **2.1.1. Concepto Básico**

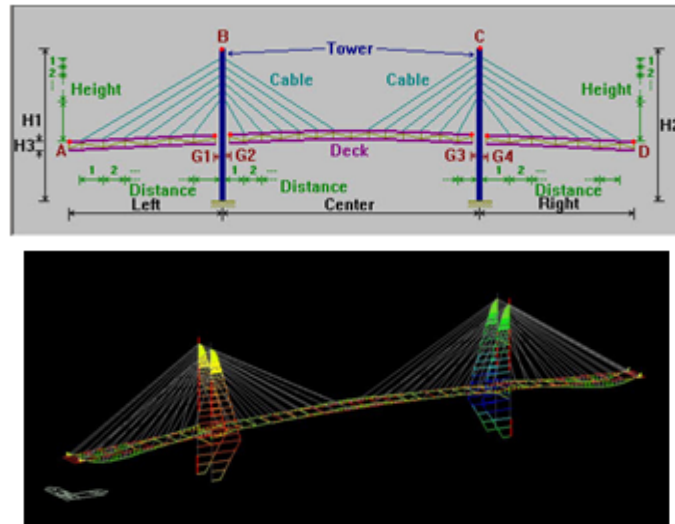
El método de elementos finitos es una técnica computacional usada para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales que modelan un fenómeno físico en un dominio determinado \*. Dado que el problema real resulta

---

\*Más conocido como problemas de Campo, Problemas de valor de frontera.

ser complejo a escala matemática, la discretización del mismo proveerá una solución numérica única teóricamente aproximada a la real. Además, en el desarrollo del método a menudo frecuentemente podrá perfeccionar la solución aproximada a costa de un mayor esfuerzo computacional.

Figura 2.1: Modelado de un puente por medio de Elementos Finitos.

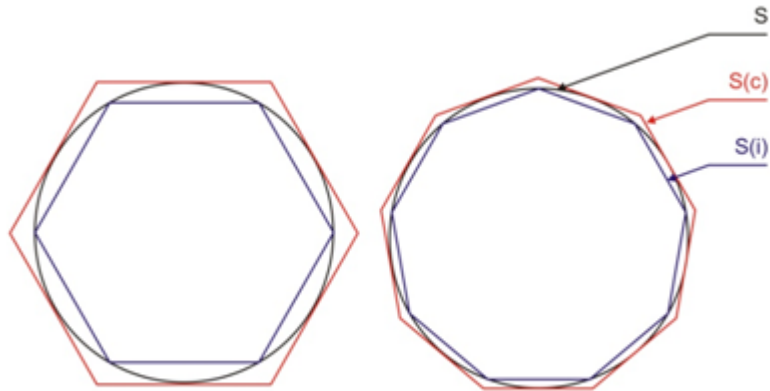


En el método de elementos finitos, el dominio se considera conformado de pequeñas subregiones interconectadas denominadas elementos. Como un ejemplo de cómo un elemento podría ser utilizado para representar una forma geométrica compleja, considere la estructura del puente mostrado en la Figura 2.1 superior. Dado que es muy difícil encontrar la solución exacta para los valores de esfuerzos y desplazamientos de la estructura, bajo específicas condiciones a las cuales el puente es sometido, esta estructura se descompone en varias piezas, como se muestra en la Figura 2.1 inferior. En cada pieza o elemento, se supone una solución aproximada y las condiciones de equilibrio general de la estructura se derivan. La satisfacción de estas condiciones dará lugar a una solución para la determinación de los desplazamientos.

### 2.1.2. Estado del Arte

Aunque el Método de Elementos Finitos<sup>†</sup> se dió recientemente, el concepto se remonta varios siglos atrás. Por ejemplo, antiguos matemáticos encontraron que el perímetro de una circunferencia se puede aproximar mediante el perímetro de un polígono como se muestra en la Figura 2.2.

Figura 2.2: Idealización de una circunferencia por polígonos expresando cada arista de estos como un elemento fínito.



En términos de la actual notación, cada lado del polígono se puede llamar un “elemento finito”. Al considerar la aproximación de polígonos inscritos o circunscritos, se puede obtener un límite inferior  $S_{(i)}$  o un límite superior  $S_{(c)}$  para la verdadera circunferencia  $S$ . Además, como el número de lados del polígono se incrementa, la aproximación de los valores convergen al verdadero valor. Estas características, como se verá más tarde, se preservaran en cualquier aplicación del método. En los tiempos actuales, un enfoque similar al método, implica el uso de funciones con-

---

<sup>†</sup>MEF

tinuas denominadas de forma "piecewise" en regiones triangulares, sugerida por Courant en 1943.

Las ideas básicas de los elementos finitos como método conocido se presentaron en los documentos de Turner, Clough, Martin y Topp; Argyris y Kelsey, mientras que el nombre de elementos finitos fue propuesto por Clough. Estos autores presentan las primeras aplicaciones simples de los elementos finitos y la aparición de las computadoras digitales proporcionan un rápido medio de la ejecución de muchos cálculos implicados en este análisis haciéndolo prácticamente viable. Junto con el desarrollo de las computadoras de alta velocidad, la aplicación de la técnica de elementos finitos ha avanzado a tasas impresionantes. Además varios autores como Przemieniecki el cual presenta el método de elementos finitos aplicado a la solución de problemas como es el análisis de esfuerzos de en una estructura. Zienkiewicz y Cheung presentan una amplia interpretación del método y su aplicabilidad a cualquier problema de ámbito general. Con esta amplia interpretación del método, se ha constatado que las ecuaciones utilizadas en el desarrollo del método pueden ser derivadas de la utilización del método de residuos ponderados (como el método de Galerkin) o la aproximación por mínimos cuadrados. Lo que condujo a un interés generalizado entre los matemáticos para la aplicación del método de elementos finitos en la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. En años posteriores varios documentos, actas de congresos, y libros se han publicado sobre este método.

Una breve historia del comienzo del método de elementos finitos se presentó por Gupta y Meek. Libros que se ocupan de la teoría básica, fundamentación matemática, diseño mecánico, estructural, flujo de fluidos, transferencia de calor, electromagnética y aplicaciones en mano factura. Con todos los avances, hoy en día el método de elementos finitos se considera una de las herramientas de análisis más conveniente y mejor establecido en las áreas de ingeniería y ciencia aplicada.

### 2.1.3. Aplicabilidad General del Método

Aunque el método ha sido extensivamente usado en el estudio de mecánica de estructuras, puede ser usado satisfactoriamente en la solución de problemas tales como conducción de calor, dinámica de fluidos, flujos de descarga, campos eléctricos y magnéticos. Estas aplicaciones matemáticas apuntan al uso de esta técnica en la solución de problemas con condiciones de frontera complejas, de hecho, se ha establecido que el método puede ser usado para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. La aplicabilidad del método puede observarse en las fuertes similitudes que existen entre varios tipos de problemas ingenieriles.

### 2.1.4. Aplicaciones Del Método De Elementos Finitos

En sus inicios, el método se desarrollo para el análisis de estructuras aeronáuticas. Sin embargo, la naturaleza del mismo lo hace aplicable a una amplia variedad de problemas con condiciones de frontera, esto es, problemas en los que la solución es buscada en el dominio de un cuerpo sujeto a la satisfacción condiciones impuestas en los límites sobre las variables dependientes o sus derivadas. Los principales tipos de problemas con los cuales resulta útil la aplicación de este método son:

- **Problemas de Equilibrio en Estado Estable:**

Se utilizan para encontrar la distribución ya sea de esfuerzos, temperaturas o presiones; variables que para este tipo son independientes del tiempo.

- **Problemas de Eigenvalores:**

En este tipo de problemas, el tiempo no aparece como una variable explícita. Pueden ser considerados como una extensión del anterior, en los cuales los

valores críticos de ciertos parámetros son determinados en adición a las correspondientes configuraciones en estado estable. Se utilizan en el cálculo de frecuencias, estabilidad del flujo laminar y características de la resonancia entre otros.

- **Problemas de Transición o Propagación:**

Este tipo de problemas surgen cuando el cuerpo responde a la aplicación de estímulos que varían con el tiempo, estos estímulos pueden ser cargas, calentamientos o enfriamientos entre otros.

### 2.1.5. Descripción General Del Método

Como se menciono anteriormente, el dominio o cuerpo continuo se representa como el ensamblaje de subdivisiones denominadas elementos finitos. Se considera que los elementos están interconectados en uniones específicas denominadas nodos o puntos nodales que se localizan en los límites del elemento. Puesto que el cambio de las variables (e.g. desplazamiento, esfuerzo, presión o velocidad) dentro del dominio continuo no se conocen, se asume que el cambio al interior del elemento puede ser aproximado por una función simple. Estas funciones de aproximación (también denominados modelos de interpolación) son definidos en términos de valores de variables del dominio en los nodos. Cuando las ecuaciones generales se plantean, los nuevos valores no conocidos serán los valores en los nodos de las variables del dominio y resolviendo el sistema, el cual esta generalmente en forma matricial, los valores nodales de las variables del dominio serán conocidas y una vez se determinen las funciones de aproximación definirán la variable del dominio durante el ensamblaje de elementos. La solución general del problema continuo por el método de los elementos finitos siempre permitirá un proceso ordenado paso a paso, el cual

puede ser resumido de la siguiente manera:

**1. Discretización de la estructura:**

El primer paso es dividir el dominio en elementos. Por esta razón la geometría puede ser modelada con elementos apropiados. El número, tipo, tamaño y arreglo de los elementos es decidido.

**2. Selección del modelo de desplazamiento o interpolación apropiado:**

Puesto que la solución de un dominio complejo bajo condiciones específicas no puede ser predicha exactamente, se suponen algunas soluciones apropiadas dentro de un elemento para aproximar la solución desconocida. La solución supuesta debe ser simple desde un punto de vista computacional, pero debería satisfacer ciertos requerimientos de convergencia. En general, la solución o los modelos de interpolación son tomados en forma de polinomios.

**3. Derivación de las matrices y los vectores característicos:**

Del modelo de desplazamiento asumido, la matriz y el vector característico es derivado usando las condiciones de equilibrio o el principio de variación apropiado.

**4. Ensamble de las ecuaciones de elementos para la obtención de las ecuaciones de equilibrio general:**

Puesto que la estructura está compuesta de varios elementos, las matrices y vectores característicos son ensamblados de forma adecuada y general.

**5. Solución de las variables nodales desconocidas:**

Las ecuaciones de equilibrio general han de ser modificadas para acoplar las condiciones de frontera del problema. Una vez incorporadas la solución del sistema puede darse de forma sencilla para el caso de sistemas lineales; o se puede complicar en el caso de los sistemas no lineales.

## 6. Cálculo de las variables secundarias:

El conocimiento de las variables nodales permite calcular otros tipos de variables que son físicamente importantes y que son dependientes de los valores de la solución.

### 2.1.6. Paquetes De Cómputo Para Elementos Finitos

La aplicabilidad general del método, hace de él una poderosa y versátil herramienta para resolver una amplia variedad de problemas. Es por ello que un gran número de paquetes de programación han sido desarrollados, de igual modo algunos de ellos se desarrollan de forma tan general que el mismo programa puede ser usado para la solución de problemas relativos a diferentes ramas de la ingeniería con pequeñas o ninguna modificación.

Muchos de estos paquetes representan grandes programas que pueden ser usados para resolver problemas complejos. Por ejemplo, el programa NASTRAN (National Aeronautics and Space Administration Structural Analysis)<sup>‡</sup> contiene aproximadamente 150000 rutinas (statements) y pueden ser utilizados para analizar problemas físicos o prácticamente de cualquier tamaño, tal como aeronaves o una estructura automovilística.

La disponibilidad de supercomputadores (e.g. Cray-1 y Cyber 205) hicieron un fuerte impacto en la tecnología de elementos finitos. En orden de aprovechar el potencial de estos supercomputadores en los cálculos requeridos, algoritmos numéricos en paralelo, estrategias de programación y lenguajes de programación están siendo desar-

---

<sup>‡</sup><http://www.mscsoftware.com/Contents/Products/CAE-Tools/MS-CNastran.aspx>

rollados. El uso de computadores personales y Workstation en el análisis y diseño de ingeniería se ha tornado increíblemente popular, así como los precios del hardware han bajado dramáticamente. Muchos programas de elementos finitos, adaptados especialmente para computadores personales y ambientes de Workstation.

---

## Metodología

---

### 3.1 Planteamiento del Problema a Realizar

#### 3.1.1. Modelo Matemático

La formulación de la ecuación de flujo acopla fuertemente las variables Presión y Saturación, una forma de reducir este acople es reformular las ecuaciones en términos de una presión global para separar los cálculos de la presión de los cálculos de saturación. Se define la presión de aceite ( $p_o$ ) y la saturación de agua ( $S_w$ ) como variables primarias ( $p, S$ ), y la velocidad total como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o \quad (3.1)$$

#### Ecuación para la presión

Bajo la suposición que los fluidos son incomprensibles se puede observar que:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \tilde{q}(p, S) \equiv \tilde{q}_w(p, S) + \tilde{q}_o(p, S) \quad (3.2)$$

Ahora reemplazando las ecuaciones de presión capilar y de velocidad total en la ecuación de velocidad de Darcy:

$$u_\beta = -\frac{1}{\mu_\beta} k_\beta \frac{\rho_\beta}{B_\beta} (\nabla \Phi) \quad (3.3)$$

Se tiene:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k} [\nabla p - \lambda_w \nabla p_c - (\lambda_w \rho_w + \lambda_o \rho_o) g \nabla z] \quad (3.4)$$

Donde  $\lambda_o$  es la movilidad del aceite ( $\frac{k_{ro}}{\mu_o}$ ) y  $\lambda_\beta$  es la movilidad de cada fluido.

Este resultado conduce a la ecuación para la presión:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{k} \lambda \nabla p) = \tilde{q} - \nabla \cdot (\mathbf{k} (\lambda_w \nabla p_c + (\lambda_w \rho_w + \lambda_o \rho_o) g \nabla z)) \quad (3.5)$$

### Ecuación para la Saturación

Las velocidades de las fases  $u_w$  y  $u_o$  están relacionadas con la velocidad total por medio de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_w &= f_w \mathbf{u} + \mathbf{k} \lambda_o f_w \nabla p_c + \mathbf{k} \lambda_o f_w (\rho_w - \rho_o) g \nabla z \\ \mathbf{u}_o &= f_o \mathbf{u} - \mathbf{k} \lambda_w f_o \nabla p_c + \mathbf{k} \lambda_w f_o (\rho_o - \rho_w) g \nabla z \end{aligned} \quad (3.6)$$

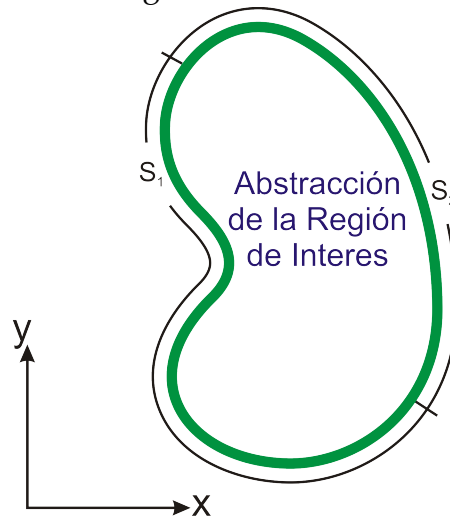
Se reemplaza las ecuación de velocidad de agua ( $\mathbf{u}$ ) en la en la ecuación principal para obtener:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \mathbf{k} f_w \lambda_o \left( \frac{dp_c}{dS} \nabla S + (\rho_o - \rho_w) g \nabla z \right) + f_w \mathbf{u} \right\} = \tilde{q}_w(p, S) \quad (3.7)$$

## 3.2 Modelamiento Mediante el MEF

### 3.2.1. Modelo Numérico

Figura 3.1: Dominio Idealizado



$S_1$  Frontera en la que se especifica la Presión

$S_2$  Especificación del Caudal.

Dado un dominio como el presentado en la figura 3.1, en el que se considera los efectos de presión capilar y de gravedad despreciables, con flujo bidimensional en estado estable cuyo modelo diferencial sería:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H_{(z)} \rho k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{H_{(z)} \rho k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + q H_{(z)} = 0 \quad (3.8)$$

Los dos fluidos están sometidos a la misma presión debido a la restricción de presión capilar. Y las condiciones de frontera serian:

$$\begin{aligned} P &= P_o(x, y) && \text{Sobre } S_1 \\ \frac{H_{(z)} \rho k_x}{\mu_\beta} \frac{\partial P}{\partial x} l_x + \frac{H_{(z)} \rho k_y}{\mu_\beta} \frac{\partial P}{\partial y} l_y + q H_z &= 0 && \text{Sobre } S_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Siendo  $S_1$  y  $S_2$  Las fronteras tipo Dirichlet y Neumann respectivamente.

### 3.2.2. Métodos de Aproximación

La resolución de este tipo de ecuaciones requiere métodos aproximados; en el desarrollo del MEF se utilizan comúnmente dos tipos de métodos los cuales sientan la base para su posterior desarrollo.

El primer tipo está basado en principios variacionales, consiste en aproximar a las soluciones  $u, v$  que hacen estacionario un funcional asociado al sistema de ecuaciones, mediante una suma ponderada de funciones:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^m a_i N_i(x, y) \quad \tilde{v} = \sum_{i=m+1}^n a_i N_i(x, y) \quad (3.10)$$

Donde las constantes  $a_i$  a determinar son denominadas coordenadas generalizadas. Las funciones  $N_i(x, y)$  son denominadas funciones de prueba y se eligen arbitrariamente pero deben satisfacer las condiciones de contorno y de compatibilidad. Este

método fue utilizado por Lord Rayleigh en 1870 usando un campo de aproximación con una única función de prueba. Posteriormente Ritz en 1909 generalizó el método aproximando la solución mediante varias funciones. El funcional al cual lo denominamos  $\Pi$ , es función de las funciones solución  $u, v$  y sus primeras derivadas.

Al reemplazar estas funciones por las aproximaciones dadas por las ecuaciones anteriores, se tendrá que el funcional  $\Pi$  depende únicamente de las coordenadas generalizadas  $a_i$  las cuales pueden tomar cualquier valor. Sin embargo para aplicar la condición de estacionariedad del funcional nos interesan aquellos valores que lo minimicen, en el método de Rayleigh esto se consigue igualando la derivada de  $\Pi$  respecto a la coordenada  $a_i$  e igualando este resultado a cero para despejar este valor.

En el caso en el cual el funcional  $\Pi$  es una función cuadrática de las funciones  $u, v$  y sus primeras derivadas, la sustitución de las funciones aproximadas dará como resultado una dependencia lineal de las coordenadas  $a_i$  con la derivada del funcional, lo que conduce a formar un sistema de ecuaciones que en forma matricial puede ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

El otro tipo de método denominado de *Residuos Ponderados* se aplican directamente sobre la ecuación diferencial sin la necesidad de un funcional asociado. Definida una ecuación diferencial sobre un dominio  $\Omega$  tal que:

$$A(u) - f = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.12)$$

Sujeta a las condiciones de frontera sobre la parte  $\Gamma$  de su frontera de la forma:

$$M(u) - g = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (3.13)$$

Al reemplazar en la ecuación diferencial la solución aproximada  $\tilde{u}$  se generara un residuo diferente de cero tanto en el dominio como en el contorno. El principal objetivo que se persigue con este método es imponer la condición,

$$\int_{\Omega} W R_{\Omega}(u) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{W} R_{\Gamma}(u) d\Gamma = 0 \quad (3.14)$$

Siendo  $W$  y  $\bar{W}$  funciones integrables y no idénticamente nulas denominadas funciones de ponderación o de peso. La definición de estas funciones da origen a diversos métodos de solución entre las más destacadas están:

- **Colocación por puntos:** Consiste en imponer un residuo nulo en  $p$  puntos del dominio y parte del contorno así:

$$R_{\Omega}(\tilde{u}, x_i, y_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.15)$$

$$R_{\Gamma}(\tilde{u}, x_i, y_i) = 0 \quad i = p + 1, p + 2, \dots, n \quad (3.16)$$

Las funciones de ponderación adoptan la forma de las funciones denominadas Delta de Dirac.

- **Colocación por subdominios:** A diferencia del anterior el residuo se torna nulo en  $n$  subregiones tanto del dominio como del contorno sobre las cuales se han impuesto condiciones naturales,

$$\int_{\Omega_i} R_{\Omega}(\tilde{u}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.17)$$

$$\int_{\Gamma_i} R_{\Gamma}(\tilde{u}) = 0 \quad i = p + 1, p + 2, \dots, n \quad (3.18)$$

En cuyo caso las funciones toman el valor de uno en cada subdominio y cero en el resto.

- **Mínimos Cuadrados:** En este caso las funciones de ponderacion se las toma igual a sus respectivo residuo:

$$I = \int_{\Omega} (R_{\Omega}(\tilde{u}))^2 d\Omega + \int_{\Gamma_N} (R_{\Gamma}(\tilde{u}))^2 d\Gamma \quad (3.19)$$

- **Método de Galerkin:** Las funciones de ponderación se igualan a las funciones de prueba por tanto,

$$\int_{\Omega} N_i R_{\Omega}(\tilde{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} N_i R_{\Gamma}(\tilde{u}) d\Gamma = 0 \quad (3.20)$$

Retomando el planteamiento en residuos ponderados, el término:

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} W_l [\mathcal{A}(\tilde{u}) + f] d\Omega \quad (3.21)$$

puede ser reescrito mediante la integración por partes como,

$$\int_{\Omega} W_l \mathcal{A}(\tilde{u}) d\Omega = \int_{\Omega} [CW_l] [\mathcal{D}(\tilde{u})] d\Omega + \int_{\Gamma} W_l \mathcal{E}(\tilde{u}) d\Gamma \quad (3.22)$$

En las que  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  son operadores diferenciales lineales de un orden de diferenciación menor que el correspondiente al operador  $\mathcal{A}$ . Esta expresión se conoce como forma débil, por medio de la cual al elegirse convenientemente la función de peso  $\bar{W}$  (Método de Galerkin), desaparecen las integrales de borde que involucran a  $\tilde{u}$ . Esto es aplicable para condiciones de frontera denominadas naturales.

### 3.2.3. Pasos Para Resolver por Medio del MEF

#### Paso 1. Discretización del Dominio

El método de Galerkin es una poderosa herramienta para proponer soluciones aproximadas a problemas de contorno o fronteras, pero presenta una seria limitación, el método no establece un procedimiento sistemático para la construcción de las funciones de prueba necesarias para determinar la forma de las aproximaciones. Salvo los requerimientos de independencia, continuidad y derivabilidad, estas funciones son arbitrarias por lo que se debe afrontar el problema de elegir entre distintas posibilidades, alguna de las cuales pueden resultar no tan claras. Ahora dependiendo de la función elegida se obtendrá soluciones de calidad. La situación empeora en problemas de dos (2D) y tres dimensiones (3D) en los que las funciones deben diseñarse para satisfacer las condiciones de frontera en contornos que pueden presentar geometrías complicadas. Por otro lado, una mala elección de las funciones puede producir matrices mal condicionadas que hagan difícil o imposible la solución del problema dentro de los límites de la precisión esperada.

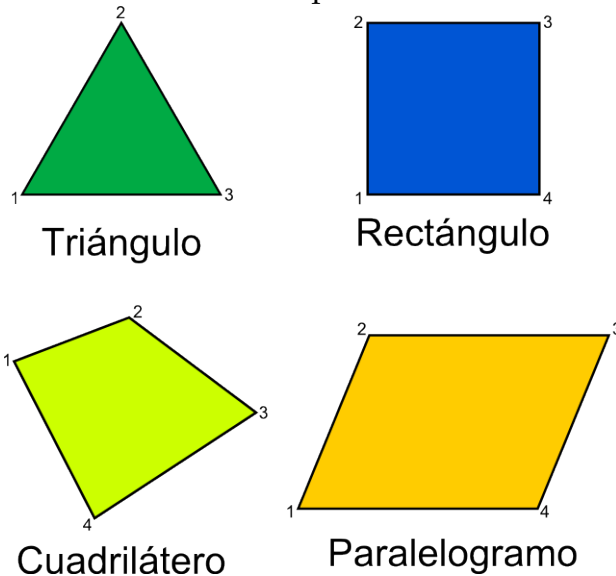
La alternativa es dividir el dominio  $\Omega$  en subdominios o elementos no superpuestos y entonces construir una aproximación por tramos sobre cada subdominio e inclusive, se pueden utilizar distintas expresiones en cada uno de los subdominios en un

sistema discreto el cual posee un número finito de grados de libertad. En este caso, las integrales definidas sobre todo el dominio pueden obtenerse como la suma de las contribuciones de cada uno de los elementos.

Las características de los elementos se escogen de forma que representen del mejor modo la geometría a modelar y el número de coordenadas independientes que describen el sistema. Si las distintas variables y propiedades pueden ser descritas en términos de una coordenada espacial, los elementos lineales o unidimensionales modelan dicha geometría.

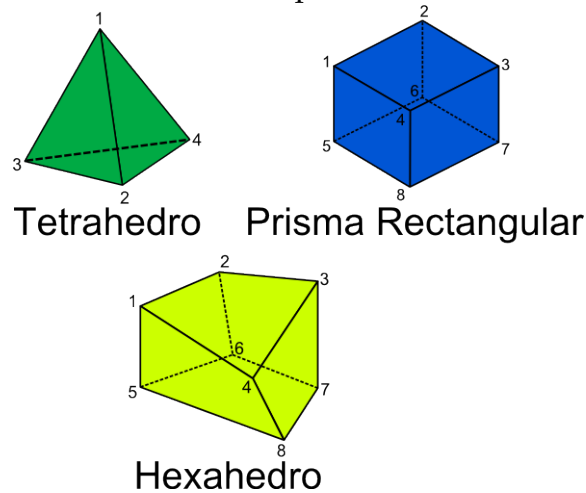
Cuando la configuración y otros detalles del problema pueden ser descritos en términos de dos coordenadas espaciales los elementos más utilizados para realizar este tipo de análisis son los mostrados en la figura 3.2. El elemento base para un análisis bidimensional es el triángulo puesto que los cuadriláteros pueden ser compuestos de dos o más elementos triangulares y la discretización con este tipo de elementos resultaría por tanto desventajosa.

Figura 3.2: Elementos básicos para modelos bidimensionales



Cuando los parámetros del cuerpo pueden ser descritos por tres coordenadas espaciales independientes, los elementos más utilizados son los mostrados en la figura 3.3. De forma análoga al análisis bidimensional, los tetraedros son la forma base de las demás figuras geométricas y del mismo modo la utilización de los demás elementos suele ser desventajosa.

Figura 3.3: Elementos básicos para modelos tridimensionales



Cuando la discretización del dominio requiere geometrías curvas, los elementos utilizados pueden tomar formas curvas gracias a la creación de nodos intermedios en cuyo caso se denominan elementos de alto orden.

Los parámetros considerados para la escogencia del elemento son entre otros el número de grados de libertad necesarios, la precisión requerida y la facilidad con la cual las ecuaciones puedan ser derivadas. En ciertos problemas el cuerpo no puede ser representado como el ensamblaje de un solo tipo de elementos por lo que se utilizan distintos tipos.

Para asegurar la convergencia de la solución; el tamaño que posean los elementos deberá ser escogido con cautela, elementos pequeños incrementan precisión a costa de esfuerzo y tiempo computacional; la relación de aspecto descrita como la forma

del elemento en el ensamblaje de elementos \* influirá también en la solución.

---

\*Puede entenderse como uniformidad de los elementos.

## Elementos Simplex, Complex y Multiplex

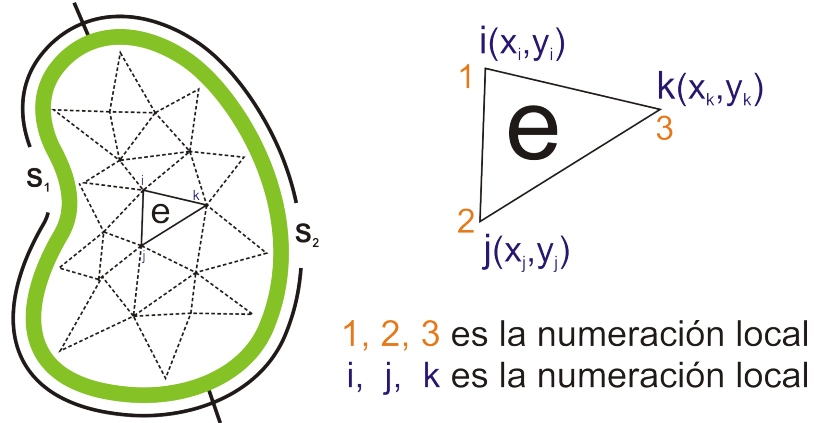
Los elementos pueden ser clasificados de acuerdo a su geometría; anteriormente se estableció que existen formas geométricas adecuadas que dependen de la dimensión trabajada, topológicamente estos modelos se denominan "simplex", polinomio de líneas rectas con términos constantes; formando un elemento de  $n + 1$  nodos en el espacio n-dimensional o sea: líneas, triángulos o tetraedros para la dimensión 1, 2 o 3 respectivamente cuyos valores en los nodos determinan la variable  $\Phi_{(x)}$ .

Los elementos complex constan de polinomios de aproximación cuadráticos, cúbicos o términos de orden superior en concordancia con la necesidad, sumados a las constantes de los términos lineales. Este tipo puede tomar la forma de los simplex pero tendrá nodos adicionales (internos).

Los elementos multiplex constan de fronteras paralelas a los ejes coordenados para alcanzar continuidad entre los elementos. El rectángulo es un buen ejemplo para espacios 2D. Es importante resaltar que a diferencia de este los elementos simplex y complex no necesitan ser paralelos al eje coordenado.

La discretización del modelo trabajado, se muestra en la fig 3.4 , con triángulos de lados rectos puesto que son las figuras más simples capaces de modelar geometrías bidimensionales complejas; adyacente a esta figura se puede observar la nomenclatura de los elementos utilizada.

Figura 3.4: Dominio discretizado por elementos finitos triangulares.



## Paso 2. Interpolación

Para resolver el sistema se requiere aproximar la solución sobre cada elemento que compone el dominio, es entonces como la escogencia de una función sencilla que represente el comportamiento de esta solución al interior del elemento es un punto clave. Por lo general este tipo de funciones son polinomios puesto que son fáciles de manipular analítica y computacionalmente; además; el grado del polinomio determina el grado de exactitud requerido<sup>†</sup>.

### Forma Polinomial de las Funciones de Interpolación

Si un tipo de polinomio de variación es asumido para la variable  $\phi(x)$  en un elemento unidimensional, esta puede ser expresada como:

$$\phi(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_mx^n \quad (3.23)$$

<sup>†</sup>Teóricamente un polinomio de orden infinito corresponde a una solución exacta del sistema.

Para espacios bidimensionales o tridimensionales respectivamente los polinomios toman la forma:

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy + \dots + a_my^n \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7z^2 \\ & + a_8xy + a_9yz + a_{10}zx + \dots + a_mz^n \end{aligned} \quad (3.25)$$

Donde  $a_1, a_2, \dots, a_m$  son los coeficientes del polinomio<sup>‡</sup>,  $n$  es el grado del polinomio. En la mayoría de aplicaciones toma el valor de la dimensión y  $m$  que es el número de coeficientes del polinomio dado por:

$$\begin{aligned} m = n + 1 & \quad \text{Para elementos unidimensionales.} \\ m = \sum_{j=1}^{n+1} j & \quad \text{Para elementos bidimensionales.} \\ m = \sum_{j=1}^{n+1} j(n + 2 - j) & \quad \text{Para elementos tridimensionales.} \end{aligned} \quad (3.26)$$

### Polinomios de Interpolación en Términos de los Grados de Libertad

La solución desconocida para la variable dentro del elemento finito se asume estar dada por una función simple<sup>§</sup> en términos de los valores nodales de ese elemento. Estos valores se conocen también como grados de libertad y son tratados como desconocidos en la formulación del sistema o en las ecuaciones generales.

<sup>‡</sup>Es decir las coordenadas generalizadas

<sup>§</sup>Polinomios.

Entonces se hace necesario expresar los polinomios de interpolación en términos de los grados de libertad nodales del elemento ( $e$ ). Para esto, supongamos un elemento finito de  $M$  nodos; los valores de las variables se podrían evaluar en los nodos por sustitución de las coordenadas nodales dentro de la ecuación polinomial mencionada (3.23) la cual se puede expresar de la forma:

$$\vec{\phi}(x) = \vec{n}^T \vec{\alpha} \quad (3.27)$$

Donde para un nodo se tiene,

$$\vec{\phi}(x) = \vec{\phi}(x) \quad (3.28)$$

$$\vec{n}^T = \{ 1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^n \} \quad (3.29)$$

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Abarcando los  $M$  nodos del elemento  $e$  se tiene:

$$\vec{\phi}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \vec{\phi}(\text{Nodo 1}) \\ \vec{\phi}(\text{Nodo 2}) \\ \vdots \\ \vec{\phi}(\text{Nodo M}) \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} \vec{n}^T(\text{Nodo 1}) \\ \vec{n}^T(\text{Nodo 2}) \\ \vdots \\ \vec{n}^T(\text{Nodo M}) \end{bmatrix} \vec{\alpha} = [\eta] \vec{\alpha} \quad (3.31)$$

Donde despejando  $\vec{\alpha} = \vec{\eta}^T [\eta]^{-1}$  y reemplazando este valor en la ecuación del nodo se tiene,

$$\vec{\phi} = \vec{\eta}^T \vec{\alpha} = \vec{\eta}^T [\eta]^{-1} \Phi^{(e)} = [N] \vec{\Phi}^{(e)} \quad (3.32)$$

Donde,

$$[N] = \vec{\eta}^T [\eta]^{-1} \quad (3.33)$$

Con este resultado se puede expresar el polinomio de interpolación dentro del elemento finito en términos del desconocido nodo de ese elemento,  $\vec{\Phi}^{(e)}$ . Una limitación importante de las funciones de interpolación tipo polinomio, es que se tiene que invertir la matriz  $[\eta]$  para encontrar  $\phi$  y  $[\eta]^{(-1)}$  lo que puede en algunas ocasiones conducir a singularidades. El orden del polinomio se escoge tomando en cuenta:

1. Los requerimientos de convergencia.
2. Los patrones de variación de las variables resultantes del modelo polinomial sean independientes del sistema coordenado local.
3. El número de coordenadas generalizadas ( $\alpha$ ) iguala al número de grados de libertad nodal del elemento ( $\phi$ ).

