

Estudio teórico de las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios finos

Autor:

Jhann Marco Quintanilla González

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de matemáticas

Bucaramanga

2023

Estudio teórico de las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios finos

Autor:

Jhann Marco Quintanilla González

Trabajo de grado para optar al título de:

Matemático

Director:

Jhean Eleison Pérez López

Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de matemáticas

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

Me gustaría dedicar este trabajo a mis padres, Cenaida González y Marcos Horacio Quintanilla, sin su inquebrantable apoyo nada de esto hubiera sido posible. También quiero expresar mi agradecimiento a mis queridos hermanos, Brayan, Brandon, Sledy y Zayda. Espero que este trabajo sirva como fuente de inspiración y motivación para todos ustedes, los amo.

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer al profesor Jhean Eleison Pérez, por toda su dedicación y esfuerzo en este trabajo, fue gratificante todo el conocimiento adquirido bajo su dirección.

Andrea Salamanca, agradezco su compañía a lo largo de tantos años, sus consejos y apoyo fueron indispensables para la culminación de mi carrera.

Deseo manifestar mi más sincero agradecimiento a mi familia y amigos, quienes han sido una fuente constante de estímulo a lo largo de la elaboración de este trabajo de grado. La paciencia, comprensión y aliento que me han brindado resultaron esenciales para lograr exitosamente y llevar a cabo esta monografía, en especial a Jorge Eliecer González, Yenifer Torres, Sandra Martínez, Ana Carvajal, Dana Quintanilla, Leidy Cárdenas, Estefany Anaya y todos mis tíos y primos que me apoyaron este trayecto.

También agradezco a todos los profesores de la escuela de matemáticas, a todos esos amigos y colegas que hice en la universidad, en especial a Santiago Mayorga, Winston Ferreira, Diego Ramirez, Edwin Salamanca y Jacob Rondon.

Lista de contenido

	pág.
1. Introducción	8
2. Marco teórico	13
2.0.1. Funciones periódicas y distribuciones periódicas	13
2.0.2. Espacios de Lebesgue	18
2.0.3. Espacios de Schwartz, espacios de distribuciones temperadas y transformada de Fourier	20
2.0.4. Distribuciones temperadas en variables periódicas y no periódicas	27
2.0.5. Kernel de Schwartz	34
2.0.6. Lemas técnicos	34
3. Ecuaciones de Navier-Stokes en dominios finos	43
3.0.1. Espacios funcionales	48
3.0.2. Soluciones globales en el tiempo	55
Referencias	73

RESUMEN

TÍTULO: Estudio teórico de las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios finos *

AUTOR: Jhann Marco Quintanilla González **

PALABRAS CLAVE: Ecuaciones de Navier-Stokes, Espacio de pseudomedidas, Distribuciones.

DESCRIPCIÓN:

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que modelan cómo cambia la velocidad y la presión de fluidos viscosos. En este trabajo nos enfocamos en un estudio teórico de las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios finos, nos basamos en ([Alves, 2019](#)), donde estudiamos propiedades del espacio de solución y analizamos su solución tanto blanda como débil.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jhean Eleison Pérez López, Doctor en Matemáticas

ABSTRACT

TITLE: Theoretical study of the Navier-Stokes equations in fine domains *

AUTHOR: Jhann Marco Quintanilla González **

KEYWORDS: Navier-Stokes equations, Pseudomeasure space, Distributions.

DESCRIPTION:

The Navier-Stokes equations are a set of partial differential equations that model how the velocity and pressure of viscous fluids change. In this work we focus on a theoretical study of the Navier-Stokes equations in thin domains, based on ([Alves, 2019](#)), where we study properties of the solution space and analyze its soft and weak solution. weak.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jhean Eleison Pérez López, Doctor Matemáticas

1. Introducción

Las ecuaciones de Navier-Stokes fueron desarrolladas por el matemático y físico francés Claude-Louis Navier y el matemático irlandés George Gabriel Stokes en el siglo XIX. Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que modelan cómo cambia la velocidad y la presión de fluidos viscosos, como el aire y el agua, en función del tiempo y la posición en el espacio, bajo la influencia de fuerzas externas, como la gravedad o la presión. Estas ecuaciones son fundamentales en la mecánica de fluidos y se utilizan en una amplia variedad de campos, desde la ingeniería hasta la física y la biología. En esencia, las ecuaciones de Navier-Stokes establecen que la aceleración del fluido es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, y que la viscosidad del fluido afecta cómo se distribuyen las fuerzas internas del fluido.

Las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido con densidad y viscosidad constante tienen la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Aquí $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, la incógnita $u = (u_j)_{j=1}^n$ representa el campo de velocidades del fluido, π representa la presión hidrostática y u_0 es un campo de velocidades inicial dado que verifica $\nabla \cdot u_0 = 0$.

En el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ con $N = 3$ el problema de existencia de solución global para las ecuaciones de Navier-Stokes aun es un problema abierto, siendo este uno de los siete problemas del milenio (véase (www.claymath.org/millennium-problems, s.f.)).

En este contexto, es esencial examinar las contribuciones previas en el caso de $\Omega = \mathbb{R}^N$, por ejemplo, hay resultados de existencia global en espacios de Sobolev homogéneos $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ (Fujita y Kato, 1963), espacios de Lebesgue $L^n(\mathbb{R}^n)$ (Kato, 1984), espacios de Besov homogéneos $\dot{B}_{p,\infty}^{\frac{n}{p}-1}(\mathbb{R}^n)$ $p > n$ (Cannone, 1997), espacios de Morrey $\mathcal{M}_q^n(\mathbb{R}^n)$ (Kato, 1992), espacios homogéneos Besov-Morrey $\mathcal{N}_{l,p,\infty}^{n/l-1}$ con $l > n/2$ (Kozono y Yamazaki, 1994) y (Mazzucato, 2003), BMO^{-1} (Koch y Tataru, 2001), espacios homogéneos Besov-weak-Herz $\dot{B}WK_{p,q,r}^{\alpha,s}$ (Ferreira y Pérez-López, 2018) y en espacios de pseudomedidas $\mathcal{P}\mathcal{M}^a$ (Cannone y Karch, 2004).

En este trabajo de monografía se abordará el estudio de la buena colocación de las ecuaciones de Navier-Stokes en el dominio fino N -dimensional $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \varepsilon)$, donde $N \geq 2$ y $\varepsilon > 0$. Una motivación matemática natural para estudiar este tipo de dominios finos se debe al hecho de que para el caso $\Omega = \mathbb{R}^2$ las ecuaciones de Navier-Stokes (1.1) tienen solución global regular para cualquier dato inicial regular (véase, por ejemplo, (Temam, 1995)). Por lo tanto, considerando el dominio fino $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^2 \times (0, \varepsilon)$, la intuición es que para ε suficientemente pequeño el fluido se comporte de forma similar al caso $\Omega = \mathbb{R}^2$, y por lo tanto se pueden esperar mejores resultados de buena colocación global. Existen varios trabajos sobre la existencia de soluciones globales en el tiempo con dato inicial suficientemente pequeño en algún espacio de funciones adecuado, para más detalles sugerimos los siguientes trabajos: Para el dominio $Q_\varepsilon = \Omega \times (0, \varepsilon)$, donde Ω es un

dominio acotado de \mathbb{R}^2 y $0 < \varepsilon \leq 1$, Iftimie-Raugel en (Iftimie y Raugel, 2001) demostraron la existencia y unicidad de solución global si

$$\|Mu_0\|_{H^1(Q_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{-\beta}, \quad \|(Mu_0)_3\|_{L^2(Q_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^\beta \text{ y } \|(I - M)u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(Q_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{4} - \frac{\beta}{2}}$$

donde $1/2 < s < 1$, $0 \leq \beta \leq 1/2$ y M denota el operador que mide la media en la dirección del lado fino. Posteriormente, en el dominio $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, \varepsilon]$ con condiciones de frontera periódicas, donde $L_1, L_2 > 0$ y $0 < \varepsilon < 1/2$, Kukavica-Ziane en (Kukavica y Ziane, 2007) demostraron la existencia y unicidad de solución suave si

$$\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\nu}{C(L_1, L_2) \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\log \varepsilon|^{\frac{3}{2}}}.$$

Casado-Díaz, Laynez y Suárez-Grau en (Casado-Díaz, Luna-Laynez, y Suarez-Grau, 2013) estudiaron el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema de Navier-Stokes en un dominio fino Ω_ε de espesor ε satisfaciendo condiciones de frontera de tipo Navier en un conjunto periódico $\Gamma_\varepsilon \subset \partial\Omega_\varepsilon$ de periodo r_ε y amplitud δ_ε , con $\delta_\varepsilon \ll r_\varepsilon \ll \varepsilon$. Allí prueban que el comportamiento del límite cuando ε va a cero depende del límite λ de $\delta_\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{2}} / r_\varepsilon^{\frac{3}{2}}$. Es decir, si $\lambda = +\infty$ el fluido se comporta como si se hubiera impuesto una condición de adherencia a Γ_ε . Si $\lambda = 0$ el fluido se comporta como si Γ_ε fuese el plano. Finalmente, si $\lambda \in (0, +\infty)$ aparecerá un nuevo término de fricción en el límite.

Liao en (Liao, 2016) mostró la existencia de la solución global para las ecuaciones de Navier-Stokes no homogéneas

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \\ \partial_t (\rho u) - \Delta u + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \pi = 0, \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

en dominios finos $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]$ con condiciones de frontera tipo Dirichlet y asumiendo que

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en el dominio fino $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \varepsilon)$ con condiciones de frontera tipo Dirichlet tienen la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = 0 & \text{en } \Omega_\varepsilon \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u_0 = 0 & \text{en } \Omega_\varepsilon \times [0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0, \varepsilon\} \times (0, \infty), \\ u(x, s, 0) = u_0(x, s) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (1.2)$$

Para el problema (1.2), mostramos la buena colocación en el sentido de Hadamard, esto es, que existe solución, que es única y que además depende continuamente de los datos iniciales (Teorema 3.0.9) para cualquier dato inicial con norma pequeña en un espacio cuya dependencia depende de la transformada de Fourier mixta (véase (2.0.29)), esto es, continua en \mathbb{R}^{N-1} y periódica en la n -ésima variable. En este trabajo dicho espacio es $\mathcal{PM}^{d, (N-1)-d}$ (véase (3.0.1)). De hecho para un dato inicial $u_0 \in \mathcal{PM}^{d, (N-1)-d}$, asumimos la condición de pequeñez

$$\|u_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{d,(N-1)-d}} < C\varepsilon^{-\delta}, \text{ donde } 0 < \delta < 1. \quad (1.3)$$

Esta ecuación establece un límite máximo en el grosor del dominio fino como requisito para lograr una buena colocación. A diferencia de estudios anteriores, en este trabajo se logra verificar que, sobre algunas condiciones, la solución persiste en el espacio del dato inicial $u_0 \in \mathcal{P}\mathcal{M}^{d,(N-1)-d}$.

Esta monografía se basa principalmente en los resultados de ([Alves, 2019](#)).

2. Marco teórico

A continuación introduciremos algunas definiciones y teoremas relacionados con el análisis de Fourier para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. El contenido de esta sección puede ser revisado en (Folland, 1999; Iorio Jr y de Magalhaes Lório, 2001).

2.0.1. Funciones periódicas y distribuciones periódicas En esta subsección recordamos algunas definiciones y propiedades involucrando funciones y distribuciones periódicas.

Definición 2.0.1. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada periódica con periodo $T \neq 0$ si

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proposición 2.0.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica con periodo T y suponga que f es integrable en cualquier intervalo finito. Entonces, para cualquier $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Definición 2.0.3. Sea $T > 0$. Para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio $L_{per}^p(0, T)$ es definido como el conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódicas de periodo T , tales que

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_{[0,T]} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{[0,T]} |f(x)| < \infty & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Observación 2.0.4. Note que para $1 \leq q < p \leq \infty$ valen las inclusiones continuas

$$L_{per}^\infty(0, T) \hookrightarrow L_{per}^p(0, T) \hookrightarrow L_{per}^q(0, T) \hookrightarrow L_{per}^1(0, T).$$

Definición 2.0.5. Sea $f \in L_{per}^1(0, T)$. La transformada de Fourier de f es la sucesión de números complejos $\mathcal{F}_d f = \hat{f}^d = (\hat{f}^d(k))_{k \in \mathbb{Z}}$, donde

$$\hat{f}^d(k) := \frac{1}{T} \int_0^T f(s) e^{-2\pi i \frac{ks}{T}} ds.$$

El número $\hat{f}^d(k)$ es llamado el k -ésimo coeficiente de Fourier de f , y la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}^d(k) e^{2\pi i \frac{ks}{T}}$$

es llamada la serie de Fourier de f en s .

