ALNUSET COMO MEDIO: SITUACIONES A-DIDÁCTICAS SOBRE EL CONCEPTO DE VARIABLE

María Angélica Rueda Calderón

Robinson Muñoz Santos

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2011

ALNUSET COMO MEDIO: SITUACIONES A-DIDÁCTICAS SOBRE EL CONCEPTO DE VARIABLE

María Angélica Rueda Calderón

Robinson Muñoz Santos

Trabajo de grado para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

Directora

M. en C. SOLANGE ROA FUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Bucaramanga
2011

AGRADECIMIENTOS

A Dios por ayudarnos a conseguir lo que más anhelamos.

A nuestros familiares que siempre han estado en este proceso desde sus comienzos con esas palabras de aliento en el momento indicado y ese apoyo incondicional, que nos dio fuerzas para finalizar esta experiencia.

A la profesora Dora Solange Roa por su apoyo, colaboración y disposición en el desarrollo de este proyecto.

Al profesor Juan de Dios Urbina porque gracias a su vocación y entrega hacia sus estudiantes, nos motiva a seguir sus pasos.

A nuestros amigos y compañeros que durante la carrera nos hicieron pasar momentos agradables que nunca se olvidarán.

A Dios porque sin en él nada de esto sería posible, a él le debo mi vida y todo lo que soy.

A mis padres Orlando Rueda Bueno y Graciela Calderón García y mis hermanos Ludwing Orlando, Alexandra y Michel que gracias a la misericordia de nuestro padre Dios están vivos y siempre dispuestos a apoyarme en todos los momentos de mi vida.

A mi novio Jaime Andrés Vega que siempre confió en mí, que con su comprensión y paciencia me motivó a finalizar esta etapa de mi vida profesional.

A mi amigo Robinson Muñoz porque con su sacrificio y esfuerzo por los seres amados, me mostró que todo es posible de alcanzar.

María Angélica Rueda Calderón

A mi Dios que siempre me ha acompañado y me ha bendecido de muchas formas en especial con la vida y la salud propia y de los que amo, punto de partida indiscutiblemente esencial para que un ser de familia como lo soy, pueda concentrarse en sus metas individuales.

A mis padres Rodrigo Muñoz y Nubia Santos que me dieron la vida y me han acompañado con amor animándome siempre a alcanzar mis metas, inculcándome además valores que han servido para formar el hombre, el padre, el amigo y el profesional que hoy soy.

A mi esposa y amiga Mayra Sánchez, que ha sabido entender los diferentes cambios de ánimo que me producen los afanes de lucha diaria por alcanzar mis metas y cumplir con las responsabilidades del hogar.

A mi hijo David Santiago Muñoz, fuente de energía y principal motivo de mi vida. El ser que me inspira el más grande amor y me infunde el aliento necesario para enfrentarme a cualquier reto.

A mi nona Angélica Hernández, a mi hermana Yenny Rocio Muñoz Santos, a mi Madrina Teresa Delgado, a mi compadre y amigo Alexander Rodríguez, y a todos aquellos familiares y amigos, que a lo largo de mi vida me han acompañado alentándome y brindándome su afecto.

A mi amiga Angélica Rueda, por haber sido esa compañera ideal que supo tener la tolerancia necesaria en los momentos en que esta fue definitiva para que de nuestro trabajo en equipo, se gestara el logro del que hoy nos gozamos.

Robinson Muñoz Santos

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FOTOS

RESUMEN

TITULO*: ALNUSET COMO MEDIO: SITUACIONES A-DIDÁCTICAS SOBRE EL CONCEPTO DE VARIABLE

AUTORES: RUEDA CALDERÓN, María Angélica y MUÑOZ SANTOS, Robinson**

PALABRAS CLAVES:

1. Variable 2. AlNuSet 3. Acciones 4. Medio

DESCRIPCIÓN O CONTENIDO

En nuestro proyecto se aplicó una situación a-didáctica a cinco alumnos de octavo grado de la Institución Educativa las Américas. La situación está compuesta por cinco actividades para la construcción del concepto de variable donde se encuentra implícito los tres usos de la variable como: incógnita específica, número general y relación funcional. Estas actividades fueron diseñadas de acuerdo a la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau, para su desarrollo se utilizó como medio el software AlNuSet. La teoría que implementamos para el diseño de esta, nos plantea otra forma de cómo los alumnos pueden descubrir conocimientos que los conduzcan a la construcción del concepto de variable, que en muchas ocasiones les trae confusiones al querer desarrollar una situación problema asignada por el profesor en el aula de clases. En consecuencia los objetivos que planteamos fueron: Diseñar situaciones a-didácticas sobre el concepto de variable, mediante el uso del software AlNuSet para los alumnos de la Institución Educativa las Américas y Posibilitar el desarrollo de habilidades por parte de los alumnos para comprender los diferentes usos de la variable, en situaciones problema que requieran de una adecuada interpretación para su solución. Lo que pretendemos con esto, es apreciar si realmente las actividades diseñadas fueron a-didácticas y si se mantuvieron así en el transcurso del desarrollo realizado por los alumnos, también si los alumnos lograron construir el concepto de variable a través de su interacción con AlNuSet.

En los resultados que se obtuvieron por parte de los alumnos, se pudo observar que el software AlNuSet posee las características de medio.

*Trabajo de Grado
**Facultad de Ciencias. Licenciatura en Matemáticas. M. en C. Solange Roa Fuentes

ABSTRACT

TITLE*: ALNUSET AS A MEANS: A-DIDACTICS SITUATIONS ABOUT THE CONCEPT OF VARIABLE

AUTHORS: RUEDA CALDERÓN, María Angélica y MUÑOZ SANTOS, Robinson**

KEYWORDS: 1.Variable 2. AlNuSet 3. Actions 4.Means

DESCRIPTION

In our project we applied a-didactic situation five eighth grade students of School of the Americas. The situation is composed of five activities to build the concept is implicit variable where the three uses of the variable as specific unknown, general number and functional relationship. These activities were designed according to the didactic situations theory of Guy Brousseau, for developing the software used as a means AlNuSet. The theory that we implemented for the design of this, we face another form of how students can discover knowledge that will lead to the construction of the concept of variable, which often brings confusion when seeking to develop a problem situation by the teacher assigned the classroom.

Thus the objectives of this study were: Design a-didactics situations on the concept of variable, using the AlNuSet software for students of School of the Americas and make the development of skills by students to understand the different uses variable in problem situations that require an adequate interpretation for their solution. What intend with this is appreciate if really activities designed were a-didactic and if remained so during development by pupils, also whether students succeeded build variable concept through interaction with AlNuSet.

In the results obtained by the students, it was observed that the software has AlNuSet medium.

* Thesis

**Faculty of Science. Bachelor of Mathematics, M. in C. Solange Roa Fuentes

INTRODUCCIÓN

Las recientes investigaciones en didáctica de las matemáticas nos proveen diferentes posibilidades para enfrentar responsable y eficazmente nuestra labor docente. Existe en la actualidad una extensa literatura relacionada no solo con las dificultades de los alumnos al abordar la construcción de conceptos matemáticos sino además, relacionada con formas de superar dichas dificultades.

En este camino, hemos tomado como referencia la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau,1986), para motivar la construcción del concepto de variable. La construcción de este concepto la hemos determinado a partir del uso que un individuo puede hacer de él. Para la realización de este trabajo, entenderemos el concepto de variable como una noción paramatemática en el sentido de Chevallard. Pues ésta es considerada como una herramienta útil de la cual hacemos uso y tenemos consciencia de ella, pero no es un objeto de estudio para la comunidad de matemáticos (Chevallard, 1997). Estos usos los hemos tomado del modelo 3UV planteado por Ursini y Trigueros (2005) que se refieren al uso de la variable como incógnita especifica, como número general y como relación funcional.

Tomando como base estos elementos, hemos diseñado situaciones a-didácticas donde la relación de los individuos con un "medio" preparado por el profesor busca que construyan el concepto de variable mediante un aprendizaje por adaptación. Estas situaciones fueron aplicadas a 5 alumnos de grado octavo de la institución educativa Las Américas en edades comprendidas entre los 12 y 14 años.

Nuestro trabajo está compuesto por seis capítulos, en el primer capítulo denominado "ANTECEDENTES", se hace mención especialmente a investigaciones en educación matemática que han trabajado la variable desde el punto de vista de los usos, además mostramos los requerimientos algebraicos que deben alcanzar los alumnos de la etapa 6-8 según los Estándares de la (NCTM). Por otra parte, exponemos algunos ejercicios algebraicos desarrollados con el software AlNuSet que se encuentran en la Guía Didáctica de La Dra. Bettina Pedemonte. Finalmente hacemos alusión al software "Cabri Geometric" analizado como "*medio*" desde la TSD en el trabajo de grado de Ballesteros y Rojas (2011).

En el segundo capítulo que hemos llamado "MARCO TEORICO", trataremos la fundamentación teórica que da sustento a nuestra investigación, explorando generalidades de la TEORÍA DE LAS SITUACIONES de Guy Brousseau. También, se describirá el modelo 3UV planteado por Ursini y Trigueros (2005), de igual forma exponemos algunas particularidades de AlNuSet y lo caracterizaremos como "medio" según la TSD.

El tercer capítulo lo hemos denominado “METODOLOGÍA” en este contaremos como se llevará a cabo nuestra investigación.

El cuarto capítulo “FASE DE DISEÑO DE LA SITUACIÓN A-DIDÁCTICA”, se dedicara al diseño de las actividades. En este mostramos los análisis a-priori, el papel del profesor y los usos de la variable desde el MODELO 3UV que prevemos se puedan dar, durante el desarrollo de cada una de las actividades que componen la situación a-didáctica.

El quinto capítulo “FASE DE DESARROLLO”, describimos el contexto y detallamos las condiciones en que fue desarrollada la situación por los alumnos de octavo grado de la institución educativa la Américas.

En el sexto capítulo “FASE DE CONCLUSIÓN”, hacemos un análisis a manera de reflexión sobre sí la situación se mantuvo o no como a-didáctica y que usos de la variable se manifestaron en el desarrollo de cada una de las actividades. Además confrontamos lo observado con el análisis a priori hecho para cada actividad.

El séptimo capítulo “CURSILLO: ***AlNuSet*** como Medio: Situaciones a-didácticas sobre el concepto de variable” se cuenta la experiencia en el XVIII congreso nacional de Matemáticas, donde tuvimos la oportunidad de mostrar la situación diseñada en el marco de un cursillo que fue dirigido a profesores en ejercicio y a profesores en formación, contando con la destacada presencia entre los participantes de las Profesoras Bettina Pedemonte y Maria Alessandra Mariotti.

1. ANTECEDENTES

En nuestro trabajo queremos mostrar algunos aspectos que sustentan la necesidad de construir el concepto de variable. Para ello queremos reflexionar sobre investigaciones que asumen su construcción a partir de sus usos. En este camino indagamos en los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* de la (National Council of Teacher of Mathematics) por sus siglas en inglés (NCTM), traducidos al castellano y editados en España en el año 2003 por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales; acerca de lo que se concibe los alumnos deben aprender en relación con la variable. También realizamos una reflexión sobre el apoyo de las tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra; aprovecharemos para mostrar algunos ejemplos que relacionan a AlNuSet con el uso de la variable y haremos alusión al software Cabri Geometric, visto como *"medio"* según la TSD.

Para Filloy y Rojano (1991), es importante analizar las dificultades que pueden existir en la transición de aritmética al álgebra, por lo cual desarrollan un estudio que pretende "observar las tensiones existentes entre los significados atribuidos a los conceptos algebraicos elementales en vías de construcción y los significados provenientes de campos conceptuales aritméticos" (Rojano, 1994; p. 48-49). En este estudio que fue realizado a estudiantes en edades comprendidas entre los 12 y 13 años en la modalidad de entrevista clínica, se logra determinar que dichas tensiones se generan por "la necesidad de dotar de un nuevo sentido (a través del uso) a las nuevas operaciones y conceptos, lo que a su vez dotará de nuevos significados a las expresiones algebraicas representadas por los mismos signos (de la aritmética) o versiones más elaboradas de ellos". (Rojano,1994; p. 49).

Veamos a continuación algunas respuestas generadas por los alumnos en la entrevista que hicieron Filloy y Rojano (1991), acerca de cómo se interpretan ciertas expresiones:

$\frac{(a+b)}{2}$, en esta expresión la respuesta típica fue una lectura ≪textual≫ de la misma, $\ll a\ más\ b\ sobre\ dos \gg$. Otra interpretación fue teniendo en cuenta las dimensiones de figuras geométricas (Área del rectángulo) $\ll base\ más\ altura\ sobre\ dos \gg$. También les asignaron valores específicos a las letras con el fin de encontrar un resultado concreto. (Filloy y Rojano, 1991).

1.1. Problemas relacionados con el aprendizaje del álgebra.

En el ámbito escolar es común observar cómo al introducir los temas de algebra, los alumnos sienten la necesidad de recurrir a asociarle un significado a cada expresión y a cada ecuación, pues traen esta premisa de la aritmética. En este sentido Kieran y Filloy (1989), plantean en su *marco aritmético de referencia*[4], los grandes problemas que presentan los alumnos a la hora de aprender álgebra, entre ellos: aparición del concepto de variable, métodos de simbolizar, la forma de ver el signo igual, problemas con la notación, entre otros. A continuación, examinamos estos aspectos con detalle:

1.1.1. La aparición del concepto de variable.

La variable es representada por una letra. Los alumnos trataban las letras en aritmética como incógnitas y como etiquetas. Para mostrar esto, podemos ver como en la fórmula $A = b \times h$ se determinan las letras A, b, h como los valores de área y dimensiones de un rectángulo especifico, mientras que en la expresión 15 m (quince metros) la letra m representa una etiqueta que asigna a quince una unidad de longitud pero no es una incógnita (Kieran y Filloy, 1989). En álgebra se dan otras interpretaciones asignadas a las letras como lo son: las letras como incógnitas especificas, números generalizados y variables Küchemann (1981). De la misma menciona que los alumnos tienden a tratar en expresiones y ecuaciones preferiblemente la letra como incógnita específica.

1.1.2. Métodos de simbolizar.

El álgebra obliga al alumno a formalizar procedimientos por los que antes quizás no se hubiese preocupado. El alumno en aritmética daba soluciones a problemas por medio de diferentes e informales métodos y otorgaba mucha importancia a métodos intuitivos en búsqueda de una respuesta. Por lo cual, al alumno le cuesta trabajo entender cómo un procedimiento puede ser en ocasiones la respuesta (el resultado de sumar $2\ y\ b\ es\ 2 + b$) (Kieran y Filloy, 1989). Es fácil entender esta dificultad que se presenta en los alumnos, pues ellos vienen de trabajar igualdades y formulas aritméticas. Donde estaban acostumbrados a tener al lado derecho de la igualdad un valor numérico concreto como respuesta casi siempre a una situación problemática. El encontrarse con una respuesta de tipo $2 + b$, se hace frustrante puesto que en esa respuesta persiste aún un valor desconocido representado por la letra “b”.

[4] Ver en el aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. p. 229-230.

1.1.3. La forma de ver el signo igual.

El alumno ha preconcebido la idea de que el igual indica que antes de él se debe hacer algo, y que lo que esta después de él, es el resultado (un valor numérico concreto). Este hecho le impide por ejemplo, que la expresión $2x + 7 = 5x - 8$ tenga sentido (Kieran y Filloy, 1989). En los alumnos persiste la idea de que las operaciones (el que hacer) se define en la parte izquierda de la igualdad, y como ya se ha mencionado anteriormente en el lado derecho estrictamente se da un valor numérico concreto como respuesta. Por ello entrar a luchar con la idea de que "el que hacer" puede ocurrir a lado y lado del signo igual, es una tarea difícil con la que se debe enfrentar el profesor de álgebra a la hora de trabajar con ecuaciones.

1.1.4. Problemas con la notación.

El alumno tiene dificultades con lo que denota la concatenación (hace referencia a la forma visual en que aparecen dos valores seguidos sin que se haga observable un operador entre ellos, estos valores pueden ser numéricos o literales), pues en aritmética la concatenación significa sumar $(2\frac{1}{4}$ indica sumar $2 + \frac{1}{4})$ y resulta que ahora en álgebra lo concatenado indica multiplicar $(2x\ indica\ 2 \times x)$(Kieran y Filloy, 1989). Es fácil que un alumno intente sumar $2 + \frac{1}{3}$ cuando se plantea el producto $2\frac{1}{3}$, todo porque en aritmética esta imagen representaría un número mixto en donde el número a la izquierda y sin denominador representa las unidades enteras y la fracción a la derecha representa la parte de la unidad no completa que se debe adicionar al entero. Es claro que el problema se puede agravar aún más cuando incluso estos conceptos aritméticos fueron mal aprendidos.

Reflexionando sobre lo anterior, hemos analizado dos ejemplos que fueron enunciados por unos profesores que participaron en el "CURSILLO: ***AlNuSet*** como Medio: Situaciones a-didácticas sobre el concepto de variable", donde se pueden ver algunos tipos de errores que cometen frecuentemente los alumnos a la hora de resolver ejercicios que tengan expresiones algebraicas:

1. En el aula el profesor coloca como ejercicio que sumen las tres expresiones $a + b + c$; los alumnos responden de la siguiente manera, el resultado es "$3abc$". Aquí se puede evidenciar que asignan a cada expresión un valor numérico de 1, por eso la suma al ser tres variables es 3, adicionalmente le agregan el término abc; pues traen de la aritmética la noción de concatenación que para el caso, indica suma.
2. El profesor pide a sus alumnos sumar las expresiones $2x$ y $3x$; es común que los alumnos respondan $2x + 3x = 5$. Esto sucede porque los alumnos traen de la aritmética la concepción de que siempre que se operan dos cantidades, el resultado es un valor numérico. De lo anterior

se podría decir que si bien a nivel científico de investigación matemática se ha logrado determinar que existe gran dificultad en el aprendizaje del algebra, en gran parte debido a como se da esa transición desde lo aritmético y a esos nuevos usos que se le da a la letra. Es claro que por lo menos a nivel local, es poco lo que el profesor hace con los alumnos para clarificar las dificultades que en estas investigaciones se han detectado.

Por otra parte el creciente desarrollo tecnológico, nos impone no ignorar cómo estos avances pueden beneficiar el aprendizaje de las matemáticas. Creemos que en la actualidad se hace necesario que se implementen nuevas tecnologías en el ámbito educativo, es tal la necesidad, que en los estándares de la NCTM aparecen ejemplos en donde se puede ver gráficas hechas con Excel, programas estadísticos, calculadoras, etc. Esto permite tanto a los profesores como a los alumnos tener otra opción de ver las matemáticas de una forma más dinámica e interactiva. Este pensamiento moderno de aprovechar la tecnología en función de la enseñanza de las matemáticas no debe y no va en contra del papel que han desempeñado las matemáticas en la evolución del pensamiento. Sí en cambio, adicionan componentes: dinámicos, iterativos e interactivos que hacen posible observar fenómenos que antes se hacían impensables.

1.2. Propuesta de los estándares de la NCTM.

Ahora, veamos cómo los estándares de la NCTM (2003), plantean que para la **etapa de 6-8** (sexto a octavo grado) los alumnos deberían iniciar la comprensión de los diferentes significados de las variables, mediante la representación de cantidades en problemas diversos. También, deberían conectar sus experiencias con las funciones lineales a sus conocimientos en desarrollo sobre la proporcionalidad, y distinguir las funciones lineales de las no lineales. El alumno debe desarrollar habilidades para aprender a reconocer y generar expresiones equivalentes, resolver ecuaciones lineales y utilizar fórmulas sencillas.

> Se espera que la mayoría de los alumnos de esta etapa, ***necesitarán*** una experiencia considerable con las ecuaciones lineales para llegar a sentirse cómodos y a tener soltura transformándolas y resolviéndolas. Aunque no todos los alumnos necesitan el mismo tiempo para adquirir soltura con las ecuaciones, al final del octavo grado los alumnos deberían ser capaces de resolver ecuaciones como $84 - 2x = 5x + 12$, de reconocer como identidades expresiones como $1 = t(\frac{1}{t})$ (cuando t no es cero), de aplicar formulas como $V = \pi r^2 h$ y de darse cuenta, de que ecuaciones como $y = -3x + 10$ representan funciones lineales que se satisfacen para muchos pares ordenados (x, y). También deberían ser capaces de utilizar ecuaciones de la forma $y = mx + b$ para representar relaciones

lineales, y de saber que los valores de la pendiente (m) y de la ordenada en el origen (b) afectan a la recta. (NCTM, 2003; p. 231).

En este sentido creemos que en la construcción de los objetos matemáticos propuestos por los estándares (NCTM) para esta etapa, se hace necesaria la construcción paralela de la noción de variable a partir de sus usos, de la forma como lo plantea Ursini y Trigueros (2005).

1.3. Algunos trabajos realizados sobre AlNuSet.

Teniendo en cuenta que en el diseño de las situaciones a-didácticas hemos considerado la utilización del software AlNuSet como "medio", nos parece conveniente mostrar algunas actividades que se han desarrollado con este software.

En un experimento de enseñanza realizado por (Pedemonte, 2011) se analizan los procesos que utilizaron 22 alumnos de segundo año de la escuela secundaria (12-13 años) para realizar algunas tareas a través de la demostración usando los tres ambientes de AlNuSet: Recta Algebraica, Manipulador Algebraico y Plano Cartesiano.

El objetivo principal de este experimento fue analizar el papel de AlNuSet en la enseñanza del algebra, el cual se centró en: expresiones algebraicas y proposiciones. El experimento duró 6 semanas, con sesiones de dos horas por semana. La primera sesión de este experimento fue la de expresiones algebraicas.

A continuación veremos una de las tareas de la guía de trabajo propuesta por Pedemonte (2009) realizadas con los 22 alumnos del experimento descrito anteriormente (solo la sesión de expresiones algebraicas para este grupo) y que también fueron expuestas en el VII simposio Nororiental de matemáticas "*las matemáticas, el lenguaje del universo*" realizado en la Universidad industrial de Santander del 30 de Noviembre al 4 de Diciembre del 2009.

En seguida mostraremos algunas intervenciones hechas por los alumnos del experimento, en el siguiente ejercicio:

a). x es un número entero. Escribe una expresión que represente el triple de x. Inserta esa expresión en la recta algebraica. ¿Tu respuesta es correcta ?

Todos los alumnos son capaces de responder la primera parte (escribe una expresión que represente el triple de x), a lo cual escribieron $3x$. Sin embargo, es interesante observar que los alumnos no son capaces de justificar por qué está expresión, es el triple x.

Algunos alumnos editaron la expresión "x" y luego "3x" en la componente "Recta Algebraica". Sólo cuando lograron mover la expresión x sobre la recta algebraica, fueron capaces de explicitar que la expresión $3x$ denota el triple de x, es decir, *"la expresión asume los únicos valores que son múltiplos de 3... son probablemente todos los múltiplos de 3* "(Sara).

Otro aspecto interesante que surgió durante la exploración fue la dependencia de la expresión $3x$ con la variable x, ya que cuando los alumnos movieron la expresión $3x$ fracasan en su intento de moverla directamente, esto sucede porque la variable x no se ha movido aún.

A continuación, veremos un ejemplo de dos estudiantes que se les dificultó mover la expresión $3x$ sobre la "Recta Algebraica".

Francesca: $3x$ no se mueve
Danilo: No es capaz de moverse $3x$
Maestro: ¿Por qué no se está moviendo?
Francesca: estamos intentando, pero sin resultados...
Maestro: ¿Por qué mueve directamente 3x?
Francesca: Porque quiero mover la expresión 3x
Maestro: No se debe pasar directamente a 3x, porque esta expresión depende de la variable x
Silencio
Maestro: ¿De qué manera se puede mover 3x?
Silencio
Maestro: usted tiene que mover x
Danilo: x?
Danilo mueve x
Danilo: Ahh ... 3x depende de x
Francesca: Ahhh ... fue realmente muy difícil para nosotros … (Pedemonte, 2011; p 4-5-6) .

Referente a esta guía, vamos a reflexionar sobre lo que un alumno puede hacer al tratar de resolver los problemas propuestos a continuación:

1. *x* es un número entero. Escribe una expresión que represente el triple de *x*. Inserta esa expresión en la recta algebraica. ¿Tu respuesta es correcta ? (Pedemonte, 2009; p. 1-2).

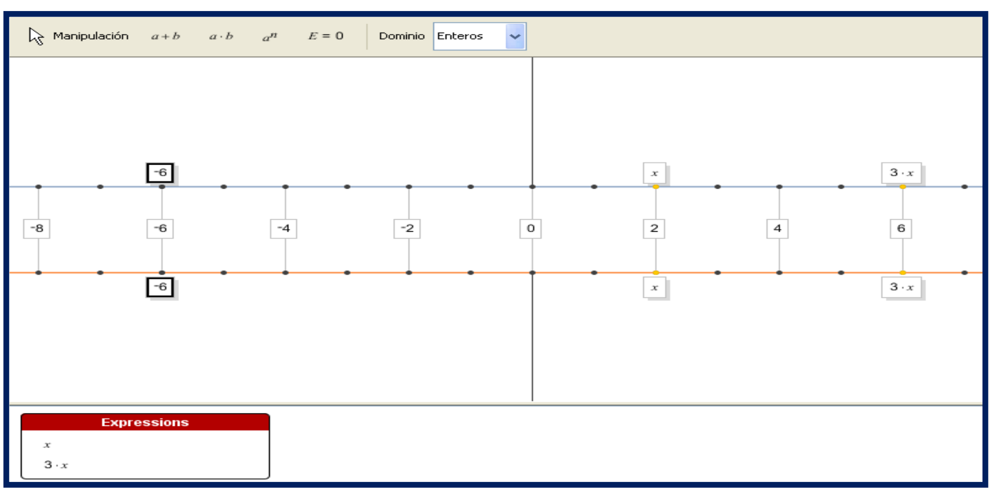


Figura 1. Solución en la Recta Algebraica a primer ejercicio de la guía de trabajo. (Pedemonte, 2009; p. 1)

Los alumnos utilizan el software AlNuSet para resolver la tarea (ver figura 1), lo importante de esta, es que ellos a través del arrastre de la expresión indicada "x" pueden mover sobre la recta de manera simultánea la expresión "$3x$".

Según el modelo 3UV el alumno al tratar de solucionar la tarea manipula la variable como número general, es decir, él sabe que a través del arrastre de la variable "x", la expresión "$3x$" toma el papel de símbolo y que este puede tomar cualquier valor según la posición que tome "x" en la "Recta Algebraica".

2. Ecuaciones e inecuaciones.

1. Considera estas dos igualdades:

   $2 * x + 3 = 5 * x$

   $2 * x + 3 * x = 5 * x$

Escribe qué piensas de esas igualdades.

Para verificar tu respuesta inserta x y las siguientes expresiones en la recta algebraica:

$2 * x + 3$; $2 * x + 3 * x$; $5 * x$.

Inserta también las dos igualdades.

¿Qué observas al desplazar x? Justifica tu respuesta (Pedemonte, 2009; p. 1-2).

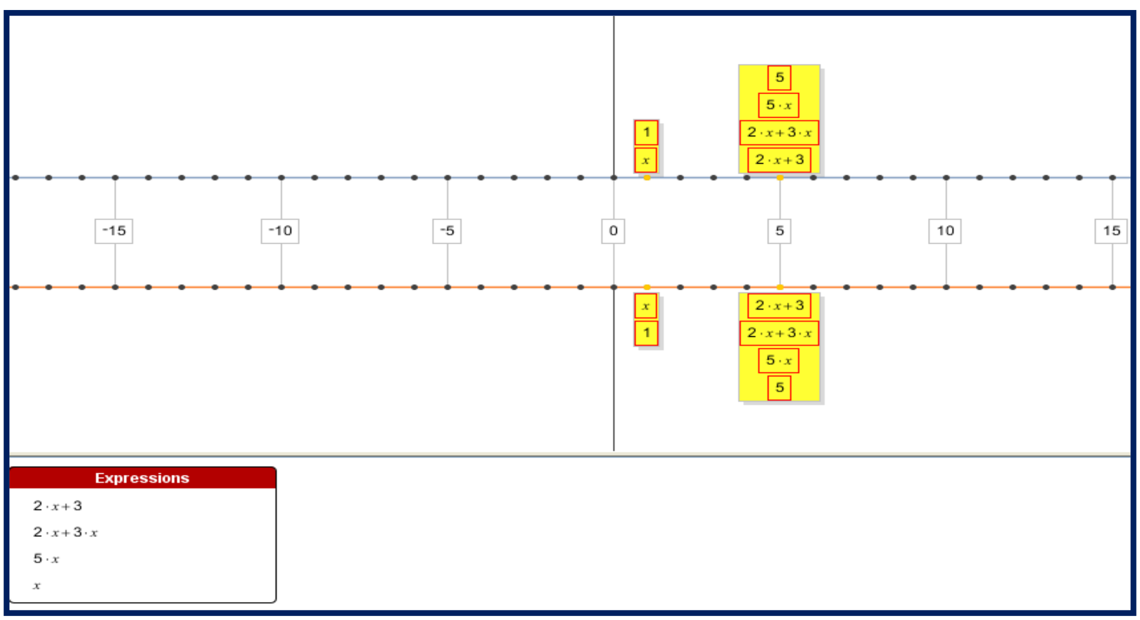


Figura 2. Solución en la Recta Algebraica a segundo ejercicio de la guía de trabajo. (Pedemonte, 2009; p. 2)

Los alumnos al tratar de resolver la tarea se valen del arrastre de la variable “x” como ocurrió en el ejercicio anterior. Para cumplir con su intención deben observar con cuidado las posiciones que toman las expresiones que dependen de “x” como lo son: “$2 \cdot x + 3$”, “$2 \cdot x + 3 \cdot x$” y “$5 \cdot x$” (ver figura 2). Esto con el fin, de ver en qué momento estas expresiones son iguales.

Según el modelo 3UV, los alumnos en esta tarea están manipulando la variable como incógnita especifica; ya que en la única posición donde las expresiones son iguales es cuando “x” esta en 1.

1.4. Cabri Geometry como medio.

El software Cabri Geometry puede describirse como un “medio”, desde la TSD. Dicho software recibe el nombre de geometría dinámica porque permite realizar construcciones geométricas por medio de la manipulación directa (sin intermedio de un lenguaje de computador) de objetos en la pantalla, y también permite la manipulación de objetos ya construidos, redibujándolos en tiempo real. (Ballesteros y Rojas, 2011; p. 16-17).

Ballesteros y Rojas (2011), identifican dos *tipos de acciones* y sus correspondientes retroacciones en Cabri:

- Tipo de acción Construir, haciendo uso de los menús de herramientas, podemos pedir a Cabri que dibuje diferentes objetos geométricos (rectas, segmentos, círculos, polígonos, etc.) con relaciones entre ellos (pertenencia, perpendicularidad, paralelismo, etc.).La *retroacción* correspondiente a *construir* es un *dibujo estático* en la pantalla, que corresponde a lo que se le pidió que construyera. Por ejemplo, si se selecciona la herramienta ‘Segmento’ y se hacen dos clic en la pantalla, aparece un segmento de recta limitado por dos puntos. (Ballesteros y Rojas, 2011; p. 16-17).

- Tipo de acción Arrastrar; la herramienta mano permite agarrar los objetos ya construidos y desplazarlos en la pantalla, garantizando que las relaciones geométricas construidas se mantienen durante el movimiento. Las *retroacciones* correspondientes a la acción de *arrastrar* son *fenómenos dinámicos* en la pantalla: algunos objetos se mueven, y ese movimiento tiene patrones determinados. (Ballesteros y Rojas, 2011; p. 16-17).

En Cabri, el comportamiento de los objetos es geométrico; es decir, “se conservan intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en la construcción, así como las propiedades geométricas implícitas", tanto al construir como al arrastrar. Esta característica supone una gran ventaja, pues las retroacciones del medio corresponden al saber geométrico, y por lo tanto los conocimientos que construyen los alumnos en interacción con Cabri tendrán una correspondencia directa con el saber que se quiere enseñar. (Ballesteros y Rojas, 2011; p. 16-17).

Nosotros en nuestro proyecto quisimos tomar del trabajo de (Ballesteros y Rojas, 2011) la parte de *Cabri Geometry como medio*, para mostrar que el software Cabri Geometry ha sido utilizado como medio según la TSD para resolver tareas relacionadas con geometría. Para nosotros, el medio es el software AlNuSet; el cual se puede utilizar como medio según la TSD y sirve para resolver tareas relacionadas con álgebra.

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentamos los aspectos teóricos que dan fundamento a nuestro proyecto. Principalmente describimos los elementos que hemos tomado de la teoría de Situaciones Didácticas (1986), para analizar las características del software AlNuSet (Algebra Numerical Set) como *"medio[5]"* según lo planteado por esta teoría. Este es el punto de partida para el diseño de situaciones a-didácticas que esperamos permitan la construcción de la noción de variable a partir de sus usos (Ursini y Trigueros, 2005).

2.1. Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD).

Brousseau (1986), desarrolla su teoría de las situaciones didácticas adaptando las ideas generadas por Piaget. Quien considera que un individuo aprende en la medida en que construye o resignifica un concepto, incorporándolo a su estructura cognitiva. De tal manera que el contexto de clase tradicional, se transforma. Es decir, el profesor, el alumno y su relación con un saber cambian, ya que el proceso de resignificación es personal y debe generarse por la intención de cada individuo. Dicha resignificación se da cuando el "medio" (entendiendo medio, como un material en la mayoría de los casos físico, preparado cuidadosamente por el profesor pensando que de la interacción con este se pueda dar la construcción de conocimiento), produce factores de desequilibrio, que a través de los procesos de *acomodación* y *asimilación*[6] genera la construcción de conocimiento. Por tanto, por las interacciones entre el alumno y el medio se puede generar un aprendizaje por adaptación.

En este sentido, consideramos que el conocimiento es una construcción personal, en tanto que el saber, proviene de una elaboración cultural (Panizza, 2004). A manera de conclusión se podría decir que la teoría de las situaciones de Brousseau apunta hacia el diseño de un ambiente de enseñanza donde se pueda generar aprendizaje por adaptación.

---

[5] Entendiendo medio, como un material en la mayoría de los casos físico, preparado cuidadosamente por el profesor pensando que de la interacción con este se pueda dar la construcción de conocimiento.

[6]Asimilación: Ninguna conducta, aunque sea nueva para el individuo, constituye un comienzo absoluto. Siempre se INTEGRA a esquemas anteriores. En este caso, el vínculo posee continuidad.
Acomodación: Se refiere a cualquier modificación dentro de un esquema asimilador o de una estructura, modificación que a su vez se causa por los elementos que se asimilan.
http://educacion.idoneos.com/index.php/Teor%C3%ADas_del_aprendizaje. Consultada (30 de junio de 2011).

2.2. Aprendizaje por adaptación.

Brousseau adapta a las actividades escolares el concepto de aprendizaje por adaptación generado por Piaget para el aprendizaje biológico; él plantea que: se considera aprendizaje por adaptación a aquel aprendizaje que se da cuando el alumno interactúa con un medio y logra construir conocimiento, sin la intervención directa del profesor (Acosta, 2010).

En el aprendizaje por adaptación el alumno debe tener una intención o propósito a alcanzar. Teniendo clara esta intención, debe valerse de un medio para alcanzarla realizando acciones sobre este. El medio reaccionará ante estas acciones (esta respuesta recibe el nombre de retroacción), es en ese momento donde el alumno debe interpretar estas retroacciones haciendo uso de sus pre-saberes (esta interpretación recibe el nombre de validación).

El alumno puede validar de dos formas según sea la interpretación que haga a las retroacciones recibidas del medio (ver figura 3): si la retroacción del medio le permite alcanzar su propósito se le llamara validación positiva y como señal de aprendizaje reforzara su acción cada vez que quiera cumplir la misma intención; si la retroacción del medio no le permite alcanzar su propósito se le llamara validación negativa y como señal de aprendizaje modificara su acción, originando un nuevo proceso acción-retroacción-validación. (Acosta, 2010).

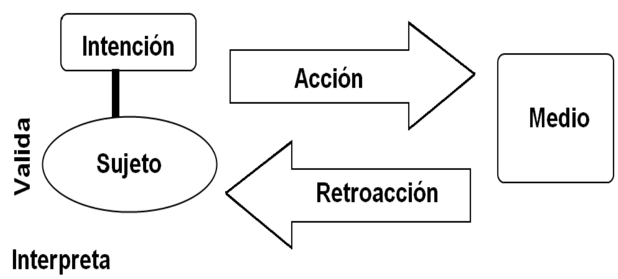


Figura 3. Aprendizaje por adaptación (Acosta, 2010; p.133)

Un aprendizaje por adaptación solo se puede dar en el marco de una situación a-didáctica, pero debe ser claro que esta situación puede estar contenida en una situación didáctica. A continuación analizamos con más detalle esta relación.

2.3. Situación didáctica y situación a-didáctica.

"Una situación didáctica se presenta en una clase convencional, donde se observa la relación entre tres elementos: el profesor (quien desea enseñar un saber), el alumno (quien deberá aprender dicho saber) y el saber (lo que se pretende enseñar); en esta situación se hace evidente la intención del profesor por enseñar un determinado saber" (Panizza, 2004; p. 4). En tal sentido (Brousseau, 2007; p.50), explica esta situación a través del siguiente diagrama denominado el triangulo didáctico (ver figura 4).

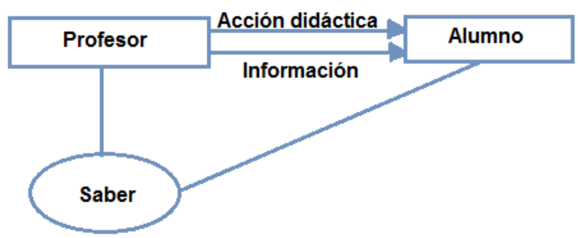


Figura 4. Triángulo Didáctico (Brousseau, 2007; p.50)

Por otra parte una situación es a-didáctica cuando se posibilita la interacción entre un alumno y un medio en busca de dar solución a un problema; en esta situación la intención del profesor se mantiene oculta.

La situación a-didáctica no es para nada una situación opuesta a la situación didáctica, contrario a lo que podría pensarse si analizamos únicamente el papel del profesor en cada una de ellas; realmente están estrechamente relacionadas una dentro de la otra, si pensamos que en esta situación normal de clase el profesor crea una situación a-didáctica en procura de enseñar un saber.

La situación didáctica es una situación que contiene intrínsecamente la intención de que alguien aprenda algo. Esta intención no desaparece en la situación o fase a-didáctica: la no intencionalidad contenida en este concepto se refiere a que el alumno debe relacionarse con el problema respondiendo al mismo en base a sus conocimientos, motivado por el problema y no por satisfacer un deseo del docente, y sin que el docente intervenga directamente ayudándolo a encontrar una solución (Panizza, 2004, p.5). En tal sentido (ver figura 5), se mostrará mejor las relaciones existentes entre las dos situaciones.

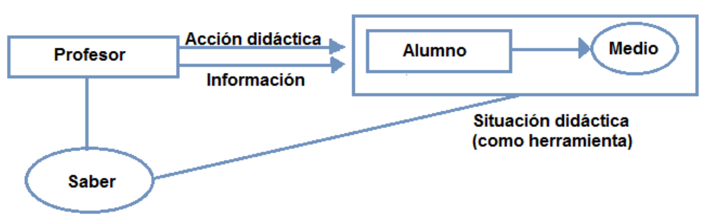


Figura 5. "Situación de uso didáctico" (Brousseau, 2007; p. 50)

2.4. El medio en una situación a-didáctica.

Puesto que para Brousseau, "el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios" (Brousseau 1986); la selección del medio es una parte fundamental en el éxito de la situación. El medio ha de tener un efecto visible ante las acciones del alumno y debe imponer ciertas restricciones a la acción.

Es de real importancia resaltar que un medio sin una intención didáctica no posibilita el aprendizaje de saber alguno. "Un medio sin intenciones didácticas es incapaz de inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea adquiera" (Brousseau, 2007; p.31)

2.5. El profesor en la TSD **(**El profesor que aquí se describe, es el resultado de algunas reflexiones que se dieron en el seminario TEORIA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS, en el cual participamos y fue dirigido por el Dr. Martin Eduardo Acosta Gempeler y en el cual se estudió (Margolinas, 1993).

- Durante el diseño de la situación a-didáctica el profesor debe elegir cuidadosamente el problema y preparar el medio con el cual los alumnos han de interactuar. Él deberá prever las posibles acciones de los alumnos y las retroacciones del medio, que en procura de resolver el problema se puedan dar, y admitir circunstancias dentro de la situación en las cuales el alumno pueda querer renunciar o pedir ayuda directa en la solución del problema. Para preparar así las consignas o preguntas que motiven a continuar con el problema sin incidir directamente en la solución de este.
- Durante la situación a-didáctica cuando el problema sea planteado al alumno, el profesor estará atento en caso de que alumno quiera desistir del problema o pida ayuda directa sobre la solución del mismo para poner en práctica lo previsto en el diseño (esta etapa constituye la devolución).
- Terminada la situación a-didáctica el profesor interviene en forma directa para institucionalizar el saber.

2.6. El alumno en una situación a-didáctica.

El alumno en una situación a-didáctica debe ser el responsable de resolver la tarea propuesta por el profesor. Esa responsabilidad implica para él, hacer conciencia de que si bien el problema plantea encontrar una estrategia ganadora, también existe la intención por parte del profesor de que adquiera un conocimiento (Margolinas, 1993). Cabe mencionar que es el alumno quien decide qué tipo de acciones efectuar en el "medio", así como que es él, quien interpreta de acuerdo con sus pre-saberes las retroacciones de este y en consecuencia valida sus acciones.

2.7. AlNuSet: Algebra of Numerical Sets.

Traducido de "**AlNuSet nel curriculum di matematica *Guida per gli insegnanti*"**

A cura di Giampaolo Chiappini, Bettina Pedemonte, Elisabetta Robotti – DiDiMa srl

A continuación haremos una descripción del software AlNuSet por sus siglas en inglés, resaltando los elementos que tomaremos en nuestro diseño de este programa. Con base en los aspectos generales presentados en esta sección, más adelante discutiremos las características que hemos identificado en él que han motivado su estudio como un medio dentro de una situación a-didáctica.

Para esto tomaremos los elementos de una guía didáctica sobre este software presentado por Chiappini, Pedemonte y Robotti (2010). AlNuSet es un sistema para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra diseñado por el Instituto de Tecnología Didáctica de Italia (ITD). AlNuSet tiene tres componentes o ambientes que pueden ser utilizados por los profesores para la enseñanza del álgebra estos son: la Recta Algebraica, el Manipulador Algebraico y el Plano Cartesiano.

2.7.1. La Recta Algebraica.

La idea principal de la componente "**Recta Algebraica**" es la representación de variables algebraicas en un lugar de la recta a través de puntos móviles, estos puntos se pueden arrastrar en la recta con la ayuda del ratón. En esta componente, el usuario puede editar las expresiones para operar. El sistema calcula automáticamente el valor de la expresión con base en el valor de la variable en la recta y se coloca en un punto asociado al valor de la expresión algebraica sobre la recta. Cuando el usuario arrastra el punto móvil de una variable, el sistema actualiza la posición de los puntos correspondientes a las expresiones que contenga la variable de forma automática y de manera dinámica. Por otra parte, el componente recta algebraica ha sido diseñado para proporcionar dos muy importantes técnicas instrumentales necesarias para la actividad algebraica: hallar raíces del polinomio con coeficientes enteros y para la identificación y validación de la verdad en proposiciones algebraicas.

