

LA CONJETURA DE POINCARÉ

JHOAN SEBASTIÁN BÁEZ ACEVEDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2014

LA CONJETURA DE POINCARÉ

JHOAN SEBASTIÁN BÁEZ ACEVEDO

Trabajo de Grado como requisito para optar al título de:  
Matemático

Director:

SOFÍA PINZÓN DURÁN

Doctora en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2014

*Gracias a esas personas importantes en mi vida,  
que siempre estuvieron listas para brindarme toda su ayuda,  
ahora me toca regresar un poquito de todo lo inmenso que me han otorgado.*

*Con todo mi cariño esta tesis se las dedico a ustedes:*

*Mamá y Abuelos.*

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>Objetivos</b>	<b>13</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1. Elementos de Álgebra . . . . .	14
1.2. Elementos de Topología . . . . .	15
1.3. Elementos de Diferenciabilidad . . . . .	18
<b>2. La Conjetura</b>	<b>20</b>
2.1. Poincaré . . . . .	20
2.2. Significado . . . . .	21
2.3. La conjetura en las Superficies . . . . .	23
2.4. Generalización . . . . .	25
<b>3. Desarrollo histórico de la Conjetura</b>	<b>32</b>
3.1. Origen . . . . .	32
3.2. Clasificación de 3-variedades . . . . .	32
3.3. Algunos Resultados . . . . .	33
<b>4. Geometrización y Flujo de Ricci</b>	<b>35</b>
4.1. Hamilton . . . . .	36
4.2. Geometría Riemanniana . . . . .	36
4.2.1. Variedades Diferenciables . . . . .	36
4.2.2. Campos Vectoriales . . . . .	39
4.2.3. Tensores y Métricas . . . . .	44
4.2.4. Conexiones . . . . .	48
4.2.5. Derivada de Lie . . . . .	56
4.2.6. Curvatura . . . . .	57
4.2.7. Curvatura Seccional, de Ricci y Escalar . . . . .	60
4.3. Topología desde la geometría . . . . .	62
4.4. Geometrización de la Conjetura . . . . .	63
4.5. El Flujo de Ricci . . . . .	65
<b>5. Perelmán</b>	<b>68</b>
5.1. Biografía . . . . .	68
5.2. Vecindades canónicas de Perelmán . . . . .	70

5.3. Esquema de la Prueba . . . . .	71
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Índice de figuras

Figura 1 . . . . .	22
Figura 2 . . . . .	24
Figura 3 . . . . .	26
Figura 4 . . . . .	37
Figura 5 . . . . .	39
Figura 6 . . . . .	40
Figura 7 . . . . .	41
Figura 8 . . . . .	55
Figura 9 . . . . .	56
Figura 10 . . . . .	65

## Resumen

**Título:** La conjetura de Poincaré\*

**Autor:** Jhoan Sebastián Báez Acevedo\*\*

**Palabras Claves:**

Conjetura de Poicaré, Clasificación de 3-variedades.

**Descripción:**

La conjetura de Poincaré por más de 100 años ha sido un inconveniente para los matemáticos, más aun con los que trabajan temas relacionados con geometría. Tal es su importancia que todo aquel que ha conseguido algún avance en la conjetura recibió la medalla Fields, así como muchos matemáticos de prestigio han fracasado. La conjetura de Poincaré es tan importante que hacia parte de la selecta lista de los problemas del milenio y es el único de estos problemas que se ha solucionado.

Este trabajo consiste en estudiar los conceptos básicos que acompañan el planteamiento de la conjetura de Poincaré en su versión generalizada, su desarrollo histórico y analizar el caso en dimensión 3. Para ello estudiaremos resultados clásicos de topología, topología algebraica y álgebra moderna. Así mismo pretendemos estudiar las equivalencias geométricas, topológicas y algebraicas de la conjetura de Poincaré y presentar algunos de los resultados geométricos y topológicos que se obtuvieron al tratar de demostrar la conjetura.

Para este trabajo fueron necesarios conceptos de geometría Riemanniana, sobre todo para entender en qué consiste la geometrización de la conjetura cuya solución garantiza la veracidad de la conjetura propuesta por Poincaré. Además, pretendemos dar una visión de algunos de los avances de la obra maestra de Perelmán que lo llevaron a convertirse en la celebridad del momento en el mundo de la matemática.

---

\*Trabajo de Grado

\*\* Facultad de ciencias, Escuela de Matemáticas. **Director:** Sofía Pinzón Durán.

## Abstract

**Title:** The Poincare Conjecture\*

**Author:** Jhoan Sebastián Báez Acevedo\*\*

**Keywords:**

Poincare Conjecture, classification of 3-manifolds.

**Abstract:**

The Poincare conjecture for over 100 years has been a problem for mathematicians, even more working with geometry issues. Such is its importance that anyone who has achieved some progress on the conjecture received the Fields Medal, as well as many prestigious mathematicians have failed. The Poincare conjecture is so important that was part of the select list of the problems of the millennium and is the only one of these problems has been solved.

This paper wants to study the basics that accompany the approach of the Poincare conjecture in its generalized version, its historical development and analyze the case in dimension 3. We will study classical results of topology, algebraic topology and modern algebra. Furthermore, we analyze the geometric equivalence, topological and algebraic Poincare conjecture and present some of the geometrical and topological results obtained in trying to prove the conjecture.

For this work were necessary Riemannian geometry concepts, especially to understand what the geometrization conjecture whose solution shows the truth of the conjecture given by Poincare. In addition, we intend to give an overview of some of the progress of Perelman's masterpiece that led him to become the celebrity of the moment in the world of mathematics.

---

\*Work Degree

\*\* Faculty of Science, School of Mathematics. Directed by Sofia Pinzón Durán.

# Introducción

En la historia de la humanidad las matemáticas han jugado un papel fundamental, la aparición de problemas en esta área se convierte en el motivo de trabajo y del éxito de grandes hombres. Pero así como dichos problemas fueron satisfactorios para las personalidades que los resolvían, existen problemas que por su complejidad, o la falta de teorías que permitan abordarlos, se mantienen vigentes durante muchos años, permitiendo que a través de los intentos de solución se generen nuevos conocimientos, nuevos métodos y nuevos problemas.

Los problemas del milenio son una gran muestra de algunos de los misterios que el mundo matemático nos proporciona. De estos problemas el único que se ha resuelto satisfactoriamente ha sido la conjetura de Poincaré.

En el siglo XIX la topología de las variedades de dimensión 2 o superficies era bien conocida, de hecho se tenía una lista completa de las posibles superficies compactas orientables, pero en dimensión mayor la clasificación de variedades era un tema un poco más complejo. Henri Poincaré, fue quizá el primero en intentar realizar una clasificación similar para las variedades de dimensión tres. El ejemplo más básico de estas variedades es la esfera unitaria tri-dimensional, esto es el lugar geométrico de los puntos  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$  cuya distancia al origen es 1, esto es,  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ . Él notó que una característica fundamental de la esfera en dimensión dos es que cada curva cerrada puede ser deformada de manera continua a un punto sin salirse de la esfera, en 1904 Poincaré se preguntó si este hecho se cumplía también para la esfera en dimensión tres. En lenguaje moderno el problema consiste en demostrar la existencia de una 3-variedad cerrada y simplemente conexa que no sea homeomorfa a la 3-esfera. Una respuesta negativa a dicha pregunta es lo que se ha etiquetado como la conjetura Poincaré. Este problema desconcertó a muchos matemáticos durante más de 100 años y, finalmente, una respuesta positiva a la conjetura fue recientemente obtenida por Grigori Perelman.

Como muchos de los problemas que se han mantenido abiertos durante largo tiempo, la conjetura Poincaré o, mejor, el intento de una comprensión más profunda del problema ha producido una cantidad incalculable de resultados matemáticos. Por lo tanto presentaremos la conjetura de Poincaré aludiendo a un principio básico del trabajo matemático:

*Si no puedes resolver un problema, ¡generalízalo!*

La forma generalizada de la conjetura será estudiada en este trabajo, así como el contexto histórico que enriquece el problema.

**Conjetura 0.1.** *Sea  $M^n$  una variedad  $n$ -dimensional cerrada, homotópicamente equivalente a la  $n$ -esfera  $S^n$ . Entonces " $M^n = S^n$ ".*

Denominaremos a esta la Conjetura de Poincaré Generalizada (CPG).

# Objetivos

## Objetivo General

Entender la demostración de la Conjetura de Poincaré generalizada, se sale de las posibilidades de un trabajo de grado de pregrado; por lo tanto el objetivo principal de este trabajo consiste en estudiar los conceptos básicos que permitan entender el planteamiento de la conjetura de Poincaré en su versión generalizada, su desarrollo histórico y analizar el caso en dimensión 3.

## Objetivos Específicos

- Revisión de los conceptos básicos que permitan entender la conjetura de Poincaré.
- Estudiar las equivalencias geométricas, topológicas y algebraicas de la conjetura de Poincaré.
- Presentar algunos de los resultados geométricos y topológicos que se obtuvieron al tratar de demostrar la conjetura.

# 1 Preliminares

Para el buen entendimiento de los siguientes capítulos vamos a realizar una recopilación de algunas nociones topológicas y algebraicas, así como algunos conceptos propios del análisis matemático, temas fundamentales y de gran importancia para algunas de las presentaciones de la conjetura.

## 1.1. Elementos de Álgebra

Las nociones que vamos a recordar serán importantes cuando trabajemos con el grupo fundamental y algunos invariantes algebraicos que debemos utilizar.

Para comenzar una relación de equivalencia en un conjunto  $X$  no vacío es una relación  $\sim$  que es reflexiva ( $a \sim a$ , para todo  $a \in X$ ), simétrica (si  $a \sim b$  entonces  $b \sim a$ , para todo  $a, b \in X$ ) y transitiva (si  $a \sim b$  y  $b \sim c$  entonces  $a \sim c$ , para todo  $a, b, c \in X$ ).

Cuando  $\sim$  es una relación de equivalencia producirá una partición natural de  $X$  en clases de equivalencia  $[a]$ , donde:

$$[a] = \{x \in S : x \sim a\}$$

es la clase de equivalencia de  $a$ , con  $a \in S$ , y está compuesta por todos los elementos de  $X$  que se relacionan con  $a$  por  $\sim$ . Ahora recordemos la noción de grupo:

**Definición 1.1.** Un grupo  $\langle G, \star \rangle$  es un conjunto  $G$ , junto con una operación binaria  $\star$  en  $G$ , tal que  $\star$  satisface lo siguiente:

- i.* La operación binaria  $\star$  es asociativa.
- ii.* Existe un elemento  $e \in G$  tal que  $e \star x = x \star e = x$  para todo  $x \in G$ . (identidad)
- iii.* Para cada  $a \in G$  existe  $a' \in G$  tal que  $a \star a' = a' \star a = e$ . (inverso)

Cuando la operación  $\star$  es conmutativa diremos que el grupo es abeliano. Ahora si tenemos dos grupos  $G, G'$  y una aplicación  $\phi : G \rightarrow G'$  tal que para  $x, y \in G$  tenemos que  $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ , es decir  $\phi$  preserva la operación, diremos que  $\phi$  es un *homomorfismo*.

**Definición 1.2.** Decimos que  $G$  y  $G'$  son dos grupos *isomorfos* si existe un homomorfismo  $\phi$  que es una biyección y lo denotaremos por  $G \simeq G'$ .

Ademas de esto diremos que el *Kernel* o *núcleo* de  $\phi$  sera el conjunto:

$$K(\phi) = \{a \in G : \phi(a) = e'\}$$

donde  $e'$  es el elemento identidad de  $G'$ .

## 1.2. Elementos de Topología

Dado un conjunto  $X$  diremos que una *topología* sobre  $X$  es una colección  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  con las siguientes propiedades:

- i.  $\emptyset$  y  $X$  están en  $\tau$ .
- ii. La unión de los elementos de cualquier subcolección de  $\tau$  está en  $\tau$ .
- iii. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de  $\tau$  está en  $\tau$ .

Un conjunto  $X$  con una topología  $\tau$  se denomina *espacio topológico*, comúnmente se denota  $(X, \tau)$  pero por comodidad se omite esta expresión y diremos que  $X$  es un espacio topológico. También denotamos como *abiertos* de  $X$  a los elementos de  $\tau$ .

En un espacio topológico  $X$ , decimos que  $E$  es cerrado si  $X - E$  es abierto, así podemos definir también la clausura del conjunto  $E \subset X$  y lo denotaremos  $\bar{E}$  como:

$$\bar{E} = \bigcap \{K \subset X \mid K \text{ es cerrado y } E \subset K\}$$

Por lo tanto  $\bar{E}$  es cerrado, y sera el cerrado mas pequeño que contenga a  $E$ . Ahora definiremos el *interior* de  $E \subset X$  que notaremos por  $E^\circ$  como el conjunto:

$$E^\circ = \bigcup \{G \subset X \mid G \text{ es abierto y } G \subset E\}$$

$E^\circ$  será el abierto mas grande que está contenido en  $E$ .

Así mismo se define lo que es una vecindad para un punto  $x \in X$ , decimos que  $U$  es una *vecindad* de  $x \in X$  si contiene un abierto  $V$  con  $x \in V$ , es decir  $U$  es una vecindad de  $x$  si  $x \in U^\circ$ . De esta forma definimos  $\mathcal{U}_x$  como la colección de todas las vecindades de  $x$  al que llamaremos *sistema de vecindades de  $x$* .

El sistema de vecindades  $\mathcal{U}_x$  de  $x$  en un espacio topológico  $X$  tiene la siguientes propiedades:

- i. Si  $U \in \mathcal{U}_x$  entonces  $x \in U$ .
- ii. Si  $U, V \in \mathcal{U}_x$  entonces  $U \cap V \in \mathcal{U}_x$ .
- iii. Si  $U \in \mathcal{U}_x$ , entonces existe  $V \in \mathcal{U}_x$ , tal que  $U \in \mathcal{U}_y$  para cada  $y \in V$ .
- iv. Si  $U \in \mathcal{U}_x$  y  $U \subset V$ , entonces  $V \in \mathcal{U}_x$ .

Para dicho sistema de vecindades podemos definir una base que denotaremos por  $\mathcal{B}_x$  que es la base de vecindades, donde  $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$  tal que cada  $U \in \mathcal{U}_x$  contiene algún  $V \in \mathcal{B}_x$ . Esto es:

$$\mathcal{U}_x = \{U \subset X \mid V \subset U \text{ para algún } V \in \mathcal{B}_x\}.$$

Donde los elementos de  $\mathcal{B}_x$  son llamados los *básicos* de vecindad. Además, decimos que en un espacio topológico  $X$  donde cada  $x \in X$  tiene una base de vecindades numerable decimos que  $X$  satisface el *primer axioma de enumerabilidad* o que es 1-numerable.

Al igual que los sistemas de vecindades, podemos definir una base para la topología que permita describir los abiertos, entonces si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico, diremos que  $\mathcal{B} \subset \tau$  es una base si:

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B : \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \right\}.$$

En otras palabras,  $\mathcal{B}$  es una *base* si cumple:

- i.  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .
- ii. Sean  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  con  $p \in B_1 \cap B_2$ , entonces existe algún  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Así, se dice que  $X$  es un espacio 2-numerable si  $X$  tiene una base numerable. Además, note que  $\mathbb{R}^n$  es un espacio topológico, donde  $\tau$  es el conjunto generado por todas las bolas abiertas definidas a partir de la métrica, es decir, las bolas abiertas forman una base de  $\mathbb{R}^n$ .

Con todo esto podemos dar una definición primordial para nuestro trabajo:

**Definición 1.3.** Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$ , donde  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos, se dice que es una *aplicación continua* si para cada subconjunto abierto  $V$  de  $Y$ , el subconjunto  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ .

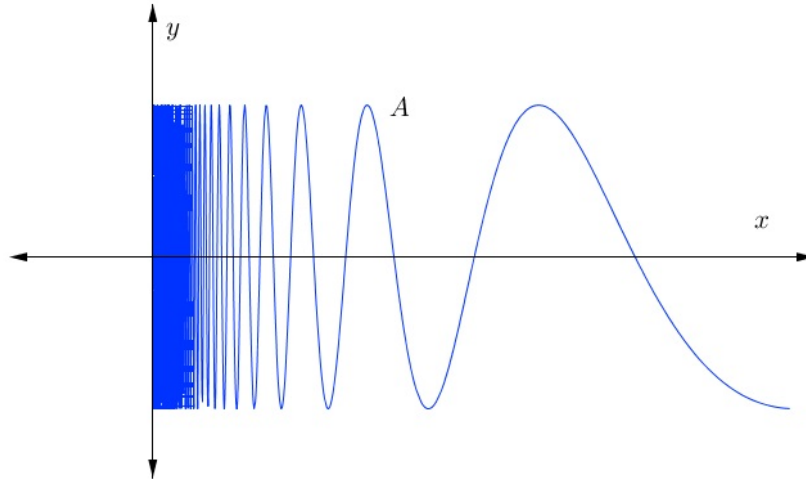
Si  $f$  es una biyección continua entre dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$ , con la inversa de  $f$  continua entonces se dice que  $f$  es un *homeomorfismo*.

Adicionalmente, un espacio topológico  $X$  se denomina *espacio de Hausdorff* si para cada par  $x_1, x_2$  de puntos distintos de  $X$  existen vecindades  $U_1$  y  $U_2$  de  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente, que son disjuntas.

El espacio  $X$  se denomina *conexo* si no es posible descomponerlo como la unión de dos abiertos no vacíos y disjuntos. En particular esta es una propiedad difícil de manejar, ya que  $X$  es conexo si no existe una separación no trivial de abiertos disjuntos, una noción "más manejable" es la de conexidad por caminos, para entender esta noción necesitamos una definición clara de lo que es un camino.

**Definición 1.4.** Dado un espacio topológico  $X$ , un *camino* en  $X$  es una aplicación continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  si  $\alpha(0) = a$  y  $\alpha(1) = b$ . Decimos que  $\alpha$  es un camino entre  $a$  y  $b$ .

Entonces  $X$  es *conexo por caminos* si para todo par de puntos  $a, b \in X$  existe un camino que los une. Note que si  $X$  es conexo por caminos él es conexo, pero la reciproca no se cumple, para ello consideremos  $B = \{0\} \times (-1, 1)$  y  $C = \left\{ \left( x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x > 0 \right\}$  entonces  $A = B \cup C$ , es llamado el "seno topológico" y cuya gráfica aparece a continuación:



$A$  es conexo ya que no se puede separar como unión de abiertos disyuntos, pero no es conexo por caminos ya que no hay camino que una un punto de  $B$  con uno de  $C$ . Para finalizar recordaremos el concepto topológico de compacidad, para esto necesitamos la siguiente definición:

**Definición 1.5.** Un *recubrimiento abierto* de un subconjunto  $A \subset X$ , donde  $X$  es espacio topológico, es una familia de conjuntos abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  tales que su unión cubre a  $A$ , es decir:

$$\bigcup_{i \in I} U_i \supset A$$

Entonces, en un espacio topológico  $X$  se dice que  $A$  es *compacto* si dado un recubrimiento cualquiera de  $A$ , existe un sub-recubrimiento finito de  $A$ .

Ahora, si  $X$  es compacto y  $f : X \rightarrow Y$  es continua, entonces  $f(X)$  es compacto, es decir, la imagen de una función continua de un compacto es compacto. Así mismo, esta función será uniformemente continua.

**Definición 1.6.** Una función  $f : X \rightarrow Y$  es *uniformemente continua* si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  ( $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ ) tal que  $d_X(x_1, x_2) < \delta$ , se tiene que  $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$  para todo  $x_1, x_2 \in X$ .