Denotamos por $C_{per}^n([0, T])$, $n \in \mathbb{N}$, la colección de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^n y periódicas de periodo T . En el caso $n = 0$, denotamos dicho espacio simplemente por $C_{per}([0, T])$. Usamos también la notación $\mathcal{P}([0, T])$ para representar el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódicas de periodo T que son infinitamente diferenciables.

Existe una métrica natural la cual hace que el espacio $\mathcal{P}([0, T])$ sea un espacio

métrico completo. De hecho, se tiene que

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\varphi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_{\infty}}{1 + \|\varphi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_{\infty}}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{P}([0, T]),$$

define una métrica en $\mathcal{P}([0, T])$.

Proposición 2.0.6. *(\mathcal{P}, d) es un espacio métrico completo. Además, si $(\varphi_n) \subset \mathcal{P}([0, T])$ y $\varphi \in \mathcal{P}([0, T])$, entonces*

$$\varphi_n \xrightarrow{d} \varphi \iff \|\varphi_n^{(j)} - \varphi^{(j)}\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \forall j \geq 0.$$

Recordamos ahora algunas propiedades y resultados que involucran los coeficientes de Fourier.

Proposición 2.0.7. *Sean $f, g \in L^1_{per}(0, T)$. Entonces, para todo $k, m \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $j \in \mathbb{N}$, se tiene que*

1. $\widehat{f + g}^d(k) = \hat{f}^d(k) + \hat{g}^d(k);$
2. $\widehat{\lambda f}^d(k) = \lambda \hat{f}^d(k);$
3. $\hat{f}^d(k) = \overline{\hat{f}^d(-k)};$
4. $(e^{2\pi i \frac{m}{T}(\cdot)} f)^{\wedge d}(k) = \hat{f}^d(k - m);$
5. $\widehat{f * g}^d(k) = \hat{f}^d(k) \hat{g}^d(k)$, donde $(f * g)(x) := \frac{1}{T} \int_0^T f(x - y)g(y)dy;$
6. $\widehat{f^{(j)}}^d(k) = \left(\frac{2\pi i k}{T}\right)^j \hat{f}^d(k)$, siempre que $f \in C^j_{per}([0, T])$.

En lo que sigue vamos a recordar una caracterización del espacio $\mathcal{D}([0, T])$ en términos de sus transformada de Fourier. Iniciamos con una definición:

Definición 2.0.8. El espacio de las sucesiones de decrecimiento rápido, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, es el conjunto de todas las sucesiones $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tales que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^j |\alpha_k| < \infty, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Definición 2.0.9. Sea $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. La transformada inversa de Fourier de α es la función

$$\check{\alpha}^d(x) = (\mathcal{F}_d^{-1}\alpha)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{2\pi i \frac{kx}{T}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proposición 2.0.10. La transformada de Fourier $\wedge^d : \mathcal{D}([0, T]) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ es un isomorfismo y un homeomorfismo, esto es, lineal, biyectiva, continua y con inversa continua.

A continuación daremos la definición formal de una distribución periódica.

Definición 2.0.11. El espacio de las distribuciones periódicas, denotado por $\mathcal{D}'([0, T])$, es el espacio de todos los funcionales lineales y continuos de $\mathcal{D}([0, T])$ en \mathbb{C} .

Varios definiciones y propiedades pueden ser extendidos del espacio $\mathcal{D}([0, T])$ al espacio $\mathcal{D}'([0, T])$ usando dualidad. Para $f \in \mathcal{D}'([0, T])$ se tienen las siguientes definiciones:

1. **Derivada:** Dado $j \in \mathbb{N}$, definimos la distribución periódica $f^{(j)}$ por

$$\langle f^{(j)}, \varphi \rangle = (-1)^j \langle f, \varphi^{(j)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T]).$$

2. Producto: Sea $\psi \in \mathcal{D}([0, T])$, definimos la distribución periódica ψf por

$$\langle \psi f, \varphi \rangle = \langle f, \psi \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T]).$$

3. Convolución tipo 1: Sea $\varphi \in \mathcal{D}([0, T])$, la convolución f y φ es la función

$$(f * \varphi)(s) = \frac{1}{T} \langle f, \sigma_s \tilde{\varphi} \rangle, \forall s \in \mathbb{R},$$

donde $\sigma_s \varphi(x) = \varphi(x + s)$ y $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. En este caso se tiene que $f * \varphi \in \mathcal{D}([0, T])$.

4. Convolución tipo 2: Sea $g \in \mathcal{D}'([0, T])$, definimos la distribución periódica $f * g$ por

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{g} * \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T]).$$

Aquí, \tilde{g} representa la distribución periódica definida por $\langle \tilde{g}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

5. Transformada de Fourier: La transformada de Fourier en $\mathcal{D}'([0, T])$ es la función $\hat{f}^d : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{f}^d(k) = \frac{1}{T} \left\langle f, e^{-2\pi i \frac{k}{T}(\cdot)} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}.$$

En la proposición que sigue se reúnen algunas propiedades de transformada de Fourier sobre distribuciones en $\mathcal{D}'([0, T])$.

Proposición 2.0.12. Sean $f, g \in \mathcal{D}'([0, T])$, $\varphi \in \mathcal{D}([0, T])$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces

1. (Relación de Parseval)

$$\langle f, \varphi \rangle = T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}^d(k) \hat{\varphi}^d(-k);$$

$$2. \widehat{f * \varphi}^d(k) = \hat{f}^d(k) \hat{\varphi}^d(k) \text{ y } \widehat{f * g}^d(k) = \hat{f}^d(k) \hat{g}^d(k);$$

$$3. \widehat{f^{(j)}}^d(k) = \left(\frac{2\pi i k}{T}\right)^j \hat{f}^d(k);$$

$$4. \widehat{f\varphi}^d(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}^d(m) \hat{\varphi}^d(k - m).$$

Para finalizar la revisión sobre distribuciones periódicas, vamos a caracterizar el espacio $\mathcal{P}'([0, T])$ en términos de la transformada de Fourier.

Definición 2.0.13. Una sucesión de números complejos $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es llamada de crecimiento lento si existen constantes $C > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\alpha_k| \leq C|k|^m, \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

El conjunto de todas las sucesiones de crecimiento lento será denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$.

Proposición 2.0.14. $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es el dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

Proposición 2.0.15. Sea $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$, entonces existe una única $f \in \mathcal{P}'([0, T])$ tal que $\hat{f}^d = \alpha$. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{P}'([0, T])$, entonces $\hat{f}^d \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. En otras palabras,

$$(\mathcal{P}'([0, T]))^{\wedge d} = \mathcal{S}'(\mathbb{Z}).$$

2.0.2. Espacios de Lebesgue Esta sección es dedicada a los espacios de Lebesgue.

Los resultados de esta sección pueden ser encontrados en (Folland, 1999).

Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^N , para una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medible, definimos

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} & \text{si } 0 < p < \infty, \\ \text{esssup}_{x \in \Omega} |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Note de la definición de $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ que $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} = 0$ si, y solamente si, $f = g$ en casi todo punto $x \in \Omega$. Por esta razón decimos que dos funciones f y g están en la misma clase de equivalencia si ellas son iguales en Ω , salvo en un conjunto de medida nula.

El espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$ es definido como el espacio de todas las clases de equivalencias de funciones f tales que $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ es finito. En el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ será denotado por L^p . No es difícil verificar que el funcional $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ define una quasi-norma, y puede ser demostrado que para el caso $1 \leq p \leq \infty$, el funcional $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ define una norma.

La siguiente es una versión generalizada de la desigualdad de Hölder.

Lema 2.0.16. (Desigualdad de Hölder) Sean f_1, f_2, \dots, f_k funciones tales que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$

$\forall i$ con $1 \leq p_i \leq \infty$ y $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} \leq 1$, y sea f definida como

$$f = \prod_{i=1}^k f_i.$$

Entonces, $f \in L^p(\Omega)$ donde $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i}$, y vale que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue medibles, su convolución, denotada por $f * g$, es definida como

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy,$$

siempre que la integral exista.

En el contexto de los espacios L^p , se tienen los siguientes resultados que involucran la convolución.

Proposición 2.0.17. (Desigualdad de Young). *Asuma que $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$, $f \in L^p$ y $g \in L^q$. Entonces*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Proposición 2.0.18. *Si p y q son exponente conjugados, esto es, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y si $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces, $f * g$ es acotada y uniformemente continua. Si $1 < p < \infty$, entonces $f * g \in C_0$.*

Proposición 2.0.19. *Si $f \in L^1$, $g \in C^k$, y $\partial^\alpha g$ es acotada para $|\alpha| \leq k$, entonces $f * g \in C^k$ y $\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ para $|\alpha| \leq k$.*

2.0.3. Espacios de Schwartz, espacios de distribuciones temperadas y transformada de Fourier

En esta sección introducimos la clase de Schwartz, el espacio de las distribuciones temperadas y definimos la transformada de Fourier sobre estos espacios.

Comenzamos con la definición de función de crecimiento lento.

Definición 2.0.20. Una función $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ es llamada de crecimiento lento, si para cada multi-índice $\alpha \in (\mathbb{N}^*)^N$ existe $M = M(\alpha, \psi) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \leq C(\alpha, \psi) (1 + |x|)^M.$$

Introducimos ahora la clase de Schwartz.

Definición 2.0.21. Decimos que una función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ pertenece a la clase de Schwartz, si para cada par de multi-índices $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}^*)^N$ existe una constante no negativa $C_{\alpha, \beta}$ tal que

$$\rho_{\alpha, \beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = C_{\alpha, \beta} < \infty. \quad (2.1)$$

El conjunto de todas las funciones en la clase de Schwartz en \mathbb{R}^N es denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{S}$.

Los funcionales definidos en (2.1) constituyen una familia de semi-normas respecto a la cual el espacio \mathcal{S} es un espacio de Frechet con el siguiente sentido de convergencia.

$$f_k \rightarrow f \text{ en } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \iff f_k, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\alpha, \beta}(f_k - f) = 0$$

$\forall \alpha, \beta$ multi-índices.

Sigue directo de la definición que, si $f \in \mathcal{S}$, entonces, $P\partial^\beta f \in \mathcal{S}$ para cualquier

multi-índice β y cualquier polinomio P . Más generalmente, no es difícil probar que si ψ es una función de crecimiento lento, entonces $\psi f \in \mathcal{S}$. Finalmente, un cálculo simple muestra que $\mathcal{S} \subset L^p$, con inclusión continua, para $1 \leq p \leq \infty$.

Note que de la Proposición 2.0.19 sigue que la convolución de dos funciones en la clase de Schwartz define una función acotada y de clase C^∞ , de hecho, en este caso se tiene un resultado adicional, que es presentado en la siguiente proposición.

Proposición 2.0.22. Sean $f, g \in \mathcal{S}$, entonces $f * g \in \mathcal{S}$.

A seguir definimos la **transformada de Fourier** sobre L^1 .

Definición 2.0.23. La transformada de Fourier de una función $f \in L^1$ es definida por

$$\mathcal{F}_c f(\xi) = \hat{f}^c(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x) dx.$$

Note que la integral anterior está bien definida para toda $f \in L^1$, de hecho, es directo mostrar que $\hat{f}^c \in L^\infty$.

La siguiente proposición muestra algunas de las propiedades elementales de la transformada de Fourier.

Proposición 2.0.24. Sean $f, g \in L^1$. Entonces

(a) $\widehat{\tau_y f}^c(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot y} \hat{f}^c(\xi)$ y $\tau_\eta(\hat{f}) = \hat{h}$, donde $h(x) = e^{2\pi i \eta \cdot x} f(x)$. Aquí $\tau_y f(x) := f(x + y)$;

(b) Si T es una transformación lineal invertible de \mathbb{R}^n y $S = (T^*)^{-1}$ es la inversa de la transpuesta de T , entonces $\widehat{f \circ T}^c = |\det T|^{-1} \hat{f}^c \circ S$;

$$(c) \widehat{f * g}^c = \hat{f}^c \cdot \hat{g}^c;$$

$$(d) \text{ Si } x^\alpha f \in L^1 \text{ para } |\alpha| \leq k, \text{ entonces } \hat{f}^c \in C^k \text{ y } \partial^\alpha \hat{f}^c = [(-2\pi i x)^\alpha f]^\wedge{}^c;$$

$$(e) \text{ Si } f \in C^k, \partial^\alpha f \in L^1 \text{ para } |\alpha| \leq k, \text{ y } \partial^\alpha f \in C_0 \text{ para } |\alpha| \leq k - 1, \text{ entonces } \widehat{\partial^\alpha f}^c(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}^c(\xi);$$

$$(f) \text{ (**Lema de Riemann-Lebesgue**) } \mathcal{F}_c(L^1(\mathbb{R}^N)) \subset C_0(\mathbb{R}^N).$$

Sobre la acción de la transformada de Fourier sobre la clase de Schwartz se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.0.25. \mathcal{F}_c mapea la clase de Schwartz \mathcal{S} continuamente en sí misma.