También en la "Recta Algebraica" se pueden probar propiedades de la suma y del producto como: conmutativa, asociativa, modulativa, invertiva, etc. La persona interesada en hacer este tipo de pruebas se puede valer del arrastre en este ambiente, por ejemplo, se editan dos tipos de expresiones diferentes aunque una no dependa del movimiento de la otra ("x" e "y"), pero que del movimiento de estas se logre un valor que cumpla la propiedad, en este caso la propiedad conmutativa de la suma (ver figura 6).

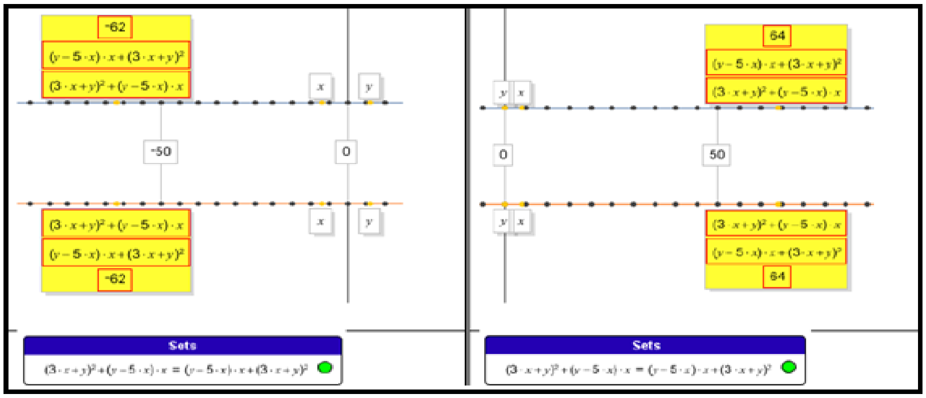


Figura 6. La recta algebraica, un ambiente de AlNuSet (Chiappini, Pedemonte y Robotti, 2010; p.15).

2.7.2. El Manipulador Algebraico.

El componente "**Manipulador Algebraico"** se muestra en una pantalla dividida en dos, en un lado aparecen reglas simbólicas y al otro lado se muestra un espacio en donde se dan las transformaciones a partir de aplicar dichas reglas a un objeto algebraico. Una característica de interactividad presente en el manipulador, consiste en que al seleccionar una parte de la expresión se produce la activación de las propiedades que se pueden aplicar a dicha selección. Esta característica puede ayudar a los alumnos a explorar el sistema estructural del álgebra para una transformación algebraica correspondiente.

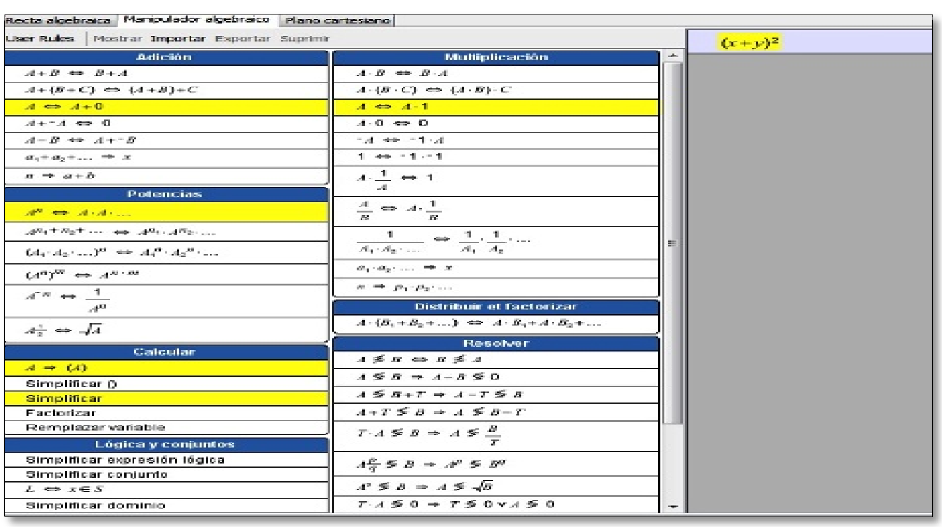


Figura 7. El manipulador algebraico, un ambiente de AlNuSet

$2\cdot x+1+2\cdot x+3$	$A+B \Leftrightarrow B+A$	**Propiedad Conmutativa de la suma**
$2\cdot x+2\cdot x+1+3$	$a_1+a_2+\ldots \Rightarrow x$	**Propiedad Asociativa de la suma**
$2\cdot x+2\cdot x+4$	$A\cdot B \Leftrightarrow B\cdot A$	Propiedad Conmutativa de la multiplicación
$x\cdot 2+2\cdot x+4$	$A\cdot B \Leftrightarrow B\cdot A$	Propiedad Conmutativa de la multiplicación
$x\cdot 2+x\cdot 2+4$	$A\cdot(B_1+B_2+\ldots) \Leftrightarrow A\cdot B_1+A\cdot B_2+\ldots$	Propiedad distributiva
$x\cdot(2+2)+4$	$a_1+a_2+\ldots \Rightarrow x$	**Propiedad Asociativa de la suma**
$x\cdot(4)+4$	Semplifica ()	Simplificar parentesis
$x\cdot 4+4$	$A\cdot B \Leftrightarrow B\cdot A$	Propiedad Conmutativa de la multiplicación
$4\cdot x+4$	$A \Leftrightarrow A\cdot 1$	Elemento Neutro de la multiplicación
$4\cdot x+4\cdot 1$	$A\cdot(B_1+B_2+\ldots) \Leftrightarrow A\cdot B_1+A\cdot B_2+\ldots$	Propiedad distributiva
$4\cdot(x+1)$		

Tabla 1. Prueba en el manipulador algebraico de la suma de dos números impares consecutivos es un múltiplo de 4. (Chiappini, Pedemonte y Robotti, 2010; p.19).

La idea principal que caracteriza el diseño del componente manipulador algebraico es la posibilidad de explotar las reglas y procedimientos puestos en evidencia informática para transformar expresiones algebraicas y proposiciones a través de un conjunto estructurado de reglas base. Tres necesidades pedagógicas fundamentan la utilización de esta componente: la necesidad de mostrar relevante el valor epistémico de la transformación algebraica como prueba formal de equivalencia entre las formas algebraicas, la necesidad de apoyar la integración de las prácticas de manipulación y de naturaleza cuantitativa.

En este ambiente el usuario puede hacer demostraciones como por ejemplo (ver tabla 1), donde paso a paso él podrá demostrar algebraicamente que la suma de dos números impares consecutivos es un múltiplo de 4.

2.7.3. El Plano Cartesiano.

La idea fundamental que caracteriza el diseño de la componente “**Plano Cartesiano**”, es la de asociar la variación dinámica entre expresiones y variables en la recta algebraica y su representación gráfica. A través de un comando específico y la selección de la variable independiente de la función, una expresión que está en la recta algebraica es automáticamente representada en una gráfica en el plano cartesiano. Al arrastrar el punto correspondiente a la variable en la recta algebraica, ocurren dos eventos representativos:

- En la Recta Algebraica, la expresión que contiene la variable se mueve en consecuencia.

- En el Plano Cartesiano, el punto definido por el par de valores de la variable y la expresión asociada se mueve en la grafica (ver figura 8).

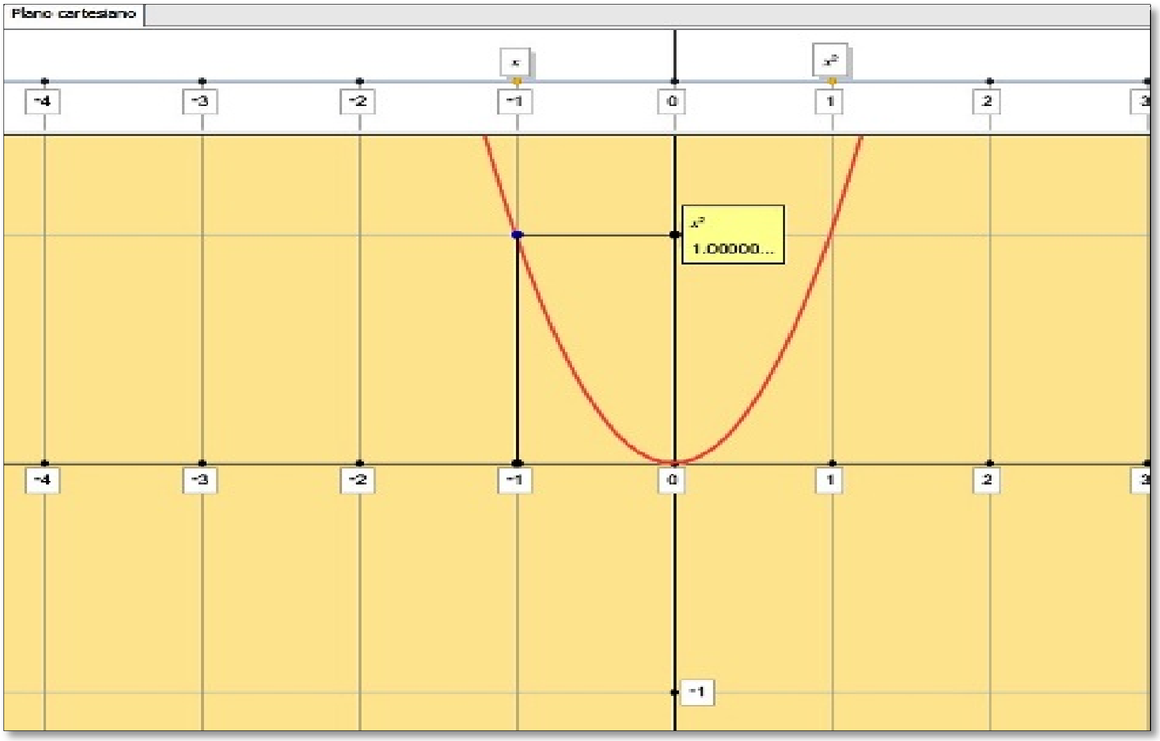


Figura 8. El plano cartesiano, el ambiente gráfico de AlNuSet

Esta técnica instrumental apoya el desarrollo integrado de una idea dinámica de la función con una idea estática (Sfard, 1991 citado en Chiappini, Pedemonte y Robotti., 2010). La relación funcional entre variables y expresiones se visualiza de forma dinámica en la recta algebraica a través de arrastre del punto asociado a la variable, y de forma estática en el plano cartesiano a través de la curva. El movimiento del punto sobre la curva durante el arrastre de la variable en la recta algebraica apoya la integración de estas dos ideas, demostrando que la curva que representa las infinitas parejas de valores correspondientes a la variable y a la expresión en la recta. Esta instrumentación técnica puede ser muy útil para orientar la interpretación de las gráficas en el plano cartesiano y desarrollar importantes conceptos de naturaleza algebraica. El usuario puede valerse de este ambiente cuando desee realizar varios tipos de graficas como: lineales, cuadráticas, cubicas, exponenciales etc.

2.8. AlNuSet como Medio

Figura 9. Logo del software AlNuSet.

En general la TSD plantea que el medio es aquello con lo que puede interactuar un sujeto mediante la realización de acciones sobre él y las retroacciones que éste puede ofrecer. En nuestro trabajo el medio es AlNuSet, este fue seleccionado para que las situaciones que se diseñaron sean aplicadas en él. Teniendo en cuenta que los conocimientos producidos por un aprendizaje por adaptación, sean lo más parecidos posibles al saber que se quiere enseñar.

En este trabajo hemos identificado en AlNuSet las retroacciones necesarias que permitirán que el alumno mediante interacciones con este, desarrolle tareas que lo lleven a la construcción del concepto variable a partir de los usos que de esta haga. Hemos caracterizado algunas acciones y retroacciones que pueden darse con este medio por la interacción con un sujeto. A continuación describimos las retroacciones y su correspondiente retroacción. Cabe señalar que por ser este el primer trabajo realizado desde la TSD con AlNuSet como medio, las retroacciones que identificamos pueden ser enriquecidas en la medida en que se analice el trabajo de los individuos con este software en una situación concebida como a-didáctica.

2.8.1. Tipos de retroacciones y de acciones de nuestro medio AlNuSet.

Tipo de Acción	Tipo de Retroacción
Mover la variable independiente: Consiste en posicionarse sobre las expresiones algebraicas tales como "$\boldsymbol{x}$", "$\boldsymbol{x+2}$" ubicadas sobre la recta y desplazarlas a lado y lado.	**Arrastre:** Se puede observar que al mover la expresión "$\boldsymbol{x+2}$" no surge ningún movimiento, es necesario seleccionar la expresión "$\boldsymbol{x}$" y desplazarla por toda la "recta algebraica", para que así se logre el movimiento de la expresión "$\boldsymbol{x+2}$". El arrastre muestra la dependencia que tienen las expresiones respecto a las variables.
Ejemplo: En la pantalla aparecen las expresiones "$\boldsymbol{x}$", "$\boldsymbol{x+2}$" ubicadas sobre la recta y se pide ubicar $\boldsymbol{x+2}$ en 10. Esta tarea se logra solo si se lleva $\boldsymbol{x}$ a la posición 8.	
Arrastrar: consiste en seleccionar la expresión "$\boldsymbol{x}$" y desplazarla sobre "la recta algebraica" para que se obtengan los valores que hacen verdadera una ecuación o inecuación.	**Cambio de color:** En el recuadro Sets que aparece debajo de la "Recta Algebraica" aparece las ecuaciones luego de ser editadas. Al lado derecho de dichas ecuaciones se muestra un pequeño círculo que se rellena de color verde cuando la variable esta en un valor posible. Es decir, un valor que satisface la ecuación y se rellena de rojo cuando la variable no se posiciona sobre un valor solución de la ecuación.
Ejemplo: Al arrastrar la expresión "$\boldsymbol{x}$" por toda la "recta algebraica" el circulo que está a la derecha de la ecuación $\boldsymbol{x+3=5}$ mostrada en Sets, se rellena de color verde cuando "$\boldsymbol{x}$" se posiciona en 2 y para valores distintos a este, el circulo se rellena de color rojo.	

Tabla 2. Algunas acciones y retroacciones de AlNuSet.

2.9 Modelo 3UV.

En la literatura es posible identificar diferentes trabajos relacionados con "la variable", algunos de estos trabajos se refieren al estudio de la variable a partir de sus usos Kieran y Filloy (1989), Rojano (1994). Pensamos que esto está relacionado con la necesidad de establecer una cierta clasificación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos. En su teoría de la Transposición Didáctica Chevallard define tres tipos diferentes de nociones con las que se desarrolla el discurso matemático escolar:

Nociones protomatemáticas: aquellas cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

Nociones paramatemáticas: nociones que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos para designar otros objetos matemáticos, pero no se les considera un objeto de estudio en si mismas; y por lo tanto no son objetos de evaluación directa si no que son identificadas en el momento de presentarse su no maestría por parte de los alumnos.

Nociones matemáticas: objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas, así que son objeto de estudio en sí mismas y sirven además para construir otros objetos matemáticos. (Chevallard, 1997; p. 57-61).

Por tanto ya que "la variable" puede considerarse como una noción paramatemática, no es posible tener una definición concreta de ella y por tanto consideramos necesario hablar de ella a partir de los diferentes usos que dentro de un contexto matemático le podemos asignar. En tal sentido el modelo 3UV, planteado por Ursini y Trigueros (2005), explica que se puede llegar a la construcción del concepto variable si se logra que el estudiante pueda identificar los tres distintos usos en que esta se pueda presentar: como incógnita específica, como número general y como relación funcional. Ursini (2005), presenta de manera sintética los aspectos que caracterizan cada uso así:

- **La variable como incógnita especifica.**

  I1. Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

  I2. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.

  I3. Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

  I4. Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.

  I5. Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones. (Ursini, 2005; p. 35-36).

- **La variable como número general.**

  G1. Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

  G2. Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada que puede asumir cualquier valor.

  G3. Deducir reglas y métodos generales en secuencias y en familias de problemas.

  G4. Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

  G5. Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales. (Ursini, 2005; p. 36-37).

- **La variable como relación funcional.**

  F1. Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, graficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

  F2. Determinar los valores de la variable dependiente dados los valores de la independiente.

  F3. Determinar los valores de la variable independiente dados los valores de la dependiente.

  F4. Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, graficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

  F5. Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

  F6. Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema. (Ursini, 2005; p. 37).

Este Modelo sugiere que uno de los propósitos de la enseñanza en la escuela debería ser que los alumnos logren obtener habilidades que los lleven a resolver problemas y ejercicios que impliquen trabajar con variables, indistintamente del uso que de esta se pueda estar dando.

Nuestro trabajo adopta este propósito y utiliza el modelo 3UV para determinar qué tipo de usos específicos se toman y abandonan en una situación para encontrar su solución. Como lo plantea el modelo 3UV en el desarrollo de la situación planteada en este trabajo se pasa de un uso a otro haciendo énfasis en la información que cada uno ofrece sobre la situación. Estos aspectos aparecerán de manera específica en el análisis a priori de la situación que presentamos.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS

Los aspectos mencionados en los antecedentes, nos muestran un panorama general respecto a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar. Estas dificultades asociadas con los aspectos descritos por (Kieran y Filloy, 1989; Rojano, 1994), nos muestran la importancia de diseñar situaciones que busquen superar las dificultades en los alumnos y que además permita a los profesores de matemáticas percatarse de la importancia de desarrollar pensamiento matemático en sus alumnos. Lo que implica ir más allá de la memorización de algoritmos y fórmulas.

En particular, nos interesa construir el concepto de variable a partir de sus diferentes usos según como lo plantea Ursini (2005). En este camino hemos escogido el software AlNuSet. Como “medio”: Con base en interacciones que este software permite y tomando como fundamento la teoría de situaciones didácticas, buscamos dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué tipo de situaciones pueden desarrollarse con AlNuSet de tal manera que se posibilite la construcción del concepto de variable a partir de sus usos?

Objetivos

- Diseñar situaciones a didácticas sobre el concepto de variable, mediante el uso del software AlNuSet para los alumnos de la Institución Educativa las Américas
- Posibilitar el desarrollo de habilidades por parte de los alumnos para comprender los diferentes usos de la variable, en situaciones problema que requieran de una adecuada interpretación para su solución.
- Realizar un análisis a priori de las situaciones que muestre una guía para el profesor donde se determine su rol en la construcción de las situaciones.

3. METODOLOGÍA

Nuestra Investigación se desarrolla en tres fases que hemos denominado: Fase de Diseño, Fase de Desarrollo y Fase de Conclusión. Estas fases inician con nuestro estudio sobre la TSD, con el apoyo del Seminario dirigido por el profesor Martín Acosta y otros integrantes del grupo de Investigación Educación Matemática EDUMAT de la Universidad Industrial de Santander. Allí discutimos los principales aspectos teóricos que retomamos para el desarrollo de nuestro trabajo relacionado principalmente con las implicaciones que la intervención de un *"medio"* genera en una situación didáctica. A continuación describimos las actividades desarrolladas en cada una de las fases de nuestro trabajo.

3.1 Fase de Diseño.

- Diseño de la situación a-didáctica: Teniendo en cuenta la TSD, diseñamos una situación a-didáctica con la que esperamos los alumnos construyan la noción de variable. Dicha situación se basa en AlNuSet, este software fue preparado como *"medio"* para el desarrollo de la situación.
- Análisis a priori: Para cada actividad realizamos un análisis a priori, donde intentamos predecir algunas posibles: acciones ejecutadas por el alumno, retroacciones causadas por el *"medio"* y señales de aprendizaje en los alumnos, que puedan darse durante el desarrollo de la situación a-didáctica.
- Modelo 3UV: hemos asumido la construcción de la noción de variable según el uso que de ésta se haga, en cada actividad desarrollada por un estudiante. En este camino adoptamos el modelo 3UV planteado por Ursini y Trigueros (2005), quienes explican que se puede llegar a la construcción del concepto variable si se logra que el estudiante pueda identificar los tres distintos usos en que esta se pueda presentar; la variable como incógnita especifica, la variable como número general y la variable como relación funcional. En tal sentido presentamos de forma sintética los aspectos característicos de los usos de la variable, según se puedan dar durante la solución de los problemas planteados en cada actividad.
- Papel del Profesor: Teniendo en cuenta que el alumno en el desarrollo de una situación a-didáctica logra un aprendizaje por adaptación, creemos que es importante reflexionar y plasmar en la investigación cuáles podrían ser las intervenciones del profesor durante el desarrollo de la situación a-didáctica. De manera que todos los aspectos tratados en el análisis a priori sean apoyados por intervenciones adecuadas del profesor.

3.2 Fase de Desarrollo: aplicación de la situación a-didáctica.

La situación fue desarrollada en dos contextos diferentes: con profesores en ejercicio y en formación, y con alumnos de grado octavo.

3.2.1 Con profesores en ejercicio y en formación.

Durante el XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas, la situación fue presentada a 26 profesores en el marco del cursillo, ***Alnuset** como medio: Situaciones a-didácticas sobre el concepto de variable*. Se desarrolló en el salón 1-4 del edificio CENTIC adscrito a la planta física de la universidad industrial de Santander, a cada asistente le correspondió un equipo y un cuadernillo que contenían las actividades. El cursillo tuvo una duración de 6 horas, divididas en cuatro sesiones cada una de 90 minutos. La intención de este cursillo, fue discutir la situación diseñada desde el punto de vista de los conocimientos que el alumno pueda alcanzar. En un primer momento, se pidió a los profesores intentasen vivir la situación desde el rol del alumno: con esto se lograron identificar algunas posibles retroacciones del *"medio"*. En un segundo momento se discutió la pertinencia de AlNuSet como *"medio"* en el desarrollo de la situación y se discutió sobre lo que podría ser o no una retroacción de AlNuSet. Al tiempo que se detectaron algunas bondades que poseen los tres ambientes ofrecidos por el medio, potencialmente importantes para el desarrollo de pensamiento algebraico.

3.2.2 Con alumnos de grado octavo.

Se desarrolló la situación con 5 alumnos de octavo grado de la institución educativa las Américas en edades comprendidas entre los 12-14 años. La actividad se realizó en un laboratorio de matemáticas, a cada alumno le correspondió un equipo y un material impreso que contenía las actividades que hacían parte de la situación. La intención con el desarrollo de esta aplicación, fue la de confrontar los alcances cognitivos del alumno con lo planteado en el análisis a priori.

3.3 Fase de Conclusión.

Esta fase está conformada por tres aspectos, que a continuación describimos:

- Análisis a-posteriori. Para cada actividad se ha realizado un análisis a-posteriori, donde se muestran las acciones ejecutadas por el alumno, retroacciones causadas por el *"medio"* y señales de aprendizaje en los alumnos, que se produjeron durante el desarrollo de la situación a-didáctica. Se presentan aquí, algunas evidencias visuales de lo acontecido durante el desarrollo de la situación con los alumnos de octavo grado.

- Reflexiones de los profesores participantes del cursillo: ***Alnuset** como medio: Situaciones a-didácticas sobre el concepto de variable.*

  Se plasman a modo de reflexión algunas intervenciones y comentarios hechos por los profesores, acerca de los alcances que puede tener la situación a-didáctica diseñada, en el aprendizaje de la noción de variable.

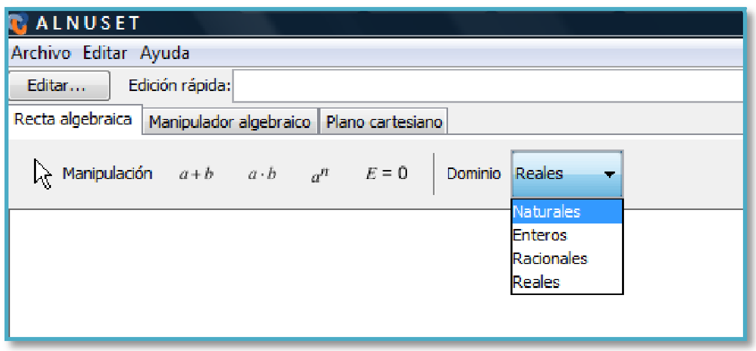
  En las conclusiones se puede evidenciar si realmente después de hacer las actividades con los alumnos, se logró lo que se esperaba en el análisis a priori.

4. FASE DE DISEÑO DE LA SITUACIÓN A-DIDÁCTICA.

La situación a-didáctica está compuesta por 5 actividades. A continuación presentamos cada una de ellas seguidas de un análisis que contiene las posibles acciones del sujeto, las retroacciones esperadas del medio y las señales que hemos considerado de aprendizaje. También se describe cual podría ser el papel del profesor y finalmente se analiza desde el modelo 3UV cuales de estos aspectos de la variable la actividad posibilita sean desarrollados.

4.1 Actividad uno.

4.1.1 En el programa AlNuSet entra al editor numérico e ingresa las expresiones x y $x-2$.Abre la opción dominio y pica sobre "Naturales".



a) Usando el puntero intenta colocar $x-2$ sobre 10. ¿En qué valor se coloca x cuando esto ocurre?

b) Intenta colocar $x-2$ sobre 8 y luego sobre 14. ¿En qué valores se puso respectivamente x para lograr las posiciones indicadas?

c) Intenta colocar $x-2$ sobre 15 de tal manera que x quede sobre 3. ¿Esto es posible?

d) ¿Es posible encontrar un valor en donde x y $x-2$ queden sobre el mismo valor? Justifica tu respuesta.

a) Ubica x en 1, ¿en dónde se ubica $x-2$?

b) ¿Es posible que cuando x está ubicado en 1, aparezcan simultáneamente sobre la recta x y $x-2$? ¿Cómo?

ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 1.1		
ACCIÓN	**RETROACCIÓN**	**SEÑALES DE APRENDIZAJE**
A1. El alumno intenta arrastrar la expresión $\boldsymbol{x-2}$ usando el puntero.	**R1**. AlNuSet no permite que la expresión $x-2$ se mueva sobre la recta.	**S1.** Luego de repetidos intentos de la acción, el alumno deberá intentar una nueva acción.
A2. El alumno intenta arrastrar la expresión $\boldsymbol{x}$ usando el puntero.	**R2.** AlNuSet permite que la expresión x se mueva a lo largo de la recta, y a medida que esto ocurre la expresión $x-2$ también lo hace.	**S2.** El alumno debería interpretar que para mover la expresión $x-2$ se hace necesario mover la expresión x.
A3. El alumno mueve $\boldsymbol{x}$ en la recta para tratar de lograr una ubicación de $\boldsymbol{x}$ que conlleve a que la expresión $\boldsymbol{x-2}$ se posicione justo sobre 10.	**R3.** AlNuSet permite todos los movimientos de x en la recta y hace evidente que el valor para el cual la expresión $x-2$ es 10, sucede cuando la expresión x se posiciona en 12.	**S3.** El alumno debe interpretar que el valor de x para el cual $x-2$ equivale a 10, es 12.
A4. El alumno mueve la expresión $\boldsymbol{x}$ sobre la recta con el objetivo de posicionar la expresión $\boldsymbol{x-2}$ sobre 8 y luego sobre 14.	**R4.** AlNuSet muestra que estos posicionamientos ocurren cuando x es igual a 10 y a 12 respectivamente.	**S4.** Estos nuevos posicionamientos le deben informar al alumno que los valores que toma la expresión $x-2$ dependen valores específicos de x.
A5. El alumno intenta hacer coincidir el valor de la expresión $\boldsymbol{x-2}$ con el valor 15, al tiempo que $\boldsymbol{x}$ coincida con el valor 3.	**R5**. AlNuSet muestra que esta acción no es posible, pues si bien por separado se pueden cumplir simultáneamente no.	**S5.** El estudiante debe percatarse acerca de la dependencia de la expresión $x-2$ con respecto a la expresión x. Por lo que si se posiciona x en 3, el único valor en el cual se puede poner $x-2$ simultáneamente es en 1.
A6. El alumno intenta buscar mediante desplazamientos de la expresión $\boldsymbol{x}$ sobre la recta, un lugar en el cual coincida con la expresión $\boldsymbol{x-2}$.	**R6.** AlNuSet muestra que no hay valor para el cual estas dos expresiones coincidan.	**S6.** El alumno puede fácilmente encontrar un patrón de distancia entre una y otra expresión equivalente a 2, quien es el que impide que estas expresiones sean iguales.

A7. El alumno posiciona la expresión $\boldsymbol{x}$ en el valor 1.	**R7.** La expresión $x-2$ desaparece de la pantalla.	**S7.** El alumno debe preguntarse el porqué de lo sucedido e intuir que el valor que toma $x-2$ es -1, este valor no se encuentra en los Naturales.
A8. El alumno intenta variar el dominio de los Naturales a los Enteros. Luego que se ha posicionado en $\boldsymbol{x}$ igual a 1.	**R8.** AlNuSet muestra la expresión $x-2$ ubicada sobre el valor -1.	**S8.** Refuerza la acción.

Tabla 3. Análisis a priori Actividad 1.1

<u>Papel del Profesor</u>

- Ocurrido **R1** el alumno puede querer desistir de intentar mover la expresión "$x-2$" argumentando que no se puede; el profesor en ese instante debe intervenir diciéndole que si puede, además el profesor podría afirmar que el mismo ya lo ha hecho en anteriores ocasiones.

- Ocurrido **R5** el alumno podría asumir que simplemente no es posible ubicar $x-2$ y x en las posiciones indicadas, sin preocuparse por el ¿por qué?.
  El profesor no debe desaprovechar la oportunidad y ha de intervenir con la pregunta ¿Por qué crees que esto no es posible?

- Ocurrido **R7** el alumno al preguntarse el porqué desapareció la expresión "$x-2$" quizás tenga problemas en encontrar la explicación, es entonces donde el profesor puede intervenir con la pregunta ¿Te has dado cuenta que existe una distancia que se mantiene siempre constante a medida que se desplaza, entre "x" y "$x-2$"? ¿Hay números a la izquierda de cero?

<u>Usos de la variable MODELO 3UV.</u>

En general se utilizan los tres usos de la variable como: número general, incógnita especifica y relación funcional según el modelo 3UV; observándose el trabajo de los aspectos **G2, I1, I2, I3, F1, F2 y F3.**

(G2). El alumno observará en la Recta Algebraica las expresiones "x" y "$x-2$" de una manera indeterminada que puede asumir cualquier valor.

(I1). El alumno deberá reconocer en la situación problema la presencia de lo desconocido; en este caso el valor que debe tomar "x" para que "$x-2$" se posicione en 10.

(I2). El alumno deberá interpretar a "x" como la representación de lo desconocido.

(I3). El alumno al posicionar x en 12 ($x = 12$), verá cumplido que $x-2$ se posiciona en 10 ($x-2 = 10$).

(F1). El alumno deberá reconocer la correspondencia entre las expresiones "x" y "$x-2$".

(F2). El alumno determinará los valores de "$x-2$" dados los valores de "x".

(F3). El alumno deberá determinar en donde se puede posicionar "x" para obtener valores específicos de "$x-2$" ($x-2 = 8$) y ($x-2 = 14$).

4.1.2 Abre la opción dominio y puntee en “**Enteros**”.

a) Mueve la expresión x sobre la recta y observa en qué valores se puede ubicar x de tal manera que $x + 1$ se ubique a la derecha de 3. Encuentra TODOS los posibles valores.
b) Ve al Editor y escribe la expresión $x + 1 > 3$. Desplazando x sobre la recta, encuentra TODOS los valores para los cuales, el botón rojo del recuadro “Sets” se vuelve verde.
c) Mueve la expresión x sobre la recta y observa en qué valores se puede ubicar x de tal manera que $x + 1$ se ubique a la izquierda de 3. Encuentra TODOS los posibles valores.
d) Ve al Editor y escribe la expresión $x + 1 < 3$. Desplazando x sobre la recta, encuentra TODOS los valores para los cuales, el botón rojo del recuadro “Sets” se vuelve verde.
e) Mueve la expresión x sobre la recta y observa en qué valores se puede ubicar x de tal manera que $x + 1$ se ubique en 3. Encuentra TODOS los posibles valores.
f) Ve al Editor y escribe la ecuación $x + 1 = 3$. Desplazando x sobre la recta, encuentra TODOS los valores para los cuales, el botón rojo del recuadro “Sets” se vuelve verde.

ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 1.2		
ACCIÓN	**RETROACCIÓN**	**SEÑALES DE APRENDIZAJE**
A1. El alumno intenta arrastrar la expresión $\boldsymbol{x}$ usando el puntero.	**R1.** AlNuSet permite que la expresión x se mueva a lo largo de la recta, y a medida que esto ocurre la expresión $x + 1$ también lo hace y que para valores de x más a la derecha de 2, la expresión $x + 1$ está a la derecha de 3.	**S1.** El alumno debería interpretar que los posibles valores de x que hacen cumplir la condición que $x + 1$ está a la derecha de 3, son todos los que están a la derecha de 2. Podrían incluso nombrarlos como 3, 4, 5, 6,…
A2. El alumno edita la inecuación $\boldsymbol{x} + \mathbf{1} > 3$, luego mueve la expresión $\boldsymbol{x}$ sobre la recta.	**R2.** AlNuSet permite que en el recuadro sets, el botón de la inecuación se vuelva verde para los valores desde tres a los que están a la derecha de él. La expresión $x + 1$ está a la derecha de 3.	**S2.** El alumno debería interpretar que los valores donde la inecuación tiene solución son cuando la expresión x ; está en 3, 4, 5, 6,..., Además el alumno debe interpretar que la inecuación no se cumple para valores a la izquierda de tres; podría incluso nombrarlos como 2, 1, 0,-1,-2,-3,…

A3. El alumno arrastra la expresión $\boldsymbol{x}$ sobre la recta.	**R3.** AlNuSet permite que la expresión x se mueva a lo largo de la recta, y a medida que esto ocurre la expresión $x+1$ también lo hace y que para valores de x a la izquierda de 1, la expresión $x+1$ está a la izquierda de 3.	**S3.** El alumno debería interpretar que los posibles valores de x que hacen cumplir la condición que $x+1$ está a la izquierda de 3, son todos los que están a la izquierda de 1. Podrían incluso nombrarlos como 0,-1,-2,…
A4. El alumno edita la inecuación $\boldsymbol{x+1<3}$, luego mueve la expresión $\boldsymbol{x}$ sobre la recta.	**R4.** AlNuSet permite que en el recuadro sets el botón de la inecuación se vuelva verde para los valores desde uno a los que están a la izquierda de él. La expresión $x+1$ está a la izquierda de 3.	**S4.**El alumno debería interpretar que los valores donde la inecuación tiene solución son cuando la expresión x ; está en 1, 0,-1,-2,-3,… Además el alumno debe interpretar que la inecuación no se cumple para valores que están en tres y a la derecha de él. Podría incluso nombrarlos como 3, 4, 5, 6, 7,…
A5. El alumno arrastra la expresión $\boldsymbol{x}$ sobre la recta.	**R5.** AlNuSet permite que la expresión x se mueva a lo largo de la recta, y a medida que esto ocurre la expresión $x+1$ también lo hace y que para el valor de x cuando esta en 2, la expresión $x+1$ está en 3.	**S5.**El alumno debería interpretar que los posibles valores de x que hacen cumplir la condición que $x+1$ este en 3, es para el valor 2.
A6. El alumno edita la ecuación $\boldsymbol{x+1=3}$, luego mueve la expresión $\boldsymbol{x}$ sobre la recta.	**R6.** AlNuSet permite que en el recuadro sets el botón de la ecuación se vuelva verde para el valor de 2. La expresión $x+1$ está en 3.	**S6.**El alumno debería interpretar que los valores donde la ecuación tiene solución son cuando la expresión x ; está en 2. Es el único valor que hace que la ecuación sea válida. Además el alumno debe interpretar que la ecuación no se cumple para valores a la izquierda y a la derecha de tres; podría incluso nombrarlos como,…, 4, 3, 1, 0 ,-1,-2,-3,…

Tabla 4. Análisis a priori Actividad 1.2

Papel del Profesor

Se piensa que para esta parte de la actividad, el docente tiene una posición observante respecto al proceso que siguen los alumnos; pensando en la institucionalización del saber.

Usos de la variable MODELO 3UV.

(G2). El alumno observará en la Recta Algebraica las expresiones "x" y "$x + 1$" de una manera indeterminada que puede asumir cualquier valor.

(I1). El alumno reconocerá en la situación problema ubicar "$x + 1$" a la derecha de 3, unos valores "x" desconocidos.

(I2). El alumno reconoce a la expresión "x" como el símbolo de los valores específicos que darán solución a la situación problema.

(I3). El alumno puede identificar por ejemplo: para qué valores la desigualdad $x + 1 > 3$ se cumple y esto es cuando en el recuadro "Sets" la señal de color se coloca en verde.

(F1). El alumno deberá reconocer la correspondencia entre las expresiones "x" y "$x + 1$".

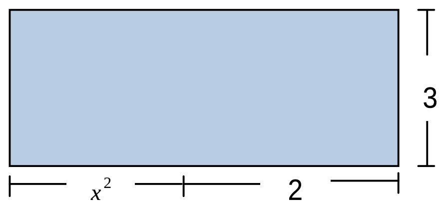
(F2). El alumno determinará los valores de "$x + 1$" dados los valores de "x".

(F3). El alumno deberá determinar en donde se puede posicionar "x" para obtener valores específicos de "$x + 1$" para ($x + 1 > 3$), ($x + 1 < 3$) y ($x + 1 = 3$).

(F5). El alumno podrá determinar el intervalo de valores de "x" para los cuales tiene sentido $x + 1 > 3$.

4.2 *Actividad dos.*

4.2.1 Encuentra todos los valores de x para los cuales el área del rectángulo que aparece a continuación, está entre 9 y 33. Escribe tus hipótesis y verifícalas con AlNuSet.



ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 2.1		
ACCIÓN	**RETROACCIÓN**	**SEÑAL DE APRENDIZAJE**
A1. Mueve "$\boldsymbol{x}$" sobre la recta algebraica.	**R1.** Se observa que la expresión $(x^2+2)\cdot 3$ se mueve a medida que se mueve "x".	El alumno debe percatarse de la relación de dependencia entre las expresiones $\mathbf{(x^2+2)\cdot 3}$ y "$\boldsymbol{x}$". Así como de que $\mathbf{(x^2+2)\cdot 3}$ es precisamente la expresión que representa el área de dicho rectángulo.
A2. Mueve "$\boldsymbol{x}$" sobre la recta nuevamente, pero ahora más lentamente observando los valores que toma $\mathbf{(x^2+2)\cdot 3}$	**R2.** Se observa que cuando esto ocurre abajo en el recuadro "sets" las señales de color en las inecuaciones cambian de rojo a verde para ciertos valores de "x". $(x^2+2)\cdot 3 \leq 33$ $9 \leq (x^2+2)\cdot 3$	Para el alumno debe ser claro que las dos inecuaciones mostradas en el recuadro "sets" representan en forma matemática los datos del ejercicio. Específicamente que la primera inecuación indaga sobre las áreas que se pueden formar con magnitud inferior a 33 y la segunda representa los valores de área superiores a 9.
A3. Mueve "$\boldsymbol{x}$" sobre la recta nuevamente, pero ahora lo hace observando cómo cambian las señales de color al lado de las inecuaciones.	**R3.** A medida que se mueve x se observa que para valores de 3 y a la izquierda de 3 la inecuación $(x^2+2)\cdot 3 \leq 33$ se señala en verde y que para valores de 1 y a la derecha de 1 la inecuación $9 \leq (x^2+2)\cdot 3$ se señala en verde.	El alumno no debe perder el objetivo planteado en el problema que es el de encontrar las áreas que cumplen la condición de estar entre 9 y 33 unidades, así que para él debe ser claro que el problema ahora, esta encontrar los valores de $\boldsymbol{x}$ que cumplen simultáneamente la primera y la segunda inecuación.
A4. Mueve "$\boldsymbol{x}$" buscando que posiciones ponen en señal verde simultáneamente las dos inecuaciones.	**R4**. Se observa que las dos inecuaciones se señalan de verde cuando "$\boldsymbol{x}$" se posiciona entre 1 y 3 pero que también lo hacen para posiciones de "$\boldsymbol{x}$" entre -1 y -3. Sin embargo los intervalos a la derecha de las inecuaciones solo se señalan en verde cuando $\boldsymbol{x}$ se posiciona entre 1 y 3.	El alumno debe poder concluir que estos intervalos indican el dominio de $\boldsymbol{x}$ que da sentido a la situación planteada, pues en términos de distancia no podríamos medir longitudes negativas. Por tanto, debería concluir que los valores de $\boldsymbol{x}$ que dan solución a la situación están entre 1 y 3. $(x^2+2)\cdot 3 \leq 33$ $\quad x \in [0,+\infty[$ $9 \leq (x^2+2)\cdot 3$ $\quad x \in [0,+\infty[$

Tabla 5. Análisis a priori Actividad 2.1

Papel del Profesor

Es clave para darle solución al ejercicio que los alumnos relacionen la expresión $(x^2 + 2) \cdot 3$ con el área del rectángulo que está en la hoja. Sin embargo para algunos de ellos esto no puede ser tan claro, para lo cual el profesor puede formular la pregunta ¿Cuál es la fórmula del área del rectángulo? ¿Cuál es la base de nuestro rectángulo? ¿Cuál es la altura de nuestro rectángulo?.

Usos de la variable MODELO 3UV.

En general se utilizan los tres usos de la variable como: número general, incógnita especifica y relación funcional según el modelo 3UV; observándose el trabajo de los aspectos **G2, F1, F4, I1, I4, F5**.

(G2). El alumno identificará la expresión $x^2 + 2$ como la base del rectángulo, donde "x" puede tomar cualquier valor.

(F1) y (F4). El alumno debería reconocer la relación entre la expresión

$(x^2 + 2) \cdot 3$ y el área del rectángulo por lo que se vería claramente la variación conjunta de "x" y el área.

(I1) y (I4). El alumno debería reconocer a "x" como una cantidad desconocida que puede hallarse.

(F5). El alumno debería observar la relación que existe entre el intervalo de variación del área y el intervalo de variación de "x".

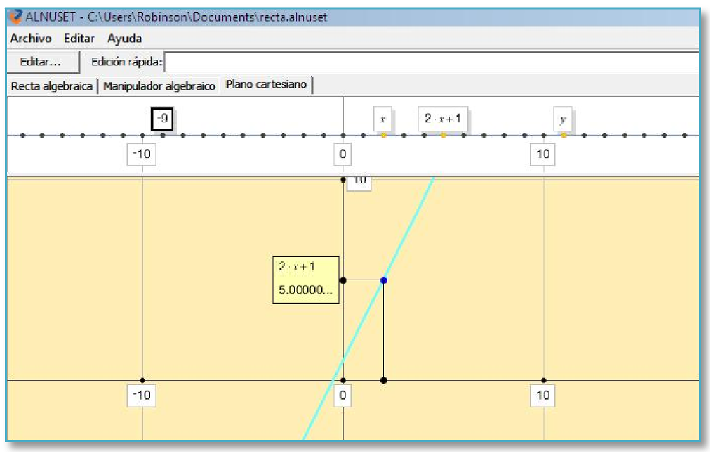
4.2.2 Escribe en el editor las expresiones:

- x
- y
- $2x + 1$

Ve al "Plano Cartesiano" ubícate sobre la expresión $2x + 1$, da clic derecho y pica sobre la opción "Mostrar/ocultar" para el valor de x.

a) Utilizando los movimientos de x y y en la recta algebraica, determina si los puntos $(0,1)$; $(1,4)$; $(2,8)$ y $(3,7)$ pertenecen a la recta $y = 2x + 1$. Justifica tu respuesta.

b) El valor de y para un punto de esta recta es 15, ¿Cuál es el valor correspondiente para x en este punto?



ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 2.2		
ACCIÓN	**RETROACCIÓN**	**SEÑAL DE APRENDIZAJE**
A1. Se mueve "$\boldsymbol{x}$" en la recta algebraica. "$\boldsymbol{y}$"	**R1.** Se observa que la expresión "$2x+1$" también se mueve sobre la recta. Y en el plano cartesiano hay un punto que se mueve sobre una recta.	**S1.** El alumno notará que la expresión "$\boldsymbol{2x+1}$" depende de "$\boldsymbol{x}$".
A2. Se repiten los movimientos para "$\boldsymbol{x}$" sobre la recta, detallando el punto que se mueve sobre esta.	**R2.** Se observa que el punto que se mueve sobre la recta es el resultado de un movimiento de "x" sobre la horizontal y de "$2x+1$" sobre la vertical.	**S2.** Luego de algunas iteraciones, el alumno puede observar que cada pareja de movimientos determina un punto sobre la recta.
A3. El alumno busca determinar si el punto (2,8) está sobre la recta, para ello mueve "$\boldsymbol{x}$" a la posición 2, y mueve "$\boldsymbol{y}$" a la posición 8.	**R3.** En la recta aparece la expresión "x" sobre 2, la expresión "$2x+1$" sobre 5 y la expresión "y" sobre 8.	**S3.** El alumno se preguntará sobre el significado de desaparecer o sobreponerse de la expresión "$\boldsymbol{2x+1}$".
A4. El alumno indaga sobre el punto (3,7) posicionando "$\boldsymbol{x}$" en 3 y "$\boldsymbol{y}$" en 7.	**R4.** En la recta aparece la expresión "x" sobre 3, "y" sobre 7 y se encuentra escondida bajo "y" la expresión "$2x+1$".	**S4.** El alumno se debe percatar sobre el hecho de que la sobreposición se puede ver cómo $\boldsymbol{y=2x+1}$ y relacionarlo con el problema inicial de los puntos de la recta a la consigna de "cuando la expresión "$\boldsymbol{2x+1}$" desaparezca, es porque el punto de coordenadas $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ está en la recta. En tal caso se resolverá el problema anotando que $(0,1) \in y=2x+1$ $(1,4) \notin y=2x+1$ $(2,8) \notin y=2x+1$ $(3,7) \in y=2x+1$
A5. Mueve"$\boldsymbol{x}$" a 0 y "$\boldsymbol{y}$"a 1.	**R5.**La expresión "y" se sobrepone a la expresión "$2x+1$".	**S5.**Debería ser fácil ver para el alumno, que el punto (0,1) pertenece a la recta.
A6. Mueve "$\boldsymbol{x}$" a 1 y"$\boldsymbol{y}$" a 4.	**R6.**Vuelve a aparecer la expresión "$\boldsymbol{2x+1}$" posicionándose sobre 3.	**S6.** Debería ser fácil ver para el alumno, que el punto (1,4) no pertenece a la recta.

Tabla 6. Análisis a priori Actividad 2.2

Papel del Profesor

La clave del ejercicio recae en la interpretación correcta del signo igual, es por eso que el profesor debe estar preparado para la eventual impercepción de la igualdad. Por lo que de ocurrir esto el profesor debe acudir a frases como: ¿Qué condiciones debe cumplir la expresión "y" y la expresión $2x + 1$ para que los puntos (x, y) pertenezcan a la recta $y = 2x + 1$? La misma pregunta la puede hacer el profesor cuando para el alumno sea inexplicable el hecho de que una de las expresiones "y" o "$2x + 1$" desaparezcan de la recta.

Usos de la variable Modelo 3UV

(F4). El alumno observará que existe una variación conjunta entre la expresión "x" por la horizontal y "$2x + 1$" por la vertical del plano cartesiano.

(F3). El alumno podrá encontrar diferentes valores para la expresión "$2x + 1$" variando "x" dichos valores claramente serán "y" si cumplen la relación $y = 2x + 1$. "En la recta las expresiones "y" y "$2x + 1$" se sobrepondrán una a la otra y la retroacción del medio será que una de ellas desaparezca".

(F2). El alumno al hacer coincidir la expresión "$2x + 1$" en un "y" determinado podrá encontrar el "x" que produjo este valor.

(F1). El alumno ya debió visualizar como; para cada "x" corresponde un respectivo "y", aunque en nuestra recta "y" no sea un objeto dependiente de "x". Se volverá dependiente en la medida que cumpla con la igualdad $y = 2x + 1$

(G4). El alumno podrá manipular las variables "x" e "y" por medio de posicionamiento sobre la recta.

(G2). Los diferentes posicionamientos de "x", "$2x + 1$", y, "y" deberían informarle al alumno que las variables pueden asumir cualquier valor.

(I1). Al determinar si el punto (2,8) está o no en la recta $y = 2x + 1$ se puede evidenciar una situación problema en la cual existe algo desconocido o por verificar.

(I2). Cuando el alumno observa que en la recta algebraica se mueve "$2x + 1$", en el plano ocurre que dicho movimiento se da en el eje vertical y este valor es particular para cada "x".

(I3). El alumno puede probar si un punto pertenece a la recta siempre que un movimiento de "x" produzca que la expresión "$2x + 1$" se posicione en el mismo lugar de la expresión "y" ubicada con anterioridad.

(I4). El alumno podrá una y otra vez encontrar los valores de "y" que correspondan a la recta $y = 2x + 1$ cambiando la posición de "x" y observando el lugar en el que se posiciona "$2x + 1$".

4.3 Actividad tres.

4.3.1 Reproduce con ayuda del manipulador algebraico el desarrollo de la siguiente desigualdad. Y reflexiona sobre lo que ocurre al pasar de un renglón al otro. No utilizar la opción simplificar en la reproducción del ejercicio.

$\frac{x}{2}-\frac{(x+1)}{3} \geq \frac{x+5}{4}$
$\frac{x}{2}-\frac{x+1}{3} \geq \frac{x+5}{4}$
$\frac{1}{6}\cdot x-\frac{1}{3} \geq \frac{x+5}{4}$
$\frac{1}{6}\cdot x-\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}\cdot x+\frac{5}{4}$
$\frac{1}{6}\cdot x-\frac{1}{3}-(\frac{1}{4}\cdot x+\frac{5}{4}) \geq 0$
$\frac{-1}{12}\cdot x-\frac{19}{12} \geq 0$
$\frac{-1}{12}\cdot x \geq \frac{19}{12}$
$x \leq -12\cdot\frac{19}{12}$
$x \leq -19$
$x \in]-\infty, -19]$

a) ¿Cómo se llega del renglón 2 al 3? ¿Qué operaciones o propiedades se aplicaron? Podrías escribir de forma general las propiedades aplicadas.

b) Del renglón 7 al 8 se cambió el sentido de la desigualdad, ¿Por qué?

ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 3.1		
ACCIÓN	**RETROACCIÓN**	**SEÑAL DE APRENDIZAJE**
A1. El alumno mueve el puntero sobre la expresión plasmada en el manipulador.	**R1.**El manipulador va mostrando un recuadro rojo que dependiendo la posición del puntero encierra toda o parte de la expresión.	**S1.**
A2. El alumno da clic sobre uno de los recuadros mostrados.	**R2.** En la parte izquierda del manipulador aparecen señaladas en amarillo algunas reglas algebraicas.	**S2.**
A3. El alumno se mueve sobre las reglas seleccionadas.	**R3.** Se observa que cuando se posiciona sobre cualquiera de ellas su color cambia de amarillo a rojo.	**S3.**
A4. El alumno pica sobre una cualquiera de ellas.	**R4.** Se observa que en el lado derecho aparece un nuevo renglón con otra expresión algebraica.	**S4.** El alumno podrá percatarse luego de una observación que no es otra expresión, sino que es una transformación de la expresión inicial lograda luego de aplicar la regla que señaló. El alumno también podrá observar que este nuevo renglón que aparece no corresponde al segundo paso de la expresión a reproducir.

	R4.1. Luego que aparece el segundo renglón aparece en el primer renglón una marca en verde que señala parte de la expresión.	**S4.1** El alumno deberá percatarse que esta señal indica la parte de la expresión a la cual se le aplicó la regla que dio origen al segundo renglón. A su vez también deberá darse cuenta que en el desarrollo de la expresión a reproducir, también aparece una señal de color verde en el primer renglón que debe servirle para determinar si es la misma que él ha obtenido. Si este es el caso y sin embargo el renglón que obtuvo no es el mismo que aparece en la hoja, deberá cuestionarse por la regla que le aplicó a dicha selección. Ahora si el recuadro en verde no es el mismo que el de la hoja deberá suprimir el renglón e intentarlo nuevamente con la selección indicada en la hoja.
A5. El alumno selecciona la parte de la expresión que aparece subrayada en verde en la hoja.	**R5.** En la parte izquierda de las reglas se seleccionan en amarillo algunas de ellas.	**S5.** El alumno verá que estas reglas señaladas son diferentes a las señaladas para el caso anterior donde la selección en la expresión fue otra. En este punto el alumno ya debe tener claro la relación entre las reglas que señala y el resultado que obtiene en el renglón siguiente, por lo que advertirá con algo de lógica la similitud en la forma de la regla con la forma del resultado que desea reproducir, para dar clic en la que más se le acomode.
A6. Da clic sobre la regla simplificar paréntesis.	**R6.** Efectivamente aparece el segundo renglón y este corresponde al segundo paso de la hoja.	**S6.** El alumno observa que en efecto la regla que utilizó canceló los paréntesis. Y dio origen al reglón deseado.
A7. Selecciona el lado izquierdo de la desigualdad.	**R7.** Aparecen seleccionadas algunas reglas como en el caso anterior.	**S7.** El alumno deberá comparar la forma de estas reglas seleccionadas con la forma que desea obtener en el paso siguiente, pero si no logra ver claramente similitud debe optar por descartar las que definitivamente no tienen ningún parecido e intentar mediante ensayo y error con aquellas en las que persista duda, hasta llegar al acierto.

A8. El alumno selecciona la regla simplificar.	**R8.** Aparece un nuevo renglón que corresponde al siguiente paso del desarrollo mostrado en la hoja.	**S8.** El alumno verá que esta regla lo que hizo fue agrupar los términos que tienen “$\boldsymbol{x}$” en uno solo y los términos numéricos en otro.
A9. El alumno selecciona la parte derecha de la desigualdad y le aplica la regla simplificar.	**R9.** Aparece un nuevo renglón que corresponde al siguiente paso del desarrollo mostrado en la hoja.	**S9.** El alumno verá que esta regla lo que hizo fue agrupar los términos que tienen $\boldsymbol{x}$ en uno solo y los términos numéricos en otro.
A10. El alumno selecciona toda la desigualdad y le aplica la regla $A \lesseqgtr B \Rightarrow A-B \lesseqgtr 0$	**R10.** Aparece un nuevo renglón que corresponde al siguiente paso del desarrollo mostrado en la hoja.	**S10.** El alumno notará que lo que le hace esta regla a la expresión es poner todos sus términos al lado izquierdo del signo de desigualdad. También observará que cuando esto sucede la forma como se operan los términos cambian de un lugar a otro.
A11. Se selecciona la parte izquierda de la desigualdad y se aplica la regla simplificar.	**R11.** Aparece un nuevo renglón que corresponde al siguiente paso del desarrollo mostrado en la hoja.	**S11.** Nuevamente el alumno observará como esta regla lo que hace es sumar términos semejantes.
A12. Se selecciona toda la desigualdad y se aplica la regla $A+T \lesseqgtr B \Rightarrow A \lesseqgtr B-T$	**R12.** Aparece un nuevo renglón que corresponde al siguiente paso del desarrollo mostrado en la hoja.	**S12**. El alumno observará que esta regla lo que hizo fue dejar a un lado de la desigualdad las “$\boldsymbol{x}$” y al otro la parte numérica.

A13. Se selecciona toda la desigualdad y se aplica la regla $T \cdot A \lesseqgtr B \Rightarrow A \lesseqgtr \frac{B}{T}$	**R13.** Aparece un nuevo renglón que corresponde al siguiente paso del desarrollo mostrado en la hoja.	**S13.** El alumno verá que esta regla deja totalmente despejada en el lado izquierdo de la desigualdad la variable $\boldsymbol{x}$ y la parte numérica a lado derecho del signo de la desigualdad, particularmente se observará que el valor negativo que acompañaba a $\boldsymbol{x}$ a la izquierda, hace que el signo de la desigualdad cambie cuando este pasa al otro lado.
A14. Se selecciona la parte derecha de la desigualdad y se aplica la regla simplificar.	**R14.** Aparece un nuevo renglón que corresponde al siguiente paso del desarrollo mostrado en la hoja.	**S14.** El alumno observa como la opción simplificar se encarga de realizar el producto entre los dos términos numéricos.
A15. El alumno selecciona la regla simplificar Dominio o la regla $L \Leftrightarrow x \in S$	**R15.** Finalmente se logra reproducir el último paso de la hoja.	**S15.** El alumno deberá interpretar que este último renglón define por medio del intervalo, los $\boldsymbol{x}$ para los cuales se cumple la desigualdad.

Tabla 7. Análisis a priori Actividad 3.1

Papel del Profesor

En este ejercicio el papel del docente es fundamental, ya que el alumno tiene la posibilidad de afrontar la situación de dos formas: responsable e irresponsablemente, y sin embargo obtener éxito. En este sentido el profesor debe hacer preguntas a los alumnos sobre los cuales sospecha no estén asumiendo la situación de una forma responsable y consciente hasta el punto de pedirles que elaboren juicios de opinión verbales explicando lo que pasa de un renglón a otro.

Usos de la variable Modelo 3UV

(G1), (G2). El alumno reconocerá patrones y percibirá reglas aplicables a una expresión para lo cual interpreta un símbolo como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor.

(G4). El alumno manipulará (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

(I4). El alumno podrá determinar la cantidad desconocida “x” que aparece en la inecuación.

4.3.2. Las gráficas de colores rojo, verde, azul y morado, representan el recorrido de cuatro diferentes rutas de bus. Andresito se encuentra caminando por la carrera cero “la horizontal” y desea ir a su casa que se encuentra en la esquina de la “calle 2 con carrera 4”. El punto negro en la horizontal representa el movimiento de Andresito en busca de una parada de bus. Los puntos azules sobre las gráficas representa la posición del bus.

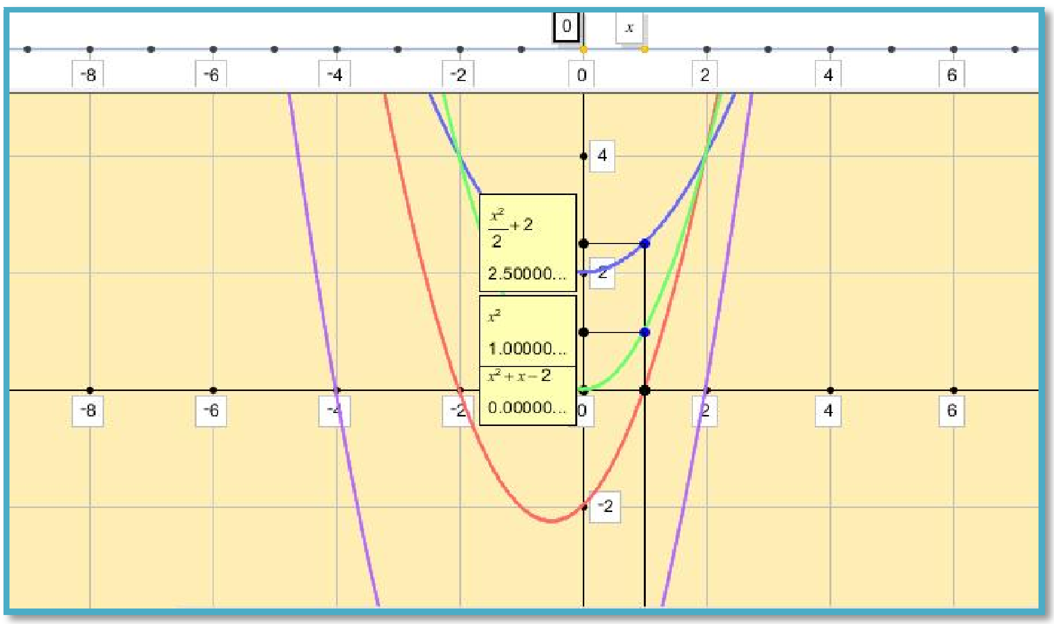
El movimiento de este punto se logra a través del arrastre de sobre la recta algebraica mostrada arriba del plano.

La ruta Roja es (la ruta siempre viva).

La ruta Verde es (la ruta carmelita).

La ruta Azul es (la ruta el laguito).

La ruta morada es (la ruta flor).



- ¿Qué rutas pasan por la carrera cero?
- ¿Qué rutas pasan por la casa de Andresito?
- Si Andresito se encuentra en la carrera cero. ¿En qué calles puede pararse a esperar una ruta de bus?
- ¿En qué calles se debe parar para tomar una ruta que lo lleve a su casa?

ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 3.2		
ACCIÓN	**RETROACCIÓN**	**SEÑAL DE APRENDIZAJE**
A1. Se mueve **x** sobre la recta algebraica.	**R1.** Se observa como los puntos azules en algún momento pasan por la carrera cero, excepto el punto azul que esta sobre la ruta el laguito.	**S1.** El alumno observará que a medida que varía la posición de $\boldsymbol{x}$ el punto azul sobre las rutas también varía.
A2. Se continúa con el movimiento de "$\boldsymbol{x}$" sobre la recta, ahora con especial atención en el recorrido de los puntos azules.	**R2.** Las rutas azul, verde y roja pasan por el punto (2,4) que corresponde a la dirección de la casa de Andresito.	**S2**. El alumno observará que las tres graficas (azul, verde y roja) tienen punto de intercepción en (2,4).
A3. Se realiza un nuevo movimiento de $\boldsymbol{x}$ sobre la recta algebraica.	**R3.** A medida que se dan estos movimientos sobre la recta algebraica, se observa como el punto negro sobre la horizontal se mueve, y como al aproximarse a las rutas los puntos azules sobre ellas se interceptan con la horizontal indicando que en ese sitio se puede tomar dicha ruta.	**S3.** El alumno observará que en las calles -4 y 2 pueden tomar la ruta morada. En las calles -2 y 1 puede tomar la ruta roja. En la calle cero puede tomar la ruta verde. El estudiante podrá responder a la pregunta de cuál ruta puede llevar a Andresito a su casa cuando las dos condiciones necesarias se cumplan, por un lado necesita una ruta que pase por su casa y por el otro una que pase por la carrera cero. Por lo que las rutas que cumplen con esta condición son: la rutas roja, con paradas en los puntos (-2,0) y (1,0).Y la ruta verde con parada en el punto (0,0).

Tabla 8. Análisis a priori Actividad 3.2

Papel del Profesor

Esta situación busca que el estudiante identifique la variable como una relación funcional. El estudiante encontrará una solución a la situación problema cuando encuentre una ruta que contenga los puntos $(x,0)$ y (2,4) por lo que el profesor debe hacer preguntas como: ¿Cuál es la dirección de la casa de Andresito?, si ubicáramos la casa en un plano cartesiano; donde "y" corresponde a las carreras y "x" a las calles ¿En qué coordenada se encuentra ubicada?, ¿Qué condiciones debe tener la ruta para que Andresito llegue a su casa?

Usos de la variable Modelo 3UV.

(F1). El alumno debe reconocer la correspondencia entre "x" e "y" representada en el plano cartesiano.

(F2). Identificará los valores de la variable dependiente dados los valores de la independiente (¿Qué rutas pasan por la casa de Andresito?).

(F3). El alumno identificará los valores de la variable independiente dados los valores de la variable dependiente. (¿En qué calles se debe parar Andresito para tomar una ruta que lo lleve a su casa?).

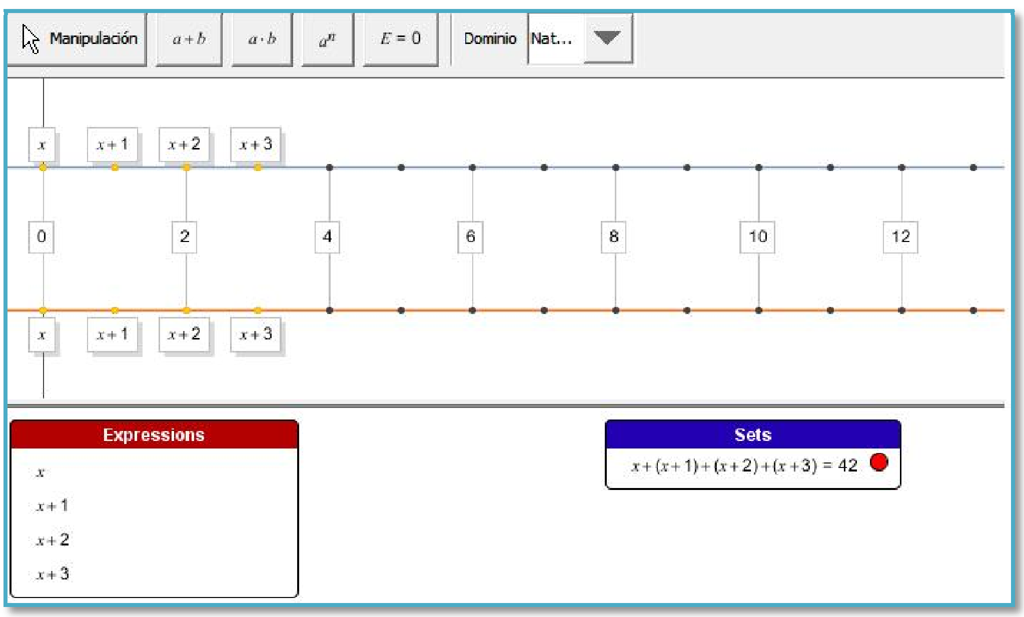
(F4). El alumno deberá reconocer la variación conjunta de las coordenadas "x" e "y" siempre que observe como cada recorrido de la ruta marca una función que tiene un "y" especifico para cada "x".

4.4 Actividad cuatro.

4.4.1. La edad de Juan es x años, la edad de Pedro es un año más que la edad de Juan, la edad de pablo es un año más que la edad de Pedro y la edad de Lucas es un año más que la edad de Pablo.

Cada punto en la Recta Algebraica representa un año.

- Si Juan tiene cinco años ¿Cuántos años tiene Lucas?
- ¿Qué edad tiene Juan cuando Pablo tiene 13 años?
- ¿Qué edad debe tener Juan, para que se cumpla que la suma de sus edades sea 42?



ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 4.1		
ACCIÓN	**RETROACCIÓN**	**SEÑAL DE APRENDIZAJE**
A1. Se mueve "$\boldsymbol{x}$" en la recta algebraica.	**R1.** A medida que "x" se mueve, también lo hacen $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$.	**S1.** El alumno consciente de la dependencia que se da entre el valor de la expresión "$\boldsymbol{x}$" y las otras expresiones. También debe deducir la relación entre las expresiones $\boldsymbol{x}$, $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})$, $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2})$ y $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{3})$ con los datos del problema.
A2. Se mueve "$\boldsymbol{x}$" a la posición 5.	**R2.** $(x+1)$ Pasa a la posición 6, $(x+2)$ a la posición 7 y $(x+3)$ a la posición 8.	**S2.** El alumno ya advirtió que la edad de Lucas corresponde a la posición sobre la recta de la expresión $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{3})$.
A3. Se mueve "$\boldsymbol{x}$" en la recta buscando que la expresión $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2})$ se posicione en 13, esto porque $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2})$ representa la edad de Pablo.	**R3.** "x" se posiciona en 11.	**S3.** Puesto que la edad de Juan está representada por la expresión"$\boldsymbol{x}$", es claro para el estudiante que su edad es 11 años.
A4. El alumno mueve "x" en la recta algebraica, buscando una posición en la cual se ponga en verde la ecuación en "sets" $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2})+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{3})=\boldsymbol{42}$	**R4.** Cuando la ecuación en "sets" se señala en verde "x" se posiciona en 9	**S4.** Para el alumno debe ser claro que esto indica que la edad de Juan es 9 años.

Tabla 9. Análisis a priori Actividad 4.1

Papel del Profesor

En esta situación se pueden observar claramente los tres usos de la variable, el profesor podría favorecer y enriquecer la situación haciendo preguntas sobre el significado de la variablex, en situaciones donde sea marcado un uso diferente.

Podría preguntar al estudiante ¿Que representan las expresiones x , $x+1$, $x+2$, y $x+3$? y ¿Qué valores pueden tomar estas expresiones?, también podría ¿preguntar qué pasa con $x+1$, $x+2$, $x+3$ si x varia? Y finalmente podría preguntar ¿Cómo podemos hallar el valor $x+2$ si conocemos el valor de x? y es claro que estas preguntas indagan y hacen referencia a los tres usos de la variable que el ejercicio permite trabajar.

Usos de la variable Modelo 3UV.

(G2). El alumno interpretara a la x como una representación simbólica de la cantidad de años que tiene Juan y es claro que tiene la posibilidad de tomar distintos valores.

(G5). El alumno tendrá la necesidad de simbolizar los datos presentes en la situación, o por lo menos asociar la representación simbólica que la situación planteada en AlNuSet le sugiere.

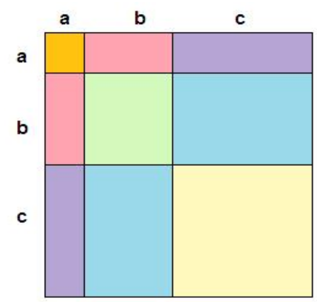
(F6). El alumno interpretará la relación que existe entre las variables edad del problema. Definiendo la variable x como la edad de Juan, se relacionaran funcionalmente las otras variables edad por medio de expresiones que contengan x.

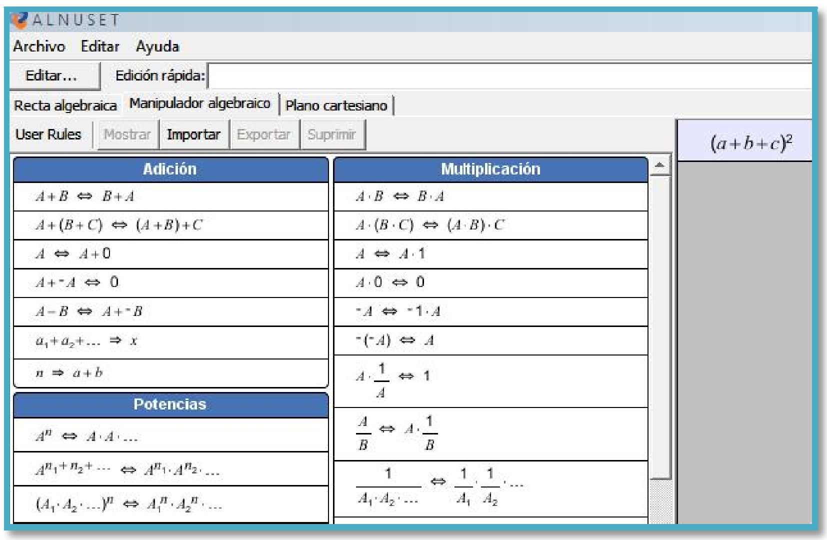
(F4). A partir de movimientos de "x" en la recta el alumno podrá visualizar la variación conjunta de las edades representadas simbólicamente a través de las expresiones: $x + 1, x + 2, x + 3$.

(F2) y (F3). El alumno podrá determinar las edades de Pedro Lucas y Pablo si se conoce la edad de Juan y también podrá determinar la edad de Juan si se conoce alguna de las edades de Pedro Lucas y Pablo.

(I1) (I2) y (I4). El alumno podrá determinar las respuestas a las preguntas 2 y 3 planteando ecuaciones y resolviéndolas

4.2.2. Utilizando el “Manipulador Algebraico” llega a una expresión de área para el cuadrado grande de lado $a + b + c$ en términos del área de los cuadriláteros que lo componen. No utilizar la opción simplificar.





ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 4.2 a		
ACCIÓN	**RETROACCIÓN**	**SEÑAL DE APRENDIZAJE**
A1. Seleccionar la expresión $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$ y aplicar la regla $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots.$	**R1.** Aparecerá un nuevo renglón con la expresión $(a+b+c)\cdot(a+b+c)$	**S1.** El alumno asociará que esta regla de la potencia fue aplicada a la expresión con base $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ y exponente 2.
A2. Seleccionar la expresión $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ y aplicar la regla $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}1+\boldsymbol{B}2+\cdots)=\boldsymbol{AB}1+\boldsymbol{AB}2+\cdots$	**R2.** Aparecerá un nuevo renglón con la expresión $a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)$	**S2.** El alumno asociará este paso a la forma como se multiplican los polinomios.
A3. seleccionar la primera parte de la expresión "$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$" y aplicarle la regla Simplificar	**R3.** aparecerá un nuevo renglón con la expresión $aa+ab+ac+b(a+b+c)+c(a+b+c)$.	**S3.** Claramente el alumno observa como la opción simplificar en este caso aplico la ley distributiva de la suma con respecto al producto a la parte de la expresión que seleccionó. Reforzará su acción para aplicarla a los otros dos segmentos de su expresión grande.
A4. Seleccionar la segunda parte de la expresión "$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$" y aplicarle la regla Simplificar	**R4.** Aparecerá un nuevo renglón con la expresión $aa+ab+ac+ba+bb+bc+c(a+b+c)$	**S4.** Refuerza su acción.
A5. Seleccionar la tercera parte de la expresión "$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$" y aplicarle la regla Simplificar	**R5.** Aparecerá un nuevo renglón con la expresión $aa+ab+ac+ba+bb+bc+ca+cb+cc$.	**S5.** El alumno podrá ver el gran parecido que va obteniendo luego de aplicadas las reglas a la expresión inicial.
A6. Seleccionar la expresión $\boldsymbol{aa}+\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{ba}+\boldsymbol{bb}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}+\boldsymbol{cb}+\boldsymbol{cc}$ y aplicarle la regla Simplificar.	**R6.** Aparecerá un nuevo renglón con la expresión $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+2\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{c}^2$	**S6.** Reforzará su acción.

Tabla 10. Análisis a priori Actividad 4.2.a

El alumno debe poder leer del problema que lo que se requiere es mostrar que es cierto que la expresión $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$ y que esta verificación es posible a través del manipulador algebraico aplicando reglas a la expresión $(a + b + c)^2$.

Papel del Profesor

El profesor en esta situación deberá preguntarle a sus alumnos que reglas del manipulador algebraico utilizaron y cuestionarlos porque razón lo hicieron así. Unas de las posibles preguntas pueden ser: ¿Qué ocurrió cuando aplicaste esa regla?, ¿Sabes cómo se llama esa regla?, el alumno puede o no saber cómo es el nombre exacto de dicha regla, pero si puede analizar lo que produjo a la expresión cuando la utilizo. El alumno puede buscar otras reglas diferentes a las que se espera que se den para resolver la situación como: solo usar la regla simplificar y obtener el resultado de manera inmediata si hacer antes otros procedimientos, es ahí donde el profesor debe intervenir diciéndoles que deben utilizar otras reglas para realizar un mejor procedimiento donde lo conduzcan a la misma respuesta y que además deberán justificar lo hecho anteriormente.

Usos de la variable Modelo 3UV

(G1). El alumno deberá reconocer patrones y percibir reglas y métodos en secuencias esto se da, cuando a la expresión $(a + b + c)^2$ se le aplica la regla adecuada y se tiene lo siguiente
$(a + b + c)\cdot(a + b + c)$.

(G4). El alumno deberá manipular (simplificar, desarrollar) las expresiones para obtener la expresión que se quiere determinar $(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2)$.

4.2.3. Utilizando la “Recta Algebraica” completa los valores en la siguiente tabla:

a	b	c	**A=** $(a+b+c)^2$
1	**2**	**3**	
1		**4**	**64**
1	**3**		**81**
	3	**5**	**100**

ANALISIS A PRIORI ACTIVIDAD 4.2b		
ACCIÓN	**RETROACCIÓN**	**SEÑAL DE APRENDIZAJE**
A1. El alumno mueve las expresiones "a" a la posición 1, "***b***" a la posición 2 y "***c***" a la posición 3 sobre la recta Algebraica.	**R1.** El movimiento de a, b y c se hace posible y se observa que la expresión $(a+b+c)^2$ cambia de posición a medida que se va posicionando a, b y c en los valores indicados y finalmente se posiciona en 36.	**S1.** El alumno observará como la variable **A** es dependiente de los valores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ relacionados con la expresión $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$.
A2. El alumno mueve los valores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ y $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$ a las posiciones que la tabla indica.	**R2.** Se observa que solo es posible ubicar los valores a y c pero que la expresión $(a+b+c)^2$ no permite ser movida directamente.	**S2.** Modificar su acción.
A3. Luego de varios intentos por mover $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$ sin encontrar éxito, el alumno moverá $\boldsymbol{b}$.	**R3.** Notará que este movimiento es posible y además que a medida que realiza este movimiento la expresión $(a+b+c)^2$ también se mueve.	**S3.** Debe ser claro para el alumno que las acciones a desarrollar en la intención de posicionar $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$ en el lugar que indica la tabla sin mover los valores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ ya fijos por la misma tabla. Tienen que ver con mover b hacia un lugar estratégico donde se logre que $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$ se ubique en 64.
A4. Se mueve b cuidadosamente sobre la recta.	**R4.** Cuando b se mueve a la posición 3, se observa cómo $(a+b+c)^2$ se mueve a 64.	**S4.** Refuerza su acción.
A5. El alumno repite las acciones A1, A4. Para completar la tabla.		

Tabla 11. Análisis a priori Actividad 4.2.b

Papel del Profesor

En esta situación el profesor deberá estar atento y observar que los alumnos se dan cuenta de la dependencia de la expresión $(a + b + c)^2$ con las expresiones a, b y c. Pueden haber inconvenientes cuando los alumnos muevan la expresión $(a + b + c)^2$ ya que no se puede mover; es ahí donde interviene el profesor con la siguiente pregunta ¿Por qué crees que sucede esto? Si los alumnos dan respuesta a dicha pregunta se puede evidenciar que notaron la dependencia entre las expresiones.

Por medio del posicionamiento que hagan los alumnos en la recta algebraica encontraran los valores para completar la tabla sin ningún problema, al ocurrir esto el profesor puede preguntar ¿Qué tipos de números son los que aparecen en la columna de la expresión $(a + b + c)^2$?. Es en ese instante donde los alumnos deberían contestar que esos números son los cuadrados de 6, 8, 9 y 10.

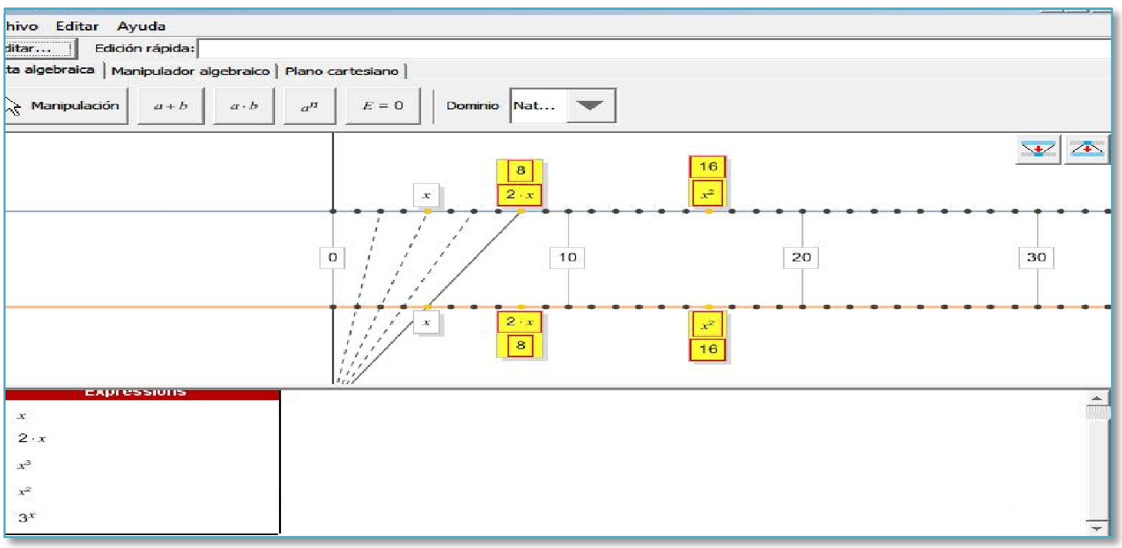
Usos de la variable Modelo 3UV

(I1), (I2), (I3) e (I4). El alumno deberá reconocer e identificar en la anterior situación la presencia de las expresiones $(a + b + c)^2$, a, b y c y que estas tienen o no valores desconocidos. Además, que dichos valores están determinados por las restricciones que tiene AlNuSet según sean las posiciones que tengan las expresiones a, b y c en la recta algebraica. Los valores que deben tomar todas las expresiones son específicos para que cuando se sustituya por el valor correspondiente, la ecuación $A=(a + b + c)^2$ se cumpla. Para que la ecuación se cumpla las expresiones a, b y c debían operarse de manera aritmética.

4.5 *Actividad cinco.*

4.5.1. Relaciona las siguientes secuencias con sus expresiones generales, utilizando la Recta Algebraica de AlNuSet.

SECUENCIA	EXPRESIÓN GENERAL
1, 8, 27, 64,…	X^2
3, 9, 27, 81,…	X^3
1, 4, 9, 16,…	2X
2, 4, 6, 8,…	3^x



ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDAD 5		
ACCIÓN	**RETROACCIÓN**	**SEÑAL DE APRENDIZAJE**
A1. El alumno mueve $\boldsymbol{x}$ en manipular	**R1.** Las expresiones $2x, x^2, x^3, 3^x$, se mueven a través de la recta.	**S1.** El alumno observa la dependencia presente entre estas expresiones y "$\boldsymbol{x}$".
A2. Moverá "$\boldsymbol{x}$" a la posición 1, luego a la posición 2, luego a posición 3, luego a posición 4, observando en donde se ubica la expresión "$\mathbf{2}\boldsymbol{x}$" para cada posicionamiento	**R2.** "$2x$" se posiciona en 2 cuando "x" se posiciona en 1, "$2x$" se posiciona en 4 cuando "x" se posiciona en 2, "$2x$" se posiciona en 6 cuando "x" se posiciona en 3, "$2x$" se posiciona en 8 cuando "x" se posiciona en 4.	**S2.** El alumno observa los valores obtenidos y los compara con las secuencias que tiene en su hoja y observa que se parecen a la secuencia 2, 4, 6,8,.. Por lo que la relaciona. Refuerza su acción.
A3. Moverá "$\boldsymbol{x}$" a la posición 1, luego a la posición 2, luego a la posición 3, luego a la posición 4, observando en donde se ubica la expresión "$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$" para cada posicionamiento	**R3.** "x^2" se posiciona en 1 cuando "x" se posiciona en 1, "x^2" se posiciona en 4 cuando "x" se posiciona en 2, "x^2" se posiciona en 9 cuando "x" se posiciona en 3, "x^2" se posiciona en 16 cuando "x" se posiciona en 4.	**S3.** El alumno observa los valores obtenidos y los compara con las secuencias que tiene en su hoja y observa que se parecen a la secuencia 1, 4, 9,16,.. Por lo que la relaciona. Refuerza su acción.
A4. Moverá "$\boldsymbol{x}$" a la posición 1, luego a la posición 2, luego a la posición 3, luego a la posición 4, observando en donde se ubica la expresión "$\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$" para cada posicionamiento	**R4.** "x^3" se posiciona en 1 cuando "x" se posiciona en 1, " x^3" se posiciona en 8 cuando "x" se posiciona en 2, "x^3" se posiciona en 27 cuando "x" se posiciona en 3, "x^3" se posiciona en 64 cuando "x" se posiciona en 4.	**S4.** El alumno observa los valores obtenidos y los compara con las secuencias que tiene en su hoja y observa que se parecen a la secuencia 1, 8, 27,64,.. Por lo que la relaciona. Refuerza su acción.
A5. Moverá "$\boldsymbol{x}$" a la posición 1, luego a la posición 2, luego a la posición 3, luego a la posición 4, observando en donde se ubica la expresión "$\mathbf{3}^{\boldsymbol{x}}$" para cada posicionamiento.	**R5.** "3^x" se posiciona en 3 cuando "x" se posiciona en 1, "3^x" se posiciona en 9 cuando "x" se posiciona en 2, "3^x" se posiciona en 27 cuando "x" se posiciona en 3, "3^x" se posiciona en 81 cuando "x" se posiciona en 4.	**S5.** El alumno observa los valores obtenidos y los compara con las secuencias que tiene en su hoja y observa que se parecen a la secuencia 3, 9, 27,81,..Por lo que la relaciona.

Tabla 12. Análisis a priori Actividad 5.

Papel del Profesor

El salto desde la primera acción a la segunda que se espera en el alumno, puede no ser tan fácil de lograrse, el profesor debe procurar que el alumno centre su atención en la palabra secuencia y preguntar por ejemplo ¿Cómo se obtuvieron los términos de estas secuencias? ¿Los términos de una secuencia deben estar ordenados? Encaminado a que el alumno en algún momento empiece a hacer remplazos para "x", desde 1, en forma ordenada y observar lo que ha de ocurrir con las posiciones de las expresiones asociadas a "x" y como al hacer el seguimiento de los valores obtenidos se observen 4 conjuntos de valores que se podrán asociar a las secuencias sugeridas en la situación.

Usos de la variable Modelo 3UV

(G2). El alumno deberá interpretar la variable como un símbolo que puede tomar cualquier valor.

(G1). El alumno deberá reconocer en las expresiones $2x, x^2, x^3, 3^x$, patrones que se relacionan con las secuencias propuestas.

(G4). El alumno manipulara la variable x, con el objeto de hallar los términos de las secuencias determinadas por los patrones $2x, x^2, x^3, 3^x$.

(I1) e (I4). Determinadas, en la necesidad de encontrar los términos de las secuencias.

5. FASE DE DESARROLLO

Foto 1. Sala de matemáticas de la Institución Educativa las Américas.

La situación diseñada fue aplicada en la Institución Educativa Las Américas de la ciudad de Bucaramanga a 5 alumnos de los grados octavos en edades comprendidas entre los 12 y los 14 años, escogidos aleatoriamente por el jefe de área de matemáticas del colegio, el Profesor Juan de Dios Urbina.

La situación se desarrolló en el salón de matemáticas, trabajaron en forma individual y cada uno de los alumnos conto con un escritorio, un computador y un material escrito donde se plasmaron las actividades que componían la situación. El tiempo destinado para el desarrollo de la misma fue de 480 minutos divididos en cuatro sesiones de 120 minutos cada una.