La primera condición es de especial interés puesto que el método de elementos finitos al ser una técnica numérica, se obtiene secuencias de soluciones aproximadas que convergen si el polinomio cumple con las condiciones:

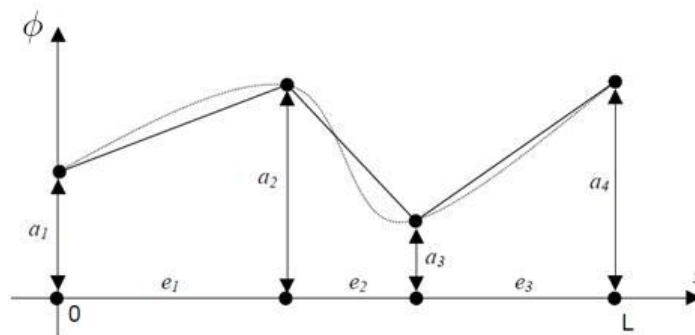
1. Las variables deben ser continuas dentro del elemento.

2. Todos los estados uniformes de las variables  $\phi$  y sus derivadas parciales superiores al más alto orden pertenecientes al funcional  $I(\phi)$ , deben tener representación en el polinomio de interpolación cuando en el límite el tamaño del elemento es cero. En la mecánica de sólidos esto significa que el modelo deberá permitir modelar también cuerpos rígidos.
3. Las variables  $\phi$  y sus derivadas parciales arriba de un orden menos que el más alto contenidas en el funcional deberá ser continua en los límites del elemento y en las interfaces.

### Desarrollo De las Funciones de Interpolación en Una Dimensión

En el más simple de los casos la función  $\phi(x)$  a aproximar vendrá asociada con sus coordenadas generalizadas  $a_i$  que corresponden a los valores en los extremos del elemento denominados nodos.

Figura 3.5: Representación gráfica del polinomio de aproximación en una diimensión.



Asumiendo que la variación de  $\phi$  se da en forma lineal es decir:

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i \quad (3.34)$$

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j \quad (3.35)$$

La resolución de este sistema conduce a

$$\alpha_1 = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{l} \quad (3.36)$$

$$\alpha_2 = \frac{\phi_j - \phi_i}{l} \quad (3.37)$$

Siendo  $x_i$  y  $x_j$  las coordenadas globales de los nodos  $i, j$ .

Sustituyendo estos resultados en la ecuación principal se obtiene:

$$\phi(x) = \left( \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{l} \right) + \left( \frac{\phi_j - \phi_i}{l} \right) x \quad (3.38)$$

La cual puede reescribirse como:

$$\vec{\phi}^{(e)} = a_i N_i^e + a_j N_j^e \quad (3.39)$$

$$\phi(x) = N_i(x)\Phi_i + N_j(x)\Phi_j = [N(x)] \vec{\Phi}^{(e)} \quad (3.40)$$

$$[N(x)] = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
 N_i(x) &= \frac{x_j - x}{l} \\
 N_j(x) &= \frac{x - x_i}{l} \\
 \vec{\Phi}^{(e)} &= \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix} \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

Donde el vector  $\vec{\Phi}^{(e)}$  es el vector de incógnitas nodales del elemento ( $e$ )

### Paso 3. Derivación de las matrices y vectores característicos

#### PRINCIPIO DE MÍNIMA ENERGÍA POTENCIAL

La solución de las ecuaciones diferenciales pueden constituirse de varios resultados, sin embargo la solución real de la misma viene dada por aquella respuesta en la que minimiza la energía potencial total. Esta tendencia natural se explica por medio de la segunda ley de la termodinámica la cual establece que la entropía de un sistema maximizara el equilibrio. Estas Ecuaciones de Mínima Energía Potencial vienen dadas por un funcional cuya forma y significado físico lo determina el problema a tratar. Un funcional se define como una función cuyo dominio es un conjunto de funciones, el fluido al interior de un medio poroso puede moverse de diversos modos dados todos por la misma ecuación, sin embargo la función que minimice la energía para que este flujo se dé como se menciono anteriormente, será la ecuación real y podrá ser calculada por medio la integral de de otra función a la cual se le denomina funcional  $I$ , esta es la base para el *Cálculo Variacional* y la determinación de los valores extremos (máximos o mínimos) los cuales son los valores estacionarios del funcional serán la pieza clave para la resolución de los métodos de Rayleigh -

Ritz principalmente, para la transferencia de energía (ecuación de calor) el funcional asociado a la ecuación diferencial parcial se expresa de la forma:

$$I = \frac{1}{2} \iiint_{V^{(e)}} \left[ k_x \left( \frac{\partial P^{(e)}}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial P^{(e)}}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial P^{(e)}}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \frac{1}{2} \int_{S_2^{(e)}} q P^{(e)} dS_2 \quad (3.43)$$

### DERIVACION DE LAS ECUACIONES DE LOS ELEMENTOS

La ecuación general puede resolverse tomando la ecuación de potencial, estas ecuaciones pueden derivarse usando aproximaciones variacionales o de Galerkin. Sin embargo en ambos casos se supone que la presión varía de forma apropiada en cada elemento y expresa  $P^{(e)}$  como:

$$P^{(e)}(x, y, z) = [N(x, y, z)] \vec{P}^{(e)} \quad (3.44)$$

En el primer caso se deriva el funcional <sup>¶</sup> respecto a cada coordenada generalizada tomando en consideración las condiciones de frontera espaciales y temporales, y se iguala a cero para obtener así las presiones mínimas en la que ocurre un flujo. El segundo caso conduce a la ecuación:

---

<sup>¶</sup>Que es una sumatoria de los funcionales de cada uno de los elementos.

$$\iiint_{V^{(e)}} N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial P^{(e)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial P^{(e)}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial P^{(e)}}{\partial z} \right) + \dot{q} \right] dV = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, b \quad (3.45)$$

Donde  $b$  es el número de nodos y desde la cual se formula la parte débil:

$$\begin{aligned} & - \iiint_{V^{(e)}} \left[ k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial P^{(e)}}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial P^{(e)}}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial P^{(e)}}{\partial z} \right] dV \\ & + \iint_{S^{(e)}} N_i \left[ k_x \frac{\partial P^{(e)}}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial P^{(e)}}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial P^{(e)}}{\partial z} l_z \right] dS \\ & + \iiint_{V^{(e)}} N_i \cdot \dot{q} dV = 0 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, b \quad (3.46)$$

Es fácil observar que la primera condición impuesta sobre la frontera (tipo Dirichlet) se satisface completamente<sup>||</sup>, sin embargo las condiciones segunda clase no se satisfacen tan fácilmente por lo que es necesario añadir una nueva ecuación sobre los elementos que poseen estas fronteras, es decir  $S_2$ :

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2^{(e)} + S_3^{(e)}} N_i \left[ k_x \frac{\partial P^{(e)}}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial P^{(e)}}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial P^{(e)}}{\partial z} l_z \right] dS = \\ & - \iint_{S_2^{(e)}} N_i q dS_2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Partiendo que:

<sup>||</sup>Las derivadas espaciales para  $t=0$  son nulas.

$$\frac{\partial P^{(e)}}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_p}{\partial x} \right] \vec{P}^{(e)} \quad (3.48)$$

Agrupando todos estos resultados puede obtenerse la representación matricial de las ecuaciones para cada elemento de la forma:

$$\left[ K_1^{(e)} \right] \vec{P}^{(e)} + \left[ K_2^{(e)} \right] \vec{P}^{(e)} + \vec{P}^{(e)} - \vec{Q}^{(e)} = \vec{0} \quad (3.49)$$

Donde las matrices  $K_1$ ,  $K_2$  y  $Q$  vendrían dadas por las ecuaciones

$$K_{1ij}^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} \left( k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \cdot dV \quad (3.50)$$

$$K_{2ij}^{(e)} = h N_i N_j \cdot dS_3 \quad (3.51)$$

$$Q_i^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} \dot{q} N_i dV - \iint_{S_2^{(e)}} q N_i dS_2 \quad (3.52)$$

Estas ecuaciones pueden ser planteadas en forma matricial, en cuyo caso quedan:

$$\left[ K_1^{(e)} \right] = \iiint_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV \quad (3.53)$$

$$\left[ K_2^{(e)} \right] = \iint_{S_3^{(e)}} h [N]^T [N] dS_3 \quad (3.54)$$

$$\vec{Q}^{(e)} = \vec{Q}_1^{(e)} + \vec{Q}_2^{(e)} + \vec{Q}_3^{(e)} \quad (3.55)$$

$$\vec{Q}_2^{(e)} = \iint_{S_2^{(e)}} \dot{q} [N]^T dS_2 \quad (3.56)$$

Para el caso bidimensional se tiene:

$$[D] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_b}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_b}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & b_j \\ c_i & c_j \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

#### Paso 4. Ensamble de las Ecuaciones

Al agruparse todas las ecuaciones de todos los elementos (ensamblar los elementos) se obtiene la ecuación general:

$$[K] \vec{P} = \vec{Q} \quad (3.59)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^E \left[ [K_1^{(e)}] + [K_2^{(e)}] \right] \quad (3.60)$$

$$\vec{Q} = \sum_{e=1}^E \vec{Q}^{(e)} \quad (3.61)$$

#### Descripción para la formulación de la ecuación de saturación

El modelo anterior describe la evolución de la presión en el espacio, la formulación del cambio de saturación en los pasos 1 y 2 es idéntica a la anterior formulación, el paso 3 es análogo simplemente al agregarse la variación con el tiempo se debe ingresar una condición inicial de saturación; el planteamiento de la forma débil de la ecuación ingresa un nuevo término a la sumatoria que se debe a la variación en el tiempo y es igual a:

$$- \iiint_{V^{(e)}} N_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dV = 0, \quad i = 1, 2, \dots, b \quad (3.62)$$

La formula matricial queda:

$$[K^{(e)}] \vec{\Phi}^{(e)} + [K_1^{(e)}] \vec{\Phi}^{(e)} + \vec{Q}^{(e)} = \vec{0} \quad (3.63)$$

Siendo,

$$K_{1_{i,j}}^{(e)} = \iiint \alpha N_i N_j dV \quad (3.64)$$

Entonces conocida la distribución de presión en el espacio para un tiempo  $t$ , se puede determinar la distribución de saturación para un tiempo  $t+dt$  y viceversa. Conocida la distribución de saturación al tiempo  $t+dt$ , se puede determinar la distribución de presión para el tiempo  $t+dt$ .

---

# Implementaciones Computacionales Basadas en *MEF*

---

## 4.1 Descripción General

Las ecuaciones de flujo desarrolladas a lo largo del libro son constituidas en una serie de modelos simplificados basados en un software comercial FLEXPDE\* con el fin de reproducir varios escenarios y mostrar así las facilidades del uso del método de elementos finitos, se utilizó la siguiente metodología:

Con el ánimo de validar los resultados obtenidos en los modelos Construidos en el *FlexPDE* se reprodujeron en un software de carácter comercial basado en el esquema de diferencias finitas WINBOAST. En las secciones posteriores del trabajo se procede a dar unas breves especificaciones, la manera se construyen los modelos en cada programa, y aplicación de la metodología mostrada en la tabla 4.1.

---

\*Flexible Partial Differential Equations

Tabla 4.1: Metodología General usada para la validación de los modelos basados en MEF

---

---

*FlexPDE* (MEF) & WINBOAST (MDF)

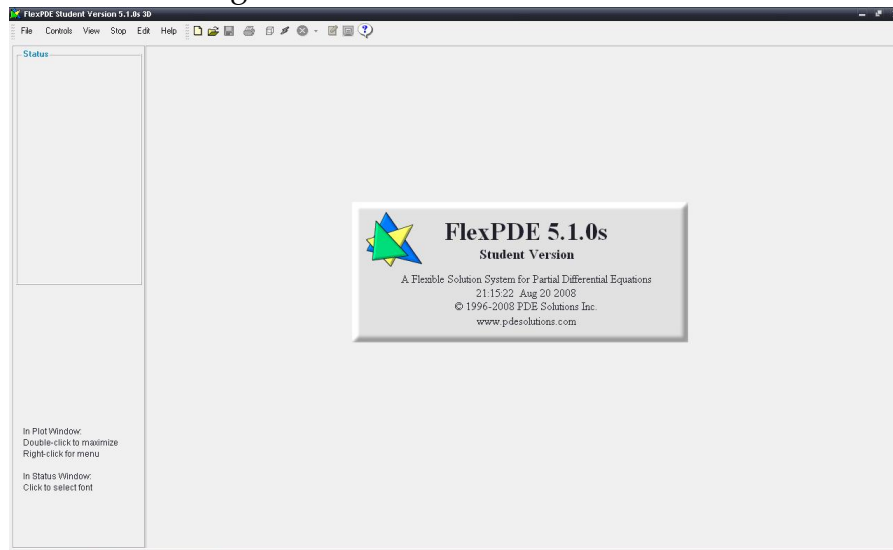
---

1. Definir el tipo de análisis (Dinámico)
  2. Construir la geometría.
  3. Definir las propiedades
  4. Solucionar el sistema
  5. Analizar los resultados
  6. Validar los resultado obtenidos
- 

#### 4.1.1. *FlexPDE*

*FlexPDE* es un software desarrollado para solucionar ecuaciones diferenciales parciales. Aunque es un software comercial, es posible descargar de internet gratuitamente una versión estudiantil la cual presenta obviamente desventajas frente a la versión comercial en cuanto a atributos y capacidad de procesamiento de datos (numero de nodos).

*FlexPDE* permite resolver ecuaciones diferenciales parciales de primer o segundo grado o bien sea en una, dos o tres dimensiones y aunque utiliza por defecto geometría cartesiana, es posible incorporar otras geometrías. Los problemas en *FlexPDE* se pueden resolver bien sean estables o dependientes del tiempo y la cantidad de ecuaciones que puede resolver la limita la máquina de procesamiento, mas no el programa. Las ecuaciones introducidas pueden ser o no lineales y el manejo en si del paquete es relativamente sencillo, considerando la enorme aplicabilidad que puede presentar en diferentes ambientes ya sea académicos o de aplicación ingenieril.

Figura 4.1: Frame inicial del *FlexPDE*

*FlexPDE* posee un entorno diferente a las implementaciones comunes, los modelos cargados son en forma de *scripts* lo cual facilita la construcción del modelo y se hace más fácil modificarlo para realizar análisis diferentes, la metodología de trabajo básica fundamental de un modelo FlexPDE tiene las siguientes partes:

1. Definir variables y ecuaciones.
2. Definir el dominio.
3. Definir los parámetros del material.
4. Definir las condiciones de frontera.
5. Especificar las salidas gráficas.

Para trabajar con el programa se recomienda iniciar con problemas sencillos para ir familiarizándose con el software, de tal modo que se tenga un modelo simple al cual se le conozca la respuesta. Así mismo, emplear parámetros sencillos y empezar

a conocer las bondades del programa, ayudarse de gráficos para ir conociendo como se soluciona el problema y emplear comentarios en la descripción del programa. Para esto último, el programa emplea un lenguaje de programación similar al de otros paquetes, donde se puede resaltar:

- Para el caso de la diferenciación se expresa como  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_z$ ,  $D_r$ ,  $D_{xx}$ ,  $D_{yy}$ ,  $D_{zz}$  según sea las coordenadas en que se trabaje, por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{Se denota } dx(u)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Se denota } dxx(u)$$

- Las ecuaciones diferenciales se pueden expresar con operadores diferenciales como  $Div$  (divergente),  $Grad$  (Gradiente).

$$\nabla(u) = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} = \quad grad(u)$$

- El programa no hace diferenciación entre caracteres alfabéticos en mayúscula o minúscula empleados en el uso de las funciones, definición de parámetros o variables.
- Cuando se desee realizar comentarios, estos pueden colocarse libremente en el texto mediante el uso de llaves  $\{\}$  para hacer aislar las líneas escritas entre estas, o empleando el símbolo de la exclamación  $(!)$  para ignorar el resto de la línea.

La generación de la malla basada en elementos finitos se obtiene empleando Run Script desde el FlexPDE. En la versión estudiantil se tienen limitaciones en el número

de nodos con que se puede resolver el problema como es 100 nodos para una dimensión, 800 nodos para 2D y 1800 nodos para 3D. La generación de los nodos es automática por parte del programa, sin embargo, esta puede modificarse empleando:

**MESH\_SPACING=#** En caso de desear aumentar o disminuir la densidad de malla para una zona dada se emplea.

**NGRID =#** Para variar el numero de filas de malla en todas las coordenadas, donde con # se especifica el número de filas.

#### 4.1.2. Operación del *FlexPDE*

Al trabajar con *FlexPDE* el problema se debe definir en un archivo en el cual se debe tener estrictamente la siguiente información:

1. Las variables y ecuaciones.
2. El dominio.
3. Los parámetros del material.
4. Las condiciones de frontera.
5. Especificar la salida grafica.

Esta información se incluye en secciones correspondientes donde se tienen secciones adicionales como se presenta en la tabla a continuación de la estructura del planteamiento de un problema en *FlexPDE*:

Estas secciones de explican rápidamente a continuación:

Tabla 4.2: Estructura general de un script en FlexPDE.

SECCIÓN	DESCRPCIÓN
TITLE	Define el titulo del problema.
SELECT	Opciones y controles del sistema.
COORDINATES	Define el sistema de coordenadas.
VARIABLES	variables del problema.
DEFINITIONS	Define parámetros y cantidades.
INITIAL VALUES	Valores iniciales de las variables.
EQUATIONS	Define el sistema de EDP's.
BOUNDARIES	Describe las fronteras del problema.
TIME	Define el tiempo de dominio.
MONITORS	Representación gráfica en tiempo real.
PLOTS	Representación gráfica de la solución final.
HISTORIES	Exhibe gráficas en función del tiempo.
END	Identifica el final del descriptor.

**TITLE:** Se emplea para colocar el título que aparecerá en todos los gráficos obtenidos del problema. Debe ir entre comillas.

**SELECT:** Es opcional y se usa solamente cuando se desea soluciones más adecuadas. Se emplea para diferentes casos como son:

- Para el control de generación de malla, donde los controladores más usados son **NGRID** donde especificamos el número de filas de la malla y **REGRID** que es una refinación automática de la malla.
- Para el control de la solución del problema, donde los comandos más comunes son **AUTOSTAGE** que elige el número de etapas automáticamente y **STAGES** que es definido por el usuario.
- Para el control del gráfico de la solución del problema, donde se tienen varios comandos entre los que se puede mencionar: **ALIAS (Coord)~Nombre** Que nombra una coordenada, **GRAY =ON** que genera gráficos en escala de grises, **PAINTED**, **TEXTSIZE =#** donde se indica el tamaño del texto en el gráfico.

**COORDINATES:** Define las coordenadas geométricas del Problema Estas pueden ser:

**CARTESIAN1:** Coordenada Cartesiana en 1D "X".

**CYLINDER1:** Coordenada cilíndrica en 1D "R".

**SPHERE1:** Coordenada esférica en 1D "R".

**CARTESIAN2:** Coordenada cartesianas en 2D "X" y "Y".

**XCYLINDER:** Coordenada cilíndrica en 2D con coordenada axial "Z" a lo largo del eje horizontal "X", y coordenada radial "R" a lo largo del eje "Y".

**YCYLINDER:** Coordenada cilíndrica en 2D coordenada radial "R" a lo largo del eje horizontal "X", y coordenada axial "Z". a lo largo del eje "Y"..

**CARTESIAN3:** Coordenadas cartesianas en "X", "Y" y "Z".

**NOTA:** En caso de no especificarse coordenadas, el programa asume por defecto la cartesiana en 2D.

**VARIABLES:** En esta se definen las variables del problema, las cuales se pueden nombrar teniendo presente las siguientes restricciones:

- Deben iniciar con un carácter alfabético, no pueden comenzar con un número o símbolo, aunque lo pueden tener dentro de su nombre.
- El nombre puede ser de un único carácter, excepto "t" que es reservada para el tiempo y de algunos nombres definidos para los comandos.
- No pueden tener espacios en su nombre, en caso de que se requiere debe usarse underline "\_"
- No puede contener "-" el cual es reservado para el signo menos.

En esta parte de la descripción del problema se puede definir la dimensión del error para la variable que se está midiendo con el comando *THRESHOLD*, al que se le asigna un valor. A menores valores asignados, el refinamiento de la malla es mejor y se reduce el error en la solución de la variable, **ver ejemplo 3.**

**DEFINITIONS:** En este se definen los parámetros del material donde se especifica el nombre y su valor. En caso de que la variable presente un valor diferente en una o más regiones, puede especificarse su valor en la región definida.

**INITIAL VALUES:** Se emplea para definir el valor inicial de las variables, en caso de no realizarse se asume que la variable inicia en cero.

**EQUATIONS:** En esta se definen las ecuaciones diferenciales parciales, para lo cual se requiere especificar una ecuación para cada variable, Cuando se tienen muchas

variables se deben asociar las ecuaciones empleando el nombre de la variable y dos puntos (:)

VARIABLES

A, B

EQUATIONS

A:Div(grad(A))=0

B:Div(grad(B))=0

**BOUNDARIES:** Se emplea para definir el dominio del problema, donde se especifica el de cada región usando la palabra *REGION* seguida del número que le corresponda. Para realizar la construcción de la región se especifica el perímetro, empleando la palabra *STAR* y el punto inicial, y luego se emplea la palabra *LINE*, *SPLINE* o *ARC*, luego se detallan uno a uno los vértices seguidos de la palabra *TO* y se cierra la figura con la palabra *CLOSE* o *TO CLOSE*. Adicionalmente las condiciones fronteras se especifican en esta sección cuando se esta definiendo el dominio:

- Las condiciones de frontera tipo Dirichlet se especifican con *VALUE*, la cual puede ser una expresión aritmética.
- Las condiciones de frontera que presenta un flujo se especifican con *NATURAL*, la cual puede ser una expresión aritmética.

**TIME:** Se emplea para definir la dimensión de tiempo y sus rangos. Es decir los Problemas que dependen del tiempo o Transitorios, donde se especifica el tiempo inicial, el tiempo final y el paso.

**Ej:** "Time 3 by 3 to 300" especifica que el tiempo va desde 3 hasta 300 con incrementos de a 3 unidades de tiempo.

**MONITORS Y PLOTS:** Se emplean para obtener la salida gráfica de la solución del problema. Se utiliza *MONITORS* para informar el progreso de la solución, y *PLOTS* para obtener la solución final. *FlexPDE* reconoce varias formas de salida de comandos como son:

**CONTOUR:** Gráfica de contornos.

**SURFACE:** Gráficos de superficie en 3D.

**VECTOR:** Graficas de vectores de campo (gradiente en cada nodo).

**ELEVATION:** Grafica el valor obtenido como resultado de la variable en una trayectoria definida.

**SUMMARY:** Se emplea para obtener reportes de valores calculados en una hoja de texto.

**HISTORIES:** para obtener gráficos en función del tiempo de la variable en diferentes puntos o superficies.

**END:** Para finalizar la escritura del script.

### 4.1.3. *WinBOAST*

El modelamiento de flujo de fluidos en medios porosos ha sido ampliamente estudiado. El software basado en el método de diferencias finitas y muchas de estas implementaciones son de carácter comercial como ECL, CMG o de carácter académico como WINBOAST 4D, sin importar su carácter o finalidad el uso de estas herramientas en la simulación numérica de yacimientos ha sido muy importante, por esta razón

el uso de un software basado en MDF es un razón suficiente para validar los modelos MEF desarrollados en este trabajo, por ser de carácter comercial y de semi-libre distribución, se uso WINBOAST 4D para este fin.

### **Descripción del *WinBOAST***

WINBOAST 4D es un simulador numérico de yacimientos de tipo Black-Oil, el cual simula el flujo darcy isotérmico en tres dimensiones de tres fases gas, petróleo y agua. WINBOAST 4D esta diseñado para una plataforma Windows 95/98/NT y su aplicabilidad esta orientada al entendimiento en el uso de un simulador numérico de reservorios, al desarrollo de conocimientos básicos sobre la ingeniería de reservorios y sus problemas ingenieriles, el WINBOAST 4D es una versión modificada del simulador blackoil BOAST II el cual fue publicado por el departamento de Energía de Estados Unidos y desarrollado por Fanchi Jhon R<sup>†</sup> en 1987, y este programa a la vez fue una versión mejorada del BOAST un simulador IMPES publicado por el departamento de Energía de Estados Unidos y desarrollado por Fanchi Jhon R. en 1982.

La versión utilizada en este trabajo cuenta con las siguientes limitaciones:

*WinBOAST* a diferencia del *FlexPDE* no posee un entorno desarrollado para el usuario (GUI) con el fin de interactuar con el programa de manera gráfica, en vez de esto los datos y todo el proceso de montaje de un modelo se realiza desde un archivo de texto plano. La formulación usada para la solución de la ecuación de flujo es de tipo

---

<sup>†</sup>Jhon Fanchi R. Profesor de Ingenieria de Petroleo en la Escula de minas Colorado, Ha trabajado en centros tecnológicos de investigación y actualmente en consultor internacional en temas energéticos.

Tabla 4.3: Consideraciones y limitaciones del WinBOAST.

LIMITACIONES ASOCIADAS AL WINBOAST 4D	
Máximo numero de bloques en el modelo	1000
Máximo de numero de regiones	3
Máximo numero de entradas en una tabla de una región	30
Máximo numero de Regiones PVT	3
Máximo numero de entradas en una tabla de una región PVT	30
Máximo Numero de Pozos	25
Máximo Numero de Conexiones por pozo	5

IMPES donde la saturación se calcula de manera explícita y la presión se calcula de manera implícita, WINBOAST 4D esta codificado en fortran basado en la ecuación 4.1, llamada la ecuación del petróleo:

$$\begin{aligned}
& (B_o - R_{so}B_g) \left[ \nabla \cdot \vec{K} \cdot \frac{\lambda_o}{B_o} \nabla P_o + CG_o - \frac{q_o}{\rho_{osc}} \right] \\
& + (B_w - R_{sw}B_g) \left[ \nabla \cdot \vec{K} \cdot \frac{\lambda_w}{B_w} \nabla P_w + CG_w - \frac{q_w}{\rho_{wsc}} \right] \\
& + B_g \left[ \nabla \cdot \vec{K} \cdot \left( \frac{\lambda_g}{B_g} + \frac{\lambda_o R_{so}}{B_o} + \frac{\lambda_w R_{sw}}{B_w} \right) \nabla P_o + CG_g - \frac{q_g}{\rho_{gsc}} \right] = \phi c_t \frac{\partial P_o}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde las contribuciones de las fuerzas gravitacionales y capilares son:

$$CG_o = -\nabla \cdot \vec{K} \cdot \left( \frac{\lambda_o}{B_o} \right) \nabla \left( \frac{\rho_o z}{144} \right) \tag{4.2}$$

$$CG_w = -\nabla \cdot \vec{K} \cdot \left( \frac{\lambda_w}{B_w} \right) \nabla \left( \frac{\rho_w z}{144} + P_{cow} \right) \tag{4.3}$$

$$CG_g = \nabla \cdot \vec{K} \cdot \left( \frac{\lambda_g}{B_g} \right) \nabla \left( P_{cgo} - \frac{\rho_g z}{144} \right) - \nabla \cdot \vec{K} \cdot \left[ \frac{R_{so} \lambda_o}{B_o} \nabla \left( \frac{\rho_o z}{144} \right) + \frac{R_{sw} \lambda_w}{B_w} \nabla \left( \frac{\rho_w z}{144} + P_{cow} \right) \right] \quad (4.4)$$

Para la formulación IMPES la presión se calcula de la ecuación 4.1 de forma implícita y la saturación de los fluidos se calcula a partir de las ecuaciones 4.2, 4.3 y 4.4 de forma explícita.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_o}{B_o} \right) - \nabla \cdot \vec{K} \cdot \frac{\lambda_o}{B_o} \nabla P_o + CG_o + \frac{q_o}{\rho_{osc}} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_w}{B_w} \right) - \nabla \cdot \vec{K} \cdot \frac{\lambda_w}{B_w} \nabla P_w + CG_w + \frac{q_w}{\rho_{wsc}} = 0 \quad (4.6)$$

$$S_o + S_w + S_g = 1 \quad (4.7)$$

#### 4.1.4. Operación del WinBoast

Al trabajar con WINBOAST cabe resaltar que el único archivo de entrada es **wtemp.DAT** los demás son respuestas y resultados del simulador, la data escrita sobre este archivo esta dividida en dos partes La data de inicialización y la data recurrente las cuales se explican resumidamente a continuación: La data de inicialización debe ser leída en el comienzo de la simulación y son datos que el simulador siempre utilizara sin que estos tengan algún tipo de cambio.

DATA DE INICIALIZACIÓN

- DIMENSIONES DE LA MALLA Y LA GEOMETRIA
  - MODIFICACIONES A LAS DIMENSIONES DE LA MALLA
  - PROFUNDIDAD A LOS BLOQUES DE LA MALLA
- PARAMETROS DE LA VELOCIDAD SISMICA
  - MODULOS Y DENSIDADES DE GRANO
  - MODIFICACIONES A LOS MODULOS Y DENSIDADES DE GRANO
- DISTRIBUCIONES DE POROSIDAD, PERMEABILIDAD Y TRANSMISIBILIDAD
  - MODIFICACIONES A LA DISTRIBUCION DE POROSIDAD Y LA PERMEABILIDAD
  - MODIFICACIONES A LA DISTRIBUCION DE TRANSMISIBILIDAD
- REGIONES DE ROCA Y PVT
  - TABLAS DE PERMEABILIDAD RELATIVA Y PRESIONES CAPILARES
  - TABLAS PVT DEL FLUIDO
- INICIALIZACION DE LA PRESION Y LA SATURACION
- PARAMETROS DE CONTROL DE LA SIMULACION
- ESPECIFICACION DE LOS METODOS DE SOLUCION
- MODELOS ANALITICOS DE ACUIFEROS

[1ex]

La data recurrente es la segunda parte del archivo **wtemp.DAT** y son datos que el simulador lee periódicamente durante el curso de una simulación.

## DATA RECURRENTE

- CONTROL DE LOS PASOS DE TIEMPO PARA SALIDA
- INFORMACION DE POZOS

## 4.2 Validación De La Formulación Mef Desarrollada Mediante MDF

Para llevar a cabo la validación se construyeron dos modelos académicos con formulación MEF, modelo 1 (*desplazamiento por agua modelo areal*) y modelo 2 (*desplazamiento por agua modelo vertical*) su respectivos análogos con formulación MDF, pero es importante tener en cuenta las siguientes consideraciones entre los dos programas y sobre como solucionan las ecuaciones propuestas, ya que existe una fuerte diferencia, WINBOAST es un entorno numérico desarrollado sólo para dar solución a la ecuación diferencial parcial ??, mientras FLEXPDE es un entorno flexible para la solución de una gran variedad de EDP's, por esta razón surgen las siguientes consideraciones:

- Respecto a las ecuaciones:
  - La ecuación ?? es la usada por WINBOAST para la solución de la presiones por el método IMPES lo cual nos indica que se realizan unas fuertes modificaciones a la data del los modelos hechos en WINBOAST para conservar una consistencia entre las dos EDP's asociadas. La principal razón por la cual se explica esto, es que dentro de las formulaciones desarrolladas en

el trabajo se hace la suposición de que los fluidos son incompresibles con el fin de simplificar la formulación MEF.

Si los fluidos son incompresibles no existirá cambio alguno de volúmenes y por lo tanto los factores volumétricos son constantes e iguales a 1, además de esto el modelamiento realizado es para un sistema agua - aceite donde las presiones capilares son iguales a cero, no hay presencia de gas, es decir que tanto la permeabilidad efectiva y el gas disuelto en las fases líquidas es constante e igual a cero. Teniendo en cuenta las simplificaciones pertinentes la ecuación queda de la siguiente forma.

$$\left[ \nabla \cdot \vec{K} \cdot \lambda_o \cdot \nabla P_o + CG_o - \frac{q_o}{\rho_{osc}} \right] + \left[ \nabla \cdot \vec{K} \cdot \lambda_w \cdot \nabla P_w + CG_w - \frac{q_w}{\rho_{wsc}} \right] = 0 \quad (4.8)$$

En donde se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

$$\begin{aligned} B_o &= B_w = 1 \\ k_{rg} &= 0 \\ \lambda_o &= \frac{k_{rg} \cdot K}{\mu_o} = 0 \\ R_{so} &= R_{sw} = 0 \end{aligned}$$

Considerando,

$$\begin{aligned} M &= \lambda_o + \lambda_w \\ P_w &= P_o \end{aligned} \quad (4.9)$$

La ecuación 4.8 se reduce a:

$$\left[ \nabla \cdot \vec{K} \cdot M \cdot \nabla P + CG_o - \frac{q_o}{\rho_{osc}} - \frac{q_w}{\rho_{wsc}} \right] = 0 \quad (4.10)$$

La cual es la ecuación del petróleo utilizada en los modelos implementados en *FlexPDE*, en el caso de un modelo de extensión areal, los efectos gravitacionales son depreciables, simplificando aun más la ecuación expuesta.

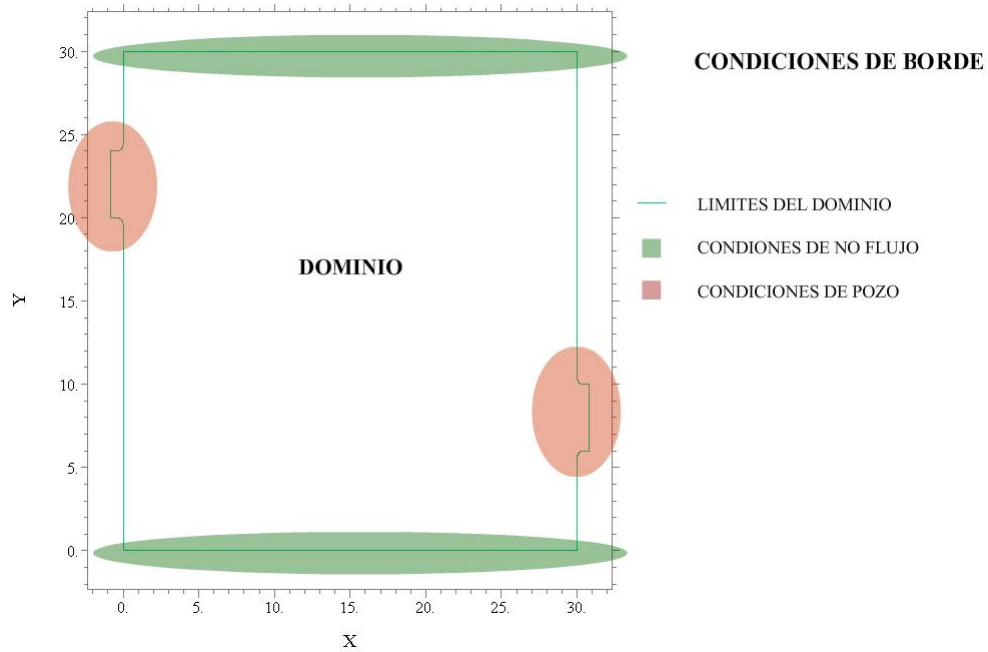
En el caso de las saturaciones haciendo  $P_w = P_o$ , y sumando la ecuación 4.5 y 4.6 obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w) - \nabla \cdot \vec{K} \cdot \lambda_w \nabla P + CG_w + \frac{q_w}{\rho_{wsc}} = 0 \quad (4.11)$$

- Las restricciones del modelo (Condiciones de Borde):
  - La definición de las condiciones de borde y los pozos de los dos modelos son diferentes, para el *WINBOAST* solo es posible aplicar condiciones de no flujo tipo NEUMAN, mientras que para el *FlexPDE* es posible aplicar tanto DIRICHLET como NEUMAN.
  - Es posible definir las fuentes y sumideros en los modelos MEF de dos maneras diferentes, usando las mismas condiciones de límite del modelo, o con el uso de una función continua de un único máximo, que represente las fuentes o sumideros. Los modelos desarrollados son bidimensionales y no incluyen el término de fuentes o sumideros de las ecuaciones expuestas anteriormente debido a problemas de estabilidad de la solución, para contrarrestar esto se usa las condiciones de borde como se aprecia en la ilustración 4.3 en la definición de la modelo para lograr simular la entrada o salida de masa.