Para continuar, estamos interesados en definir el operador inverso de \mathcal{F}_c . Para esto, definimos el operador \mathcal{F}_c^{-1} (o $(\check{\cdot})^c$) como

$$\mathcal{F}_c^{-1}(f)(x) = \check{f}^c(x) := \hat{f}^c(-x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i \xi \cdot x} f(\xi) d\xi, \quad \forall f \in L^1.$$

Como en el caso de la transformada de Fourier, es claro que el operador $(\check{\cdot})^c$ está bien definido, además, bajo ciertas condiciones de la función, el operador $(\check{\cdot})^c$ actúa como el inverso de la transformada de Fourier, como es establecido en la siguiente proposición.

Proposición 2.0.26. (Teorema de Inversión de Fourier) Sea $f \in L^1$ tal que $\mathcal{F}_c(f) \in L^1$. Entonces, f coincide en casi todo punto con una función continua f_0 y, $\mathcal{F}_c(\mathcal{F}_c^{-1}(f)) = \mathcal{F}_c^{-1}(\mathcal{F}_c(f)) = f_0$.

Como consecuencia de la proposición anterior, es fácil concluir que la transformada de Fourier es un isomorfismo en el espacio de Schwartz \mathcal{S} con inversa dada por el operador $(\check{\cdot})^c$.

El espacio dual de \mathcal{S} , esto es, el espacio de funcionales lineales y continuos sobre \mathcal{S} , es llamado el espacio de las **distribuciones temperadas** y es denotado por \mathcal{S}' . No es difícil probar que, si f es una función localmente integrable y $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |f(x)| dx < \infty$ para algún N , entonces f define una distribución temperada vía la aplicación

$$\Psi_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

En particular, cada $f \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$, define una distribución temperada.

Muchos conceptos y propiedades pueden ser extendidos al espacio \mathcal{S}' usando dualidad, como sigue:

- (i) **(Diferenciación)** Dado un multi-índice α y una distribución temperada F , definimos la distribución temperada $\partial^\alpha F$ por

$$\langle \partial^\alpha F, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle F, \partial^\alpha \phi \rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$.

- (ii) **(Multiplicación por funciones de crecimiento lento)** Sea ψ una función de crecimiento lento y F una distribución temperada. Definimos la distribución temperada ψF por

$$\langle \psi F, \phi \rangle := \langle F, \psi \phi \rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$.

- (iii) **(Traslación)** Dado $y \in \mathbb{R}^N$ y $F \in \mathcal{S}'$, la distribución temperada $\tau_y F$ es definida por medio de la relación

$$\langle \tau_y F, \phi \rangle := \langle F, \tau_{-y} \phi \rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$.

- (iv) **(Composición con operadores lineales)** Sea T una transformación lineal invertible en \mathbb{R}^N y $F \in \mathcal{S}'$, definimos la distribución temperada $F \circ T$ por medio de la relación

$$\langle F \circ T, \phi \rangle := |\det T|^{-1} \langle F, \phi \circ T^{-1} \rangle.$$

En particular, si $Tx = -x$ entonces podemos definir la reflexión en el origen de una distribución temperada por medio de la relación

$$\langle \tilde{F}, \phi \rangle := \langle F, \tilde{\phi} \rangle,$$

donde $\tilde{\phi}(x) := \phi(-x)$.

- (vi) **(Convolución forma I)** Sean $\psi \in \mathcal{S}$ y $F \in \mathcal{S}'$. La convolución entre F y ψ es la función $F * \psi$ definida por

$$F * \psi(x) := \langle F, \tau_x \psi \rangle.$$

- (vi) **(Convolución forma II)** Para $\psi \in \mathcal{S}$ y $F \in \mathcal{S}'$, podemos definir la distribución $F * \psi$

por medio de la relación

$$\langle F * \psi, \phi \rangle := \langle F, \phi * \tilde{\psi} \rangle.$$

(vii) **(Transformada de Fourier y transformada inversa de Fourier)** Dada una distribución temperada F , definimos su transformada de Fourier (resp. transformada inversa de Fourier) por medio de la relación

$$\langle \hat{F}^c, \phi \rangle := \langle F, \hat{\phi}^c \rangle \quad (\text{reps. } \langle \check{F}^c, \phi \rangle := \langle F, \check{\phi}^c \rangle),$$

para cada $\phi \in \mathcal{S}$.

Observación 2.0.27. De la definición de transformada de Fourier y transformada de Fourier inversa sobre distribuciones, sigue que la transformada de Fourier es una biyección en \mathcal{S}' . Además, si se impone en \mathcal{S}' la topología débil-*, esto es, la topología de la convergencia puntal de los funcionales en \mathcal{S}' , sigue que, la transformada de Fourier, así como la transformada de Fourier inversa son continuas, esto es, la transformada de Fourier es un isomorfismo en \mathcal{S}' .

Las propiedades básicas de la transformada de Fourier continúan válidas en el contexto de las distribuciones temperadas. En la siguiente proposición enunciamos las más importantes.

Proposición 2.0.28. Sean $F, G \in \mathcal{S}'$, $\phi \in \mathcal{S}$, b un número real y α un multi-índice. Entonces

$$(i) \widehat{F + G}^c = \hat{F}^c + \hat{G}^c;$$

$$(ii) \widehat{bF^c} = b\widehat{F^c};$$

$$(iii) \widehat{\tau_y F^c} = e^{-2\pi i \xi \cdot y} \widehat{F^c} \text{ y } \tau_\eta (\widehat{F^c}) = (e^{2\pi i \eta \cdot x} F^c)^{\wedge c};$$

$$(iv) \partial^\alpha \widehat{F^c} = [(-2\pi i x)^\alpha F^c]^{\wedge c} \text{ y } \widehat{\partial^\alpha F^c} = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{F^c};$$

(v) Si T es una transformación lineal invertible en \mathbb{R}^N y $(T^*)^{-1}$ es la inversa de la transpuesta de T , entonces $\widehat{F \circ T^c} = |\det T|^{-1} \widehat{F^c} \circ (T^*)^{-1}$;

$$(vi) \widehat{F * \phi^c} = \widehat{F^c} \cdot \widehat{\phi^c} \text{ y } \widehat{F \phi^c} = \widehat{F^c} * \widehat{\phi^c}.$$

2.0.4. Distribuciones temperadas en variables periódicas y no periódicas

En lo que sigue denotamos por $L^1(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$ al espacio de funciones $v \in L^1(\mathbb{R}^{N-1} \times [0, T])$ periódicas de periodo T en la última variable, y denotamos por $C^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$ al conjunto de funciones $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ periódicas de periodo T en la última variable.

Iniciamos introduciendo el concepto de transformada de Fourier para funciones definidas en $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T$.

Definición 2.0.29. Sea $v \in L^1(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$. La transformada de Fourier (mixta) de v en $(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}$ es definida por

$$\hat{v}(\xi, k) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{N-1}} v(x, s) e^{-2\pi i [\xi \cdot x + \frac{ks}{T}]} dx ds.$$

Extendemos ahora el concepto de la clase de Schwartz en el conjunto $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T$, esto es

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T); \|f\|_{\alpha, \beta} < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N\},$$

donde α, β son multi-índices y

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{(x, s) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T} |(x, s)^\alpha \partial^\beta f(x, s)|.$$

Observación 2.0.30. Note que como la variable s se mueve en \mathbb{T}_T se tiene que

$$\sup_{(x, s) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T} |(x, s)^\alpha \partial^\beta f(x, s)| < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{(x, s) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T} |x^{\alpha'} \partial^\beta f(x, s)| < \infty,$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ y $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1})$ y $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$. Además, sigue también que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$ si, y solamente si, para cada $m \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\sup_{(x, s) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T} |(1 + |x|)^m \partial^\beta f(x, s)| < \infty.$$

Definimos también el espacio

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}) := \{f(\cdot, k) \in C^\infty(\mathbb{R}^{N-1}); \|f\|_{\alpha, \beta}^* < \infty\},$$

donde $\alpha \in (\mathbb{N}^*)^N$, $\beta \in (\mathbb{N}^*)^{N-1}$ son multi-índices y

$$\|f\|_{\alpha, \beta}^* = \sup_{(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}} |(\xi, k)^\alpha \partial^\beta f(\xi, k)|.$$

Observación 2.0.31. Note que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$ si, y solamente si, para cada $m, n \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\sup_{(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}} |(1 + |k|)^m (1 + |\xi|)^n \partial^\beta f(\xi, k)| < \infty.$$

En el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$ tenemos las siguientes definiciones:

Definición 2.0.32. Para $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$, se tiene

1. (Convolución)

$$(f * g)(x, s) := \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x - y, s - r)g(y, r)dydr, \forall (x, s) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T.$$

2. (Transformada de Fourier)

$$\hat{f}(\xi, k) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x, s)e^{-2\pi i[\xi \cdot x + \frac{ks}{T}]} dx ds, \forall (\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}.$$

Proposición 2.0.33. La transformada de Fourier es un isomorfismo entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$, entonces por definición

$$\hat{f}(\xi, k) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x, s)e^{-2\pi i x \xi} e^{-2\pi i \frac{ks}{T}} dx ds.$$

Note que, para $\beta \in (\mathbb{N}^*)^{N-1}$ y $m \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} \xi^\beta k^m \hat{f}(\xi, k) &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x, s) \xi^\beta e^{-2\pi i x \xi} k^m e^{-2\pi i \frac{ks}{T}} dx ds \\ &= C_1 \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(x, s) \partial_x^\beta (e^{-2\pi i x \xi}) \partial_s^m \left(e^{-2\pi i \frac{ks}{T}} \right) dx ds \\ &= C_2 \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\partial_s^m \partial_x^\beta f)(x, s) e^{-2\pi i x \xi} e^{-2\pi i \frac{ks}{T}} dx ds. \end{aligned}$$

Además, para $\alpha \in (\mathbb{N}^*)^{N-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_\xi^\alpha \left(\xi^\beta k^m \hat{f} \right) (\xi, k) &= C_2 \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\partial_s^m \partial_x^\beta f) (x, s) \partial_\xi^\alpha \left(e^{-2\pi i x \xi} \right) e^{-2\pi i \frac{k s}{T}} dx ds \\ &= C_3 \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{N-1}} x^\alpha (\partial_s^m \partial_x^\beta f) (x, s) e^{-2\pi i x \xi} e^{-2\pi i \frac{k s}{T}} dx ds \\ &= C_3 \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{N-1}} x^\alpha (\partial_s^m \partial_x^\beta f) (x, s) \frac{(1 + |x|)^N}{(1 + |x|)^N} e^{-2\pi i x \xi} e^{-2\pi i \frac{k s}{T}} dx ds. \end{aligned}$$

De lo que sigue que

$$\left| \partial_\xi^\alpha \left(\xi^\beta k^m \hat{f} \right) (\xi, k) \right| \leq C_4 \sup_{(x,s) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T} \left| x^\alpha (\partial_s^m \partial_x^\beta f) (x, s) (1 + |x|)^N \right|,$$

con lo que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$.