### 1.3. Elementos de Diferenciabilidad

En esta parte recordaremos nociones relacionadas con diferenciabilidad en  $\mathbb{R}^n$ , que serán vitales cuando hablemos de variedades diferenciables o de la conjetura en su versión geométrica.

**Definición 1.7.** Sea  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La *derivada*  $f'(x_0)$  de  $f$  en  $x_0 \in U$  es el límite (cuando existe)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x_0 + h \in U.$$

Cuando  $f$  posee derivada en todos los puntos de una vecindad  $V$  de  $x_0$  podemos considerar la derivada de  $f' : V \rightarrow \mathbb{R}$ , en  $x_0$  que es llamada la segunda derivada  $f''(x_0)$  de  $f$  en  $x_0$  y así sucesivamente.  $f$  es *diferenciable* en  $x_0$  si posee derivadas continuas de todos los ordenes en  $x_0$ .  $f$  es diferenciable en  $U$  si es diferenciable en todos los puntos de  $U$ .

Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . La *derivada parcial* de  $f$  con relación a  $x$  en  $(x_0, y_0) \in U$  denotada por  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , es (cuando existe) la derivada en  $x_0$  de la función de una variable  $x \rightarrow f(x, y_0)$ . Análogamente la derivada parcial con relación a  $y$  la notaremos  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

Cuando  $f$  posee derivadas parciales en todos los puntos de una vecindad  $V$  de  $(x_0, y_0)$  podemos considerar las derivadas parciales de segundo orden en  $(x_0, y_0)$  y así sucesivamente. Por lo tanto  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  si tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en  $(x_0, y_0)$ .

Así mismo, las derivadas parciales para  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  serán las funciones  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  que es la derivada de la función de una variable  $x_i \rightarrow f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ .

Ahora nos interesa extender esta noción a funciones tales como  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Definición 1.8.** Decimos que  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $p \in U$  si las funciones componentes son diferenciables en  $p$ , esto es:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Donde las funciones  $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  tiene derivadas parciales continuas de todos los ordenes en  $p$ .

Veamos ahora como se encuentra la diferencial de una aplicación diferenciable.

**Definición 1.9.** Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación diferenciable. Para cada  $p \in U$  tomamos una aplicación lineal  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  que es llamada la diferencial de  $F$  en  $p$ , y es definida de la siguiente manera. Sean  $w \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  una curva diferenciable tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = w$ . Por la regla de la cadena, la curva  $\beta = F \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  también es diferenciable. Entonces:

$$dF_p(w) = \beta'(0).$$

**Proposición 1.10.** *La definición anterior para  $dF_p$  no depende de la escogencia de la curva que pasa por  $p$  con vector tangente  $w$ , y  $dF_p$  es de hecho, una aplicación lineal.*

La matriz de  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  en las bases canónicas de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , esto es, la matriz  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , es llamada la *matriz Jacobiana* de  $F$  en  $p$ . Cuando  $n = m$ , estamos hablando de una matriz cuadrada y su determinante es llamado *el determinante Jacobiano*; es común denotarlo por:

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}.$$

Finalizamos los preliminares con un teorema trascendental en el desarrollo del trabajo, mas conocido como *Teorema de la función inversa*.

**Teorema 1.11.** *Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación diferenciable y supongamos que para  $p \in U$  la diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo. Entonces existe una vecindad  $V$  de  $p$  en  $U$  y una vecindad  $W$  de  $F(p)$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F : V \rightarrow W$  tiene inversa diferenciable  $F^{-1} : W \rightarrow V$ .*

Una aplicación diferenciable  $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$  de  $V$  sobre  $W$ , donde  $V$  y  $W$  son conjuntos abiertos, es llamado un *difeomorfismo* de  $V$  sobre  $W$  si  $F$  tiene una inversa diferenciable.

## 2 La Conjetura

Por mas de 100 años grandes leyendas de la matemáticas han tratado de resolver la Conjetura de Poincaré. En muchos casos se han encontrado interesantes avances y nuevas teorías en torno a la solución de la conjetura, formalmente la conjetura dice:

*“Toda variedad topológica compacta de dimensión tres que sea simplemente conexa es homeomorfa a la esfera  $S^3$ .”*

Por lo tanto en esta sección veremos su significado, su generalización y sus equivalencias topológicas que se centran en los *grupos de Homotopía*.

### 2.1. Poincaré

Henri Jules Poincaré nació en Nancy en 1854, su familia pertenecía a la élite intelectual de la ciudad. Su primo Raymond, fue Presidente de la República de 1913 a 1920. Tuvo 3 hijas y un hijo. Murió en París en 1912. Fue uno de los últimos universalistas, se le considera uno de los grandes genios de todos los tiempos. Con una memoria asombrosa, su método de trabajo consistía en resolver un problema en su cabeza antes de sentarse a escribirlo. Intentaba desarrollar sus resultados partiendo de principios fundamentales, en lugar de basarlos en trabajo previo de otros matemáticos. Abogaba más por la intuición como método de búsqueda, aunque creía en los argumentos formales como camino de revelar los errores de la intuición y de confirmar predicciones. Estuvo muy preocupado por la fundamentación de las diversas teorías matemáticas y físicas, incluso desde un punto de vista filosófico.

Gran parte de su trabajo desarrolló interacciones entre diferentes temas, y su amplio conocimiento de las diversas ramas de la matemática le permitieron atacar problemas desde numerosos puntos de vista. Tras haber obtenido gran reconocimiento como matemático, se ocupó de escribir sobre el significado e importancia de la Ciencia y la Matemática al público general.

Realizó contribuciones en muchos y variados campos:

- Topología algebraica.
- Probabilidades.
- Teoría de funciones analíticas de varias variables complejas.

- Teoría de funciones abelianas.
- Geometría algebraica.
- Teoría de números.
- El problema de los tres cuerpos.
- Teoría de ecuaciones diofánticas.
- Teoría del electromagnetismo.
- Teoría de la Relatividad Especial.
- Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.
- Mecánica celeste.
- Mecánica de fluidos.
- Óptica.
- Electricidad.
- Telegrafía.
- Capilaridad.
- Elasticidad.
- Termo dinámica.
- Teoría potencial.
- Mecánica cuántica.
- Cosmología.

Entre otras. Poincaré no formuló la Conjetura a la primera. De hecho planteó una conjetura ligeramente distinta en 1900, que resultó ser falsa, como él mismo probó mas adelante. Para explicarla, es necesario el concepto de grupo de homología, y su contraejemplo es conocido como *el espacio de Poincaré*. Así en 1904 lanzó oficialmente la que se conocería como la *conjetura de Poincaré*.

## 2.2. Significado

Para entender lo que vamos a abordar significa, necesitamos entender propiamente que es una variedad topológica y que significa ser simplemente conexa.

**Definición 2.1.** Sea  $n$  un entero no negativo. Una *variedad  $n$ -dimensional* es un espacio Hausdorff en el que cada punto posee un entorno abierto homeomorfo al disco  $n$ -dimensional abierto  $\mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ .

Como  $\overset{\circ}{D}^n \cong \mathbb{R}^n$ , podríamos decir que cada punto en una variedad  $n$ -dimensional tiene un entorno homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , para abreviar hablaremos de una  $n$ -variedad. Los ejemplos mas triviales de una  $n$ -variedad son  $\overset{\circ}{D}^n$  y  $\mathbb{R}^n$ .

Por cuestiones de notación también diremos que  $M$  es una variedad  $n$ -dimensional y lo notaremos como la variedad  $M^n$ , está notación es muy conveniente cuando trabajemos con mas de una variedad.

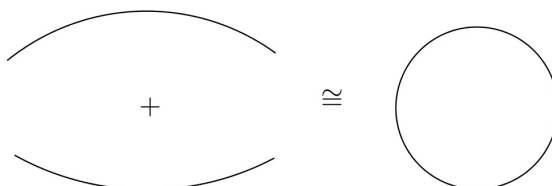
**Ejemplo 2.2.** La circunferencia  $S^1$  es una 1-variedad. Para verlo consideremos  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  dada por  $\{\exp(2\pi it) : t \in I\}$ .

Si  $x = \exp(2\pi i\theta) \in S^1$ , entonces:

$$\begin{aligned} x \in S^1 - \{-x\} &= S^1 - \{\exp(2\pi i(\theta - 1/2))\} \\ &= \{\exp(2\pi it) : \theta - 1/2 < t < \theta + 1/2\} \\ &\cong (\theta - 1/2, \theta + 1/2) \cong (0, 1) \cong \overset{\circ}{D}^1. \end{aligned}$$

Por lo que cada punto posee un entorno homeomorfo a  $\overset{\circ}{D}^1$ , y como  $S^1$  es Hausdorff se concluye que es una 1-variedad.

Informalmente, una *variedad* de dimensión  $n$  es un espacio obtenido pegando bolas de la misma dimensión, permitiendo que se solapen diversas bolas en el mismo punto, por ejemplo la circunferencia se puede obtener pegando dos intervalos como muestra la figura:



**Figura 1:** Tomada de Topología Algebraica, Kosniowski [1].

Ademas de eso, se puede comprobar que la esfera  $S^2$  se puede obtener pegando dos discos. Algunos ejemplos de variedad no tan triviales son los siguientes:

**Ejemplo 2.3.** El espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^n$ , que es el conjunto de rectas de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasan por el origen  $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , es decir, el conjunto de las “direcciones” de  $\mathbb{R}^{n+1}$  es una variedad diferenciable.

El espacio  $\mathbb{R}P^n$  es una  $n$ -variedad. Consideremos la aplicación  $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  que aplica  $x \in S^n$  en el par  $\{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$ . Sea  $U_x$  un entorno abierto de  $x \in S^n$

homeomorfo a  $\overset{\circ}{D}^n$  y de diámetro menor que  $\sqrt{2}$ . En este caso  $p(U_x)$  es un entorno abierto de  $\{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$  y homeomorfo a  $\overset{\circ}{D}^n$ , esto debido a que  $p$  es una aplicación continua y abierta, además si  $U$  es suficientemente pequeña de  $S^n$  entonces  $p|_U : U \rightarrow p(U)$  es biyectiva.

Así falta que revisemos lo que es una variedad *simplemente conexa*, pero primero necesitamos ver qué es el grupo de homotopía para ser mas preciso, pero por ahora podemos decir que una variedad  $X$  es simplemente conexa si es conexa por caminos y cada lazo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  donde  $\gamma(0) = \gamma(1) = p \in X$ , se puede deformar o contraer continuamente a dicho punto  $p \in X$ .

Es trivial imaginarse como en  $S^2$  todo posible lazo que definamos se puede contraer a un punto fijo.

Entonces lo que nos dice la conjetura de Poincaré es que toda variedad cerrada de dimensión 3 en la que cada lazo se puede contraer de forma continua a un punto debe ser homeomorfa a la esfera  $S^3$ .

## 2.3. La conjetura en las Superficies

Uno de los principales problemas que se pueden evidenciar al atacar la conjetura es la dificultad de visualizar una 3-variedad, es por eso que a la hora de tratar de entender el significado de la conjetura nos debemos bajar a una dimensión mucho mas amigable para la imaginación como lo son las 2-variedades. En particular cuando trabajamos en la conjetura nos interesan las variedades conexas y compactas, y una 2-variedad conexa y compacta se denomina *superficie*.

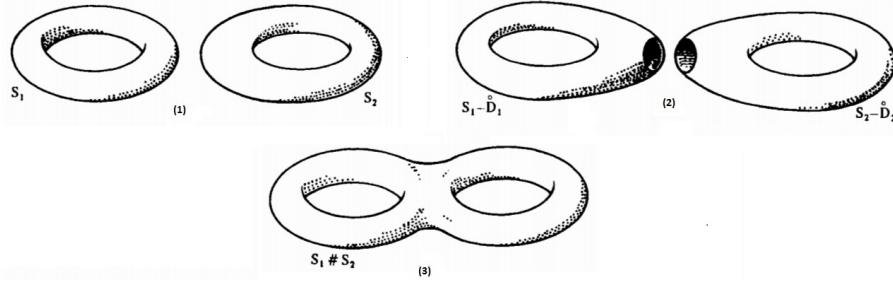
Por lo tanto es interesante demostrar la conjetura de Poincaré para superficies. Para ello utilizaremos el *Teorema de la clasificación de las Superficies* (TCS), para abordar el TCS primero debemos definir lo que significa la *suma conexa* de superficies.

**Definición 2.4.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies disjuntas, su *suma conexa*  $S_1 \# S_2$  se obtiene extrayendo un disco abierto de cada superficie y pegándola a lo largo de los bordes de los agujeros resultantes. Mas formalmente para definir  $S_1 \# S_2$ , sean  $D_1 \subseteq S_1$  y  $D_2 \subseteq S_2$  subespacios homeomorfos a  $D^2$  y sean  $h_1 : D_1 \rightarrow D^2$ ,  $h_2 : D_2 \rightarrow D^2$  dos homeomorfismos. Definimos  $S_1 \# S_2$  por:

$$\frac{(S_1 - \overset{\circ}{D}_1) \cup (S_2 - \overset{\circ}{D}_2)}{\sim}$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia que no es trivial (trivial significa que cada elemento se relaciona con el mismo) en  $\partial(S_1 - \overset{\circ}{D}_1) \cup \partial(S_2 - \overset{\circ}{D}_2) = \partial D_1 \cup \partial D_2$ , donde está dada por  $x \sim h_2^{-1}h_1(x)$  para  $x \in \partial D_1$ .

Un ejemplo sencillo de ver es que el bitoro es la suma conexa de dos toros, pero un resultado importantísimo para nuestro trabajo es el teorema de clasificación de superficies que afirma que toda superficie es obtenida de la esfera  $S^2$ , el toro  $T = S^1 \times S^1$  y el plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$ .



**Figura 2:** Tomada de Topología Algebraica, Kosniowski [1].

**Teorema 2.5.** (Teorema de la clasificación de las superficies - TCS)

Toda superficie  $S$  es homeomorfa a una y solo una de las siguientes superficies:

$$S^2 \# \underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m \quad (m \geq 0)$$

$$S^2 \# \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_n \quad (n \geq 1)$$

Por notación es mejor escribir las sumas conexas de la siguiente forma.

$$S^2 \# \underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m \cong S^2 \# mT \quad (m \geq 0)$$

$$S^2 \# \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_n \cong S^2 \# n\mathbb{R}P^2 \quad (n \geq 1)$$

*Demostración.* Ver [1], Capítulo 11. □

A menudo se dice que si la superficie no es orientable será homeomorfa a la segunda, en caso contrario será homeomorfa a la primera. Una superficie es *orientable* si no contiene ninguna banda de Möbius, y es *no orientable* cuando la contiene. La demostración del TCS utiliza el hecho que  $\mathbb{R}P^2$  se obtiene de pegar un disco a una banda de Möbius, por lo tanto se usa altamente el hecho que si  $M$  es una superficie orientable cualquiera,  $M \cong S^2 \# mT$  (superficie orientable estándar género  $m$ ), así mismo si es una superficie no orientable,  $M \cong S^2 \# n\mathbb{R}P^2$  (superficie no orientable estándar género  $n$ ). Aquí es bastante útil saber que  $T \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ .

Todos estos elementos se necesitan para comprobar el siguiente resultado.

**Proposición 2.6.** Si  $X$  es una superficie compacta y simplemente conexa, entonces  $X$  es homeomorfa a la esfera  $S^2$ .

Este resultado era bastante conocido por los matemáticos del siglo XIX, presentaremos su prueba mas adelante ya que para ello se necesita trabajar con el grupo fundamental.

## 2.4. Generalización

Como se comentó en la introducción de este trabajo, uno de los procesos fundamentales del trabajo matemático es la generalización. En el caso de la conjetura de Poincaré es muy común preguntarnos:

- ¿Por qué se conoce que la conjetura es cierta para el caso general y no para la dimensión 3?
- ¿Qué invariantes matemáticos hay que impiden que funcione la conjetura?
- ¿Por qué rama de la matemática se debe estudiar la conjetura?

Y muchas preguntas mas que se pueden generar a partir de estas, pero ¿es tan fácil generalizarla?, o ¿simplemente basta con cambiar de dimensión 3 por dimensión  $n$ ?, todos estos cuestionamientos los tendremos mas claros con un invariante fundamental para nuestro estudio y el desarrollo de la conjetura, este es *el grupo fundamental*.

Para comenzar definamos unos invariantes de la topología algebraica como lo son *las homotopías*.

**Definición 2.7.** Dos aplicaciones continuas  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  son *homotópicas* si se puede deformar de manera continua la una en la otra. Es decir, ellas son homotópicas si existe una aplicación continua  $H$  que satisface lo siguiente:

$$H : [0, 1] \times X \rightarrow Y, \quad H(0, x) = f_0(x), \quad H(1, x) = f_1(x), \quad \forall x \in X.$$

Si las dos aplicaciones son homotópicas podemos escribir  $f_0 \sim f_1$ . También decimos que  $H$  es una *homotopía* entre  $f_0$  y  $f_1$ .

**Ejemplo 2.8.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  tales que  $f(x) = p$  y  $g(x) = q$ , para todo  $x \in X$ .  $f$  y  $g$  son homotópicas si y solo si  $p$  y  $q$  pertenecen a la misma componente conexa por caminos del espacio  $Y$  (es decir, no están en dos “piezas” diferentes del espacio y en la pieza que están es conexa por caminos). Para ver esto, supongamos que existe un camino  $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha(1) = q$ , entonces  $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  entre  $f$  y  $g$  haciendo  $H(t, x) = \alpha(t)$  para todo  $(t, x) \in [0, 1] \times X$ . De forma equivalente pero fijando un  $x_0 \in X$  tendremos que existe un camino  $\alpha : [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $\alpha(t) = H(t, x_0)$ .

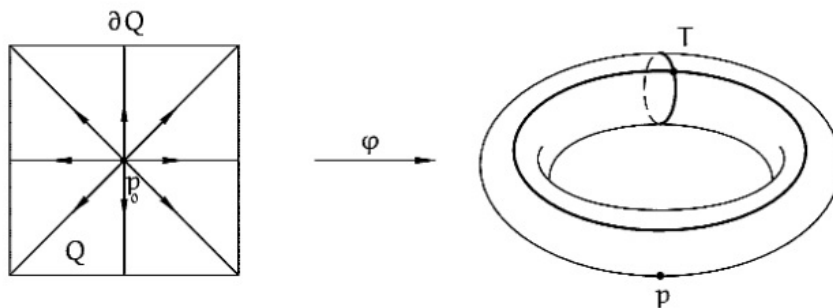
**Ejemplo 2.9.** Sea  $Y \subset E$ , donde  $E$  es un espacio vectorial normado. Dadas  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas y supongamos que el segmento de recta  $[f(x), g(x)] \subset Y$  para todo  $x \in X$ , entonces  $f \sim g$ . Para ver esto basta definir  $H(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ , donde  $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$ .

La homotopía definida en el ejemplo anterior se llama *homotopía lineal* y para todo  $x \in X$  y  $t \in [0, 1]$  tendremos que  $H(t, x)$  recorre el segmento de recta que une  $f(x)$  con  $g(x)$ .

Además, una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  es llamada *equivalencia homotópica* si existe un inverso en el sentido de homotopía, es decir, una aplicación continua  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \sim I_x$ ,  $f \circ g \sim I_y$ . Cuando tal equivalencia homotópica existe decimos que  $X$  y  $Y$  son *homotópicamente equivalentes* o que tienen *el mismo tipo de homotopía*, y lo notamos  $X \stackrel{H}{\cong} Y$ .