En la parte *a* de la figura 4.5 se muestra como *WinBOAST* usa la distribución de las celdas y sobre esta se impone la ubicación de un pozo lo cual nos indica que la locación de los pozos difiere de un programa a otro (Parte *b* fig. 4.5), haciendo que los modelos difieran en sus resultados. Si

Figura 4.2: Definición de pozos usando las condiciones de limite.



se incluyen términos de fuentes y sumidero en la EDP modelada en *Flex-PDE*, debemos tener una función para la ubicación espacial de una fuente o un sumidero, la cual puede tener la siguiente forma:

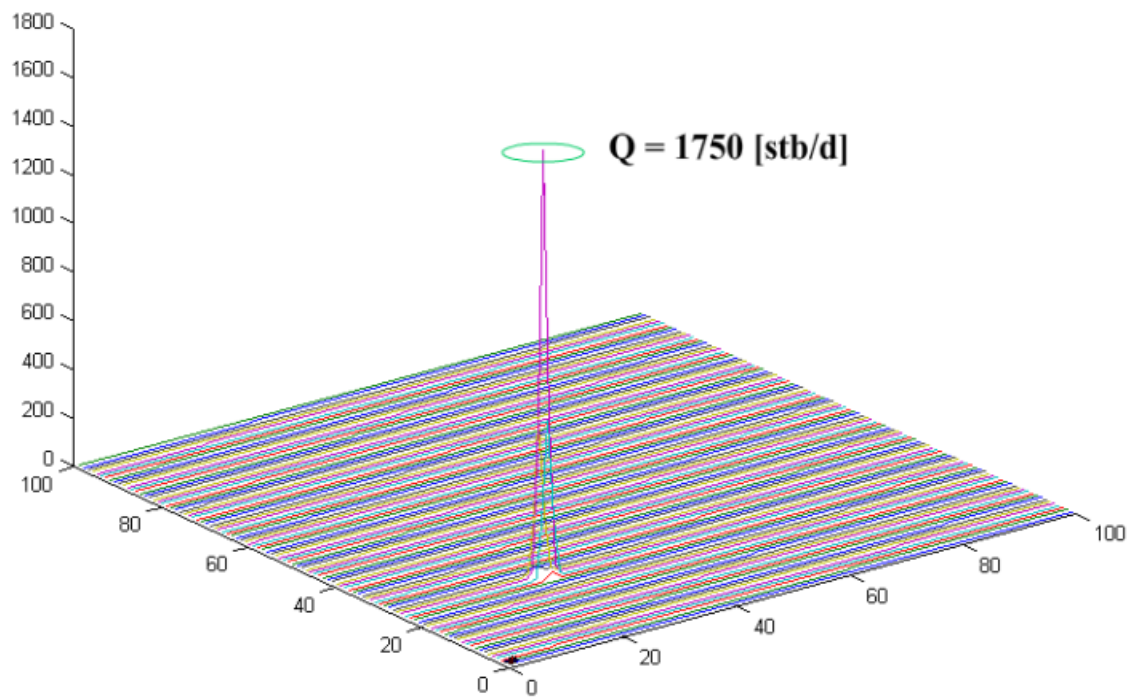
$$Q_{distribucion} = Q \times e^{-(pos_x - x)^n - (pos_y - y)^n} \quad (4.12)$$

Donde  $n$  es un entero par positivo.

El uso de esta forma implica que el exponente debe ser par y de un orden alto (8 o 10) para que la ubicación de la fuente sea más local que areal, llevando a errores de redondeo y haciendo más lenta la convergencia de los modelos, por razones de conveniencia se usa la ubicación en los bordes de los pozos.

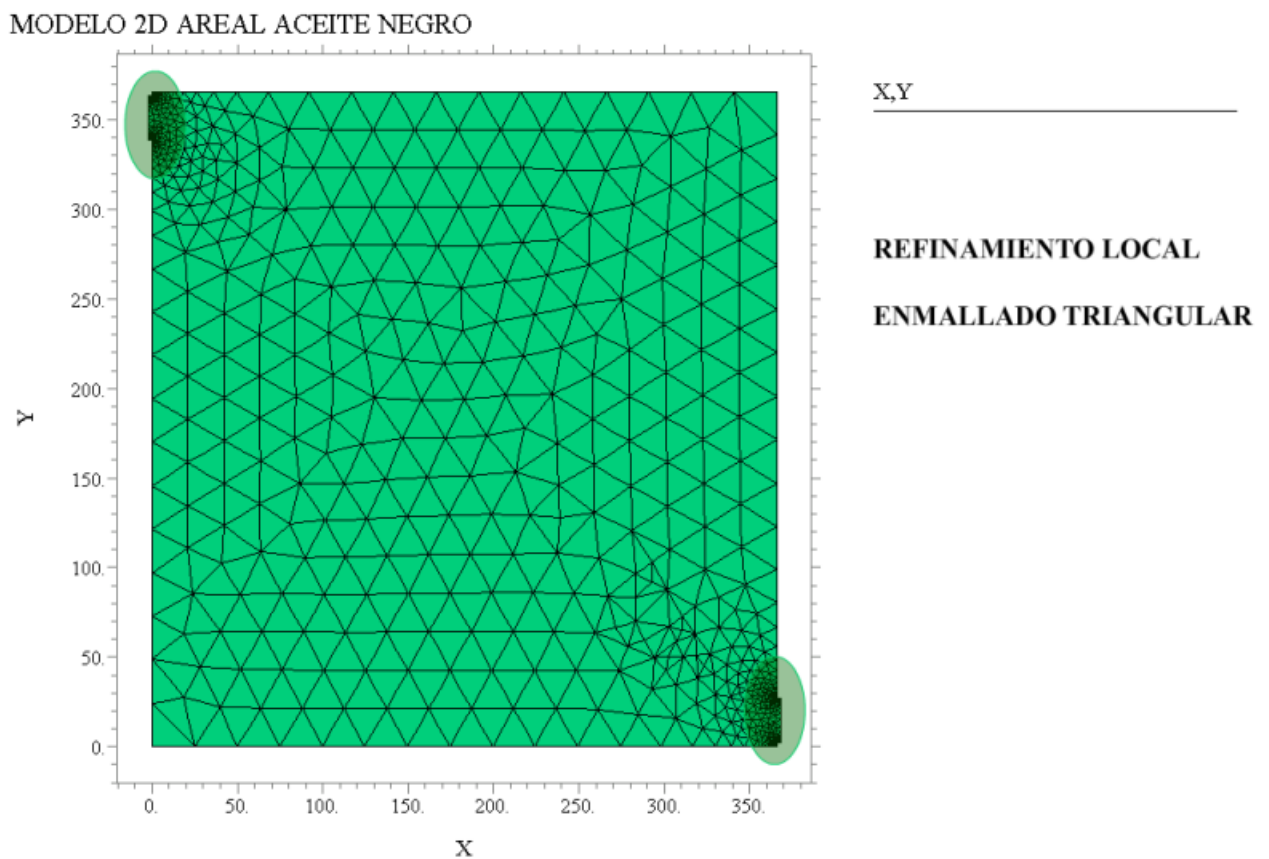
- Las limitaciones inherentes del *WinBOAST*

Figura 4.3: Distribución de un caudal de  $1750 \left[\frac{\text{stb}}{d}\right]$ , ubicado en la posición (26,26), la función es máxima es dicha posición.



- Otra importante diferencia es el hecho de que *WinBOAST* no cuenta con una formulación para el enmallado dinámico y refinamiento local a parte el tipo de enmallado, lo cual lleva a pensar que los modelos pueden sobre predecir frentes de avances, durante el procesos de inyección de agua o gas, esto es contrarrestado con el refinamiento global del modelo pero su limitación a 1000 celdas no permite tanto refinamiento espacial, lo cual limita la comparación a modelos no tan grandes.

Figura 4.4: Refinamiento local *FlexPDE*, usado en las zonas de altos gradientes (pozos).



- Los métodos numéricos de solución.
  - Para el *WinBOAST* se utiliza el método LSOR en algunas ocasiones métodos directos para matrices de 5 bandas, en contraste para el *FlexPDE* se utiliza el método del gradiente conjugado pre condicionado para la solución numérica del problema o el método de Newton-Raphson para sistemas no lineales cuando el sistema aumenta su no linealidad. Métodos que tiene diferentes formulaciones y por lo tanto diferentes formas de convergencia, el cual no es el caso de este estudio aunque afecte los resultados.

Por la razones anteriormente expuestas, los modelos desarrollados en este trabajo están sujetos a una carga de error haciendo su validación mas cualitativa que cuantitativa, sin embargo cálculos del error relativo han sido realizados para controlar y explicar las desviaciones de los dos Esquemas de Discretización MEF - MDF.

## 4.3 Modelos de Estudio

### 4.3.1. Guia de Construcción de los modelos de estudio

En la construcción de los modelos se llevo a cabo la siguiente secuencia de pasos, la data de los modelos es ampliamente explicada en las referencias de cada programa.

- Construcción geometría
  - Modelo WINBOAST
  - Modelo FLEXPDE
  - Definición de las propiedades sistema roca - fluido

- Modelo WINBOAST
  - Modelo FLEXPDE
- Condiciones iniciales
  - Modelo WINBOAST
  - Modelo FLEXPDE
- Controles de la Simulación
  - Modelo WINBOAST
  - Controles de Salida
    - Modelo WINBOAST
- Definición de los pozos
  - Modelo WINBOAST
- Simulación
  - Modelo WINBOAST
- Controles de la Simulación
  - Modelo FLEXPDE
  - Controles de Salida
    - Modelo FLEXPDE
- Definición de los pozos
  - Modelo FLEXPDE
- Simulación

- Modelo FLEXPDE
  - Análisis de Resultados y Errores Relativos

En el desarrollo del trabajo se implementaron dos casos de estudio, *Modelo 1 areal (inyección, tipo aceite negro)* y *Modelo 2 vertical (inyección, tipo aceite negro, perfil vertical)* los cuales tiene la finalidad de demostrar la aplicabilidad de las ecuaciones de flujo basadas en el MEF, casos que siguiendo la metodología de la figura 4.5, se reprodujeron en una implementación basada en el MDF para la validación de los modelos construidos, a pesar de su carácter académico estos modelos tiene comportamiento y similitudes a un modelo extraído de la realidad, y con el fin antes mencionado son muy aptos para nuestro propósito.

### 4.3.2. Modelo 1 Areal (Inyección de Agua)

*Descripción General.* EL modelo es un escenario de inyección de agua idealizado sin fuerzas gravitacionales e isotrópico. Para este modelo se corrieron dos casos uno bajo un sistema de mojabilidad mixta, caso 1 y el otro en una roca mojada por agua caso 2, Los siguientes parámetros fueron asignados al modelo:

#### Dimensiones

En las figuras 4.5 se observa la diferencia tanto en enmallado como en definición de los pozos de ambos modelos, mientras en FlexPDE un pozo se define como condición de borde, en WinBOAST se definen como una restricción de pozo.

Figura 4.5: A) Modelo 1 areal WinBOAST (inyección de agua), (B) Modelo 1 areal FlexPDE (inyección de agua)

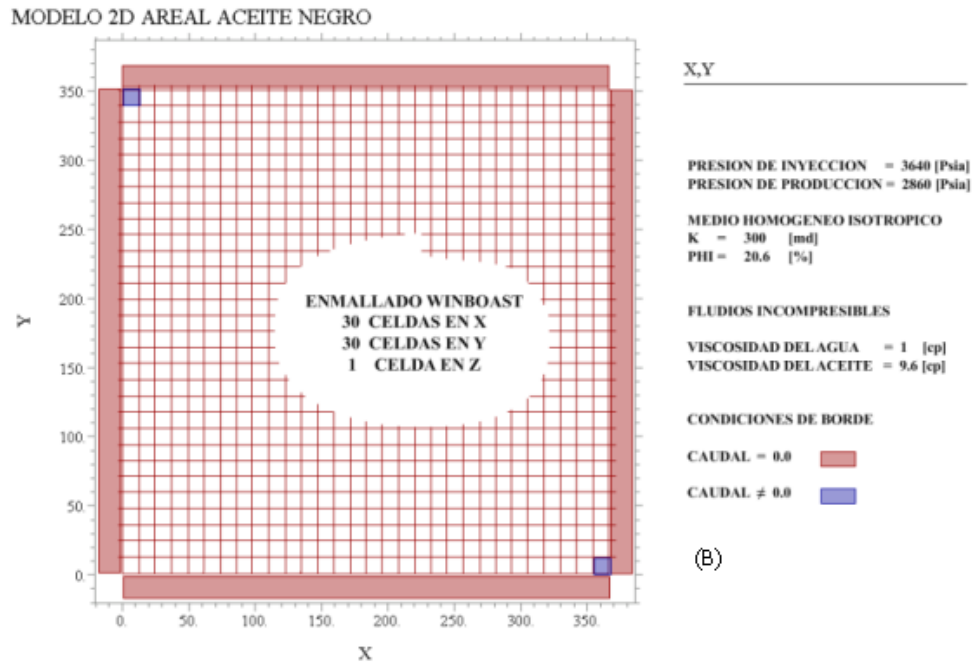
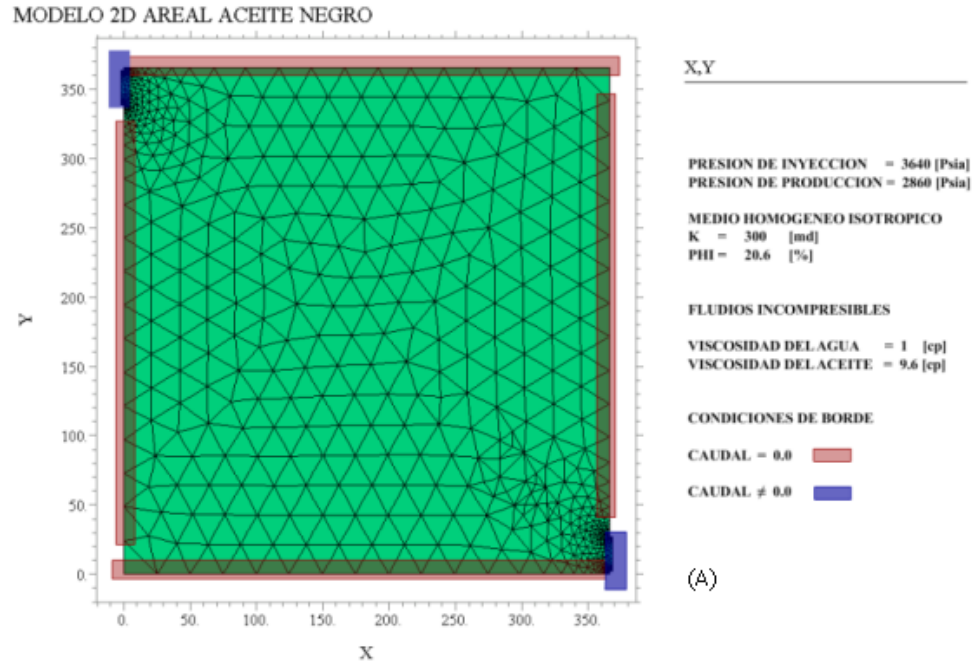


Tabla 4.4: Dimensiones del Modelo 1.

DIMENSIONES
Dimensión $x = 1200$ [ft]
Dimensión $y = 1200$ [ft]
Espesor = 95 [ft]

### Propiedades de la Roca y Fluidos

Tabla 4.5: Propiedades de la roca y fluidos del Modelo 1.

PROPIEDADES ROCA-FLUIDOS
$K = 300$ [md]
$\Phi = 0,206$
$\mu_w = 9,6$ [cp]
$\mu_0 = 1$ [cp]

### Modelo de Permeabilidad Relativa

Para un sistema agua - petróleo se usó el siguiente modelo analítico extraído del libro de Chen. (Véase Bibliografía.)

$$\begin{aligned}
 k_{ro} &= (k_{ro})_{S_{wc}} \left[ \frac{1 - S_w - S_{orw}}{1 - S_{wc} - S_{orw}} \right]^{no} \\
 k_{rw} &= (k_{rw})_{S_{wc}} \left[ \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{orw}} \right]^{nw}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Tabla 4.6: Condiciones iniciales para el modelo 1. *WinBOAST*

---

---

**CONDICIONES INICIALES**

---

Presión Inicial = 3298 [*psi*]Saturación de Agua Inicial = 0

---

**Condiciones Iniciales**

Para obtener la presión inicial del modelo FlexPDE, se usa el valor de presión inicial calculado por WinBOAST e impreso en el archivo WTEMP.ROF, después de correr la simulación WINBOAST.

**Controles de la Simulación**

Tiempo máximo de simulación = 10 Años.

En WinBOAST se reportará cada 90 días un resumen de la simulación.

En FlexPDE se reportará cada 40 días un resumen de la simulación.

Los datos reportados serán utilizados para cálculos cuantitativos del error relativo con el fin de comparar la validez tanto de las ecuaciones desarrolladas como de los modelos construidos en MEF.

**Restricciones de Pozo**

En WinBOAST se definen dos pozos uno de inyección y otro lógicamente de producción controlados por *pwf*, y con un índice de productividad determinado. A continuación se muestra la definición de estos en el archivo de entrada:

Tabla 4.7: Restricciones de Pozo. *WinBOAST*

P-1					Nombre del pozo productor
1	1				Numero de identificación, numero de conexiones.
30	30	1	4.1	600.0	Coordenadas del pozo $X, Y, Z, ip, pwf$ .
-1	0	0	0	0	Controlado por $pwf$ .
I-1					Nombre del pozo inyector
2	1				Numero de identificación, numero de conexiones
1	1	1	4.1	4000.0	Coordenadas del pozo $X, Y, Z, ip, pwf$ .
-2	0	0	0	0	Controlado por $pwf$ .

En el FlexPDE La presión de inyección es de 3640  $[psi]$  y la presión de producción de 2860  $[psi]$ .

Para superar la problemática de como utilizar el índice de productividad y la presión de fondo fluyente en los modelos FlexPDE, se aprovecha el hecho de que las restricciones de pozos como el  $ip$  y la  $pwf$  son una influencia sobre la presión de la celda en la cual se ubica el pozo, por consiguiente después de correr la simulación WinBOAST, se obtiene un reporte de esta presión de celda en toda la simulación, y usando un promedio ponderado en el tiempo de estas presiones de celda se obtiene un único valor de presión el cual es usado para alimentar el modelo FlexPDE en las restricciones de pozo, por esta razón las simulaciones en FlexPDE se corre en los últimos pasos. La utilización de esta condición de pozo no garantiza correcta simulación pero será consistente con los valores y condiciones de presión calculados por WinBOAST lo cual es prueba de la validez de este método.

## Simulacion Casos De Estudio

### CASO DE ESTUDIO MODELO 1.

Teniendo los modelos construidos se realizan dos casos de estudio donde se modela una roca con mojabilidad mixta, caso 1, y una con mojabilidad preferencial por el agua, con el fin de apreciar el efecto del cambio de permeabilidades relativas.

### CASO 1

#### MODELO DE PERMEABILIDAD RELATIVA

Usando las siguientes condiciones:

$$kr_o S_{wc} = 1$$

$$kr_w S_{orw} = 1$$

$$S_{wc} = 0$$

$$S_{orw} = 0$$

$$n_w = 2$$

$$n_o = 2$$

se tiene que el perfil de permeabilidades es:

Usando los puntos de referencia para el cálculo de las permeabilidades relativas (figura 4.6), se corrió la simulación en los dos programas y se obtuvieron los siguientes resultados:

La anteriores figuras nos muestran el correcto comportamiento de la simulación con MEF y la similitud de la forma del perfil de presiones, obsérvese la forma plana

Figura 4.6: Modelo de permeabilidades relativas en base a la ecuación 4.13. para el caso 1, modelo 1.

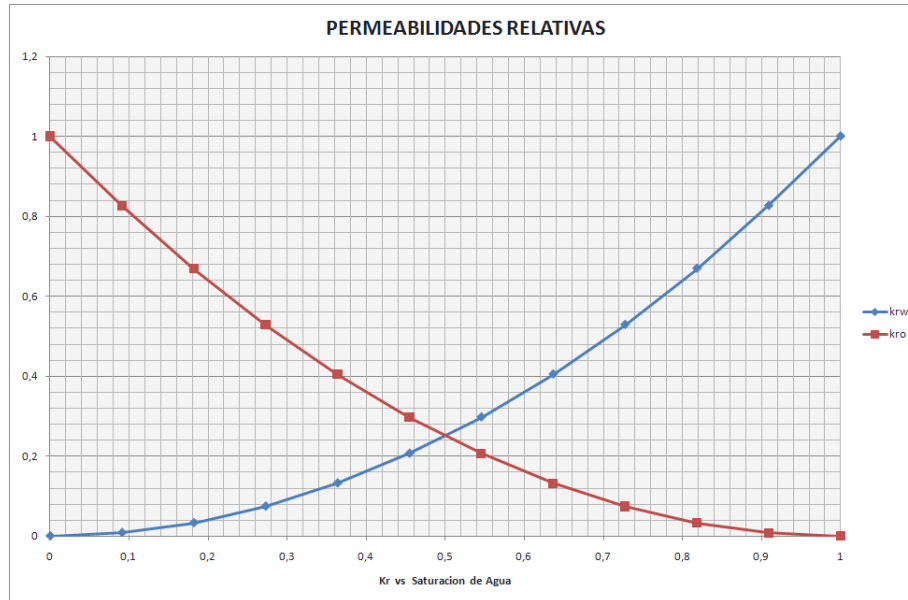


Figura 4.7: Perfil de presiones WinBOAST a 1710 días (Ruptura) generado en MATLAB

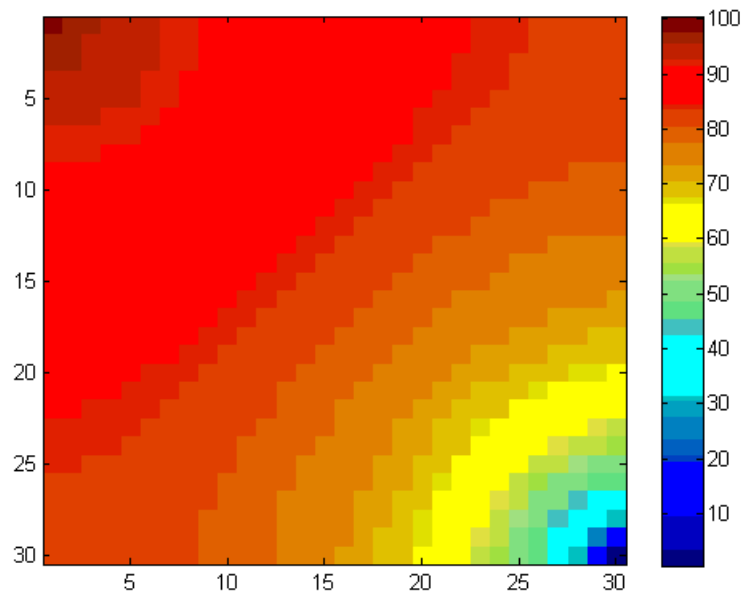
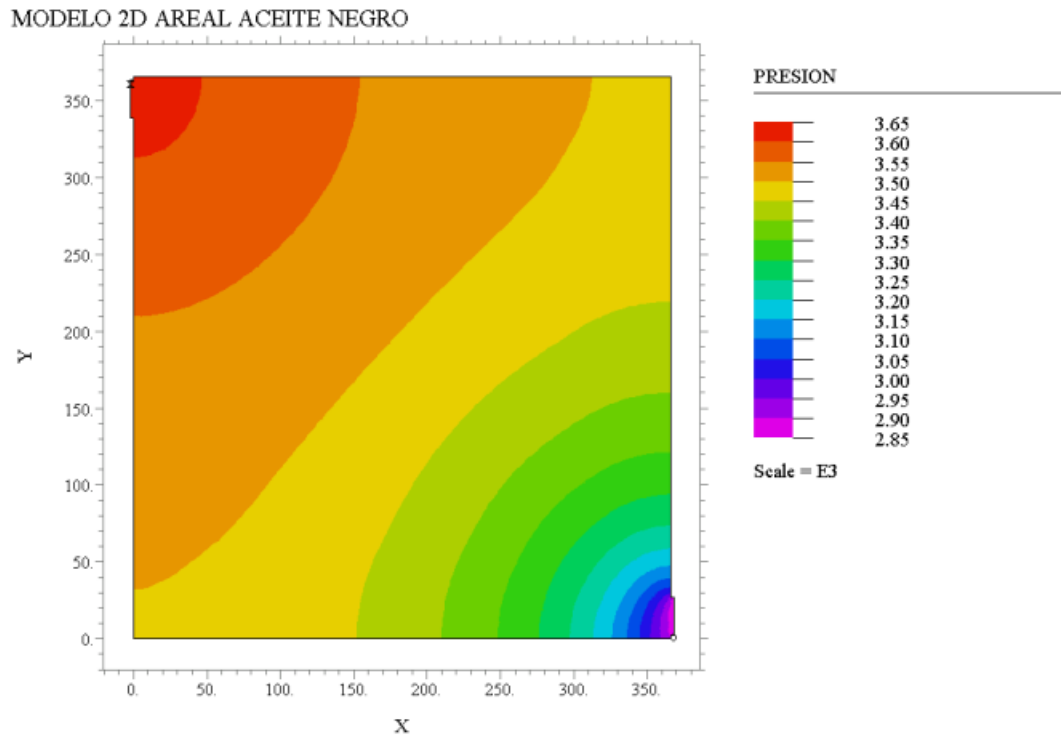


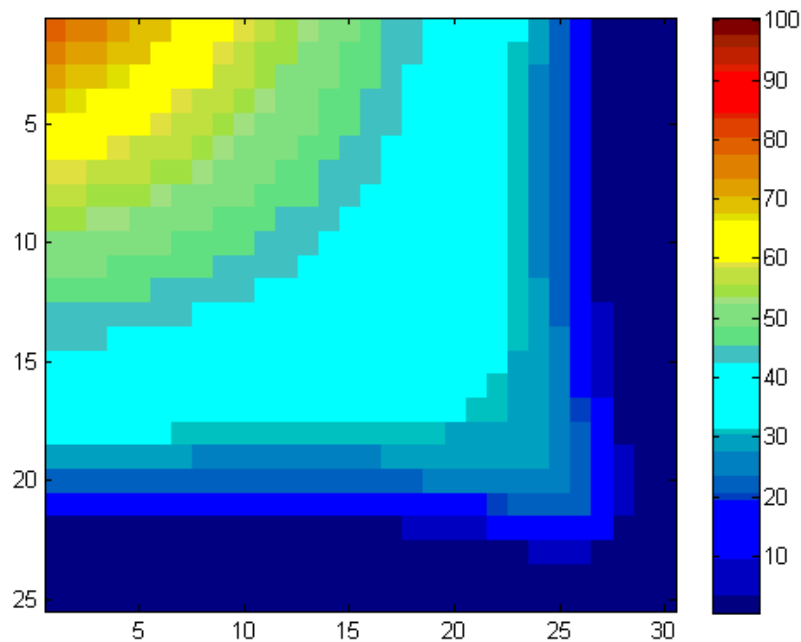
Figura 4.8: Perfil de presiones FLEXPDE a 1680 días (Ruptura)



black\_oil: Cycle=304 Time= 1.4524e+8 dt= 9.5617e+5 p2 Nodes=2573 Cells=1216 RMS Err= 1.8e-4  
 Integral= 4.654156e+8

del perfil en la parte media se alcanza a desarrollar perfectamente, la desventaja del limite de 1000 celdas del WinBOAST se hace evidente en la resolución del perfil, las graficas mostradas para los perfiles de presión WINBOAST han sido generadas en MATLAB y la barra de colores adjunta a esta solo es de carácter cualitativo ya que se hace una normalización a los valores de presión para que sea posible graficarlos en un mapa de colores de 100 colores.

Figura 4.9: Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 1710 días (Ruptura) generado en MATLAB

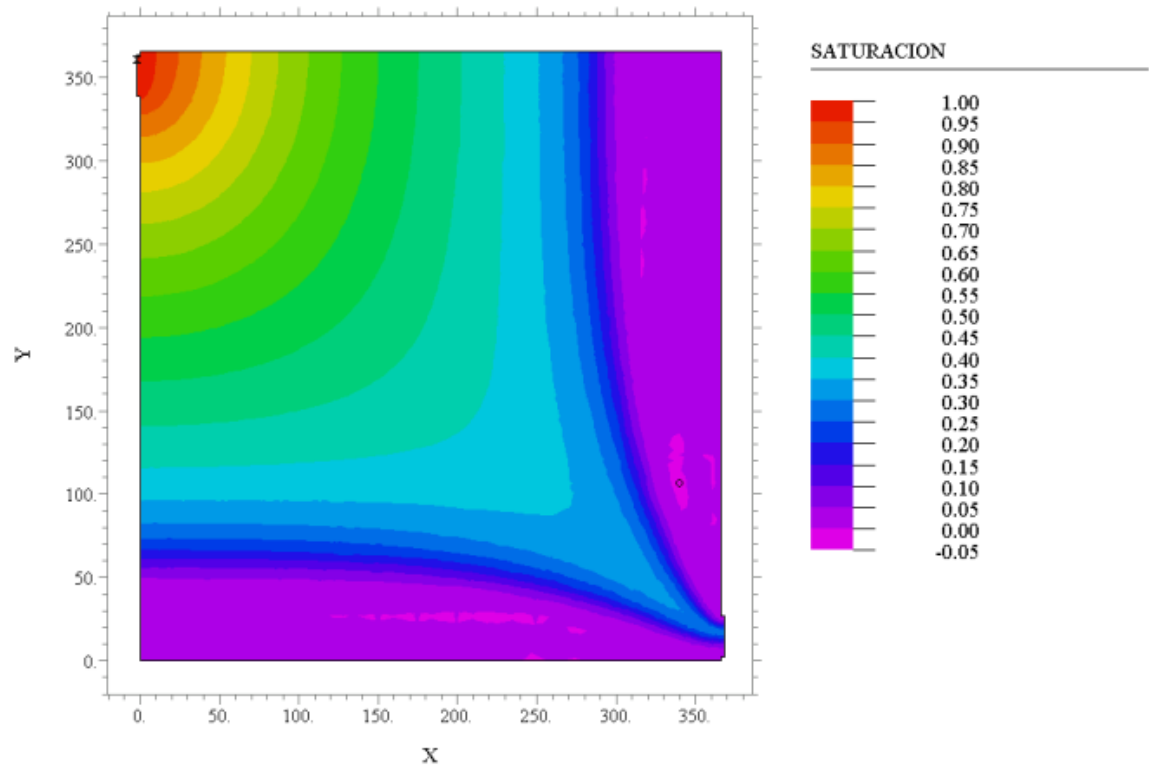


Las ilustraciones anteriores muestran como el modelo MEF simula los perfiles de saturación de igual manera dando una muestra cualitativa de la afinidad y La consistencia de los dos modelos, además los valores para la predicción del tiempo de ruptura son bastante cercanos.

Obteniendo los datos de cada reporte se construyen los siguientes gráficos compar-

Figura 4.10: Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 1680 días (Ruptura)

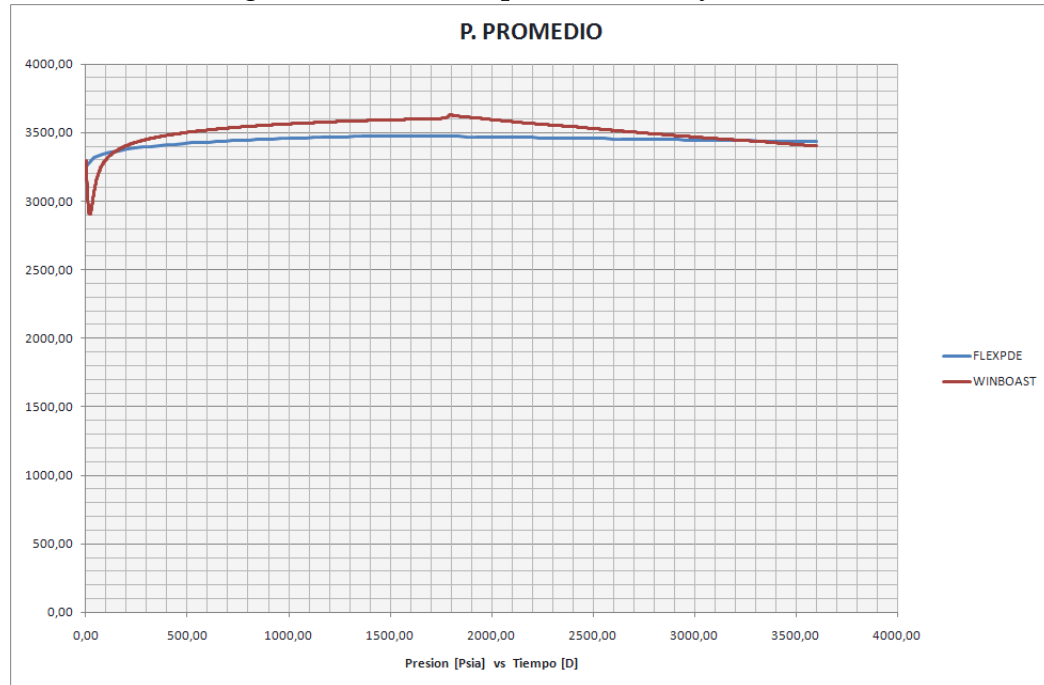
MODELO 2D AREAL ACEITE NEGRO



black\_oil: Cycle=304 Time= 1.4524e+8 dt= 9.5617e+5 p2 Nodes=2573 Cells=1216 RMS Err= 1.8e-4  
Integral= 43677.94

ativos:

Figura 4.11: Presión promedio del yacimiento



En la figura 4.12 el cálculo del error tiene una fuerte diferencia en el comienzo de la simulación debido a las condiciones iniciales impuestas, y mas aún, a que el FlexPDE tiene una función por omisión que ayuda a suavizar las condiciones para mejorar la estabilidad de la solución numérica.