Suponga ahora que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$ y defina

$$\check{g}(x, s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(\xi, k) e^{2\pi i x \xi} e^{2\pi i \frac{k s}{T}} d\xi.$$

Note que para cada x fijo, la función $\phi_x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi_x(k) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(\xi, k) e^{2\pi i x \xi} d\xi,$$

cumple que, para cada $m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} k^m \phi_x(k) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} k^m g(\xi, k) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} k^m g(\xi, k) \frac{(1 + |x|)^N}{(1 + |x|)^N} e^{2\pi i x \xi} d\xi, \end{aligned}$$

entonces, dado que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$, se tiene que

$$|k^m \phi_x(k)| \leq C(m, N).$$

Note que la constante $C(m, N)$ no depende de x , esto implica que la serie que define

$$\check{g}(x, s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi_x(k) e^{2\pi i \frac{ks}{T}},$$

es absolutamente y uniformemente convergente, además define una función continua y periódica, también, para cada $\beta \in (\mathbb{N}^*)^{N-1}$, se tiene

$$\begin{aligned} x^\beta \check{g}(x, s) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(\xi, k) x^\beta e^{2\pi i x \xi} e^{2\pi i \frac{ks}{T}} d\xi \\ &= C_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(\xi, k) \partial_\xi^\beta (e^{2\pi i x \xi}) e^{2\pi i \frac{ks}{T}} d\xi \\ &= C_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\partial_\xi^\beta g)(\xi, k) e^{2\pi i x \xi} e^{2\pi i \frac{ks}{T}} d\xi, \end{aligned}$$

adicionalmente, para $\alpha \in (\mathbb{N}^*)^{N-1}$ y $m \in \mathbb{N}^*$, se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \partial_s^m (x^\beta \check{g})(x, s) &= C_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\partial_\xi^\beta g)(\xi, k) \partial_x^\alpha (e^{2\pi i x \xi}) \partial_s^m (e^{2\pi i \frac{ks}{T}}) d\xi \\ &= C_3 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\partial_\xi^\beta g)(\xi, k) \xi^\alpha e^{2\pi i x \xi} k^m e^{2\pi i \frac{ks}{T}} d\xi \\ &= C_3 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi^\alpha k^m (\partial_\xi^\beta g)(\xi, k) e^{2\pi i x \xi} e^{2\pi i \frac{ks}{T}} d\xi. \end{aligned}$$

Ya que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$ obtenemos

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha \partial_s^m (x^\beta \check{g})(x, s)| &\leq C_3 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \xi^\alpha k^m \left(\partial_\xi^\beta g \right) (\xi, k) \right| \frac{(1 + |\xi|)^N}{(1 + |\xi|)^N} \frac{1 + |k|^2}{1 + |k|^2} d\xi \\
&\leq C_4 \sup_{(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}} \left| \xi^\alpha k^m \left(\partial_\xi^\beta g \right) (\xi, k) (1 + |\xi|)^N (1 + |k|^2) \right|.
\end{aligned}$$

Con lo que $\check{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$.

Finalmente, dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$ se tiene que

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}_d(\mathcal{F}_c(f)) = \mathcal{F}_c(\mathcal{F}_d(f)),$$

y si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$, se tiene que

$$\mathcal{F}^{-1}(g) = \mathcal{F}_d^{-1}(\mathcal{F}_c^{-1}(g)) = \mathcal{F}_c^{-1}(\mathcal{F}_d^{-1}(g)).$$

De la Proposición 2.0.10 y del Corolario 2.0.25 sigue que, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$

entonces

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}_c^{-1}(\mathcal{F}_d^{-1}(\mathcal{F}_d(\mathcal{F}_c(f)))) = f$$

y si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$ entonces

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g)) = \mathcal{F}_c(\mathcal{F}_d(\mathcal{F}_d^{-1}(\mathcal{F}_c^{-1}(g)))) = g.$$

□

Como es de esperar, el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$ es definido como el espacio dual

del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$. Sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$ se definen de modo similar los conceptos de derivada, multiplicación, convolución y transformada de Fourier a como fueron definidos en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, en particular, por definición, dada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$, su transformada de Fourier $\mathcal{F}(f)$ es dada por

$$\langle \mathcal{F}(f), \phi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\phi) \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}).$$

Similarmente, para $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$, su transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}(g)$ es dada por

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(g), \varphi \rangle = \langle g, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T).$$

Además, se tienen las siguientes propiedades en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$:

Proposición 2.0.34. Sean $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_T)$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces

1. $\widehat{f * \varphi}(\xi, k) = \hat{f}(\xi, k)\hat{\varphi}(\xi, k)$;
2. $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi, k) = (2\pi i(\xi, k))^\alpha \frac{1}{T^{\alpha_N}} \hat{f}(\xi, k)$, donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{N}^*)^N$;
3. $\widehat{f\varphi}(\xi, k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \hat{f}(\eta, m)\hat{\varphi}(\xi - \eta, k - m)d\eta$.

Para futuras referencias en el trabajo, recordamos la definición de la función Beta.

Definición 2.0.35. La función beta está definida como la integral

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

para $x, y \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{Re}(x) > 0$ y $\operatorname{Re}(y) > 0$.

2.0.5. Kernel de Schwartz En esta sección vamos a enunciar el teorema del Kernel de Schwartz. Antes de enunciar tal resultado vamos a definir el concepto de producto tensorial. El contenido de esta sección puede ser encontrado en ([Hörmander, Berlin, 2003.](#)).

Definición 2.0.36. Si Ω_j es un abierto en \mathbb{R}^{N_j} , $j = 1, 2$ y $\varphi_j \in C(\Omega_j)$, entonces la función $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ en $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2}$ definida por

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(x_1, x_2) := \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2), \quad x_j \in \Omega_j,$$

es llamada el producto directo (o tensorial) de φ_1 y φ_2 .

Proposición 2.0.37. Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos de \mathbb{R}^{N_1} y \mathbb{R}^{N_2} , respectivamente. Toda distribución $k \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ define un operador $K : \mathcal{D}(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$ lineal y continuo tal que

$$\langle k, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle K\varphi_2, \varphi_1 \rangle, \quad \text{para todo } \varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1) \text{ y } \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2). \quad (2.2)$$

Recíprocamente, para cada operador continuo K existe una única distribución $k \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ tal que (2.2) es válida. La distribución k es llamada el kernel del operador K .

Observación 2.0.38. El teorema permanece válido si \mathcal{D} es sustituido por \mathcal{S} y si $\Omega_1 = \mathbb{R}^{N_1}$ y $\Omega_2 = \mathbb{R}^{N_2}$ (véase ([Schwartz, 1958](#))).

2.0.6. Lemas técnicos En esta sección presentaremos algunos lemas técnicos que serán usados en demostraciones importantes de este trabajo.

Lema 2.0.39. Si $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ donde $a > 0$, entonces $\widehat{f^c}(\xi) = a^{-n/2} e^{-\pi|\xi|^2/a}$.

Demostración. Primero consideremos el caso $n = 1$. Sabemos que la derivada de $f(x) = e^{-\pi a x^2}$ es $f'(x) = -2\pi i x e^{-\pi a x^2}$, ahora por la Proposición 2.0.24, se tiene que

$$\begin{aligned} (\widehat{f^c})'(\xi) &= [(-2\pi i x) f]^{\wedge c}(\xi) = [-2\pi i x e^{-\pi a x^2}]^{\wedge c}(\xi) = \frac{i}{a} (-2\pi a x e^{-\pi a x^2})^{\wedge c}(\xi) \\ &= \frac{i}{a} (\widehat{f'})^c(\xi) = \frac{i}{a} (2\pi i \xi) \widehat{f^c}(\xi) = \frac{-2\pi \xi}{a} \widehat{f^c}(\xi). \end{aligned}$$

Ahora, considere la función $e^{\frac{\pi \xi^2}{a}} \widehat{f^c}(\xi)$, note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[e^{\frac{\pi \xi^2}{a}} \widehat{f^c}(\xi) \right] &= \frac{2\pi \xi}{a} e^{\frac{\pi \xi^2}{a}} \widehat{f^c}(\xi) + e^{\frac{\pi \xi^2}{a}} (\widehat{f^c})'(\xi) \\ &= \frac{2\pi \xi}{a} e^{\frac{\pi \xi^2}{a}} \widehat{f^c}(\xi) - e^{\frac{\pi \xi^2}{a}} \frac{2\pi \xi}{a} \widehat{f^c}(\xi) = 0, \end{aligned}$$

por lo que se tiene que $e^{\frac{\pi \xi^2}{a}} \widehat{f^c}(\xi) = C$. Para determinar el valor de la constante C , considere $\xi = 0$, entonces

$$\widehat{f^c}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi x^2}{a}} dx = \left(\frac{\pi}{a\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}},$$

por lo tanto

$$\widehat{f^c}(\xi) = a^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{a}}.$$

Ahora consideremos el caso n -dimensional. En este caso $f(x) = e^{-\pi a \sum_{j=1}^N x_j^2} = \prod_{j=1}^N e^{-\pi a x_j^2}$, por lo que

$$\begin{aligned}\widehat{f}^c(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^N e^{-\pi a x_j^2} \cdot e^{-2\pi i \xi_j x_j} dx \\ &= \prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi a x_j^2 - 2\pi i \xi_j x_j} dx = \prod_{j=1}^N a^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi \xi_j^2 / a} = a^{-\frac{N}{2}} e^{-\pi \xi^2 / a}.\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\widehat{f}(\xi) = a^{-\frac{N}{2}} e^{-\pi \xi^2 / a}.$$

□

Lema 2.0.40. Sean $0 < \alpha, \beta < N$ tales que $0 < \alpha + \beta < N$ entonces

$$\left(\frac{1}{|x|^{N-\alpha}} * \frac{1}{|x|^{N-\beta}} \right) (y) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N-\alpha}} \frac{1}{|y-x|^{N-\beta}} dx = C(\alpha, \beta) \frac{1}{|y|^{N-(\alpha+\beta)}},$$

donde

$$C(\alpha, \beta) = \frac{c_\alpha c_\beta c_{N-\alpha-\beta}}{c_{\alpha+\beta} c_{N-\alpha} c_{N-\beta}} \quad \text{y} \quad c_\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Demostración. Del Lema 2.0.39, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi t |x|^2} \widehat{\phi}(x) dx = t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\pi |\xi|^2}{t}} \phi(\xi) d\xi,$$

así, multiplicando por $t^{-1+\frac{n-\alpha}{2}}$ e integrando se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\phi}(x)^c \left[\int_0^\infty e^{-\pi t |x|^2} t^{-1+\frac{n-\alpha}{2}} dt \right] dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\xi) \left[\int_0^\infty e^{-\frac{\pi |\xi|^2}{t}} t^{-1+\frac{n-\alpha}{2}} t^{-\frac{n}{2}} dt \right] d\xi$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} C_{n-\alpha} |x|^{\alpha-n} \widehat{\phi(x)}^c dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\xi) \left[\int_0^\infty e^{-\pi|\xi|^2 t^{-1}} (t^{-1})^{\frac{\alpha}{2}+1} dt \right] d\xi \\ \int_{\mathbb{R}^N} C_{n-\alpha} |x|^{\alpha-n} \widehat{\phi(x)}^c dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\xi) \left[\int_\infty^0 e^{-\pi|\xi|^2 u} (u)^{\frac{\alpha}{2}+1} \frac{du}{-u^2} \right] d\xi \\ \int_{\mathbb{R}^N} C_{n-\alpha} |x|^{\alpha-n} \widehat{\phi(x)}^c dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\xi) \left[\int_0^\infty e^{-\pi|\xi|^2 u} (u)^{\frac{\alpha}{2}-1} du \right] d\xi \\ C_{n-\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha-n} \widehat{\phi(x)}^c dx &= C_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{-\alpha} \phi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que

$$C_\alpha \widehat{|x|^{-\alpha}}^c = C_{N-\alpha} |x|^{\alpha-N} \iff C_\alpha |x|^{-\alpha} = C_{N-\alpha} \widehat{|x|^{\alpha-N}}^c.$$

A partir de esta última afirmación demostraremos la proposición inicial, para esto hacien-

do $\alpha_1 = N - \alpha$ y $\beta_1 = N - \beta$, note que

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\frac{1}{|x|^{\alpha_1}} * \frac{1}{|x|^{\beta_1}}} \right)^c &= \widehat{|x|^{\alpha_1}}^c \cdot \widehat{|x|^{\beta_1}}^c \\ &= \frac{C_{N-\alpha_1}}{C_{\alpha_1}} |x|^{\alpha_1-N} \cdot \frac{C_{N-\beta_1}}{C_{\beta_1}} |x|^{\beta_1-N} \\ &= \frac{C_{N-\alpha_1} C_{N-\beta_1}}{C_{\alpha_1} C_{\beta_1}} |x|^{\alpha_1-N} |x|^{\beta_1-N} \\ &= \frac{C_{N-\alpha_1} C_{N-\beta_1}}{C_{\alpha_1} C_{\beta_1}} |x|^{\alpha_1+\beta_1-2N}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|x|^{\alpha_1}} * \frac{1}{|x|^{\beta_1}} \right) &= \frac{C_{N-\alpha_1} C_{N-\beta_1}}{C_{\alpha_1} C_{\beta_1}} (|x|^{\alpha_1+\beta_1-2N})^{-c} \\ &= \frac{C_{N-\alpha_1} C_{N-\beta_1}}{C_{\alpha_1} C_{\beta_1}} \frac{C_{(\alpha_1+\beta_1-N)}}{C_{N-(\alpha_1+\beta_1-N)}} |x|^{-(\alpha_1+\beta_1-N)} \\ &= C(\alpha, \beta) \frac{1}{|x|^{N-(\alpha+\beta)}}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{|x|^{N-\alpha}} * \frac{1}{|x|^{N-\beta}} = C(\alpha, \beta) \frac{1}{|x|^{N-(\alpha+\beta)}}, \quad \text{donde } C(\alpha, \beta) = \frac{C_{\alpha} C_{\beta} C_{N-\alpha-\beta}}{C_{N-\alpha} C_{N-\beta} C_{\alpha+\beta}}.$$