**Ejemplo 2.10.** Sea  $T = S^1 \times S^1$  mas conocido como el Toro y sea  $p \in T$  un punto arbitrario. Veremos que  $T - \{p\}$  tiene el mismo tipo de homotopía que la unión de dos circunferencias con un punto en común.

Para comenzar el toro  $T$  es la imagen del cuadrado  $Q$  bajo una aplicación muy conocida  $\varphi : Q \rightarrow T$  que consiste en pegar adecuadamente la frontera  $\partial Q$  y dejar quietos a los puntos del interior de  $Q$ , en particular  $\varphi$  transforma  $\partial Q$  en  $Y = S \cup S'$  que son dos circunferencias con un punto en común como muestra la imagen y al interior de  $Q$  en el complemento  $T - Y$  de forma usual.



**Figura 3:** Tomada de Grupo fundamental e espacios de Recubrimiento, Lima [4].

**Ejemplo 2.11.** Ahora, asumamos que  $p$  es la imagen bajo  $\varphi$  de  $p_0$ , donde  $p_0$  es el centro de  $Q$ . Es fácil ver que  $Q - \{p_0\}$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $\partial Q$  ya que el “hueco” que genera quitar  $p_0$  lo podemos deformar continuamente hasta obtener solo a  $\partial Q$ , es decir hay un homeomorfismo entre  $\partial Q$  y  $Q - \{p_0\}$ , por lo tanto si componemos este homeomorfismo con  $\varphi$  tendremos que  $T - \{p\}$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $Y$ .

**Definición 2.12.** Un espacio topológico  $X$  es llamado *contráctil* o *contraíble* si tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

En general hay una forma más fácil de identificar que un espacio es *contráctil*, para eso se usa la siguiente proposición:

**Proposición 2.13.**  $X$  es *contráctil* si y solo si la aplicación identidad  $i_X : X \rightarrow X$  es homotópica a una aplicación constante  $X \rightarrow X$ .

*Demostración.* Como  $f : X \rightarrow \{p\}$  es una equivalencia homotópica entre  $X$  y  $\{p\}$ , entonces existe  $g : \{p\} \rightarrow X$  inversa homotópica de  $f$  tal que  $g \circ f \cong i_X$  y  $g \circ f$  es constante. Recíprocamente, si  $i_X \cong \text{constante}$ , entonces  $i_X$  y la constante son homotópicamente equivalentes, y una es el inversa de la otra, así  $X$  sera *contráctil*.  $\square$

Así mismo es fácil ver que si dos espacios  $X$  o  $Y$  son *contráctiles*, toda aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  será homotópica a una constante. Ahora tenemos las herramientas para hablar del grupo fundamental.

Fijemos un punto  $\star \in X$ , y llamemos  $(X, \star)$  el *espacio con punto base*  $\star$ , y los caminos que empiezan y terminan en  $\star$  los llamamos *lazos*. Diremos que *el grupo fundamental de  $(X, \star)$*  es el conjunto  $\pi_1(X, \star)$  cuyos elementos son las clases de equivalencia  $[\alpha]$ , donde  $\alpha$  es un lazo y consideramos que  $[\alpha_0] = [\alpha_1]$  cuando  $\alpha_0 \sim \alpha_1$ , es decir son homotópicas.

La clave radica en que  $\pi_1(X, \star)$  es un grupo, entonces es importante saber cual es la operación que actúa. Dicha operación es conocida como *el producto de caminos* que consiste en que  $\alpha_0 * \alpha_1$  es un lazo donde primero se recorre  $\alpha_0$  y luego  $\alpha_1$ , esto es posible gracias a que ambos lazos empiezan y terminan en  $\star$ , pero se trabajara en particular con sus clases de equivalencia, es decir  $[\alpha_0] * [\alpha_1]$  será la clase de equivalencia del lazo resultante de recorrer primero  $\alpha_0$  y luego  $\alpha_1$ , con esta operación es fácil ver que  $\pi_1(X, \star)$  es un grupo, para ello definimos  $\varepsilon_\star(t) = \star$  y se demuestra que este corresponde al elemento identidad del grupo. La inversa corresponde a la clase de equivalencia del lazo recorrido en sentido contrario.

Ahora, si  $X$  es conexo por caminos, el punto base  $\star$  pierde importancia, ya que si elegimos  $\diamond \in X$ , el grupo fundamental de  $(X, \diamond)$  es isomorfo al grupo fundamental de  $(X, \star)$ . Para ver esto usaremos un camino  $\alpha$  de  $\star$  a  $\diamond$  (que existe ya que  $X$  es conexo por caminos) y lo asociaremos así:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, \star) &\rightarrow \pi_1(X, \diamond) \\ [\gamma] &\rightarrow [\alpha] * [\gamma] * [\alpha]^{-1} \end{aligned}$$

Que es un isomorfismo de grupos, por lo tanto es viable hablar de  $\pi_1(X)$ . Ahora veamos lo que es un homomorfismo inducido, esta noción sera vital a la hora de trabajar en los grupos fundamentales de un espacio topológico  $X$ .

**Definición 2.14.** Una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  induce el homomorfismo:

$$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad y_0 = f(x_0)$$

definido por  $f_{\#}(\alpha) = [f \circ a]$ , donde  $\alpha = [a]$ . Como  $a \sim a'$  implica que  $f \circ a \sim f \circ a'$ , por lo que  $f_{\#}$  esta bien definida. Además, es facil ver que  $f \circ (ab) = (f \circ a)(f \circ b)$ , por lo tanto  $f_{\#}(\alpha\beta) = f_{\#}(\alpha)f_{\#}(\beta)$ ; así  $f_{\#}$  es un homomorfismo.

Así mismo, dados dos aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$ , obtenemos los homomorfismos inducidos

$$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad y \quad g_{\#} : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$$

donde  $y_0 = f(x_0)$  y  $z_0 = g(y_0)$ . Se puede ver que:

$$(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$$

Con esto tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 2.15.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos conexos por caminos con el mismo tipo de homotopía, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.

*Demostración.* Sean  $X, Y$  espacios topológicos con el mismo tipo de homotopía, entonces existen dos aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \sim i_X$  y  $f \circ g \sim i_Y$ . Tomemos un punto base  $x_0 \in X$ , y definimos  $y_0 = f(x_0)$ ,  $x_1 = g(y_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ . Sean  $f_{\#}^0 : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ,  $f_{\#}^1 : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$ , y  $g_{\#} : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$  los homomorfismos inducidos por  $f$  y  $g$ . Aplicando la composición homomorfismos inducidos y teniendo en cuenta que  $g \circ f \sim i_X$ , concluimos que  $g_{\#} \circ f_{\#}^0 = \bar{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ , donde  $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$  donde  $\gamma$  es el camino que une a  $x_0$  con  $x_1$ . De forma similar como  $f \circ g \sim i_Y$  concluimos que  $f_{\#}^1 \circ g_{\#} = \bar{\delta} : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$  donde  $\bar{\delta}$  es el camino que une a  $y_1$  y  $y_0$ . Estas relaciones se establecen en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_{\#}^0} & \pi_1(Y, y_0) \\ \bar{\gamma} \downarrow & \nearrow g_{\#} & \downarrow \bar{\delta} \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{f_{\#}^1} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

Como  $g_{\#} \circ f_{\#}^0 = \bar{\gamma}$  es un isomorfismo, concluimos que  $g_{\#}$  es sobreyectiva, así mismo como  $f_{\#}^1 \circ g_{\#} = \bar{\delta}$  es un isomorfismo,  $g_{\#}$  es inyectiva. Por lo tanto,  $g_{\#}$  es un isomorfismo y entonces  $f_{\#}^0$  y  $f_{\#}^1$  son tambien isomorfismos. En particular tenemos que  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ .  $\square$

**Corolario 2.16.** *El grupo fundamental de un espacio contráctil tiene un solo elemento.*

Así ya podemos hablar con mas propiedad de una  $n$ -variedad simplemente conexa.

**Definición 2.17.** Una  $n$ -variedad  $X$  es simplemente conexa si es conexa por caminos y su grupo fundamental de homotopía es el grupo trivial ( $\pi_1(X) = \{0\}$ ).

En otras palabras  $X$  es simplemente conexo si es conexo por caminos y toda aplicación continua  $f : [0, 1] \rightarrow X$  que sea un lazo ( $f(0) = f(1) = p$ , donde  $p \in X$ ) es contráctil de forma continua a dicho punto mediante una homotopía  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que:

$$H(s, 0) = f(s) \text{ y } H(s, 1) = p$$

**Ejemplo 2.18.**  $S^2$  es una superficie simplemente conexa y  $T^2$  no lo es.

**Ejemplo 2.19.** Todo espacio contráctil es simplemente conexo, en particular  $\mathbb{R}^n$  es contráctil pero no es una variedad compacta.

Vemos que para todo  $n > 1$ ,  $S^n$  es simplemente conexa, pero para ello debemos probar antes unos cuantos resultados.

**Lema 2.20.** *Sea  $a : [0, 1] \rightarrow S^n$  un camino tal que  $a([0, 1]) \neq S^n$ . Entonces  $a \sim \varepsilon_{x_0}$  (donde  $\varepsilon_{x_0}$  es un camino cuya imagen es el punto  $x_0$ ) si  $a(0) = a(1) = x_0$  y  $a \sim c$ , donde  $c : [0, 1] \rightarrow S^n$  un camino inyectivo, si  $a(0) \neq a(1)$ .*

*Demostración.* Tomemos  $p \in S^n - a([0, 1])$  y sea  $\varphi : S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección estereográfica. Como  $\mathbb{R}^n$  es simplemente conexo,  $\varphi \circ a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es homotópica a una constante (cuando hay punto fijos) si  $a$  es cerrado o a un segmento de recta (parametrización inyectiva) si  $a$  no es cerrado, lo mismo pasa con  $a = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ a)$ .  $\square$

*Observación 2.21.* Existen caminos  $a : [0, 1] \rightarrow S^n$  (como la curva de Peano) que son sobreyectivas, el teorema de Hahn y Mazurkiewickz asegura la existencia de esta curva si y solo si  $X$  es un espacio Hausdorff, compacto y localmente conexo. Es por eso que el lema anterior tendrá problemas con curvas como la de Peano.

**Lema 2.22.** *Sea  $n > 1$ . Si el camino  $a : [0, 1] \rightarrow S^n$  es inyectivo, su imagen es un cerrado con interior vacío en  $S^n$ .*

*Demostración.* Como  $[0, 1]$  es compacto,  $a([0, 1])$  es compacto, es decir es cerrado en  $S^n$ . Mas aún, por ser inyectiva,  $a$  es un homeomorfismo entre  $[0, 1]$  y  $a([0, 1])$ . Si  $a([0, 1])$  no tiene interior vacío entonces contiene una bola abierta  $B$ , con centro  $x = a(s)$ . Tendremos  $B = a(J)$ , donde  $J$  es un intervalo abierto que contiene a  $s$ . Así el camino  $a$  sera un homeomorfismo entre  $J$  y  $B$ , que es una contradicción ya que  $J - \{s\}$  es desconexo mientras  $B - \{x\}$  es conexo para  $n > 1$ .  $\square$

**Lema 2.23.** *Cada camino  $a : [0, 1] \rightarrow S^n$  es homotópico (con puntos fijos) a un camino  $b : [0, 1] \rightarrow S^n$  tal que  $b([0, 1]) \neq S^n$ .*

*Demostración.* Como  $a$  es uniformemente continua, podemos obtener los puntos  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$  de tal forma que  $I_i = [s_{i-1}, s_i]$ , tenemos que  $a(I_i) \neq S^n$  para cada  $i = 1, \dots, k$ . Se puede probar que  $a \sim a_1 a_2 \dots a_k$  donde  $a_i([0, 1])$  es una reparametrización de  $a(I_i)$ , es decir  $a_i([0, 1]) = a(I_i)$  y  $a_1 a_2 \dots a_k$  es la multiplicación de caminos, del lema 2.19 tenemos que  $a_i \sim b_i$  donde  $b_i$  es inyectiva (esto ya que  $a_i$  no es lazo porque  $s_i \neq s_{i+1}$ ), ahora por el lema 2.21 como  $b_i$  es inyectiva entonces su imagen es un conjunto cerrado con interior vacío en  $S^n$ . Tomando  $b = b_1 b_2 \dots b_k$ , tenemos:

$$a \sim a_1 a_2 \dots a_k \sim b_1 b_2 \dots b_k = b$$

y la imagen  $b([0, 1]) = b_1([0, 1]) \cup \dots \cup b_k([0, 1])$  es la unión finita de cerrados con interior vacío en  $S^n$ , entonces  $b([0, 1])$  tiene interior vacío. En particular  $b([0, 1]) \neq S^n$ .  $\square$

Con esto podemos probar el resultado que buscábamos:

**Proposición 2.24.** *Si  $n > 1$ , la esfera  $S^n$  es simplemente conexa.*

*Demostración.* Por el lema 2.22 cada camino cerrado en  $S^n$  es homotópico a un camino cerrado cuya imagen no es todo  $S^n$ , así por el lema 2.19 este último es homotópico a una constante.  $\square$

Podemos ver que como  $S^n$  es simplemente conexa,  $\pi(S^n) = \{0\}$ , es decir tiene grupo de homotopía trivial. Así con estas definiciones podemos reescribir la conjetura de Poincaré (CP).

**Conjetura 2.25.** *(CP) Si  $X$  es una 3-variedad con  $\pi_1(X) = \{0\}$  entonces  $X$  es homeomorfa a  $S^3$ .*

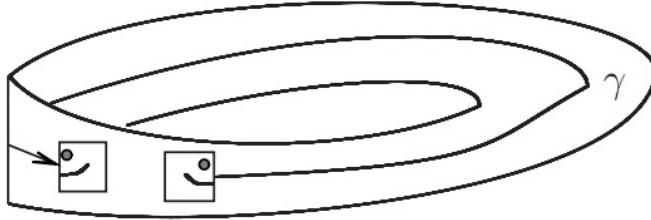
Pero en su versión generalizada, la conjetura de Poincaré generalizada (CPG):

**Conjetura 2.26.** *(CPG) Una  $n$ -variedad compacta con el mismo tipo de homotopía de la  $n$ -esfera es homeomorfa a la  $n$ -esfera.*

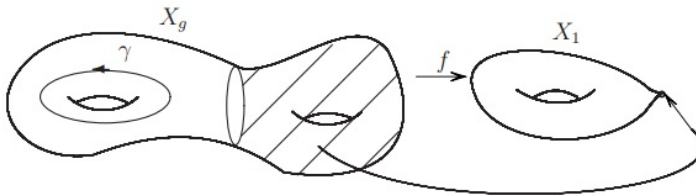
La importancia de la CP en dimensión  $n$  radica en la sutileza del concepto de equivalencia de homotopía. Ciertamente hay  $n$ -variedades compactas que son del mismo tipo de homotopía, pero no son homeomorfas. Aún así, si es cierto para este caso dado que el grupo de homotopía es trivial.

Ahora para terminar esta sección presentaremos la demostración sugerida para la conjetura en superficies previamente expuesta en la subsección anterior:

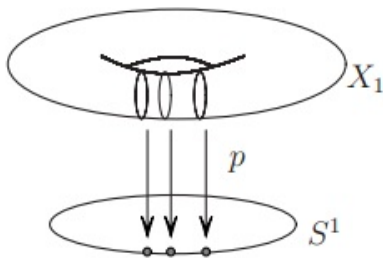
*Demostración.* Sea  $X$  una superficie simplemente conexa, es fácil ver que  $X$  debe ser orientable, ya que de no serlo existiría un lazo  $\gamma$  que cambia de orientación, dicho lazo no puede ser borde de un disco, pues en un disco siempre puede definirse una orientación que induciría la de  $\gamma$ , por lo tanto no sería simplemente conexo de presentarse esto.



Ahora, por el TCS, como  $X$  es orientable será homeomorfo a la esfera o a una superficie orientable de género  $g \geq 1$  (algo así como un “ $g$ -toro” o superficie con  $g$  huecos). Pero una superficie  $X_g$  de género  $g \geq 1$  no es simplemente conexa, basta tomar una aplicación continua  $f : X_g \rightarrow X_1$  como lo muestra la imagen, de  $X_g$  en la superficie  $X_1$  de género 1 (toro).



Además, existe un homeomorfismo  $X_1 \rightarrow S^1 \times S^1$ , que envía cada punto de  $X_1$  a sus dos coordenadas *latitud* y *longitud*. Tomamos la proyección  $p : X_1 = S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$  en el segundo factor.



Ahora, el lazo  $[\gamma] \in \pi_1(X_g)$  verifica que  $p * f * [\gamma]$  da una vuelta en  $S^1$  y por lo tanto no es el elemento neutro en  $\pi_1(S^1)$ . Entonces  $[\gamma] \neq [c_*]$  en  $\pi_1(X_g)$ , y  $X_g$  no es simplemente conexa. Por lo tanto  $X$  debe ser homeomorfa a la esfera.  $\square$

## 3 Desarrollo histórico de la Conjetura

Como se mencionó antes, la conjetura de Poincaré además de ser un estandarte por la dificultad de su solución ha generado gran variedad de teorías y resultados derivados de ella, así mismo, se han ideado gran cantidad de métodos para deducir su veracidad. A continuación presentamos algunos aportes históricos que nos ayudarán a ver como la conjetura ha cambiado el mundo matemático, así como posibles resultados derivados de ella.

### 3.1. Origen

La primera conjetura propuesta por Poincaré, tuvo sus orígenes en el año 1900 pero solo tuvo 4 años de vigencia. Originalmente el cuestionamiento de Poincaré fue el siguiente:

**Conjetura 3.1.** *Si  $X$  es una 3-variedad compacta con  $H_1(X) = 0$  entonces  $X$  es homeomorfa a la esfera  $S^3$ .*

Aquí  $H_1(X)$  es el primer grupo de homología del espacio  $X$ , no nos centraremos en el significado de este grupo. Para una amplia revisión de este tema se puede consultar [36]. Lo interesante es que en la conjetura de Poincaré generalizada el enunciado es casi el mismo solo que se usa el grupo de homotopía  $\pi_1(X)$ . Es importante aclarar que esta conjetura y la que conocemos hoy no se formularon tal cual las enunciamos sino que fue propuesta en una forma equivalente que llevó al desarrollo de estas teorías.

La primera conjetura resultó ser falsa y fue demostrada por el propio Poincaré, él construyó una 3-variedad compacta con grupo de homología trivial que no es homeomorfa a  $S^3$ , dicho espacio es conocido como el *espacio de Poincaré*, una buena exposición de este espacio se puede encontrar en [35] y [18].

Después de esto, en 1904 Poincaré formula la conjetura que conocemos hoy en día, la que se trató de demostrar de diversas formas y de algunas de estas presentaremos una breve revisión.

### 3.2. Clasificación de 3-variedades

La conjetura de Poincaré se extiende a un problema más fuerte: el problema de clasificación de 3-variedades compactas. Un problema de clasificación consiste en:

1. Dados dos espacios  $X$  e  $Y$ , determinar si son homeomorfos o no.
2. Dar una lista completa de todos los posibles espacios  $X$  de un determinado tipo (la llamada clasificación).

La conjetura de Poincaré es básicamente la parte de la clasificación de 3-variedades correspondiente a (1) para el caso  $Y$  homeomorfo a  $S^3$ . Ya habíamos visto que existía solución en el caso de las superficies y estaba determinado por el  $TCS$ .