En términos de producción acumulada FLEXPDE arroja valores ligeramente mas altos debido que el yacimiento en términos generales un poco más rápido aumentando un poco la producción, esta sobre predicción se debe mas que a todo al imposición de los valores de presión de los pozos de inyección y producción del modelo FLEXPDE, mientras que WINBOAST usa un calculo de que relacionan el  $ip$  y la  $pwf$  haciendo mas dinámica y real la simulación de los pozos. Sin embargo los errores relativos se mantienen bajos a lo largo de la simulación.

Figura 4.12: Error relativo promedio al WINBOAST

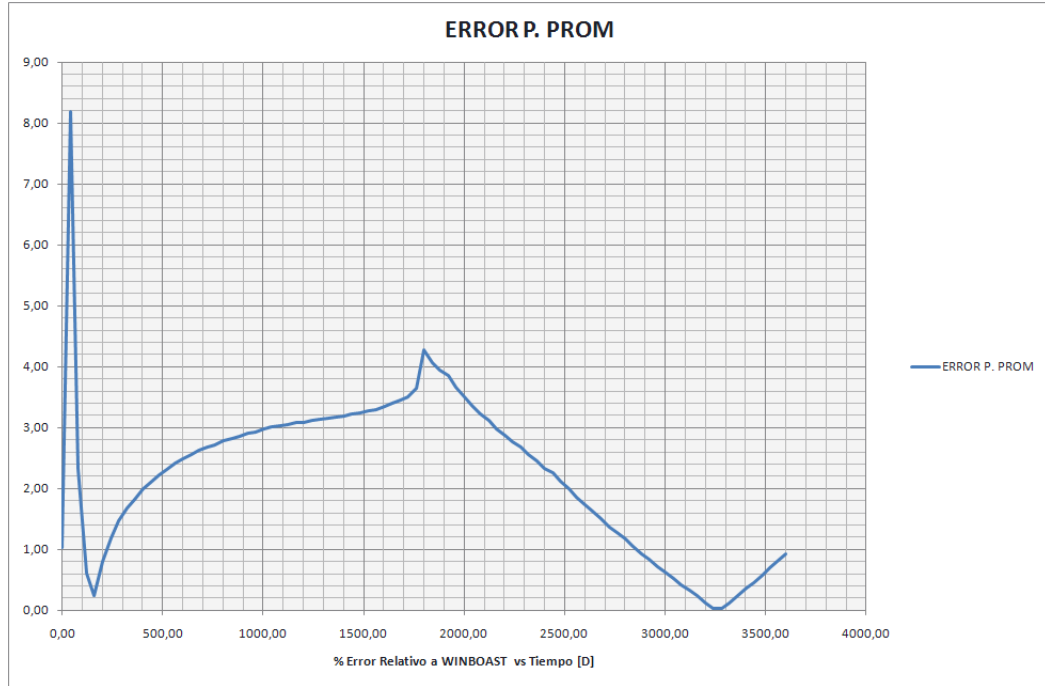


Figura 4.13: Producción Acumulada

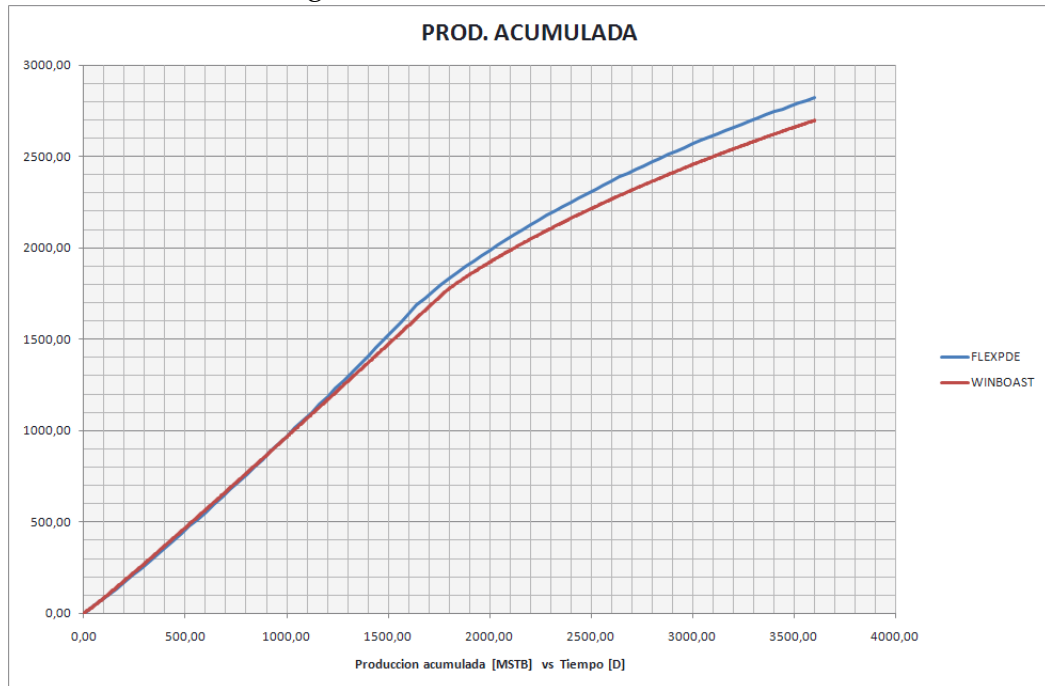


Figura 4.14: Error relativo de producción al WinBOAST

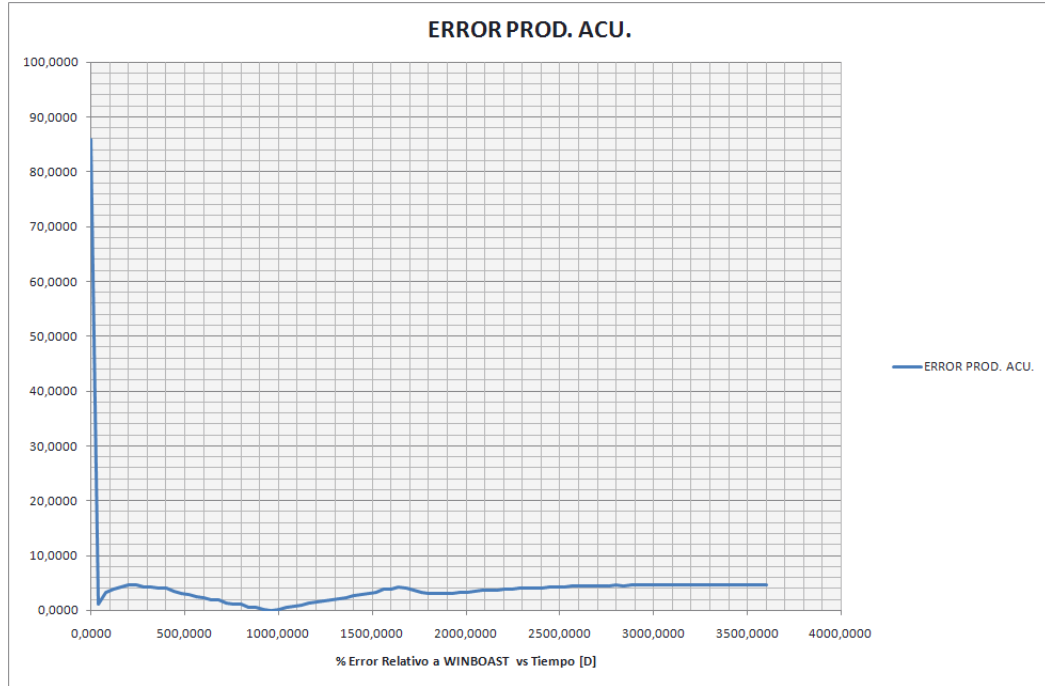


Figura 4.15: Producción diaria

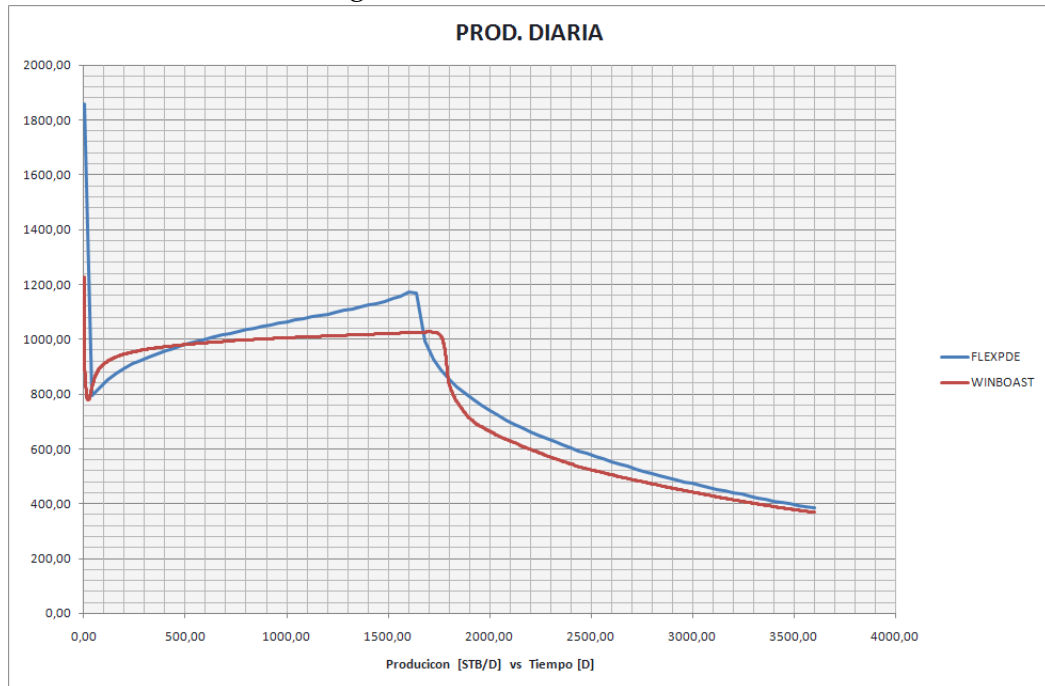
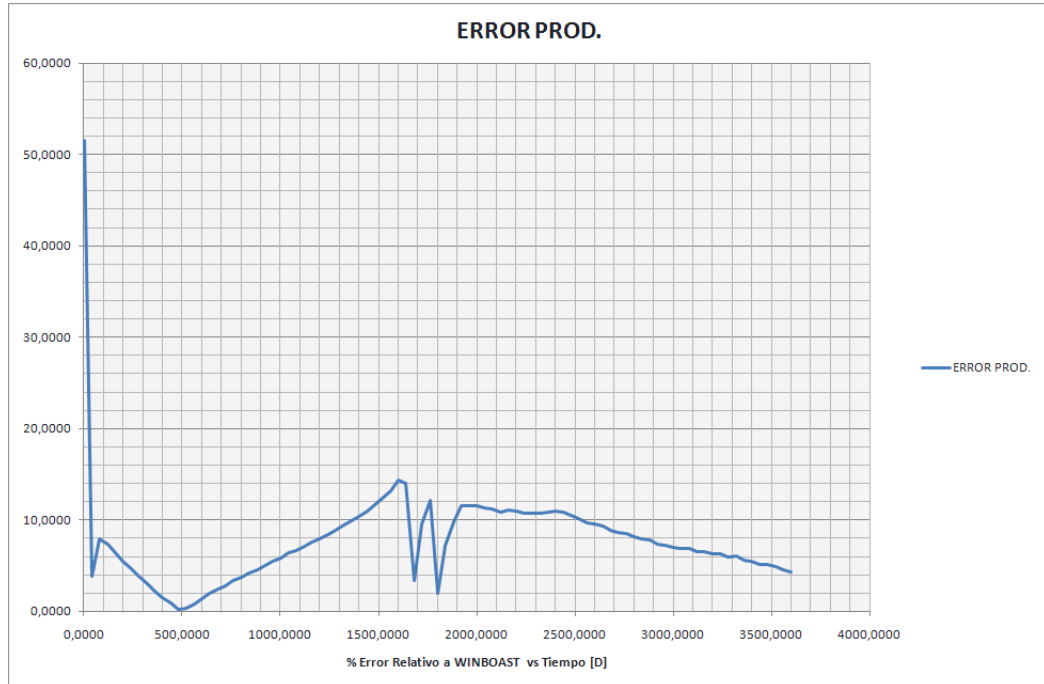


Figura 4.16: Error de Producción relativo al WinBOAST



## CASO 2

## MODELO DE PERMEABILIDAD RELATIVA

Basandonos en las siguientes condiciones:

$$kros_{wc} = 0,8$$

$$krw_{orw} = 0,6$$

$$S_{wc} = 0$$

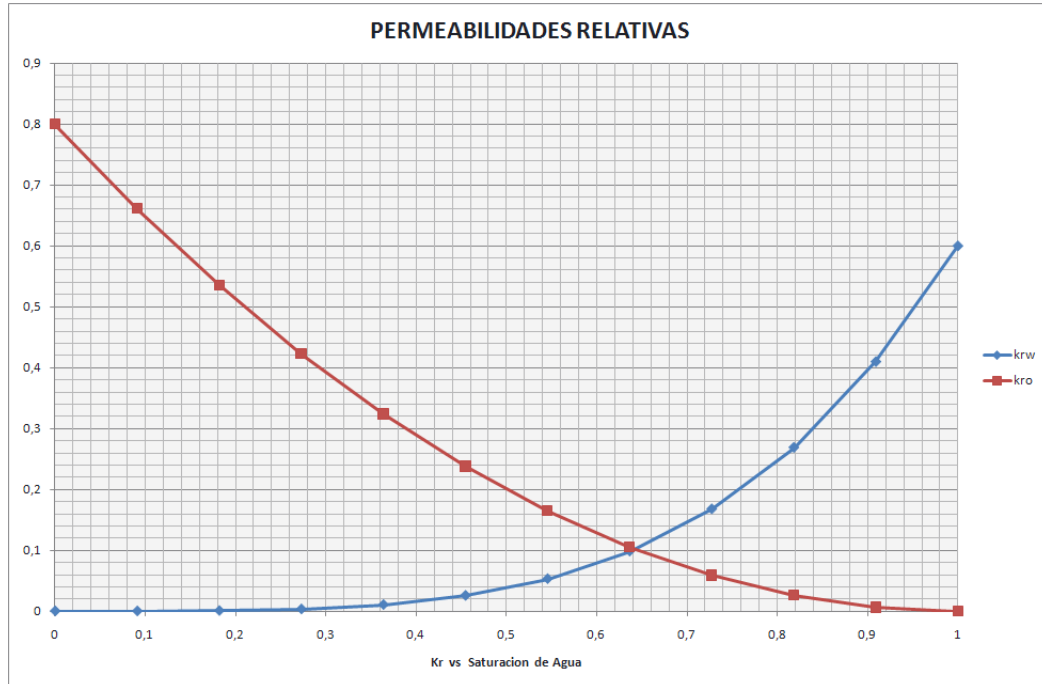
$$S_{orw} = 0$$

$$n_w = 4$$

$$n_o = 2$$

Obtenemos:

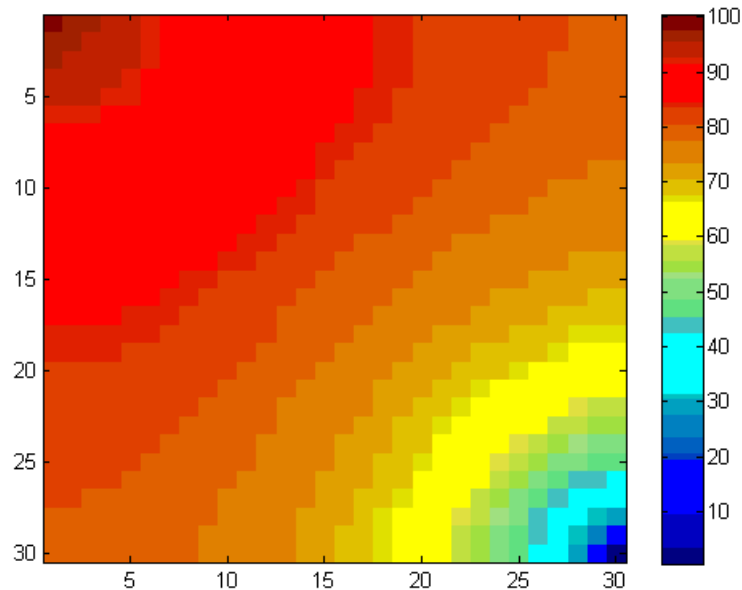
Figura 4.17: Modelo de permeabilidad relativa Caso 2, Modelo 1.



Usando los puntos finales para el cálculo de las permeabilidades relativas (ilustración 13), se corrió la simulación en los dos programas y se obtuvo el siguiente cuadro de resultados:

De igual manera se evidencia el efecto del cambio de la movilidad del agua haciendo que el tiempo de ruptura sea mas largo, tanto que ni a 10 años el agua ha llegado al pozo productor. Básicamente los efectos son los mismos que en el caso anterior y los errores se mantiene estables en casi toda la simulación.

Figura 4.18: Perfil de presiones WINBOAST a 3600 días (Ruptura) generado en MATLAB.



### 4.3.3. Modelo 2 Vertical (Inyección de agua con zonas de múltiple completamiento)

#### *Descripción General.*

EL modelo se basa en un perfil vertical de inyección de agua con cuatro zonas de completamiento. Aquí las fuerzas gravitacionales juegan un papel importante y por tanto la ecuación 4.10 es usada para el modelamiento de este modelo. Las zonas de completamiento tienen igual espaciado y el modelamiento de los pozos es un poco mas acertado geoméricamente a la realidad que el modelo. Para este modelo se corrieron dos casos uno bajo un sistema de homogéneo isotrópico caso 1 y el otro bajo un sistema de cuatro arenas de igual porosidad pero diferente permeabilidad caso 2, Los siguientes parámetros fueron asignados al modelo:

Figura 4.19: Perfil de presiones FLEXPDE a 3600 días.

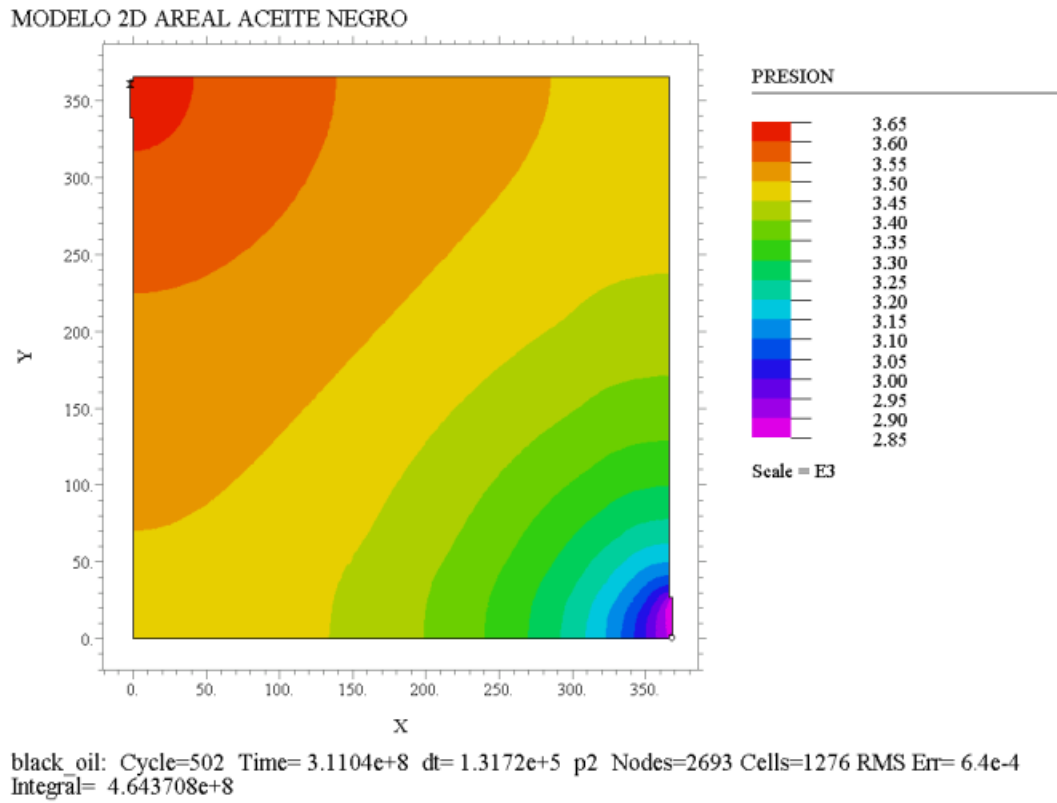


Figura 4.20: Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 3600 días (Ruptura) generado en MATLAB.

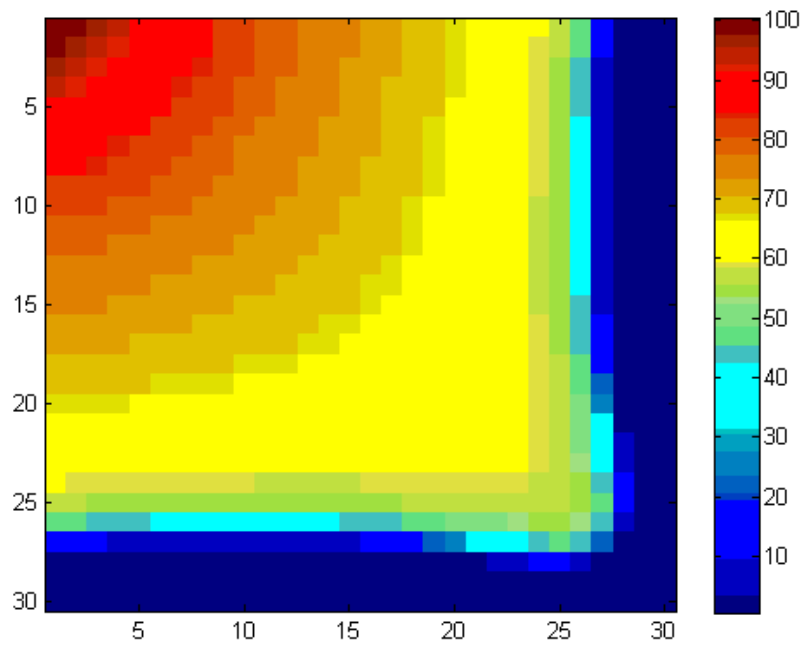
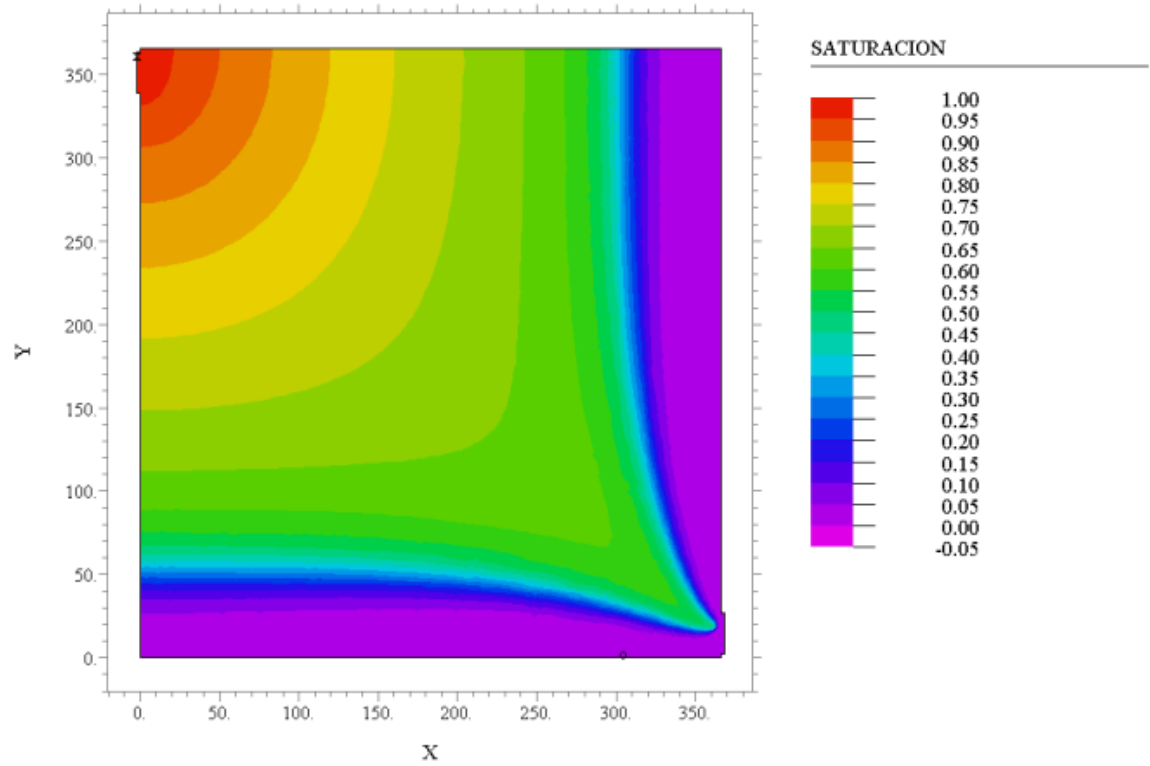


Figura 4.21: Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 3600 días.

MODELO 2D AREAL ACEITE NEGRO



black\_oil: Cycle=502 Time= 3.1104e+8 dt= 1.3172e+5 p2 Nodes=2693 Cells=1276 RMS Err= 6.4e-4  
Integral= 69929.36

Figura 4.22: Presión promedio del yacimiento.

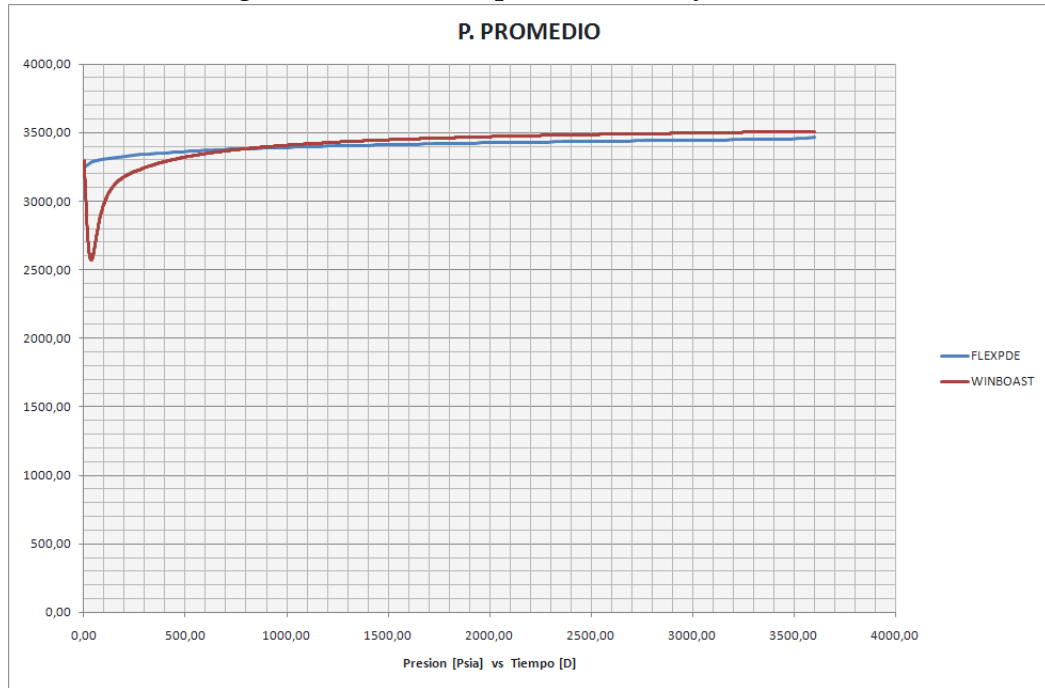


Figura 4.23: Error relativo al WinBOAST

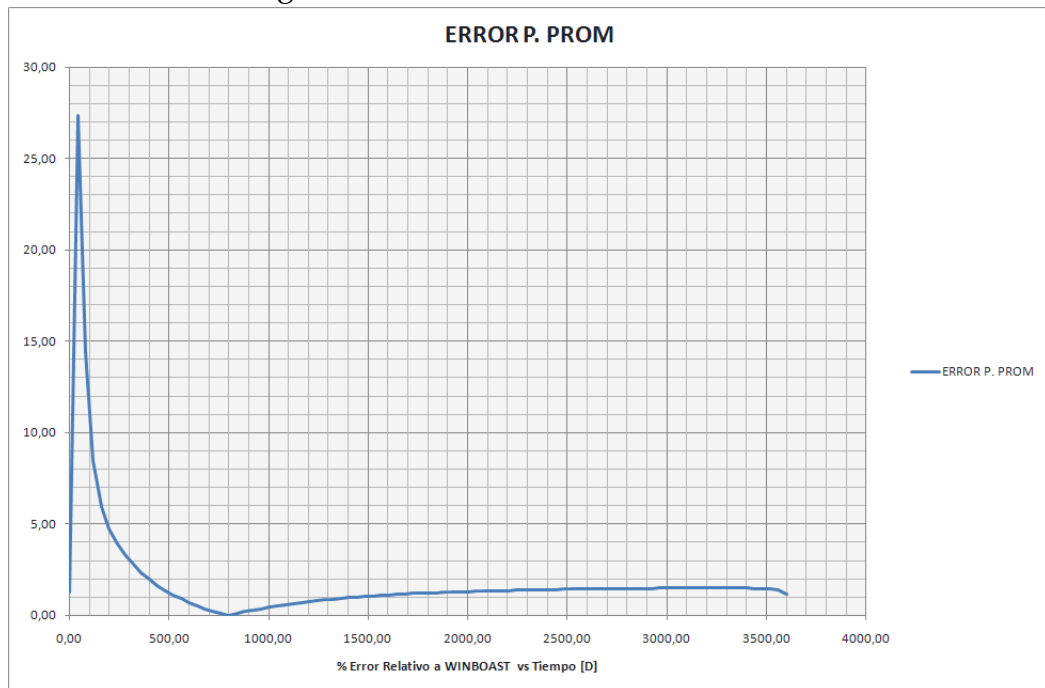


Figura 4.24: Producción Acumulada.

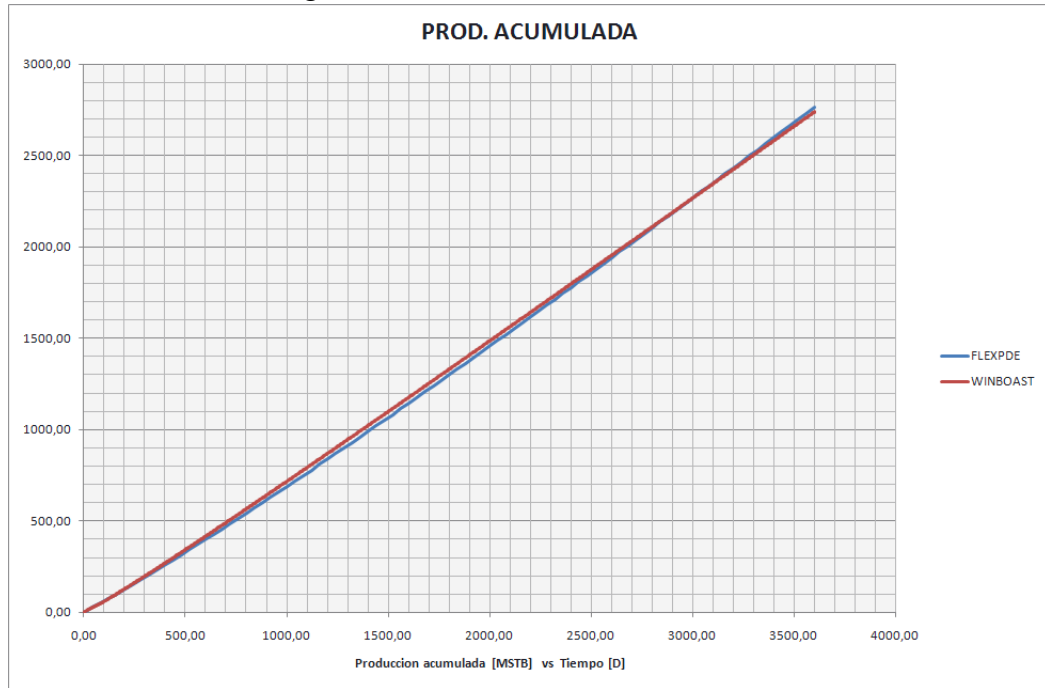


Figura 4.25: Error de la producción acumulada.

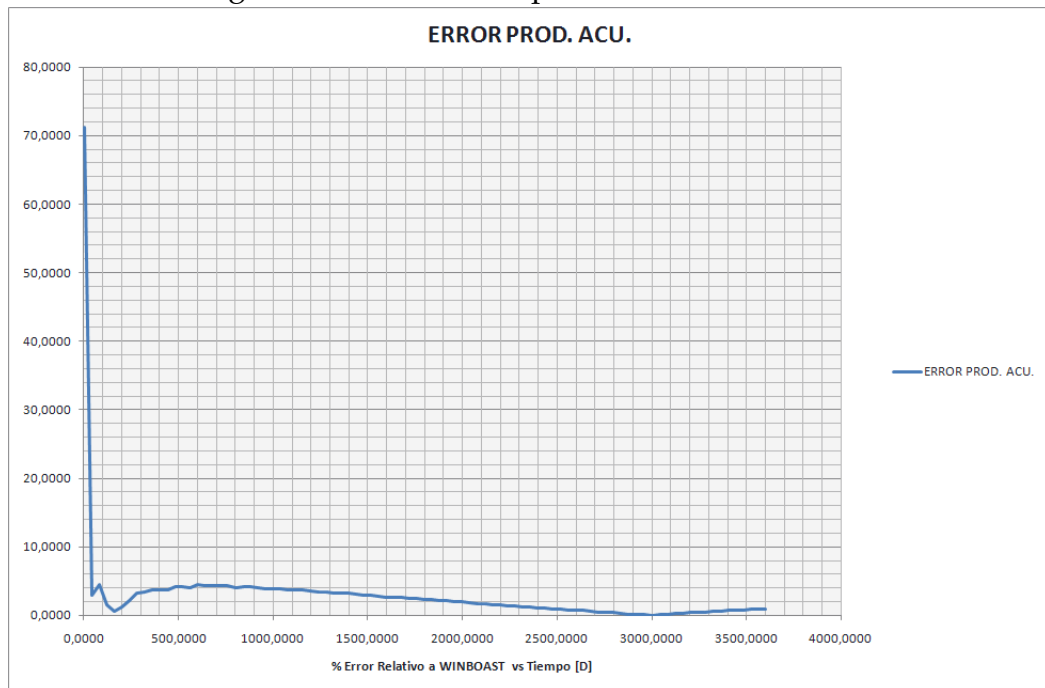


Figura 4.26: Producción diaria.