□

Lema 2.0.41. Para $k \in \mathbb{Z}$, $0 < b, c < 1$ y $1 < b + c < 2$ tenemos que

$$\left(\frac{1}{|m|^b} * \frac{1}{|m|^c} \right) (k) = \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} \leq \max\{3^b, 3^c\} C(1-b, 1-c) \frac{1}{|k|^{b+c-1}},$$

donde la constantes $C(\cdot, \cdot)$ es la misma definida en el Lema 2.0.40.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{k\}} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} + \sum_{m \in \mathbb{Z}^-} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} \\ &=: S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Note que para, como $0 < b, c$, considerando $m > k$ la sucesión $\left(\frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c}\right)_{m \in \mathbb{Z}}$ es decreciente, entonces, por el test de la integral y del Lema 2.0.40, podemos estimar S_1 como

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} + \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} + \int_{k+1}^{\infty} \frac{1}{|k-x|^b} \frac{1}{|x|^c} dx \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|k-x|^b} \frac{1}{|x|^c} dx \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} + \left(\frac{1}{|x|^b} * \frac{1}{|x|^c}\right)(k) \\
&\leq \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} + C(1-b, 1-c) \frac{1}{|k|^{b+c-1}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} &= \frac{1}{|k-1|^b} + \frac{1}{|k-2|^b} \frac{1}{2^c} + \dots + \frac{1}{|k-\lceil \frac{k-1}{2} \rceil|^b} \frac{1}{|\lceil \frac{k-1}{2} \rceil|^c} \\
&\quad + \dots + \frac{1}{2^b} \frac{1}{|k-2|^c} + \frac{1}{|k-1|^c},
\end{aligned}$$

donde $\lceil x \rceil$ representa el menor entero mayor o igual a x . Sea $C_l := \sup_{k \geq 2l} \frac{k+l}{k-l}$, y note que la función $f(x) = \frac{x+l}{x-l}$ es decreciente, puesto que $f'(x) = \frac{-2l}{(x-l)^2} < 0$. Así, concluimos que $C_l = \frac{2l+l}{2l-l} = 3$ y consecuentemente vale la desigualdad $\frac{1}{k-l} \leq 3 \frac{1}{k+l}$, para todo $k \geq 2l$. Por lo tanto, como $k \geq 2\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$, y $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil = k - (\lceil \frac{k-1}{2} \rceil + k)$ como se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} &\leq 3^b \left(\frac{1}{|k+1|^b} + \frac{1}{|k+2|^b} \frac{1}{2^c} + \dots + \frac{1}{|k+\lceil \frac{k-1}{2} \rceil|^b} \frac{1}{|\lceil \frac{k-1}{2} \rceil|^c} \right) \\
&\quad + 3^c \left(+ \dots + \frac{1}{2^b} \frac{1}{|k+2|^c} + \frac{1}{|k+1|^c} \right) \\
&\leq 3^b \sum_{m=1}^{\lceil \frac{k-1}{2} \rceil} \frac{1}{|k+m|^b} \frac{1}{|m|^c} + 3^c \sum_{m=1}^{\lceil \frac{k-1}{2} \rceil} \frac{1}{|k+m|^c} \frac{1}{|m|^b} \\
&\leq 3^b \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{|k+m|^b} \frac{1}{|m|^c} + 3^c \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{|k+m|^c} \frac{1}{|m|^b}
\end{aligned}$$

como $\left(\frac{1}{|k+m|^b} \frac{1}{|m|^c} \right)_{m \in \mathbb{Z}^+}$ y $\left(\frac{1}{|k+m|^c} \frac{1}{|m|^b} \right)_{m \in \mathbb{Z}^+}$ son sucesiones decrecientes sigue nuevamente por el test de la integral y y del Lemma 2,0,40

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} &\leq 3^b \int_1^\infty \frac{1}{|k+x|^b} \frac{1}{|x|^c} dx + 3^c \int_1^\infty \frac{1}{|k+x|^c} \frac{1}{|x|^b} dx \\
&\leq 3^b \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|k+x|^b} \frac{1}{|x|^c} dx + 3^c \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|k+x|^c} \frac{1}{|x|^b} dx \\
&= 3^b \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x-(-k)|^b} \frac{1}{|x|^c} dx + 3^c \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x-(-k)|^c} \frac{1}{|x|^b} dx \\
&\leq 2 \max \{3^b, 3^c\} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x-(-k)|^b} \frac{1}{|x|^c} dx \\
&\leq 2 \max \{3^b, 3^c\} \left(\frac{1}{|x|^b} * \frac{1}{|x|^c} \right) (-k) \\
&\leq 2 \max \{3^b, 3^c\} C(1-b, 1-c) \frac{1}{|k|^{b+c-1}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S_1 \leq 2 \max \{3^b, 3^c\} C(1-b, 1-c) \frac{1}{|k|^{b+c-1}}.$$

Ahora para estimar S_2 basta observar que

$$\left(\frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} \right)_{m \in \mathbb{Z}^-} = \left\{ \frac{1}{|k+m|^b} \frac{1}{|m|^c} \right\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$$

y de forma análoga a como se analizó S_1 , se tiene que

$$S_2 \leq 2 \max \{3^b, 3^c\} C(1-b, 1-c) \frac{1}{|k|^{b+c-1}}.$$

Por las estimativas que acabamos de dar para S_1 y S_2 resulta que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}} \frac{1}{|k-m|^b} \frac{1}{|m|^c} \leq 4 \max \{3^b, 3^c\} C(1-b, 1-c) \frac{1}{|k|^{b+c-1}}, \text{ para } k \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.3)$$

Finalmente, para el caso $k \in \mathbb{Z}^-$, usando el simple cambio de variable ($k_1 = -k$), se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}} \frac{1}{|k - m|^b} \frac{1}{|m|^c} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{|k - m|^b} \frac{1}{|m|^c} + \sum_{m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{k\}} \frac{1}{|k - m|^b} \frac{1}{|m|^c} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{|-k_1 - m|^b} \frac{1}{|m|^c} + \sum_{m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-k_1\}} \frac{1}{|-k_1 - m|^b} \frac{1}{|m|^c}, \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{|k_1 + m|^b} \frac{1}{|m|^c} + \sum_{m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-k_1\}} \frac{1}{|k_1 + m|^b} \frac{1}{|m|^c} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^-} \frac{1}{|k_1 - m|^b} \frac{1}{|m|^c} + \sum_{m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{k_1\}} \frac{1}{|k_1 - m|^b} \frac{1}{|m|^c} \tag{2.4} \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k_1\}} \frac{1}{|k_1 - m|^b} \frac{1}{|m|^c} \\
&\leq 4 \max \{3^b, 3^c\} C(1 - b, 1 - c) \frac{1}{|k_1|^{b+c-1}} \\
&= 4 \max \{3^b, 3^c\} C(1 - b, 1 - c) \frac{1}{|k|^{b+c-1}}.
\end{aligned}$$

□

3. Ecuaciones de Navier-Stokes en dominios finos

Las ecuaciones de Navier-Stokes en el dominio fino $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \varepsilon)$, con condiciones de frontera tipo Dirichlet, tienen la forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi = 0 & \text{en } \Omega_\varepsilon \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{en } \Omega_\varepsilon \times [0, \infty), \\ u = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \{0, \varepsilon\} \times (0, \infty), \\ u(x, s, 0) = u_0(x, s) & \text{en } \Omega_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Con el objetivo de usar el análisis de Fourier (transformada y series de Fourier) para resolver el sistema (3.1), extendemos periódicamente las funciones definidas en $\mathbb{R}^{N-1} \times [0, \varepsilon]$, esto es, dada una función $v : \mathbb{R}^{N-1} \times [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ definimos la función $v_{per} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que $v_{per}|_{\mathbb{R}^{N-1} \times [0, \varepsilon]} = v$ y tal que $v_{per}(x, s + \varepsilon) = v_{per}(x, s) \forall s \in \mathbb{R}$.

Volviendo a las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios finos, considerando las

extensiones periódicas de u , π y u_0 , obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_{per}}{\partial t} - \Delta u_{per} + (u_{per} \cdot \nabla) u_{per} + \nabla \pi_{per} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u_{per} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, \infty), \\ u_{per} = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}\varepsilon \times (0, \infty), \\ u_{per}(x, s, 0) = u_0(x, s) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

donde $\mathbb{Z}\varepsilon = \{\dots, -3\varepsilon, -2\varepsilon, -\varepsilon, 0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots\}$.

Usando la condición $\nabla \cdot u_{per} = 0$, sigue que $(u_{per} \cdot \nabla) u_{per} = \nabla \cdot (u_{per} \otimes u_{per})$, y aplicando el proyector de Helmholtz-Leray \mathbb{P} , el sistema (3.2) es equivalente al sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_{per}}{\partial t} - \Delta u_{per} + \mathbb{P} \nabla \cdot (u_{per} \otimes u_{per}) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u_{per} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, \infty), \\ u_{per} = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}\varepsilon \times (0, \infty), \\ u_{per}(x, s, 0) = u_{0per}(x, s) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Para resolver el sistema (3.3), consideramos inicialmente el problema lineal dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_{per}}{\partial t} - \Delta u_{per} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u_{per} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, \infty), \\ u_{per} = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}_\varepsilon \times (0, \infty), \\ u_{per}(x, s, 0) = u_{0per}(x, s) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Para resolverlo, procedemos a usar la transformada de Fourier (mixta) para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Delta u_{per} e^{-2\pi i[\xi \cdot x + \frac{ks}{\varepsilon}]} ds dx &= 0 \\
\frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 u_{per}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_{per}}{\partial s^2} \right) e^{-2\pi i[\xi \cdot x + \frac{ks}{\varepsilon}]} ds dx &= 0 \\
\frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 u_{per}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_{per}}{\partial s^2} \right) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx \right] e^{-2\pi i \frac{ks}{\varepsilon}} ds &= 0 \\
\frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 \widehat{u_{per}}^c}{\partial x_i^2}(\xi, s) + \frac{\partial^2 \widehat{u_{per}}^c}{\partial s^2}(\xi, s) \right) e^{-2\pi i \frac{ks}{\varepsilon}} ds &= 0 \\
\frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{N-1} (2\pi i \xi_i)^2 \widehat{u_{per}}^c(\xi, s) + \frac{\partial^2 \widehat{u_{per}}^c}{\partial s^2}(\xi, s) \right) e^{-2\pi i \frac{ks}{\varepsilon}} &= 0 \\
\frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} - \left[\sum_{i=1}^{N-1} (2\pi i \xi_i)^2 \widehat{u_{per}}^c(\xi, k) + \frac{\partial^2 \widehat{u_{per}}^c}{\partial x^2}(\xi, k) \right] &= 0 \\
\frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} - \left[\sum_{i=1}^{N-1} (2\pi i \xi_i)^2 \widehat{u_{per}}^c(\xi, k) + \left(2\pi i \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \widehat{u_{per}}^c(\xi, k) \right] &= 0 \\
\frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} - \left[\sum_{i=1}^{N-1} (2\pi i \xi_i)^2 \widehat{u_{per}}(\xi, k) + \left(2\pi i \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \widehat{u_{per}}(\xi, k) \right] &= 0 \\
\frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} - (2\pi i)^2 |\xi|^2 \widehat{u_{per}}(\xi, k) - (2\pi i)^2 \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \widehat{u_{per}}(\xi, k) &= 0 \\
\frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} + 4\pi^2 \left(|\xi|^2 + \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \right) \widehat{u_{per}}(\xi, k) &= 0,
\end{aligned}$$

además, como buscamos que $u_{per}(x, s, 0) = u_{per_0}(x, s)$, debemos tener que $\widehat{u_{per}}(\xi, k, 0) = \widehat{u_{0per}}(\xi, k)$, con lo que el problema que queremos resolver es dado por

$$\begin{cases} \frac{\widehat{\partial u_{per}}}{\partial t} + 4\pi^2 \left(|\xi|^2 + \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \right) \widehat{u_{per}}(\xi, k) = 0 \\ \widehat{u_{per}}(\xi, k, 0) = \widehat{u_{0per}}(\xi, k). \end{cases} \quad (3.5)$$

El sistema (3.5) es un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias (en térmi-

nos de la variable t), el cual resolvemos vía factor integrante para obtener

$$\widehat{u_{per}}(\xi, k, t) = \widehat{u_{0per}}(\xi, k) \cdot e^{-4\pi^2 \left(|\xi|^2 + \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2 \right) t}.$$

Para recuperar las incógnitas en variables originales, aplicamos la transformada de Fourier inversa para obtener

$$u_{per}(x, s, t) = u_{0per}(x, s) * \left(e^{-4\pi^2 \left(|\cdot|^2 + \left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)^2 \right) t} \right)^\vee.$$

Denotamos por $\{G_\varepsilon(t)\}_{t>0}$ el semigrupo de operadores definido de forma tal que para cada t se tenga que

$$\widehat{G_\varepsilon(t)}f(\xi, k) = \widehat{f}(\xi, k) \cdot e^{-4\pi^2 \left(|\xi|^2 + \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2 \right) t},$$

con lo que la solución del problema lineal (3.4) viene dada por

$$u_{per}(x, s) = G_\varepsilon(t)u_{0per}(x, s).$$

Para resolver el sistema (3.4), lo reescribimos como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_{per}}{\partial t} - \Delta u_{per} = -\mathbb{P}\nabla \cdot (u_{per} \otimes u_{per}) & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \nabla \cdot u_{per} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, \infty), \\ u_{per} = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}\varepsilon \times (0, \infty), \\ u_{per}(x, s, 0) = u_{0per}(x, s) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

y vía el principio de Duhamel, sigue que el problema (3.2) es formalmente equivalente al problema integral

$$\begin{aligned} u_{per}(t) &= G_\varepsilon(t)u_{0per} - \int_0^t G_\varepsilon(t-\sigma)\mathbb{P}\nabla \cdot (u_{per} \otimes u_{per})(\sigma)d\sigma \\ &= G_\varepsilon(t)u_{0per} + B(u_{per}, u_{per})(x, s, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Una solución del problema integral (3.7) es llamada una solución Blanda del problema diferencial (3.2), y es este tipo de soluciones en las que estamos interesados en este trabajo.