Se recolectó la información mediante tres distintas formas, la primera de ellas consistió en toma de notas sobre los comentarios que iban realizando los alumnos a medida que se enfrentaban a las actividades. Esta toma de notas fue realizada por uno de los autores del proyecto; la segunda consistió en la toma de fotografías, buscando evidenciar las acciones que los alumnos realizaban sobre AlNuSet, tomas que fueron realizadas por otro de los coautores del proyecto; finalmente la tercera forma consistió en la recolección de las impresiones escritas en las hojas de trabajo de cada uno de los alumnos así como algunas impresiones plasmadas por los alumnos en el material escrito que se les suministró.

6. FASE DE CONCLUSIÓN

En esta fase se realiza un análisis a posteriori donde se describe lo sucedido en el desarrollo de cada una de las actividades, identificando las acciones ejecutadas por los alumnos y las respuestas que se observaron del medio. También a partir de las respuestas de los alumnos se elabora una reflexión sobre si se cumplió o no lo previsto en el análisis a priori.

Para efectos de menor manejo de la información se han etiquetado los alumnos que participaron en la actividad como sigue:

(A1) Iván Mauricio Rúgeles Triana, grado 8-1

(A2) Fernando Salcedo Monrroy grado, 8-2

(A3) William Gerardo Bautista Serrano, 8-2

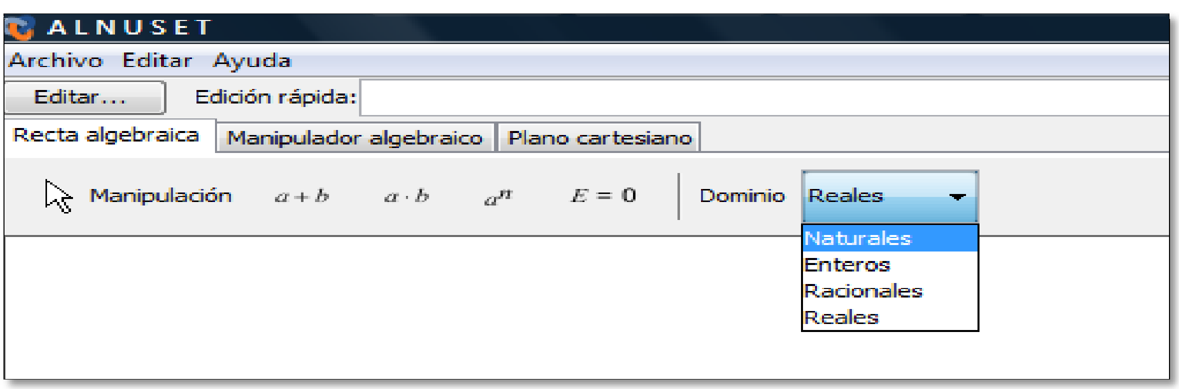
(A4) Víctor Eliecer Medina, grado 8-2

(A5) Leidy Vanessa Murallas Carrillo, grado 8-1

De la misma manera cuando se hable del profesor (P) se estará haciendo referencia a cualquiera de los profesores en formación María Angélica Rueda y Robinson Muñoz. Quienes en el desarrollo de la situación asumieron el rol de profesor.

6.1 Actividad uno.

6.1.1 En el programa AlNuSet entra al editor numérico e ingresa las expresiones x y $x-2$.Abre la opción dominio y pica sobre "Naturales".



Tarea 1.1.a) Usando el puntero intenta colocar $x - 2$ sobre 10. ¿En qué valor se coloca x cuando esto ocurre?

Tarea 1.1.a en AlNuSet

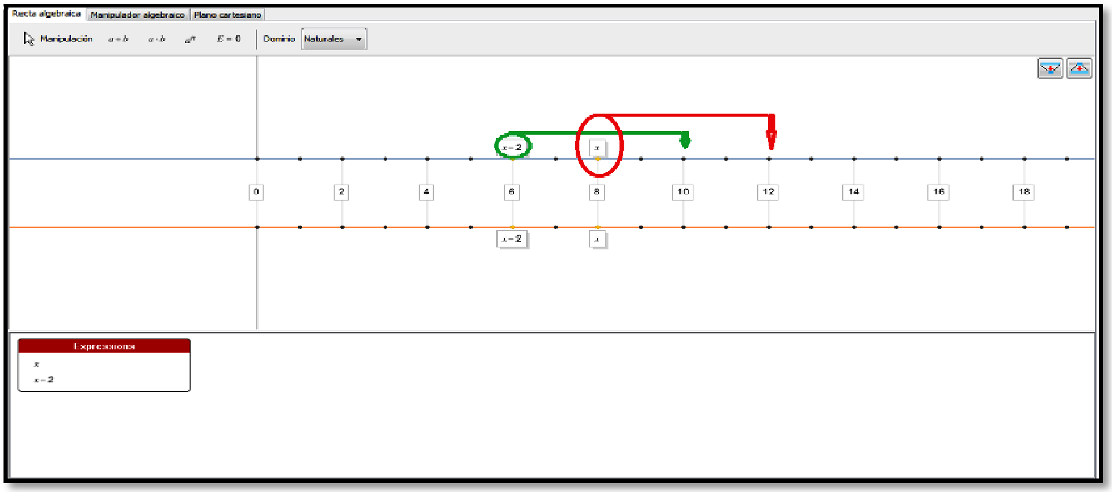


Figura 10. Solución de la tarea 1.1.a) en AlNuSet.

Análisis de lo observado.

Foto 2. Alumno (A2) resolviendo la tarea en AlNuSet

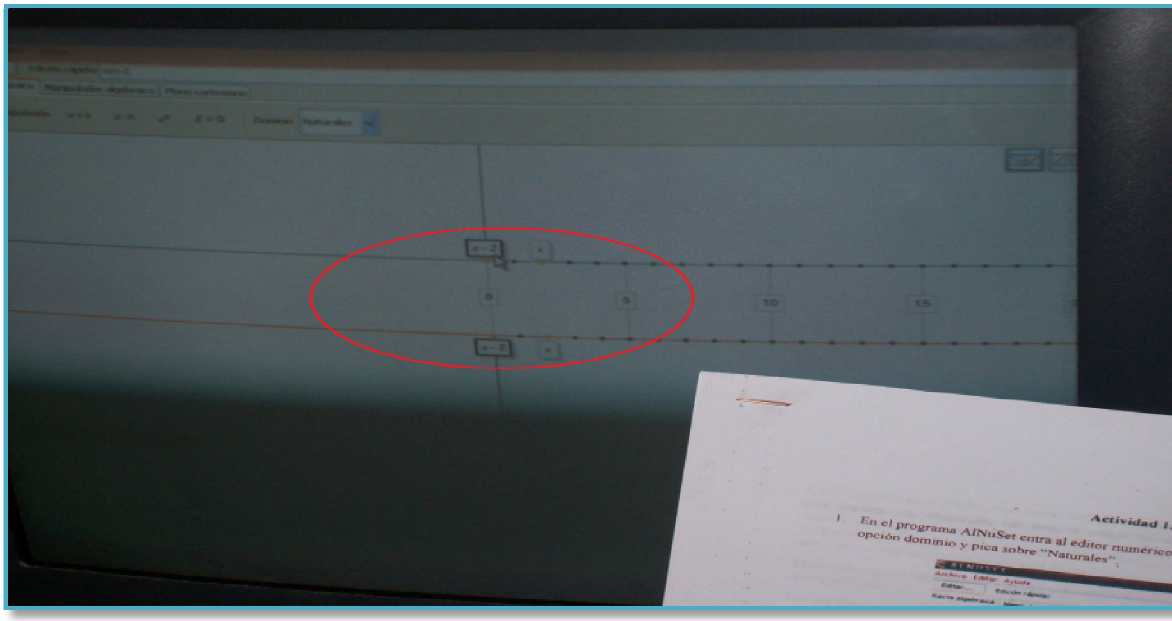


Foto 3. Solución de la tarea en AlNuSet

Los alumnos tuvieron gran dificultad para lograr posicionar la expresión "$x - 2$" en el valor 10. Esto porque lo que intentaron en primera instancia fue mover la expresión posicionando el cursor sobre esta, y al observar la imposibilidad de movimiento por esta vía, algunos de ellos pensaron que no era posible realizar la tarea y lo manifestaron verbalmente al grupo. Sin embargo el alumno A4, pasados algunos minutos replicó, *debe ser posible, por algo lo colocaron así*. Al cabo de un rato el alumno A3, manifiesta al profesor que logró mover la expresión pero que no supo como.

Nuevamente esta información se comunicó al grupo, lo que sirvió de aliento y reafirmó el hecho de la posibilidad de movimiento de la expresión, adicional a esto el alumno A3 afirmó en privado al profesor que no solo se había movido "$x - 2$" si no que también lo había hecho la expresión "x".

A lo que el profesor intervino con un comentario a manera de pregunta:

¿será que tienen algo que ver esas dos expresiones?, un poco después uno a uno encontraron que para mover la expresión "$x - 2$" se hacía necesario mover "x". A2 comentaba, *claro, es que si uno pone a "x" en 12, también pasa que 12-2 es 10 y "$x - 2$" queda en 10.*

El alumno A2, nos da claridad que para él era muy evidente la relación que había entre las dos expresiones y pareció entender más de lo que nos proponíamos con la tarea.

Respuestas

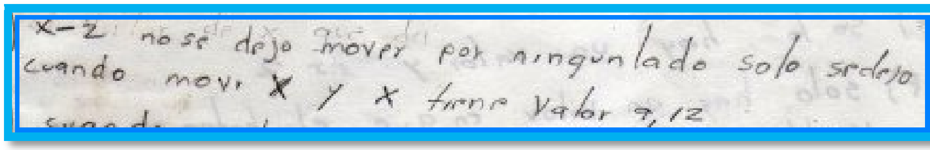
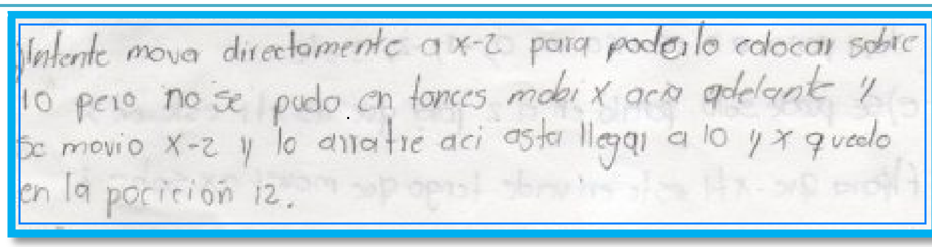
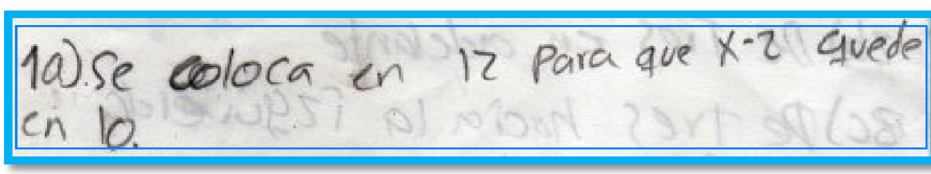
ALUMNO	RESPUESTA
A1	 x-2 no se dejo mover por ningun lado solo se dejo cuando movi x y x tiene valor 9,12
REFLEXIÓN	Nos llama la atención la respuesta suministrada por el alumno A2, pues en ella parece darle más importancia a la sensación de arrastre que el percibe al variar "x", que a lo manifestado mientras resolvía la tarea sobre la relación directa entre el valor de x que al remplazarlo analíticamente siguiendo las operaciones en la expresión generan un valor.
A2	 Intente mover directamente a x-2 para poderlo colocar sobre 10 pero no se pudo en tonces mobi x acia adelante y se movio x-2 y lo arratre aci asta llegar a 10 y x quedo en la pocición 12.
REFLEXIÓN	El alumno encuentra que para mover "$x-2$" se hace necesario mover "x" Tal como lo contemplamos en el análisis a priori.
A4	 1a). Se coloca en 12 para que x-2 quede en 10.
REFLEXIÓN	Este alumno encontró la respuesta en el movimiento de "x". En general para todos ellos fue un descubrimiento ver como el movimiento de "$x-2$" que parecía imposible al comienzo de la actividad se hace posible al tiempo que se mueve "x".

Tabla 13. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.1.a)

Tarea 1.1.b) Intenta colocar $x - 2$ sobre 8 y luego sobre 14. ¿En qué valores se puso respectivamente x para lograr las posiciones indicadas?

Tarea 1.1.b) en AlNuSet

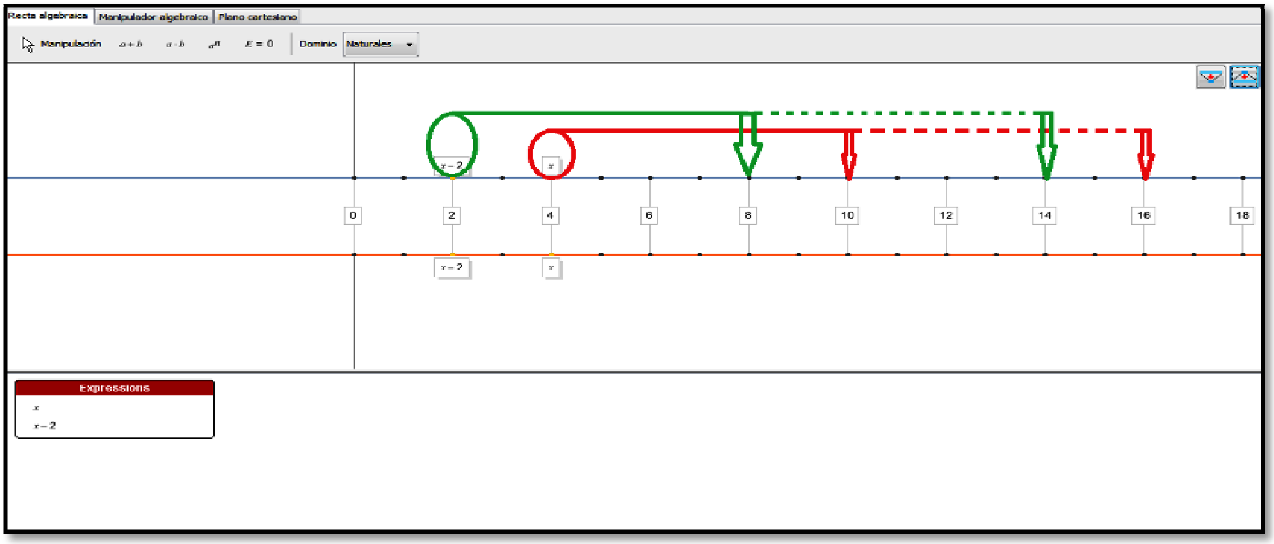


Figura 11. Solución de la tarea 1.1.b) en AlNuSet

Análisis de lo observado

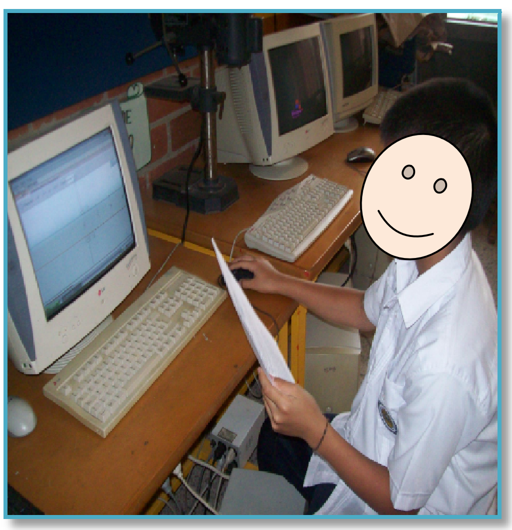


Foto 4. Alumno (A1) resolviendo la tarea en AlNuSet

En esta tarea los alumnos actuaron con mayor soltura y casi que mecánicamente, pues se observó cómo la acción exitosa realizada para la tarea **1.1.a)** fue reforzada en el desarrollo de la tarea **1.1.b).**

Respuestas

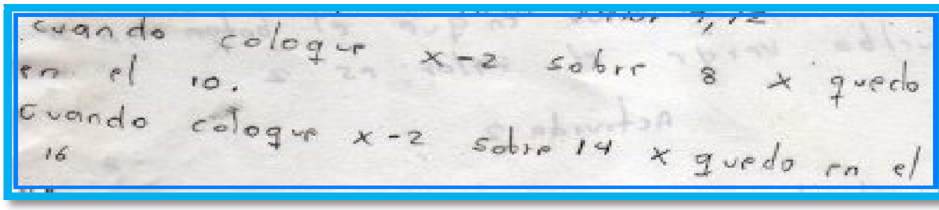
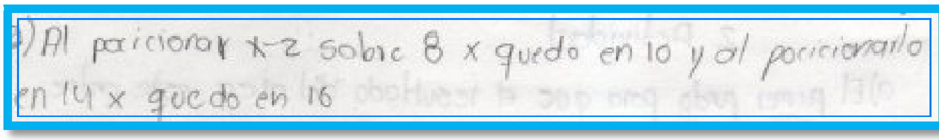
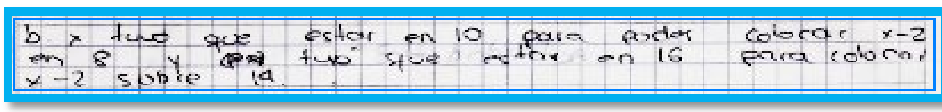
ALUMNO	RESPUESTAS
A1	 cuando coloque x-2 sobre 8 x quedo en el 10. Cuando coloque x-2 sobre 14 x quedo en el 16
A2	 Al posicionar x-2 sobre 8 x quedo en 10 y al posicionarlo en 14 x quedo en 16
A5	 b x tuvo que estar en 10 para poder colocar x-2 en 8 y x tuvo que estar en 16 para colocar x-2 sobre 14.
REFLEXIÓN	Las respuestas dan cuenta de cómo para los alumnos es evidente que la variación en la posición de “$x-2$” depende de la variación en la posición de “x”.

Tabla 14. Repuestas de los alumnos de la tarea 1.1.b)

Tarea 1.1.c) Intenta colocar $x - 2$ sobre 15 de tal manera que x quede sobre 3. ¿Esto es posible?

Tarea 1.1.c) en AlNuSet

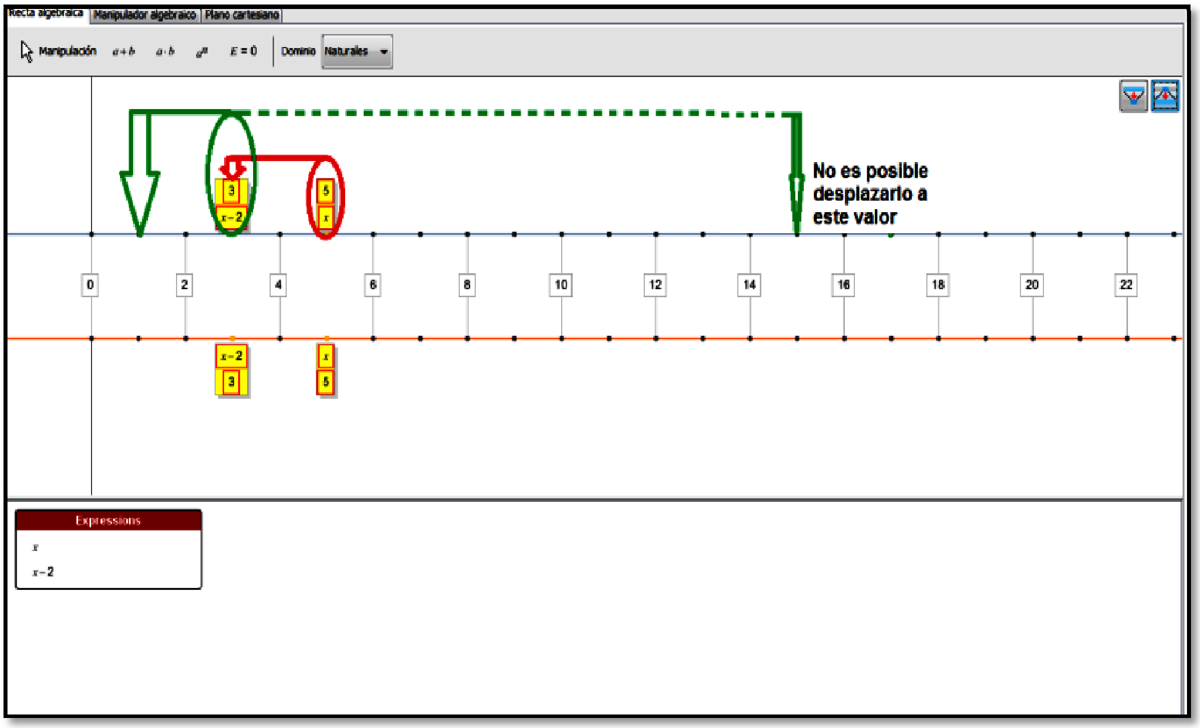
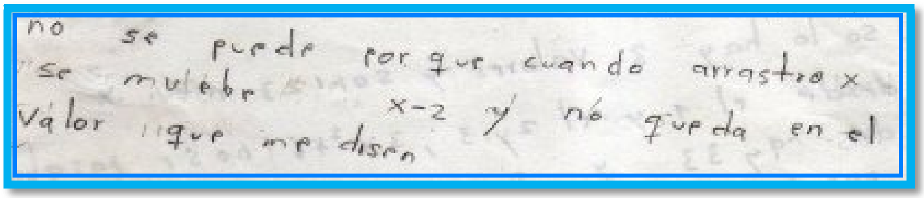
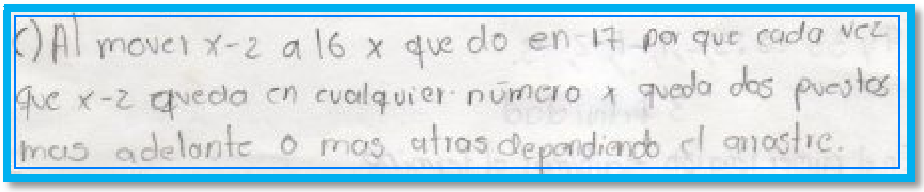
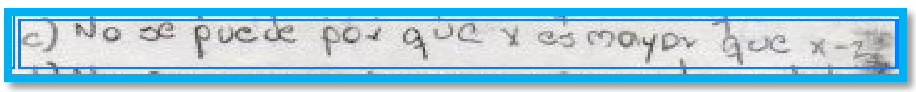
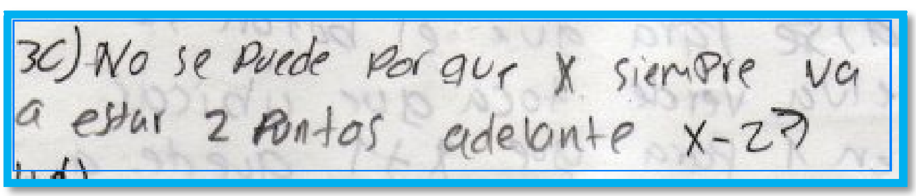


Figura 12. Solución de la tarea 1.1.c) en AlNuSet

Análisis de la observación

En esta tarea los alumnos ya sabían que para llevar la expresión “$x - 2$” a una determinada posición, se hacía necesario mover a “x”; por esto cuando movieron “x” buscando que “$x - 2$” se posicionara en 15, vieron que la posición en que se había ubicado “x” no correspondía a 3. Lo ocurrido les proporciono el sustento para afirmar que la tarea era imposible de realizar.

Respuestas

ALUMNO	RESPUESTAS
A1	 no se puede por que cuando arrastro x se mulebe x-2 y nó queda en el valor que me disen
REFLEXIÓN	el alumno comunica lo que observa al realizar algunas acciones en el medio, sin embargo No hay reflexión sobre lo que sustenta este hecho. En este sentido podría decirse que su papel responsable dentro la situación no lo está ejecutando
A2	 c) Al mover x-2 a 16 x quedo en 17 por que cada vez que x-2 queda en cualquier número x queda dos puestos mas adelante o mas atras dependiendo el anastic.
REFLEXIÓN	El alumno a partir de un patrón de distancia entre las expresiones logra dar respuesta y explicación a la tarea propuesta.
A3	 c) No se puede por que x es mayor que x-2
REFLEXIÓN	El alumno generaliza a través de las movimientos de "x" y "$x-2$" sobre la "recta Algebraica" y concluye que los valores "x" siempre serán mayores a los valores "$x-2$" lo que explica que si bien a "x" se le asigna un valor de "3" "$x-2$" tendría que ser menor a "3" así que esta noción de orden le permite dar respuesta a la tarea. Sin embargo la noción de patrón de distancia que percibieron los alumnos A4 y A5, no parece ser utilizada para su razonamiento.
A4	 3c) No se Puede Por qur X siemPre va a estar 2 Pontos adelante X-2?

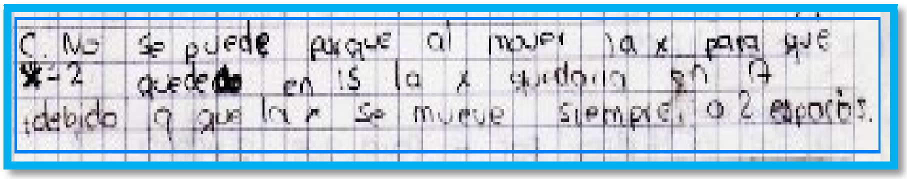
A5	
REFLEXIÓN	Se puede observar que los alumnos A4 y A5, han encontrado al parecer una explicación general al movimiento de “x” y “ $x-2$” sobre la recta que tiene que ver con la noción de patrón de distancia, haciéndose evidente en sus respuestas.

Tabla 15. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.1.c)

Tarea 1.1.d) ¿Es posible encontrar un valor en donde x y $x-2$ queden sobre el mismo valor? Justifica tu respuesta.

Tarea 1.1.d) en AlNuSet

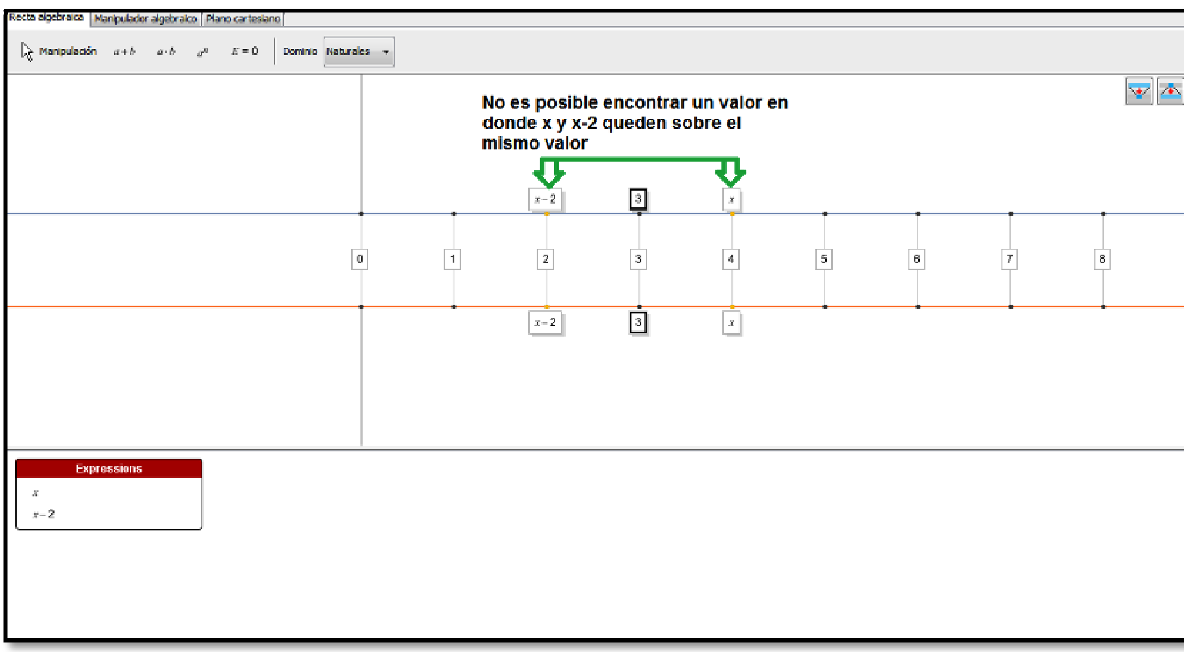


Figura 13. Solución de la tarea 1.1.d) en AlNuSet

Análisis de lo observado

El desarrollo de la tarea permitió ver que nuevamente el patrón de distancia que antes los alumnos A4 y A5 habían percibido en la tarea anterior, era clave para dar explicación a la imposibilidad de poner en una misma posición y simultáneamente las expresiones “x” y “$x-2$”. Sin embargo en un primer momento el alumno A1 había conjeturado que en la posición “0” podrían estar simultáneamente las dos expresiones.

Respuestas

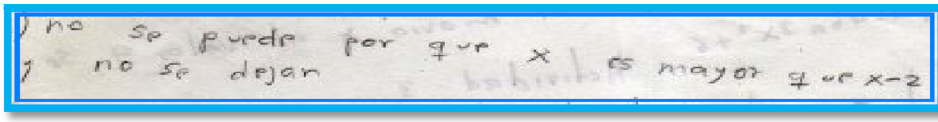
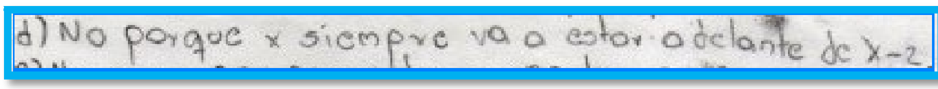
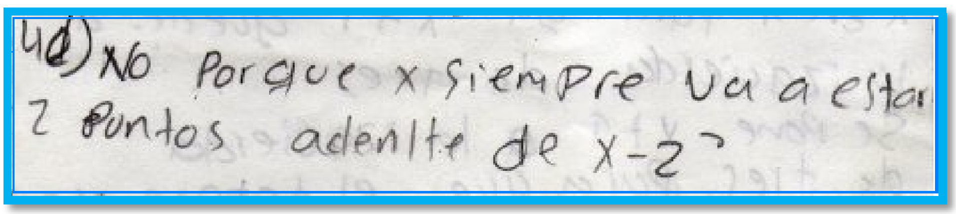
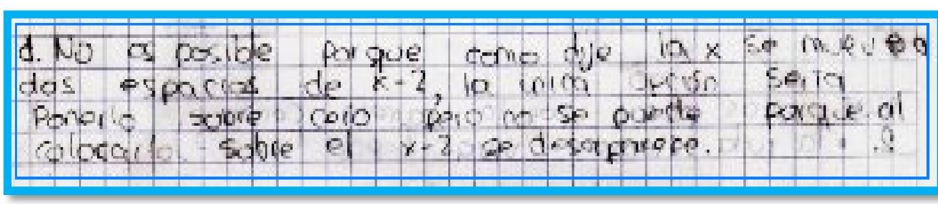
ALUMNO	RESPUESTAS
A1	) no se puede por que x es mayor que x-2) no se dejan
A3	 d) No porque x siempre va a estar adelante de x-2
REFLEXIÓN	Los alumnos A1 y A3 utilizan la noción de orden para responder a la tarea
A4	 4d) No porque x siempre va a estar 2 puntos adenlte de x-2
A5	 d. No es posible porque como dije la x se mueve dos espacios de x-2, la unica opcion seria ponerlo sobre cero pero no se puede porque al colocarlo sobre el x-2 se desaparece.
REFLEXIÓN	Los alumnos A4 y A5 encuentran en el patrón de distancia “2” la explicación a la retroacción del “medio”

Tabla 16. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.1.d)

Tarea 1.1.e) Ubica x en 1, ¿en dónde se ubica $x - 2$?

Tarea 1.1.e) en AlNuSet

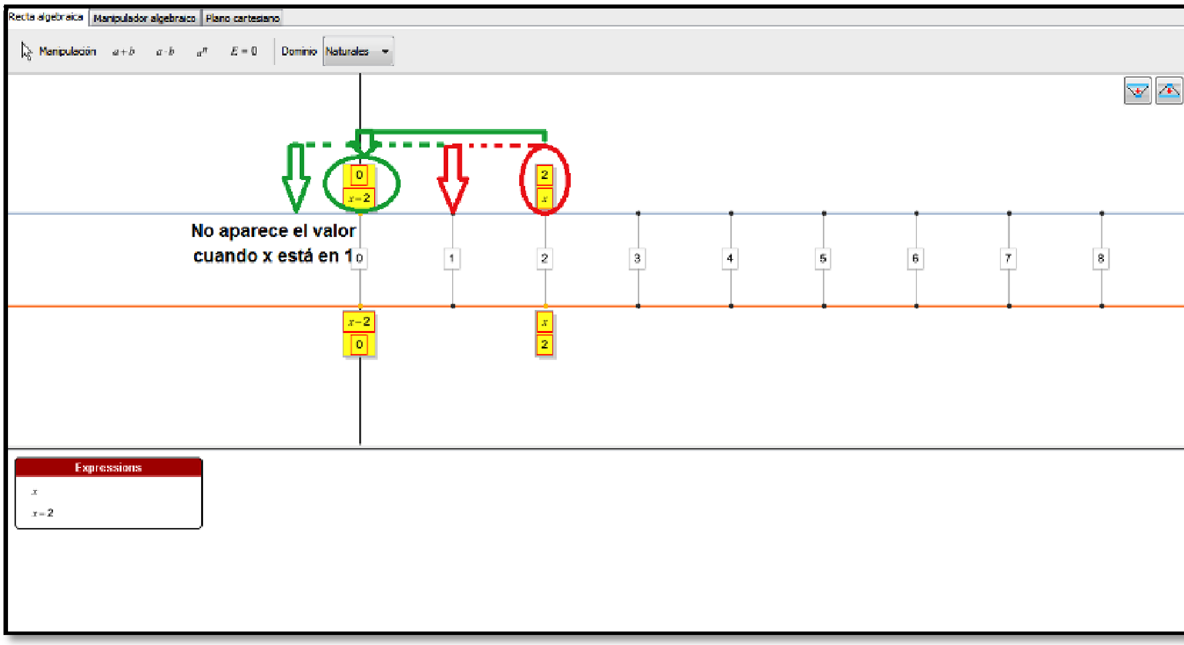


Figura 14. Solución de la tarea 1.1.e) en AlNuSet

Análisis de lo observado

Al posicionar "x" en 1 y ver que la expresión "$x - 2$" desapareció de la pantalla los alumnos conjeturaron acerca de la causa de lo ocurrido, aún cuando no se les pedía en la tarea que explicasen el ¿Por qué? Creemos que este hecho tiene que ver con la forma en que las tareas anteriores fueron construyendo en ellos la noción de patrón dotándolos de certezas que los llevan a ver la ubicación de la expresión "$x - 2$" en otro conjunto numérico.

Respuestas

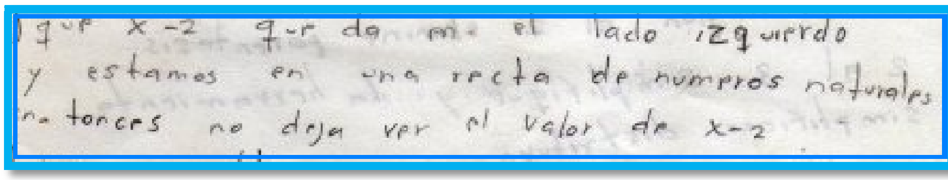
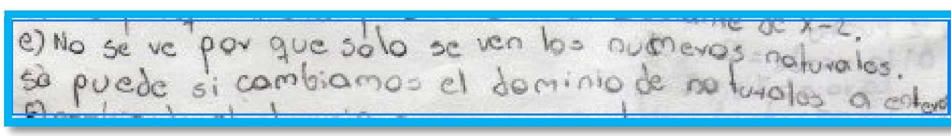
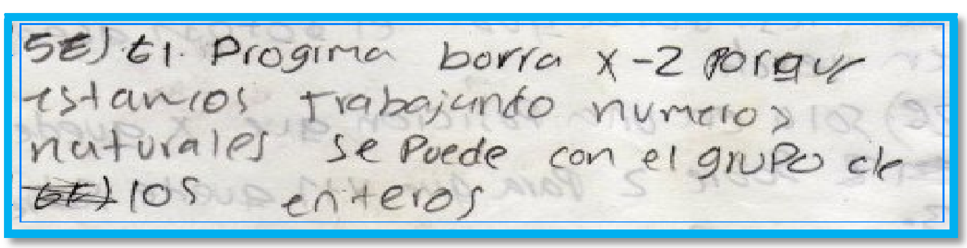
ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	 que x -2 que da en el lado izquierdo y estamos en una recta de numeros naturales entonces no deja ver el valor de x-2
REFLEXIÓN	El alumno entiende la imposibilidad de observar el valor de "$x - 2$" debido a la ausencia de un conjunto que contemple el valor donde intuyen cae la expresión mencionada. Es clave para este razonamiento la comprensión de un patrón de distancia fijo que relaciona las expresiones en cuestión.
A2	 Al ubicar x en 1 x-2 desaparesc porque es un negativo
REFLEXIÓN	este alumno también es consiente de la necesidad de tener un conjunto mas amplio que contemple los negativos para así poder observar la expresión sobre la recta algebraica
A3	 e) No se ve por que sólo se ven los numeros naturales. se puede si cambiamos el dominio de naturales a enteros
REFLEXIÓN	Este alumno propone con certeza un que hacer para observar la expresión en la recta algebraica.
A4	 5E) El Progima borra x-2 porque estamos trabajando numeros naturales se puede con el grupo de ~~EE~~ los enteros
REFLEXIÓN	El alumno coincide con A3 en el hecho de que en los enteros se podría ver la expresión, y habla de un supuesto borrado de los números negativos de la pantalla.

Tabla 17. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.1.e)

Tarea 1.1 f) ¿Es posible que cuando x está ubicado en 1, aparezcan simultáneamente sobre la recta x y $x-2$? ¿Cómo?

Tarea 1.1.f) en AlNuSet

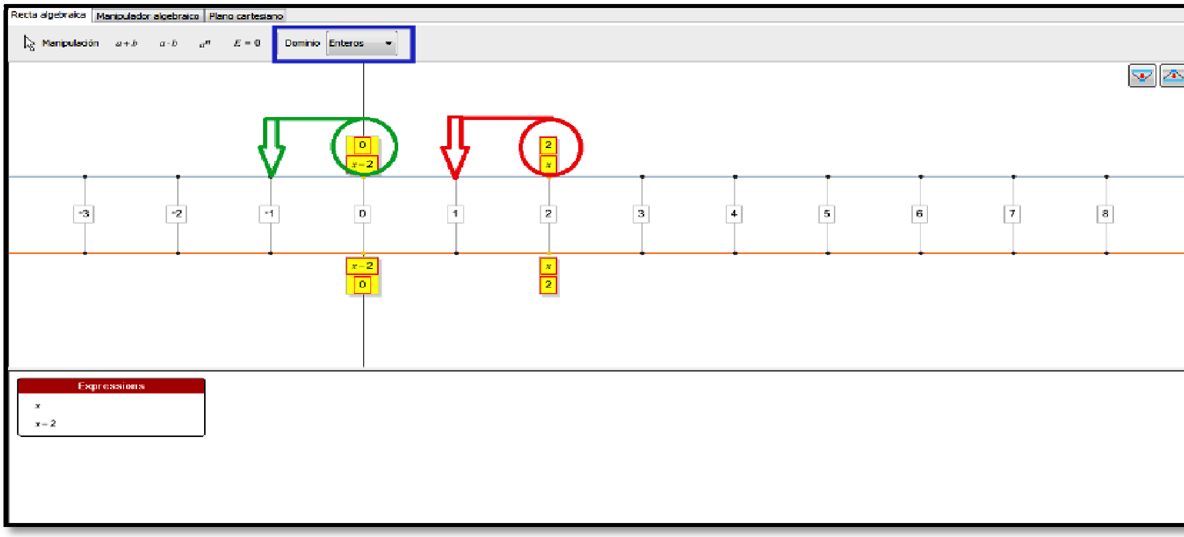


Figura 15. Solución de la tarea 1.1.f) en AlNuSet

Análisis de lo observado

Aun cuando en la tarea anterior se vio claramente que los alumnos detectaron la necesidad de ampliar el conjunto sobre la recta, intuyendo que en lado izquierdo se podría encontrar la expresión "$x-2$", fue muy difícil que ellos tomaran la decisión de ampliar el dominio a los enteros. El alumno A4 comentaba *se puede en los enteros porque "$x-2$" vale -1*; el alumno A2 comentaba *$x-2$" cae en -1, porque esta corrido dos espacios a la izquierda de "x" y si "x" esta en uno, si uno se mueve un espacio a la izquierda caería en "cero", pero como son dos espacios los que hay que moverse entonces el otro espacio lo haría caer en -1, pero como no aparecen…tocaría ponerlos …pero ¿cómo?*. Claramente el alumno A2, cumple con la tarea, pues aún cuando no logra hacer aparecer los números negativos, el análisis que él hace de lo que le sucede a la expresión "$x-2$" cuando "x" se posiciona en 1, lo lleva a la certeza de que "$x-2$" cae en -1 y que este valor es un entero, y que de tenerlos en la pantalla se podría visualizar la expresión.

Por otra parte en la forma como este alumno se acerca a su respuesta se ve claramente la influencia de las retroacciones dadas por AlNuSet.

Respuestas

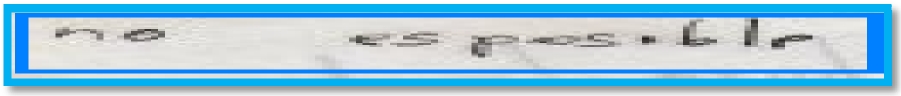
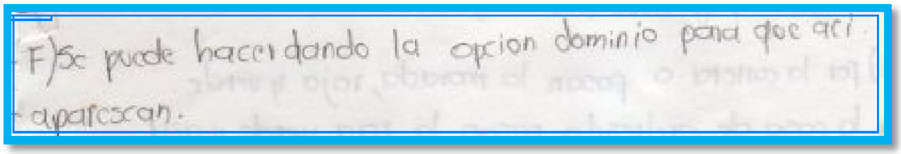
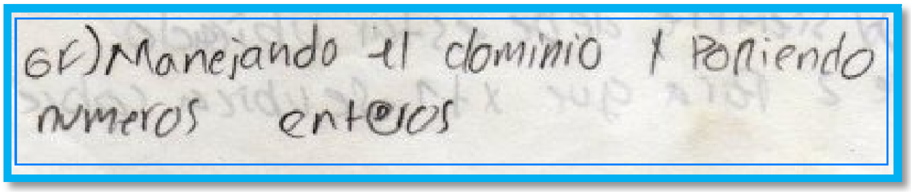
ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	 no es posible
A2	 F)Se puede hacer dando la opcion dominio para que aci aparescan.
A4	 6f)Manejando el dominio y Poniendo numeros enteros

Tabla 18. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.1.f)

Consideramos, que el suministrar el dato de cómo cambiar el dominio a los alumnos A2 y A4, no daño la situación a-didáctica, pues ellos tenían claro lo que necesitaban del programa pero no lograban dar con la acción que los llevase a lo que preveían en sus mentes.