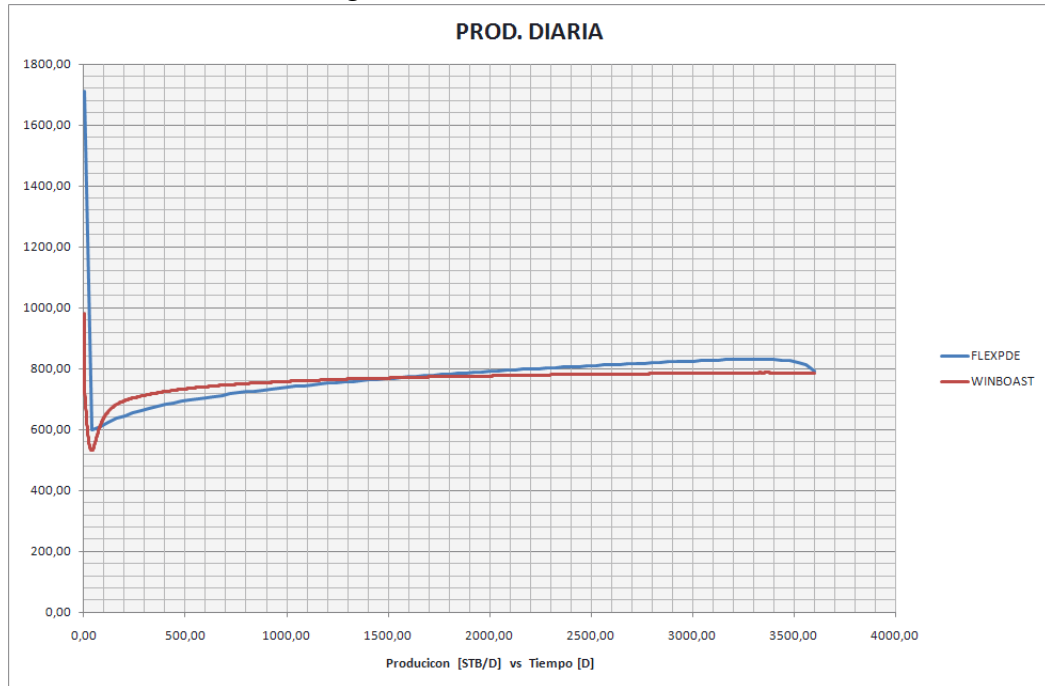
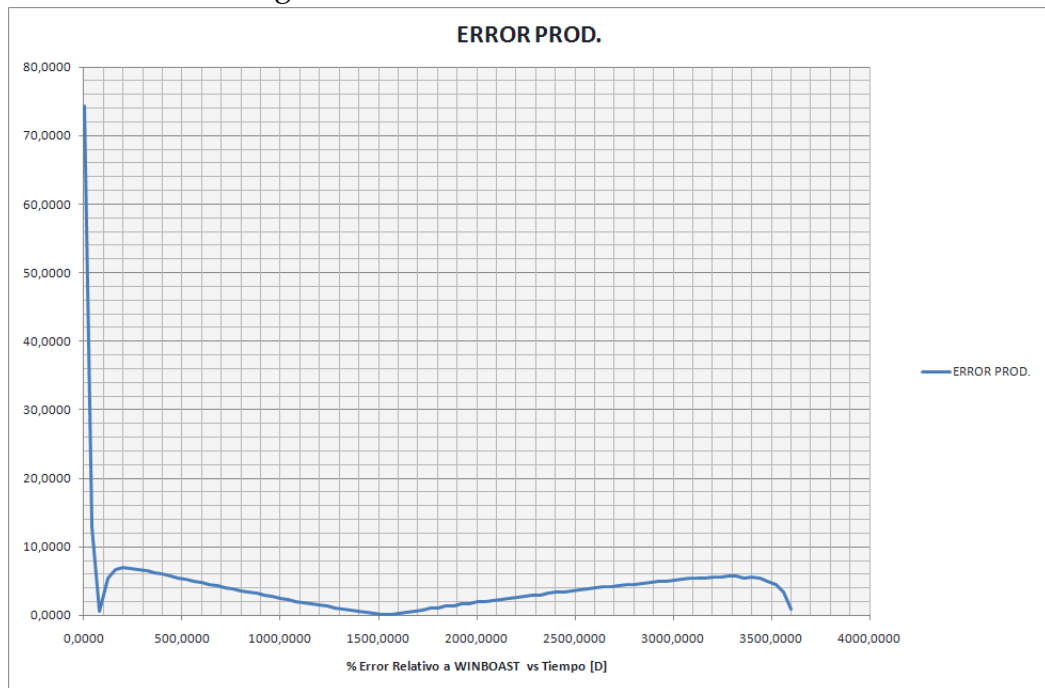


Figura 4.27: Error relativo al WinBOAST.



## Dimensiones

Tabla 4.8: Dimensiones del Modelo 2.

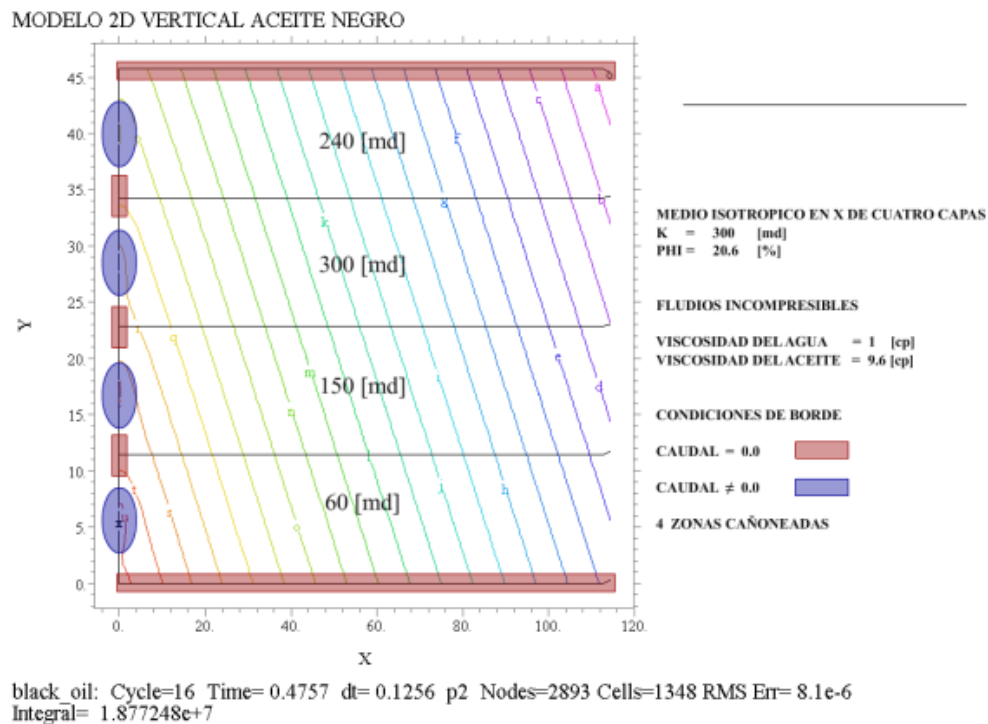
### DIMENSIONES

Dimensión  $x = 1500$  [ft]

Espesor de la arena en dirección  $y = 150$  [ft]

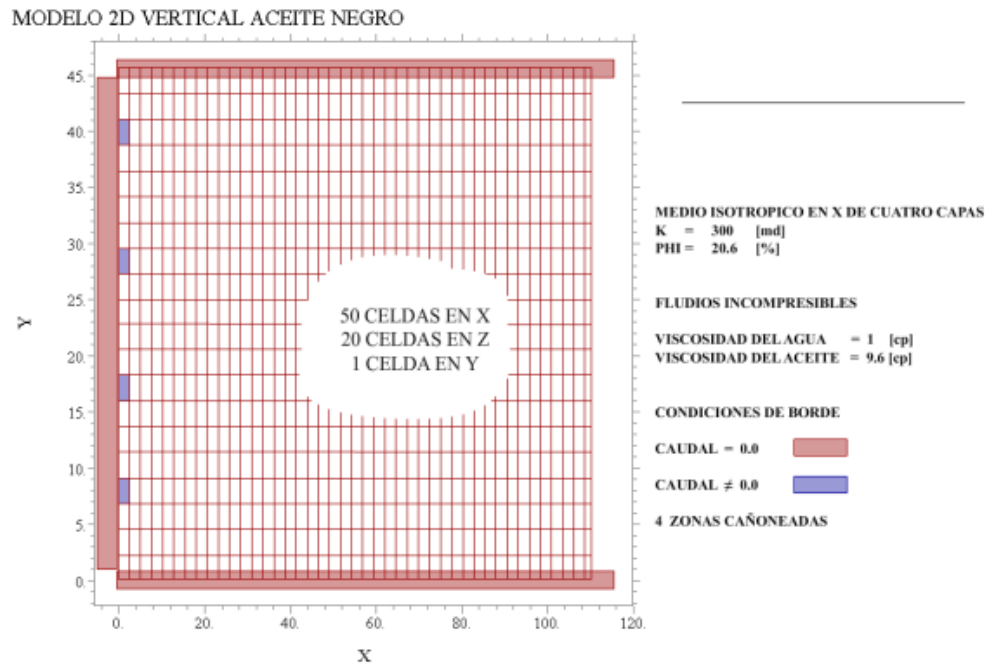
Proyección en  $z = 800$  [ft]

Figura 4.28: Modelo 2 Vertical WINBOAST (ZONA DE INYECCION).



En las figuras 4.28 y 4.29 se observa como la zona de completamiento es mas propia de su geometría en el modelo FlexPDE que el modelo WinBOAST, esto demuestra la gran ventaja en modelamiento geométrico del método de elementos finitos sobre las diferencias finitas.

Figura 4.29: Modelo 2 Vertical FLEXPDE (ZONA DE INYECCION)



## Propiedades de la Roca y Fluidos

Las propiedades de la roca y de los fluidos que en teoría conforman el medio, son:

Tabla 4.9: Propiedades de la roca y fluidos del Modelo 2.

PROPIEDADES ROCA-FLUIDOS
$K_1 = 240 [md]$
$K_2 = 300 [md]$
$K_3 = 150 [md]$
$K_4 = 60 [md]$
$\Phi = 0,206$
$\mu_w = 9,6 [cp]$
$\mu_0 = 1 [cp]$

## Modelo de Permeabilidad Relativa

Para este modelo se utiliza las mismas correlaciones que el modelo 1, decir utilizando las ecuaciones 4.13.

## Condiciones Iniciales

Tabla 4.10: Condiciones iniciales para el modelo 2. *WinBOAST*

CONDICIONES INICIALES
Presión Inicial = $P_H - \rho \times G \times \Delta Z [psi]$
Saturación de Agua Inicial = 0

Para obtener la presión inicial del modelo FlexPDE, se usa el valor de presión inicial calculado por WinBOAST e impreso en el archivo WTEMP.ROF, después de correr la simulación WINBOAST.

### **Controles de la Simulación**

Tiempo máximo de simulación = 5 Años.

En WinBOAST se reportará cada 45 días un resumen de la simulación.

En FlexPDE se reportará cada 20 días un resumen de la simulación.

### **Restricciones de Pozo**

Se definen dos pozos uno de inyección y otro lógicamente de producción controlados por  $pwf$ , y con un índice de productividad determinado.

En el FlexPDE La presión de inyección es de 3640 [psi] y la presión de producción de 2860 [psi].

### **Casos de estudio del Modelo 2**

Teniendo los modelos construidos se realizan dos casos de estudio donde se modela un perfil de inyección con cuatro arenas de igual permeabilidad, cuatro zonas cañoneadas ubicadas en la mitad de la arena caso 1, el caso 2 se basa en modificar los datos para que cada arena tenga una permeabilidad diferente con el fin de apreciar el efecto de canalización por capas permeables.

Tabla 4.11: Restricciones de Pozo. *WinBOAST*

P-1						Nombre del pozo productor
1	4					Numero de identificación, numero de conexiones.
50	1	3	3.8	2200.0		Coordenadas del pozo $X, Y, Z, ip, pwf$ .
50	1	8	3.8	2200.0		Coordenadas del pozo $X, Y, Z, ip, pwf$ .
50	1	13	3.8	2200.0		Coordenadas del pozo $X, Y, Z, ip, pwf$ .
50	1	18	3.8	2200.0		Coordenadas del pozo $X, Y, Z, ip, pwf$ .
-1	0	0	0	0		Controlado por $pwf$ .
I-1						Nombre del pozo inyector
2	4					Numero de identificación, numero de conexiones
1	1	3	3.8	3800.0		Coordenadas del pozo $X, Y, Z, ip, pwf$ .
1	1	8	3.8	3800.0		Coordenadas del pozo $X, Y, Z, ip, pwf$ .
1	1	13	3.8	3800.0		Coordenadas del pozo $X, Y, Z, ip, pwf$ .
1	1	18	3.8	3800.0		Coordenadas del pozo $X, Y, Z, ip, pwf$ .
-2	0	0	0	0		Controlado por $pwf$ .

## CASO 1

## MODELO DE PERMEABILIDAD RELATIVA

Para el caso uno se tomarón los siguientes puntos de referencia de la misma manera que los usados en el caso 1 del modelo 1 como observamos en la grafica 4.6.

Figura 4.30: Perfil de presiones WINBOAST a 180 días, generado en MATLAB.

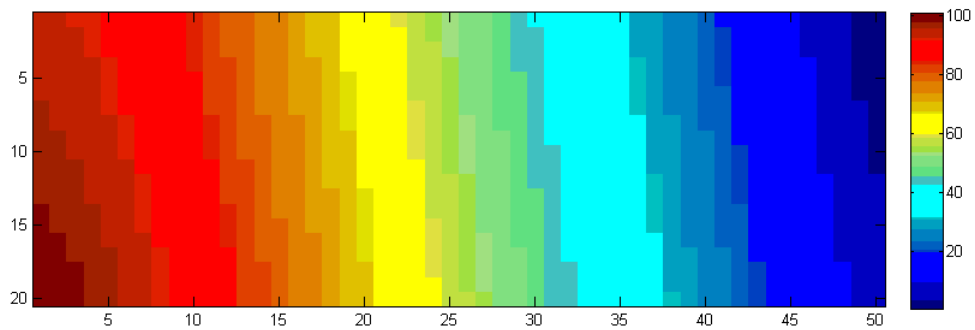
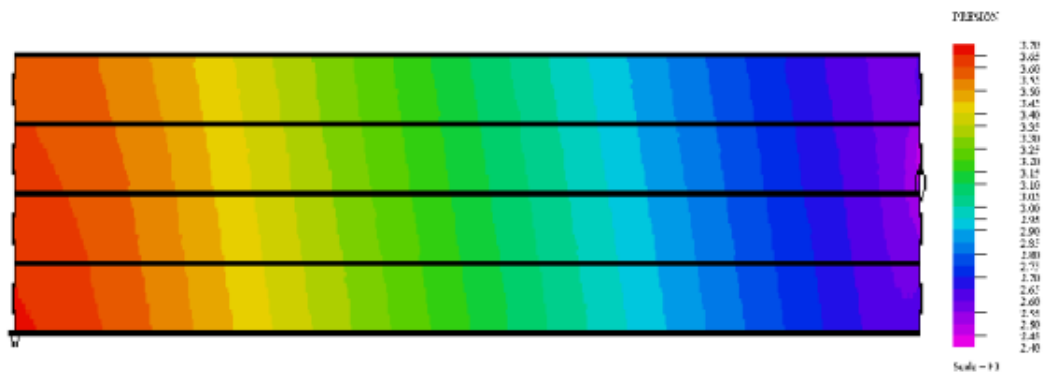


Figura 4.31: Perfil de presiones FLEXPDE a 180 días.



Las anteriores figuras nos muestran el correcto comportamiento de la simulación con MEF y la similitud de la forma del perfil de presiones, en este caso los perfiles dejan de tener una tendencia horizontal (estado inicial), para tender a ser casi verticales

debido a los efectos de presión sobre las arenas en producción. Sobre la parte de inferior izquierda de ambos perfiles se desarrolla una forma de arco la cual es debido al incremento de la presión con la profundidad.

Figura 4.32: Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 180 días, generado en MATLAB.

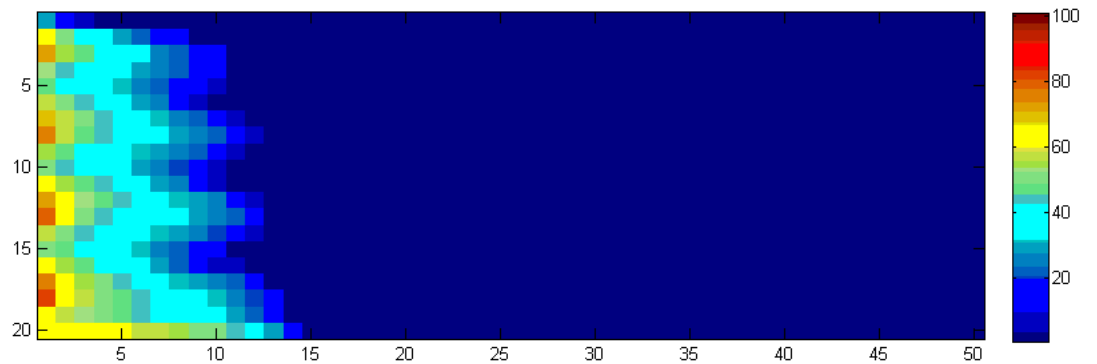
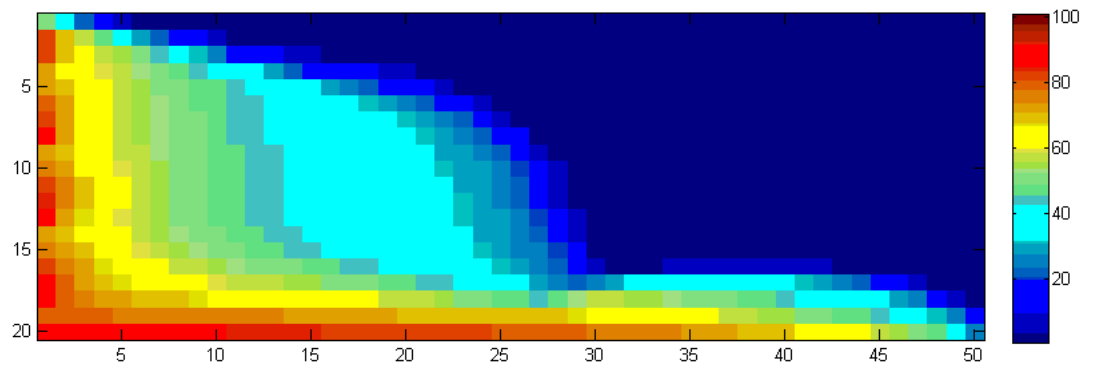


Figura 4.33: Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 585 días, generado en MATLAB.

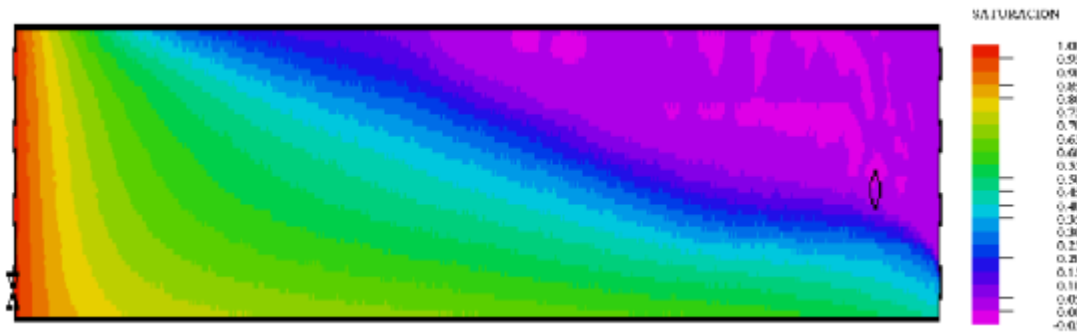


Las ilustraciones anteriores muestran como el modelo MEF simula los perfiles de saturación y el efecto de la gravedad haciendo que el agua se drene hacia el fondo. En los perfiles se percibe una forma mas Aguda en el modelo WINBOAST, y a tiempos

Figura 4.34: Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 180 días.



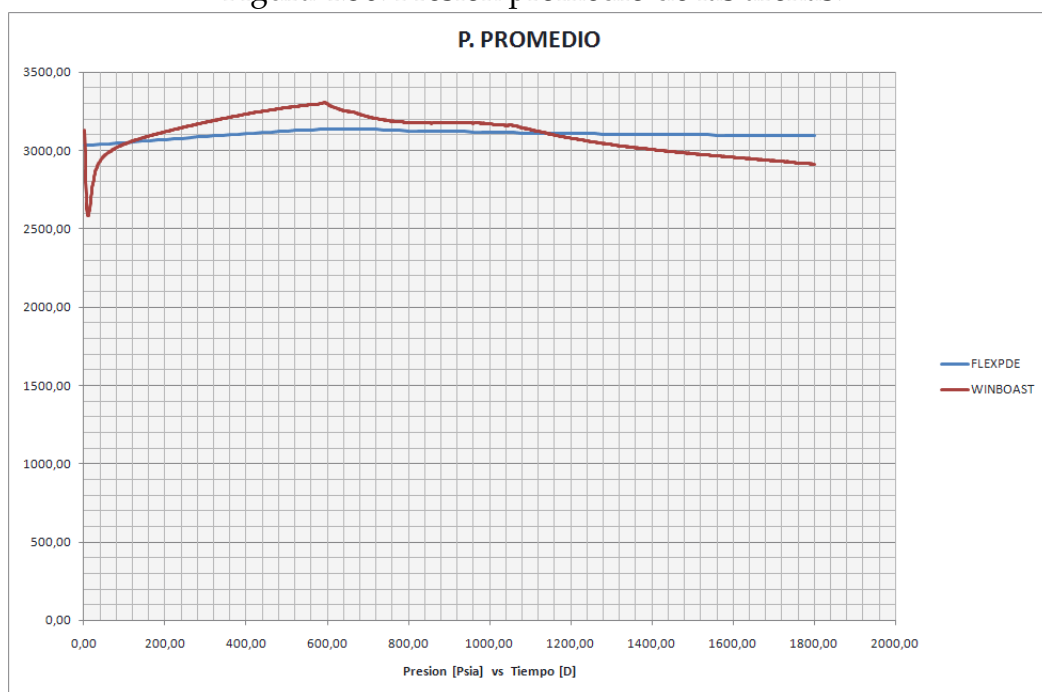
Figura 4.35: Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 720 días.



de ruptura el perfil es diferente, lo cual indica una menor extracción provocada por la condición de pozo impuesta en ambos modelos, aunque a pesar de su diferencia se simula con cierta aproximación la producción de aceite.

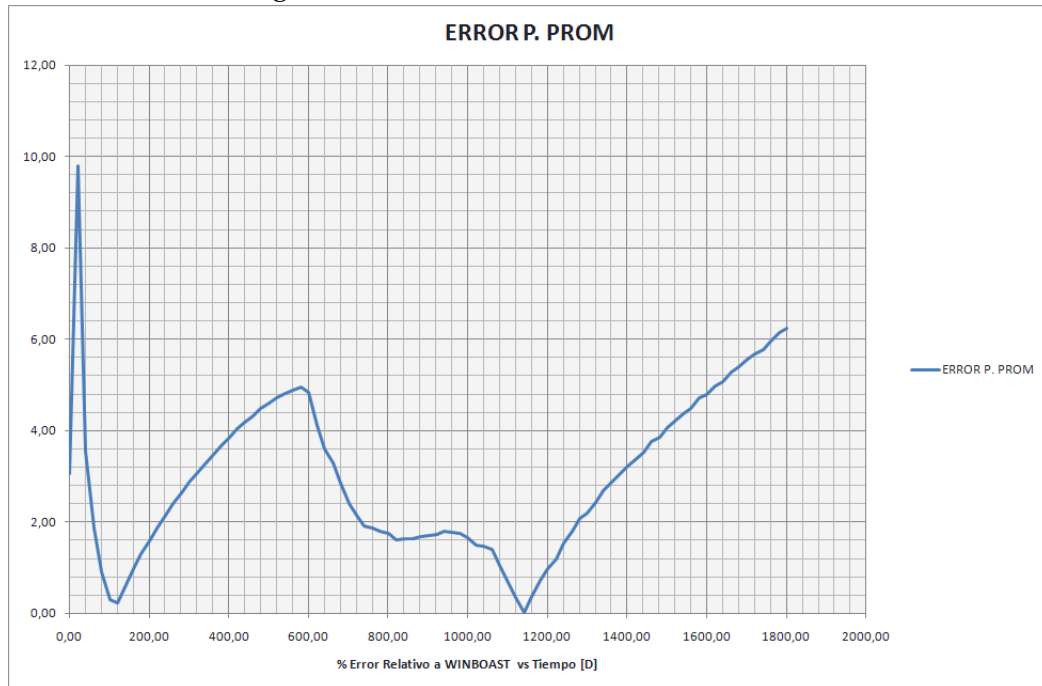
Obteniendo los datos de cada reporte se construyen los siguientes gráficos comparativos:

Figura 4.36: Presión promedio de las arenas.



En las figuras 4.36 y 4.37 existe una fuerte diferencia en términos de presión promedio provocada por las condiciones de pozos impuestas, la causa de esto se explica en que si tomamos un promedio ponderado de la presión en las celdas con pozos, existirá muchos valores de presión y cambios de este de formas diferentes en cada paso de tiempo, en lo que acertadamente respecta, el promedio ponderado es un fuerte aproximación al comportamiento de la presión de la celda, el cual nos da un único valor que representara los cambios durante toda la simulación por esta razón se generan muchas diferencias en las tendencias de los modelos construidos, a pesar

Figura 4.37: Error relativo al WINBOAST



de ello los comportamientos y tendencias se reproducen lo cual es muy valido en la comparación de las dos técnicas.

En efecto se corrobora que el yacimiento se esta produciendo más rápido en los modelos FlexPDE por la razón anterior, es decir las condiciones impuestas al modelo son de tipo optimista.

En la producción diaria se tiene el mismo efecto visto en la producción acumulada.

## CASO 2

### MODELO DE PERMEABILIDAD RELATIVA

EL modelo de permeabilidad relativa para este caso es el usado en el caso 1 tanto de este modelo como el del anterior.

Figura 4.38: Producción Acumulada.

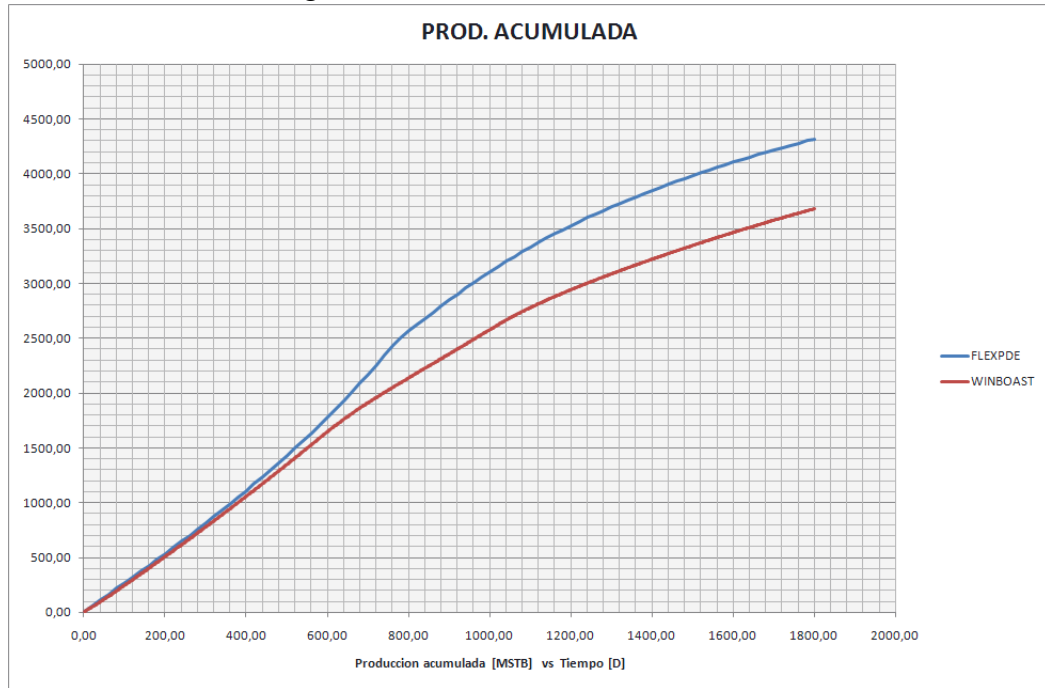


Figura 4.39: Error relativo al WINBOAST

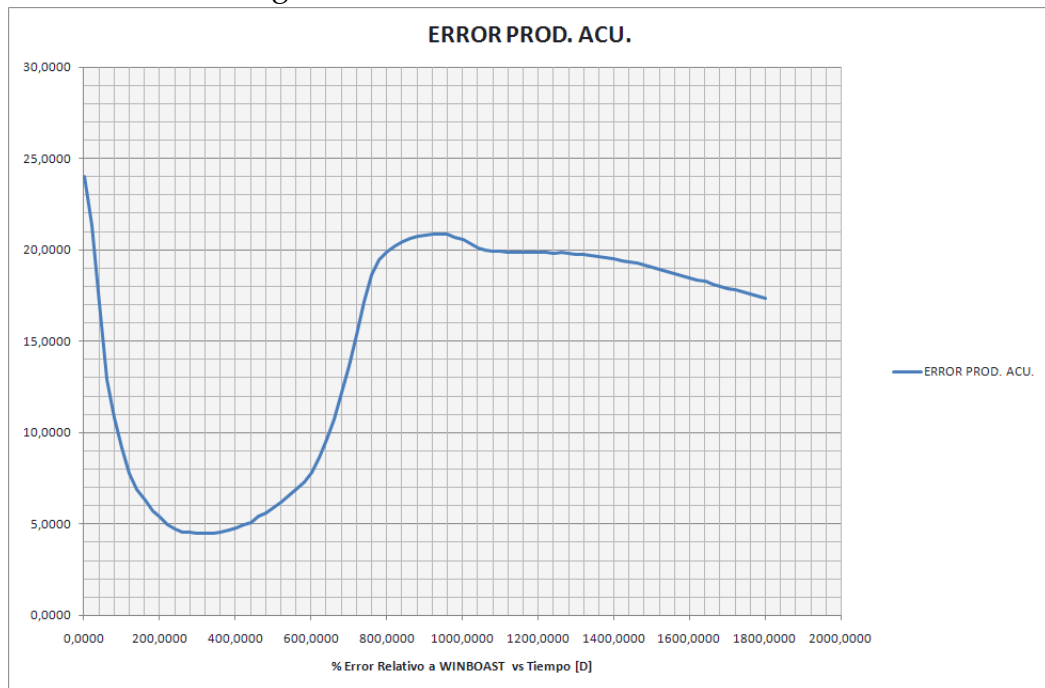


Figura 4.40: Producción diaria.

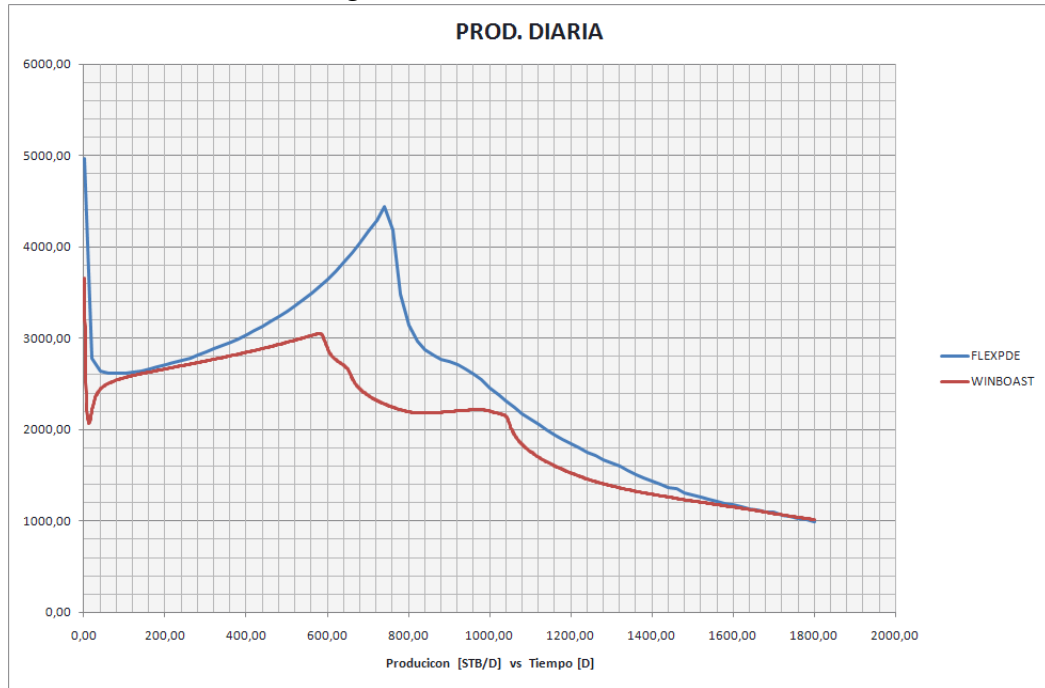
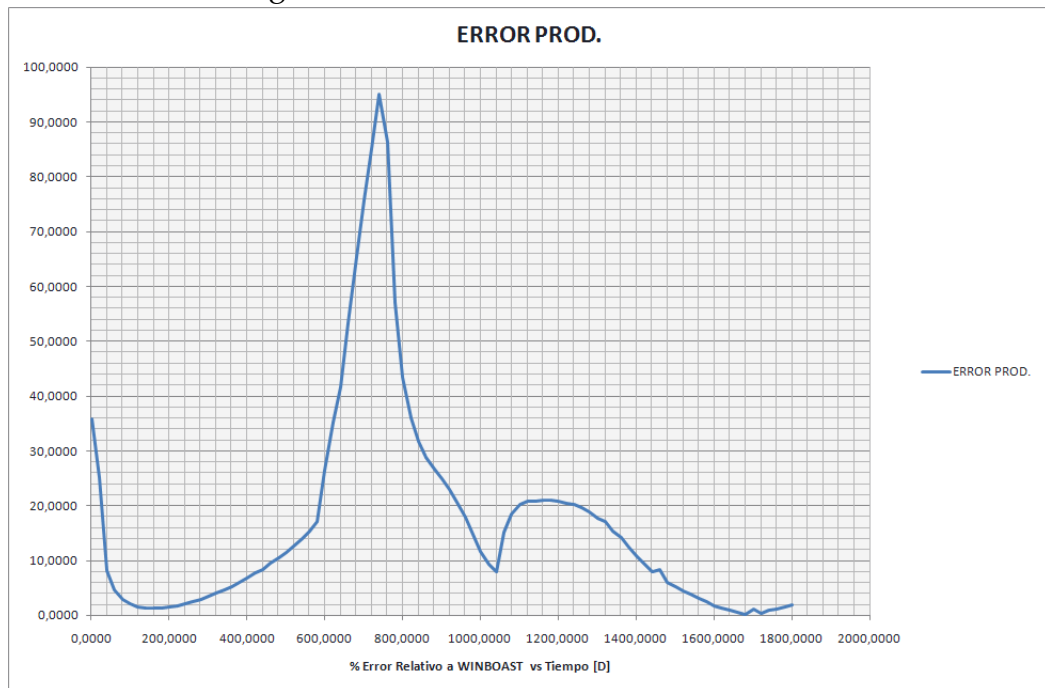


Figura 4.41: Error relativo al WINBOAST.