3.0.1. Espacios funcionales Ahora introduciremos los espacios utilizados en el estudio del sistema (3.1).

Inicialmente, note que de la Proposición 2.0.37 y Observación 2.0.38, sigue que para cada $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$ existe un operador $V : \mathcal{S}(\mathbb{T}_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1})$ dado por

$$\langle V(\varphi_2), \varphi_1 \rangle = \langle v, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle v, \varphi_1(x)\varphi_2(s) \rangle, \quad (3.8)$$

para todo $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{T}_\varepsilon)$.

En el caso especial $\varphi_2 \equiv 1$, se llega a

$$\langle V(1), \varphi_1 \rangle = \langle v, \varphi_1 \otimes 1 \rangle = \langle v, \varphi_1(x) \rangle,$$

con lo que $V(1)$ formalmente corresponde a la media de la distribución v en relación a la variable s , esto es, en el toro \mathbb{T}_ε .

Consideramos ahora el conjunto K formado por todas las distribuciones $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$ tales que $V(1) = 0$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1})$. Así, $v \in K$ si, y solamente si,

$$\langle V(1), \varphi_1(x) \rangle = \langle v, \varphi_1 \otimes 1 \rangle = 0, \text{ para todo } \varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1}). \quad (3.9)$$

Finalmente, definimos el espacio $\mathcal{PM}^{b,c}$, el cual está basado en el conocido espacio de pseudomedidas \mathcal{PM}^a y es el espacio en el que vamos a demostrar la existencia de soluciones del problema (3.7) (véase (Cannone y Karch, 2004)).

Definición 3.0.1. Sean $N \geq 2, \varepsilon > 0$ y $b, c > 0$. El espacio $\mathcal{PM}^{b,c}$ es definido como el conjunto de todas las clases de equivalencia de distribuciones $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon) / K$ tales que $\hat{v}(\cdot, k) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N-1})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y verifica que

$$\|v\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} := \sup_{k \in \mathbb{Z}^*} |k|^b \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} |\xi|^c |\hat{v}(\xi, k)| < \infty.$$

Teorema 3.0.2. $\mathcal{PM}^{b,c}$ es Banach

Demostración. Para demostrar el resultado adaptamos las ideas presentadas en (Fontecha Medina, Tesis (pregrado) 2018). Por la definición de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}$ y de la linealidad de la transformada de Fourier, sigue que

- $\|\lambda f\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} = |\lambda| \|f\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}$ y
- $\|f + g\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \leq \|f\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} + \|g\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}$

Además, es claro que $\|f\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \geq 0$ para toda $f \in \mathcal{PM}^{b,c}$ y que $\|0\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} = 0$.

Suponga a hora que $\|f\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} = 0$, entonces, para todo $k \in \mathbb{Z}^*$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$ se tiene

que $\hat{f}(\xi, k) = 0$, además, de la condición $f \in K$ se tiene que $\hat{f}(\xi, 0) = 0$, con todo $\hat{f} \equiv 0$, con lo que $f \equiv 0$.

Veamos ahora que con esta norma, $\mathcal{PM}^{b,c}$ es completo. Sea $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{PM}^{b,c}$ una sucesión de Cauchy. Por definición de la norma $\mathcal{PM}^{b,c}$ se tiene que $(|\cdot|^c \cdot |^b \widehat{u_m}(\cdot, \cdot))_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*)$. Ahora bien, como $L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*)$ es completo, existe $v \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*)$ tal que $(|\cdot|^c \cdot |^b \widehat{u_m}(\cdot, \cdot)) \rightarrow v$ en $L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*)$. Por completeness defina $v(\xi, 0) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$ y defina $f(\xi, k) = \frac{1}{|\xi|^c |k|^b} v(\xi, k)$ para $\xi \neq 0$ y $k \neq 0$, y además $f(\xi, 0) = 0$ para todo ξ , y note que, para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \langle f, \phi \rangle &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(\xi, k) \phi(\xi, k) d\xi \right| \\
 &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{|\xi|^c |k|^b} v(\xi, k) \phi(\xi, k) d\xi \right| \\
 &\leq \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^c |k|^b} v(\xi, k) \phi(\xi, k) d\xi \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \int_{B(0,1)^c} \frac{1}{|\xi|^c |k|^b} v(\xi, k) \phi(\xi, k) d\xi \right| \\
 &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} |k|^1 |\phi(\xi, k)| \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} v(\xi, k) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|k|^{b+1}} \int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^c} d\xi \\
 &\quad + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} |k|^1 |\xi|^N |\phi(\xi, k)| \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} v(\xi, k) \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|k|^{b+1}} \int_{B(0,1)^c} \frac{1}{|\xi|^{c+N}} d\xi \\
 &\leq C(\phi) \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*)},
 \end{aligned}$$

donde $C(\phi) = C \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} |k|^1 |\phi(\xi, k)| + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} |k|^1 |\xi|^N |\phi(\xi, k)| \right)$. La estimativa anterior muestra que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})$, con lo que $u = \check{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$.

Vamos a mostrar que u así definido cumple que $u \in \mathcal{PM}^{b,c}$, de hecho, dada la bola

$B(0, r) \subset \mathbb{R}^{N-1}$, $r > 0$ y $k \in \mathbb{Z}^*$ fijo, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{B(0,r)} |\hat{u}(\xi, k)| d\xi &= \int_{B(0,r)} f(\xi, k) d\xi = \int_{B(0,r)} \frac{1}{|\xi|^c} v(\xi, k) d\xi \\
 &\leq \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*)} \frac{1}{|k|^b} \int_{B(0,r)} \frac{1}{|\xi|^c} d\xi \\
 &= C \frac{1}{|k|^b} \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*)} \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

con lo que $\hat{u}(\cdot, k) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N-1})$ para cada $k \in \mathbb{Z}^*$ fijo. Además, por definición de la norma en $\mathcal{PM}^{b,c}$, se tiene que que

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}^*} |k|^b \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} |\xi|^c |\hat{u}(\xi, k)| \\
 &= \sup_{k \in \mathbb{Z}^*} |k|^b \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} |\xi|^c \left| \frac{1}{|\xi|^c |k|^b} v(\xi, k) \right| \\
 &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} |v(\xi, k)| \\
 &= \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*)},
 \end{aligned}$$

ya que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*)$, con lo que $u \in \mathcal{PM}^{b,c}$. Finalmente, note que

$$\begin{aligned}
\|u_m - u\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} |k|^b |\xi|^c |\widehat{u_m - u}(\xi, k)| \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} |k|^b |\xi|^c |\widehat{u_m}(\xi, k) - f(\xi, k)| \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} |k|^b |\xi|^c |\widehat{u_m}(\xi, k) - \frac{1}{|\xi|^c |k|^b} v(\xi, k)| \\
&= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}, k \in \mathbb{Z}^*} ||k|^b |\xi|^c \widehat{u_m}(\xi, k) - v(\xi, k)| \\
&= |||\cdot|^b \cdot|^c \widehat{u_m} - v||_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*)}.
\end{aligned}$$

De lo que sigue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} = 0.$$

□

Definición 3.0.3. Sean $0 < b_1, b_2 < 1$ y $0 < c_1, c_2 < N - 1$ tales que $1 < b_1 + b_2 < 2$ y $N - 1 < c_1 + c_2 < 2(N - 1)$, sean también $u \in \mathcal{PM}^{b_1, c_1}$ y $v \in \mathcal{PM}^{b_2, c_2}$, definimos $u \cdot v$ en variables de Fourier por

$$\widehat{u \cdot v}(\xi, k) = (\widehat{u} * \widehat{v})(\xi, k)$$

Proposición 3.0.4. Sean índices b_1, b_2, c_1 y c_2 satisfaciendo

$$0 < b_1, b_2 < 1, \quad 1 < b_1 + b_2 < 2, \quad 0 < c_1, c_2 < N - 1 \text{ y } N - 1 < c_1 + c_2 < 2(N - 1)$$

entonces, si $u \in \mathcal{PM}^{b_1, c_1}$ y $v \in \mathcal{PM}^{b_2, c_2}$ vale que $u \cdot v \in \mathcal{PM}^{b_1 + b_2 - 1, c_1 + c_2 - (N - 1)}$.

Demostración. Como $0 < c_1 + c_2 < N - 1$ y $N - 1 < c_1, c_2 < 2(N - 1)$ tenemos por el

Lema 2.0.40 que $|\xi|^{-c_1} * |\xi|^{-c_2} \leq C|\xi|^{(N-1)-c_1-c_2}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Sea $(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}$. Dado que $u, v \in K$, según (3.9), tenemos que $\widehat{u}(\eta, 0) = \widehat{v}(\xi - \eta, 0) = 0$, además, de la Proposición 2.0.34, sigue que

$$\begin{aligned}
|\widehat{uv}(\xi, k)| &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widehat{u}(\eta, m) \widehat{v}(\xi - \eta, k - m)| d\eta \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widehat{u}(\eta, m) \widehat{v}(\xi - \eta, k - m)| d\eta \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|\eta|^{c_1} |\widehat{u}(\eta, m)| |\xi - \eta|^{c_2} |\widehat{v}(\xi - \eta, k - m)|}{|\eta|^{c_1} |\xi - \eta|^{c_2}} d\eta \\
&\leq \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}} \|\cdot\|^{c_1} \widehat{u}(\cdot, m) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} \|\cdot\|^{c_2} \widehat{v}(\cdot, k - m) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{|\eta|^{c_1} |\xi - \eta|^{c_2}} d\eta \\
&\leq C |\xi|^{(N-1)-c_1-c_2} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}} \|\cdot\|^{c_1} \widehat{u}(\cdot, m) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} \|\cdot\|^{c_2} \widehat{v}(\cdot, k - m) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $0 < b_1, b_2 < 1$ y $1 < b_1 + b_2 < 2$, sigue del Lema 2.0.41 que $(|m|^{-b_1} * |m|^{-b_2})(k) \leq$

$C|k|^{1-b_1-b_2}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
|\widehat{uv}(\xi, k)| &\leq C |\xi|^{(N-1)-c_1-c_2} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}} \frac{|m|^{b_1} \|\cdot\|^{c_1} \widehat{u}(\cdot, m) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})} |k - m|^{b_2} \|\cdot\|^{c_2} \widehat{v}(\cdot, k - m) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})}}{|m|^{b_1} |k - m|^{b_2}} \\
&\leq C |\xi|^{(N-1)-c_1-c_2} \|u\|_{\mathcal{PM}^{b_1, c_1}} \|v\|_{\mathcal{PM}^{b_2, c_2}} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}} \frac{1}{|m|^{b_1} |k - m|^{b_2}} \\
&\leq C |k|^{1-b_1-b_2} |\xi|^{(N-1)-c_1-c_2} \|u\|_{\mathcal{PM}^{b_1, c_1}} \|v\|_{\mathcal{PM}^{b_2, c_2}}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Luego, concluimos que

$$\|u \cdot v\|_{\mathcal{PM}^{b_1+b_2-1, c_1+c_2-(N-1)}} \leq C \|u\|_{\mathcal{PM}^{b_1, c_1}} \|v\|_{\mathcal{PM}^{b_2, c_2}}.$$

□

Ahora, usaremos el espacio $\mathcal{PM}^{b,c}$ con los índices con las siguientes condiciones

$$\frac{1}{2} < b < 1, \quad \frac{N-1}{2} < c < N-1, \quad b+c > N-1, \quad (3.11)$$

para definir el espacio $\mathcal{X}_{b,c}$ de todas las funciones vectoriales $u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$ con $u_j : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{PM}^{b,c}$ tales que

$$t^{\frac{b+c-(N-1)}{2}} u_j \in C_w((0, \infty); \mathcal{PM}^{b,c})$$

donde $C_w((0, \infty); Y)$ denota el conjunto de todas las funciones débilmente continuas en $(0, \infty)$ con valores en el espacio $Y \subset \mathcal{S}'$ en el sentido de distribuciones.