Cualquier tipo de invariante (algebraico o de otro tipo) es útil para el apartado (1), dado que si dos espacios tienen cierto invariante distinto, entonces forzosamente no son homeomorfos. Por otro lado, a veces los invariantes (al menos de los que disponemos) no son suficientes: En 1919 se probó que la homología y el grupo fundamental no son suficientes para caracterizar las 3-variedades, es decir que hay 3-variedades que comparten la misma homología y grupo fundamental pero no son homeomorfas.

### 3.3. Algunos Resultados

La Conjetura de Poincaré para dimensión  $n$  es trivialmente cierta para  $n = 1$  (pues la única 1-variedad conexa compacta es  $S^1$ ). Para el caso de superficies  $n = 2$ , ya sabemos que es cierta. El caso  $n = 4$  fue probado por Freedman [24] en 1982, lo que le hizo merecedor de la medalla Fields en 1986. Para  $n \geq 5$ , la conjetura había sido demostrada en los 60's (los argumentos topológicos son en general más sencillos en dimensión  $n \geq 5$  puesto que hay más espacio para mover objetos con homotopías). Stallings [32] dio una prueba para  $n \geq 7$  que Zeeman [34] generalizaría para  $n = 5, 6$ . Smale [31] dio una demostración alternativa y completa para todos los casos  $n \geq 5$ .

Pero la conjetura se mantuvo, para el caso en cuestión ( $n = 3$ ), es por esto que se han buscado invariantes nuevos, así como el surgimiento de nuevas conjeturas, en particular analizando si la conjetura se cumple bajo nuevas condiciones, tales como condiciones geométricas.

En Geometría, aparte de la estructura de variedad topológica, tenemos otra estructura más rica, la de variedad diferenciable, que permite hacer análisis en variedades. Así surge la siguiente conjetura:

**Conjetura 3.2.** (CPD) *Sea  $X$  una  $n$ -variedad compacta diferenciable. Si  $X$  es del mismo tipo de homotopía que la  $n$ -esfera, entonces  $X$  es difeomorfa a la  $n$ -esfera.*

En el siguiente capítulo se trabaja a fondo la definición de  $n$ -variedad diferenciable y difeomorfismo entre variedades, plantaremos por ahora los avances respecto a esta parte de la conjetura, en el siguiente capítulo se estudiará a fondo todos los conceptos involucrados en esta conjetura.

La CPD es cierta para  $n = 2$  y para  $n = 3$ , resolver la CP es equivalente a resolver la CPD. En dimensión  $n \geq 4$ , las cosas no son tan claras. A veces, una variedad topológica no admite ninguna estructura diferenciable. Otras, admite varias estructuras

diferenciables distintas (obteniéndose así variedades diferenciables no difeomorfas). En dimensión  $n \geq 5$  la respuesta a estas cuestiones está determinada por propiedades homotópicas en las que intervienen ciertos espacios  $BTop$ ,  $BPL$  y  $BDiff$ , y que están muy bien clasificadas. Así, el caso  $n = 4$  es el más difícil. Aquí se sabe que hay variedades topológicas compactas que no admiten estructura diferenciable alguna (esto fue demostrado por Donaldson [23] en 1982, lo que le hizo merecedor de la medalla Fields), y hay otras 4-variedades topológicas que admiten infinitas estructuras diferenciables distintas, y éstas se distinguen con invariantes muy sutiles (los invariantes de Donaldson) que provienen de la teoría de Yang-Mills.

Para  $n \geq 5$ , sí se conoce la respuesta a la CPD. En general hay más de una estructura diferenciable para cada esfera  $S^n$ , en cuyo caso, la CPD es falsa. A las estructuras diferenciables de  $S^n$  que no son la estándar se las conoce con el nombre de *esferas exóticas*, Milnor [29] fue el primero en encontrar una estructura diferenciable exótica en la esfera  $S^7$ . Posteriormente, se encontraron generalizaciones a otras dimensiones, y usando teoría de cirugía, se ha relacionado el número de estructuras diferenciables de la  $n$ -esfera con grupos de homotopía de esferas. Sin embargo, los grupos de homotopía  $\pi_i(S^n)$  para  $i > n$  son difíciles de calcular, y no hay una lista completa de los mismos. El número de estructuras diferenciables de la esfera de dimensión  $n = 5, 6, 7, 8, 9, \dots$  es 1, 1, 28, 2, 8, 6, 992, 1, 3, 2, 16256, 2, ... respectivamente.

Los intentos de probar la CP por métodos topológicos (o quizá más a menudo, los intentos de construir un contraejemplo a la CP) se basaron principalmente en la teoría de cirugía y en la teoría de nudos. En este trabajo no revisamos las dos teorías pero una buena exposición de este tema se puede encontrar en [28]. Así mismo, otros métodos utilizados pero que no tratamos aquí son la propiedad  $P$ , que se estudian en cursos de geometría o topología algebraica.

En la siguiente sección no solo trabajaremos los elementos necesarios para entender la CPD, sino que comentaremos otros elementos históricos que tienen en cuenta teorías que vamos a estudiar mas adelante, en particular la *geometrización de la conjetura*, con lo que terminaríamos el repaso histórico de la conjetura.

## 4 Geometrización y Flujo de Ricci

Mientras que los casos de dimensiones superiores de la CPG sólo implican métodos (sofisticados) de la topología diferencial, la solución desconocida del caso clásico,  $n = 3$ , implica el análisis (muy difícil) en variedades. El método, introducido por Richard Hamilton en los años 80 y conocido como el flujo de Ricci, consiste en la modificación de una métrica inicial con el fin de obtener una "mejor", y el uso de la geometría diferencial para deducir propiedades topológicas de la variedad. Una vez más, los resultados dan una respuesta positiva a una conjetura general, *geometrización de la conjetura*, declarada por Thurston en los años 70.

Para analizar la importancia y entender el significado del flujo de Ricci es necesario que introduzcamos algunos conceptos propios de la *Geometría Riemanniana*, que será el contenido inicial de este capítulo, para luego definir claramente el significado de esta teoría.

El problema de la existencia de métricas con características especiales sobre las variedades siempre ha cautivado a los matemáticos, sobre todo en estos campos de estudio. Los ejemplos más particulares son los teoremas de uniformización y el problema de Yamabe, pero en el mejor de los casos si la métrica es única, se pueden realizar cálculos con dicha métrica y obtener información topológica interesante. Así, en la década de los 80, Hamilton inventa un nuevo método, denominado *flujo de Ricci* que será el foco de estudio en este capítulo. Pretendemos presentar de forma aproximada en qué consiste dicha teoría de Hamilton.

En realidad la idea no es nueva, pues el flujo de Ricci se estudia habitualmente en Relatividad General, pero aplicado a métricas semi-riemannianas. En este caso se estudian ecuaciones diferenciales ordinarias (en dimensión infinita) que debe satisfacer la métrica. Por lo tanto en el conjunto de métricas de Riemann de una variedad se pueden proponer muchas ecuaciones diferenciales diferentes, pero el flujo de Ricci es la ecuación más sencilla. Su expresión analítica es:

$$\frac{dg}{dt} = -2Ric_{g(t)} + \lambda(t) \cdot g$$

donde  $g$  denota la métrica Riemanniana y  $Ric$  el tensor de Ricci asociado a la métrica  $g$ . Hamilton estudió el caso en que  $\lambda$  es nulo y llegó a interesantes resultados.

## 4.1. Hamilton

Richard Hamilton nació en Cincinnati, Ohio en 1943. Actualmente es profesor de Matemáticas en la universidad de Columbia, sus contribuciones son principalmente en el ámbito de la geometría diferencial, y más específicamente del análisis geométrico. Es conocido por haber descubierto el flujo de Ricci y por empezar un programa de investigación que, finalmente, terminó Grigori Perelmán con la prueba de la conjetura de geometrización y la solución de la conjetura de Poincaré.

Hamilton ha sido premiado con el premio Oswald Veblen en Geometría en 1996 y el premio Clay Research Award en 2003. Fue elegido para la Academia Nacional de las Ciencias de Estados Unidos en 1999 y la Academia de Artes y Ciencias Americana en 2003. También recibió en 2009 el premio AMS por su contribución a la investigación.

Cuando Perelmán rechazó el premio, argumentó que él cree que su contribución al probar la conjetura de Poincaré no era mayor que la contribución de Hamilton, quien sugirió por primera vez un programa para su resolución.

## 4.2. Geometría Riemanniana

La teoría que exponemos a continuación será de vital importancia para poder entender los aportes de Hamilton para la solución de la conjetura.

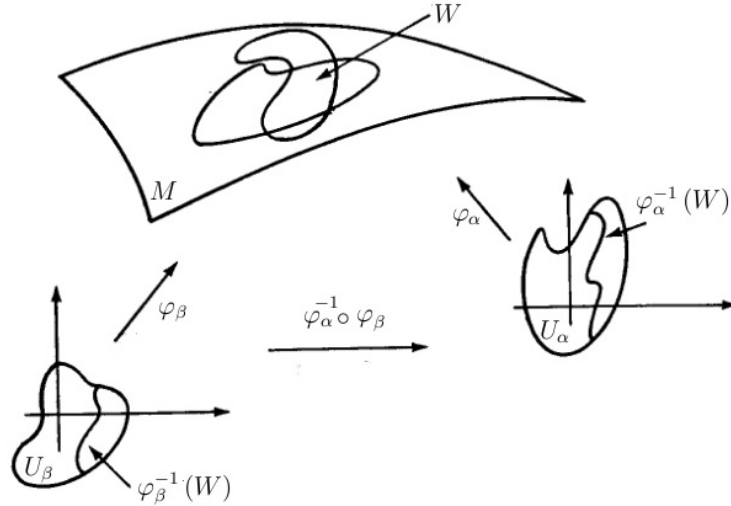
### 4.2.1. Variedades Diferenciables

**Definición 4.1.** Una *variedad diferenciable* de dimensión  $n$  es un conjunto  $M$  y una familia de aplicaciones biyectivas  $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abiertos  $U_\alpha$  en  $\mathbb{R}^n$  en  $M$  tales que:

- (1)  $\bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$ .
- (2) Para todo  $\alpha, \beta$ , con  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , los conjuntos  $\varphi_\alpha^{-1}(W)$  y  $\varphi_\beta^{-1}(W)$  son abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y las aplicaciones  $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$  diferenciables.
- (3) La familia  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  es máxima relativamente a las condiciones (1) y (2).

El par  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  (por defecto la aplicación  $\varphi_\alpha$ ) con  $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$  es llamada una *parametrización* (o sistema de coordenadas) de  $M$  en  $p$ , además  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  es llamada una *vecindad coordinada* en  $p$ . Una familia  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  satisfaciendo (1) y (2) es llamada *estructura diferenciable* en  $M$ .

La condición (3) aparece por razones puramente técnicas. En realidad, dada una estructura diferenciable en  $M$ , podemos completarla (maximizarla) agregándole todas las parametrizaciones que junto con alguna parametrización de la estructura satisface (2). Así, abusando un poco de la definición podríamos decir que una variedad diferenciable es un conjunto junto con una estructura diferenciable.



**Figura 4:** Tomada de Geometria Riemanniana, Manfredo Do Carmo [25].

Una estructura diferenciable en un conjunto  $M$  induce de una manera natural una topología en  $M$ , para esto basta definir que  $A \subset M$  es abierto de  $M$  si  $\varphi_\alpha^{-1}(A \cap \varphi_\alpha(U_\alpha))$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$  para todo  $\alpha$ . Observe que la topología es definida de forma que los conjuntos  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  son abiertos y las aplicaciones  $\varphi_\alpha$  son continuas.

**Ejemplo 4.2.** El espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^n$  es una variedad diferenciable.

Para demostrar la afirmación anterior se introduce una estructura diferenciable en  $\mathbb{R}P^n$ , para esto, sea  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y como  $\mathbb{R}P^n$  es el espacio cociente de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  por una relación de equivalencia  $((x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0)$ , así los puntos de  $\mathbb{R}P^n$  serán notados por  $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ , si  $x_i \neq 0$  tendremos:

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] = \left[ \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right].$$

Ahora definamos en  $\mathbb{R}P^n$  los subconjuntos  $V_1, \dots, V_{n+1}$ , dados por:

$$V_i = \{[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]; x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Geoméricamente,  $V_i$  es el conjunto de las rectas de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasan por el origen y no pertenecen al hiperplano  $x_i = 0$ , vamos a ver que podemos tomar los  $V_i$  como vecindades coordinadas, donde las coordenadas en  $V_i$  son:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, y_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}.$$

Para esto, se definen las aplicaciones  $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$  por

$$\varphi_i(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_1, \dots, y_n], \quad (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

y veremos que la familia  $\{(\mathbb{R}^n, \varphi_i)\}$  es una estructura diferenciable en  $\mathbb{R}P^n$ .

En efecto, cada aplicación  $\varphi_i$  es evidentemente biyectiva y  $\bigcup \varphi_i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}P^n$ , basta mostrar que  $\varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$  es diferenciable ahí, para  $j = 1, 2, \dots, n+1$ . Ahora, los puntos de  $\varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  son de la forma:

$$\{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_j \neq 0\}.$$

Entonces  $\varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$ , y suponiendo que  $i > j$  (el caso  $i < j$  es análogo),

$$\begin{aligned} \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \varphi_j^{-1}[y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_1, \dots, y_n] \\ &= \varphi_j^{-1}\left[\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right] \\ &= \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right) \end{aligned}$$

que resulta ser diferenciable.

En resumen, el espacio de las direcciones de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $\mathbb{R}P^n$ ) está cubierto por  $n+1$  vecindades coordenadas  $V_i$ , donde  $V_i$  está constituido por las direcciones de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que no está en el hiperplano  $x_i = 0$ . Es usual, en la terminología clásica, llamar a las coordenadas  $V_i$  “coordenadas no homogéneas” correspondientes a las “coordenadas homogéneas”  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Ahora introduciremos la idea de una aplicación diferenciable entre variedades:

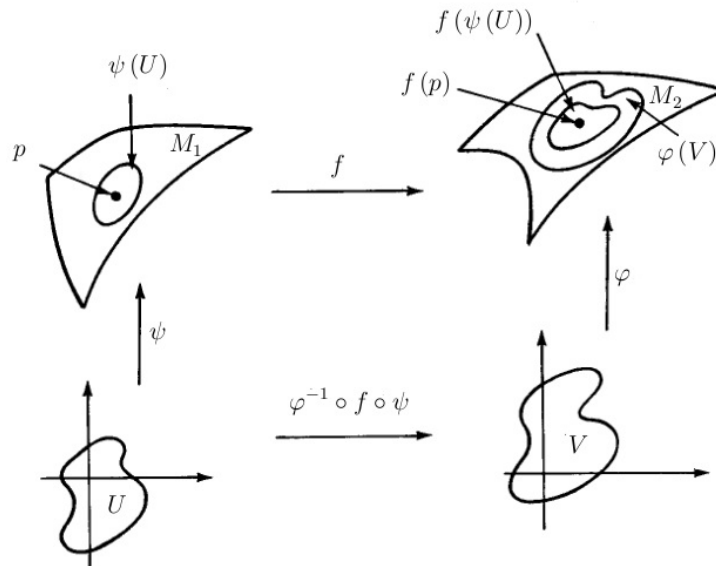
**Definición 4.3.** Sean  $M_1^n$  y  $M_2^m$  dos variedades diferenciables.

Una aplicación  $f : M_1 \rightarrow M_2$  es *diferenciable* en  $p \in M_1$  si dada una parametrización  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_2$  en  $f(p)$  existe una parametrización  $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$  en  $p$  tal que  $f(\psi(U)) \subset \varphi(V)$  y la aplicación:

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \tag{4.1}$$

es diferenciable en  $\psi^{-1}(p)$ .  $f$  es diferenciable en un abierto de  $M_1$  si es diferenciable en todos los puntos de este abierto.

Por la condición (2) de la definición de variedad diferenciable tenemos que  $f$  no depende de la elección de las parametrizaciones, la aplicación (Ecuación 4.1) es llamada la *expresión de  $f$  bajo las parametrizaciones  $\varphi$  y  $\psi$* .



**Figura 5:** Tomada de Geometria Riemanniana, Manfredo Do Carmo [25].

Además, un caso particular es  $M_2 = \mathbb{R}$ , que tiene una estructura de variedad diferenciable de forma natural, así el conjunto de todas las funciones con valores reales y diferenciables  $f : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  es denotado por  $C^\infty(M_1)$ .

Cuando dos variedades topológicas son equivalentes se les llama homeomorfos, la noción de equivalencia para variedades diferenciables es mas fuerte.

**Definición 4.4.** Dos variedades diferenciables  $M, N$  son *equivalentes* si existe una función diferenciable  $f : M \rightarrow N$  con inversa diferenciable. Si dicha función  $f$  existe la llamaremos *difeomorfismo* y diremos que  $M$  y  $N$  son *difeomorfas*.

### 4.2.2. Campos Vectoriales

Ahora que sabemos lo que es una variedad diferenciable  $M$ , veamos que es un vector tangente a dicha variedad  $M$  en un punto  $p \in M$ , es necesario utilizar las nociones que traemos de las superficies regulares de  $\mathbb{R}^3$ , en estas superficies un vector tangente en un punto  $p$  de una superficie, es definido como el “vector velocidad” en  $\mathbb{R}^3$  de una curva pasando por  $p$  en la superficie.

Daremos a continuación los elementos principales para definir lo que es un vector tangente en una variedad diferenciable. Sean  $p$  un punto en una variedad diferenciable  $M$  y  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una *curva diferenciable* de  $\mathbb{R}^n$ , con  $\alpha(0) = p$ . Escribimos:

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Entonces  $\alpha'(0) = (x'_1(0), x'_2(0), \dots, x'_n(0)) = v \in \mathbb{R}^n$ . Sea ahora  $f$  la función diferenciable definida en una vecindad de  $p$ , podemos restringir  $f$  a una curva  $\alpha$  y escribir la derivada direccional según el vector  $v \in \mathbb{R}^n$  como:

$$\left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t=0} = \left( \sum_i x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

Por lo tanto la derivada direccional según  $v$  es un operador que actúa sobre funciones diferenciables que depende únicamente de  $v$ , esta idea la utilizaremos para definir el vector tangente en variedades.

**Definición 4.5.** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una curva diferenciable en  $M$  tal que  $\alpha(0) = p \in M$ . El *vector tangente a la curva  $\alpha$*  en  $t = 0$  es la aplicación  $\alpha'(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\alpha'(0) f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(M).$$

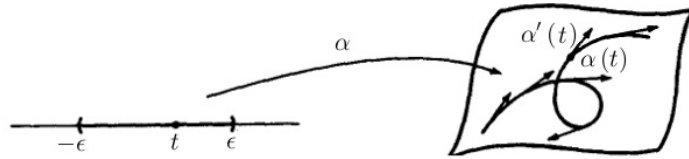
Por comodidad en la notación diremos que el *vector tangente* es una función  $\mathbb{R}$ -lineal  $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface la regla del producto:

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Donde estamos afirmando que  $X = \alpha'(0)$ , es decir:

$$X(f) = \left. \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \right|_{t=0}.$$

El conjunto de todos los vectores tangentes en  $p$  de una  $n$ -variedad  $M^n$  forman un espacio vectorial  $n$ -dimensional y es denotado por  $T_p M^n$ . Así mismo, indicaremos por  $\mathcal{X}(M)$  es el conjunto de los campos vectoriales de clase  $C^\infty$  en  $M$ .