Usando el anterior modelo se corrió la simulación en los dos programas y se obtuvo el siguiente cuadro de resultados:

Figura 4.42: Perfil de presiones WINBOAST a 180 días, generado en MATLAB.

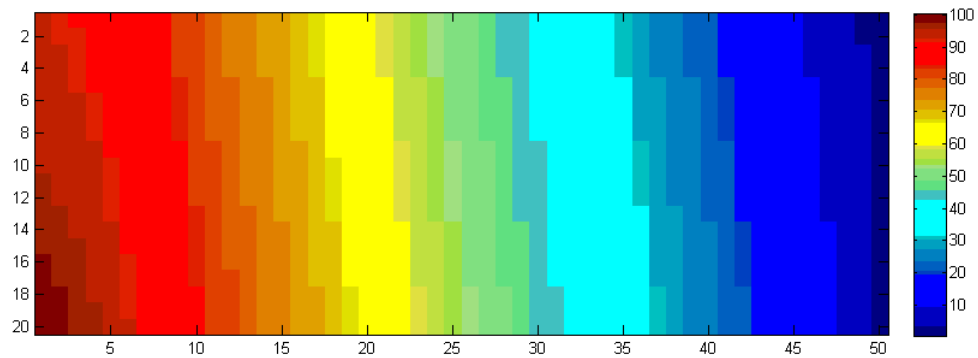
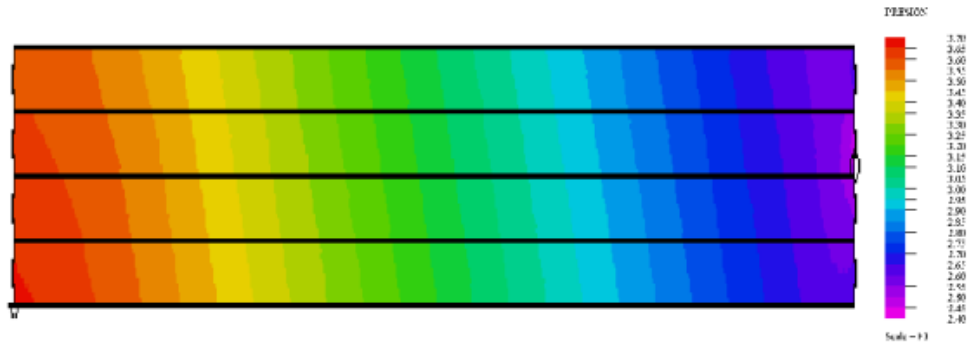


Figura 4.43: Perfil de presiones FlexPDE a 180 días.



Se obteniendo el correcto comportamiento de la simulación con MEF y la similitud de la forma del perfil de presiones, y se desarrolla una forma de arco la cual es debido al incremento de la presión con la profundidad lo cual se apreciaba en el caso anterior.

Las ilustraciones anteriores muestran como el modelo MEF simula los perfiles de saturación y el efecto de la canalización debido a la segunda arena la cual cuenta con la mayor permeabilidad del sistema. Aunque la mayor parte del agua viaja a

Figura 4.44: Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 180 días, generado en MATLAB.

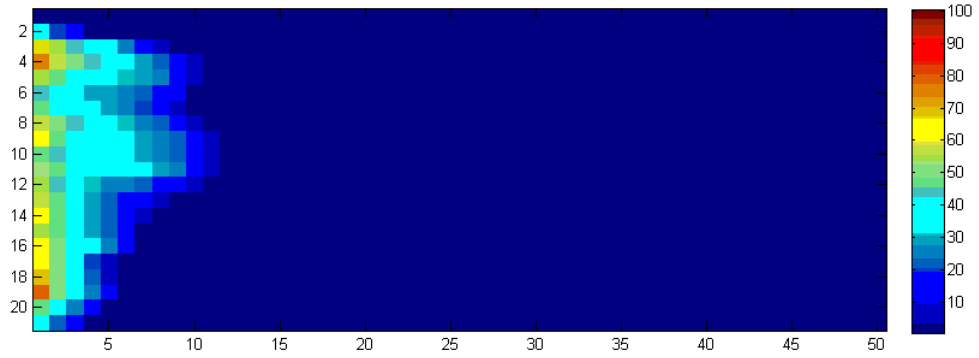


Figura 4.45: Perfil de saturaciones de agua WINBOAST a 803 días, generado en MATLAB.

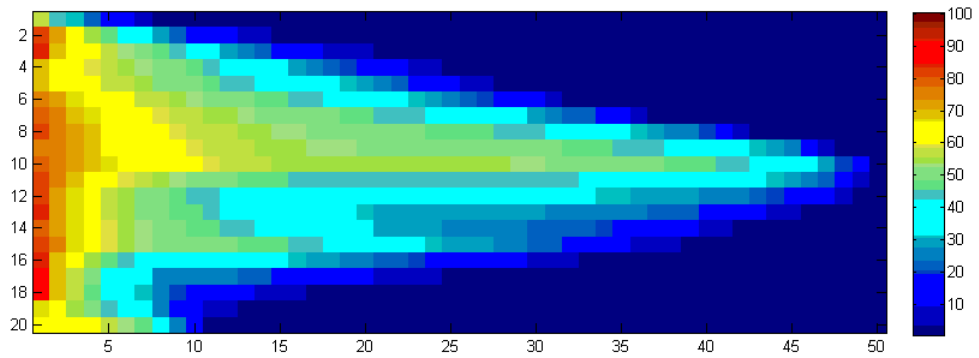


Figura 4.46: Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 180 días.

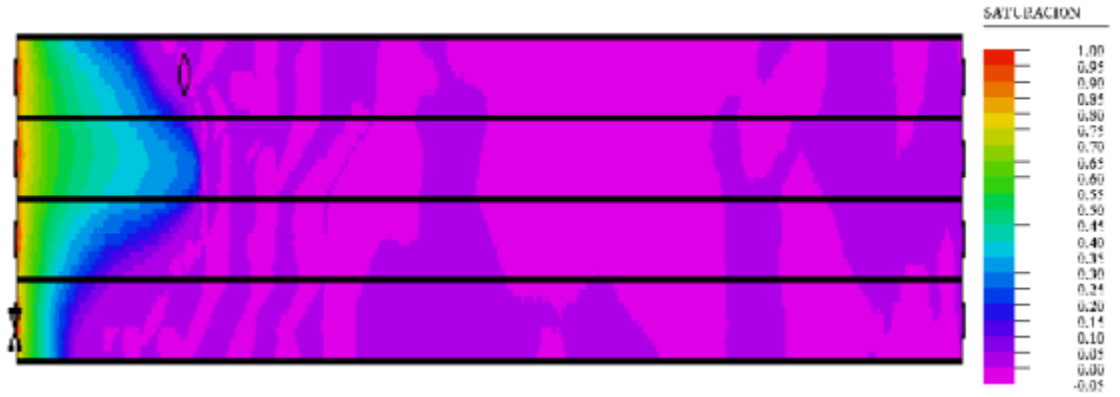
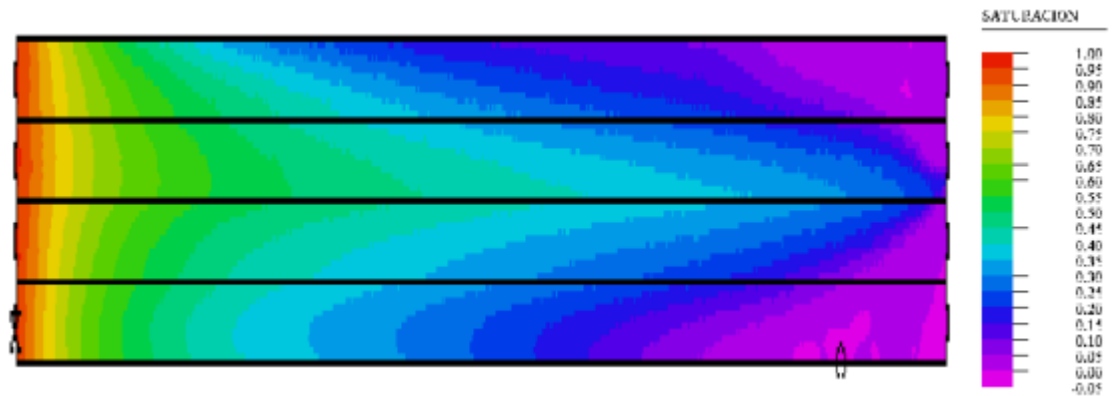


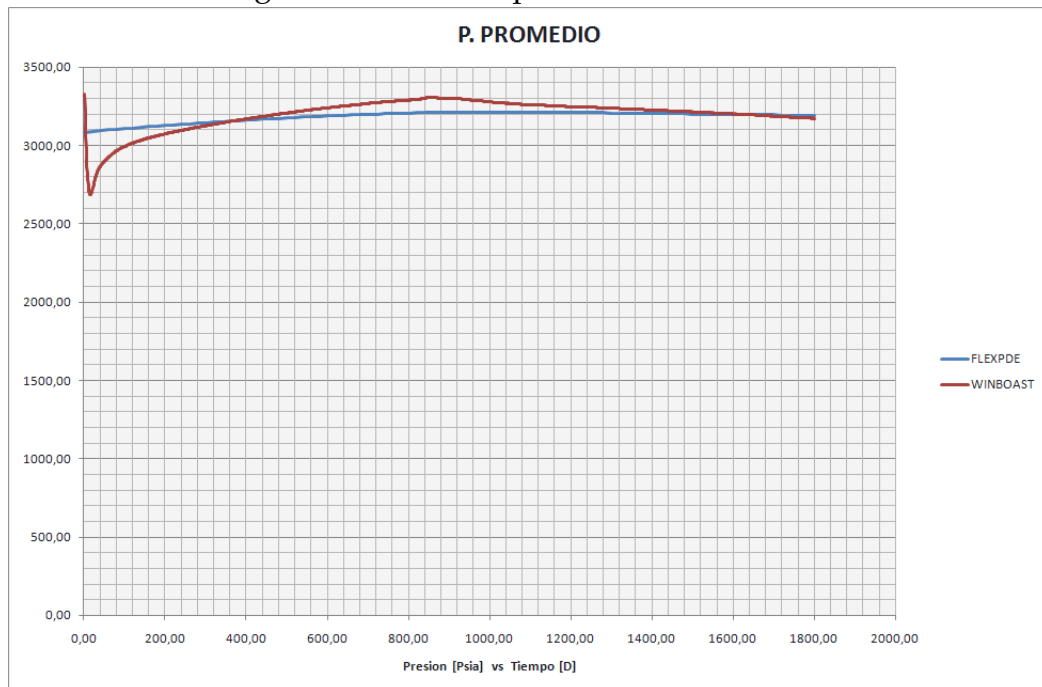
Figura 4.47: Perfil de saturaciones de agua FLEXPDE a 881 días.



través de la misma capa, la gravedad sigue afectando el desplazamiento y por esto el perfil tiende a tomar una forma puntiaguda, en las graficas WinBOAST se alcanza a percibir el cambio de litología, aunque cabe resaltar que el perfil calculado por WinBOAST es más agudo que el otro lo cual nos dice que la producción acumulada al tiempo de ruptura será menor que la predicha por FlexPDE.

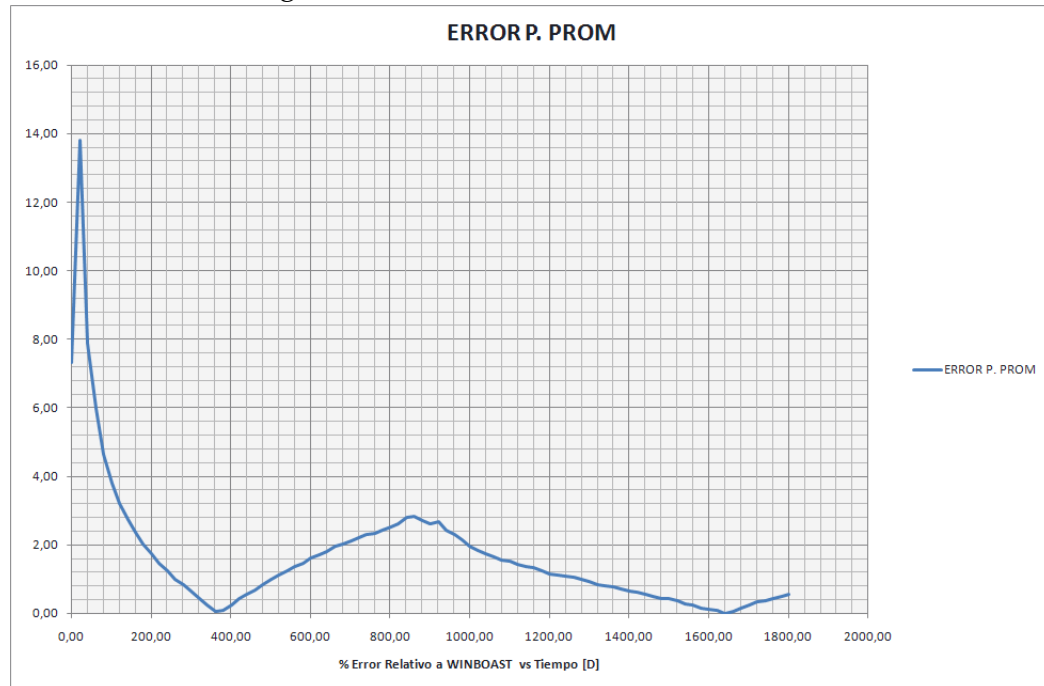
Obteniendo los datos de cada reporte se construyen los siguientes gráficos comparativos:

Figura 4.48: Presión promedio de las arenas



En las figuras 4.48 y 4.49 el cálculo del error a tiempos tempranos tiene el mismo efecto ya mencionado de las condiciones iniciales. La tendencia como se muestra de la presión calculada por FlexPDE es menor a la calculada por WinBOAST, la diferencia se debe al condicionamiento del sistema en la zonas de los pozos, lo cual en este caso se ve reflejado en que en la simulación FlexPDE se produce a una tasa mas acelerada haciendo que las arenas no se presuricen tanto como en WinBOAST, esto

Figura 4.49: Error relativo al WinBOAST



explica el aumento del error en los tiempos cercanos a la mitad de la simulación.

En términos de producción acumulada FLEXPDE arroja valores más altos, siguiendo con lo explicado anteriormente, en efecto se corrobora que el yacimiento se está produciendo más rápido por la primera y la última arena que en el modelo WINBOAST, razón que gráficamente se evidencia en las arenas del perfil de saturación de las figuras 4.32-4.35, de esta manera los errores relativos empezaron a aumentar con el tiempo hasta un punto en el cual la producción se hace más baja y lenta (después de ruptura).

Figura 4.50: Producción Acumulada.

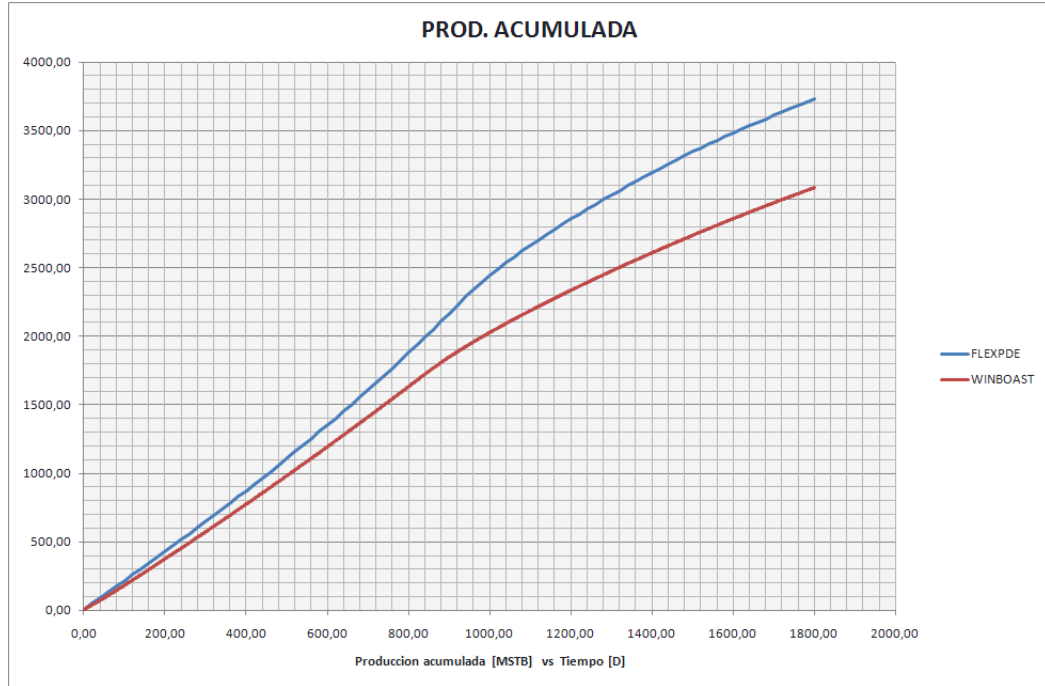


Figura 4.51: Error relativo al WINBOAST

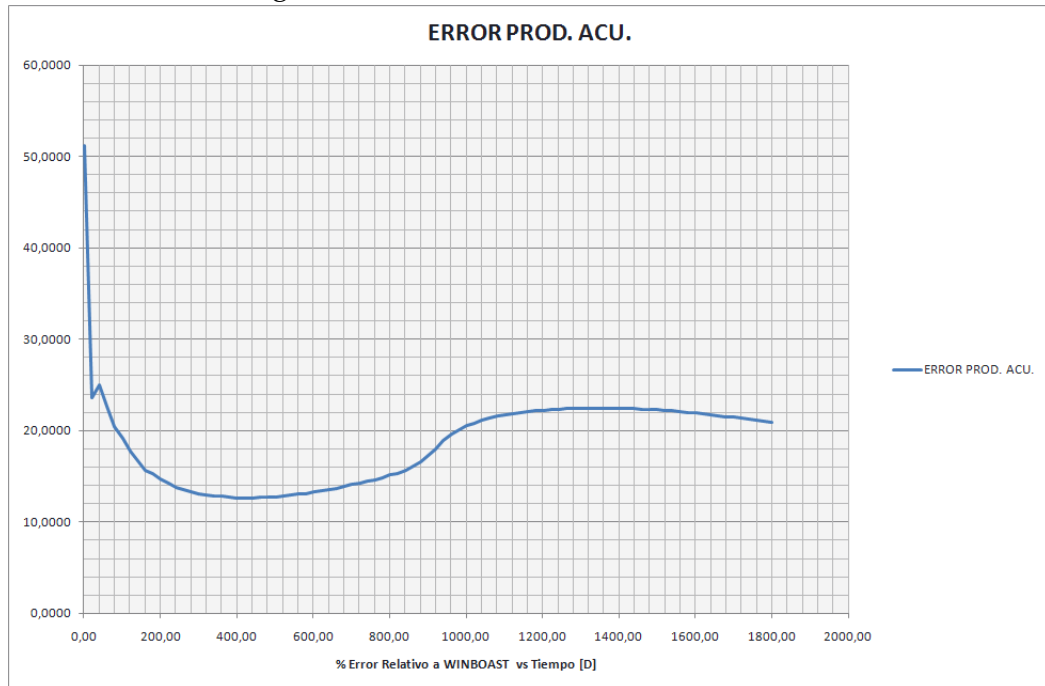


Figura 4.52: Producción diaria.

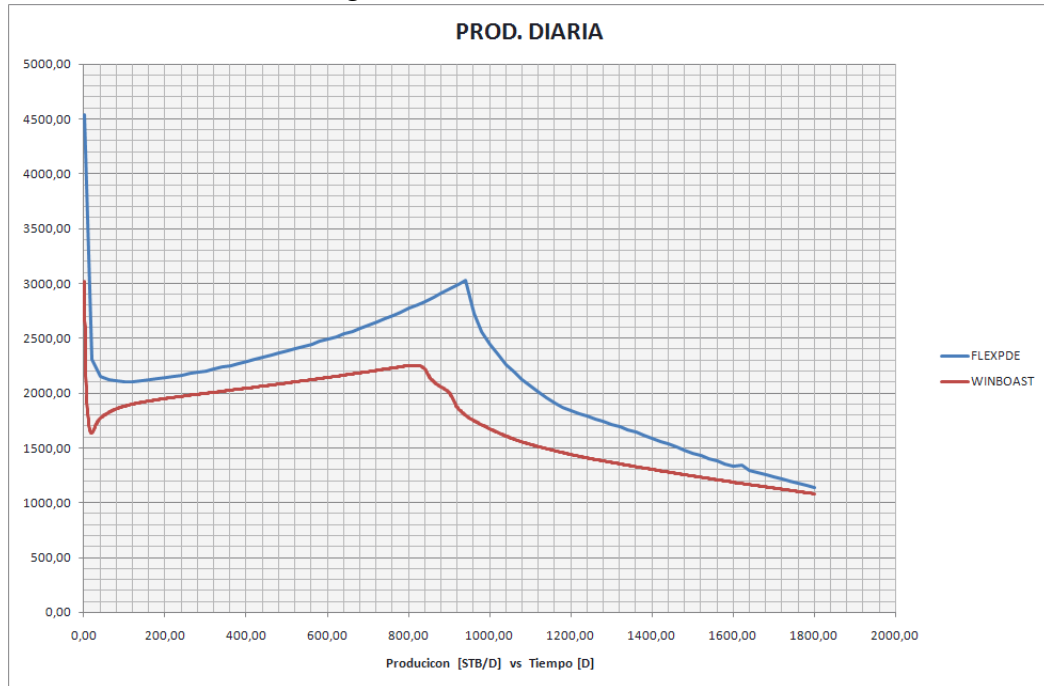
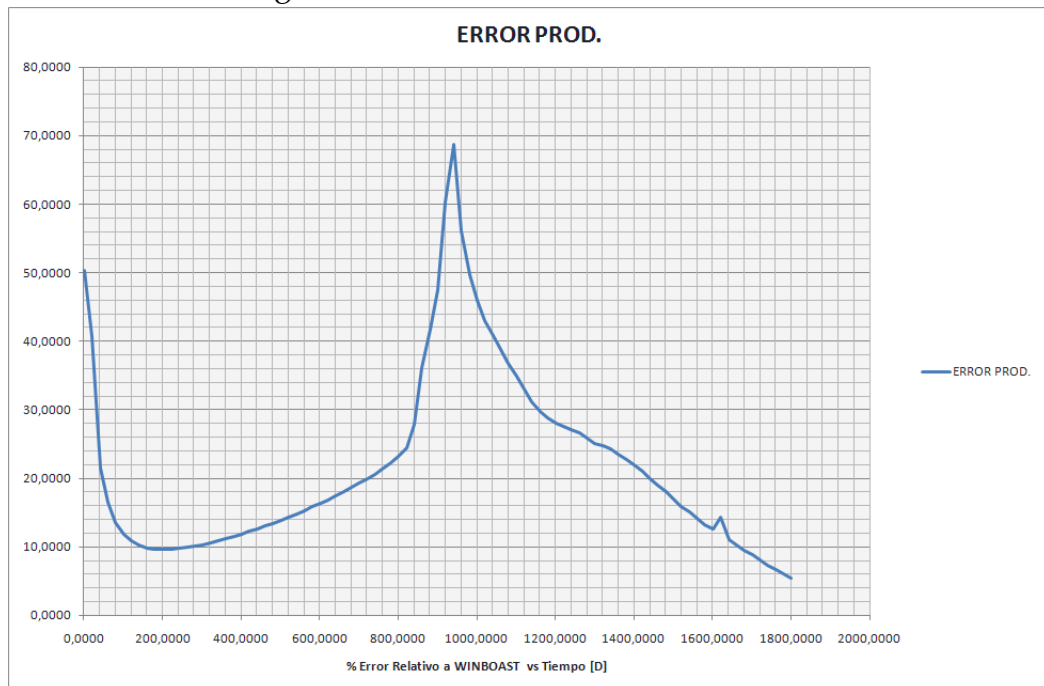


Figura 4.53: Error relativo al WinBOAST.



# CONCLUSIONES

---

- El método de elementos finitos a pesar de ser una formulación desarrollada para análisis estructural es posible y factible su implementación e investigación en la dinámica computacional de fluidos.
- En términos de acople y modelamiento geométrico el método de elementos finitos tiene una fuerte ventaja sobre MDF.
- En el desarrollo de este trabajo la validez de la formulación MEF se evidencia y se logra comparar con otro esquema de solución obteniendo buenos resultados.
- A pesar de las diferencias de imposición de pozos, métodos de solución y tipo de enmallado, los resultados obtenidos son satisfactorios y guardan una consistencia con un simulador numérico de yacimientos basado en MDF el cual ha sido ampliamente usado en el ámbito académico.
- Las tendencias de declinación y producción fueron reproducidas y de manera cuantitativa es posible afirmar que la formulación realizada en este trabajo es correcta a pesar de las diferencias existentes entre los dos programas.
- Las condiciones iniciales de los modelo WINBOAST tiene una fuerte variación, debido a que en el inicio de la simulación no hay un suavizado a tiempos tempranos lo cual se evidencia en los altos errores al comienzo de las simulaciones

realizadas.

## RECOMENDACIONES

---

- Establecer convenios tecnológicos con universidades con conocimiento profundo en el tema.
- Desarrollar modelos más avanzados de flujo, donde se comprometan fluidos compresibles e incompresibles.
- Buscar o desarrollar herramientas que no sean tan restringidas en métodos de solución para de esta manera optimizar las simulaciones y disminuir los tiempos de computo y carga computacional.
- Desarrollar un estudio de geomecánica a diferentes escalas por medio del MEF para unificarlo posteriormente con el modelo de flujo de fluidos.

# APENDICE

---

## **.1 Descripción De Los Codigos Auxiliares Desarrolados**

En un intento por automatizar todo el proceso se codificaron en fortran dos programas PROCESADOR.FOR y ERROR.FOR. A continuación una breve explicación de que hacen y por que se hicieron.

PROCESADOR. Los modelos FLEXPDE de la manera en que están implementados arrojan una gran cantidad de datos y archivos que por conveniencia es mejor que un programa los tome y los procese.

### **.1.1. PROCESADOR.exe**

#### **Datos de Entrada**

Las entradas de este programa son:

- El numero de tipos de archivos, cada script FLEXPDE arroja seis tipos de archivos, cada tipo de archivo representa una variable, el primer tipo de archivo repre-

senta la presión, es decir todos los archivos de tipo black\_oil\_01\_1, black\_oil\_01\_2, black\_oil\_01\_3, ..., black\_oil\_01\_n son de tipo uno por el primer número que lleva en su nombre, y todos sus datos son de presión. Así:

- Tipo uno: black\_oil\_01\_n- Presion
- Tipo dos: black\_oil\_02\_n - Velocidad del agua
- Tipo tres: black\_oil\_03\_n - Velocidad del aceite
- Tipo cuatro: black\_oil\_04\_n - flujo fraccional
- Tipo cinco: black\_oil\_05\_n - presión promedio
- Tipo seis: black\_oil\_06\_n - producción acumulada

Para el programa los tipos esta ordenados de esta forma así que el número de tipos puede ser máximo hasta 99 pero como solo se exportan seis variables el número es seis, si se digita 1 , solo procesa la presión, pero si se digita 3 , se procesa presión, Velocidad del agua y Velocidad del aceite, así solo se quiera procesar Velocidad del aceite, por que de esta manera esta escrito el código .

- EL numero de archivos por tipo de archivo, es el numero de archivos que hay disponible por cada tipo, hasta 91 se exportan en los modelos dados y cada archivo de estos representa un reporte en el tiempo de simulación entonces habrá tantos puntos en una grafica temporal del FLEXPDE como tanos archivos hayan. El límite para número de archivos por tipo de archivo es 999.
- El numero de líneas por archivo, cada archivo tiene 40006 líneas en los datos dados, este dato se puede obtener observado la barra de estado del editor de texto en la ultima línea del archivo.
- Coordenada x del pozo lugar mas cercano al pozo de análisis en la dirección x.
- Coordenada y del pozo lugar mas cercano al pozo de análisis en la dirección y.

## Datos de Salida

Las Salidas para el PROCESADOR.exe son los datos de la variable en la locación digitada y su dato promedio en el tiempo.

SALIDA01 = PRESION

SALIDA02 = V.AGUA

SALIDA03 = V. ACEITE

SALIDA04 = F. FRACCIONAL

SALIDA05 = P. PROMEDIO

SALIDA06 = PROD. ACUMULADA

## Requerimientos para la Ejecución de la Aplicación

Los requerimientos del PROCESADOR.exe son:

- En la dirección de raíz donde este el ejecutable deben estar los archivos a procesar.
- Corra siempre las simulaciones con el nombre black\_oil.pde, así todos los archivo exportados serán black\_oil\_‘tipo de archivo’\_‘numero de archivo’, así lo requiere el programa.
- En la dirección de raíz donde se encuentra el ejecutable debe estar los archivos NUMERACION1 y, NUMERACION2, estos archivos son requeridos por el programa para enumerar los archivos y por lo tanto no pueden ser modificados.

## **.1.2. ERROR.exe**

Esta aplicación surgió de la necesidad de calcular el error relativo. Los archivos FLEXPDE tiene 91 datos en el tiempo, mientras que el WINBOAST un numero que varia y que siempre es diferente y mucho mayor de 91, entonces lo que hace el programa es tomar los 91 datos (SI el ARCHIVO FLEXPDE TIENE 91 datos) del archivo WINBOAST que mas se acerquen a estos 91 datos del archivo FLEXPDE, así tenemos el mismo numero de datos para WINBOAST y para FLEXPDE.

### **Datos de Entrada**

Las entradas para ERROR.exe son:

- Archivo WINBOAST
- Archivo FLEXPDE
- Numero de datos del archivo WINBOAST
- Numero de datos del archivo FLEXPDE

Los archivos deben estar escritos a dos columnas con punto como separador de decimales, donde la primera columna es el tiempo y la segunda la variable a analizar.

### **Datos de Salida**

Las salidas de esta aplicación son: ERROR, archivo donde se imprimen en cuatro columnas, el tiempo del FLEXPDE, el datum WINBOAST más cercano o correspon-

diente a ese tiempo, el datum FLEXPDE correspondiente y por ultimo el error relativo porcentual al WINBOAST.