Lo que hizo el profesor fue señalar el pantallazo que al inicio de la actividad se mostraba, justo en la parte donde se desplegaba el submenú Dominio. Lo demás ya corrió por iniciativa de cada uno de ellos.

REFLEXIÓN SOBRE SI LA SITUACIÓN SE MANTUVO O NO COMO A-DIDÁCTICA Y QUÉ USOS DE LA VARIABLE SE MANIFESTARON EN EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 1.1

Creemos que la situación si se mantuvo como a-didáctica, puesto que el profesor no intervino directamente en la solución de las tareas propuestas y el medio fue determinante para solución de las mismas.

En general se utilizan los tres usos de la variable como: número general, incógnita especifica y relación funcional según el modelo 3UV; observándose el trabajo de los aspectos: G2, I1, I2, I3, F1, F2 y F3, al igual que fue planeado en el diseño de la situación. Adicionalmente se observó que los alumnos trabajaron mucho con la variable como numero general (G1), asociado al patrón geométrico de distancia que hallaron entre las dos expresiones.

A continuación, veremos algunos aspectos que manifestaron los alumnos en el desarrollo de la actividad 1.1:

G2. En la primera parte de la actividad cuando se le pide a los alumnos que lleven la expresión "$x - 2$" a "8" y luego a "14". Ellos encuentran el lugar especial donde "x" se debe ubicar para que la tarea se cumpla. Adicional a esto los alumnos observan como este "x" y "$x - 2$" no tienen una posición fija, ellos mismos desplazan el punto correspondiente a la expresión "x" a muchas posiciones.

I1, I2. En el momento en que los alumnos asumen la tarea de ubicar "$x - 2$" sobre 8 y sobre 14; preguntándoles luego por el valor de "x" para cada caso. Ellos se percatan que al igual que en la tarea de llevar "$x - 2$" a 10 se genera un valor de "x" especial para cada caso.

I3. Cuando A4 contesta *se coloca en 12 para que "x-2" quede en 10.* El alumno asigna un valor especifico a la "x" que hace cumplir la ecuación "$x - 2 = 10$".

F1. Cuando A1 contesta *no se dejó mover "x-2" solo se dejó mover por ningún lado, solo se movió cuando moví "x"* el alumno hace visible que comprende la relación que existe entre "x" y "$x - 2$".

F3. Cada vez que el alumno lleva la expresión "$x - 2$" (dependiente) a los valores requeridos por las tareas, observa que debe llevar "x" (independiente) a una posición especial.

6.1.2 Abre la opción dominio y puntee en “**Enteros**”.

Tarea 1.2.a) Mueve la expresión x sobre la recta y observa en qué valores se puede ubicar x de tal manera que $x + 1$ se ubique a la derecha de 3. Encuentra TODOS los posibles valores.

Tarea 1.2.a) en AlNuSet

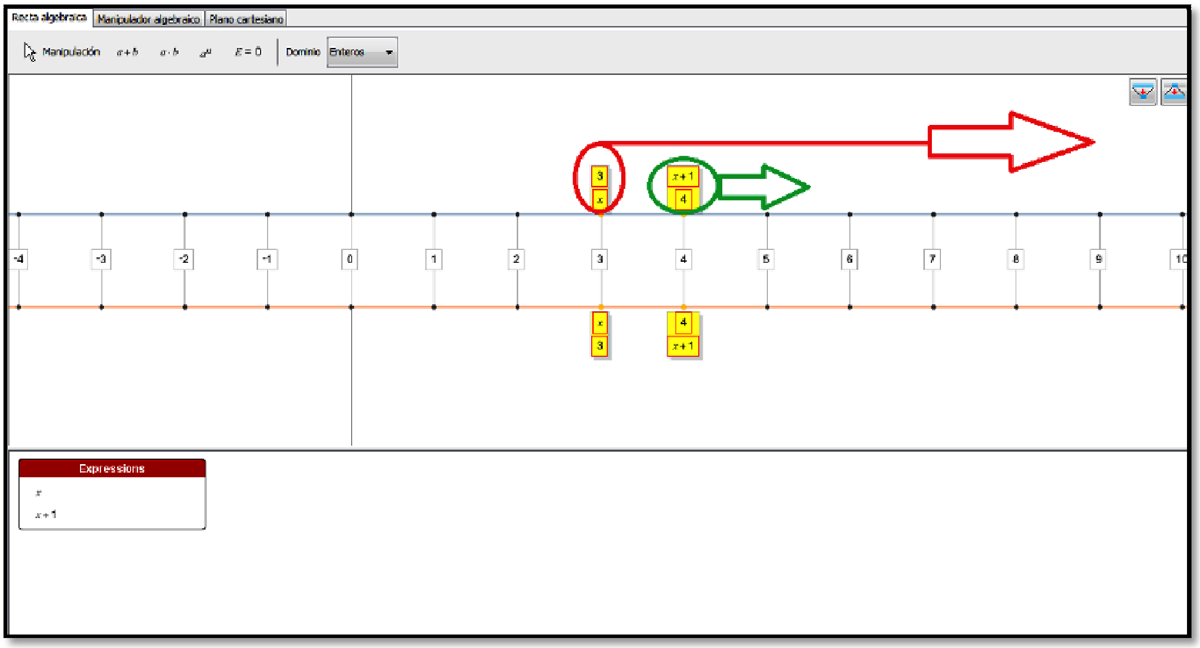
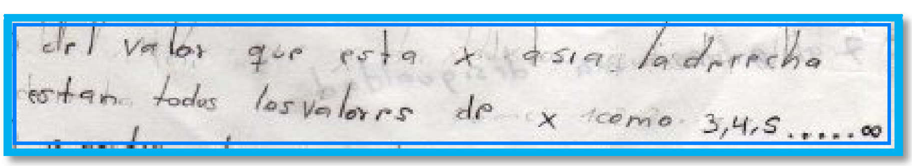


Figura 16. Solución de la tarea 1.2.a) en AlNuSet

Análisis de lo observado

La tarea se desarrolla rápidamente por los alumnos quienes se posicionan sobre “x” y comienzan a desplazarse sobre la recta, observando los valores que va tomando “$x + 1$”. En el proceso de identificación de los valores que pide la tarea los alumnos refieren el conjunto solución nombrándolos por extensión como 3, 4, 5, 6, 7,…

Respuestas

ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	
REFLEXIÓN	El alumno no elabora una respuesta muy clara. Sin embargo mientras resolvía la tarea,

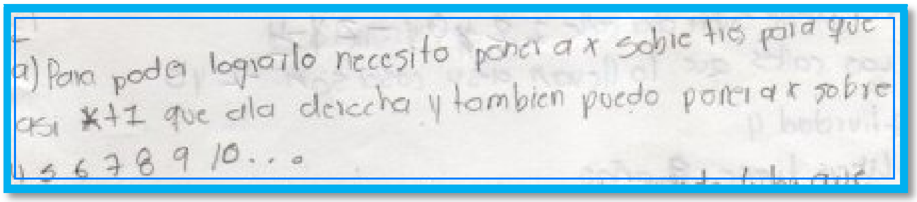
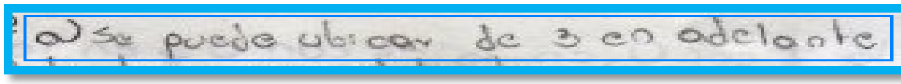
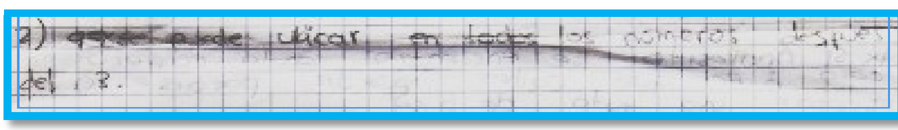
	comentaba $x+1$ *se pone a la derecha de 3 cuando "x" esta en 3 y también en 4 y así siguen los otros valores.*
A2	 a) Para poder lograrlo necesito poner a x sobre tres para que así x+1 que ala derecha y tambien puedo poner a x sobre 4 5 6 7 8 9 10 . . .
A4	 a) se puede ubicar de 3 en adelante
REFLEXIÓN	Alumnos A2 y A4, encuentran respuesta correcta a la tarea. Mientras se desarrolla la tarea A4 comenta al profesor *si "x" vale 3, 4, 5, 6, 7 entonces "$x+1$" vale 4, 5, 6, 7, 8.* El comentario del alumno nos muestra que el alumno se acerca de forma intuitiva a entender los intervalos de variación de una variable dado el intervalo de otra; como lo contempla uno de los aspectos característicos de la variable descritos en el modelo 3UV. Para el caso del ejercicio seria el intervalo de variación de una expresión dado el intervalo de variación de otra expresión.
A5	 2) ~~se puede~~ ubicar en todos los números después del 3. ***_se puede ubicar, en todos los números después del 3._***
REFLEXIÓN	No hay claridad, sobre la justificación de su respuesta. Intuimos que puede tratarse en una confusión respecto al conjunto de valores que se pide. Sin embargo no descartamos que el alumno tenga una idea clara acerca de los valores que puede tomar "x", pero que el uso que el esta dando de la palabra "después" sea incluyente.

Tabla 19. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.2.a)

Tarea 1.2.b) Ve al Editor y escribe la expresión $x + 1 > 3$. Desplazando x sobre la recta, encuentra TODOS los valores para los cuales el botón rojo del recuadro "Sets" se vuelve verde.

Tarea 1.2.b) en AlNuSet

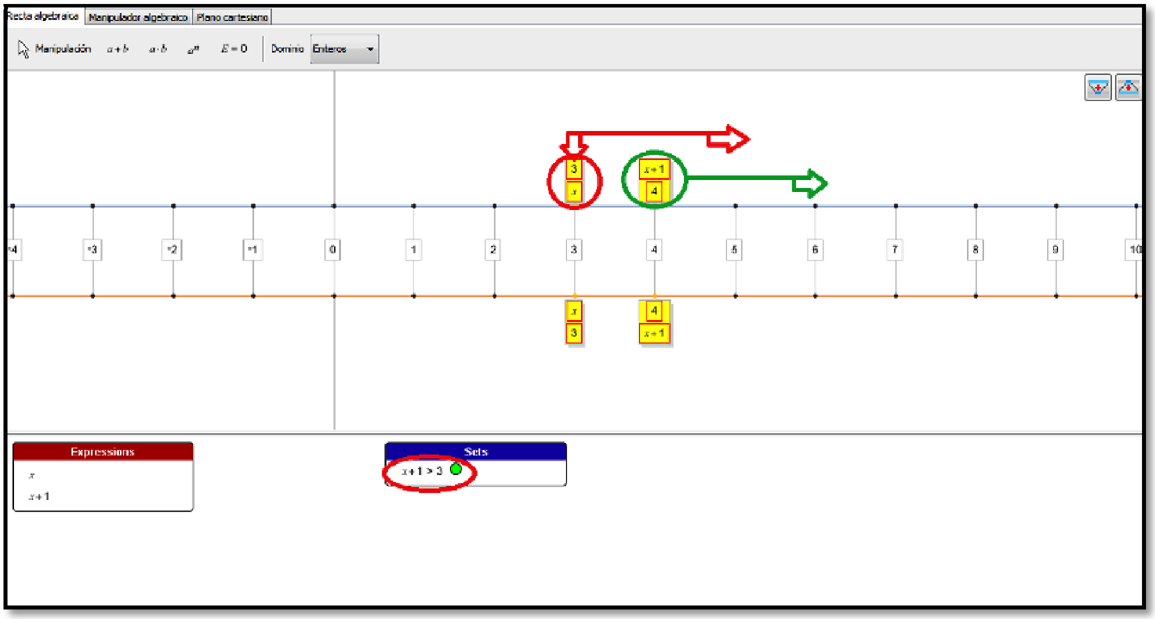


Figura 17. Solución de la tarea 1.2.b) en AlNuSet

Análisis de lo observado

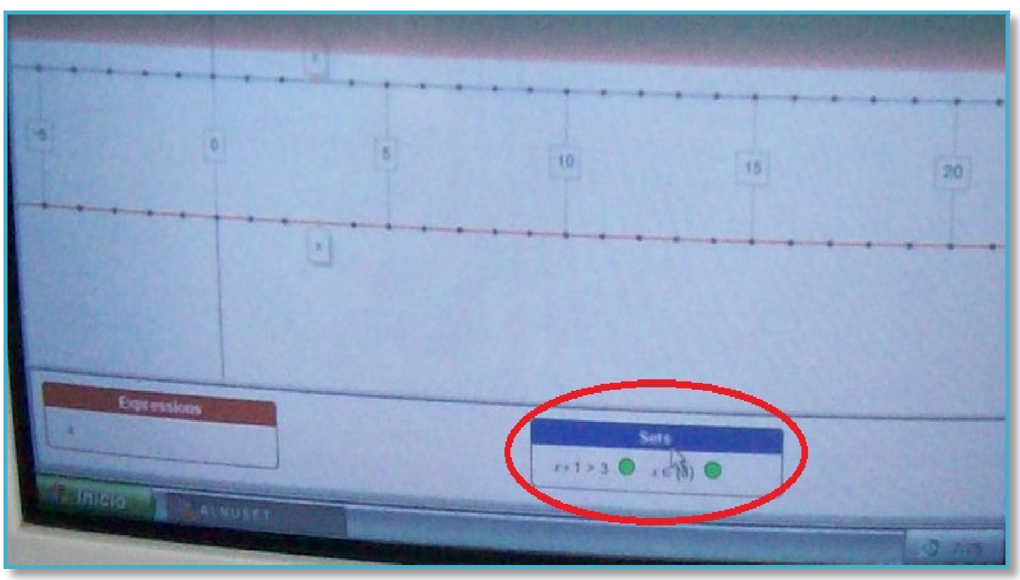


Foto 5. Solución de la tarea en AlNuSet

El ejercicio le da la oportunidad al alumno de descubrir otra forma de relacionarse con AlNuSet, esta vez a través del editor. Luego de escrita la inecuación, se inserta en la parte inferior central de la pantalla en el recuadro Sets, y tal como lo menciona la tarea se observa una señal de color inicialmente roja. Cuando el alumno desplaza "x" sobre la recta se observa que la señal cambia de roja a verde para los valores de x iguales a 3, 4, 5, 6, 7,…

Respuestas

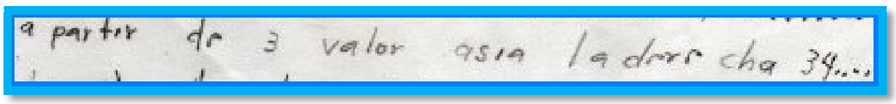
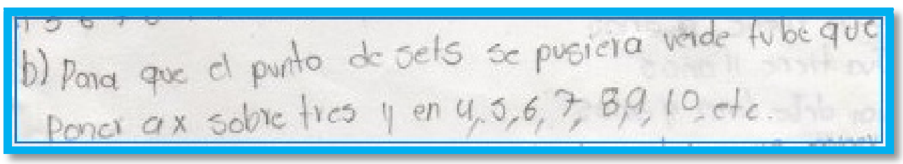
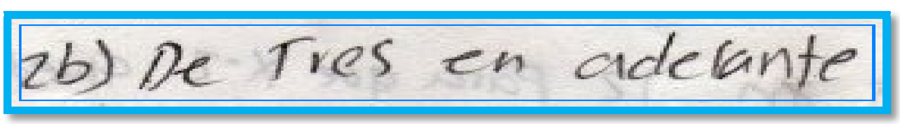
ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	 a partir de 3 valor asia la derecha 34...
REFLEXIÓN	A1 comenta "*es lo mismo que el ejercicio anterior, pero cuando se pone en verde uno sabe que es una respuesta y que está bien*".
A2	 b) Para que el punto de sets se pusiera verde tube que poner a x sobre tres y en 4,5,6,7,8,9,10 etc.
REFLEXIÓN	El alumno A2 comenta *"el botón se pone verde en los puntos donde se pone* "$x + 1$" *despues de 3. Los mismos del punto anterior.*
A4	 2b) De Tres en adelante
REFLEXIÓN	El alumno A4 comenta *"es lo mismo que el ejercicio anterior"*.

Tabla 20. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.2.b)

Tarea 1.2.c) Mueve la expresión x sobre la recta y observa en qué valores se puede ubicar x de tal manera que $x + 1$ se ubique a la izquierda de 3. Encuentra TODOS los posibles valores.

Tarea 1.2.c) en AlNuSet

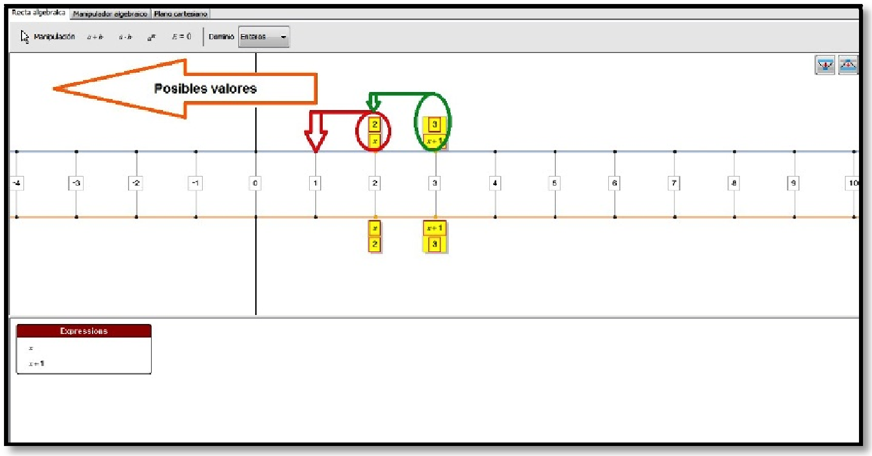


Figura 18. Solución de la tarea 1.2.c) en AlNuSet

Análisis de lo observado

Foto 6. Alumna (A5) resolviendo la tarea

Nuevamente se observa como el desplazamiento de “x” sobre la recta, determina el valor que toma “$x + 1$”, ahora interesan los valores de “x” que hagan que la expresión “$x + 1$” se posicione a la izquierda de 3, fácilmente los alumnos vieron a través de los desplazamientos que estos valores son 1, 0, -1,-2, -3,… Sin embargo a la hora de escribir la respuesta se confundieron y no fueron muy acertados.

Respuestas

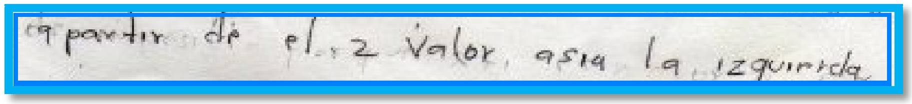
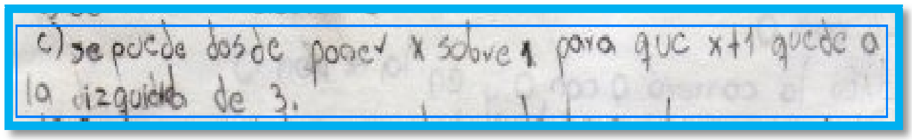
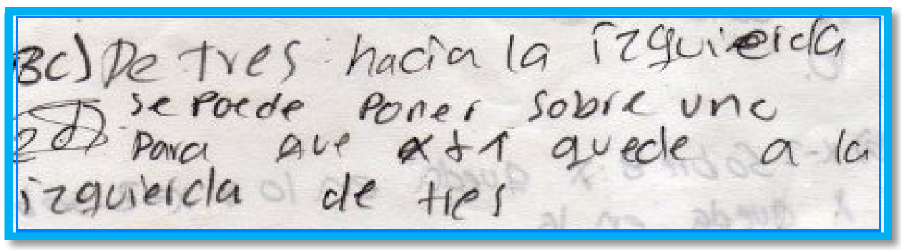
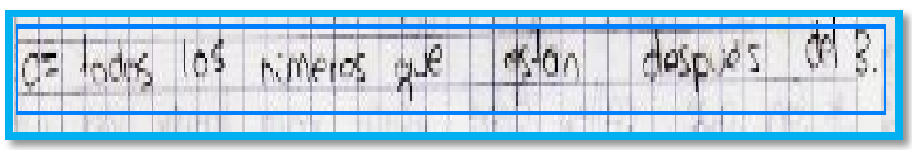
ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	 a partir de el 2 valor asia la izquierda
A3	 c) se puede desde poner x sobre 1 para que x+1 quede a la izquierda de 3.
A4	 3c) De tres hacia la izquierda se puede poner sobre uno para que x+1 quede a la izquierda de tres
A5	 c= todos los numeros que estan despues del 3.

Tabla 21. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.2.c)

Tarea 1.2.d) Ve al Editor y escribe la expresión $x + 1 < 3$. Desplazando x sobre la recta, encuentra TODOS los valores para los cuales, el botón rojo del recuadro “Sets” se vuelve verde.

Tarea 1.2.d) en AlNuSet

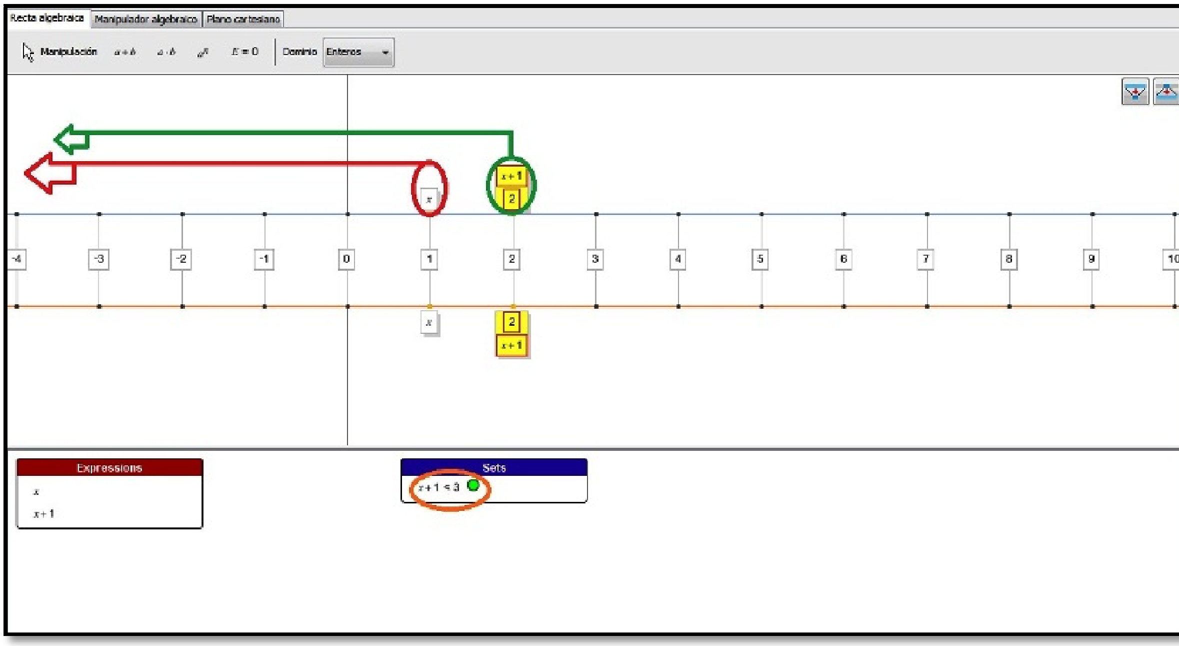


Figura 19. Solución de la tarea 1.2.d) en AlNuSet

Análisis de lo observado

Al realizar los desplazamientos de “x” sobre la recta, se observa que “$x + 1$” esta a la izquierda de 3, siempre que “x” se encuentre en 1 y en los demás valores a a la izquierda de este. La señal de color en verde muestra que estos valores son los mismos que dan solución a la inecuación “$x + 1 < 3$”

Respuestas

ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	 a partir de el segundo valor asia la izquerda

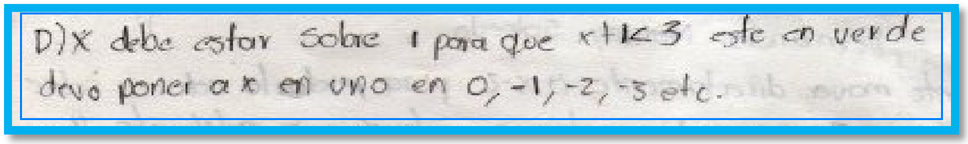
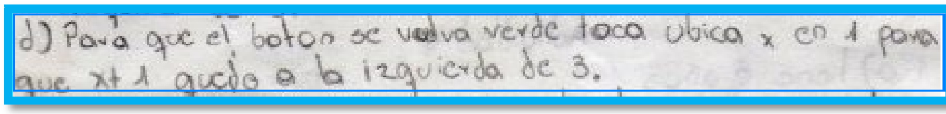
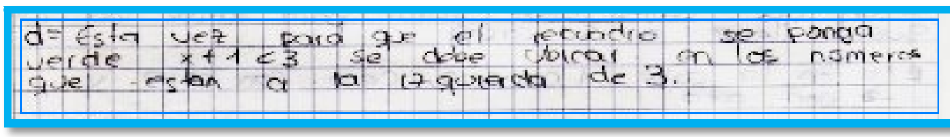
A2	 D) x debe estar sobre 1 para que x+1<3 este en verde devó poner a x en uno en 0, -1, -2, -3 etc.
A3	 d) Para que el boton se vuelva verde toca ubica x en 1 para que x+1 quedo a la izquierda de 3.
A5	 d= Esta vez para que el recuadro se ponga verde x+1<3 se debe ubicar en los numeros que estan a la izquierda de 3.

Tabla 22. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.2.d)

Percibimos como el alumno A5, persiste con el error de describir el conjunto de valores que toma “$x + 1$” y no el de “x”.

Tarea 1.2.e) Mueve la expresión x sobre la recta y observa en qué valores se puede ubicar x de tal manera que $x + 1$ se ubique en 3. Encuentra TODOS los posibles valores.

Tarea 1.2.e) en AlNuSet

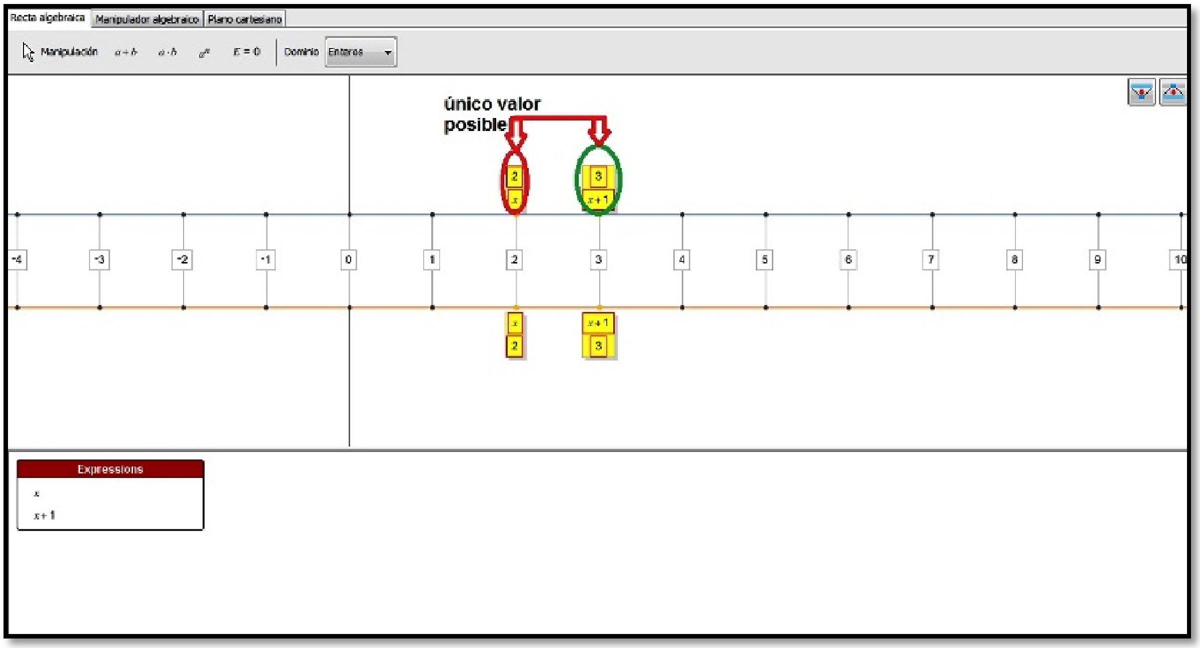


Figura 20. Solución de la tarea 1.2.e) en AlNuSet

Análisis de lo observado

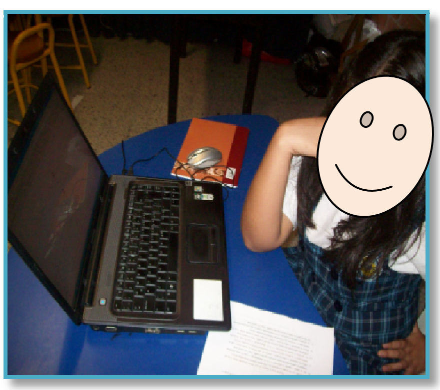


Foto 7. Alumna (A5) resolviendo la tarea en AlNuSet

Esta tarea no representó dificultad alguna para los alumnos, bastó con hacer coincidir la expresión "$x + 1$" en 3 y anotar la posición en que se ubicó "x".

Respuestas

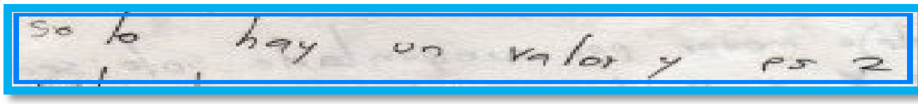
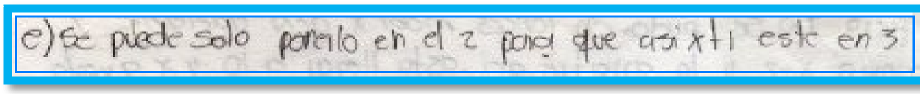
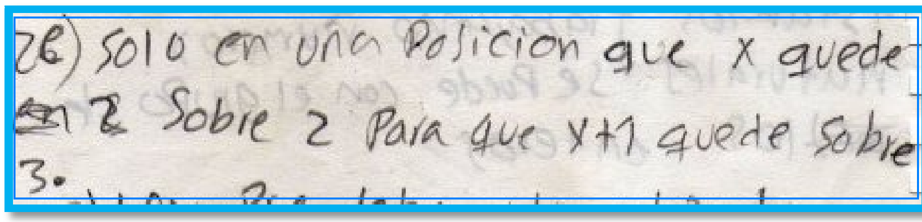
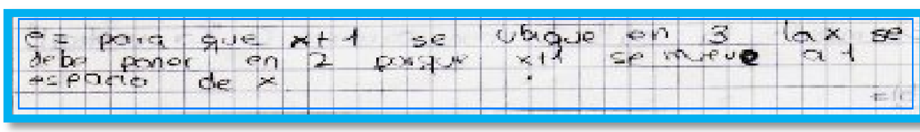
ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	 solo hay un valor y es 2
A3	 e) se puede solo ponerlo en el 2 para que así x+1 este en 3
A4	 2e) solo en una Posicion que x quede en 2 Sobre 2 Para que x+1 quede Sobre 3.
A5	 e = para que x+1 se ubique en 3 la x se debe poner en 2 porque x+1 se mueve a 1 espacio de x

Tabla 23. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.2.e)

Los alumnos en las respuestas resaltan la unicidad de la solución y mantienen claridad sobre la dependencia de la expresión $x + 1$ con respecto a "x", persistiendo la idea de patrón que fue desarrollada en la primera parte de la actividad 1.

Tarea 1.2.f) Ve al Editor y escribe la ecuación $x + 1 = 3$. Desplazando x sobre la recta, encuentra TODOS los valores para los cuales, el botón rojo del recuadro "Sets" se vuelve verde.

Tarea 1.2.f) en AlNuSet

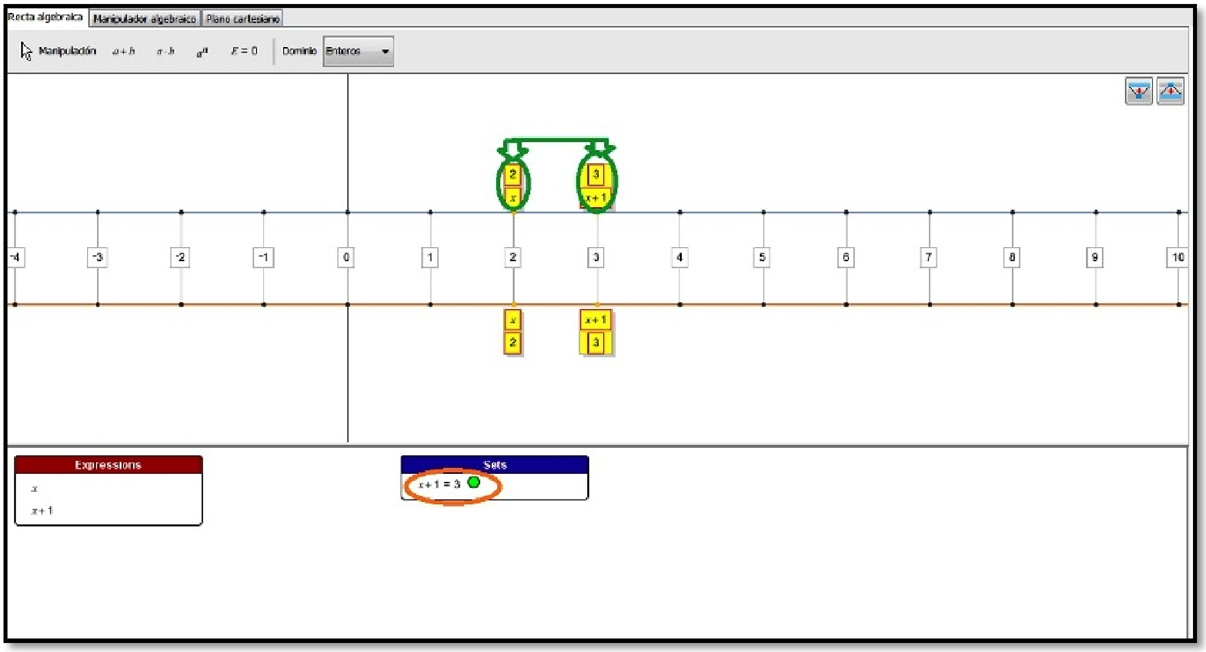


Figura 21. Solución de la tarea 1.2.f) en AlNuSet

Análisis de lo observado

Nuevamente la señal de color le permite al alumno encontrar la respuesta a la inecuación y verificar lo que intuitivamente conjeturo respecto a la solución de la tarea.

Respuestas

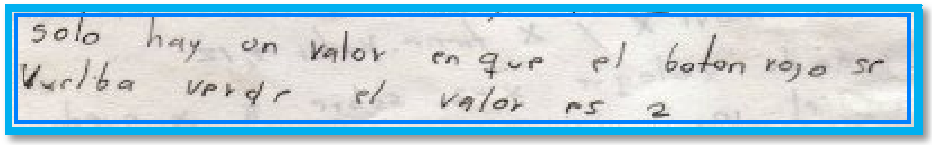
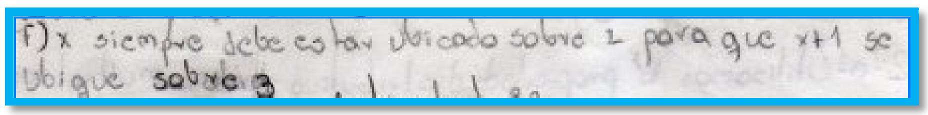
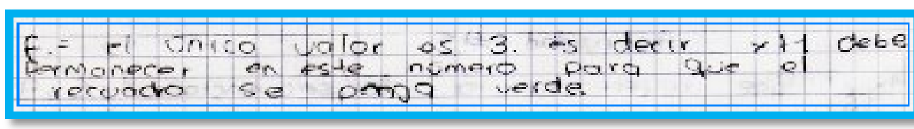
ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	 solo hay un valor en que el boton rojo se Vuelba verde el valor es 2
A2	 f) Para que x+1 este en verde tengo que mover a x sobe 2
A3	 f) x siempre debe estar ubicado sobre 2 para que x+1 se ubique sobre 3
A5	 f.- el Unico valor es 3. es decir x+1 debe permanecer en este número para que el recuadro se ponga verde

Tabla 24. Respuestas de los alumnos de la tarea 1.2.f)

REFLEXIÓN SOBRE SI LA SITUACIÓN SE MANTUVO O NO COMO A-DIDÁCTICA Y QUÉ USOS DE LA VARIABLE SE MANIFESTARON EN EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 1.2.

Los alumnos no pidieron ayuda al profesor para resolver las tareas propuestas, su relación con el medio fue suficiente para hallar la solución de las mismas.

Respecto a los usos puede decirse que se presentaron los tres durante el desarrollo de las tareas, al igual como se predijo en la planeación de la situación. Destacamos que la aparición de la señal de color ayudo a resaltar particularmente el uso de la variable como incógnita especifica. Se siguió observando la dependencia de $x + 1$ con respecto a x.

A continuación, veremos algunos aspectos que manifestaron los alumnos en el desarrollo de la actividad 1.2:

G2. Cuando se le pide al alumno mover "x" sobre la recta. Este puede observar que "x" puede asumir muchos valores.

I1. El alumno al enfrentarse a la tarea de posicionar "$x + 1$" a la derecha de "3", reconoce que hay unos valores desconocidos para "x" que al hallarlos permiten cumplir con la tarea.

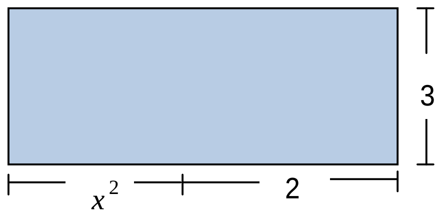
I2. Cuando A2 afirma que puede colocar "$x + 1$" a la derecha de 3, cuando "x" se pone sobre 4, 5, 6, 7…. El alumno interpreta la variable simbólica "x" como la representación de números específicos.

F1. Cuando el alumno A2 mueve "x" buscando que "$x + 1$" este en el lugar que la tarea lo requiere se hace evidente que el alumno entiende la relación existente entre las expresiones "x" y "$x + 1$".

F5. El alumno A2 describe el conjunto de valores de "x" por extensión como 3, 4, 5, 6,… que son el resultado de cumplir con la condición "$x + 1 > 3$" se puede evidenciar como determina el intervalo de variación de la variable "x" partiendo del intervalo de variación de la expresión "$x + 1$".

6.2 Actividad dos.

Tarea 2.1 Encuentra todos los valores de x para los cuales el área del rectángulo que aparece a continuación, está entre 9 y 33. Escribe tus hipótesis y verifícalas con AlNuSet.



Tarea 2.1 en AlNuSet

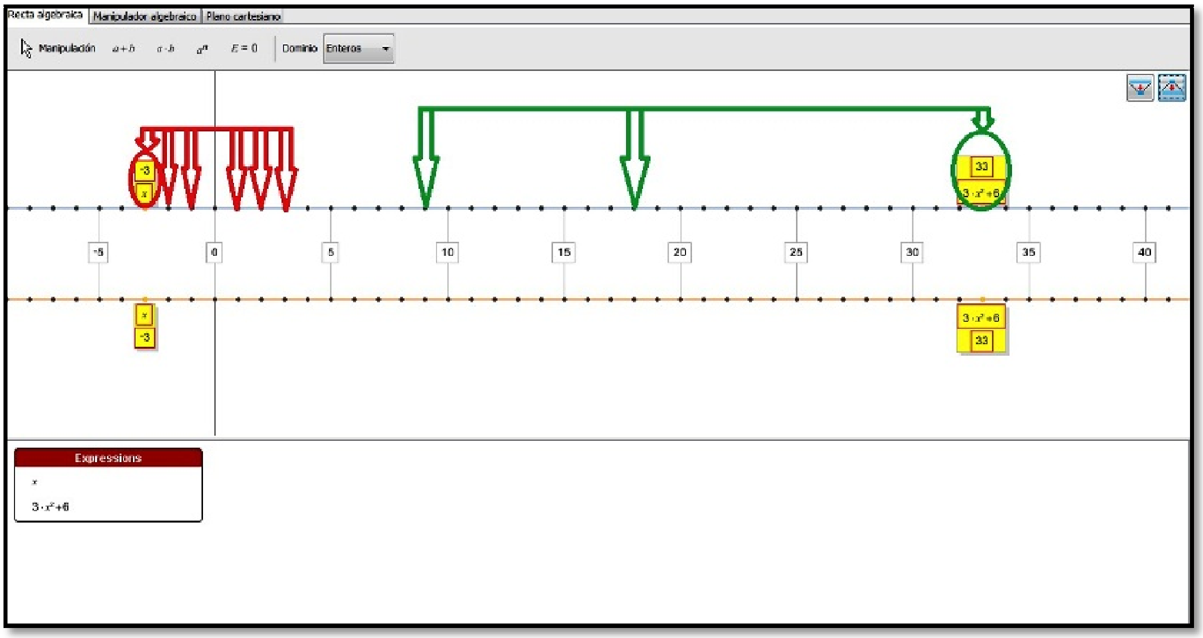


Figura 22. Solución de la tarea 2.1 en AlNuSet

Análisis de lo observado

Esta actividad requirió que los alumnos inicialmente modelaran la situación y en general buscaron una expresión que representara el área del rectángulo.

El alumno A1, fue el más rápido en encontrar la expresión de área correcta, A5 también encontró la expresión. En los demás alumnos se presentaron dificultades; A2 y A3 plantearon bien la formula de área es decir, la modelaron como "$(x^2 + 2) * 3$", pero al desarrollar el producto coincidieron en su respuesta "$x^2 + 6$" claramente equivocada. El alumno A4 dividió el rectángulo en dos, asumiendo que el área del rectángulo mostrado, equivaldría a la suma del área del cuadrado de lado x^2, con el área del rectángulo de lados 2 y 3.

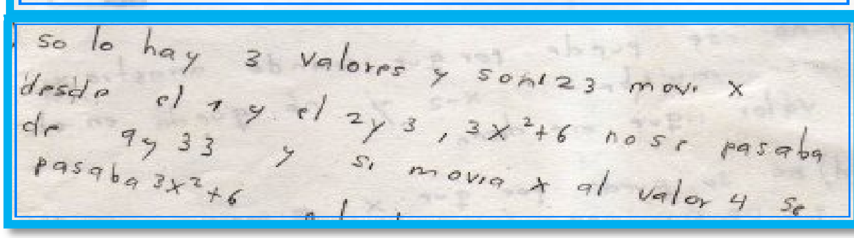
Tardaron un poco en tomar la decisión de editar la expresión de área hallada e insertarla en la recta. Esto creemos se debe a que, se observó que tan pronto como se les presentó la tarea a los alumnos ellos sintieron la necesidad de encontrar una expresión de área y en busca de dar solución a esta necesidad surgida se desconectaron de la tarea inicial, por ello cuando encontraron la expresión se hallaron perdidos, fue muy necesario la intervención del profesor quien los devolvió a la consigna inicial.