**Figura 6:** Tomada de Geometria Riemanniana, Manfredo Do Carmo [25].

Si  $(x_i)$  es un sistema de coordenadas locales de  $p$  en una  $n$ -variedad  $M^n$ , entonces el conjunto de todas las derivaciones:

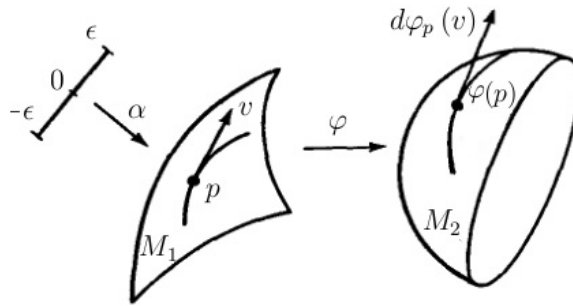
$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} ; i = 1, 2, 3, 4, \dots, n \right\}$$

forma una base para  $T_p M^n$ . Por comodidad notaremos por  $\partial_i$  en vez de  $\partial/\partial x_i$ . Así, para una  $n$ -variedad  $M^n$  el conjunto de los vectores tangentes en los puntos de  $M^n$  forma una  $2n$ -variedad conocida como *fibrado tangente* y notado por  $TM$ , en otras palabras:

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$$

Un campo vectorial  $X$  en una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia que a cada punto  $p \in M$  se asocia un vector  $X(p) \in T_p M$ . El campo es diferenciable si la aplicación  $X : M \rightarrow TM$  es diferenciable.

Ahora si tenemos  $M_1$  y  $M_2$  variedades diferenciables  $n$ -dimensionales y  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  una aplicación diferenciable, para cada  $p \in M_1$  y cada  $v \in T_p M_1$ , existe una curva diferenciable  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$  con  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$ , entonces la aplicación  $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$  dada por  $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$  es una aplicación lineal que no depende de la elección de  $\alpha$  y corresponde a la diferencial de  $\varphi$ .



**Figura 7:** Tomada de Geometria Riemanniana, Manfredo Do Carmo [25].

Además:

**Proposición 4.6.** Sea  $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^n$  una aplicación diferenciable y sea  $p \in M_1$  tal que  $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$  es un isomorfismo, entonces  $\varphi$  es un difeomorfismo local.

La demostración de esta proposición es inmediata del teorema de la función inversa en  $\mathbb{R}^n$ .

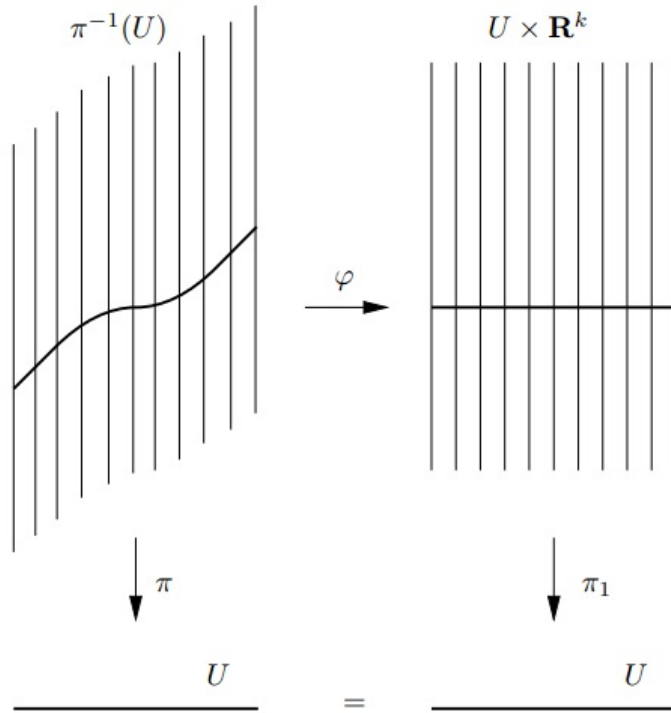
Ahora, dados dos campos vectoriales diferenciables  $X, Y$  en  $M$ , se puede formar el corchete de Lie  $[X, Y]$  definido así:

$$[X, Y]_p = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

El ejemplo de los vectores tangentes es un caso específico de una construcción de una variedad mas general conocida como *fibrado vectorial*. La idea es asociar un espacio vectorial a cada punto la variedad  $M$ , se pegan estos espacios para obtener uno nuevo, construyendo con esto una variedad de dimensión mayor.

**Definición 4.7.** Un fibrado vectorial  $k$ -dimensional es una variedad  $E$  (espacio total) junto con una variedad  $M$  (espacio base) y una aplicación sobreyectiva  $\pi : E \rightarrow M$  (proyección) tal que:

- i.* Para cada  $p \in M$ , el conjunto  $E_p := \pi^{-1}(p)$  (la fibra de  $E$  sobre  $p$ ) tiene una estructura de espacio vectorial  $k$ -dimensional.
- ii.* Para cada  $p \in M$ , existe una vecindad abierta  $U$  de  $p$  y un difeomorfismo suave  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ ,



llamado una trivialización local de  $E$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbf{R}^k \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\
 U & \xlongequal{\quad} & U
 \end{array}$$

Donde  $\pi_1$  es la proyección sobre el primer factor.

- iii.*  $\varphi$  restringido a cada fibra, es decir, cada fibra  $\varphi : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$ , es un isomorfismo lineal.

Una sección de  $E$  es una aplicación  $F : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ F = I_aM$ . El espacio de las secciones  $E$  es denotado por  $C^\infty(E)$ .

El fibrado tangente es un fibrado vectorial  $n$ -dimensional con espacio base  $M$  y aplicación proyección definida por:

$$\pi(X) = p \quad \text{si} \quad X \in T_pM$$

Un campo vectorial es una sección del fibrado tangente.

Otro ejemplo importante de fibrado vectorial es el fibrado cotangente (dual)  $T^*M$ .  $T_p^*M = (T_pM)^*$  corresponde a las funciones lineales que actúan en el espacio vectorial  $T_pM$  (los covectores o 1-formas en  $p$ ). Dado un sistema de coordenadas local  $(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  en  $p$  para una variedad  $M^n$ , el conjunto de covectores  $\{dx_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  (donde  $dx_i(X) := X(x_i)$ ) forman una base para  $T_p^*M^n$ .

**Definición 4.8.** Sea  $X$  un campo vectorial suave en  $M$ . Una curva suave  $\sigma$  en  $M$  es una *curva integral* en  $X$  si:

$$\sigma'(t) = X(\sigma(t)),$$

para cada  $t$  en el dominio de  $\sigma$ .

**Proposición 4.9.** Sea  $X$  un campo vectorial suave en una variedad diferenciable  $M$ . Para cada  $p \in M$  existen  $a(p)$  y  $b(p)$  en  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , y la curva diferenciable

$$\gamma_p : (a(p), b(p)) \rightarrow M$$

tal que:

- (a)  $0 \in (a(p), b(p))$  y  $\gamma_p(0) = p$ .
- (b)  $\gamma_p$  es una curva integral de  $X$ .
- (c) Si  $\mu : (c, d) \rightarrow M$  es una curva suave que satisface (a) y (b), entonces  $(c, d) \subset (a(p), b(p))$  y  $\mu = \gamma_p|_{(c, d)}$ .

**Definición 4.10.** Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , definimos la transformación  $X_t$  con dominio:

$$\mathcal{D}_t = \{p \in M : t \in (a(p), b(p))\}$$

estableciendo:

$$X_t(p) = \gamma_p(t).$$

- (d) Para cada  $p \in M$ , existe una vecindad abierta  $V$  de  $p$  y  $\varepsilon > 0$  tal que

$$(t, m) \mapsto X_t(m)$$

esta definida y es una aplicación  $C^\infty$  de  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$  en  $M$ .

- (e)  $\mathcal{D}_t$  es abierto para cada  $t$ .
- (f)  $\bigcup_{t>0} \mathcal{D}_t = M$ .
- (g)  $X_t : \mathcal{D}_t \rightarrow \mathcal{D}_{-t}$  es una difeomorfismo con inversa  $X_{-t}$ .
- (h) Dados  $s, t \in \mathbb{R}$ . Entonces el dominio de  $X_s \circ X_t$  esta contenido, pero generalmente no es igual a  $\mathcal{D}_{s+t}$ . Sin embargo, el dominio de  $X_s \circ X_t$  es  $\mathcal{D}_{s+t}$  en el caso en que  $s$  y  $t$  tienen el mismo signo.

### 4.2.3. Tensores y Métricas

Sea  $V$  un espacio vectorial finito dimensional,  $V^*$  denota el espacio dual a  $V$  (el espacio de *covectores*, o aplicaciones lineales reales en  $V$ ), para hablar de tensores debemos definir algunos operadores propios del álgebra de Lie.

**Definición 4.11.** Sea  $F(V, W)$  el *espacio vectorial libre* sobre  $\mathbb{R}$  cuyos generadores son los puntos de  $V \times W$ . Entonces  $F(V, W)$  consiste de todas las combinaciones lineales de parejas  $(v, w)$  con  $v \in V$  y  $w \in W$ . Sea  $R(V, W)$  un subespacio de  $F(V, W)$  generado por el conjunto de todos los elementos de  $F(V, W)$  de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} & (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ & (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ & (av, w) - a(v, w) \\ & (v, aw) - (a, vw) \end{aligned} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} & a \in \mathbb{R} \\ & v, v_1, v_2 \in V \\ & w, w_1, w_2 \in W \end{aligned}$$

El espacio cociente  $F(V, W)/R(V, W)$  es llamado el *producto tensorial* de  $V$  y  $W$  es denotado por  $V \otimes W$ . El cociente  $V \otimes W$  conteniendo el elemento  $(v, w)$  de  $F(V, W)$  que es denotado  $v \otimes w$ , así tendremos las siguientes propiedades:

1.  $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$
2.  $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$
3.  $a(v \otimes w) = av \otimes w = v \otimes aw$

Para un espacio vectorial finito,  $V$ , y su espacio dual  $V^*$ , comúnmente denotaremos el producto  $V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$  por cualquiera de las siguientes notaciones:

$$(\omega, X) \mapsto \langle \omega, X \rangle \quad \text{o} \quad (\omega, X) \mapsto \omega(X)$$

donde  $\omega \in V^*$ ,  $X \in V$ .

**Definición 4.12.** Sean  $V$  un espacio vectorial finito y  $V^*$  el espacio dual de  $V$ .

Un  $k$ -*tensor covariante* en  $V$  es una aplicación multilinear:

$$F : \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Análogamente, un  $l$ -tensor contravariante es la aplicación multilinear:

$$F : \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{l \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

En ocasiones necesitamos tensores de ambos tipos, un tensor del tipo  $(k, l)$ , también llamado *tensor  $k$ -covariante,  $l$ -contravariante*, es una aplicación multilinear:

$$F : \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{l \text{ copias}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Además podemos definir el espacio tensorial:

**Definición 4.13.** El *espacio tensorial*  $V_{r,s}$  de tipo  $(r, s)$  asociado con  $V$  es el espacio vectorial:

$$\underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ copias}} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s \text{ copias}}$$

la suma directa:

$$T(V) = \sum V_{r,s}$$

donde  $V_{0,0} = \mathbb{R}$ , es llamado el *álgebra tensorial* de  $V$ .

Los elementos de  $T(V)$  son combinaciones lineales finitas sobre  $\mathbb{R}$  de elementos de los diversos  $V_{r,s}$  y son llamados *tensores*.  $T(V)$  es no conmutativo, asociativo, álgebra graduada bajo el producto  $\otimes$ , donde si  $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_{r_1} \otimes u_1^* \otimes \cdots \otimes u_{s_1}^*$  que pertenece a  $V_{r_1,s_1}$  y  $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_2} \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_{s_2}^*$  pertenece a  $V_{r_2,s_2}$ , entonces su producto esta definido por:

$$u \otimes v = u_1 \otimes \cdots \otimes u_{r_1} \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_2} \otimes u_1^* \otimes \cdots \otimes u_{s_1}^* \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_{s_2}^*$$

y pertenece a  $V_{r_1+r_2,s_1+s_2}$ . Los tensores, en particular los espacios tensoriales  $V_{r,s}$  son llamados *homogéneos de grado  $(r, s)$* . Un tensor homogéneo de grado  $(r, s)$  es llamado *descomponible* si puede ser escrito de la forma:

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^*$$

donde  $v_i \in V$  ( $i = 1, \dots, r$ ) y  $v_j^* \in V^*$  ( $j = 1, \dots, s$ ).

De esta forma podemos formar el producto tensorial de fibrados vectoriales, haciendo  $T$  producto tensorial sobre espacios vectoriales. un  $(k, l)$ -campo tensorial como una sección de

$$T_l^k(M) = \underbrace{TM \otimes TM \otimes \cdots \otimes TM}_k \otimes \underbrace{T^*M \otimes T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_l$$

Dado un sistema local de coordenadas  $(x_i)$  en  $p \in M$ , podemos expresar el  $(k, l)$  tensor  $F$  en el sistema de coordenadas así:

$$F = F_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_l}(p) \partial_{j_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_k}. \quad (4.2)$$

En esta ecuación sumamos cada índice  $j_p, i_q$  dos veces, una vez con el índice superior y la otra con el índice inferior, esto es conocido como la “convención de la adición de Einstein”, casi siempre utilizaremos este sistema de representación de coordenadas del tensor porque hace más fácil los cálculos y escribiremos  $F_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_l}$  cuando hablemos de  $F$ .

**Definición 4.14.** Dada una aplicación entre variedades  $\phi : M \rightarrow N$ , definimos la aplicación diferenciable de  $\phi$  entre los espacios tangentes correspondientes,  $\phi_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  por:

$$(\phi_* V)(f) = V(f \circ \phi)$$

Definiendo  $\phi_*(A \otimes B) := \phi_*(A) \phi_*(B)$ , podemos extender esta definición aplicando todos los  $(0, k)$ -tensores.

De forma similar definimos la aplicación entre los espacios cotangentes,  $\phi^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$  por:

$$(\phi^* W)(V) = w(\phi_* V),$$

para  $V \in T_p M$ ,  $w \in T_{f(p)}^* N$ .

Por un método similar podemos extender  $\phi^*$  aplicando todos los  $(k, l)$  tensores. Dado el tensor  $F_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_l} \in T_l^k(M)$  podemos tomar la traza sobre un índice superior y uno inferior como sigue:

$$(tr F)_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_l} = F_{p i_2 \dots i_k}^{p j_2 \dots j_l},$$

para tener un elemento de  $T_{l-1}^{k-1}(M)$ .

Note el uso de la convención de sumas de Einstein: se suma sobre  $p$ . Evidentemente la traza depende de aquellos índices que se escogen para la traza (aquí se ha calculado la traza sobre  $j_1$  e  $i_1$ ), pero no es obvio que el tensor resultante no depende del sistema local de coordenadas en el que se está trabajando.

Una clase muy especial de tensores, que juega un rol fundamental en la geometría diferencial son los *tensores alternantes*: los que cambia de signo cuando se intercambian dos argumentos. Sea  $\Lambda^k(V)$  que denota el *espacio de  $k$ -tensores covariantes*

*alternantes en  $V$* , también llamado  *$k$ -covectores* o  *$k$ -formas (exteriores)*. Este es un producto bilinear, asociativo en  $n$ -formas llamado *producto wedge* o *exterior*, que se define para las 1-formas  $\omega^1, \dots, \omega^k$  así:

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k (X_1, \dots, X_k) = \det \left( \langle \omega^i, X_j \rangle \right),$$

y extendiéndolo por linealidad.

Una  $k$ -forma en  $M$  es una sección de  $\Lambda^k T^*M$ , es decir, un  $(k, 0)$ -campo tensorial que es completamente antisimétrico en todos sus índices, un campo vectorial  $k$ -dimensional en  $M$  es una sección de  $\Lambda^k TM$ .

**Definición 4.15.** Para un  $(2, 0)$  tensor  $A$  escribimos  $A > 0$  si

$$A(V, V) > 0,$$

O podemos escribir  $A \geq 0$  si

$$A(V, V) \geq 0,$$

para todo  $V \in TM$ ,  $V \neq 0$ . Podemos escribir  $A > B$  o  $A \geq B$  si  $A - B > 0$  o  $A - B \geq 0$  respectivamente.

**Definición 4.16.** Una *métrica riemanniana* sobre una variedad diferenciable  $M$  es un producto interno que varía suavemente sobre el espacio tangente a cada punto de  $M$ , es decir, un  $(2, 0)$ -campo tensorial que es simétrico y definido positivo en cada punto de  $M$ . Usualmente denotamos por  $g$  la métrica riemanniana, y  $g_{ij}$  para su representación en coordenadas. Dada una métrica  $g$ , esta induce una norma en cada  $T_p M$  de la siguiente forma:

$$|X|_g := \sqrt{g(X, X)} \tag{4.3}$$

para  $X \in T_p M$ . Una variedad con una métrica riemanniana  $(M, g)$ , es llamada variedad riemanniana. A veces por comodidad en las operaciones la métrica se denota por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ , para esto se supone que ya está clara cuál es la métrica  $g$  con que se está trabajando.

Cuando solo tenemos una métrica en consideración, usualmente omitimos la  $g$  en la Ecuación 4.3, pero normalmente usaremos la notación  $\langle X, Y \rangle$  para  $g(X, Y)$ . Note que una métrica riemanniana no es realmente una métrica, aunque normalmente diremos métrica en lugar de métrica riemanniana por abreviar. De hecho, cualquier métrica Riemanniana  $g$  en una variedad  $M$  induce una buena métrica en  $M$ , como veremos a continuación:

**Definición 4.17.** Dada una métrica riemanniana  $g$  podemos definir la longitud  $C^1$  de la curva a trozos  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  por:

$$l(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

donde  $\gamma'(t) := d\gamma/dt$ .

Esto nos permite definir una métrica  $d$  en  $M$  inducida por la métrica  $g$ :

$$d(p, q) := \inf \left\{ l(\gamma) : \gamma \text{ es una curva a trozos } C^1 \text{ en } M \text{ a partir de } p \text{ y terminando en } q \right\}$$

Una vez definida una "buena" métrica en  $M$ , podemos definir lo que es una bola de la siguiente forma: sean  $p \in M$  y  $r > 0$ , entonces:

$$B(p, r) := \{q \in M : d(p, q) < r\}$$

donde  $d$  es la métrica inducida por  $g$ .

Finalmente, se dice que una aplicación:  $\phi : M \rightarrow N$  entre las variedades riemannianas  $(M, g)$  y  $(N, h)$  es una *isometría* si es un difeomorfismo y  $\phi^*h = g$ . En este caso se dice que las dos variedades de riemanniana son *isométricas*.

Además, dada la métrica  $g_{ij}$ , que es una matriz definida positiva y simétrica en cada  $p \in M$ , definimos la métrica inversa  $g^{ij}$  como la matriz inversa en cada punto, satisface  $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$ , donde  $\delta_k^i$  es la delta de Kronecker. En particular:

$$F_{ipq}^{jk} := g_{im} F_{pq}^{mjk}.$$

#### 4.2.4. Conexiones

Podemos diferenciar funciones escalares en una variedad  $M$  sin tener mayor problema, buscar la tasa de cambio de la función  $f$  en la dirección del vector tangente  $X$ , simplemente calculamos  $X(f)$ . Ahora buscamos diferenciar campos vectoriales, o una sección  $Y$  de un fibrado vectorial arbitrario, en la dirección de un vector tangente  $X$  previamente dado.