## .2 Códigos Auxiliares

### .2.1. PROCESADOR.exe

```

PROGRAM ORDENAMIENTO

INTEGER::NUMTIPOS, I, CONTPAR, ARCH, NUMARCHIVOS, lineas, NUMLIN, TIP
REAL, ALLOCATABLE::ECL(:), DAT(:, :)
REAL ESPAR1, ESPA, CONTFILAS, E, J, T, VALOR, X, Y, SUM
CHARACTER, ALLOCATABLE::AR(:, :)
CHARACTER NOM*30

WRITE(*,*) 'PROCESADOR DE DATOS FLEXPDE'
WRITE(*,*) ' '

      WRITE(*,*) 'ENTRE EL NUMERO DE TIPOS DE ARCHIVOS'
READ(*,*) NUMTIPOS
WRITE(*,*) ' '
      WRITE(*,*) 'ENTRE EL NUMERO DE ARCHIVOS POR TIPO DE ARCHIVO'
READ(*,*) NUMARCHIVOS
WRITE(*,*) ' '
WRITE(*,*) 'ENTRE EL NUMERO DE LINEAS POR ARCHIVO'
WRITE(*,*) 'VER BARRA DE ESTADO DEL EDITOR EN LA UTLIMA LINEA'
READ(*,*) NUMLIN
NUMLIN = NUMLIN - 6
WRITE(*,*) ' '
WRITE(*,*) 'ENTRE LA CORDENADA X DEL POZO'
READ(*,*) X
WRITE(*,*) ' '
WRITE(*,*) 'ENTRE LA CORDENADA Y DEL POZO'
READ(*,*) Y
WRITE(*,*) ' '

```

```
ALLOCATE (AR (NUMLIN, 150))

TIP = 10000

DO

CALL ARCHIVO1 (TIP, NUM, NOM)
OPEN (UNIT=TIP, ACTION='WRITE', FILE=NOM, STATUS='REPLACE')

WRITE(TIP, *) 'DATOS PROCESADOS UNIDADES DEL SISTEMA : S.I.'
WRITE(TIP, *) '      TIEMPO X Y      DATUM      DATUM PROMEDIO'

ARCH = 1
DO I = 1, NUMARCHIVOS
T = 0
SUM = 0
VALOR = 0
NUM = ARCH
CALL ARCHIVO (TIP, NUM, NOM)
CALL DATOS (NUM, NOM, T, X, Y, VALOR, SUM, NUMLIN)
WRITE(TIP, *) T, X, Y, VALOR, SUM
IF (ARCH == NUMARCHIVOS) THEN
GOTO 107
END IF
ARCH = ARCH + 1
END DO

107 CLOSE (TIP)

IF (TIP == NUMTIPOS*10000) THEN
GOTO 108
END IF

TIP = TIP + 10000

END DO

108 WRITE(*, *) ' '
WRITE(*, *) 'FIN DEL PROCESAMIENTO'
```

```

END PROGRAM

SUBROUTINE DATOS (NUM, NO, T, X, Y, VALOR, SUM, NUMLIN)

INTEGER CONT, NUM, I , POS, NUMLIN
CHARACTER NO*20
CHARACTER (LEN=250) LINEA
REAL VALOR, T, X, Y, SUM, XERR, YERR, XPERR, YPERR, RVEH
REAL, ALLOCATABLE::DAT(:, :)
ALLOCATE (DAT(4, NUMLIN))
OPEN (UNIT=NUM, FILE=NO, STATUS='OLD')
POS = 0
CONT = 0
DO
    READ ( NUM, *) LINEA
    CONT = CONT + 1
    IF (CONT >= 6) THEN
        DO I=1, NUMLIN
            READ (NUM, *) DAT(1, I), DAT(2, I), DAT(3, I), DAT(4, I)
        END DO
        GOTO 100
    END IF
END DO
100 CLOSE (NUM)

SUM = 0
DO I = 1 , NUMLIN
    SUM = SUM + DAT(4, i)
END DO

SUM = SUM/NUMLIN
T= DAT(1,1)

DO I = 1, NUMLIN

    IF (DAT(3, I)/Y >= 1) THEN
        YPERR = ABS((DAT(3, I) - 1) - Y) / (Y)
        YERR = ABS((DAT(3, I) - Y) / (Y))
        IF (YERR <= YPERR) THEN
            Y = DAT(3, I)
        END IF
    END IF
END DO

```

```

GOTO 106
END IF
Y = DAT(3,I - 1)
GOTO 106
END IF
END DO

106 DO I = 1, NUMLIN
RVEH = DAT(3,I)/Y
IF (DAT(3,I)/Y == 1) THEN
IF (DAT(2,I)/X >= 1) THEN
RVEH = DAT(2,I)/X
XPERR = ABS((DAT(3,I - 1) - X)/(X))
XERR = ABS((DAT(3,I) - X)/(X))
IF (XERR <= XPERR) THEN
X = DAT(2,I)
POS = I
GOTO 105
END IF
X = DAT(2,I - 1)
POS = I
GOTO 105
END IF
END IF

END DO

105 VALOR = DAT(4,POS)

END SUBROUTINE DATOS

SUBROUTINE ARCHIVO (TIP,ARCH,NOM)

INTEGER::ARCH, I, DEC, TIP
CHARACTER NOM*30, PART*10, PART2*2, PART3*1
CHARACTER PART41*1, PART42*2, PART43*3, PART5*4
PART = 'black_oil_'
PART5 = '.tbl'
PART3 = '_'
DEC = 10000

```

```

I = 10000
DO
OPEN (UNIT=3000,FILE='NUMERACION2.dat',STATUS='OLD')
IF (TIP < DEC*100) THEN
READ (3000,*) PART2
END IF
IF (I == TIP) THEN
GOTO 109
END IF
I = I + 10000
END DO
109 CLOSE (3000)

```

```

I = 1
DEC = 1
DO
OPEN (UNIT=2000,FILE='NUMERACION1.dat',STATUS='OLD')
IF (ARCH < DEC*10) THEN
READ (2000,*) PART41
NOM = PART//PART2//PART3//PART41//PART5
ELSEIF ( ARCH >= DEC*10 .AND. ARCH < DEC*100) THEN
READ (2000,*) PART42
NOM = PART//PART2//PART3//PART42//PART5
ELSEIF ( ARCH >= DEC*100 .AND. ARCH < DEC*1000) THEN
READ (2000,*) PART43
NOM = PART//PART2//PART3//PART43//PART5
END IF
IF (I == ARCH) THEN
GOTO 103
END IF
I = I + 1
END DO
103 CLOSE (2000)

```

END SUBROUTINE ARCHIVO

SUBROUTINE ARCHIVO1 (TIP,ARCH,NOM)

```

INTEGER::ARCH, I, DEC, TIP
CHARACTER NOM*30, PART*6, PART2*2, PART3*4

```

```

PART = 'SALIDA'
PART3 = '.dat'
DEC = 10000

I = 10000
DO
OPEN (UNIT=3000, FILE='NUMERACION2.dat', STATUS='OLD')
IF (TIP <= DEC*100) THEN
READ (3000, *) PART2
END IF
IF (I == TIP) THEN
GOTO 109
END IF
I = I + 10000
END DO
109 CLOSE (3000)

NOM = PART//PART2//PART3

END SUBROUTINE ARCHIVO1

```

## .2.2. ERROR.exe

```

PROGRAM ERROR

INTEGER::NBOAST, I, J, NFLEX
REAL, ALLOCATABLE::FLEX(:, :), BOAST(:, :)
REAL COMP, ERR, ERRA, ERRANT, ERRACT, REV

WRITE(*, *) 'PROCESADOR DE DATOS PARA EL ERROR RELATIVO'
WRITE(*, *) ' '
      WRITE(*, *) 'ENTRE EL NUMERO DE DATOS DEL ARCHIVO WINBOAST'
READ(*, *) NBOAST
WRITE(*, *) ' '
      WRITE(*, *) 'ENTRE EL NUMERO DE DATOS DEL ARCHIVO FLEXPDE'
READ(*, *) NFLEX
WRITE(*, *) ' '

```

```

ALLOCATE (BOAST (2,NBOAST), FLEX (2,NFLEX))

OPEN (UNIT=1,ACTION=' READ', FILE=' WINBOAST.dat', STATUS=' OLD')
OPEN (UNIT=2,ACTION=' READ', FILE=' FLEXPDE.dat', STATUS=' OLD')
READ (1,*) BOAST
READ (2,*) FLEX
CLOSE (1)
CLOSE (2)
OPEN (UNIT=3,ACTION=' WRITE', FILE=' ERROR.dat', STATUS=' REPLACE')
WRITE (3,*) ' TIEMPO ERROR RELATIVO PORCENTUAL'
DO I = 1, NFLEX
COMP = FLEX (1, I)
DO J = 1, NBOAST
REV = BOAST (1, J) / COMP
IF (REV >= 1) THEN
IF (COMP - BOAST (1, J) == 0) THEN
ERR = 100 * ABS ((FLEX (2, I) - BOAST (2, J)) / (BOAST (2, J)))
WRITE (3,*) FLEX (1, I), ERR
GOTO 100
END IF
ERR = 100 * ABS ((FLEX (2, I) - BOAST (2, J)) / (BOAST (2, J)))
ERRA = 100 * ABS ((FLEX (2, I) - BOAST (2, J - 1)) / (BOAST (2, J - 1)))
ERRACT = ABS ((COMP - BOAST (1, J)) / (COMP))
ERRANT = ABS ((COMP - BOAST (1, J - 1)) / (COMP))
IF (ERRACT <= ERRANT) THEN
WRITE (3,*) FLEX (1, I), ERR
GOTO 100
END IF
WRITE (3,*) FLEX (1, I), ERR
GOTO 100
END IF
END DO
100 END DO
CLOSE (3)
WRITE (*,*) ' '
WRITE (*,*) ' FIN DEL PROCESAMIENTO'

END PROGRAM

```

## .3 Códigos de WinBoast y FlexPDE

### .3.1. Modelo 1

#### Caso 1 WinBOAST

```
SINGLE WELL PRIMARY DEPLETION OF AN UNDERSATURATED RESERVOIR
MODEL DATA
30 30 1 3 3 30 10 10
GRID BLOCK LENGTHS
-1 -1 -1 -1
40
40
100
100
GRID BLOCK LENGTH MODIFICATIONS
5*0
DEPTH TO TOP OF SAND
0
8345.
MODULI AND ROCK DENSITY
-1 -1 -1 -1
3E6
3E6
3E6
168
MODULI AND ROCK DENSITY MODIFICATIONS
0 0 0 0 0
POROSITY AND PERMEABILITY DISTRIBUTIONS
-1 -1 -1 -1
0.206
300.
300.
300.
POROSITY AND PERMEABILITY MODIFICATIONS
0 0 0 0 0
TRANSMISSIBILITY MODIFICATIONS
```

```

4*0
ROCK PVT
1 1
  SAT    KRO KRW KRG KROG PCOW PCGO
0 0 0 4*0
0.090909 0.0082645 0.0082645 4*0
0.181818 0.033057785 0.033058149 4*0
0.272727 0.074380017 0.074380562 4*0
0.363636 0.13223114 0.132231868 4*0
0.454545 0.206611157 0.206612066 4*0
0.545454 0.297520066 0.297521157 4*0
0.636363 0.404957868 0.40495914 4*0
0.727272 0.528924562 0.528926017 4*0
0.818181 0.669420149 0.669421785 4*0
0.90909 0.826444628 0.826446446 4*0
1 1 1 4*0
ITHREE SWR(IRR)
0 0.00
  PBO    PBODAT    PBGRAD
14.7,  9200.0,    0.0
  VSLOPE    BSLOPE    RSLOPE    PMAX  REPRS
.000046,  -.000023,    0.0,    6014.7,  0
OIL:    P        MUO        BO        RSO
  14.7,    9.6000,    1.0000,    0.0
  514.7,    9.6000,    1.0000,    0.0
 1014.7,    9.6000,    1.0000,    0.0
 1514.7,    9.6000,    1.0000,    0.0
 2014.7,    9.6000,    1.0000,    0.0
 2514.7,    9.6000,    1.0000,    0.0
 3014.7,    9.6000,    1.0000,    0.0
 4014.7,    9.6000,    1.0000,    0.0
 5014.7,    9.6000,    1.0000,    0.0
 6014.7,    9.6000,    1.0000,    0.0
WATER:  P        MUW        BW        RSW
  14.7,    1.0000,    1.0000,    0.0
  514.7,    1.0000,    1.0000,    0.0
 1014.7,    1.0000,    1.0000,    0.0
 1514.7,    1.0000,    1.0000,    0.0
 2014.7,    1.0000,    1.0000,    0.0
 2514.7,    1.0000,    1.0000,    0.0
 3014.7,    1.0000,    1.0000,    0.0

```

4014.7, 1.0000, 1.0000, 0.0  
 5014.7, 1.0000, 1.0000, 0.0  
 6014.7, 1.0000, 1.0000, 0.0

GAS AND ROCK PROPERTIES

0  
 P MUG BG PSI CR  
 14.7, 0.008000, 1.000000, 0.0, 0.000003  
 514.7, 0.008000, 1.000000, 0.0, 0.000003  
 1014.7, 0.008000, 1.000000, 0.0, 0.000003  
 1514.7, 0.008000, 1.000000, 0.0, 0.000003  
 2014.7, 0.008000, 1.000000, 0.0, 0.000003  
 2514.7, 0.008000, 1.000000, 0.0, 0.000003  
 3014.7, 0.008000, 1.000000, 0.0, 0.000003  
 4014.7, 0.008000, 1.000000, 0.0, 0.000003  
 5014.7, 0.008000, 1.000000, 0.0, 0.000003  
 6014.7, 0.008000, 1.000000, 0.0, 0.000003  
 RHOSCO RHOSCW RHOSCG  
 46.244, 62.238, 0.0647

EQUILIBRIUM PRESSURE INITIALIZATION/CONSTANT SATURATION INITIALIZATION

1 1 8300. 0.  
 3483 8925. 0. 8100.  
 1.0 0. 0.0  
 NMAX FACT1 FACT2 TMAX WORMAX GORMAX PAMIN PAMAX  
 200000 1.05 .01 3600. 20. 500000. 150. 9014.

KSOL MITR OMEGA TOL TOL1 DSMAX DPMAX NUMDIS  
 2 250 1.02 .01 0.01 .009 1. 1

AQUIFER DATA

0  
 RECURRENT DATA  
 DATA SET 1  
 1 40  
 90 180 270 360 450 540 630 720 810 900 990 1080 1170 1260 1350 1440 1530 1620 1710 1800 1890 1980  
 2070 2160 2250 2340 2430 2520 2610 2700 2790 2880 2970 3060 3150 3240 3330 3420 3510 3600  
 2 2 0 0 0 0  
 0 0 0 0 0  
 5. 1. 15.

WELL P-1 PRODUCING AT 300 BOPD

2 0  
 ---NEW WELLS---  
 P-1  
 1 1

```

30 30 1 4.1 600.0
-1 0. 0. 0. 0.
I-1
2 1
1 1 1 4.1 4000.00
-2 0. 0. 0. 0.

```

## Caso 1 FlexPDE

TITLE 'MODELO 2D AREAL ACEITE NEGRO'

COORDINATES

CARTESIAN2 {SISTEMA 2D CORDENADAS CARTESIANAS}

SELECT

SMOOTHINIT {SUAVIZA LAS CONDICIONES INICIALES}

PREFER\_STABILITY {ESTABILIDAD DE LA SOLUCION}

NOTIFY\_DONE = ON {NOTIFICA AL USUARIO CUANDO EL PROCESOS HA TERMINADO}

ERRLIM = 1E-2 {LIMITE DEL ERROR ESPACIAL DE LAS VARIABLES EN CUESTION}

NODELIMIT = 800 {LIMITE DE NODOS}

UPWIND = OFF

FIRSTPARTS

NRUPDATE = 1 {NUMERO DE ITERACIONES PARA EL METODO DE NEWTON-RAPHSON}

VARIABLES

S, P { SATURACION DE AGUA Y PRESION }

DEFINITIONS

{CONVERSIONES INGLES - S.I.}

DEN = 1.6019E1

VISC = 1.0000E-3

PRE = 6.8950E3

PER = 9.8692E-16

FT = 3.0480E-1

CAU = 1.8400E-6

{PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS}

MUO = (9.6)\*VISC {VISCOSIDAD DEL ACEITE}

MUW = (1)\*VISC {VISCOSIDAD DEL AGUA}

{PROPIEDADES DE LA ROCA}

PHI =0.206 {POROSIDAD DEL MEDIO}

KABSOLUTA = (300)\*PER {PERMEABILIDAD ABSOLUTA - 300 md}

K = KABSOLUTA

KROSWC = 1 {MODELO DE PERMEABILIDAD RELATIVA SISTEMA AGUA - ACEITE}

KRWSORW = 1

SWC = 0

SORW = 0

NW = 2

NO = 2

KRO = KROSWC\*(((1 - S - SORW)/(1 - SWC - SORW))^(NO))

KRW = KRWSORW\*(((S - SWC)/(1 - SWC - SORW))^(NW))

{MOBILIDADES}

MW = KRW/MUW {MOBILIDAD DEL AGUA}

MO = KRO/MUO {MOBILIDAD DEL ACEITE}

M = MO + MW {MOBILIDAD TOTAL}

F = ((1)/((1)+((KRO/KRW)\*(MUW/MUO))))

{FLUJO FRACCIONAL DEL AGUA A CONDICIONES DE YACIMIENTO}

{DIMENSIONES DEL MODELO}

XMAX = (1200)\*FT {ESPACIADO ENTRE POZOS 422 FT}

YMAX = (1200)\*FT {ESPESOR TOTAL MAXIMA 50 FT}

ZMAX = (95)\*FT {PROYECION 500 FT}

{RESTRICCIONES DE LOS POZOS}

AREA = INTEGRAL(1)

PRODUCCION = INTEGRAL(S)/T

PPROM = INTEGRAL(P)/AREA

PIN = (3640)\*PRE {PRESION DE INYECCION - 3800 psia}

POUT = (2860)\*PRE {PRESION DE PRODUCCION - 2500 psia}

CAN = (40)\*FT {ZONA DE CONDICION}

RAD = CAN/5 {ZONA DE CONDICION}

EPSVISC = 1.E-6 {COEFICIENTE DE DIFUSION

ARTIFICIAL SUAVIZA LA SOLUCION}

PRODUCCION1 = INTEGRAL(S)

VA = -K\*MW\*DX(P)

VO = -K\*MO\*DX(P)

HORA = 60\*60

DIA = HORA\*24

PFONDO = (3298)\*PRE {PRESION DE FONDO}

PO = PFONDO {FUERTE APROXIMACION A LA DISTRIBUCION DE PRESION}

INITIAL VALUES

S = 0.0001 {EL MODELO ESTA SATURADO TOTALMENTE CON ACEITE}

P = PO {EMPEZAMOS CON UNA FUERTE APROXIMACION A LA DISTRIBUCION DE PRESION}

EQUATIONS

S: PHI\*DT(S) - DIV(K\*MW\*GRAD(P))

- EPSVISC\*DIV(GRAD(S)) = 0 {EDP DE LA SATURACION}

P: DIV(K\*M\*GRAD(P)) = 0 {EDP DE LA PRESION}

{DEFINICION DEL MODELO Y POCIONAMIENTO DE LOS POZOS}

BOUNDARIES

REGION 1

```

        START (0, YMAX)
        NATURAL (P)=0 NATURAL (S) = 0
        LINE TO (0, YMAX-RAD) FILLET (RAD/2)
LINE TO (-RAD, YMAX-RAD)
        VALUE (P) = PIN    VALUE (S) =1
LINE TO (-RAD, YMAX-RAD - 2*CAN)
        NATURAL (P)=0 NATURAL (S) = 0
LINE TO (0, YMAX-RAD - 2*CAN) FILLET (RAD/2)
LINE TO (0, 0) TO (XMAX, 0) TO (XMAX, RAD) FILLET (RAD/2)
LINE TO (XMAX + RAD, RAD)
        VALUE (P) = POUT    NATURAL (S) = -K*MW*DX (P)
LINE TO (XMAX + RAD, RAD + 2*CAN)
        NATURAL (P)=0 NATURAL (S) = 0
LINE TO (XMAX , RAD + 2*CAN) FILLET (RAD/2)
LINE TO (XMAX, YMAX)
TO CLOSE

```

TIME 0 TO 3600\*DIA BY 0.005 {TIEMPO MAXIMO DE SIMULACION}

MONITORS {CONTROLES PARA EL MONITOREO DE LA SOLUCION}

FOR CYCLE=2

```

CONTOUR (S) AS "SATURAICON" RANGE (0, 1)
CONTOUR (S) ZOOM (XMAX-XMAX/4, 0, XMAX/4, XMAX/4) AS "SATURACION"
RANGE (0, 1)
CONTOUR (P/PRE) AS "PRESION"

```

PLOTS {CONTROLES PARA LA SLAIDA GRAFICA Y TABLAS}

FOR T = 1\*DIA BY 40\*DIA TO 3600\*DIA

```

TABLE (P/PRE) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200, 200)
TABLE (VA) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200, 200)
TABLE (VO) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200, 200)
TABLE (F) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200, 200)

```

```

TABLE (PPROM/PRE) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
TABLE (PRODUCCION1) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
GRID (X,Y)
CONTOUR (S) AS "SATURACION" RANGE(0,1) PAINTED

CONTOUR (S) ZOOM (XMAX-XMAX/4,0,XMAX/4,XMAX/4)
                AS "SATURACION" RANGE(0,1) PAINTED
CONTOUR (P/PRE) AS "PRESION" PAINTED

HISTORIES {HISTORIA DE LAS VARIABLES DESEADAS}

HISTORY (PPROM/PRE) AS "PPROM"
HISTORY (PRODUCCION) AS "PRODUCCION"
HISTORY (PRODUCCION1) AS "PRODUCCION1"

HISTORY (VA) AS "VEL. DEL AGUA VA"
HISTORY (VO) AS "VEL. DEL ACITE VO"
HISTORY (P/PRE) AS "PRESION"
HISTORY (F) AT (XMAX, RAD + CAN) AS "F. FRAC."

END {FIN DEL SCRIPT}

```

## Caso 2 WinBOAST

```

{}
        SINGLE WELL PRIMARY DEPLETION OF AN UNDERSATURATED RESERVOIR
MODEL DATA
30 30 1 3 3 30 10 10
GRID BLOCK LENGTHS
-1 -1 -1 -1
40
40
100
100
GRID BLOCK LENGTH MODIFICATIONS
5*0

```

DEPTH TO TOP OF SAND

0  
8345.

MODULI AND ROCK DENSITY

-1 -1 -1 -1  
3E6  
3E6  
3E6  
168

MODULI AND ROCK DENSITY MODIFICATIONS

0 0 0 0 0

POROSITY AND PERMEABILITY DISTRIBUTIONS

-1 -1 -1 -1  
0.206  
300.  
300.  
300.

POROSITY AND PERMEABILITY MODIFICATIONS

0 0 0 0 0

TRANSMISSIBILITY MODIFICATIONS

4\*0

ROCK PVT

1 1

SAT KRO KRW KRG KROG PCOW PCGO

0 0 0 4\*0  
0.090909 0.006611702 4.09806E-05 4\*0  
0.181818 0.026446519 0.00065569 4\*0  
0.272727 0.05950445 0.003319432 4\*0  
0.363636 0.105785494 0.010491045 4\*0  
0.454545 0.165289653 0.025612902 4\*0  
0.545454 0.238016926 0.053110914 4\*0  
0.636363 0.323967312 0.098394525 4\*0  
0.727272 0.423140813 0.167856715 4\*0  
0.818181 0.535537428 0.268874001 4\*0  
0.90909 0.661157157 0.409806434 4\*0  
1 0.8 0.6 4\*0

ITHREE SWR(IRR)

0 0.00

PBO PBODAT PBGRAD

14.7, 9200.0, 0.0

VSLOPE BSLOPE RSLOPE PMAX REPRS

.000046, -.000023, 0.0, 6014.7, 0

OIL:	P	MUO	BO	RSO
	14.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
	514.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
	1014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
	1514.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
	2014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
	2514.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
	3014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
	4014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
	5014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
	6014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0

WATER:	P	MUW	BW	RSW
	14.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
	514.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
	1014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
	1514.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
	2014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
	2514.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
	3014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
	4014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
	5014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
	6014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0

GAS AND ROCK PROPERTIES

0

	P	MUG	BG	PSI	CR
	14.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
	514.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
	1014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
	1514.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
	2014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
	2514.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
	3014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
	4014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
	5014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
	6014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
	RHOSCO	RHOSCW	RHOSCG		
	46.244,	62.238,	0.0647		

EQUILIBRIUM PRESSURE INITIALIZATION/CONSTANT SATURATION INITIALIZATION

1 1 8300. 0.

3483 8925. 0. 8100.

```

1.0 0. 0.0
NMAX FACT1 FACT2 TMAX WORMAX GORMAX PAMIN PAMAX
200000 1.05 .01 3600. 20. 500000. 150. 9014.
KSOL MITR OMEGA TOL TOL1 DSMAX DPMAX NUMDIS
2 250 1.02 .01 0.01 .009 1. 1
AQUIFER DATA
0
RECURRENT DATA
DATA SET 1
1 40
90 180 270 360 450 540 630 720 810 900 990 1080 1170 1260 1350 1440 1530 1620 1710 1800 1890 1980
2070 2160 2250 2340
2430 2520 2610 2700 2790 2880 2970 3060 3150 3240 3330 3420 3510 3600
2 2 0 0 0 0
0 0 0 0 0
5. 1. 15.
WELL P-1 PRODUCING AT 300 BOPD
2 0
---NEW WELLS---
P-1
1 1
30 30 1 4.1 600.0
-1 0. 0. 0. 0.
I-1
2 1
1 1 1 4.1 4000.00
-2 0. 0. 0. 0.

```

## Caso 2 FlexPDE

TITLE 'MODELO 2D AREAL ACEITE NEGRO'

COORDINATES

CARTESIAN2 {SISTEMA 2D CORDENADAS CARTESIANAS}

SELECT

```

SMOOTHINIT {SUAVIZA LAS CONDICIONES INICIALES}
PREFER_STABILITY {ESTABILIDAD DE LA SOLUCION}
NOTIFY_DONE = ON {NOTIFICA AL USUARIO CUANDO EL PROCESOS HA TERMINADO}
ERRLIM = 1E-2 {LIMITE DEL ERROR ESPACIAL DE LAS VARIABLES EN CUESTION}
NODELIMIT = 800 {LIMITE DE NODOS}
UPWIND = OFF
FIRSTPARTS
NRUPDATE = 1 {NUMERO DE ITERACIONES PARA EL METODO DE NEWTON-RAPHSON}

VARIABLES

S, P { SATURACION DE AGUA Y PRESION }

DEFINITIONS

{CONVERSIONES INGLES - S.I.}

DEN = 1.6019E1
VISC = 1.0000E-3
PRE = 6.8950E3
PER = 9.8692E-16
FT = 3.0480E-1
CAU = 1.8400E-6

{PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS}

MUO = (9.6)*VISC {VISCOSIDAD DEL ACEITE}
MUW = (1)*VISC {VISCOSIDAD DEL AGUA}

{PROPIEDADES DE LA ROCA}

PHI =0.206 {POROSIDAD DEL MEDIO}
KABSOLUTA = (300)*PER {PERMEABILIDAD ABSOLUTA - 300 md}
K = KABSOLUTA

KROSWC = 0.8 {MODELO DE PARMEABILIDAD RELATIVA SISTEMA AGUA - ACEITE}
KRWSORW = 0.6
SWC = 0
SORW = 0
NW = 4

```

---

```

NO = 2
KRO = KROSWC*((1 - S - SORW)/(1 - SWC - SORW))^(NO)
KRW = KRWSORW*((S - SWC)/(1 - SWC - SORW))^(NW)

{MOBILIDADES}

MW = KRW/MUW {MOBILIDAD DEL AGUA}
MO = KRO/MUO {MOBILIDAD DEL ACEITE}
M = MO + MW {MOBILIDAD TOTAL}
F = ((1)/((1)+((KRO/KRW)*(MUW/MUO))))
      {FLUJO FRACCIONAL DEL AGUA A CONDICIONES DE YACIMIENTO}

{DIMENSIONES DEL MODELO}

XMAX = (1200)*FT {ESPACIADO ENTRE POZOS 422 FT}
YMAX = (1200)*FT {ESPESOR TOTAL MAXIMA 50 FT}
ZMAX = (95)*FT {PROYECION 500 FT}

{RESTRICCIONES DE LOS POZOS}

AREA = INTEGRAL(1)
PRODUCCION = INTEGRAL(S)/T

PPROM = INTEGRAL(P)/AREA
PIN = (3640)*PRE {PRESION DE INYECCION - 3800 psia}
POUT = (2860)*PRE {PRESION DE PRODUCCION - 2500 psia}

CAN = (40)*FT {ZONA DE CONDICION}
RAD = CAN/5 {ZONA DE CONDICION}

EPSVISC = 1.E-6 {COEFICIENTE DE DIFUSION ARTIFICIAL
                  SUAVIZA LA SOLUCION}

PRODUCCION1 = INTEGRAL(S)

VA = -K*MW*DX(P)
VO = -K*MO*DX(P)

```

```

HORA = 60*60
DIA = HORA*24

PFONDO = (3298)*PRE {PRESION DE FONDO}
PO = PFONDO {FUERTE APROXIMACION A LA DISTRIBUCION DE PRESION}

INITIAL VALUES

S = 0.0001 {EL MODELO ESTA SATURADO TOTALMENTE CON ACEITE}
P = PO {EMPEZAMOS CON UNA FUERTE APROXIMACION A LA
DISTRIBUCION DE PRESION}

EQUATIONS

S: PHI*DT(S) - DIV(K*MW*GRAD(P))
- EPSVISC*DIV(GRAD(S)) = 0 {EDP DE LA SATURACION}
P: DIV(K*M*GRAD(P)) = 0 {EDP DE LA PRESION}

{DEFINICION DEL MODELO Y POCICIONAMIENTO DE LOS POZOS}

BOUNDARIES
REGION 1

START(0,YMAX)
NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (0,YMAX-RAD) FILLET(RAD/2)
LINE TO (-RAD,YMAX-RAD)
VALUE(P) = PIN VALUE(S) =1
LINE TO (-RAD,YMAX-RAD - 2*CAN)
NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (0,YMAX-RAD - 2*CAN) FILLET(RAD/2)
LINE TO (0,0) TO (XMAX,0) TO (XMAX,RAD) FILLET(RAD/2)
LINE TO (XMAX + RAD, RAD)
VALUE(P) = POUT NATURAL(S) = -K*MW*DX(P)
LINE TO (XMAX + RAD, RAD + 2*CAN)
NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (XMAX , RAD + 2*CAN) FILLET(RAD/2)
LINE TO (XMAX, YMAX)
TO CLOSE

```

TIME 0 TO 3600\*DIA BY 0.005 {TIEMPO MAXIMO DE SIMULACION}

MONITORS {CONTROLES PARA EL MONITOREO DE LA SOLUCION}

FOR CYCLE=2

CONTOUR(S) AS "SATURAICON" RANGE(0,1)

CONTOUR(S) ZOOM (XMAX-XMAX/4,0,XMAX/4,XMAX/4)

AS "SATURACION" RANGE(0,1)

CONTOUR(P/PRE) AS "PRESION"

PLOTS {CONTROLES PARA LA SLAIDA GRAFICA Y TABLAS}

FOR T = 1\*DIA BY 40\*DIA TO 3600\*DIA

TABLE(P/PRE) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)

TABLE(VA) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)

TABLE(VO) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)

TABLE(F) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)

TABLE(PPROM/PRE) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)

TABLE(PRODUCCION1) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)

GRID(X,Y) CONTOUR(S)

AS "SATURACION" RANGE(0,1) PAINTED

CONTOUR(S) ZOOM (XMAX-XMAX/4,0,XMAX/4,XMAX/4)

AS "SATURACION" RANGE(0,1) PAINTED

CONTOUR(P/PRE) AS "PRESION" PAINTED

HISTORIES {HISTORIA DE LAS VARIABLES DESEADAS}

HISTORY(PPROM/PRE) AS "PPROM"

HISTORY(PRODUCCION) AS "PRODUCCION"

HISTORY(PRODUCCION1) AS "PRODUCCION1"

HISTORY(VA) AS "VEL. DEL AGUA VA"

HISTORY(VO) AS "VEL. DEL ACITE VO"

HISTORY(P/PRE) AS "PRESION"

HISTORY(F) AT (XMAX, RAD + CAN) AS "F. FRAC."

END {FIN DEL SCRIPT}

## .3.2. Modelo 2

### Caso 1 WinBOAST

WATERFLOOD DISPLACEMENT WITH MULTI-ZONE COMPLETION

MODEL DATA

50 1 20 3 3 30 10 10

GRID BLOCK LENGTHS

-1 -1 -1 -1

30

700

7.5

7.5

GRID BLOCK LENGTH MODIFICATIONS

5\*0

CAPROCK BASE DEPTHS

0

8325.

MODULI AND ROCK DENSITY

-1 -1 -1 -1

3E6

3E6

3E6

168

MODULI AND ROCK DENSITY MODIFICATIONS

0 0 0 0 0

POROSITY AND PERMEABILITY

-1 -1 -1 -1

.206

300.

300.

```

300.
POROSITY AND PERMEABILITY MODIFICATIONS
0 0 0 0 0
TRANSMISSIBILITY MODIFICATIONS
4*0
ROCK PVT
1 1
  SAT      KRO KRW KRG KROG PCOW PCGO
0 0 0 4*0
0.090909 0.0082645 0.0082645 4*0
0.181818 0.033057785 0.033058149 4*0
0.272727 0.074380017 0.074380562 4*0
0.363636 0.13223114 0.132231868 4*0
0.454545 0.206611157 0.206612066 4*0
0.545454 0.297520066 0.297521157 4*0
0.636363 0.404957868 0.40495914 4*0
0.727272 0.528924562 0.528926017 4*0
0.818181 0.669420149 0.669421785 4*0
0.90909 0.826444628 0.826446446 4*0
1 1 1 4*0
ITHREE SWR(IRR)
0 0.00
      PBO  PBODAT  PBGRAD
14.7,  9200.0,  0.0
      VSLOPE      BSLOPE      RSLOPE      PMAX  REPRS
      .000046,  -.000023,  0.0,  6014.7,  0
OIL:   P          MUO          BO          RSO
      14.7,  9.6000,  1.0000,  0.0
      514.7,  9.6000,  1.0000,  0.0
      1014.7,  9.6000,  1.0000,  0.0
      1514.7,  9.6000,  1.0000,  0.0
      2014.7,  9.6000,  1.0000,  0.0
      2514.7,  9.6000,  1.0000,  0.0
      3014.7,  9.6000,  1.0000,  0.0
      4014.7,  9.6000,  1.0000,  0.0
      5014.7,  9.6000,  1.0000,  0.0
      6014.7,  9.6000,  1.0000,  0.0
WATER: P          MUW          BW          RSW
      14.7,  1.0000,  1.0000,  0.0
      514.7,  1.0000,  1.0000,  0.0
      1014.7,  1.0000,  1.0000,  0.0

```

1514.7, 1.0000, 1.0000, 0.0  
 2014.7, 1.0000, 1.0000, 0.0  
 2514.7, 1.0000, 1.0000, 0.0  
 3014.7, 1.0000, 1.0000, 0.0  
 4014.7, 1.0000, 1.0000, 0.0  
 5014.7, 1.0000, 1.0000, 0.0  
 6014.7, 1.0000, 1.0000, 0.0

GAS AND ROCK PROPERTIES

0

P	MUG	BG	PSI	CR
14.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
514.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
1014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
1514.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
2014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
2514.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
3014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
4014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
5014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
6014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003

RHOSCO RHOSCW RHOSCG  
 49.94153, 62.42691, 0.0647

EQUILIBRIUM PRESSURE INITIALIZATION/CONSTANT SATURATIONS

1 1 8300. 0.  
 3300.0 8825. 0. 8100.  
 1.0 0. 0.0  
 NMAX FACT1 FACT2 TMAX WORMAX GORMAX PAMIN PAMAX  
 200000 1.05 .001 1800. 20. 500000. 150. 9014.  
 KSOL MITR OMEGA TOL TOL1 DSMAX DPMAX NUMDIS  
 2 2500 1.02 .0001 0.0001 .0009 0.5. 1

AQUIFER DATA

0

RECURRENT DATA

DATA SET 1

1 40  
 45 90 135 180 225 270 315 360 405 450 495 540 585 630 675 720 765 810 855 900 945 990 1035 1080  
 1125 1170 1215 1260 1305 1350 1395 1440 1485 1530 1575 1620 1665 1710 1755 1800  
 2 2 0 0 0 0  
 0 0 0 0 0  
 5. 1. 15.

RATES

```

2 0
---NEW WELLS---
PROD
1 4
  50 1 3 4.8 550
  50 1 8 4.2 700
  50 1 13 2.6 850
  50 1 18 2.0 900
  -1 0. 0. 0. 0.
INJ1
2 4
  1 1 3 3.0 3832
  1 1 8 3.4 3849
  1 1 13 3.8 3864
  1 1 18 4.0 3879
  -2 0. 0. 0. 0.