Ya con la expresión sobre la recta, surgió la necesidad de moverla. El alumno A2 comentó, *la expresión no se deja mover, en los otros ejercicios tocaba mover x…* más adelante el mismo alumno A2 comenta, *yo creo que toca meter la x, porque ahí nos están preguntando por la "x".*

Con "x" y la expresión de área sobre la recta, los alumnos comenzaron a probar valores mediante desplazamientos de x sobre esta, detallando cuáles de ellos hacían que la expresión de área se mantuviera dentro de los limites que sugirió la tarea, dando como resultado final las respuestas a continuación.

Foto 8. La alumna (A5) haciéndole una pregunta al profesor en formación Robinson Muñoz

Respuestas

ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	 

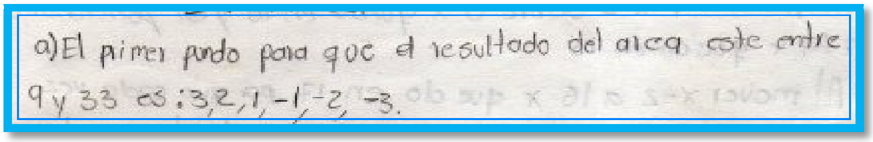
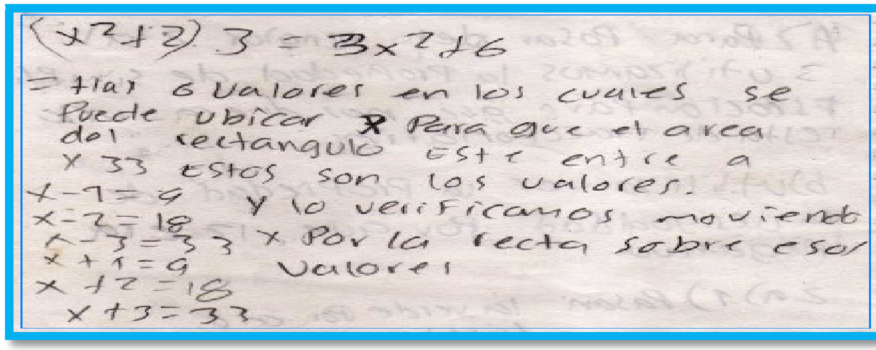
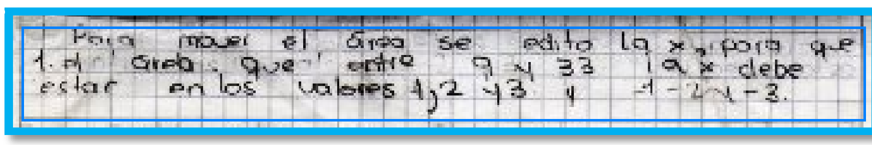
A2	 a)El primer punto para que el resultado del area este entre 9 y 33 es: 3,2,1,-1,-2,-3.
A4	 $(x^2+2)\,3 = 3x^2+6$ = Hay 6 valores en los cuales se puede ubicar x para que el area del rectangulo este entre a x 33 estos son los valores. $x-1=9$ y lo verificamos moviendo $x-2=18$ $x-3=33$ x por la recta sobre esos $x+1=9$ valores $x+2=18$ $x+3=33$
A5	 Para mover el área se edita la x, para que el área quede entre 9 y 33 la x debe estar en los valores 1, 2 y 3 y -1 -2 y -3.

Tabla 25. Respuestas de los alumnos de la tarea 2.1

REFLEXIÓN SOBRE SI LA SITUACIÓN SE MANTUVO O NO COMO A-DIDÁCTICA Y QUÉ USOS DE LA VARIABLE SE MANIFESTARON EN EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 2.

Al concluir la actividad se puede decir que se mantuvo la situación a-didáctica, las intervenciones del profesor no afectaron directamente el desarrollo de la tarea, los alumnos haciendo uso de algunos pre-saberes geométricos y aritméticos lograron llevar una expresión sobre la recta algebraica y fue exclusivamente mediante la interacción del alumno con el software que se llegó a la solución de la tarea propuesta.

En lo que respecta a los usos de la variable que se manejaron en la actividad, cabe resaltar que no se cumplieron en la forma como se predijo en el análisis a priori, pues los alumnos no recurrieron a la utilización de las inecuaciones; si en cambio, reforzaron las acciones que les habían dado resultado en las tareas anteriores en donde se manifestaron preferiblemente el uso de la variable como numero general y la variable en una relación funcional.

A continuación, veremos algunos aspectos que manifestaron los alumnos en el desarrollo de la actividad 2:

I5. Los alumnos inicialmente modelan la situación identificando una expresión de área.

G2. Los alumnos llevan la expresión de área "$(x^2 + 2) * 3$" y "x" a la recta algebraica. Lo que le permite observarlas como expresiones que pueden tomar diferentes valores.

I1, I4. El alumno entiende que debe hallar los valores desconocidos de "x" que hacen que la expresión de área hallada, esté entre 9 y 33.

F5. Estando las expresiones sobre la recta algebraica, los alumnos mueven "x" de lado a lado y observan como la expresión "$(x^2 + 2) * 3$" cambia cada vez que se cambia de posición la expresión "x". Este hecho permite observar nuevamente la relación existente entre las expresiones.

6.3 Actividad tres.

6.3.1. Reproduce con ayuda del manipulador algebraico el desarrollo de la siguiente desigualdad. Y reflexiona sobre lo que ocurre al pasar de un renglón al otro. No utilizar la opción simplificar en la reproducción del ejercicio.

$\frac{x}{2}-\frac{(x+1)}{3} \geq \frac{x+5}{4}$
$\frac{x}{2}-\frac{x+1}{3} \geq \frac{x+5}{4}$
$\frac{1}{6}\cdot x-\frac{1}{3} \geq \frac{x+5}{4}$
$\frac{1}{6}\cdot x-\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}\cdot x+\frac{5}{4}$
$\frac{1}{6}\cdot x-\frac{1}{3}-(\frac{1}{4}\cdot x+\frac{5}{4}) \geq 0$
$\frac{-1}{12}\cdot x-\frac{19}{12} \geq 0$
$\frac{-1}{12}\cdot x \geq \frac{19}{12}$
$x \leq -12\cdot\frac{19}{12}$
$x \leq -19$
$x \in]-\infty, -19]$

Tarea 3.1.a) ¿Cómo se llega del renglón 2 al 3? ¿Qué operaciones o propiedades se aplicaron? Podrías escribir de forma general las propiedades aplicadas.

Tarea 3.1.b) Del renglón 7 al 8 se cambió el sentido de la desigualdad, ¿Por qué?

Tarea 3.1.a) y Tarea 3.1.b) en AlNuSet

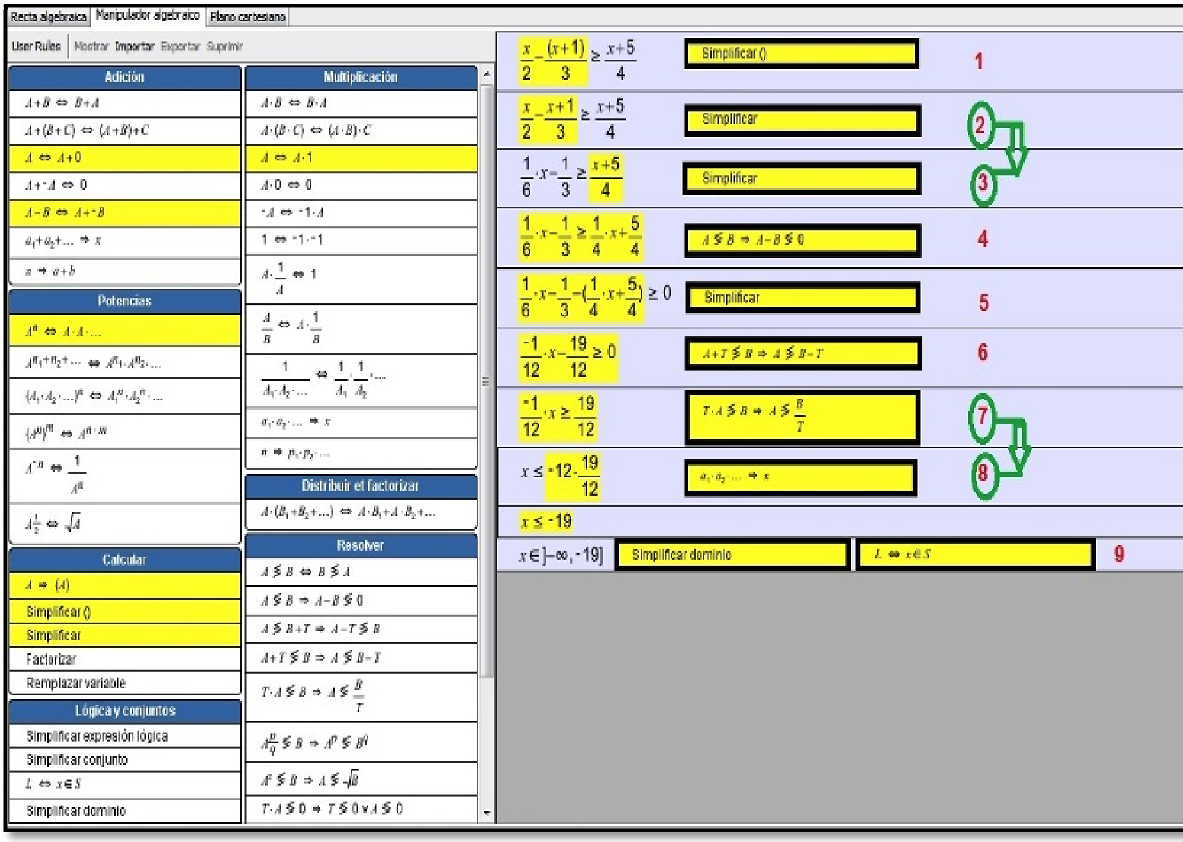


Figura 23. Solución de las tareas 3.1.a) y 3.1.b) en AlNuSet

Análisis de lo observado

Creemos que esta no fue una tarea que se cumpliera como parte de una situación a-didáctica, pues durante el desarrollo se presentaron varios aspectos que la afectaron. En primer lugar el ambiente fue novedoso y los estudiantes tardaron mucho tiempo en descubrir cómo utilizar las herramientas. Luego de interactuar con este, los estudiantes pudieron reproducir el desarrollo pero no se preocuparon por hacer conciencia sobre el significado de lo que cada propiedad le causaba a la expresión o parte de la expresión que fuese señalada. Se notó gran dificultad en la interpretación de los símbolos y términos en los que se dan las propiedades. En muchos casos la intervención del profesor encaminó al alumno hacia lo que debería hacer para resolver la tarea. El profesor dañó la situación motivado por la intención de mantenerles animados y dispuestos para las actividades siguientes.

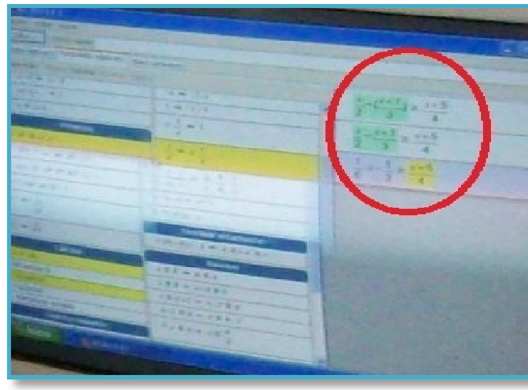
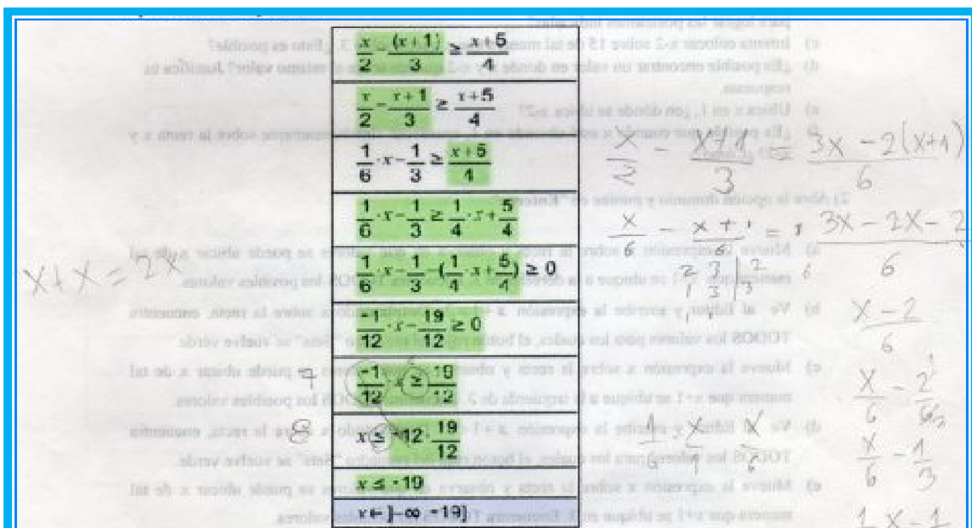
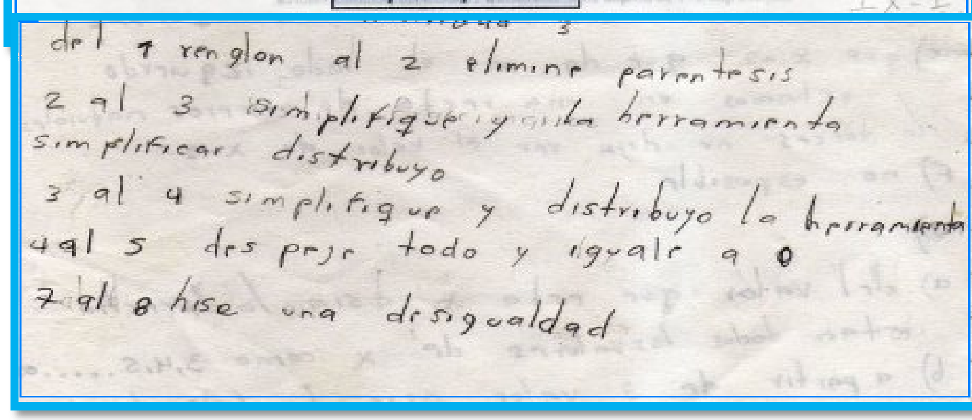
 

Foto 9. Alumno (A3) resolviendo la tarea en AlNuSet

Respuestas

ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	  del 1 renglon al 2 elimine parentesis 2 al 3 simplifique y use la herramienta simplificar distribuyo 3 al 4 simplifique y distribuyo la herramienta 4 al 5 despeje todo y iguale a 0 7 al 8 hise una desigualdad

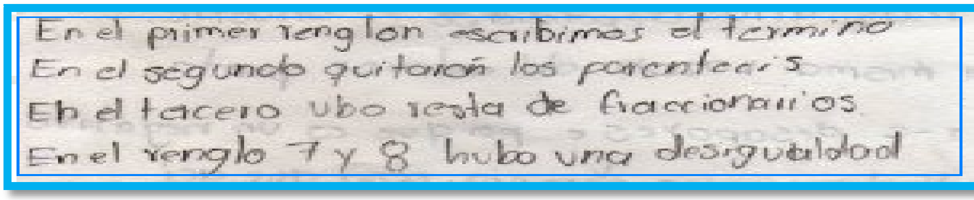
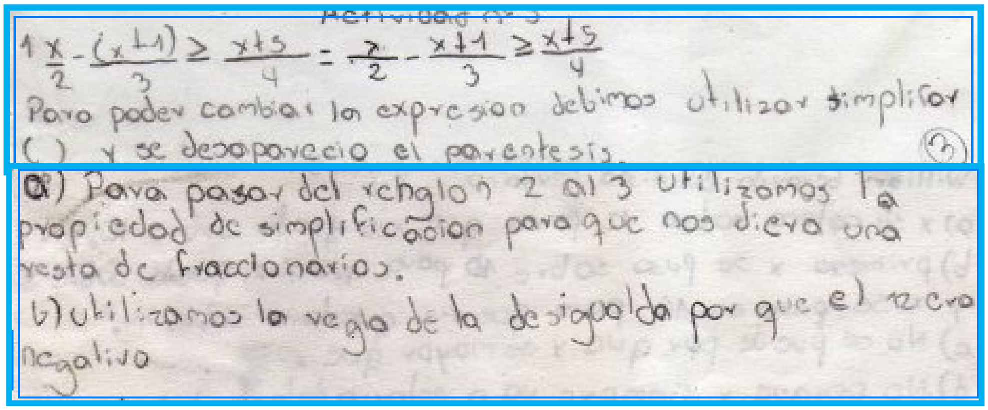
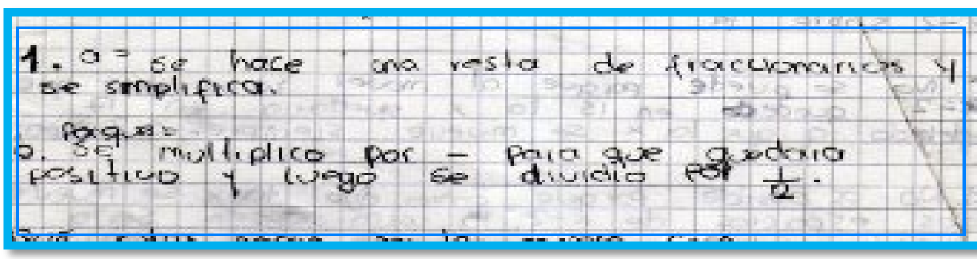
A2	 En el primer renglon escribimos el termino En el segundo quitaron los parentesis En el tercero ubo resta de fraccionarios En el renglo 7 y 8 hubo una desigualdad
A3	 1 $\frac{x}{2}-\frac{(x+1)}{3}\geq\frac{x+5}{4} = \frac{x}{2}-\frac{x+1}{3}\geq\frac{x+5}{4}$ Para poder cambiar la expresion debimos utilizar simplificar ( ) y se desaparecio el parentesis. (3) a) Para pasar del renglon 2 al 3 utilizamos la propiedad de simplificacion para que nos diera una resta de fraccionarios. b) utilizamos la regla de la desigualda por que el cero negativo
A5	 1. a = se hace una resta de fraccionarios y se simplifica. Porque: b. se multiplico por − para que quedara positivo y luego se dividio por $\frac{1}{2}$.

Tabla 26. Respuestas de los alumnos de las tareas 3.1.a) y 3.1.b)

REFLEXIÓN SOBRE SI LA SITUACIÓN SE MANTUVO O NO COMO A-DIDÁCTICA Y QUÉ USOS DE LA VARIABLE SE MANIFESTARON EN EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 3.1.

El uso que potencialmente tuvo lugar en el desarrollo de esta tarea, fue el de la variable como objeto. Siendo este un uso que no hace parte de la caracterización de la variable hecha por Ursini en el modelo 3UV.

6.3.2 Las gráficas de colores rojo, verde, azul y morado, representan el recorrido de cuatro diferentes rutas de bus. Andresito se encuentra caminando por la carrera cero “la horizontal” y desea ir a su casa que se encuentra en la esquina de la “calle 2 con carrera 4”. El punto negro en la horizontal representa el movimiento de Andresito en busca de una parada de bus. Los puntos azules sobre las gráficas representa la posición del bus.

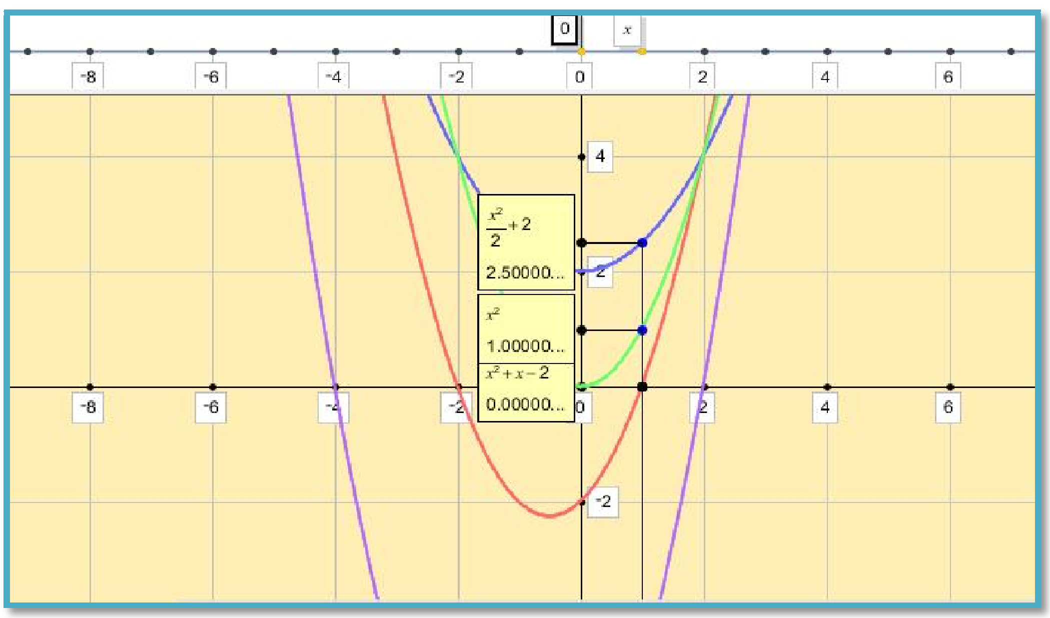
El movimiento de este punto se logra a través del arrastre de sobre la recta algebraica mostrada arriba del plano.

La ruta Roja es (la ruta siempre viva).

La ruta Verde es (la ruta carmelita).

La ruta Azul es (la ruta el laguito).

La ruta morada es (la ruta flor).



Tarea 3.2.a) ¿Qué rutas pasan por la carrera cero?

Tarea 3.2.b) ¿Qué rutas pasan por la casa de Andresito?

Tarea 3.2.c) Si Andresito se encuentra en la carrera cero. ¿En qué calles puede pararse a esperar una ruta de bus?

Tarea 3.2.d) ¿En qué calles se debe parar para tomar una ruta que lo lleve a su casa?

Tarea 3.2.a) Tarea 3.2.b) Tarea 3.2.c) Tarea 3.2.d) en AlNuSet

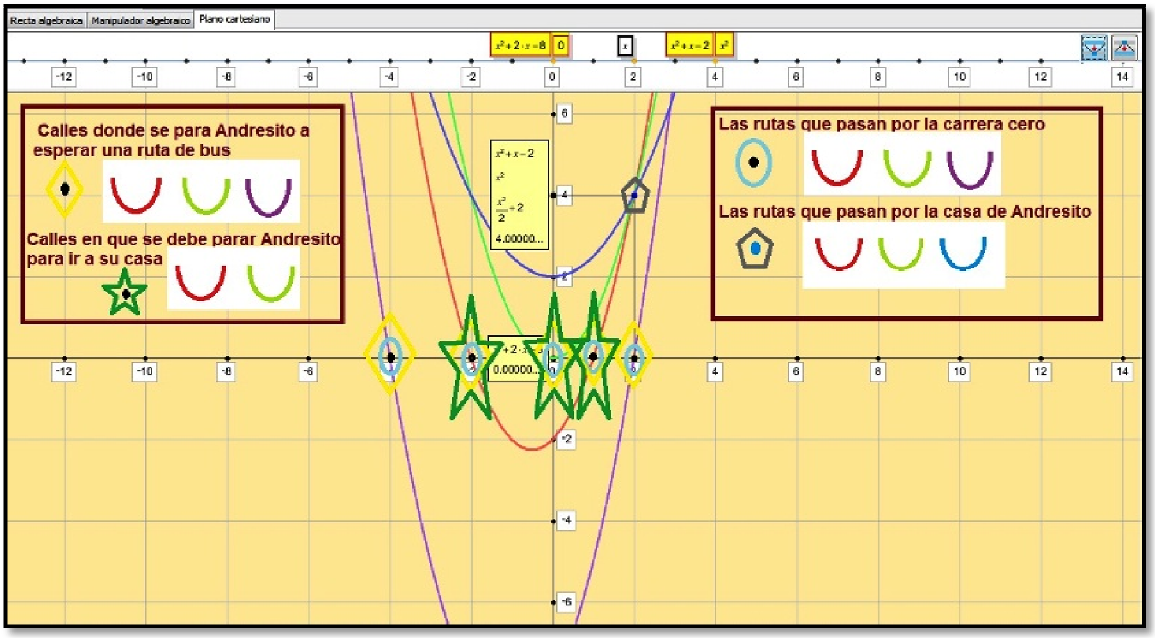


Figura 24. Solución de las tareas 3.2.a), 3.2.b), 3.2.c) y 3.2.d) en AlNuSet

Análisis de lo observado

Fue interesante observar como la tarea les permitió ver la covariancia de los valores "x" en la Horizontal manipulada libremente sobre la recta algebraica, con respecto al valor evaluado de x en las expresiones que modelan cada curva, en la vertical.

El alumno A4 comento, *cada vez que uno mueve "x" el puntico sobre las curvas también se mueve un poco para arriba y otro poco para la derecha.*

Nuevamente los desplazamientos de x en la recta y la observación del recorrido del punto azul sobre cada una de las curvas a partir de estos, sirvieron para que los alumnos lograran la tarea.

Foto 10. Alumno (A2) resolviendo la tarea en AlNuSet

Respuestas

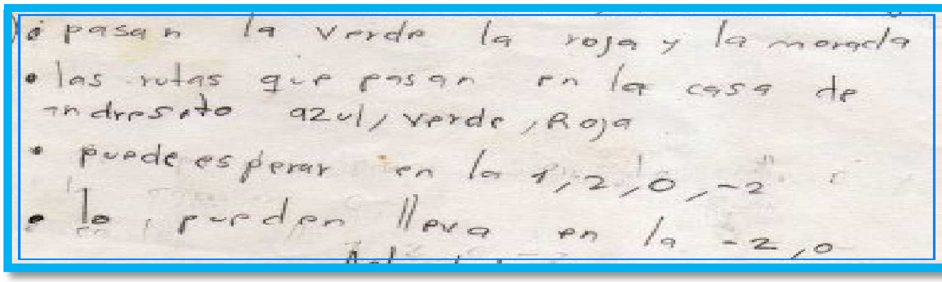
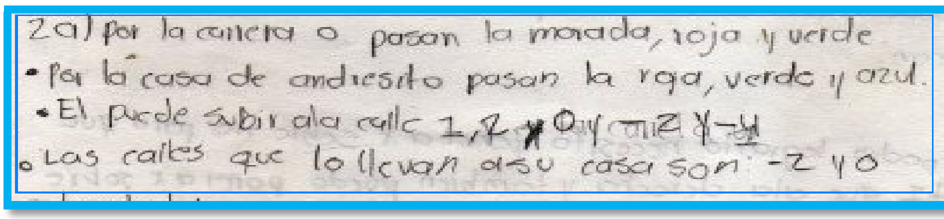
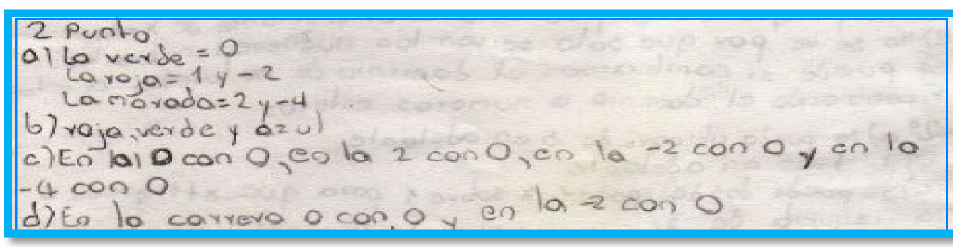
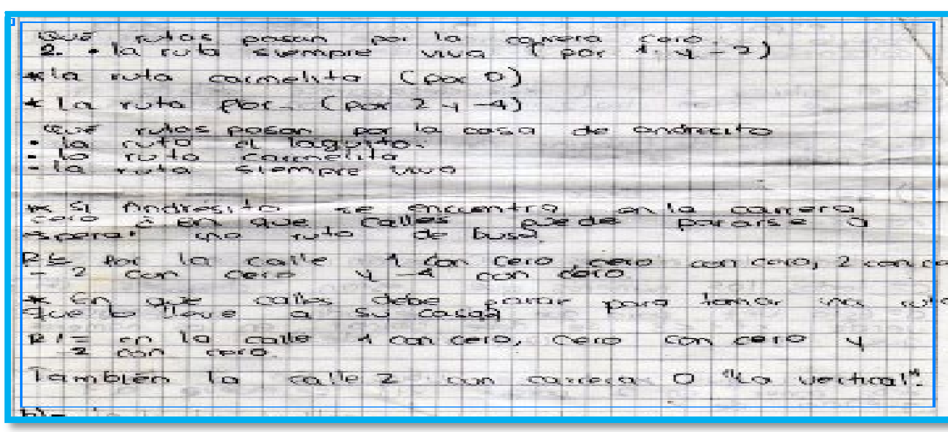
ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	 • pasan la verde la roja y la morada • las rutas que pasan en la casa de andresito azul, verde, Roja • puede esperar en la 1, 2, 0, -2 • lo pueden lleva en la -2, 0
A2	 2a) por la carrera 0 pasan la morada, roja y verde • Por la casa de andresito pasan la roja, verde y azul. • El puede subir ala calle 1, 2, 0 y -2 y -4 • Las calles que lo llevan a su casa son -2 y 0
A3	 2 Punto a) la verde = 0 La roja = 1 y -2 La morada = 2 y -4 b) roja, verde y azul c) En la 1 con 0, en la 2 con 0, en la -2 con 0 y en la -4 con 0 d) En la carrera 0 con 0 y en la -2 con 0
A5	 Qué rutas pasan por la carrera cero 2. • la ruta siempre viva (por 1, 4 -2) * la ruta carmelita (por 0) * La ruta flor (por 2 y -4) Qué rutas pasan por la casa de andresito • la ruta el laguito. - la ruta carmelita - la ruta siempre viva * Si Andresito se encuentra en la carrera cero ¿en que calles puede pararse a esperar una ruta de buses. R/ por la calle 1 con cero, cero con cero, 2 con cero -2 con cero y -4 con cero. * En que calles debe parar para tomar una ruta que lo lleve a su casa R/= en la calle 1 con cero, cero con cero y -2 con cero. También la calle 2 con carrera 0 "la vertical".

Tabla 27. Respuestas de los alumnos de las tareas 3.2.a), 3.2.b), 3.2.c) y 3.2.d)

REFLEXIÓN SOBRE SI LA SITUACIÓN SE MANTUVO O NO COMO A-DIDÁCTICA Y QUÉ USOS DE LA VARIABLE SE MANIFESTARON EN EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 3.2.

La tarea se cumplió sin intervención alguna del profesor que pudiese influir directamente en la realización de las tareas. Nuevamente estas soluciones se originaron a partir de la interacción entre el alumno y el medio.

La aparición del plano permitió que se observara más claramente la relación funcional presente entre "x" y las expresiones que la contengan. Lo valioso del plano es que en él se manifiestan todos los puntos relacionados a través de la curva que se dibuja, mientras en la recta solo podemos observar una pareja.

En cuanto a los usos en que se presento la variable para el desarrollo de estas tareas, se concluye que claramente fueron los previstos en nuestro análisis a priori:

F1. El plano cartesiano del AlNuSet muestra en el eje horizontal la expresión "x" y en el eje vertical la expresión que contiene "x", por ello a medida que los alumnos desplazan el punto que corresponde a la variable "x" sobre la horizontal, se observa como el punto correspondiente a la expresión que está en la vertical se mueve a medida que esto ocurre, permitiendo que el estudiante vea la correspondencia existente entre la variable "x" y la expresión.

F2. Cuando el alumno A1, responde que la ruta verde, la ruta roja y la ruta morada pasan por la casa de Andresito, lo hacen identificando el valor de la variable dependiente (la expresión en la vertical), dados ciertos valores de la independiente (en la horizontal).

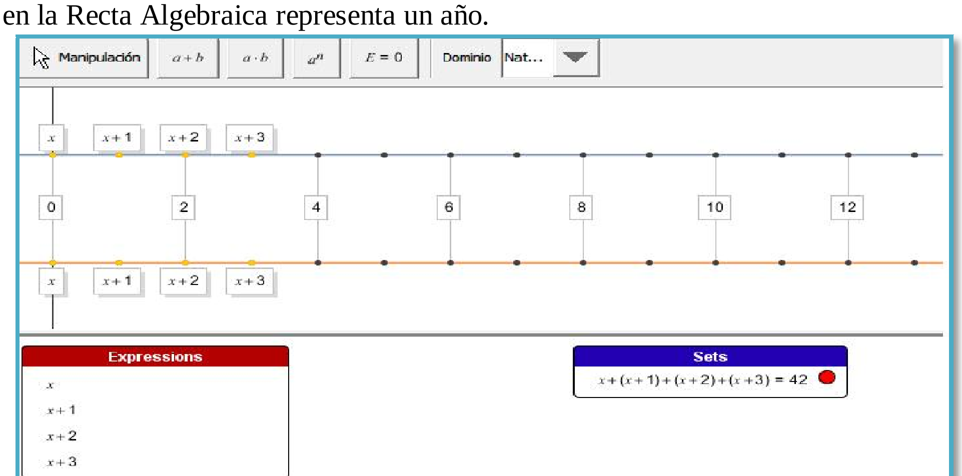
F3. Cuando el alumno A2 responde que Andresito puede pararse en las calles 1, 2, 0 y -2 a esperar una ruta que lo lleve a su casa; lo hace identificando los valores de la variable dependiente dados los valores de la expresión en la vertical.

Foto 11. Alumnos (A3) y (A4) resolviendo la tarea en AlNuSet

6.4 Actividad Cuatro.

6.4.1 La edad de Juan es x años, la edad de Pedro es un año más que la edad de Juan, la edad de pablo es un año más que la edad de Pedro y la edad de Lucas es un año más que la edad de Pablo.

Cada punto en la Recta Algebraica representa un año.



Tarea 4.1.a) Si Juan tiene cinco años ¿Cuántos años tiene Lucas?

Tarea 4.1.b) ¿Qué edad tiene Juan cuando Pablo tiene 13 años?

Tarea 4.1.c) ¿Qué edad debe tener Juan, para que se cumpla que la suma de sus edades sea 42?

Tarea 4.1.a) en AlNuSet

Figura 25. Solución de la tarea 4.1.a) en AlNuSet

Tarea 4.1.b) en AlNuSet

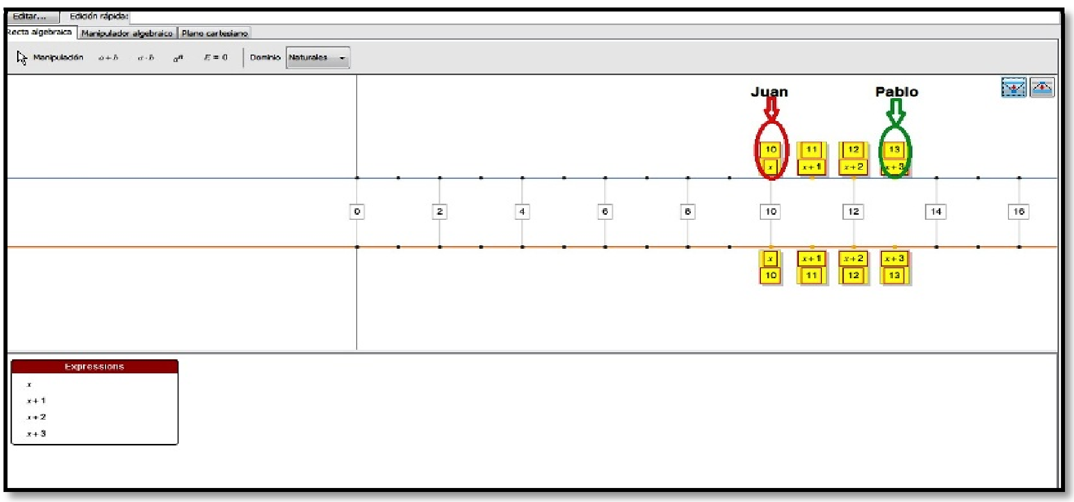


*Figura 26.*Solución de la tarea 4.1.b) en AlNuSet

Tarea 4.1.c) en AlNuSet

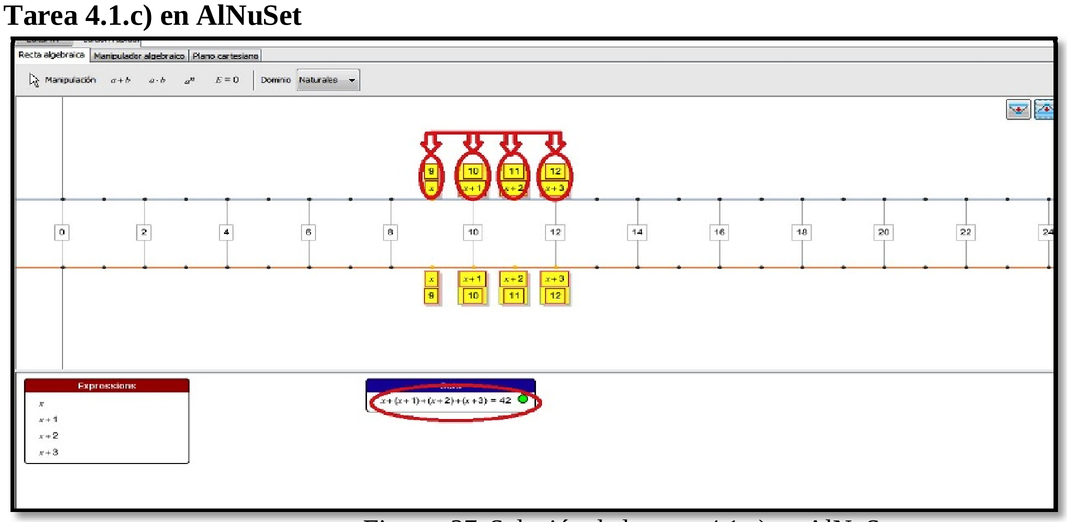


Figura 27. Solución de la tarea 4.1.c) en AlNuSet

Análisis de lo observado

Esta fue una tarea en donde los alumnos tuvieron que relacionar cada una de las expresiones sugeridas, con la información que a modo de problema entregaba la tarea. Este proceso de asignación se dio en forma general y coherente en todos los alumnos.

Los condicionamientos a unos ciertos valores que se pedían encontrar en las tres tareas, hicieron de esta una actividad en la que particularmente se vio el tratamiento de la variable desde su uso como incógnita especifica.

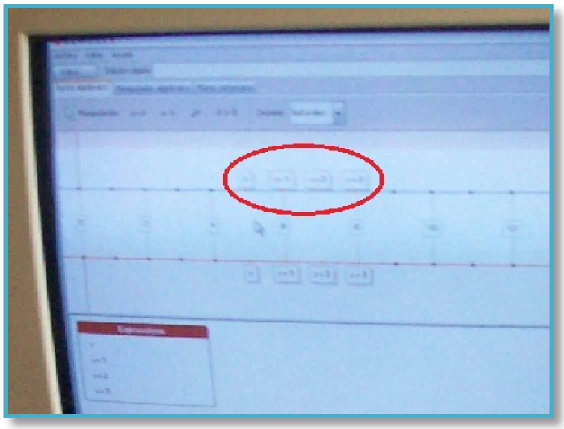
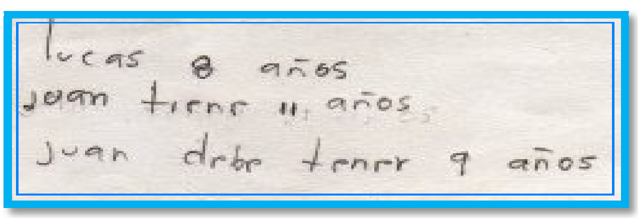


Foto 12. Solución de la tarea 4.1 hecha por un alumno en AlNuSet

En el desarrollo de la tarea observamos la soltura y habilidad con que los alumnos ejecutaban los desplazamientos sobre la recta, buscando con estos hacer coincidir alguna de las tres expresiones en el lugar que la tarea lo requería, para la solución de las tareas basto simplemente con leer en la recta los posicionamientos que las otras expresiones asumían luego de que alguna de ellas cumpliese la condición.

Respuestas

ALUMNOS	RESPUESTAS
A1	 lucas 8 años juan tiene 11 años juan debe tener 9 años

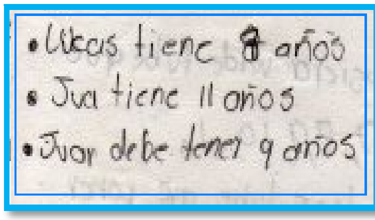
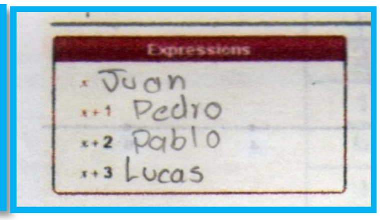
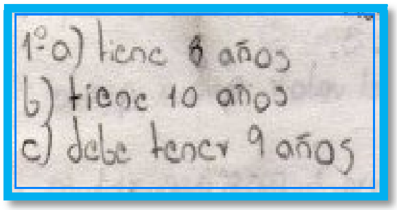
A2	 
A3	
REFLEXIÓN	En general el desarrollo de esta tarea permitió que los alumnos determinaran los valores de una expresión dado los valores de otra y viceversa, aspectos que caracterizan la variable en una relación funcional

Tabla 28. Respuestas de los alumnos de las tareas 4.1.a), 4.1.b) y 4.1.c)

Se observa en A1 y A2 que las respuestas fueron las correctas, A3 se equivoca en la respuesta a la tarea b, sin embargo el error no fue de tipo procedimental, este se presento cuando el alumno leyó la información, pues confundió que la expresión “$x + 3$” era la que representaba la edad de pablo.

REFLEXIÓN SOBRE SI LA SITUACIÓN SE MANTUVO O NO COMO A-DIDÁCTICA Y QUÉ USOS DE LA VARIABLE SE MANIFESTARON EN EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 4.1.

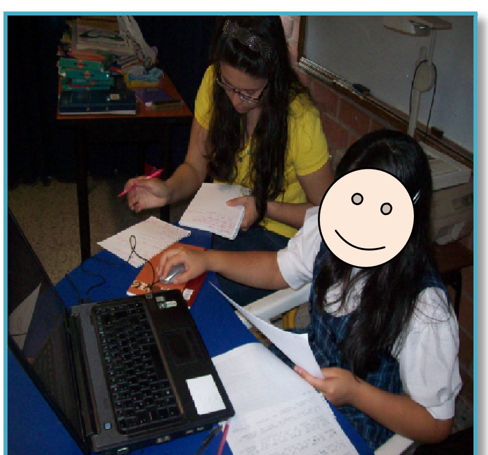


Foto 13. La profesora en formación María Angélica Rueda escribiendo algunos comentarios de la Alumna (A5)

Observamos que si se logro mantener la situación a-didáctica durante el desarrollo de las tareas que componían esta actividad. No se requirió la intervención del profesor, ni siquiera hubo la devolución por parte de este, que había sido contemplada en el análisis a priori. Los alumnos se sintieron muy cómodos y seguros de lo que debían hacer para dar con la respuesta de la tarea, que entre otras cosas les sirvió para reforzar acciones que se llevaron a cabo en actividades anteriores.

En cuanto a los usos de la variable que se dieron en el desarrollo de la tarea podemos decir, que se presentaron los tres un poco en la forma en que se predijo en el análisis a priori, sin embargo el tratamiento de la variable como incógnita especifica fue el predominante.