Vamos a definir una *conexión* por primera vez como una manera de diferenciar secciones de fibrados vectoriales, pero se puede adaptar la definición para el caso de campos vectoriales a lo largo de curvas.

**Definición 4.18.** Sea  $E$  un fibrado vectorial sobre  $M$ , una *conexión afín* en  $E$  es una aplicación:

$$\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(E)$$

la cual es denotada por  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ , y cumple las siguientes propiedades:

i.)  $\nabla_X Y$  es lineal sobre  $C^\infty(M)$  en  $X$ :

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \text{ con } f, g \in C^\infty(M);$$

ii.)  $\nabla_X Y$  es lineal sobre  $\mathbb{R}$  en  $Y$ :

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \text{ con } a, b \in \mathbb{R};$$

iii.)  $\nabla$  satisface la regla del producto:

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \text{ con } f \in C^\infty(M).$$

Esta definición no es tan clara como la de estructura riemanniana. La siguiente proposición tratará de clarificar un poco esto:

**Proposición 4.19.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$  otro campo vectorial  $\frac{DV}{dt}$  a lo largo de  $c$ , denominado derivada covariante de  $V$  a lo largo de la curva  $c$ , tal que:*

a)  $\frac{D}{dt} (V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ .

b)  $\frac{D}{dt} (fV) = \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt}$ .

Donde  $W$  es un campo de vectores a lo largo de  $c$  y  $f$  es una función diferenciable en  $I$ .

c) Si  $V$  es inducido por un campo de vectores  $Y \in \mathcal{X}(M)$ , es decir,  $V(t) = Y(c(t))$ , entonces  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$ .

El numeral c) tiene sentido, pues  $\nabla_X Y(p)$  depende solo del valor de  $X(p)$  y del valor de  $Y$  a lo largo de una curva tangente a  $X$  en  $p$ . La parte iii) de la definición de conexión es de hecho una noción local. Escogiendo un sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  en torno a  $p$  escribiendo:

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j X_j$$

donde  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , tendremos:

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left( \sum_j y_j X_j \right) = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i (y_j) X_j.$$

Haciendo  $\nabla_{X_i} Y = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ , concluimos que  $\Gamma_{ij}^k$  son funciones diferenciables y que:

$$\nabla_X Y = \sum_k \left( \sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

lo que muestra que  $\nabla_X Y(p)$  depende de  $x_i(p)$ ,  $y_k(p)$  y de las derivadas  $X(y_k)(p)$  de  $y_k$  siguiendo  $X$ .

Así, una conexión en un fibrado vectorial  $\varepsilon$  está completamente determinada por los llamados *símbolos de Christoffel*  $\Gamma_{ij}^k$  en un sistema de coordenadas locales  $(x^i)$  con una base local  $(E_j)$  para  $\varepsilon$ , definida por:

$$\nabla_{\partial_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k.$$

La proposición anterior muestra que la elección de una conexión en  $M$  da origen a una derivada de campos vectoriales a lo largo de curvas. Por lo tanto la noción de conexión proporciona una forma de derivar vectores a lo largo de curvas, así, es posible hablar de la aceleración de una curva en  $M$ . Ahora veamos la demostración de dicha proposición:

*Demostración.* Probaremos primero la unicidad de dicho campo, supongamos que a), b) y c) se cumplen. Sea  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  un sistema de coordenadas con  $c(I) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$  y sea  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  una expresión local de  $c(t)$ ,  $t \in I$ . Sea  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , entonces podemos expresar el campo  $V$  localmente como  $Y = \sum_j v^j X_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , donde  $v^j = v^j(t)$  y  $X_j = X_j(c(t))$ .

Por a) y b) se tiene:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Por c) y i) de la definición de conexión:

$$\begin{aligned} \frac{DX_j}{dt} &= \nabla_{dc/dt} X_j = \nabla \left( \sum \frac{dx_i}{dt} X_i \right) X_j \\ \frac{DX_j}{dt} &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j. \quad (4.4)$$

La Ecuación 4.4 nos muestra que si existe una correspondencia que satisface las condiciones dadas, entonces tal correspondencia es única.

Para demostrar la existencia, definamos  $\frac{DV}{dt}$  en  $\mathbf{x}(U)$  como en Ecuación 4.4. Es inmediato verificar que Ecuación 4.4 cumple las condiciones deseadas. Si  $\mathbf{y}(W)$  es otra vecindad coordinada, con  $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$  y definimos  $\frac{DV}{dt}$  en  $\mathbf{y}(W)$  por Ecuación 4.4, las definiciones concuerdan en  $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U)$  por la unicidad de  $\frac{DV}{dt}$  en  $\mathbf{x}(U)$ . Se sigue de la definición que puede ser extendida a todo  $M$ , y con esto concluye la demostración.  $\square$

Ahora, la noción de paralelismo surge de manera natural.

**Definición 4.20.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Una campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva  $c : I \rightarrow M$  es llamado *paralelo* cuando  $\frac{DV}{dt} = 0$ , para todo  $t \in I$ .

Ahora, como caso especial de conexiones podemos considerar las conexiones en las fibras  $T_t^k(M)$ .

**Proposición 4.21.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Sea  $c : I \rightarrow M$  una curva diferenciable en  $M$  y  $V_0$  un vector tangente a  $M$  en  $c(t_0)$ ,  $t_0 \in I$  (es decir,  $V_0 \in T_{c(t_0)}M$ ).

**Proposición 4.22.** Sea  $\nabla$  una conexión afín en el fibrado tangente  $TM$ , podemos definir conexiones en todos los fibrados tensoriales  $T_t^k(M)$  (también denotado  $\nabla$ ) que satisface:

- i)  $\nabla$  es la misma conexión dada en  $TM$ .
- ii) Para una función escalar  $f$ ,  $\nabla_X f = X(f)$ .
- iii)  $\nabla_X (F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$ .
- iv)  $\nabla_X$  conmuta con todas las trazas:

$$\nabla_X (\text{tr}Y) = \text{tr} (\nabla_X Y)$$

para todas las trazas del tensor  $Y$ .

Si  $F$  es un  $(k, l)$ -campo tensorial en  $M$  que es determinado por las coordenadas locales (Ecuación 4.2), escribiremos la forma coordenada de la derivada covariante  $\nabla F$  así:

$$(\nabla_X F) := \left( \nabla_p F_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_l} \right) \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k} X^p.$$

Podemos escribir bajo la forma coordenada  $\nabla$  explícitamente:

$$\nabla_p F_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_l} = \partial_p F_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_l} + \sum_{s=1}^l F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots q \dots j_l} \Gamma_{pq}^{j_s} - \sum_{s=1}^k F_{i_1 \dots q \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \Gamma_{p i_s}^q. \quad (4.5)$$

Aunque hay muchas conexiones posibles en el fibrado tangente  $TM$ , si  $M$  esta equipado con la métrica riemanniana hay uno que tiene un significado geométrico. Pero antes de esto debemos tener claros nuevos elementos para este tipo de conexión.

**Definición 4.23.** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$  y una métrica Riemanniana  $\langle , \rangle$ . La conexión es *compatible con la métrica*  $\langle , \rangle$ , cuando para toda curva diferenciable  $c$  y cualesquier par de campos vectoriales paralelos  $P$  y  $P'$  a lo largo de  $c$ , tenemos que  $\langle P, P' \rangle$  es una constante.

Así, con la siguiente proposición veremos que si  $\nabla$  es compatible con la métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , entonces podemos diferenciar el producto interno por la regla del producto, es decir:

**Proposición 4.24.** *Sea  $M$  una variedad Riemanniana. Una conexión  $\nabla$  en  $M$  es compatible con la métrica si y solo si para todo par  $V, W$  de campos de vectores a lo largo de la curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$  se tiene:*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

*Demostración.* La primera implicación es directa a partir de la definición de compatibilidad. Veamos la recíproca, escogamos una base ortonormal  $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$  de  $T_{c(t_0)}M$ , para  $t_0 \in I$ , donde  $c : I \rightarrow M$ . Utilizando la proposición 4.21 extendemos paralelamente cada uno de los vectores  $P_i(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$  a lo largo de  $c$ . Como  $\nabla$  es compatible con la métrica,  $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$  es una base ortonormal de  $T_{c(t)}M$ , para todo  $t \in I$ . Así, podemos escribir:

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_i w^i P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde  $v^i$  y  $w^i$  son funciones diferenciables en  $I$ . De ahí se sigue que:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

Por lo tanto:

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i v^i w^i \right\} = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle.$$

□

**Corolario 4.25.** *Una conexión  $\nabla$  en una variedad Riemanniana es compatible con la métrica si y solo si:*

$$X \langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle, \quad X, Y, Z \in C^\infty(M).$$

*Demostración.* Supongamos que  $\nabla$  es compatible con la métrica. Sea  $p \in M$  y sea  $c : I \rightarrow M$  una curva diferenciable con  $c(t_0) = p$ ,  $t_0 \in I$ , y con  $\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_0} = X(p)$ . Entonces:

$$X(p) \langle Y, Z \rangle = \left. \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle \right|_{t=t_0} = \left\langle \nabla_{X(p)} Y, Z \right\rangle_p + \left\langle Y, \nabla_{X(p)} Z \right\rangle_p.$$

Como  $p$  es arbitrario, se sigue el resultado. La recíproca es inmediata del resultado anterior. □

**Definición 4.26.** Una conexión  $\nabla$  en  $M$  se llama *simétrica* cuando:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todo } X, Y \in C^\infty(M).$$

Así podemos hablar de la *Conexión de Levi-Civita* de la métrica  $g$ , que satisface lo siguiente:

**Teorema 4.27.** *Dada una variedad Riemanniana  $M$ , existe una única conexión afín  $\nabla$  en  $M$  que satisface las condiciones:*

- a)  $\nabla$  es simétrica.
- b)  $\nabla$  es compatible con la métrica Riemanniana.

*Demostración.* Supongamos inicialmente la existencia de  $\nabla$ . Entonces:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle,$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

Sumando las dos primeras y restando de ellas la tercera, y usando la simetría de  $\nabla$  tendremos:

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

Por lo tanto:

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}. \quad (4.6)$$

La Ecuación 4.6 demuestra que  $\nabla$  está únicamente determinado por la métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Por lo tanto, de existir debe ser única.

Para demostrar la existencia se define  $\nabla$  como Ecuación 4.6. Es fácil ver que  $\nabla$  está bien definida, y además cumple las propiedades de conexión.  $\square$

Es conveniente decir que las funciones  $\Gamma_{ij}^k$  definidas en  $U$  por  $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$  son los coeficientes de la conexión en  $U$ , o los *símbolos de Christoffel* de la conexión. De Ecuación 4.6 se sigue que:

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}$$

donde recordamos que  $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ .

Como la matriz  $(g_{km})$  admite una inversa  $(g^{km})$ , tendremos:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{lm}.$$

Ahora necesitamos definir un elemento fundamental de la geometría diferencial, que es el siguiente:

**Definición 4.28.** Una curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  es una *geodésica* en  $t_0 \in I$  si  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$  en el punto  $t_0$ ; si  $\gamma$  es geodésica en  $t$ , para todo  $t \in I$ , decimos que  $\gamma$  es una *geodésica*. Si  $[a, b] \subset I$  y  $\gamma : I \rightarrow M$  es una geodésica, entonces la restricción de  $\gamma$  a  $[a, b]$  es llamada *geodésica ligando* a  $\gamma(a)$  y  $\gamma(b)$ .

A veces, por abuso de lenguaje diremos la imagen de  $\gamma(I)$  sera la geodésica, cuando la geodésica es  $\gamma$ . Si  $\gamma : I \rightarrow M$  es una geodésica, entonces:

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

esto es, la longitud del vector tangente  $\frac{d\gamma}{dt}$  es constante. Suponemos de ahora en adelante, que  $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = c \neq 0$ , esto es, excluirémos las geodésicas que se reducen a puntos.

Dado un punto inicial y una velocidad  $v$  de  $TM$  existe una geodésica pasando por  $p$  con velocidad inicial  $v$ . Si  $M$  es *completa*, las geodésicas existen para todo valor del dominio.

**Proposición 4.29.** Dado  $p \in M$ , existe un abierto  $V \subset M$ ,  $p \in V$ , números  $\delta > 0$  y  $\varepsilon_1 > 0$  y una aplicación  $C^\infty$ :

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M \quad \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon_1\},$$

tales que la curva  $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$ ,  $t \in (-\delta, \delta)$ , es la única geodésica de  $M$  que en el instante  $t = 0$  pasa por  $q$  con velocidad  $v$ , para cada  $q \in V$  y cada  $v \in T_q M$  con  $|v| < \varepsilon_1$ .

**Definición 4.30.** Sea  $M$  una variedad diferenciable completa, sin fronteras. Dado  $v \in T_p M$ , sea  $\gamma_v : I \rightarrow M$  la única geodésica en  $M$  que inicia en  $p$  ( $\gamma_v(0) = p$ ) y  $\gamma_v'(0) = v$ . Definimos la aplicación exponencial  $\exp : TM \rightarrow M$  por  $\exp(v) = \gamma_v(1)$ . Denotamos por  $\exp_p$  la aplicación exponencial restringida a  $T_p M$ . La aplicación exponencial es diferenciable.

**Proposición 4.31.** Dado  $q \in M$ , existe una  $\varepsilon > 0$  tal que  $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$  es un difeomorfismo de  $B_\varepsilon(0)$  sobre un abierto de  $M$ .

*Demostración.* Calculemos  $d(\exp_q)_0$ :

$$d(\exp_q)_0(v) = \frac{d}{dt}(\exp_q(tv)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v)) \Big|_{t=0} = v$$

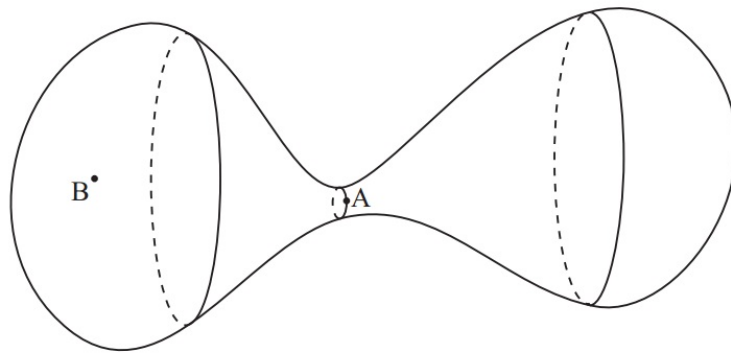
Luego  $d(\exp_q)_0$  es la identidad de  $T_qM$ , donde por el teorema de la función inversa,  $\exp_q$  es un difeomorfismo local en una vecindad de 0.  $\square$

**Definición 4.32.** El radio de inyectividad  $inj(p)$  en  $p \in M$  es definida por:

$$inj(p) := \sup \{ r > 0 \mid \exp_p : B(0; r) \rightarrow M \text{ es inyectiva} \}$$

El radio de inyectividad de la variedad  $M$  con métrica  $g$  es definida por:

$$inj(M, g) := \inf \{ inj(p) : p \in M \}.$$



**Figura 8:** Tomada de *Riemannian Manifolds*, Lee [15].

El radio de inyectividad en  $A$  es pequeño y en  $B$  es grande. El radio de inyectividad es crucial en el estudio de convergencia de variedades y muy útil en la construcción de la demostración de la conjetura generalizada de Poincaré.

**Definición 4.33.** Una variedad riemanniana  $M$  es *completa* si para todo  $p \in M$ , la aplicación exponencial  $\exp_p$  está definida para todo  $v \in T_pM$ , es decir, si las geodésicas  $\gamma(t)$  que parten de  $p$  están definidas para todos los valores de  $t \in \mathbb{R}$ .

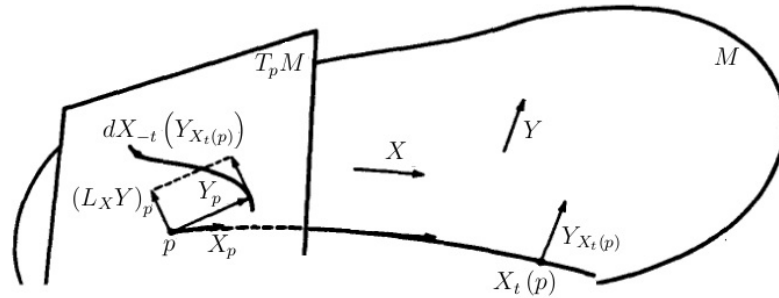
Esta definición suele coincidir con la idea de espacio completo, es decir que una variedad riemanniana es completa si toda sucesión de Cauchy converge.

### 4.2.5. Derivada de Lie

Los campos tensoriales y las formas diferenciales pueden ser diferenciadas (derivadas) con respecto a un campo vectorial, la derivada resultante es conocida como la *derivada de Lie* y se define a continuación.

Sea  $X$  un campo vectorial suave en una variedad  $M$ , sea  $X_t$  el flujo (curvas para las cuales  $X$  es un campo tangente), sea  $Y$  otro campo vectorial suave en  $M$ , podemos definir la derivada de  $Y$  con respecto a  $X$  en un punto  $p \in M$ . Primero seguimos la curva integral de  $X$  a través de  $p$  hasta el punto  $X_t(p)$  y evaluamos  $Y$  ahí. Ahora “devolvemos”  $Y_{X_t(p)}$  a  $T_pM$  mediante la diferencial  $dX_{-t}$  del difeomorfismo  $X_{-t}$  (es decir, se recorre en sentido contrario, para esto ver figura). En  $T_pM$  tomamos la diferencial entre los vectores  $dX_{-t}(Y_{X_t(p)})$  y  $Y_p$ , dividimos dicha diferencia entre  $t$ , y tomamos el límite cuando  $t \rightarrow 0$ . El vector resultante es un vector en  $T_pM$  que es llamado *derivada de Lie* de  $Y$  con respecto a  $X$  en  $p$ , que se denota por  $(L_X Y)_p$ , y según lo dicho corresponde a:

$$(L_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dX_{-t}(Y_{X_t(p)}) - Y_p}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (dX_{-t}(Y_{X_t(p)})).$$



**Figura 9:** Tomada de *Foundations of differentiable Manifolds and Lie groups*, Warner [7].

Así, la derivada de Lie satisface las siguientes propiedades:

- Para una función escalar  $f$ ,  $L_X f = X(f)$ .
- Si  $Y$  es un espacio vectorial entonces  $L_X Y = [X, Y]$ .
- $L_X (F \otimes G) = (L_X F) \otimes G + F \otimes (L_X G)$ .

Que se obtienen de la definición presentada anteriormente.

**Proposición 4.34.** En una variedad riemanniana  $(M, g)$ , tenemos:

$$(L_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$$

donde  $\nabla$  denota la conexión Levi-Civita de la métrica  $g$ , para algún campo vectorial  $X$ .

## 4.2.6. Curvatura

Algo importante es notar que la curvatura de una variedad riemanniana indica cuanto se aleja una variedad riemanniana de ser una euclidiana, así, veremos que la definición e interpretación de curvatura generaliza la noción de curvatura Gaussiana en superficies, este concepto fue introducido por Riemann.

**Definición 4.35.** La *curvatura*  $R$  de una variedad riemanniana  $M$  es una correspondencia que asigna a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  una aplicación  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  dada por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

donde  $\nabla$  es la conexión riemanniana de  $M$ .

Observemos que si  $M = \mathbb{R}^n$ , entonces  $R(X, Y)Z = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ . Ahora, otra forma de ver la definición anterior es considerar un sistema de coordenadas  $\{x_i\}$  en torno al punto  $p \in M$ . Como  $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ , obtenemos:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

esto es, la curvatura mide cuanto la derivada covariante no es conmutativa.