El espacio $\mathcal{X}_{b,c}$ es normado con la norma dada por

$$\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} := \sup_{t>0} t^a \|u(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}$$

donde $a := \frac{b+c-(N-1)}{2}$ y $\|u(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} = \max\{\|u_1(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}, \dots, \|u_N(t)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}\}$. También, el espacio $(\mathcal{X}_{b,c}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}_{b,c}})$ es Banach.

Ahora estableceremos el concepto de solución blanda para el sistema (3.3).

Definición 3.0.5. Sean b y c satisfaciendo las condiciones (3.11) y $u_0 \in \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$ con $\nabla \cdot u_0 = 0$ en el sentido de las distribuciones. Una solución blanda del sistema (3.3) es un vector $u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$ tal que cada componente $t^{\frac{b+c-(N-1)}{2}} u_j$ pertenece al espacio $C_w((0, \infty), \mathcal{PM}^{b,c})$, $\nabla \cdot u = 0$ para $t > 0$ y que satisface la ecuación

$$u(t) = G_\varepsilon(t)u_0 + B(u, u)(t) \quad (3.12)$$

en el sentido de las distribuciones en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon) / K$, siendo los operadores $G_\varepsilon(t)$ y $B(u, u)$ definidos vía transformada de Fourier como

$$\widehat{G_\varepsilon(t)u_0}(\xi, k) = e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{u_0}(\xi, k) \quad (3.13)$$

y

$$\widehat{B(u, u)}(t) = -2\pi i \int_0^t e^{-4\pi^2 (t-\sigma) (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \cdot (\widehat{u \otimes u})(\xi, k, \sigma) d\sigma, \quad (3.14)$$

para todo $t > 0$.

3.0.2. Soluciones globales en el tiempo Para demostrar la existencia de soluciones globales blandas en el tiempo para el sistema 3.3 iniciamos demostrando un lema de punto fijo adecuado para la estructura de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Lema 3.0.6. Sea $(\mathcal{X}_{b,c}, \|\cdot\|_{b,c})$ un espacio de Banach y $B : \mathcal{X}_{b,c} \times \mathcal{X}_{b,c} \rightarrow \mathcal{X}_{b,c}$ una forma

bilineal continua, esto es, existe una constante $K_2 > 0$ tal que

$$\|B(u, v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq K_2 \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}, \text{ para todo } u, v \in \mathcal{X}_{b,c}.$$

Entonces, si $0 < \eta < \frac{1}{4K_1K_2}$ y si $y \in \mathcal{X}_{b,c}$, con $\|y\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq K_1\eta$, la ecuación $u = y + B(u, u)$ posee una única solución $u \in \mathcal{X}_{b,c}$, tal que $\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq K_1\eta$.

Además, la solución depende continuamente de y en el siguiente sentido: si $\|\tilde{y}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq K_1\eta$, $\tilde{u} = \tilde{y} + B(\tilde{u}, \tilde{u})$ y $\|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq 2K_1\eta$, entonces

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq \frac{1}{1 - 4K_1K_2\eta} \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}_{b,c}}.$$

Demostración. Sea $\bar{B}(0, 2K_1\eta) = \{u \in \mathcal{X}_{b,c} : \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq 2K_1\eta\}$ y considere la aplicación $F : \mathcal{X}_{b,c} \rightarrow \mathcal{X}_{b,c}$ dada por $F(u) = y + B(u, u)$. En las condiciones del lema tenemos que

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} &= \|y + B(u, u)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq \|y\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|B(u, u)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\ &\leq K_1\eta + 4K_1^2K_2\eta^2 = K_1\eta(1 + 4K_1K_2) < 2K_1\eta \end{aligned}$$

y por ende, tenemos que $F(\bar{B}(0, 2K_1\eta)) \subset \bar{B}(0, 2K_1\eta)$.

Ahora, si $u, v \in \bar{B}(0, 2K_1\eta)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} &= \|y + B(u, u) - y - B(v, v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} = \|B(u, u) - B(v, v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&= \|B(u, u) - B(u, v) + B(u, v) - B(v, v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&= \|B(u, u - v) - B(u - v, v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\leq \|B(u, u - v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|B(u - v, v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\leq K_2\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|u - v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + K_2\|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}\|u - v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\leq K_2\|u - v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} (\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}) \\
&\leq 4K_1K_2\eta\|u - v\|_{\mathcal{X}_{b,c}},
\end{aligned}$$

de lo que sigue que F es una contracción en $\bar{B}(0, 2K_1\eta)$, pues $4K_1K_2\eta < 1$. Por lo tanto, sigue del teorema de punto fijo de Banach que la aplicación F posee un único punto fijo $u \in \bar{B}(0, 2K_1\eta)$, el cual es la solución deseada.

Para demostrar la dependencia continua, considere a u y \tilde{u} como en el enunciado.

Sigue entonces que

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + \|B(u, u) - B(\tilde{u}, \tilde{u})\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} + 4K_1K_2\eta\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_{b,c}},$$

esto es,

$$\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq \frac{1}{1 - 4K_1K_2\eta} \|y - \tilde{y}\|_{\mathcal{X}_{b,c}},$$

lo que nos da el resultado deseado. □

Con el propósito de aplicar el Lema 3.0.6, necesitamos verificar que la parte lineal $G_\varepsilon u_0 \in \mathcal{X}_{b,c}$ y que la forma bilineal en (3.12) es continua en $\mathcal{X}_{b,c}$. Estas preguntas serán abordadas en los próximos lemas.

Lema 3.0.7. *Sea $d > 0$ tal que $(N-1)-c < d < (N-1)$, con b, c verificando las condiciones en (3.11). Si $u_0 \in \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}$, entonces $t^{\frac{b+c-(N-1)}{2}} G_\varepsilon(\cdot)u_0 \in C_w((0, \infty); \mathcal{PM}^{b,c})$ y vale la desigualdad*

$$\|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq \tilde{C}_1 \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}},$$

donde $\tilde{C}_1 = C_1 \varepsilon^{b-d}$ es una constante positiva. También, $G_\varepsilon(t)u_0 \rightarrow u_0$ en S' , cuando $t \rightarrow 0^+$.

Demostración. Como la función $e^{-x}x^p$ es acotada para $x > 0$ y $p > 0$, se tiene la siguiente desigualdad para $(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*$:

$$\begin{aligned}
& |k|^b |\xi|^c \left| \widehat{G_\varepsilon(t)u_0}(\xi, k) \right| \\
&= |k|^b |\xi|^c e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} |\widehat{u_0}(\xi, k)| \\
&= |k|^b |\xi|^c e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} e^{-4\pi^2 t |\frac{k}{\varepsilon}|^2} |\widehat{u_0}(\xi, k)| \frac{(4\pi^2 t |\frac{k}{\varepsilon}|^2)^{\frac{b-d}{2}} (4\pi^2 t |\xi|^2)^{\frac{c+d-(N-1)}{2}}}{(4\pi^2 t |\frac{k}{\varepsilon}|^2)^{\frac{b-d}{2}} (4\pi^2 t |\xi|^2)^{\frac{c+d-(N-1)}{2}}} \\
&= |k|^b |\xi|^c |\widehat{u_0}(\xi, k)| \left(4\pi^2 t |\frac{k}{\varepsilon}|^2\right)^{-\frac{b-d}{2}} (4\pi^2 t |\xi|^2)^{-\frac{c+d-(N-1)}{2}} \times \\
&\quad \left((4\pi^2 t |\xi|^2)^{\frac{c+d-(N-1)}{2}} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \right) \left(\left(4\pi^2 t |\frac{k}{\varepsilon}|^2\right)^{\frac{b-d}{2}} e^{-4\pi^2 t |\frac{k}{\varepsilon}|^2} \right) \\
&\leq |k|^b |\xi|^c |\widehat{u_0}(\xi, k)| \left(4\pi^2 t |\frac{k}{\varepsilon}|^2\right)^{-\frac{b-d}{2}} (4\pi^2 t |\xi|^2)^{-\frac{c+d-(N-1)}{2}} \times \\
&\quad \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} \left((4\pi^2 t |\xi|^2)^{\frac{c+d-(N-1)}{2}} e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \right) \sup_{k \in \mathbb{Z}^*} \left(\left(4\pi^2 t |\frac{k}{\varepsilon}|^2\right)^{\frac{b-d}{2}} e^{-4\pi^2 t |\frac{k}{\varepsilon}|^2} \right) \\
&= C |k|^b |\xi|^c |\widehat{u_0}(\xi, k)| \left(4\pi^2 t |\frac{k}{\varepsilon}|^2\right)^{-\frac{b-d}{2}} (4\pi^2 t |\xi|^2)^{-\frac{c+d-(N-1)}{2}} \\
&= C_2 |k|^b |\xi|^c t^{-\frac{-b+d-c-d+(N-1)}{2}} |\widehat{u_0}(\xi, k)| \left(\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|^2 \right)^{-\frac{b-d}{2}} (|\xi|^2)^{-\frac{c+d-(N-1)}{2}} \\
&= C_2 |k|^b |\xi|^c t^{-\frac{c+b+(N-1)}{2}} \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^{-b+d} |\xi|^{(N-1)-c-d} |\widehat{u_0}(\xi, k)| \\
&= C_2 \varepsilon^{d-b} t^{-\frac{c+b+(N-1)}{2}} |k|^d |\xi|^{(N-1)-d} |\widehat{u_0}(\xi, k)| \\
&= C_1 \varepsilon^{d-b} t^{-\frac{c+b+(N-1)}{2}} \|u_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{d, (N-1)-d}},
\end{aligned}$$

donde, $C_1 = C_1(b, c, N) > 0$. De lo anterior sigue que

$$\|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq C_1 \varepsilon^{b-d} \|u_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{d, (N-1)-d}}.$$

Ahora vamos a mostrar la continuidad débil con respecto a t . Note que que, para $t \geq t_0$, por la propiedad del semigrupo $G_\varepsilon(t)$ se tiene que $G_\varepsilon(t)u_0 - G_\varepsilon(t_0)u_0 =$

$G_\varepsilon(t_0)(G_\varepsilon(t-t_0)u_0 - u_0)$, por lo que es suficiente probar el resultado para $t = 0$. Luego, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$, tenemos

$$\begin{aligned}
|\langle G_\varepsilon(t)u_0 - u_0, \varphi \rangle| &= \left| \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (G_\varepsilon(t)u_0 - u_0)^\wedge(\xi, k) \hat{\varphi}(\xi, -k) d\xi \right| \\
&= \left| \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \hat{u}_0(\xi, k) - \hat{u}_0(\xi, k) \right) (\xi, k) \hat{\varphi}(\xi, -k) d\xi \right| \\
&\leq \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} - 1 \right| |\hat{u}_0(\xi, k)| |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&=: \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} I(\xi, k) d\xi.
\end{aligned}$$