A continuación, veremos algunos aspectos que manifestaron los alumnos en el desarrollo de la actividad 4.1:

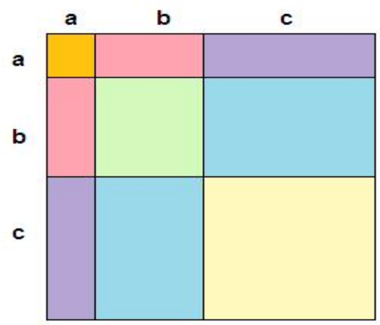
G2-G5. Los estudiantes asociaron cada una de las expresiones sobre la recta algebraica con las edades de Juan, Pedro, Lucas, Pablo. Obsérvese como A2 en su guía de actividades relaciona correctamente las expresiones con los nombres de cada uno según sea la condición descrita por la situación problema.

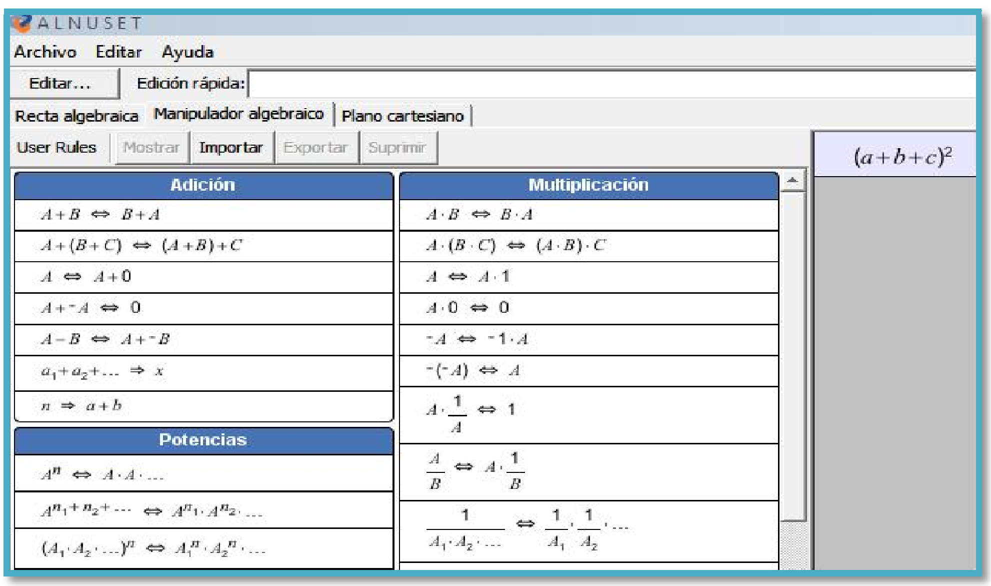
F4-F6. El alumno se da cuenta que para que “$x + 1$”, “$x + 2$”, “$x + 3$” se mueva sobre la recta, se hace necesario mover “x”.

F2-F3. Los alumnos logran dar con las edades de Pedro, Lucas, Pablo únicamente conociendo la edad de Juan. El alumno lo logra cuando posiciona “x” en el punto sobre la recta que corresponde a la edad de Juan y detalla donde se posiciona las otras expresiones que modelan las edades de Pedro, Pablo y Lucas.

I1-I2-I4. Para que A2 lograra responder correctamente a la tarea, se hizo necesario que el alumno en primera instancia aceptara la presencia de algo desconocido susceptible de ser hallado. Luego cuando encuentra las edades según sea la condición, está encontrando los valores específicos asignados que son los que finalmente requiere la tarea sean hallados.

6.4.2.a) Utilizando el “Manipulador Algebraico” llega a una expresión de área para el cuadrado grande de lado $a + b + c$ en términos del área de los cuadriláteros que lo componen. No utilizar la opción simplificar.





Tarea 4.2.a) en AlNuSet

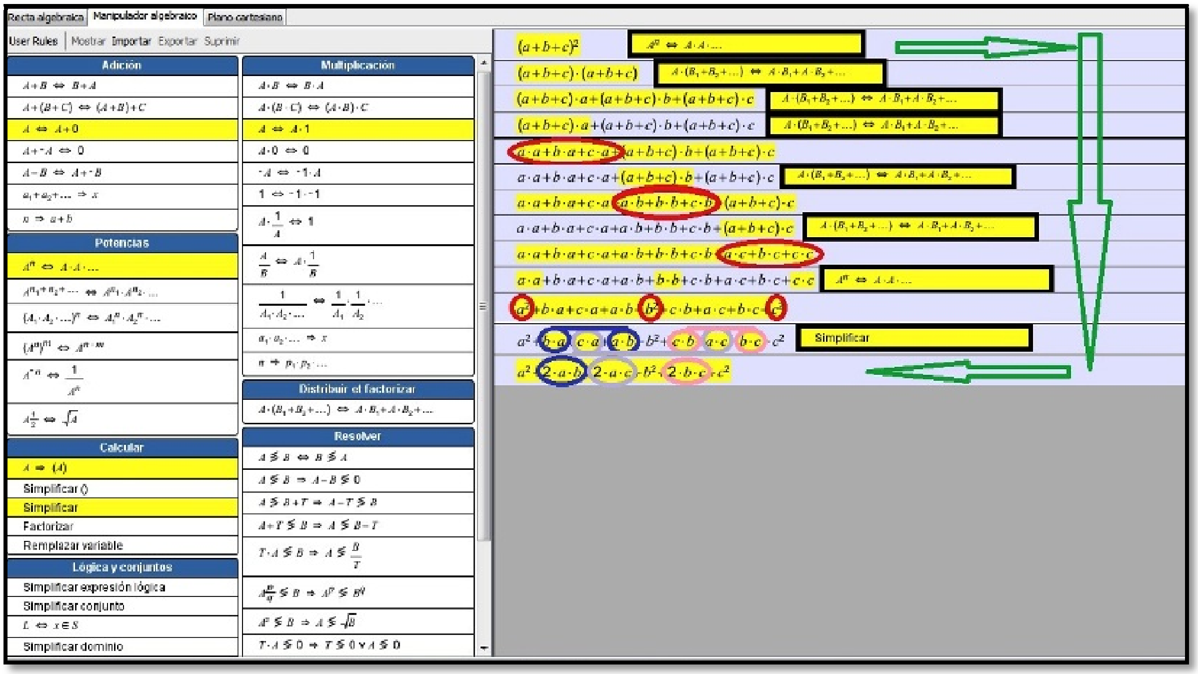


Figura 28. Solución de la tarea 4.2.a) en AlNuSet

Análisis de lo observado

Cuando los alumnos reciben la tarea y el pantallazo del manipulador con la expresión "$(a + b + c)^2$" se percibe que no saben qué hacer, el alumno A3 pregunta *¿y aquí que hay que hacer?*. Se deduce que no asocian la expresión "$(a + b + c)^2$"con el área del cuadrado grande, por lo que hace falta que el profesor intervenga con comentarios a modo de preguntas, como*: ¿si saben ustedes, cual es el área de un cuadrado?, ¿cuál es el lado del cuadrado grande?*. El alumno A3 fue el primero en entender el "qué" representaba la expresión en el manipulador, es así como, leyendo nuevamente el enunciado de la tarea comprendió lo que se le pedía. Observamos en su respuesta y en las inscripciones sobre la hoja de la actividad parte de su razonamiento.

Aclarada la tarea y reforzando las acciones que sobre el uso del manipulador se efectuaron en la actividad 3.1, los alumnos A3 y A4 a manera de ensayo y error fueron convirtiendo la expresión "$(a + b + c)^2$" correspondiente al área del cuadrado en una expresión equivalente que contempla en una suma las áreas, de los cuadrados y rectángulos que lo componen.

Respuestas

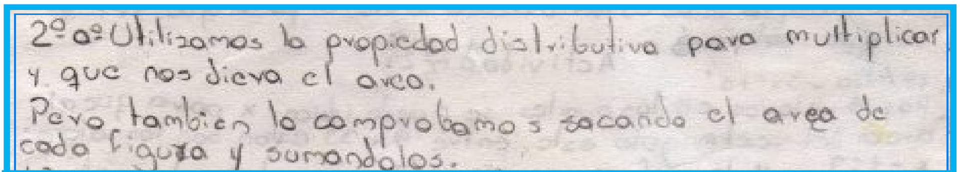
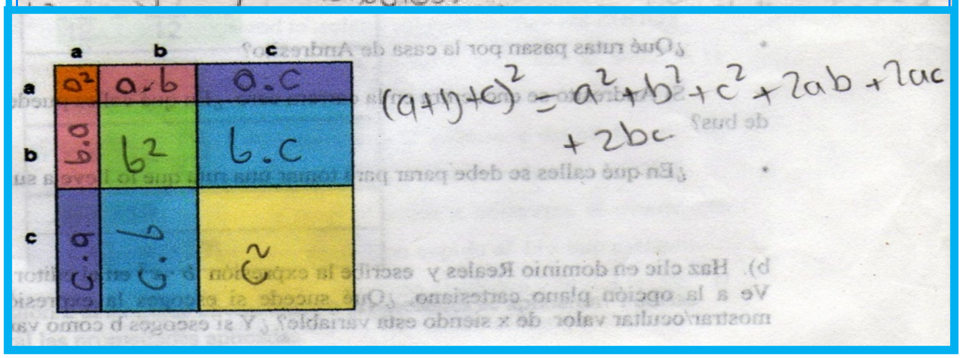
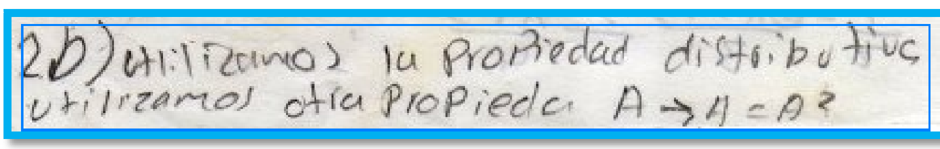
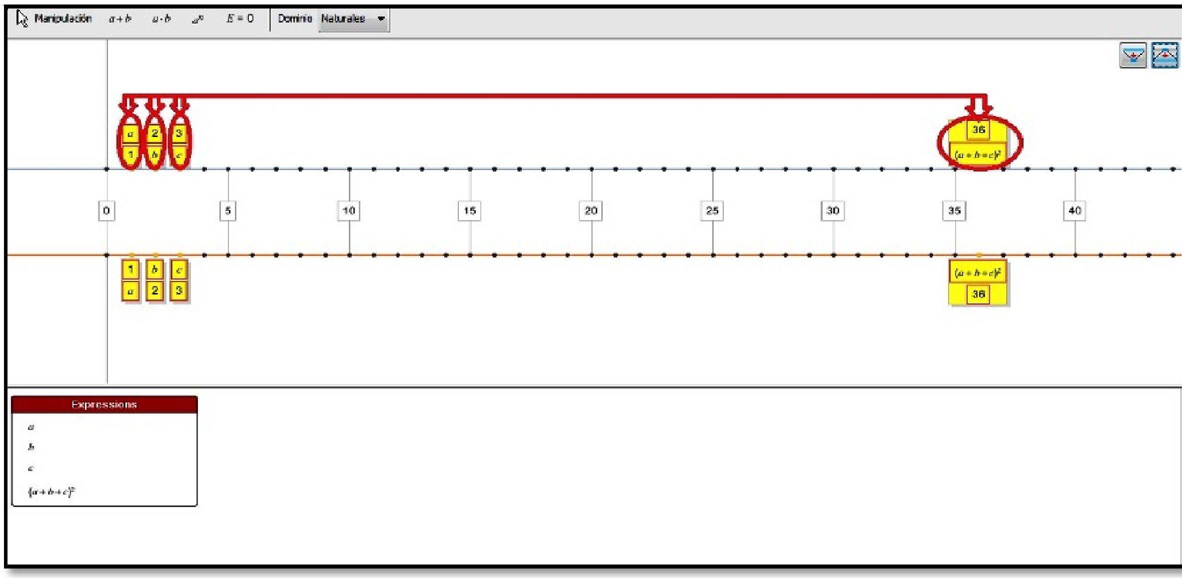
ALUMNOS	RESPUESTAS
A3	 
REFLEXIÓN	El alumno logra encontrar una expresión que modela situación problema que plantea la tarea en base a sus pre saberes aritméticos y geométricos
A4	
REFLEXIÓN	El alumno logra identificar que una de las reglas esta dada por la propiedad distributiva, propiedad que seguramente ya manejo. Sin embargo hay propiedades que no asocian a nada conocido.

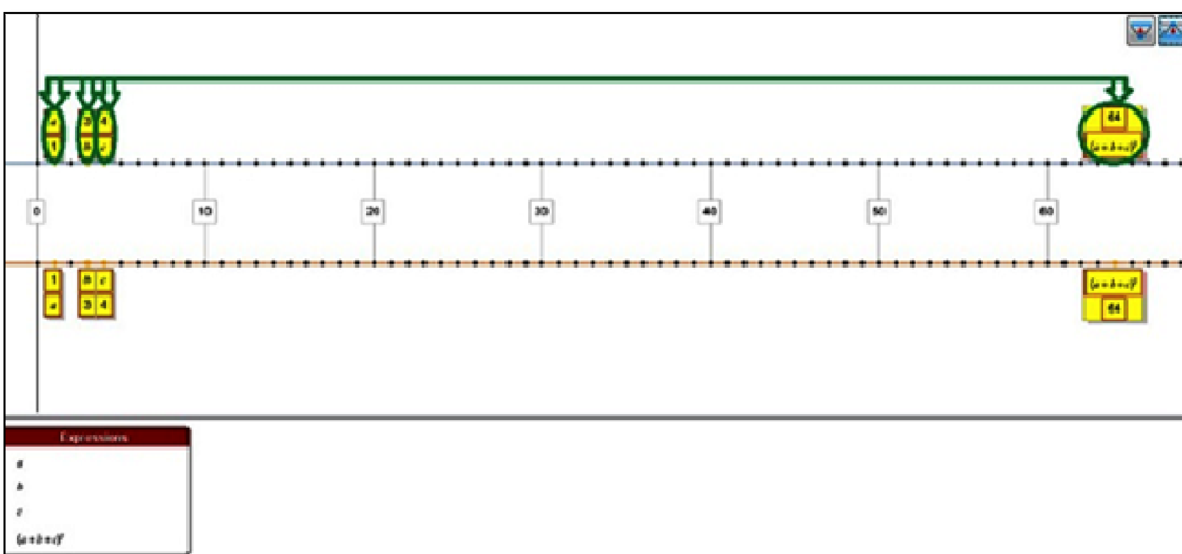
Tabla 29. Respuestas de los alumnos de las tareas 4.2.a)

6.4.2.b) Utilizando la “Recta Algebraica” completa los valores en la siguiente tabla:

a	b	c	A= $(a+b+c)^2$
1	**2**		
1		**4**	**64**
1	**3**		**81**
	3	**5**	**100**

Tarea 4.2.b) en AlNuSet





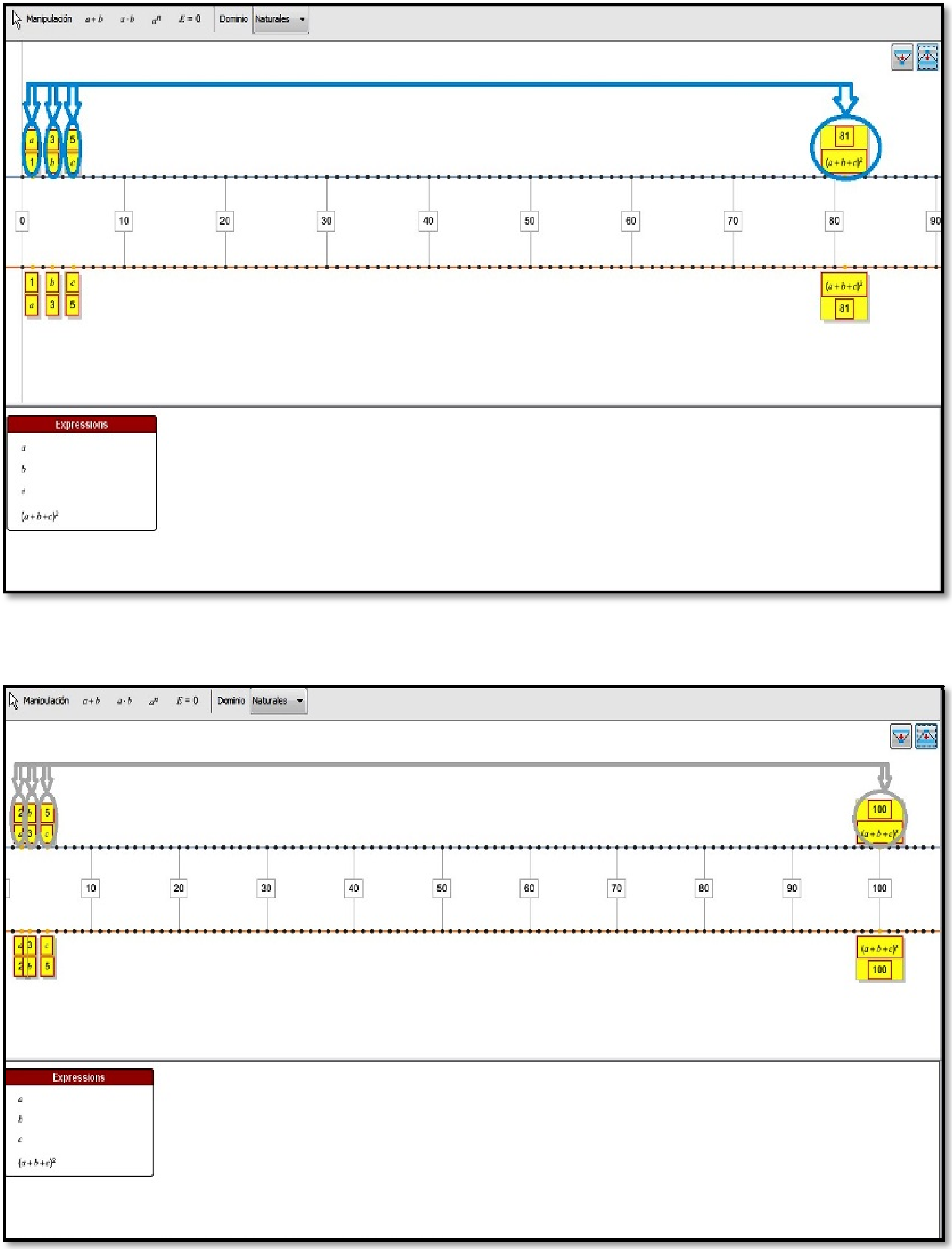


Figura 29. Solución de cada parte de la tarea 4.2.b) en AlNuSet

Análisis de lo observado

Los alumnos no tuvieron problema en tomar la decisión de editar e insertar los parámetros a, b, y c y la expresión "$(a + b + c)^2$" sobre la "Recta Algebraica". Luego el trabajo se resumió a la variación de estos parámetros y a observar los cambios que estos producen en la expresión "$(a + b + c)^2$" y en ocasiones a encontrar la posición especifica a donde se debe desplazar alguno de los parámetros buscando que se cumplan las condiciones de la tarea.

Foto 14. Alumno (A1) resolviendo la tarea en AlNuSet

Respuestas

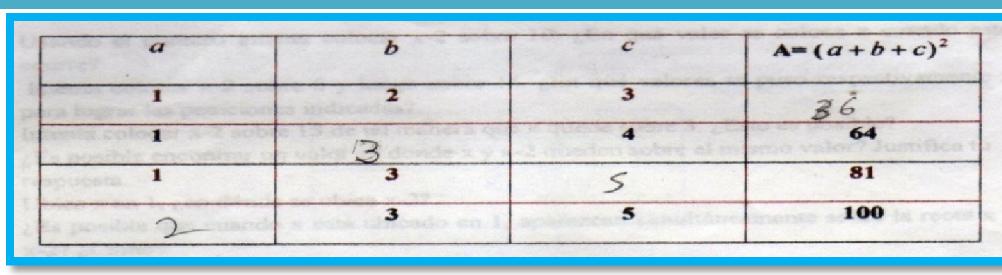
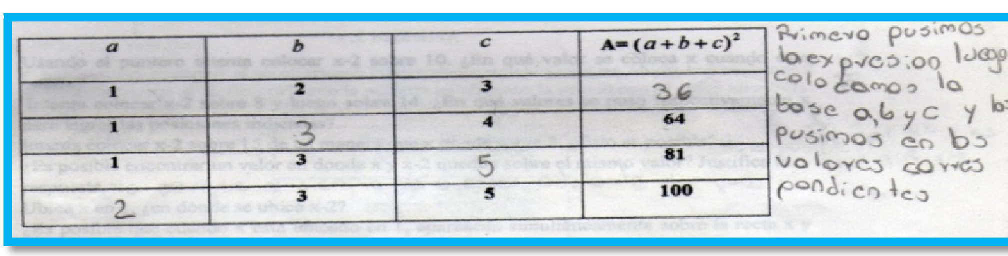
<table>
<tr><th>ALUMNOS</th><th>RESPUESTAS</th></tr>
<tr><td>A2</td><td>
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>$A = (a+b+c)^2$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>36</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>64</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>81</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>100</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>A3</td><td>
<table>
<tr><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>$A = (a+b+c)^2$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>36</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>64</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>81</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>100</td></tr>
</table>
Primero pusimos la expresion luego colocamos la base a,b y c y los pusimos en los valores correspondientes</td></tr>
</table>

Tabla 30. Respuestas de los alumnos de la tarea 4.2.b)

REFLEXIÓN SOBRE SI LA SITUACIÓN SE MANTUVO O NO COMO A-DIDÁCTICA Y QUÉ USOS DE LA VARIABLE SE MANIFESTARON EN EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 4.2.

En la actividad 4.2 se observo que tanto en la parte **a** como en la parte **b,** se mantuvo la situación a-didáctica. Si bien el profesor intervino en la devolución, estas intervenciones no incidieron directamente en la forma como los alumnos llevaron a cabo la tarea.

Se observaron los tres usos de la variable en el desarrollo de las tareas, pues aún cuando en los análisis a-priori se pensó que se daría exclusivamente el uso de la variable como incógnita especifica, podemos reflexionar que en esta como en todas las tareas que se desarrollen en la "Recta Algebraica" se hace infaltable el uso de la variable como relación funcional pues esta es una característica propia de AlNuSet.

A continuación, veremos algunos aspectos que manifestaron los alumnos en el desarrollo de la actividad 4.2:

Los alumnos requirieron para llenar el cuadro, ingresar las expresiones "a, b, c y $(a + b + c)^2$" a la recta algebraica.

G1-G2. Primero observaron las expresiones sobre la recta en unas posiciones por defecto que el programa asume para las constantes. Reconocían que estas posiciones podrían ser modificadas si se procedía de una manera especial.

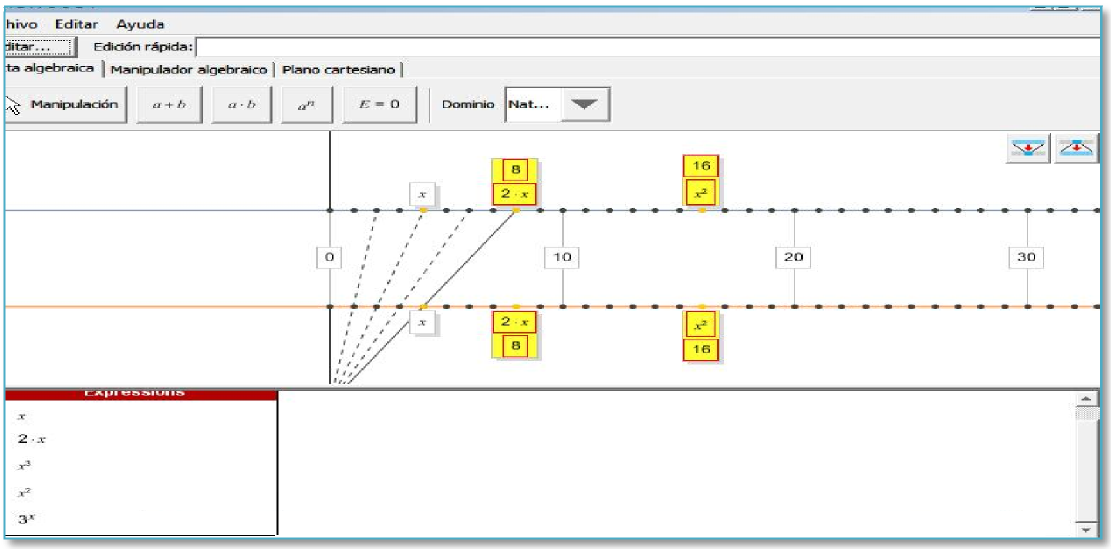
F4. Los alumnos reconocieron que podían mover las constantes "a, b c" directamente mediante el arrastre sobre la recta, mientras que la expresión "$(a + b + c)^2$" se movía únicamente cuando una de las tres constantes se movía.

I1-I2-I4. Cuando los alumnos llenaban el cuadro, reconocían que el vacio indicaba un valor desconocido: procedieron luego a llevar tres de las expresiones "a, b, c y $(a + b + c)^2$" que suministraba la tarea a las posiciones indicadas, luego la expresión faltante apareció como resultado de las acciones.

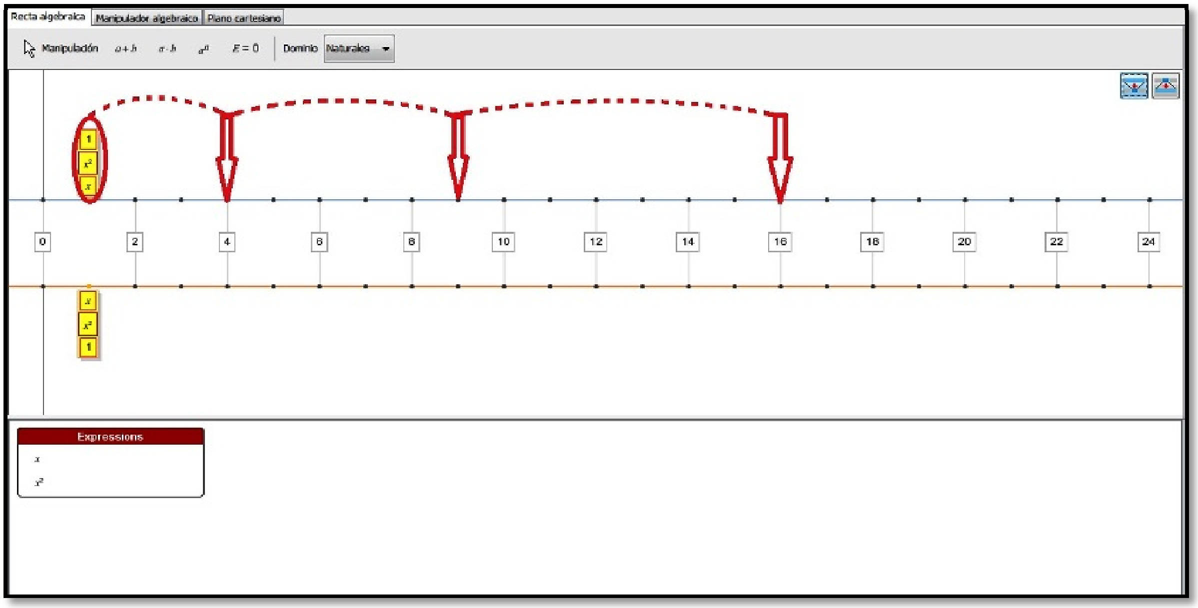
6.5 Actividad Cinco

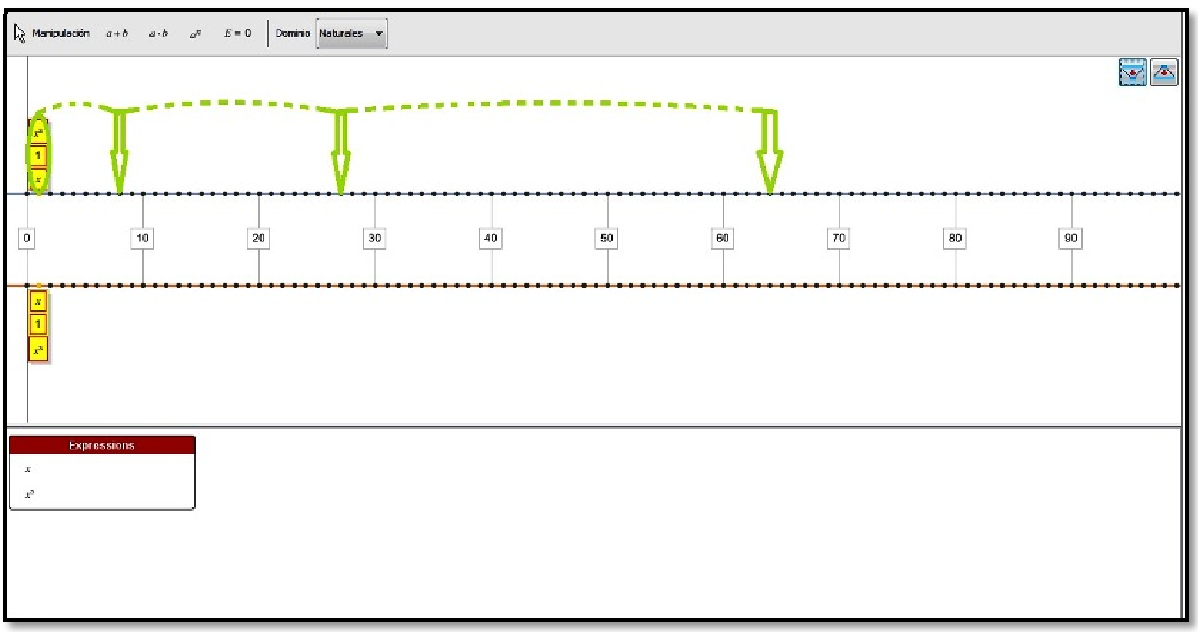
6.5.1 Relaciona las siguientes secuencias con sus expresiones generales, utilizando la Recta Algebraica de AlNuSet.

SECUENCIA	EXPRESIÓN GENERAL
1, 8, 27, 64,…	X^2
3, 9, 27, 81,…	X^3
1, 4, 9, 16,…	2X
2, 4, 6, 8,…	3^x



Tarea 5 en AlNuSet





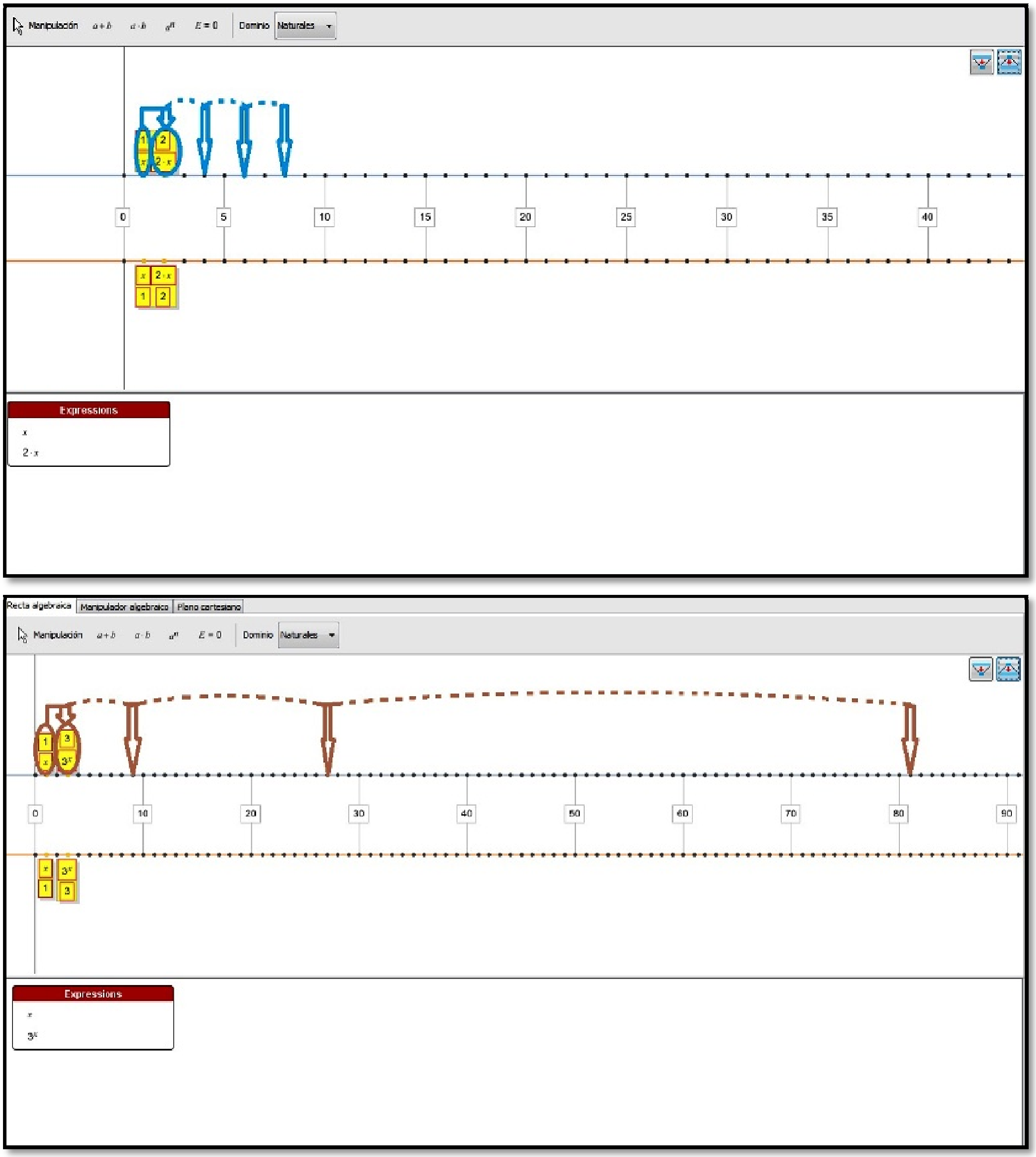


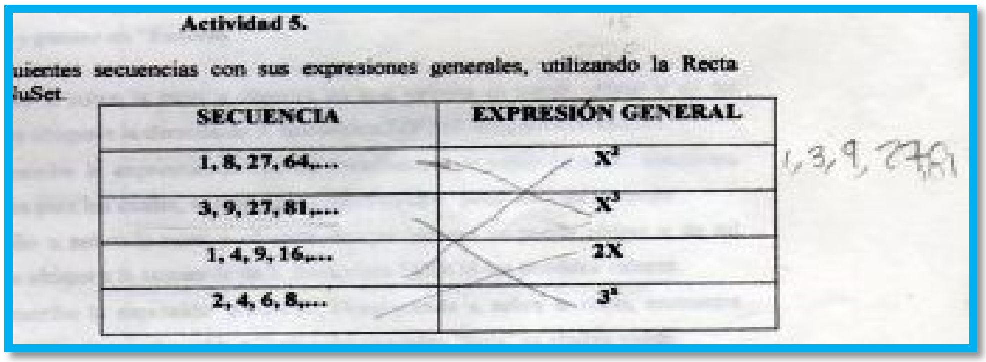
Figura 30. Solución para cada secuencia de la tarea en AlNuSet

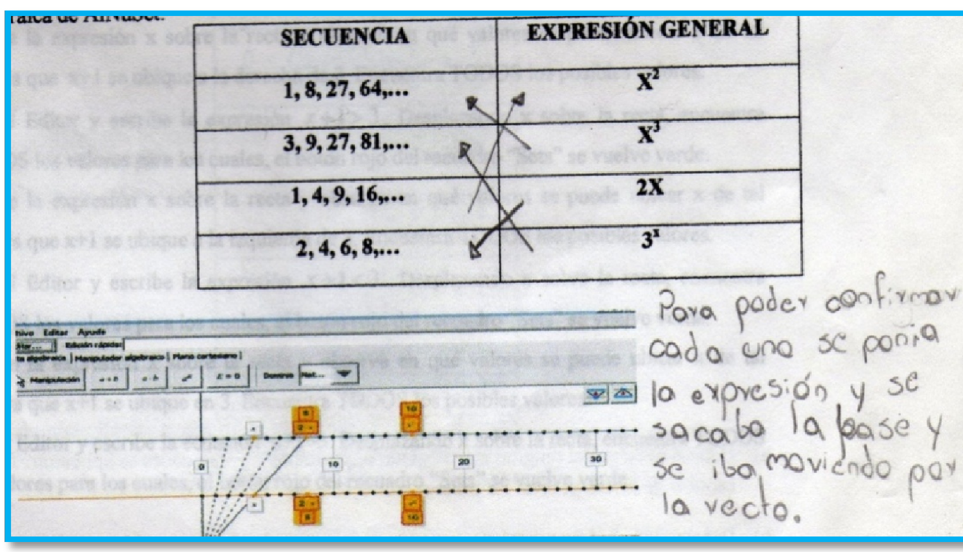
Análisis de lo observado

Esta actividad fue específica en mostrar el uso de la variable como número general. Los alumnos observaron que para cada desplazamiento de x sobre la "Recta Algebraica" las expresiones asumían ciertos valores, de tal manera que al organizar los valores en donde se iban ubicando estas expresiones, dados los movimientos de x secuenciales en los naturales se tendría una secuencia especifica. Continuando con la solución de la tarea, a los alumnos les basto con relacionar las secuencias obtenidas por esta vía con las secuencias plasmadas en el cuadro y asociarlas a la expresión que verificaron las generaba.

El alumno A4 comento *hay que anotar todos los puntos en los que se para x^2, cuando uno mueve x desde uno, luego a dos y a tres y a cuatro,…, así aparece la secuencia que le toca a x^2.*

Respuestas

<table>
<tr><th>ALUMNOS</th><th>RESPUESTAS</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>


</td></tr>
<tr><td>A3</td><td>


</td></tr>
</table>

Tabla 31. Respuestas de los alumnos de la tarea 5.

REFLEXIÓN SOBRE SI LA SITUACIÓN SE MANTUVO O NO COMO A-DIDÁCTICA Y QUÉ USOS DE LA VARIABLE SE MANIFESTARON EN EL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD 5.

El carácter de situación a-didáctica no se perdió, los alumnos cumplieron la tarea sin intervención del profesor y respondieron a la actividad en la manera como se predijo en el análisis a priori. La tarea lució el uso de la variable como numero general específicamente, aunque no desapareció el uso de la variable como relación funcional.

A continuación, veremos algunos aspectos que manifestaron los alumnos en el desarrollo de la actividad 5:

G2. Los alumnos envían a la recta algebraica las expresiones "$2x$, x^2, x^3, 3^x" haciendo conciencia de que si bien aparecen por defecto en una posición sobre la recta, esto no indica que son valores fijos y por el contrario dadas las experiencias anteriores, saben que estas pueden llegar a tener diferentes valores.

G1. Luego, el alumno intentó relacionar los patrones dados por las expresiones "$2x$, x^2, x^3, 3^x"con las secuencias.

F2. Los alumnos moviendo "x" en orden desde los puntos 0, 1, 2, 3, … fueron observando las posiciones que iban tomando cada una de las expresiones y lo compararon con las secuencias para responder correctamente a la tarea.

7. ALNUSET COMO MEDIO: SITUACIONES A-DIDÁCTICAS SOBRE EL CONCEPTO DE VARIABLE

Foto 15. Profesores que participaron en el cursillo AlNuSet como medio: situaciones a-didácticas sobre el concepto de variable.

En el XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas realizado del 11 de julio al 15 de 2011, presentamos en modalidad de cursillo nuestro trabajo llamado AlNuSet como Medio: Situaciones a-didácticas sobre el concepto de variable. Este cursillo fue dirigido a profesores en formación y en ejercicio.
Nosotros presentamos un cuadernillo donde se puede encontrar una situación a-didáctica comprendida por 5 actividades. Comentaremos lo que se hizo en cada una de ellas, es decir, haremos alusión a algunas intervenciones hechas por los profesores asistentes.

Al comenzar el desarrollo de la sección 1.1 de la actividad 1 a la mayoría de los profesores se les presentó la misma dificultad, esta fue la imposibilidad de movimiento de la expresión $x - 2$ (ver figura 31).

Foto 16. Profesora asistente haciéndole una pregunta al ponente Robinson Muñoz

A continuación, se presentan algunos comentarios realizados por los profesores asistentes (P1), (P2) y (P3) en ese momento de la actividad.

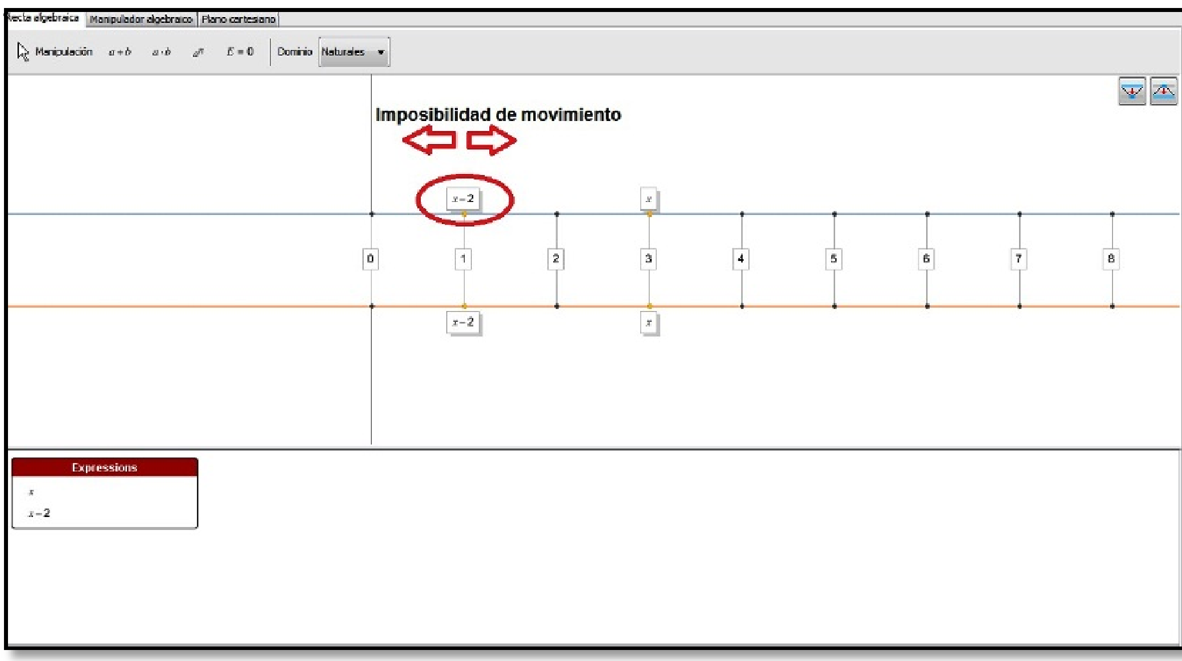


Figura 31. Imposibilidad de movimiento de la expresión "$\boldsymbol{x-2}$" en AlNuSet

P1: Hay una variable que depende de la otra, es decir, si la expresión "x" se mueve entonces "$x-2$" se mueve simultáneamente". Es notable la dependencia de la expresión "$x-2$" con "x".