**Proposición 4.36.** *El operador curvatura  $R$  de una variedad riemanniana tiene las siguientes propiedades:*

i)  $R$  es bilinear en  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ , es decir,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

donde  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$ .

ii) Para todo par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , el operador curvatura  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  es lineal, es decir:

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

donde  $f \in C^\infty(M)$ ,  $Z, W \in \mathcal{X}(M)$ .

Ahora presentaremos un resultado importantísimo, conocido como la *identidad de Bianchi*.

**Proposición 4.37.**  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ .

*Demostración.* Por la simetría de la conexión Riemanniana tenemos:

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z \\
&+ \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y, Z]}X + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]}Y \\
&= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] - \nabla_{[Z, X]}Y - \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_{[Y, Z]}X \\
&= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] = 0
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene gracias a la identidad de Jacobi en campos de Vectores.  $\square$

Ahora, por conveniencia de notación diremos que  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$ .

**Proposición 4.38.** *i)*  $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$

*ii)*  $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$

*iii)*  $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$

*iv)*  $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$

*Demostración.* *i)* Es la identidad de Bianchi.

*ii)* Se sigue de la definición de curvatura.

*iii)* Es equivalente a  $(X, Y, Z, Z) = 0$ , que probaremos así:

$$(X, Y, Z, T) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z, Z \rangle.$$

Como

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle = Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle,$$

y

$$\langle \nabla_{[X, Y]}Z, Z \rangle = \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
(X, Y, Z, T) &= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\
&= \frac{1}{2} Y (X \langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2} X (Y \langle Z, Z \rangle) + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\
&= -\frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle = 0,
\end{aligned}$$

que muestra el resultado buscado.

iv) Para esta utilizaremos  $i$ ), así:

$$\begin{aligned}(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) &= 0, \\(Y, Z, T, X) + (Z, T, Y, X) + (T, Y, Z, X) &= 0, \\(Z, T, X, Y) + (T, X, Z, Y) + (X, Z, T, Y) &= 0, \\(T, X, Y, Z) + (X, Y, T, Z) + (Y, T, X, Z) &= 0.\end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones tendremos:

$$2(Z, X, Y, T) + 2(Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$$

y, por lo tanto:

$$(Z, X, Y, T) = (Y, T, Z, X).$$

□

Es conveniente escribir los resultados anteriores en un sistema de coordenadas  $(U, \mathbf{x})$  en torno al punto  $p \in M$ . Como de costumbre  $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$ , así:

$$R(X_i, X_j) X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l,$$

Entonces  $R_{ijk}^l$  son las componentes de la curvatura  $R$  en  $(U, \mathbf{x})$ . Si  $X = \sum_i u^i X_i$ ,  $Y = \sum_j v^j X_j$ ,  $Z = \sum_k w^k X_k$ , obtenemos por la linealidad de  $R$ :

$$R(X, Y) Z = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^l u^i v^j w^k X_l. \quad (4.7)$$

Para que expresemos  $R_{ijk}^l$  en términos de los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  de la conexión Riemanniana, escribimos:

$$R(X_i, X_j) X_k = \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k = \nabla_{X_j} \left( \sum_l \Gamma_{ik}^l X_l \right) - \nabla_{X_i} \left( \sum_l \Gamma_{jk}^l X_l \right),$$

o que, por el cálculo directo sería:

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s \quad (4.8)$$

Entonces:

$$\langle R(X_i, X_j) X_k, X_s \rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijks},$$

por lo tanto las identidades de la proposición anterior serán:

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0$$

$$R_{ijks} = -R_{jik s}$$

$$R_{ijks} = -R_{ijsk}$$

$$R_{ijks} = -R_{ksij}.$$

### 4.2.7. Curvatura Seccional, de Ricci y Escalar

Íntimamente relacionado con la curvatura se encuentra la curvatura seccional (o riemanniana), que vamos a definir, pero para comenzar tenemos que utilizar una notación. Dado un espacio vectorial  $V$  definimos  $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$  que representa el área del paralelogramo bidimensional determinado por los vectores  $x, y \in V$ .

**Proposición 4.39.** *Sea  $\sigma \subset T_p M$  un subespacio bidimensional del espacio tangente  $T_p M$  y sean  $x, y \in \sigma$  dos vectores linealmente independientes. Entonces:*

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

que no depende de la elección de  $x, y \in \sigma$ .

**Definición 4.40.** Dado un punto  $p \in M$  y un espacio bidimensional  $\sigma \subset T_p M$  el número real  $K(x, y) = K(\sigma)$ , donde  $\{x, y\}$  es una base cualquiera de  $\sigma$ , es llamado *curvatura seccional de  $\sigma$  en  $p$* .

Además del hecho que la curvatura tiene interesantes interpretaciones geométricas, su importancia proviene del hecho que el conocimiento de  $K(\sigma)$ , para todo  $\sigma$ , determina completamente la curvatura de  $R$ , con lo que el cálculo de  $R$  será puramente algebraico, similar a la situación en la geometría diferencial.

Ahora, algunas combinaciones de las curvaturas seccionales aparecen con tanta frecuencia que ellas merecen nombres especiales.

Sea  $x = z_n$  un vector unitario en  $T_p M$ , tomemos una base ortonormal  $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$  del hiperplano  $T_p M$  ortogonal a  $x$  y consideramos las siguientes medias:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i) x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j) z_i, z_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Vamos a ver que las expresiones anteriores no dependen de la elección de las bases ortonormales, ellas son llamadas *curvatura de Ricci* y *curvatura escalar* (o media) en  $p$ , respectivamente.

Para probar la independencia de la base elegida, observemos una expresión mas intrínseca de la expresión de arriba, por esto, vamos a definir una forma bilinear en  $T_p M$  como sigue: sean  $x, y \in T_p M$  y digamos:

$$Q(x, y) \text{ es la traza de la aplicación } z \mapsto R(x, z) y.$$

$Q$  es bilinear, y eligiendo una base ortonormal  $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$  para  $T_p M$  tenemos:

$$Q(x, y) = \sum_i \langle R(x, z_i) y, z_i \rangle = \sum_i \langle R(y, z_i) x, z_i \rangle = Q(y, x),$$

esto es,  $Q$  es simétrica y  $Q(x, x) = (n-1) Ric_p(x)$ ; esto demuestra que  $Ric_p(x)$  esta intrínsecamente definida. Por otro lado, la forma bilinear  $Q$  en  $T_p M$  corresponde a una aplicación lineal auto-adjunta  $K$ , dada por:

$$\langle K(x), y \rangle = Q(x, y).$$

Tomando una base ortonormal  $\{z_1, \dots, z_n\}$ , tenemos:

$$\text{trazo de } K = \sum_j \langle K(z_j), z_j \rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) = (n-1) \sum_j Ric_p(z_j) = n(n-1) K(p),$$

que demuestra lo que habíamos afirmado.

La forma bilinear  $\frac{1}{n-1}Q$  es llamada *el tensor de Ricci*. Es apropiado para expresar lo que se ha hecho en un sistema de coordenadas  $(x_i)$ . Sea  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$ , y  $g^{ij}$  la matriz inversa de  $g_{ij}$  (es decir,  $\sum_k g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l$ ). Entonces los coeficientes de la forma bilinear  $\frac{1}{n-1}Q$  en la base  $\{X_i\}$  son dados por:

$$\frac{1}{n-1} R_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum_j R_{ij}^j{}_k = \frac{1}{n-1} \sum_{sj} R_{ijks} g^{sj}.$$

Observe ahora que si  $A : T_p M \rightarrow T_p M$  es una aplicación lineal auto-adjunta y  $B : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilinear asociada, es decir,  $B(X, Y) = \langle A(X), Y \rangle$ , entonces la traza  $A = \sum_{ik} B(X_i, X_k) g^{ik}$ . Por lo tanto, la curvatura escalar en el sistema  $(x_i)$  esta dada por:

$$K = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ik} R_{ik} g^{ik}.$$

**Definición 4.41.** El *tensor de Einstein* de una variedad Riemanniana  $(M^n, g)$  es el tensor:

$$E_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij},$$

también se conoce como la parte sin traza del tensor de Ricci, la métrica  $g$  es llamada *métrica de Einstein* si su tensor de Einstein es 0.

Presentamos algunas curvaturas de variedades de presentación recurrente en este trabajo:

El  $n$ -espacio Euclideo,  $\mathbb{E}^n := \mathbb{R}^n$  con la métrica estándar, tiene curvatura seccional 0, la esfera  $n$ -dimensional de radio  $R$  ( $\mathbb{S}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = R\}$ ) con la métrica inducida es una sub-variedad de  $\mathbb{E}^{n+1}$ , además tiene curvatura seccional  $1/R^2$ .

El  $n$ -espacio Hiperbólico de radio  $R$ ,  $\mathbb{H}_R^n$ , es la bola abierta de radio  $R$  en  $\mathbb{R}^n$  con métrica:

$$g_{ij}(x) = \frac{4R^4 \delta_{ij}}{(R^2 - |x|^2)^2}.$$

que tiene curvatura seccional  $-1/R^2$ .

### 4.3. Topología desde la geometría

La idea central en la geometrización de la conjetura es que la topología de la variedad y el tipo de geometría que la variedad están íntimamente relacionados. Veremos un par de teoremas que relaciona la estructura geométrica de la variedad con su topología.

**Teorema 4.42.** *Sea  $(M^n, g)$  una  $n$ -variedad riemanniana completa, simplemente conexa con curvatura seccional constante  $C$ . Entonces  $M^n$  es isométrica a  $\mathbb{E}^n$  (si  $C = 0$ ),  $\mathbb{S}_R^n$  (si  $C = 1/R^2$ ) o  $\mathbb{H}_R^n$  (si  $C = -1/R^2$ ).*

En particular, una variedad simplemente conexa con curvatura seccional constante no positiva es difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , y una variedad simplemente conexa con curvatura seccional constante y positiva es difeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .

Ahora, también podemos obtener información topológica acotando la curvatura, como lo dice el siguiente teorema:

**Teorema 4.43. (Myers)** *Sea  $(M^n, g)$  una variedad diferenciable completa, conexa, cuyo tensor de Ricci satisface:*

$$\text{Ric} \geq (n-1)Hg$$

*para alguna constante  $H$ . Entonces  $M^n$  es compacta con grupo fundamental finito y con diámetro a lo sumo  $\pi H^{-\frac{1}{2}}$ .*

**Teorema 4.44. (Teorema de la Esfera)** *Decimos que la variedad riemanniana  $(M^n, g)$  es **estrictamente  $\delta$ -pinchada** (para algún  $\delta > 0$ ) si existe una constante  $K > 0$  tal que todas las curvaturas seccionales de  $M$  se encuentran en el intervalo  $(\delta K, K]$ .*

*Si  $M^n$  es una  $n$ -variedad riemanniana completa, simplemente conexa y estrictamente  $\frac{1}{4}$ -pinchada entonces  $M^n$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .*

## 4.4. Geometrización de la Conjetura

Desde el comienzo del siglo pasado, estaba claro que la geometría riemanniana, que había nacido hace poco, iba a desempeñar un papel importante en el estudio de la topología de superficies, un tema que todavía estaba en su infancia. Particularmente notable en este sentido es el Teorema de la uniformidad, procedentes de los trabajos de Poincaré, Klein y otros:

**Teorema 4.45.** *Cualquier variedad de 2 dimensional, admite una métrica completa de curvatura constante.*

Superficies simplemente conexas, completas de curvatura constante  $k$  son, bajo la normalización de la métrica, la esfera unitaria, el plano euclidiano y el plano hiperbólico, con  $k = 1, 0, -1$ , respectivamente. En particular, las superficies compactas tienen un recubrimiento universal simplemente conexo, completo y de curvatura constante, por lo tanto, son cocientes de dichos espacios por grupos de isometrías propiamente discontinuos. Esto a la larga conducirá a la clasificación topológica de superficies compactas.

Un programa similar fue propuesto por Thurston. En la década de los 70 para el caso de variedades 3-dimensionales. Como era de esperar, no se puede tener la existencia de una métrica de curvatura constante, pero en la mayor parte se espera la existencia de una "buena métrica". Vamos a ver a qué nos referimos por "buena métrica".

Una "geometría" en el sentido de Klein es esencialmente una variedad  $M$  junto con un grupo transitivo de difeomorfismos  $G$ , y la geometría es el estudio de las propiedades de los subconjuntos de  $M$  que son invariantes bajo la acción de  $G$ . Los grupos de isotropía  $G_x := \{g \in G : gx = x\}$  son compactos, podemos definir una métrica Riemanniana sobre  $M$  para la que  $G$  actúa como un grupo de isometrías. Puesto que  $G$  es transitivo, la métrica es homogénea (los entornos de dos puntos cualesquiera son isométricos), y por lo tanto es completa. Esto conduce a la siguiente:

**Definición 4.46.** Una *geometría* sobre una 3-variedad  $M$  es una métrica riemanniana completa, localmente homogénea (dos puntos cualesquiera tienen entornos isométricos) con coeficientes compactos. Si la variedad admite tal métrica, diremos que es *geometrizable*.

Vamos a considerar equivalentes dos geometrías cuando difieren por un difeomorfismo que conmuta con las acciones del grupo de isometría. Por otra parte, ya que puede haber varios grupos transitivos que actúan sobre  $M$  con las mismas órbitas, vamos a suponer que el grupo es maximal.

Un "teorema de tipo uniformidad", en este contexto, debe afirmar la existencia de una geometría en una 3-variedad. Pero este no es el caso. Sin embargo Thurston demostró que si el grupo fundamental es "suficientemente grande", entonces la variedad se puede descomponer en conjuntos abiertos, cada uno de los cuales admite

una geometría. También preguntó si la hipótesis sobre el grupo fundamental era necesaria. Esta cuestión tomó el nombre de *geometrización de la conjetura*, que puede expresarse más o menos como sigue:

**Conjetura 4.47.** *Cualquier 3-variedad cerrada se puede descomponer en partes que admiten una geometría.*

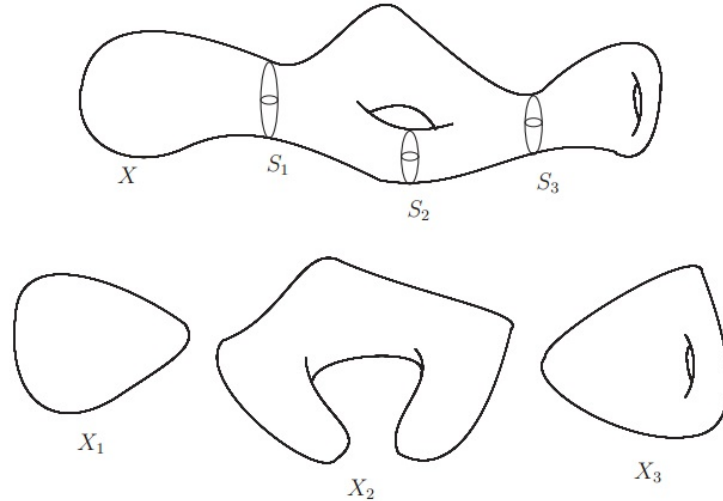
En general las geometrías de los pedazos pueden no pegar "bien" sobre las intersecciones, por lo tanto no se tendría una geometría global para toda la variedad  $M$ .

Vamos a ser más precisos en lo que significa el término "descomposición". Por simplicidad vamos a tratar con variedades que son compactas y orientables. Es claro que si dos variedades son geometrizable, la geometrización de la conjetura tiene una respuesta positiva para su suma conexa. Así que es posible centrarse en variedades que no se descomponen en sumas conexas de elementos no triviales.

No toda 3-variedad admite una estructura geométrica, pero aquellas que la admiten (3-variedades geométricas) sirven de piezas para construir 3-variedades más complejas. Hellmuth Kneser mostró en 1929 que cada 3-variedad compacta orientable puede ser descompuesta en un número finito de variedades "primas". Una variedad diferenciable  $M$  es prima para descomposición como una suma conexa  $M = M_1 \# M_2$ ,  $M_1$  o  $M_2$  es una esfera. En dimensión 3, una variedad es prima si y solamente si es irreducible o es difeomorfa a  $S_1 \times S_2$ . John Milnor mostró en 1962 que la descomposición en variedades primas es única. Así para clasificar las 3-variedades es suficiente clasificar las 3-variedades primas.

Kneser definió las *3-variedades irreducibles* como aquellas en las que cada 2-esfera sin autointersecciones es borde de una 3-bola. Si una 3-variedad  $X$  no es irreducible, entonces se la puede cortar a lo largo de una 2-esfera que no sea borde de una 3-bola. Repitiendo el proceso, cortamos  $X$  a lo largo de una colección finita de 2-esferas, de forma que las componentes conexas que obtenemos son variedades con borde, y si pegamos 3-bolas a lo largo de sus bordes, las 3-variedades compactas  $X_i$  que obtenemos son irreducibles (y además ninguna es  $S^3$  a menos que  $X = S^3$ ). Esta se denomina *descomposición por toros*.

Técnicamente, se dice que  $X$  surge como suma conexa de las variedades  $X_i$  y de una colección de copias de  $S_2 \times S_1$ , que aparecen una por cada 2-esfera que no separa. Así la geometrización de la conjetura de Thurston dice que cada 3-variedad orientable es la suma conexa de 3-variedades primas cada una de las cuales admite una descomposición a través de toros incompresibles (esto es toros inmersos a través de una aplicación que es inyectiva sobre  $\pi_1$ ) en piezas que admiten geometrías localmente homogéneas de volumen finito.



**Figura 10:** Tomada de *A brief history of the Poincaré conjecture*, Buoncrisiano y Mercuri [30].

Esta conjetura da un método completo y efectivo para la clasificación de las 3-variedades, en espíritu similar a la clasificación de superficies, reduciéndolo al estudio de las 3-variedades geométricas. Desde el punto de vista de la geometría riemanniana, la conjetura de Thurston asegura la existencia de una métrica óptima, además la veracidad de la conjetura de la geometrización de Thurston implica la conjetura de Poincaré.

## 4.5. El Flujo de Ricci

A principios de la década de los 80 Hamilton inició un programa para atacar la geometrización de la conjetura. La idea básica era utilizar una ecuación de tipo evolución de la métrica. La ecuación de evolución clásica en la teoría de la PDE es la ecuación del calor:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \Delta u, \quad u(0, x) = u_0(x).$$

Esta ecuación describe la distribución de calor, en el tiempo  $t$ , en un cuerpo con distribución de calor inicial  $u_0$ . Es intuitivamente claro que la distribución tiende a ser uniforme a medida que pasa el tiempo. Así, a partir de una ecuación similar en una métrica riemanniana, la esperanza es que tal métrica tienda a ser "uniforme", a medida que el tiempo avanza. Así, ¿qué objeto debemos poner en el lado derecho de la ecuación? Nos gustaría una forma bilineal simétrica que dependa sólo de las derivadas espaciales de la métrica de orden a lo más dos. A menos de múltiplos de la métrica, hay esencialmente sólo una de esas formas simples y naturales, denominaremos *Ric*, el tensor de Ricci.