```

## Caso 1 FlexPDE

```

TITLE 'MODELO 2D VERTICAL ACEITE NEGRO'

COORDINATES

CARTESIAN2 {SISTEMA 2D CORDENADAS CARTESIANAS}

SELECT

SMOOTHINIT {SUAVIZA LAS CONDICIONES INICIALES}
PREFER_STABILITY {ESTABILIDAD DE LA SOLUCION}
NOTIFY_DONE = ON {NOTIFICA AL USUARIO CUANDO EL PROCESOS HA TERMINADO}
ERRLIM = 1E-3 {LIMITE DEL ERROR ESPACIAL DE LAS VARIABLES EN CUESTION}
NODELIMIT = 800 {LIMITE DE NODOS}
UPWIND = OFF
FIRSTPARTS
NRUPDATE = 1 {NUMERO DE ITERACIONES PARA EL METODO DE NEWTON-RAPHSON}

VARIABLES

```

S, P { SATURACION DE AGUA Y PRESION }

DEFINITIONS

{CONVERSIONES INGLES - S.I.}

DEN = 1.6019E1  
 VISC = 1.0000E-3  
 PRE = 6.8950E3  
 PER = 9.8692E-16  
 FT = 3.0480E-1  
 TIEM = 1.1574E-5

{PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS}

MUO = (9.6)\*VISC {VISCOSIDAD DEL ACEITE}  
 RHOO = (49.94153)\*DEN {DENSIDAD DEL ACEITE}  
 MUW = (1)\*VISC {VISCOSIDAD DEL AGUA}  
 RHOW = (62.42691)\*DEN {DENSIDAD DEL AGUA}

{PROPIEDADES DE LA ROCA}

RHOR = (174.79)\*DEN  
 PHI = 0.206 {POROSIDAD DEL MEDIO}  
 KABSOLUTA = (300)\*PER {PERMEABILIDAD ABSOLUTA - 300 md}  
 K = KABSOLUTA

KROSWC = 1 {MODELO DE PERMEABILIDAD RELATIVA SISTEMA AGUA - ACEITE}  
 KRWSORW = 1  
 SWC = 0  
 SORW = 0  
 NW = 2  
 NO = 2  
 $KRO = KROSWC * ((1 - S - SORW) / (1 - SWC - SORW))^{(NO)}$   
 $KRW = KRWSORW * ((S - SWC) / (1 - SWC - SORW))^{(NW)}$

{MOBILIDADES}

MW = KRW/MUW {MOBILIDAD DEL AGUA}  
 MO = KRO/MUO {MOBILIDAD DEL ACEITE}  
 M = MO + MW {MOBILIDAD TOTAL}

F = ((1)/((1)+((KRO/KRW)\*(MUW/MUO))))  
 {FLUJO FRACCIONAL DEL AGUA A CONDICIONES DE YACIMIENTO}

{EFECTOS GRAVITACIONALES}

G = 9.8 {GRAVEDAD}  
 GRADY = VECTOR(0,1)  
 GP = RHOW\*(KRW/MUW) + RHOO\*(KRO/MUO)  
 {EFECTO GRAVITACIONAL DEBIDO A LA DIFERENCIA DE DENSIDADES}

{RESTRICCIONES DE LOS POZOS}

AREA = INTEGRAL(1)  
 PRODUCCION = INTEGRAL(S)/T  
 PPROM = INTEGRAL(P)/AREA

POUT4= (2626)\*PRE {PRESION DE PRODUCCION CAÑONEO 4}  
 PIN4 = (3479)\*PRE {PRESION DE INYECCION CAÑONEO 4}  
 POUT3= (2609)\*PRE {PRESION DE PRODUCCION CAÑONEO 3}  
 PIN3 = (3464)\*PRE {PRESION DE INYECCION CAÑONEO 3}  
 POUT2= (2594)\*PRE {PRESION DE PRODUCCION CAÑONEO 2}  
 PIN2 = (3448)\*PRE {PRESION DE INYECCION CAÑONEO 2}  
 POUT1= (2580)\*PRE {PRESION DE PRODUCCION CAÑONEO 1}  
 PIN1 = (3432)\*PRE {PRESION DE INYECCION CAÑONEO 1}

{DIMENSIONES DEL MODELO}

XMAX = (1500)\*FT {ESPACIADO ENTRE POZOS 1500 FT}  
 YMAX = (150)\*FT {ESPESOR TOTAL MAXIMA 150 FT}  
 PMAX = (800)\*FT {PROYECCION 800 FT}

{ESPESORES Y TOPES DE LAS ARENAS}

ESPESOR1 = YMAX/4 {ARENA 1}  
 TOPE1 = YMAX  
 HIN1 = YMAX\*(1/8)  
 CIN1 =YMAX - HIN1

TOPE2 = YMAX - ESPESOR1 {ARENA 2}

$$\text{ESPESOR2} = \text{YMAX}/4$$

$$\text{HIN2} = \text{YMAX} * (3/8)$$

$$\text{CIN2} = \text{YMAX} - \text{HIN2}$$

$$\text{TOPE3} = \text{YMAX} - \text{ESPESOR1} - \text{ESPESOR2} \quad \{\text{ARENA 3}\}$$

$$\text{ESPESOR3} = \text{YMAX}/4$$

$$\text{HIN3} = \text{YMAX} * (5/8)$$

$$\text{CIN3} = \text{YMAX} - \text{HIN3}$$

$$\text{TOPE4} = \text{YMAX} - \text{ESPESOR1} - \text{ESPESOR2} - \text{ESPESOR3} \quad \{\text{ARENA 4}\}$$

$$\text{ESPESOR4} = \text{YMAX}/4$$

$$\text{HIN4} = \text{YMAX} * (7/8)$$

$$\text{CIN4} = \text{YMAX} - \text{HIN4}$$

$$\text{CAN} = (7.5) * \text{FT} \quad \{\text{ZONA CAÑONEADA}\}$$

$$\text{RAD} = \text{CAN}/5 \quad \{\text{RADIO DEL POZO}\}$$

$$\text{EPSVISC} = 5.E-7$$

{COEFICIENTE DE DIFUSION ARTIFICIAL SUAVIZA LA SOLUCION}

$$\text{PRODUCCION1} = \text{INTEGRAL}(S)$$

$$\text{VA} = -K * \text{MW} * \text{DX}(P)$$

$$\text{VO} = -K * \text{MO} * \text{DX}(P)$$

$$\text{HORA} = 60 * 60$$

$$\text{DIA} = \text{HORA} * 24$$

$$\text{PFONDO} = (3367) * \text{PRE} \quad \{\text{PRESION DE FONDO}\}$$

$$\text{PO} = \text{PFONDO} - (\text{RHOO} + \text{RHOR}) * G * Y$$

{FUERTE APROXIMACION A LA DISTRIBUCION DE PRESION}

INITIAL VALUES

$$S = 0 \quad \{\text{EL MODELO ESTA SATURADO TOTALMENTE CON ACEITE}\}$$

$$P = \text{PO}$$

{EMPEZAMOS CON UNA FUERTE APROXIMACION A LA DISTRIBUCION DE PRESION}

EQUATIONS

S:  $\text{PHI} \cdot \text{DT}(S) + \text{DIV}(-K \cdot \text{MW} \cdot \text{GRAD}(P) - K \cdot \text{MW} \cdot \text{RHOW} \cdot G \cdot \text{GRADY}) -$   
 $\text{EPSVISC} \cdot \text{DIV}(\text{GRAD}(S)) = 0$  {EDP DE LA SATURACION}  
P:  $\text{DIV}(-K \cdot M \cdot \text{GRAD}(P) - K \cdot \text{GP} \cdot G \cdot \text{GRADY}) = 0$  {EDP DE LA PRESION}

{DEFINICION DEL MODELO Y POCICIONAMIENTO DE LOS POZOS}

BOUNDARIES

REGION 1

START (0, YMAX)  
NATURAL (P)=0 NATURAL (S) = 0  
LINE TO (0, CIN1+ CAN)  
LINE TO (-RAD, CIN1+CAN)  
VALUE (P) = PIN1 VALUE (S) = 1  
LINE TO (-RAD, CIN1- CAN)  
NATURAL (P)=0 NATURAL (S) = 0  
LINE TO (0, CIN1- CAN)  
  
LINE TO (0, CIN2+CAN)  
LINE TO (-RAD, CIN2+CAN)  
VALUE (P) = PIN2 VALUE (S) = 1  
LINE TO (-RAD, CIN2- CAN)  
NATURAL (P)=0 NATURAL (S) = 0  
LINE TO (0, CIN2-CAN)  
  
LINE TO (0, CIN3+CAN)  
LINE TO (-RAD, CIN3+CAN)  
VALUE (P) = PIN3 VALUE (S) = 1  
LINE TO (-RAD, CIN3- CAN)  
NATURAL (P)=0 NATURAL (S) = 0  
LINE TO (0, CIN3-CAN)  
  
LINE TO (0, CIN4+CAN)  
LINE TO (-RAD, CIN4+CAN)  
VALUE (P) = PIN4 VALUE (S) = 1  
LINE TO (-RAD, CIN4- CAN)  
NATURAL (P)=0 NATURAL (S) = 0  
LINE TO (0, CIN4-CAN)  
  
LINE TO (0,0) TO (XMAX,0)

```

LINE TO (XMAX,CIN4-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN4 - CAN)
        VALUE(P) = POUT4 NATURAL(S) = VA
LINE TO (XMAX + RAD, CIN4 + CAN)
        NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (XMAX, CIN4 + CAN)

LINE TO (XMAX,CIN3-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN3 - CAN)
        VALUE(P) = POUT3 NATURAL(S) = VA
LINE TO (XMAX + RAD, CIN3 + CAN)
        NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (XMAX, CIN3 + CAN)

LINE TO (XMAX,CIN2-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN2 - CAN)
        VALUE(P) = POUT2 NATURAL(S) = VA
LINE TO (XMAX + RAD, CIN2 + CAN)
        NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (XMAX, CIN2 + CAN)

LINE TO (XMAX,CIN1-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN1 - CAN)
        VALUE(P) = POUT1 NATURAL(S) = VA
LINE TO (XMAX + RAD, CIN1 + CAN)
        NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (XMAX, CIN1 + CAN)

LINE TO (XMAX,YMAX) TO CLOSE

REGION 2 K = KABSOLUTA*(10/10) {REGION DE PERMEABILIDAD ARENA 1}

        START(0,TOPE1)
        LINE TO (0,CIN1+ CAN)
LINE TO (-RAD,CIN1+CAN)
LINE TO (-RAD,CIN1- CAN)
LINE TO (0,CIN1- CAN)
LINE TO (0,TOPE1 - ESPESOR1)
LINE TO (XMAX,TOPE1 - ESPESOR1)
LINE TO (XMAX,CIN1-CAN)

```

```

LINE TO (XMAX + RAD, CIN1 - CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN1 + CAN)
LINE TO (XMAX, CIN1 + CAN)
LINE TO (XMAX, TOPE1) LINE TO (0,TOPE1) CLOSE

```

REGION 3 K = KABSOLUTA\*(10/10) {REGION DE PERMEABILIDAD ARENA 2}

```

START(0,TOPE2)
LINE TO (0,CIN2+ CAN)
LINE TO (-RAD,CIN2+CAN)
LINE TO (-RAD,CIN2- CAN)
LINE TO (0,CIN2- CAN)
LINE TO (0,TOPE2 - ESPESOR2)
LINE TO (XMAX,TOPE2 - ESPESOR2)
LINE TO (XMAX,CIN2-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN2 - CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN2 + CAN)
LINE TO (XMAX, CIN2 + CAN)
LINE TO (XMAX, TOPE2) LINE TO (0,TOPE2) CLOSE

```

REGION 4 K = KABSOLUTA\*(10/10) {REGION DE PERMEABILIDAD ARENA 3}

```

START(0,TOPE3)
LINE TO (0,CIN3+ CAN)
LINE TO (-RAD,CIN3+CAN)
LINE TO (-RAD,CIN3- CAN)
LINE TO (0,CIN3- CAN)
LINE TO (0,TOPE3 - ESPESOR3)
LINE TO (XMAX,TOPE3 - ESPESOR3)
LINE TO (XMAX,CIN3-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN3 - CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN3 + CAN)
LINE TO (XMAX, CIN3 + CAN)
LINE TO (XMAX, TOPE3) LINE TO (0,TOPE3) CLOSE

```

REGION 5 K = KABSOLUTA\*(10/10) {REGION DE PERMEABILIDAD ARENA 4}

```

START(0,TOPE4)
LINE TO (0,CIN4+ CAN)
LINE TO (-RAD,CIN4+CAN)

```

```

LINE TO (-RAD,CIN4- CAN)
LINE TO (0,CIN4- CAN)
LINE TO (0,TOPE4 - ESPESOR4)
LINE TO (XMAX,TOPE4 - ESPESOR4)
LINE TO (XMAX,CIN4-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN4 - CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN4 + CAN)
LINE TO (XMAX, CIN4 + CAN)
LINE TO (XMAX, TOPE4) LINE TO (0,TOPE4) CLOSE

TIME 0 TO 1800*DIA BY 0.005 {TIEMPO MAXIMO DE SIMULACION}

MONITORS {CONTROLES PARA EL MONITOREO DE LA SOLUCION}

FOR CYCLE=2

CONTOUR(S) AS "SATURACION" RANGE(0,1)
CONTOUR(S) ZOOM (XMAX*(3/4),0,XMAX*(1/4),YMAX)
AS "SATURACION" RANGE(0,1)
CONTOUR(S) ZOOM (0,0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "SATURACION" RANGE(0,1)
CONTOUR(P/PRE) AS "PRESION"
CONTOUR(P/PRE) ZOOM (0,0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "PRESION"
CONTOUR(P/PRE) ZOOM (XMAX*(3/4),0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "PRESION"

PLOTS {CONTROLES PARA LA SALIDA GRAFICA Y TABLAS}

FOR T = 1*DIA BY 20*DIA TO 1800*DIA

TABLE(P/PRE) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
TABLE(VA) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
TABLE(VO) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
TABLE(F) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
TABLE(PPROM/PRE) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
TABLE(PRODUCCION1) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
GRID(X,Y) CONTOUR(S)
AS "SATURACION" RANGE(0,1) PAINTED
SURFACE(S) AS "SATURACION" RANGE(0,1) PAINTED
CONTOUR(S) ZOOM (XMAX*(3/4),0,XMAX*(1/4),YMAX)
AS "SATURACION" RANGE(0,1) PAINTED
CONTOUR(S) ZOOM (0,0,XMAX*(1/4),YMAX)
AS "SATURACION" RANGE(0,1) PAINTED

```

```

CONTOUR(VA) ZOOM (XMAX*(3/4),0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "VA" PAINTED
CONTOUR(P/PRE) AS "PRESION"
CONTOUR(P/PRE) ZOOM (0,0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "PRESION"
CONTOUR(P/PRE) ZOOM (XMAX*(3/4),0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "PRESION"
CONTOUR(P/PRE) AS "PRESION" PAINTED

```

```

HISTORIES {HISTORIA DE LAS VARIABLES DESEADAS}

```

```

HISTORY(PPROM/PRE) AS "PPROM"
HISTORY(PRODUCCION) AS "PRODUCCION"
HISTORY(PRODUCCION1) AS "PRODUCCION1"

```

```

HISTORY(VA) AT (XMAX + RAD, CIN4 + CAN/2) AS "VEL. DEL AGUA VA"
HISTORY(VO) AT (XMAX + RAD, CIN4 + CAN/2) AS "VEL. DEL ACITE VO"
HISTORY(F) AT (XMAX, CIN1) AS "F. FRAC. INTERVALO 1"
HISTORY(F) AT (XMAX, CIN2) AS "F. FRAC. INTERVALO 2"
HISTORY(F) AT (XMAX, CIN3) AS "F. FRAC. INTERVALO 3"
HISTORY(F) AT (XMAX, CIN4) AS "F. FRAC. INTERVALO 4"

```

```

END {FIN DEL SCRIPT}

```

## Caso 2 WinBOAST

```

WATERFLOOD DISPLACEMENT WITH MULTI-ZONE COMPLETION
MODEL DATA
50 1 20 3 3 30 10 10
GRID BLOCK LENGTHS
-1 -1 -1 -1
30
800
7.5
7.5
GRID BLOCK LENGTH MODIFICATIONS
5*0
CAPROCK BASE DEPTHS
0
8325.

```

MODULI AND ROCK DENSITY

-1 -1 -1 -1  
 3E6  
 3E6  
 3E6  
 168

MODULI AND ROCK DENSITY MODIFICATIONS

0 0 0 0 0

POROSITY AND PERMEABILITY

-1 0 0 0  
 .206

240 240 240 240 240 300 300 300 300 300 150 150 150 150 150 60 60 60 60 60  
 240 240 240 240 240 300 300 300 300 300 150 150 150 150 150 60 60 60 60 60  
 240 240 240 240 240 300 300 300 300 300 150 150 150 150 150 60 60 60 60 60

POROSITY AND PERMEABILITY MODIFICATIONS

0 0 0 0 0

TRANSMISSIBILITY MODIFICATIONS

4\*0

ROCK PVT

1 1

SAT KRO KRW KRG KROG PCOW PCGO

0 0 0 4\*0  
 0.090909 0.0082645 0.0082645 4\*0  
 0.181818 0.033057785 0.033058149 4\*0  
 0.272727 0.074380017 0.074380562 4\*0  
 0.363636 0.13223114 0.132231868 4\*0  
 0.454545 0.206611157 0.206612066 4\*0  
 0.545454 0.297520066 0.297521157 4\*0  
 0.636363 0.404957868 0.40495914 4\*0  
 0.727272 0.528924562 0.528926017 4\*0  
 0.818181 0.669420149 0.669421785 4\*0  
 0.90909 0.826444628 0.826446446 4\*0

1 1 1 4\*0

ITHREE SWR(IRR)

0 0.00

PBO PBODAT PBGRAD

14.7, 9200.0, 0.0

VSLOPE BSLOPE RSLOPE PMAX REPRS  
 .000046, -.000023, 0.0, 6014.7, 0

OIL: P MUO BO RSO

14.7, 9.6000, 1.0000, 0.0

514.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
1014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
1514.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
2014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
2514.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
3014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
4014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
5014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
6014.7,	9.6000,	1.0000,	0.0
WATER: P	MUW	BW	RSW
14.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
514.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
1014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
1514.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
2014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
2514.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
3014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
4014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
5014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0
6014.7,	1.0000,	1.0000,	0.0

GAS AND ROCK PROPERTIES

0

P	MUG	BG	PSI	CR
14.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
514.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
1014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
1514.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
2014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
2514.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
3014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
4014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
5014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
6014.7,	0.008000,	1.000000,	0.0,	0.000003
RHOSCO	RHOSCW	RHOSCG		
49.94153,	62.42691,	0.0647		

EQUILIBRIUM PRESSURE INITIALIZATION/CONSTANT SATURATIONS

1 1 8300. 0.

3500.0 8825. 0. 8100.

1.0 0. 0.0

NMAX FACT1 FACT2 TMAX WORMAX GORMAX PAMIN PAMAX

200000 1.05 .001 1800. 20. 500000. 150. 9014.

```

KSOL MITR OMEGA TOL TOL1 DSMAX DPMAX NUMDIS
2 2500 1.02 .0001 0.0001 .0009 0.5. 1
AQUIFER DATA
0
RECURRENT DATA
DATA SET 1
1 40
45 90 135 180 225 270 315 360 405 450 495 540 585 630 675 720 765 810 855 900 945 990 1035 1080
1125 1170 1215 1260 1305 1350 1395 1440 1485 1530 1575 1620 1665 1710 1755 1800
2 2 0 0 0 0
0 0 0 0 0
5. 1. 15.
RATES
2 0
---NEW WELLS---
PROD
1 4
50 1 3 2.25 700
50 1 8 2.15 840
50 1 13 2.80 650
50 1 18 3.05 610
-1 0. 0. 0. 0.
INJ1
2 4
1 1 3 3.6 3800
1 1 8 3.4 3790
1 1 13 3.8 3815
1 1 18 4.0 3825
-2 0. 0. 0. 0.

```

## Caso 2 FlexPDE

TITLE 'MODELO 2D VERTICAL ACEITE NEGRO'

COORDINATES

CARTESIAN2 {SISTEMA 2D CORDENADAS CARTESIANAS}

SELECT

SMOOTHINIT {SUAVIZA LAS CONDICIONES INICIALES}  
 PREFER\_STABILITY {ESTABILIDAD DE LA SOLUCION}  
 NOTIFY\_DONE = ON {NOTIFICA AL USUARIO CUANDO EL PROCESOS HA TERMINADO}  
 ERRLIM = 1E-3 {LIMITE DEL ERROR ESPACIAL DE LAS VARIABLES EN CUESTION}  
 NODELIMIT = 800 {LIMITE DE NODOS}  
 UPWIND = OFF  
 FIRSTPARTS  
 NRUPDATE = 1 {NUMERO DE ITERACIONES PARA EL METODO DE NEWTON-RAPHSON}

VARIABLES

S, P { SATURACION DE AGUA Y PRESION }

DEFINITIONS

{CONVERSIONES INGLES - S.I.}

DEN = 1.6019E1  
 VISC = 1.0000E-3  
 PRE = 6.8950E3  
 PER = 9.8692E-16  
 FT = 3.0480E-1  
 TIEM = 1.1574E-5

{PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS}

MUO = (9.6)\*VISC {VISCOSIDAD DEL ACEITE}  
 RHOO = (49.94153)\*DEN {DENSIDAD DEL ACEITE}  
 MUW = (1)\*VISC {VISCOSIDAD DEL AGUA}  
 RHOW = (62.42691)\*DEN {DENSIDAD DEL AGUA}

{PROPIEDADES DE LA ROCA}

RHOR = (174.79)\*DEN  
 PHI =0.206 {POROSIDAD DEL MEDIO}  
 KABSOLUTA = (300)\*PER {PERMEABILIDAD ABSOLUTA - 300 md}  
 K = KABSOLUTA

KROSWC = 1 {MODELO DE PARMEABILIDAD RELATIVA SISTEMA AGUA - ACEITE}

```

KRWSORW = 1
SWC = 0
SORW = 0
NW = 2
NO = 2
KRO = KROSWC*((1 - S - SORW)/(1 - SWC - SORW))^(NO)
KRW = KRWSORW*((S - SWC)/(1 - SWC - SORW))^(NW)

{MOBILIDADES}

MW = KRW/MUW {MOBILIDAD DEL AGUA}
MO = KRO/MUO {MOBILIDAD DEL ACEITE}
M = MO + MW {MOBILIDAD TOTAL}
F = ((1)/((1)+((KRO/KRW)*(MUW/MUO))))
      {FLUJO FRACCIONAL DEL AGUA A CONDICIONES DE YACIMIENTO}

{EFECTOS GRAVITACIONALES}

G = 9.8 {GRAVEDAD}
GRADY = VECTOR(0,1)
GP = RHOW*(KRW/MUW) + RHOO*(KRO/MUO)
      {EFECTO GRAVITACIONAL DEBIDO A LA DIFERENCIA DE DENSIDADES}

{RESTRICCIONES DE LOS POZOS}

AREA = INTEGRAL(1)
PRODUCCION = INTEGRAL(S)/T
PPROM = INTEGRAL(P)/AREA

POUT4= (2522)*PRE {PRESION DE PRODUCCION CAÑONEO 4}
PIN4 = (3378)*PRE {PRESION DE INYECCION CAÑONEO 4}
POUT3= (2506)*PRE {PRESION DE PRODUCCION CAÑONEO 3}
PIN3 = (3362)*PRE {PRESION DE INYECCION CAÑONEO 3}
POUT2= (2492)*PRE {PRESION DE PRODUCCION CAÑONEO 2}
PIN2 = (3347)*PRE {PRESION DE INYECCION CAÑONEO 2}
POUT1= (2478)*PRE {PRESION DE PRODUCCION CAÑONEO 1}
PIN1 = (3331)*PRE {PRESION DE INYECCION CAÑONEO 1}

{DIMENSIONES DEL MODELO}

```

XMAX = (1500)\*FT {ESPACIADO ENTRE POZOSS 422 FT}

YMAX = (150)\*FT {ESPESOR TOTAL MAXIMA 50 FT}

PMAX = (800)\*FT {PROYECICON 500 FT}

{ESPESORES Y TOPES DE LAS ARENAS}

ESPESOR1 = YMAX/4 {ARENA 1}

TOPE1 = YMAX

HIN1 = YMAX\*(1/8)

CIN1 =YMAX - HIN1

TOPE2 = YMAX - ESPESOR1 {ARENA 2}

ESPESOR2 = YMAX/4

HIN2 = YMAX\*(3/8)

CIN2 =YMAX - HIN2

TOPE3 = YMAX - ESPESOR1 - ESPESOR2 {ARENA 3}

ESPESOR3 = YMAX/4

HIN3 = YMAX\*(5/8)

CIN3 =YMAX - HIN3

TOPE4 = YMAX - ESPESOR1 - ESPESOR2 - ESPESOR3 {ARENA 4}

ESPESOR4 = YMAX/4

HIN4 = YMAX\*(7/8)

CIN4=YMAX - HIN4

CAN = (3.5)\*FT {ZONA CAÑONEADA}

RAD = CAN/5 {RADIO DEL POZO}

EPSVISC = 5.E-7 {COEFICIENTE DE DIFUSION ARTIFICIAL SUAVIZA LA SOLUCION}

PRODUCCION1 = INTEGRAL(S)

VA = -K\*MW\*DX(P)

VO = -K\*MO\*DX(P)

HORA = 60\*60

DIA = HORA\*24

```

PFONDO = (3461)*PRE {PRESION DE FONDO}
PO = PFONDO - RHO0*G*Y
      {FUERTE APROXIMACION A LA DISTRIBUCION DE PRESION}

INITIAL VALUES

S = 0 {EL MODELO ESTA SATURADO TOTALMENTE CON ACEITE}
P = PO
      {EMPEZAMOS CON UNA FUERTE APROXIMACION A LA DISTRIBUCION DE PRESION}

EQUATIONS

S: PHI*DT(S) + DIV(-K*MW*GRAD(P) - K*MW*RHOW*G*GRADY) -
  EPSVISC*DIV(GRAD(S)) = 0 {EDP DE LA SATURACION}
P: DIV(-K*M*GRAD(P) - K*GP*G*GRADY) = 0 {EDP DE LA PRESION}

{DEFINICION DEL MODELO Y POCICIONAMIENTO DE LOS POZOS}

BOUNDARIES
REGION 1

      START(0,YMAX)
      NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
      LINE TO (0,CIN1+ CAN)
LINE TO (-RAD,CIN1+CAN)
      VALUE(P) = PIN1  VALUE(S) = 1
LINE TO (-RAD,CIN1- CAN)
      NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (0,CIN1- CAN)

      LINE TO (0,CIN2+CAN)
LINE TO (-RAD,CIN2+CAN)
      VALUE(P) = PIN2  VALUE(S) = 1
LINE TO (-RAD,CIN2- CAN)
      NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (0,CIN2-CAN)

      LINE TO (0,CIN3+CAN)
LINE TO (-RAD,CIN3+CAN)
      VALUE(P) = PIN3  VALUE(S) = 1

```

```

LINE TO (-RAD,CIN3- CAN)
      NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (0,CIN3-CAN)

      LINE TO (0,CIN4+CAN)
LINE TO (-RAD,CIN4+CAN)
      VALUE(P) = PIN4 VALUE(S) = 1
LINE TO (-RAD,CIN4- CAN)
      NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (0,CIN4-CAN)

LINE TO (0,0) TO (XMAX,0)

LINE TO (XMAX,CIN4-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN4 - CAN)
      VALUE(P) = POUT4 NATURAL(S) = VA
LINE TO (XMAX + RAD, CIN4 + CAN)
      NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (XMAX, CIN4 + CAN)

LINE TO (XMAX,CIN3-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN3 - CAN)
      VALUE(P) = POUT3 NATURAL(S) = VA
LINE TO (XMAX + RAD, CIN3 + CAN)
      NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (XMAX, CIN3 + CAN)

LINE TO (XMAX,CIN2-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN2 - CAN)
      VALUE(P) = POUT2 NATURAL(S) = VA
LINE TO (XMAX + RAD, CIN2 + CAN)
      NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (XMAX, CIN2 + CAN)

LINE TO (XMAX,CIN1-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN1 - CAN)
      VALUE(P) = POUT1 NATURAL(S) = VA
LINE TO (XMAX + RAD, CIN1 + CAN)
      NATURAL(P)=0 NATURAL(S) = 0
LINE TO (XMAX, CIN1 + CAN)

```

LINE TO (XMAX,YMAX) TO CLOSE

REGION 2 K = KABSOLUTA\*(8/10) {REGION DE PERMEABILIDAD ARENA 1}

```

        START(0,TOPE1)
        LINE TO (0,CIN1+ CAN)
LINE TO (-RAD,CIN1+CAN)
LINE TO (-RAD,CIN1- CAN)
LINE TO (0,CIN1- CAN)
LINE TO (0,TOPE1 - ESPESOR1)
LINE TO (XMAX,TOPE1 - ESPESOR1)
LINE TO (XMAX,CIN1-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN1 - CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN1 + CAN)
LINE TO (XMAX, CIN1 + CAN)
LINE TO (XMAX, TOPE1) LINE TO (0,TOPE1) CLOSE
    
```

REGION 3 K = KABSOLUTA\*(10/10) {REGION DE PERMEABILIDAD ARENA 2}

```

        START(0,TOPE2)
        LINE TO (0,CIN2+ CAN)
LINE TO (-RAD,CIN2+CAN)
LINE TO (-RAD,CIN2- CAN)
LINE TO (0,CIN2- CAN)
LINE TO (0,TOPE2 - ESPESOR2)
LINE TO (XMAX,TOPE2 - ESPESOR2)
LINE TO (XMAX,CIN2-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN2 - CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN2 + CAN)
LINE TO (XMAX, CIN2 + CAN)
LINE TO (XMAX, TOPE2) LINE TO (0,TOPE2) CLOSE
    
```

REGION 4 K = KABSOLUTA\*(5/10) {REGION DE PERMEABILIDAD ARENA 3}

```

        START(0,TOPE3)
        LINE TO (0,CIN3+ CAN)
LINE TO (-RAD,CIN3+CAN)
LINE TO (-RAD,CIN3- CAN)
LINE TO (0,CIN3- CAN)
LINE TO (0,TOPE3 - ESPESOR3)
    
```

```

LINE TO (XMAX,TOPE3 - ESPESOR3)
LINE TO (XMAX,CIN3-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN3 - CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN3 + CAN)
LINE TO (XMAX, CIN3 + CAN)
LINE TO (XMAX, TOPE3) LINE TO (0,TOPE3) CLOSE

REGION 5 K = KABSOLUTA*(2/10) {REGION DE PERMEABILIDAD ARENA 4}

        START(0,TOPE4)
        LINE TO (0,CIN4+ CAN)
LINE TO (-RAD,CIN4+CAN)
LINE TO (-RAD,CIN4- CAN)
LINE TO (0,CIN4- CAN)
LINE TO (0,TOPE4 - ESPESOR4)
LINE TO (XMAX,TOPE4 - ESPESOR4)
LINE TO (XMAX,CIN4-CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN4 - CAN)
LINE TO (XMAX + RAD, CIN4 + CAN)
LINE TO (XMAX, CIN4 + CAN)
LINE TO (XMAX, TOPE4) LINE TO (0,TOPE4) CLOSE

TIME    0 TO 1800*DIA BY 0.005 {TIEMPO MAXIMO DE SIMULACION}

MONITORS {CONTROLES PARA EL MONITOREO DE LA SOLUCION}

FOR CYCLE=2

CONTOUR(S) AS "SATURACION" RANGE(0,1)
CONTOUR(S) ZOOM (XMAX*(3/4),0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "SATURACION" RANGE(0,1)
CONTOUR(S) ZOOM (0,0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "SATURACION" RANGE(0,1)
CONTOUR(P/PRE) AS "PRESION"
CONTOUR(P/PRE) ZOOM (0,0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "PRESION"
CONTOUR(P/PRE) ZOOM (XMAX*(3/4),0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "PRESION"

PLOTS {CONTROLES PARA LA SLAIDA GRAFICA Y TABLAS}

FOR T = 1*DIA BY 20*DIA TO 1800*DIA

TABLE(P/PRE) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
TABLE(VA) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)

```

```

TABLE (VO) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
TABLE (F) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
TABLE (PPROM/PRE) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
TABLE (PRODUCCION1) FORMAT "#T#X#Y#" POINTS=(200,200)
GRID (X,Y) CONTOUR (S)
AS "SATURACION" RANGE (0,1) PAINTED
SURFACE (S) AS "SATURACION" RANGE (0,1) PAINTED
CONTOUR (S) ZOOM (XMAX*(3/4),0,XMAX*(1/4),YMAX)
          AS "SATURACION" RANGE (0,1) PAINTED
CONTOUR (S) ZOOM (0,0,XMAX*(1/4),YMAX)
          AS "SATURACION" RANGE (0,1) PAINTED
CONTOUR (VA) ZOOM (XMAX*(3/4),0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "VA" PAINTED
CONTOUR (P/PRE) AS "PRESION"
CONTOUR (P/PRE) ZOOM (0,0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "PRESION"
CONTOUR (P/PRE) ZOOM (XMAX*(3/4),0,XMAX*(1/4),YMAX) AS "PRESION"
CONTOUR (P/PRE) AS "PRESION" PAINTED

HISTORIES {HISTORIA DE LAS VARIABLES DESEADAS}

HISTORY (PPROM/PRE) AS "PPROM"
HISTORY (PRODUCCION) AS "PRODUCCION"
HISTORY (PRODUCCION1) AS "PRODUCCION1"

HISTORY (VA) AT (XMAX + RAD, CIN4 + CAN/2) AS "VEL. DEL AGUA VA"
HISTORY (VO) AT (XMAX + RAD, CIN4 + CAN/2) AS "VEL. DEL ACITE VO"
HISTORY (F) AT (XMAX, CIN1) AS "F. FRAC. INTERVALO 1"
HISTORY (F) AT (XMAX, CIN2) AS "F. FRAC. INTERVALO 2"
HISTORY (F) AT (XMAX, CIN3) AS "F. FRAC. INTERVALO 3"
HISTORY (F) AT (XMAX, CIN4) AS "F. FRAC. INTERVALO 4"

END {FIN DEL SCRIPT}

```

## REFERENCIAS

---

- [1] Fanchi, Jhon R., 2006. Principles of Applied Reservoir Simulation. *Elsevier Inc.*
- [2] Doss, Said., et al., 1999. Adaptive Forward-Inverse Modeling of Reservoir Fluids Away from Wellbores. *PDE Solutions Inc, Lawrence Livermore National Laboratory.*
- [3] Doss, S.K., 2001. Forward-Inverse Adaptive Techniques for Reservoir Characterization and Simulation. Theory and Applications. *2001 Society of Petroleum Engineers Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, LA, September 30 - October 3, 2001.*
- [4] Tarek, Ahmed, 2006. Reservoir Engineering Handbook. *Elsevier Inc.*
- [5] Aziz, K. & Settari A., 1973. The compressional modulus of a material permeated by a random distribution of circular cracks, *Q.appl.Math.*, **30**, 453–464.
- [6] Saad M., & Zhang H., 1996. Adaptive mesh for two-phase flow in porous media. *Recent advances in problems of flow and transport in porous media* p. 179-193. Kluwer Academic Publishers.
- [7] Jouglar, Claudio E., 2002. Introducción al Método de Elementos Finitos, notas de curso de especialización. *Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.*

- 
- [8] Flaherty J., 2000. CSCI MATH 6860 FINITE ELEMENT ANALYSIS *Department of Computer Science, Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute Troy New York.*
- [9] Maren Paul, 2003. Simulation of Two-Phase Flow Processes in Heterogeneous Porous Media with Adaptive Methods. *Institut fur Wasserbau der Universitat Stuttgart.*
- [10] Rao, S.S., et al., 2004. The Finite Element Method in Engineering 4ED. *Elsevier Science & Technology Books.*
- [11] Osorio, Gildardo. 2008. Apuntes de Simulación Numérica de Yacimientos. *Escuela de Geología – Universidad Industrial de Santander.*
- [12] Chen, Zhangxin, Et al., 2006. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. *Southern Methodist – University Dallas, Texas.*
- [13] Zienkiewicz o. & Taylor R., 1982. El Método de Elementos Finitos. *Mc Graw Hill – Editorial Reverté.*