P2: En esta actividad se puede ver la variable como incógnita especifica, esto sucede cuando "x" se posiciona en un valor determinado.

Para complementar lo anterior, el profesor (P1) expresó lo siguiente teniendo en cuenta el Modelo 3UV.

P1: Se puede ver la variable como relación funcional en este caso se está utilizando F2 "Determinar los valores de la variable dependiente dados los valores de la independiente". Eso es lo que estamos haciendo en esta parte de la actividad.

Siguiendo con todas las tareas comprendidas en la sección 1.1, el profesor (P3) realizó los siguientes comentarios:

Foto 17. El profesor (P3) haciendo varios comentarios de la tarea

P3:

1. *El medio genera una NO respuesta que es una "retroacción". Que no solamente las respuestas activas que da el medio sino la no acción, puede ser una forma de retroacción que es interpretada por el individuo.*
   "Creo que la imposibilidad de movimiento de la expresión "$x - 2$" nos sucedió a todos inicialmente, ya que no conocíamos este software".
   "Ese no pasar NADA decía cosas a quien intentaba actuar bajo el supuesto de que la tarea se puede resolver, luego "SE DEBE PODER HACER". Se intentan diferentes formas hasta que se acierta, es así la manera como se debe hacer.
2. *El carácter de ver la variable como relación funcional no es propia de la tarea "actividad diseñada", sino del medio mismo. Es decir, el software contiene la relación funcional para cualquier expresión que yo coloque si la acompaño de la*

"x", luego están relacionadas funcionalmente. Pero no es una propiedad de la tarea propia que Ustedes están proponiendo.

3. *Si es propio de la tarea que ustedes proponen, por ejemplo: la variable como incógnita especifica cuando se dice "intente colocar "$x-2$" sobre 10 o la segunda tarea que es intentar colocar "$x-2$" sobre 8 y luego sobre 14". La interpretación de la letra como incógnita es propia de la tarea que están proponiendo y la de relación funcional es propia de AlNuSet.*

4. *Quisiera señalar los puntos d), e) y f), porque a través de estas actividades se puede reconocer la diferencia que hay entre la correspondencia y la variación conjunta.*

   "Creo que es diferente que a cada "x" le corresponda un "$x-2$", a decir; que cuando "x" toma diferentes valores "$x-2$" toma también diferentes valores "CREO QUE ESTO NO ES LO MISMO".

   Creo que la teoría de Ursini y Trigueros lo que está mostrando es precisamente es eso, cuando distingue entre el F1 y el F4. Que entre otras cosas, hace un rato se mencionó fue el F2 como lo que se veía. "Yo creo en mi opinión es que no se están poniendo en juego los valores del principio, sino que se está poniendo en juego primero; que existe una correspondencia y más aún se pone en juego negando la correspondencia. Creo que es precisamente lo que ustedes buscan, que veamos que no existe correspondencia para todos los valores de "x", es decir hay un dominio. Exactamente, es decir que la "x" pertenece a los Naturales pero que no hay su correspondiente "$x-2$"; claro está que se encuentra implicada la dependencia, pero no está implicada la variación conjunta".

   El punto central de la tarea en mi opinión, ya que estamos analizando la tarea es precisamente que no hay correspondencia, ponen no solo la relación funcional; sino también ponen en juego que es necesario cambiar el Dominio para que la tarea se cumpla.

En la segunda sección de esta actividad se cambió el dominio a los enteros, los profesores mediante el arrastre de la expresión “x” sobre la “Recta Algebraica”, iban encontrando los valores posibles donde la expresión $x + 1$ era mayor que 3, o menor que 3, o igual a 3. Para esto en la parte inferior derecha en “Sets” se encontraban tanto las desigualdades como la igualdad, seguidas de un círculo que se colocaba de color rojo para los valores de “x” donde no se cumple el enunciado y de color verde para los que sí. Los profesores en esta actividad identificaron la variable como incógnita específica y como relación funcional.

Foto 18. Ponentes María Angélica Rueda y Robinson Muñoz

En la tarea 2.1 se presentaron tres formas de representación que usaron los profesores en el ambiente “Recta Algebraica” veámoslas a continuación:

1. Se observó que la inecuación (figura 32) fue la que algunos asistentes editaron para solucionar esta tarea. Pero se les presentaron inconvenientes al escribirla de esa manera, ya que es imposible que con nuestro medio AlNuSet puedan cumplir con su intención.

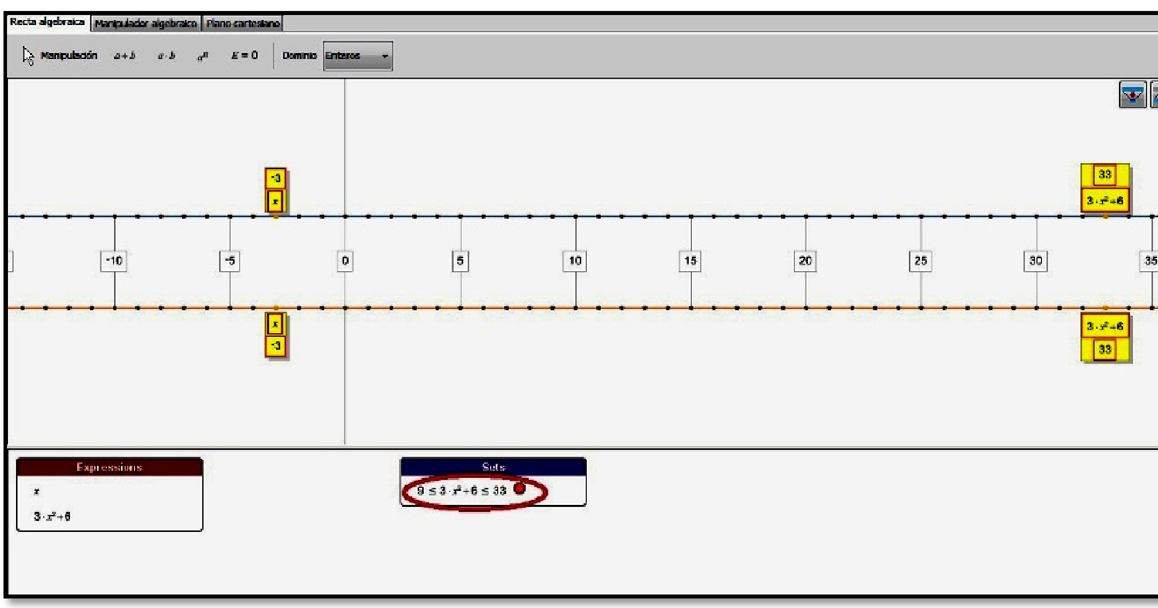


Figura 32. Intento herrado de solución a la tarea 2.1 en AlNuSet

2. A causa del inconveniente anterior los profesores para realizar la tarea optaron por editar las inecuaciones por separado (ver figura 33).

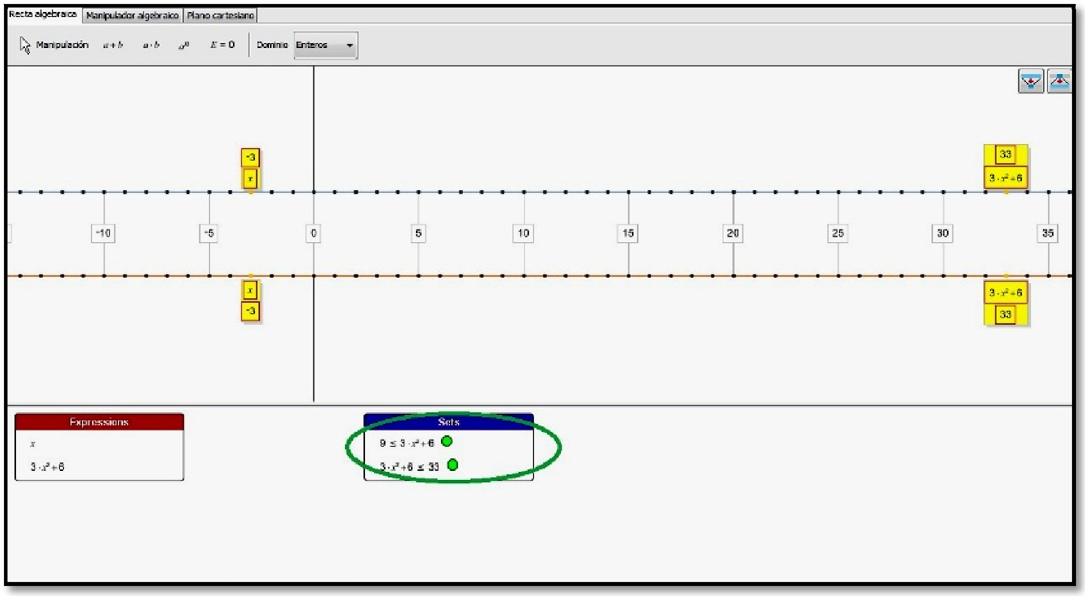


Figura 33. Una posible solución a la tarea 2.1 en AlNuSet

A continuación vamos a mostrar la reflexión que realizó el profesor (P3) de esta tarea.

P3: Esta tarea es intuitiva, lo particular aquí es que todavía no hay grafica de función, hay covariación pero aún ahí hay intuición. Ese es un elemento que en mi opinión caracteriza la variable pero no de manera aislada, sino la variable en la relación funcional. Y que aquí se ve por el desplazamiento hacia la derecha de los valores, me parece que hay un potencial adicional del software y la situación para caracterizar la variable en relación funcional. Algo así como "para reconocer la covariación continua y monótona de la función que está detrás".

A mí me parece que eso le da más potencia entre otras porque la relaciona más con el pensamiento covariacional, que creo que es un elemento que no está en la caracterización que hace Ursini y Trigueros. No está como parte del uso de la variable como relación funcional, pero que cuando se mira el pensamiento covariacional aparece de manera muy potente, entre otras porque está asociado a la característica matemática de crecimiento o decrecimiento de una función y que aquí se expresa de manera muy particular.

3. A partir de la inquietud hecha por varios profesores sobre el hecho de que en AlNuSet solo se podía editar las inecuaciones por separado como se puede ver (en la figura anterior) y no de manera completa (que sería lo "ideal"). En ese momento la profesora Bettina Pedemonte paso al frente para explicar el cómo es posible editar toda la inecuación (figura 35) si se utiliza el siguiente comando (ver figura 34).

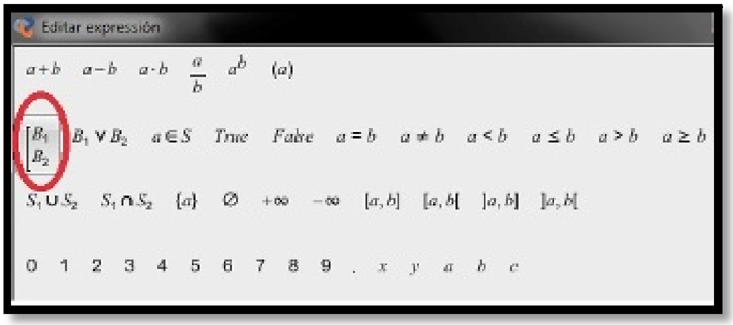


Figura 34. Comando utilizado para una segunda solución a la tarea 2.1

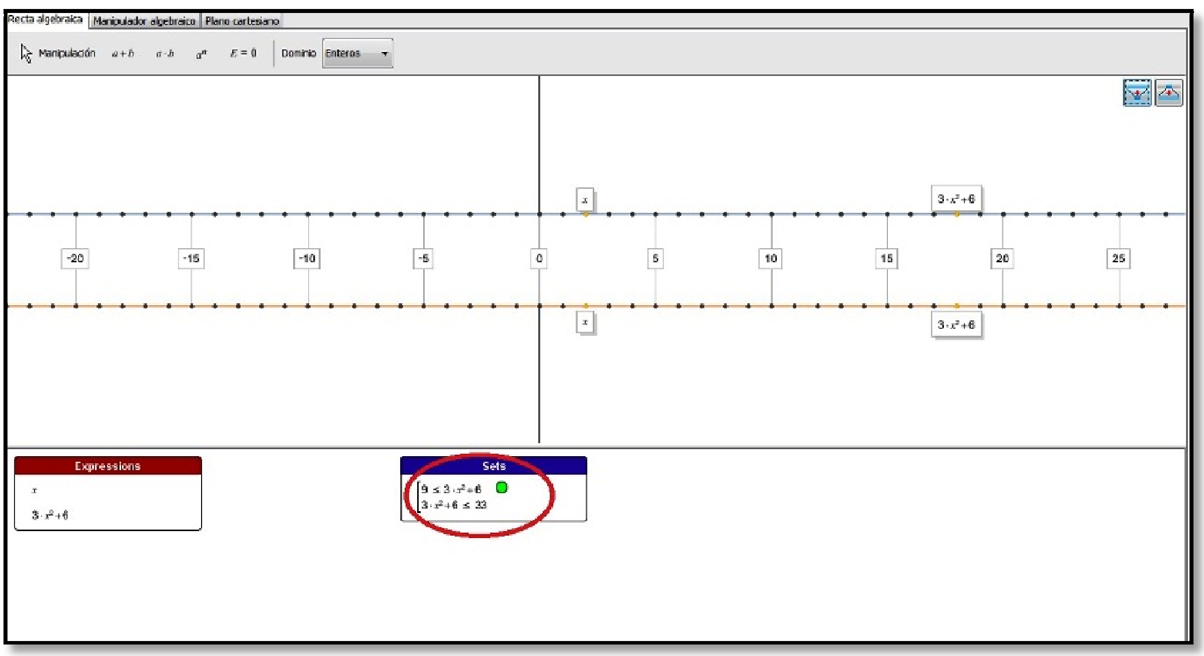


Figura 35. Otra posible solución a la tarea 2.1 en AlNuSet sugerida por la Dra. Pedemonte

Al realizar la tarea 2.2 algunos profesores intentaron mover directamente el punto que aparece sobre la recta pero fue imposible, ya que el movimiento de dicho punto depende del arrastre de la expresión “x” sobre la “Recta Algebraica” (ver figura 36).

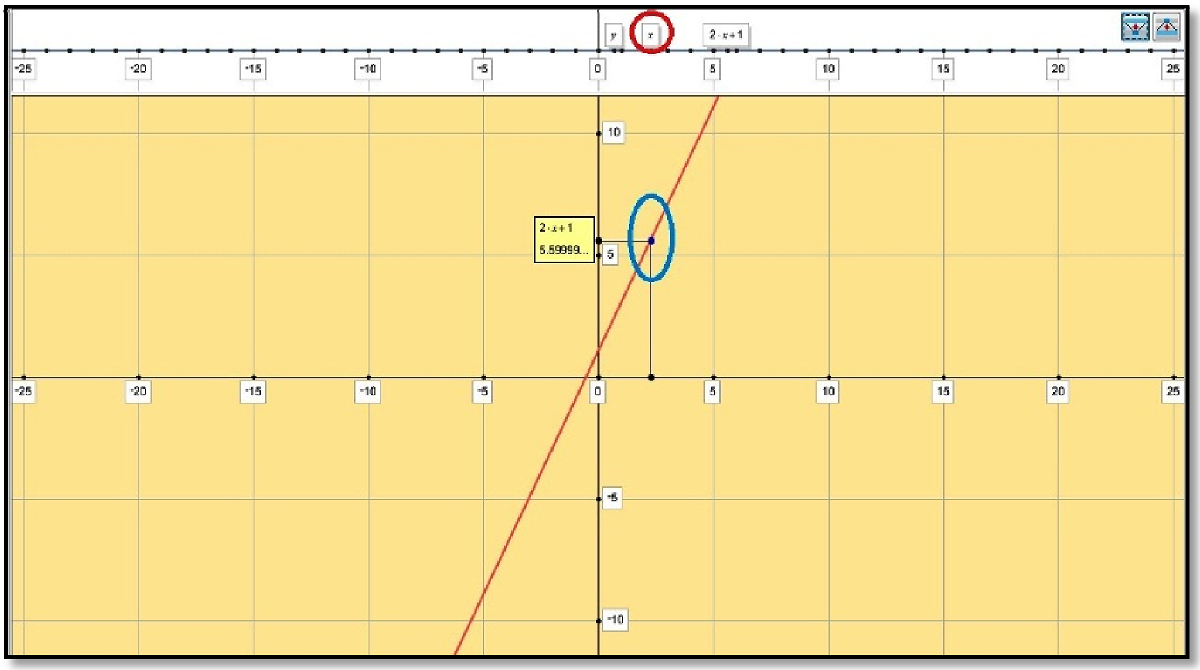


Figura 36. El punto sobre la recta en el “Plano Cartesiano” se mueve solo cuando se mueve $\boldsymbol{x}$ en la “Recta Algebraica”

La profesora (P1) hizo el siguiente comentario refiriéndose a lo anterior.

> *P1: Es que en las calculadoras siempre uno acostumbra a mover ese punto que está alrededor de la recta o de la grafica que uno este dibujando. En este programa es diferente usted para poder desplazarse sobre la grafica sobre la recta, debe coger la variable independiente y desplazarla y esta va mostrando que puntos corresponden a la recta o la función esa que usted esta graficando.*

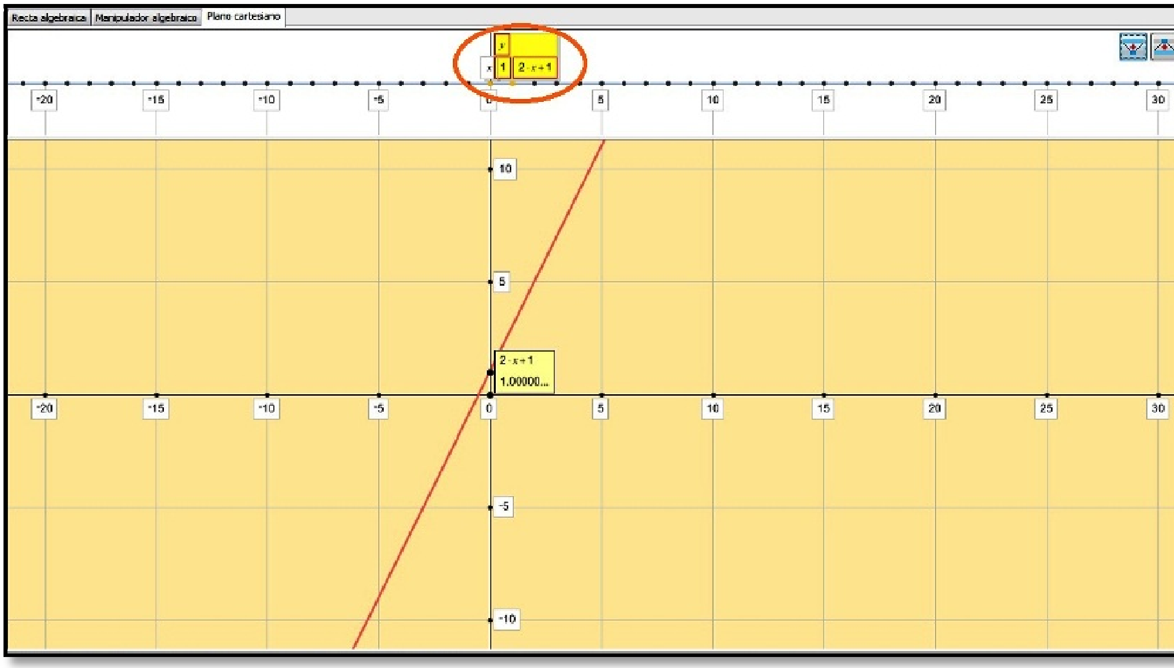


Figura 37. Cambio de notación del plano cartesiano convencional. En "Plano Cartesiano" de AlNuSet la ordenada ya no es "y" sino una expresión

Los siguientes comentarios de esta tarea no son textuales fueron interpretados a nuestra manera, con todo respeto esperamos que se haya hecho una buena interpretación de lo dicho por las profesoras Bettina Pedemonte (B) y Maria Alessandra Mariotti (M).

B: En este problema en especial no veo necesario usar el plano cartesiano porque con solo la recta Algebraica (figura 37) *es suficiente cuando se mueven las expresiones ("x" y "y") en los valores que se piden por ejemplo (0,1). Luego la expresión "$2x + 1$" queda en la misma posición de la expresión "y" sobreponiéndose y ocultándose "y", ya que "$2x + 1$" depende del arrastre de "x". Para mostrar que las parejas ordenadas pertenecen o no a la recta $y = 2x + 1$ basta solo con verificarlos en la "Recta Algebraica", sin la necesidad de pasarlos sobre la recta que está en el "plano cartesiano". Eso creo.*

Foto 19. Dra. Pedemonte mostrando su análisis de la tarea

M: Es confuso porque al mover "x" sobre la recta cuesta observar que "y" no se mueva simultáneamente. El movimiento de "y" es independiente, por lo que habrá que desplazarla en la recta como ocurre con la expresión "x".

El objetivo es introducir otras formas de representación la primera (usando Recta Algebraica) es muy poderosa.

B: Otra cosa que es confusa (ver figura 37) *es que la ordenada ya no es* Y *sino* $2x + 1$ *y esto puede generar confusiones, al cambiar la notación que estamos acostumbrados a usar en el plano cartesiano.*

Foto 20. Comentarios. Dra. María Alessandra Mariotti, Dra. Bettina Pedemonte

En los siguientes comentarios del profesor (P3), se muestra a AlNuSet como un medio que puede mostrar otro tipo de representación que es muy útil a la hora de enseñar.

- *Yo creo que es el momento pertinente para decir que una de las cosas que yo reconozco valiosas del software, es que introduce una nueva forma de representación de la covariación que no son las usuales (tabla, numérica, cartesiana o simbólica), sino es una nueva manera de representar la covariación y que es visible la manera como varían las dos variables. Por eso, me parece que a pesar del esfuerzo que están haciendo por identificar los significados de la variable; pues algo que no va a desaparecer ahí por lo menos en la forma de las dos rectas que están en la parte de arriba, es la relación funcional. Porque realmente está poniendo una nueva manera de representar.*

- *Para retomar lo que estaba diciendo la profesora (B) es el papel de la Y ahí no es claro ya que* $y = 2x + 1 \neq f(x)$*, esto puede condicionar la formación del profesor en lo que tiene que ver con el uso de la notación, mostrando claramente que* $y \neq f(x)$*. La notación de* $f(x) = 2x + 1$*,* y*,* $y = 2x + 1$*, se utilizan en contextos diferentes la primera es una* *notación de relación funcional mientras que la segunda es una notación algebraica para una ecuación.*

- *Esta actividad para formar profesores de matemáticas y para hacer reflexionar sobre si* $y = 2x + 1$, *me parece excepcional "muy potente", porque pone en manifiesto que a pesar de que se haya escrito en la notación no funciona así en la relación funcional.*

En la tarea 3.1 la profesora Bettina (B) mostró como el ambiente "Manipulador Algebraico" se usa necesariamente para demostrar. Este ambiente puede ser de gran ayuda para el profesor, pero aclarando que "los alumnos deberán resolver la tarea sin utilizar la opción simplificar, ya que esto daña todo el proceso de demostración que se quiere lograr (paso a paso)".

En este momento de la actividad la profesora (B) mostró como se pueden dar dos respuestas equivalentes (ver figura 38), para encontrar el último renglón.

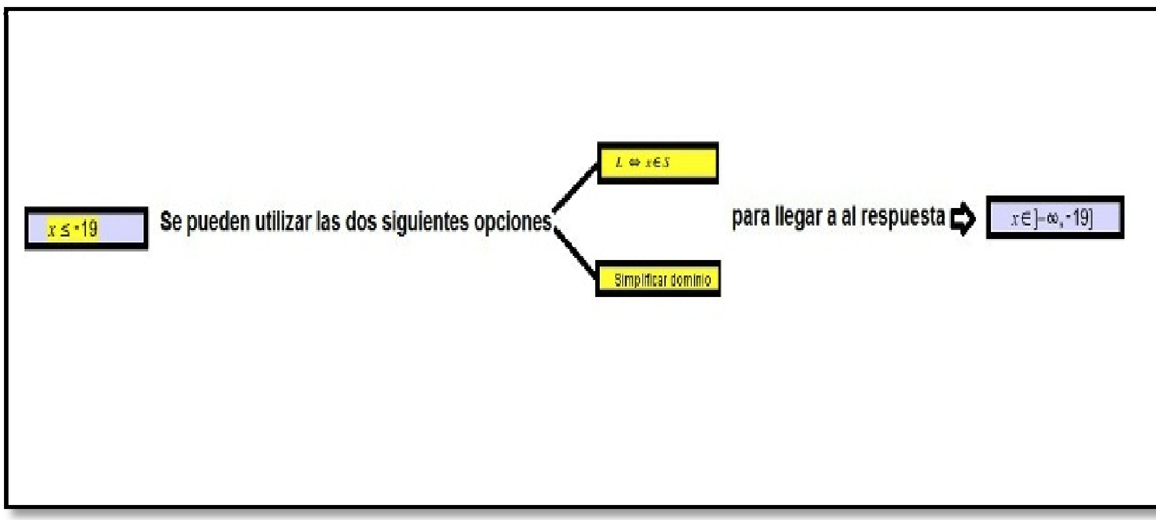


Figura 38. Dos comandos diferentes para llegar a una misma respuesta

En la tarea 4.2 los profesores utilizaron el "Manipulador Algebraico" si utilizar la opción simplificar, se presentaron varias formas para llegar al área del cuadrado, en seguida veamos dos formas.

En la tarea 4.2.a) los profesores utilizaron el "Manipulador Algebraico" si utilizar la opción simplificar, se presentaron varias formas para llegar al área del cuadrado, en seguida veamos dos formas.

Primera Forma:

En esta forma de resolver la tarea (ver figura 39) se puede observar que el profesor que realizo este tipo procedimiento uso varias veces la propiedad distributiva, propiedad de exponentes, la opción factorizar y propiedad conmutativa de la suma. Además fue menos el proceso de demostración (comparado con el de la segunda forma).

$(a+b+c)^2$
$(a+b+c)\cdot(a+b+c)$
$(a+b+c)\cdot a+(a+b+c)\cdot b+(a+b+c)\cdot c$
$a\cdot a+b\cdot a+c\cdot a+(a+b+c)\cdot b+(a+b+c)\cdot c$
$a\cdot a+b\cdot a+c\cdot a+a\cdot b+b\cdot b+c\cdot b+(a+b+c)\cdot c$
$a\cdot a+b\cdot a+c\cdot a+a\cdot b+b\cdot b+c\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+c\cdot c$
$a^2+b\cdot a+c\cdot a+a\cdot b+b\cdot b+c\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+c\cdot c$
$a^2+b\cdot a+c\cdot a+a\cdot b+b^2+c\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+c\cdot c$
$a^2+b\cdot a+c\cdot a+a\cdot b+b^2+c\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+c^2$
$a^2+(2\cdot b+c)\cdot a+b^2+c\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+c^2$
$a^2+(2\cdot b+c)\cdot a+b^2+(a+2\cdot b)\cdot c+c^2$
$a^2+(2\cdot b+c)\cdot a+b^2+(2\cdot b+a)\cdot c+c^2$
$a^2+2\cdot b\cdot a+c\cdot a+b^2+(2\cdot b+a)\cdot c+c^2$
$a^2+2\cdot b\cdot a+c\cdot a+b^2+2\cdot b\cdot c+a\cdot c+c^2$
$a^2+2\cdot b\cdot a+b^2+c\cdot a+2\cdot b\cdot c+a\cdot c+c^2$
$a^2+2\cdot b\cdot a+b^2+2\cdot b\cdot c+c\cdot a+a\cdot c+c^2$
$a^2+2\cdot b\cdot a+b^2+2\cdot b\cdot c+2\cdot c\cdot a+c^2$

Figura 39. Primera solución a la tarea 4.2.a)

Segunda Forma: El profesor que realizo este tipo de prueba utilizo: propiedad de exponentes, propiedad modulativa de la suma, propiedad invertiva de la suma, Propiedad distributiva, propiedad conmutativa de la suma y propiedad modulativa del producto (ver figura 40).

$(a+b+c)^2$
$(a+b+c)\cdot(a+b+c)$
$(a+b+c+0)\cdot(a+b+c)$
$(a+b+c+c+{}^{-}c)\cdot(a+b+c)$
$(a+b+c+c-c)\cdot(a+b+c)$
$(a+b+c+c-c)\cdot a+(a+b+c+c-c)\cdot b+(a+b+c+c-c)\cdot c$
$a\cdot a+b\cdot a+c\cdot a+c\cdot a-c\cdot a+(a+b+c+c-c)\cdot b+(a+b+c+c-c)\cdot c$
$a\cdot a+b\cdot a+c\cdot a+c\cdot a-c\cdot a+a\cdot b+b\cdot b+c\cdot b+c\cdot b-c\cdot b+(a+b+c+c-c)\cdot c$
$a\cdot a+b\cdot a+c\cdot a+c\cdot a-c\cdot a+a\cdot b+b\cdot b+c\cdot b+c\cdot b-c\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+c\cdot c+c\cdot c-c\cdot c$
$1\cdot a^2+(b+c)\cdot a+a\cdot b+b\cdot b+c\cdot b+c\cdot b-c\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+c\cdot c+c\cdot c-c\cdot c$
$a^2+(b+c)\cdot a+a\cdot b+b\cdot b+c\cdot b+c\cdot b-c\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+c\cdot c+c\cdot c-c\cdot c$
$a^2+(b+c)\cdot a+a\cdot b+b\cdot b+c\cdot b+c\cdot b-c\cdot b+a\cdot c+c\cdot b+c\cdot c+c\cdot c-c\cdot c$
$a^2+(b+c)\cdot a+a\cdot b+b\cdot b+c\cdot b+c\cdot b-c\cdot b+c\cdot b+a\cdot c+c\cdot c+c\cdot c-c\cdot c$
$a^2+(b+c)\cdot a+1\cdot b^2+(a+2\cdot c)\cdot b+a\cdot c+c\cdot c+c\cdot c-c\cdot c$
$a^2+(b+c)\cdot a+b^2+(a+2\cdot c)\cdot b+a\cdot c+c\cdot c+c\cdot c-c\cdot c$
$a^2+(b+c)\cdot a+b^2+(a+2\cdot c)\cdot b+1\cdot c^2+a\cdot c$
$a^2+(b+c)\cdot a+b^2+(a+2\cdot c)\cdot b+c^2+a\cdot c$
$a^2+(b+c)\cdot a+b^2+(a+2\cdot c)\cdot b+a\cdot c+c^2$
$a^2+b\cdot a+c\cdot a+b^2+(a+2\cdot c)\cdot b+a\cdot c+c^2$
$a^2+b\cdot a+c\cdot a+b^2+a\cdot b+2\cdot c\cdot b+a\cdot c+c^2$
$a^2+b\cdot a+c\cdot a+b^2+a\cdot b+a\cdot c+2\cdot c\cdot b+c^2$
$a^2+b\cdot a+c\cdot a+b^2+a\cdot c+a\cdot b+2\cdot c\cdot b+c^2$
$a^2+b\cdot a+c\cdot a+a\cdot c+b^2+a\cdot b+2\cdot c\cdot b+c^2$
$a^2+b\cdot a+a\cdot c+a\cdot c+b^2+a\cdot b+2\cdot c\cdot b+c^2$
$a^2+b\cdot a+2\cdot a\cdot c+b^2+a\cdot b+2\cdot c\cdot b+c^2$
$a^2+b\cdot a+2\cdot a\cdot c+a\cdot b+b^2+2\cdot c\cdot b+c^2$
$a^2+b\cdot a+a\cdot b+2\cdot a\cdot c+b^2+2\cdot c\cdot b+c^2$
$a^2+a\cdot b+a\cdot b+2\cdot a\cdot c+b^2+2\cdot c\cdot b+c^2$
$a^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+b^2+2\cdot c\cdot b+c^2$

Figura 40. Segunda solución a la tarea 4.2.a)

Es importante resaltar que los profesores que hicieron este tipo de procedimientos usaron propiedades posibles sin la necesidad de aplicar la opción “simplificar”.

La mayoría de los profesores en la actividad 5, trataban de usar la herramienta que aparece en el esquema que se encuentra en el cuadernillo. Pero fue demorado encontrarla, ya que para encontrar lo mismo que estaba en dicho esquema, se valieron del ensayo y error. Hasta que dieron clic derecho sobre cualquiera de las expresiones dependientes de “x” y seleccionaron mostrar construcción. Luego fueron encontrando los números que cumplían con la expresión general en cada caso.

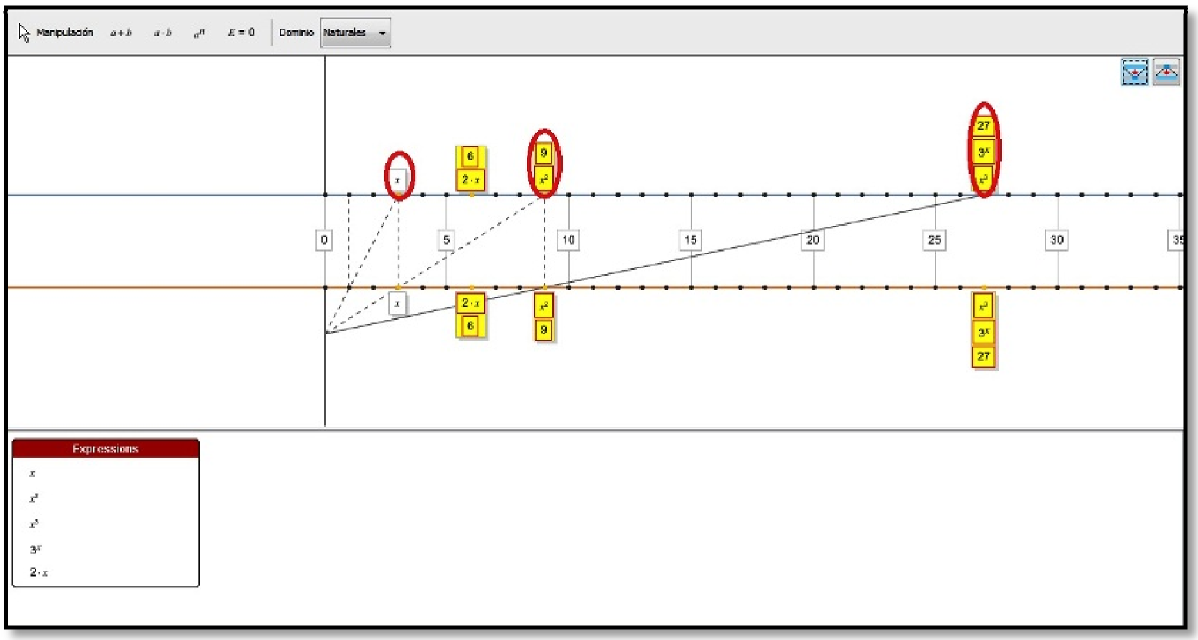


Figura 41. Solución a la tarea 5, con la opción “mostrar construcción”

CONCLUSIONES

Después de diseñar la situación que consideramos como a-didáctica, realizamos un análisis a priori donde se hicieron predicciones de lo que harían los alumnos en el desarrollo de las actividades y un análisis a posteriori donde se comprobó si lo que nosotros creíamos en el análisis a priori habría sucedido. En seguida comentaremos varios aspectos sobre el sentido a-didáctico de la situación que desarrollamos en este trabajo.

Consideramos que de las cinco actividades analizadas, cuatro funcionaron en gran parte como lo habíamos previsto en los análisis a priori, mientras que en la otra (primera parte de la actividad tres), se presentaron considerables imprevistos con la reproducción y reflexión de las propiedades que se utilizaron en el ambiente “manipulador algebraico”.

En el transcurso del proyecto observamos que los alumnos en ocasiones no utilizaban AlNuSet para solucionar las tareas, pero esto no quiere decir, que nuestro medio no sirva como instrumento para validar. Las retroacciones observadas en tareas anteriores le permiten al alumno anticipar sobre la respuesta del medio.

En la actividad de expresiones y la del rectángulo (Actividades 1 y 2), los alumnos tenían la oportunidad de validar o invalidar sus acciones, ya que el medio generaba ciertas retroacciones. La retroacción que se presento en todos los alumnos al iniciar la actividad 1 fue la imposibilidad de movimiento de las expresiones sobre la recta algebraica. Esto se debía a que ellos no escogían la expresión adecuada. Esto sólo ocurrió cuando trataron de resolver la tarea 1.1.a), pero después fueron cuidadosos a la hora de realizar cualquier arrastre sobre la recta, es decir, reforzaron su acción cuando era necesario. En este sentido se genero un aprendizaje por adaptación.

Otro tipo de retroacción que se presento en la segunda parte de la actividad 1, fue la de cambio de color del círculo que aparecía al lado derecho de la ecuación o de las inecuaciones. Esta señal de color, les indico a los alumnos cuáles eran los valores que cumplían o no con la condición. En este sentido, el medio contribuyó a que esta actividad se mantuviera como a-didáctica como lo esperábamos según el análisis a priori. Además, en esta actividad los alumnos usaron la variable como incógnita especifica, aunque también se presento la variable como relación funcional.

En la tarea del rectángulo algo que nosotros creemos que no se tuvo en cuenta en el diseño de esta, fue el dominio que se utilizo “los enteros”; ya que no fue el apropiado porque la mayoría de los alumnos obtuvieron tres valores negativos. Pero como nosotros sabemos que el área debe ser positiva, se pueden generar confusiones con estos valores, aunque estos cumplían con la condición de que el área de dicho rectángulo se encontraba entre 9 y 33. Los estudiantes para resolver esta tarea debían utilizar el área del rectángulo, la mayoría no presento dificultad para hallarla, como planteamos en el análisis a priori. En el análisis a posteriori se presento un caso que no consideramos en el análisis a priori, éste fue el de dividir el rectángulo de lados $(x^2 + 2)$ y 3, en un cuadrado de la x^2 y un rectángulo de lados 2 y 3; hallar sus áreas y luego sumarlas. Cuando vimos esto le preguntamos al alumno si recordaba la fórmula del área del rectángulo, se demoro en contestar pero cuando lo hizo fue consciente del error que cometió al hacerlo de esa forma.

Referente a los usos de la variable para esta tarea, los alumnos reconocieron la expresión "x" como una cantidad desconocida que puede hallarse. Es decir, la variable fue vista como incógnita especifica. Además los alumnos por medio del arrastre de la expresión "x" sobre la recta algebraica en ciertos valores, vieron como la expresión de área $(x^2 + 2) \cdot 3$ se encontraba entre 9 y 33 o por fuera de ese intervalo, aquí ellos estaban usando la variable como relación funcional.

En el análisis a posteriori se pudo identificar que en la tarea 3.1 de la actividad 3, los alumnos recurrieron a la opción simplificar aunque en el enunciado era claro que no debían usarla. Sin embargo este no fue el único inconveniente, los alumnos no sabían explicar que tipo de propiedades se utilizaron en la reproducción de la solución de la desigualdad. Evidentemente este análisis nos muestra que lo que nosotros presentábamos en el análisis a priori no se cumplió. Creemos que lo previsto no funcionó porque: por un lado los estudiantes no siguieron la instrucción, esto no tiene que ver con la validación. Creémos que la dificultad se presentó más por la falta de familiaridad con el medio que por otra cosa. Además, en general los estudiantes en este nivel escolar tienen una experiencia mínima con el uso de generalidades sobre expresiones algebraicas y sus propiedades. Se observa la necesidad de realizar este tipo de problemas en el aula de clase.

Esta tarea no funcionaría como situación a-didáctica. Creemos que el diseño de esta tarea no fue el mejor, ya que el medio no sirvió como instrumento de validación. El profesor en esta parte de la actividad, se vio en la obligación de intervenir de manera directa dando juicios sobre lo que estaban haciendo los alumnos, lo cual daña la situación a-didáctica.

En la tarea 4.2.b) de la actividad 4, el medio sirvió como instrumento de validación, ya que en AlNuSet según el posicionamiento que tengan las expresiones a, b, c y A en la recta algebraica señala a los alumnos qué valores son los que permiten cumplir con la tarea.

Los alumnos ya con su experiencia en AlNuSet desarrollaron de manera muy rápida la actividad 5, en esta, ellos manipularon la variable como número general. Además, esta actividad fue a-didáctica; ya que no hubo intervención por parte de los profesores.

En general, la situación a-didáctica en gran parte se mantuvo como a-didáctica como lo habíamos planeado en los análisis a priori, también se manifestaron en todas las actividades los tres usos de la variable.

Lo más importante que podemos destacar es que AlNuSet funcionó como medio en el desarrollo de situaciones a-didácticas. En nuestro proyecto fue usado para la construcción del concepto de variable a través de los usos, aunque es un concepto complicado de definir pero que con la ayuda de este medio, se pueden generar retroacciones apropiadas para que el alumno valide sus hipótesis ya sea de forma positiva o negativa.

Creemos que para futuros trabajos relacionados sobre situaciones a-didácticas donde el medio es AlNuSet, es indispensable que se realice un buena planificación del diseño de las actividades que conforman la situación a-didáctica, ya que de esto depende en gran parte el éxito de la situación, es decir que se logre generar un aprendizaje por adaptación en los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍCAS

- BROUSSEAU, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones Didácticas*, Libros del Zorzal, Buenos Aires Argentina.
- ACOSTA, M. (2010). *Enseñando Transformaciones Geométricas con Software de Geometría Dinámica*. (*Ed.*) *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (p. 132-142)*. Santa Fé de Bogotá: Grupo Edumat-UIS.
- MARGOLINAS, C. (1993). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. Publicaciones UIS 2009.
- KIERAN, C. Y FILLOY, Y. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica.* Enseñanza de las ciencias *(p. 229-240).* Traducción castellana de Luis Puig.
- ROJANO, T. (1994). *La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza*. Enseñanza de las ciencias
 (p.p 45-56).
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATEMATICS (2003). *Principios y Estándares para la educación matemática*. Barcelona: sociedad andaluza de educación matemática Thales.
- URSINI, S. y TRIGUEROS, M. (2005). *Enseñanza del algebra elemental una propuesta alternativa.* México: Trillas.
- PANIZZA, M. (2004). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas.* En Zubiría, Hilda D., De la epistemología al constructivismo, El constructivismo en la psicología y la educación, El constructivismo y sus pioneros, en el constructivismo en los procesos de enseñanza – aprendizaje en el siglo XXI, Editorial Plaza y Valdes, España, 2004.
- CHEVALLARD, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber Enseñado.* Argentina : Aique.
- CHIAPPINI, G. PEDEMONTE, B. Y ROBOTTI, E. (2010). *AlNuSet nel curriculum di matematica Guida per gli insegnanti.* Italia: RCS Educación.
- PEDEMONTE, B. (2011). *Conjecturing and proving in AlNuSet (p.4-5-6).* Genova: DiDiMa srl, Istituto per le Tecnologie Didattiche – CNR.
- PEDEMONTE, B. (2009). *AlNuSet: un sistema dinámico para el aprendizaje del álgebra.* VII simposio Nororiental de matemáticas *(p. 1-2).* Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- BALLESTEROS, I. Y ROJAS, D. (2011). Análisis de la implementación de las actividades para la conceptualización de área del rectángulo en el grado séptimo con la mediación del programa cabri geometry *(p. 16-17).* Trabajo de Grado.