Entonces, la ecuación natural para continuar nuestro estudio es:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric(g(t)) + \lambda(t)g(t), \quad g(0) = g_0 \quad (4.9)$$

donde  $g_0$  es la métrica riemanniana dada sobre la variedad. Hamilton consideró la ecuación anterior para  $\lambda(t) = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric(g(t)) \quad g(0) = g_0. \quad (4.10)$$

Las dos ecuaciones son esencialmente equivalentes en el sentido de que la Ecuación 4.10 se puede transformar en la Ecuación 4.9, reescalando la métrica y la variable tiempo. Por ejemplo, reescalando la base de la métrica de tal manera que el volumen es constante, obtenemos la Ecuación 4.9 con  $\lambda(t) = \int_M S(t) dv(t)$  donde  $S(t)$  es la curvatura escalar de  $g(t)$  y  $dv(t)$  es la forma volumen.

La curva de métricas  $g(t)$  puede ser pensada como una curva integral del campo vectorial  $-2Ric(g(t)) + \lambda(t)g(t)$  en el espacio de métricas de la variedad. Desafortunadamente, este espacio no es un espacio agradable ya que no hay flujo asociado.

Hamilton demostró que existe una solución de la ecuación (Ecuación 4.9), definida en un intervalo maximal  $[0, T) \subseteq \mathbb{R}$ , tal solución es única una vez se fijan valores iniciales. Este hecho se deduce de la teoría clásica de existencia y unicidad para este tipo de ecuaciones, una vez se escriban, estas ecuaciones, en coordenadas adecuadas. El "tiempo singular"  $T$  tiene que ser entendido como el tiempo cuando la solución tiende a una forma bilineal que no es definida positiva. Observe que el signo menos es esencial. En general, no hay soluciones para los tiempos negativos, mientras que el factor 2 se introduce sólo por conveniencia.

Por lo tanto, la tarea consiste en estudiar el flujo, y tratar de demostrar que la solución converge a una "buena solución", es decir, a una métrica homogénea. Si bien esto no es generalmente el caso, funciona bajo condiciones adicionales. Un primer paso es estudiar la curvatura de la solución.

La curvatura escalar satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Delta S + 2\|Ric\|^2,$$

donde  $\Delta$  y  $Ric$  son el Laplaciano y el tensor de Ricci para la métrica  $g(t)$ . Observemos a seguir un resultado básico: supongamos que  $S$  tiene un mínimo,  $S_m$  de  $x \in M$ . Entonces  $\Delta S(x)$  es no negativo, como también lo será  $\frac{\partial S}{\partial t}$ .

Por lo tanto, de forma heurística,  $S_m$  es no decreciente en  $t$ . Esto puede hacerse de forma rigurosa, y produce el llamado *principio del máximo escalar*.

El tensor de Ricci satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\partial Ric}{\partial t} = \Delta Ric + Q(Ric), \quad (4.11)$$

donde  $Q$  es una expresión cuadrática en  $Ric$ .

Hamilton demostró un análogo principio del máximo para la solución de la ecuación (Ecuación 4.11) que implica, en particular, que si la curvatura de Ricci de las condiciones iniciales es positiva, entonces se mantiene positiva bajo el flujo. Usando éste principio y las estimaciones del gradiente de  $S$ , Hamilton demostró un resultado fundamental en la teoría:

**Teorema 4.48.** *Si la variedad es compacta y la métrica inicial tiene una curvatura de Ricci positiva, entonces la solución reescalada está definida para todos los tiempos positivos y converge, cuando  $t \rightarrow \infty$ , a una solución de curvatura constante.*

En particular, tenemos la siguiente "versión riemanniana de la conjetura de Poincaré":

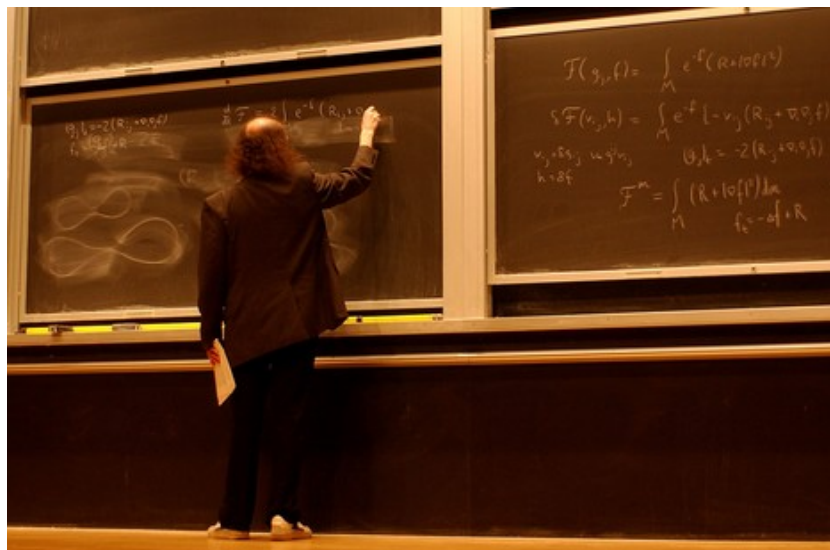
**Corolario 4.49.** *Una 3-variedad Riemanniana compacta y simplemente conexa con curvatura de Ricci positiva es difeomorfa a  $S^3$ .*

# 5 Perelmán

## 5.1. Biografía

Nació en Leningrado (San Petersburgo) en 1966. Fue un estudiante brillante desde joven. A los 16 años ganó la Olimpiada Matemática con el puntaje máximo. Rechazó el premio que la unión Matemática internacional otorga cuatrienalmente a diez prometedores matemáticos. Trabajó en San Petersburgo, Nueva York y Berkeley. En 1994 comenzó a trabajar en la Conjetura de Poincaré, tras ocho años la resolvió.

Tras una pequeña controversia, la comunidad matemática aceptó la prueba. Ganó la Medalla Fields, que también rechazó. Abandonó su trabajo en San Petesburgo. Ganó el premio de un millón de dólares que el Instituto Clay de Matemáticas otorga a quien resuelva uno de los siete problemas del milenio. Hasta la fecha, no ha ido a cobrarlo.



Tomado de <http://www.nature.com/news/2006/060821/full/news060821-5.html>

Demostó así que la Geometrización de la conjetura de Thurston era cierta, que implica que la conjetura de Poicaré también lo es. Contrariamente a los usos habituales, no publicó un artículo, sino que puso sus trabajos en Internet, sobriamente sin bombos ni platillos, sino de forma descomplicada y libre para todo aquel que se

interese. Entre el otoño de 2002 y la primavera de 2003 puso sus tres artículos en Arxiv:

- [19]: La fórmula de entropía para el flujo de Ricci y sus aplicaciones geométricas (39 páginas).
- [20]: Flujo de Ricci con cirugía en 3-variedades (22 páginas).
- [21]: Tiempo de extinción finita para las soluciones del flujo de Ricci en ciertas variedades de dimensión 3 (7 páginas).

Durante 2003 dio varias conferencias en EE.UU. para convencer a la comunidad matemática de lo acertado de su prueba. Lo consiguió aunque faltaban los detalles, muchos detalles. Observemos que su prueba ocupa apenas 70 páginas. Hubo una cierta polémica ya que en cierto momento Cao-Zhu sugirieron que fueron ellos los que esencialmente habían demostrado la Conjetura de Poincaré, la postura de Perelmán era contraria a este espíritu. El teorema que resuelve la conjetura lo denomina Teorema de Hamilton-Perelmán, ya que considera que él terminó el trabajo emprendido por Hamilton.

El Congreso Internacional de Matemáticas terminó con la discusión ya que decidió otorgar la Medalla Fields a Perelmán en 2006. Éste rechazó el galardón:

*El Premio me es completamente irrelevante. Todos saben que si la prueba es correcta ningún otro reconocimiento es necesario.*

El Instituto Clay de Matemáticas estableció en el año 2000 los Siete Problemas del Milenio: preguntas clásicas importantes que no han sido resueltas en años. La primera persona que resuelva cada uno de estos problemas recibirá un premio de un millón de dólares. Puesto que la Conjetura de Poincaré es uno de estos siete problemas, Perelmán tiene derecho a este premio



Tomado de <http://gloriamundo.blogspot.com/2010/06/grigori-perelman-genio-inadaptado.html>

## 5.2. Vecindades canónicas de Perelmán

Supongamos que tenemos el flujo de Ricci de una 3-variedad simplemente conexa, cerrada cuya curvatura del flujo explota en un tiempo finito  $T$ . Dos resultados previos muy importantes son los siguientes.

Una sucesión creciente de tiempos  $t_i \rightarrow T$  y puntos  $x_i$  de curvatura máxima  $\lambda_i$  (en el tiempo  $t_i$ ). Reescalando  $g(t_i)$  por  $\lambda_i$ , entonces la subsucesión  $(M, \lambda_i g(t_i))$  converge a una variedad diferenciable de curvatura no negativa. Recordamos que las únicas variedades simplemente conexas de curvatura no negativa de dimensión 3 son  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  y  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ , con la métrica producto en el tercer caso. Usando esta y otras propiedades especiales del límite, se puede demostrar que la variedad límite es "estándar". Luego por definición de variedad límite, se deduce que las vecindades pequeñas de  $x_i$  son cercanas a ser "estándar". Sin embargo, este procedimiento no funciona si se quiere comprender el comportamiento en puntos con curvatura grande que no son los puntos de curvatura máxima. El problema es que al reescalar la métrica con respecto a esos puntos no da métricas con curvatura acotada independiente de  $i$ .

Un resultado sorprendente y notable de Perelmán, que ataca la dificultad mencionada anteriormente y que puede ser considerado como uno de los resultados centrales en sus pruebas es el *teorema de la vecindad canónica*. Este teorema asegura que cualquier punto de curvatura escalar grande tiene una vecindad canónica, que es una variedad riemanniana con métrica muy similar a una forma espacial esférica o un cuello  $S^2 \times I$  o lo que se denomina una  $\epsilon$ -cap. Si  $M$  es simplemente conexa, el espacio esférico debe ser una esfera y la  $\epsilon$ -cap debe ser difeomorfa a una 3-bola.

Este resultado es sorprendente en muchos sentidos. Normalmente, por el argumento del reescalamiento esbozado anteriormente, podemos estudiar un entorno de un punto de curvatura máxima. Sin embargo, se espera que cerca de los puntos de curvatura grande (pero no máxima), hay puntos cercanos donde la curvatura es mucho mayor.

Por lo tanto, en general se espera que la estructura de curvatura sea como un fractal, con picos de muchas escalas. Además, las regiones pequeñas de curvatura grande pueden tener topología y geometría no trivial. Esto es porque, para cualquier variedad cerrada, podemos reescalar la métrica para hacer que el diámetro sea muy pequeño de modo que la curvatura sea grande.

Uno puede ver esto en el contexto más general de los sistemas complejos que surgen de ecuaciones reacción-difusión, de los cuales el flujo de Ricci es un caso típico. Así, se obtiene una variedad de comportamiento en diversas escalas emergentes del sistema. Por lo tanto, puede ser de gran valor para entender por qué esto no sucede en el caso del flujo de Ricci en la dimensión 3.

La demostración del teorema de la vecindad canónica es un sutil argumento que a su vez implica límites de variedades riemannianas, entre otras cosas. Para profundizar en el tema proponemos [1] y [37].

### 5.3. Esquema de la Prueba

Ahora estamos en posición de presentar una visión rápida de la demostración de la Conjetura de Poincaré. Considere una 3-variedad  $M$  simplemente conexa con una métrica riemanniana definida sobre ella. Considere el mayor intervalo  $[0, T)$  sobre el cual el flujo es definido. Como un caso especial de la *propiedad de extinción finita*,  $T$  debe ser finito. Así para algún tiempo finito, cuando esta próximo a  $T$  la curvatura escalar tiende a infinito sobre un subconjunto  $\Omega_p$  de  $M$ .

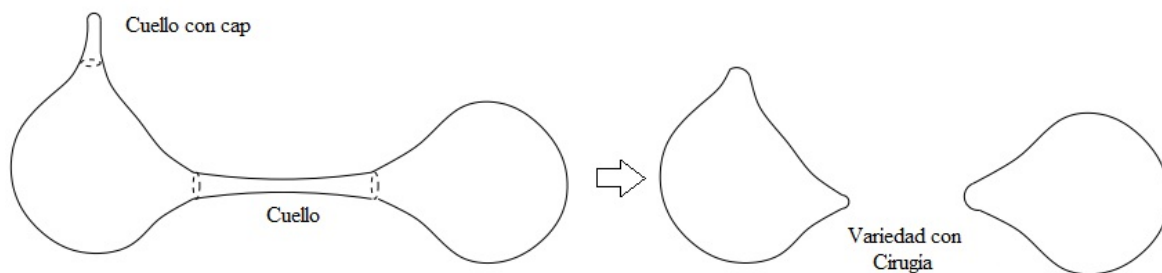
Considere el subconjunto  $\Omega_p$  de  $M$  donde la curvatura está acotada por un número grande  $\rho$  para todo  $t \in [0, T)$ . Esto es, sea  $\Omega_p = \{x \in M : R(x, t) \leq \rho \text{ para todo } t\}$ . Escogemos un  $\rho$  suficientemente grande tal que los puntos con curvatura mayor que  $\rho$  tengan vecindades canónicas.

Para un tiempo  $t$  cercano a  $T$ , el teorema de la vecindad canónica se da para el complemento  $N$  del interior de  $\Omega_p$ . Así cada punto en este complemento tiene una vecindad que es un cuello, un cap o es difeomorfo a la esfera. Colocando estas vecindades juntas, se tiene una esfera o una variedad difeomorfa a  $S^2 \times [-1, 1]$  (la cual es la unión de varios cuellos) la cual puede tener un cap pegado a uno o varios fines. Topológicamente en cada uno de los casos se obtiene una esfera, una bola o  $S^2 \times [-1, 1]$ . Se sigue en particular que la frontera de  $\Omega_p$  consiste de 2-esferas.

Si  $\Omega_p$  es vacío sin importar que tan grande escojamos  $\rho$ , en otras palabras la curvatura explota sobre toda la variedad  $M$ , entonces lo anterior implica que  $M$  es difeomorfa a  $S^3$  y queda demostrado el teorema.

De otra manera, se descarta el conjunto  $int(N) = M - \Omega_p$  y se pegan bolas a cada una de las esferas frontera de  $\Omega_p$  para obtener una variedad riemanniana. Esta operación es llamada "cirugía".

Ahora continuamos evolucionando la variedad, la cual ahora tiene varias componentes, mediante el flujo de Ricci. Una vez más, evoluciona la métrica a lo largo del flujo de Ricci hasta que la curvatura explote, y se repite el procedimiento de cirugía ya mencionado. Se debe tener en cuenta que a medida que una componente del flujo en el procedimiento anterior, la curvatura explota en toda parte o se forman cuellos. En el primer caso, se conoce que la componente es una esfera. Tal componente se dice que se "extingue", y continuamos con el flujo de Ricci sin ella. En este caso, la cirugía es vista como borrar la componente. Así se puede inductivamente definir el proceso llamado *flujo de Ricci con cirugía*.



Se necesita aquí resultados técnicos que se dan en el flujo de Ricci ordinario y que se cumplen para el flujo de Ricci con cirugía. También se necesitan resultados que establecen que en cualquier intervalo finito se requieren solamente un número finito de cirugías para todo tiempo positivo.

Un resultado de Perelmán dice que si la variedad  $M$  es simplemente conexa, entonces todas las componentes del flujo de Ricci con cirugía se extinguen en un tiempo finito.

Así el proceso considerado se extingue en tiempo finito. Si se observa en retroceso la extinción del tiempo, vemos que esferas son creadas (el opuesto a la extinción) o dos componentes son conectadas por un tubo (el opuesto de cirugía). Es fácil ver que el resultado, después de un número finito de tales pasos, es una colección de esferas. Así la variedad  $M$  con la que se comenzó debe ser una esfera.

# Bibliografía

- [1] C. Kosniowski, *Topología Algebraica*. Editorial Reverté, Barcelona España, 1986.
- [2] C. E. Duran, A. Mendoza, A. Rigas, *Blakers-Massey Elements and exotic Diffeomorphisms of  $S^6$  and  $S^{14}$  via Geodesics*. Transactions of the A.M.S., **356**, 12, 5025-5043, 2004.
- [3] E. Lima, *Análise Real*. Volumen I, Séptima Edición. IMPA, Rio de Janeiro Brasil, 2004.
- [4] E. Lima, *Grupo fundamental e espacios de Recubrimiento*. Segunda Edición. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1998.
- [5] E. Moise, *Geometric Topology in dimensions 2 and 3*. Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag, 1977.
- [6] E. Zeeman, *The generalised Poincaré conjecture*. Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 270.
- [7] F. Warner, *Foundations of differentiable Manifolds and Lie groups*. University of Pennsylvania, 1971.
- [8] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv: math.DG/0211159v1, 11 Nov 2002.
- [9] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv: math.DG/0303109, 10 Mar 2003.
- [10] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv: math.DG/0307245, 17 Jul 2003.
- [11] H. Kneser, *Geschlossene Flachën in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Jahresber. Deutsch. Math. Verein. **38** (1929), 248-260.
- [12] J. Cerf, *Sur le difféomorphismes de la sphère de dimension trois*. Springer lectures notes in Mathematics, **53**, 1968.
- [13] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*. Ann. of Math. (2) **64** (1956), 399-405.
- [14] J. Milnor, *Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds*, Notices Amer. Math. Soc. **50** (2003), 1226-1233.
- [15] J. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, 1997.

- [16] J. R. Munkres, *Elementary Differential Topology*. Ann. of math. Studies, 54, 1963.
- [17] J. Stallings, *Polyhedral homotopy-spheres*. Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 458-488.
- [18] K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Math. 761, Springer, 1979.
- [19] M. A. Kervaire y J. W. Milnor, *Groups of Homotopy Spheres*. Ann. on Math. **77**, 504-537, 1963.
- [20] M. Anderson, *Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow*, Notices Amer. Math. Soc. **51** (2004), 184-193.
- [21] M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*. J. Diff. Geom. **17** (1982), 357-453.
- [22] M. J. Greenberg, *Algebraic Topology: A first Course*, Math. Lecture Note series, 1981.
- [23] M. Macho, *Topología Algebraica - Curso 2007-2008*. Notas de clase, Universidad del Pais Vasco, 2008.
- [24] M. P. Do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superficies*. Sociedad Brasileira de Matemática, 2005.
- [25] M. P. Do Carmo, *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, Segunda edición, 1988.
- [26] M. W. Hirsch, *Differential Topology*. Graduated Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1976.
- [27] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17**, 255-306, 1982.
- [28] R. S. Hamilton, *The formation of singularities in the Ricci flow, in Surveys in differential geometry, Vol. II* (Cambridge, MA, 1993), Internat. Press, Cambridge, MA, 7-136, 1995.
- [29] R. S. Hamilton, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds*, *Comm. Anal. Geom.* 7 695-729, 1999.
- [30] S. Buoncrisiano y F. Mercuri, *A brief history of the Poincaré conjecture*. *Riv. Math. Univ. Parma* **2**, No. 2, 209-254, 2011.
- [31] S. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*. J. Diff. Geom. **18** (1983), 279-315.
- [32] S. Gadgil y H. Seshadri, *Ricci Flow and the Poincaré conjecture*, Department of Mathematics, Indian Institute of Science, 2006.
- [33] S. Smale, *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four*. Ann. of Math. (2) **74** (1961), 391-406.

- [34] V. Muñoz, *Cien años de la conjetura de Poincaré*. La gaceta de la RSME, Vol. 7.3 (2004), 629-653.
- [35] W. Jaco y P. Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 21, No. 220 (1979).
- [36] W. S. Massey, *A basic course in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Maths, Vol. 127, Springer-Verlag, 1991.
- [37] W. Thurston, *Three dimensional manifolds*, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357-381.