Sea $k \in \mathbb{Z}^*$ y $\xi \in \mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0, 1)$, como $0 < d < N - 1$, sigue que $1 \leq |k|^d$ y $1 \leq |\xi|^{(N-1)-d}$, con lo que $1 \leq |k|^d |\xi|^{(N-1)-d}$ y podemos estimar $I(\xi, k)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
I(\xi, k) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} - 1 \right| |\hat{u}_0(\xi, k)| |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0, 1)} \left| e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} - 1 \right| |\hat{u}_0(\xi, k)| |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&\quad + \int_{B(0, 1)} \left| e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} - 1 \right| |\hat{u}_0(\xi, k)| |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0, 1)} \left| e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} - 1 \right| |k|^d |\xi|^{(N-1)-d} |\hat{u}_0(\xi, k)| |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&\quad + \int_{B(0, 1)} \left| e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} - 1 \right| \left| \frac{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} \hat{u}_0(\xi, k) \right| |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&\leq \|u_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{d, (N-1)-d}} \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0, 1)} \left| e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} - 1 \right| |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&\quad + \|u_0\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{d, (N-1)-d}} \int_{B(0, 1)} \left| e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} - 1 \right| \frac{1}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0,1)} \frac{4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)}{4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} \left| e^{-4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} - 1 \right| |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&\quad + \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \int_{B(0,1)} \frac{4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)}{4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} \left| e^{-4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} - 1 \right| \frac{1}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&= 4\pi^2 t \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0,1)} \frac{\left| e^{-4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} - 1 \right|}{4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&\quad + 4\pi^2 t \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \int_{B(0,1)} \frac{\left| e^{-4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} - 1 \right| \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)}{4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) |k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&\leq 4\pi^2 t \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \sup_{(\xi,k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*} \left| \frac{e^{-4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} - 1}{4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} \right| \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0,1)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&\quad + 4\pi^2 t \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \sup_{(\xi,k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*} \left| \frac{e^{-4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} - 1}{4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} \right| \int_{B(0,1)} \frac{\left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&= 4\pi^2 t \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \sup_{(\xi,k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*} \left| \frac{e^{-4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} - 1}{4\pi^2 t \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} \right| \times \\
&\quad \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0,1)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi + \int_{B(0,1)} \frac{|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \right] \\
&= Ct \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \times \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0,1)} |\xi|^2 |\hat{\varphi}(\xi, -k)| + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_{B(0,1)} \frac{1}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} |\xi|^2 |\hat{\varphi}(\xi, -k)| + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \right] [+] \\
&\leq Ct \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \left[\|\cdot\|^2 \hat{\varphi}(\cdot, -k)\|_{L^1} + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \|\hat{\varphi}(\cdot, -k)\|_{L^1} \right. \\
&\quad \left. + \int_{B(0,1)} \frac{1}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} d\xi \left(\|\cdot\|^2 \hat{\varphi}(\cdot, -k)\|_{L^\infty} + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \|\hat{\varphi}(\cdot, -k)\|_{L^\infty} \right) \right].
\end{aligned}$$

Como $1 \leq |k|$ entonces $\frac{1}{|k|^d} \leq 1$, además, como $d - (N - 1) > N - 1$, sigue que

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|k|^d |\xi|^{(N-1)-d}} d\xi \leq \int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^{(N-1)-d}} d\xi = C,$$

así,

$$|\langle G_\varepsilon(t)u_0 - u_0, \varphi \rangle| \leq \varepsilon C t \|u_0\|_{\mathcal{P}, \mathcal{M}^{d, (N-1)-d}} C_\varphi, \quad (3.15)$$

donde

$$C_\varphi := C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\|\cdot\|^2 \hat{\varphi}(\cdot, -k)\|_{L^1} + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \|\hat{\varphi}(\cdot, -k)\|_{L^1} + \|\cdot\|^2 \hat{\varphi}(\cdot, -k)\|_{L^\infty} + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \|\hat{\varphi}(\cdot, -k)\|_{L^\infty} \right].$$

Como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$, entonces $C_\varphi < \infty$, con lo que,

$$|\langle G_\varepsilon(t)u_0 - u_0, \varphi \rangle| \leq \varepsilon C t \|u_0\|_{\mathcal{P}, \mathcal{M}^{d, (N-1)-d}} C_\varphi \longrightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow 0^+$, lo que termina la demostración. \square

Lema 3.0.8. *El operador $B(\cdot, \cdot)$ definido en (3.14) es continuo en el espacio $\mathcal{X}_{b,c}$, esto es,*

existe una constante $\tilde{C}_2 = C_2 \varepsilon^{1-b} > 0$ tal que

$$\|B(u, v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq \tilde{C}_2 \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}},$$

para todo $u, v \in \mathcal{X}_{b,c}$. También, $B(u, v) \rightarrow 0$ en S' , cuando $t \rightarrow 0^+$.

Demostración. Como $1 < 2b < 2$, y $\frac{N-1}{2} < c < (N-1)$, sigue de (3.10) en el Lema

3.0.4 que

$$|\widehat{uv}(\xi, k)| \leq C |k|^{1-2b} |\xi|^{(N-1)-2c} \|u\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \|v\|_{\mathcal{PM}^{b,c}}.$$

Recordando que la transformada de Fourier del operador B en las variable (ξ, k) está dada por

$$\widehat{B(u, v)}(\xi, k, t) := - \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) d\sigma,$$

se tiene que. para $k \neq 0$ vale que

$$\begin{aligned} & |\widehat{B(u, v)}(\xi, k, t)| \\ & \leq \int_0^t \left| e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \cdot (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) \right| d\sigma \\ & \leq C \int_0^t \left| e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) |k|^{1-2b} |\xi|^{(N-1)-2c} \|u(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \|u(\sigma)\|_{\mathcal{PM}^{b,c}} \right| d\sigma \\ & \leq C \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) |k|^{1-2b} |\xi|^{(N-1)-2c} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \int_0^t \left| e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \right| \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \end{aligned}$$

Ahora, por la estimativa anterior y usando $(N-1) - c > 0$ y $1 - b > 0$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
& |k|^b |\xi|^c |\widehat{B}(u, v)(\xi, k, t)| \\
&= C |k|^{1-b} |\xi|^{(N-1)-c} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
&= C \varepsilon^{1-b} \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^{1-b} |\xi|^{(N-1)-c} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
&= C \varepsilon^{1-b} \left(\left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)^{\frac{1-b}{2}} (|\xi|^2)^{\frac{(N-1)-c}{2}} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
&\leq C \varepsilon^{1-b} \left(\left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 + |\xi|^2 \right)^{\frac{1-b}{2}} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)^{\frac{(N-1)-c}{2}} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\quad \times \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
&= C \varepsilon^{1-b} \left(|\xi| + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{\frac{1}{2} + \frac{(N-1)-c}{2} + \frac{1-b}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
&= C \varepsilon^{1-b} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\quad \times \int_0^t \left(|\xi| + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right| \right)^{\frac{(N+1)-b-c}{2}} \frac{(4\pi^2(t-\sigma))^{\frac{(N+1)-b-c}{2}}}{(4\pi^2(t-\sigma))^{\frac{(N+1)-b-c}{2}}} e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
&\leq C \varepsilon^{1-b} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \left[4\pi^2(t-\sigma) \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) \right]^{\frac{(N+1)-b-c}{2}} \\
&\quad \times (4\pi^2(t-\sigma))^{-\frac{(N+1)-b-c}{2}} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
&\leq C \varepsilon^{1-b} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{(N+1)+b+c}{2}} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
&\quad \times \sup_{(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*} e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \left[4\pi^2(t-\sigma) \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) \right]^{\frac{(N+1)-b-c}{2}} \\
&\leq C \varepsilon^{1-b} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{(N+1)+b+c}{2}} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C\varepsilon^{1-b} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} t^{-\frac{(N+1)+b+c}{2}+N-b-c} \int_0^1 (1-z)^{-\frac{(N+1)+b+c}{2}} z^{(N-1)-b-c} dz, \\ &= C\varepsilon^{1-b} t^{-\frac{b+c-(N-1)}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \beta\left(\frac{-(N+1)+c+b}{2}+1, N-b-c\right), \end{aligned}$$

donde usamos el cambio de variable $\sigma = zt$ y $\beta(\cdot, \cdot)$ denota la función beta definida en

[2.0.35](#).

Como $N-1 < b+c < N$, entonces $\beta\left(\frac{-(N+1)+c+b}{2}+1, N-b-c\right) < \infty$, y así

$$|k|^b |\xi|^c \left| \widehat{B(u, v)}(\xi, k, t) \right| \leq C_2 \varepsilon^{1-b} t^{-\frac{b+c-(N-1)}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}},$$

esto es,

$$t^{\frac{b+c-(N-1)}{2}} |k|^b |\xi|^c \left| \widehat{B(u, v)}(\xi, k, t) \right| \leq C_2 \varepsilon^{1-b} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}},$$

donde $C_2 = C_2(b, c, N) > 0$ y por lo tanto

$$\|B(u, v)\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq C_2 \varepsilon^{1-b} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}}.$$

Para concluir el lema tenemos que probar la continuidad débil. Sean $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{T}_\varepsilon)$

y $t > 0$ fijos. Para cada $s < t$, de la Proposición [2.0.12](#) tenemos

$$|\langle B(u, v)(t) - B(u, v)(s), \varphi \rangle| \leq \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widehat{B(u, v)}(\xi, k, t) - \widehat{B(u, v)}(\xi, k, s)| |\widehat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi$$

Usando las estimativas de la primera parte, tenemos la siguiente estimativa para la diferencia entre $\widehat{B}(u, v)(\xi, k, t)$ y $\widehat{B}(u, v)(\xi, k, s)$ para $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
& |\widehat{B}(u, v)(\xi, k, t) - \widehat{B}(u, v)(\xi, k, s)| \\
&= \left| \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) d\sigma \right. \\
&\quad \left. - \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) d\sigma \right| \\
&= \left| \int_0^s e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) d\sigma \right. \\
&\quad + \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) d\sigma \\
&\quad \left. - \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\sigma)(|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) d\sigma \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) d\sigma \right. \\
&\quad \left. + \int_0^s \left(e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) - e^{-4\pi^2(s-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \right) \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) d\sigma \right| \\
&\leq \int_s^t \left| e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) \right| d\sigma \\
&\quad + \int_0^s \left| \left(e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) - e^{-4\pi^2(s-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \right) \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) \right| d\sigma \\
&\leq C \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| \left[\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \left| (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) \right| d\sigma \right. \\
&\quad \left. + \int_0^s \left(e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) - e^{-4\pi^2(s-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \right) \left| (\widehat{u \otimes v})(\xi, k, \sigma) \right| d\sigma \right] \\
&\leq C \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| |k|^{1-2b} |\xi|^{(N-1)-2c} \left[\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \|u(\sigma)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{b,c}} \|v(\sigma)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{b,c}} d\sigma \right. \\
&\quad \left. + \int_0^s \left(e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) - e^{-4\pi^2(s-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \right) \|u(\sigma)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{b,c}} \|v(\sigma)\|_{\mathcal{P}\mathcal{M}^{b,c}} d\sigma \right] \\
&= C \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| |k|^{1-2b} |\xi|^{(N-1)-2c} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
&\quad \times \left[\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \sigma^{-2a} d\sigma \right. \\
&\quad \left. + \int_0^s \left(e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) - e^{-4\pi^2(s-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \right) \sigma^{-2a} d\sigma \right] \tag{3.16}
\end{aligned}$$

donde, recordando, $a = \frac{b+c-(N-1)}{2}$.

Ahora, note que

$$\begin{aligned}
\int_s^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)} (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2) \sigma^{-2a} d\sigma &\leq \int_s^t \sigma^{-2a} d\sigma \\
&= \frac{t^{-2a+1} - s^{-2a+1}}{-2a+1}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
& \int_0^s e^{-4\pi^2(t-\sigma)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) - e^{-4\pi^2(s-\sigma)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) \sigma^{-2a} d\sigma \\
& \leq \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\sigma)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) \left| e^{-4\pi^2(t-s)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) - 1 \right| \sigma^{-2a} d\sigma \\
& \leq 4\pi^2(t-s) \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right|^2 \sup_{(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*} \left| \frac{e^{-4\pi^2(t-s)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) - 1}{4\pi^2(t-s) \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)} \right| \\
& \quad \times \int_0^s e^{-4\pi^2(s-\sigma)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) \sigma^{-2a} d\sigma \\
& \leq C4\pi^2(t-s) \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right|^2 \int_0^s \sigma^{-2a} d\sigma \\
& \leq C4\pi^2(t-s) \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right|^2 \frac{s^{-2a+1}}{-2a+1}. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Entonces, usando (3.17) y (3.18) en (3.16)

$$\begin{aligned}
& | \widehat{B}(u, v)(\xi, k, t) - \widehat{B}(u, v)(\xi, k, s) | \\
& \leq C \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| |k|^{1-2b} |\xi|^{(N-1)-2c} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \\
& \quad \times \left[t^{-2a+1} - s^{-2a+1} + (t-s)s^{-2a+1} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right|^2 \right].
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
& | \langle B(u, v)(t) - B(u, v)(s), \varphi \rangle | \\
& \leq C\varepsilon \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} (t^{-2a+1} - s^{-2a+1}) \\
& \quad \times \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| |\xi|^{(N-1)-2c} |k|^{1-2b} |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
& \quad + C\varepsilon \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} (t-s) s^{-2a+1} \\
& \quad \times \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right|^3 |\xi|^{(N-1)-2c} |k|^{1-2b} |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
& =: C\varepsilon \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} (t^{-2a+1} - s^{-2a+1}) S_1 \\
& \quad + C\varepsilon \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} (t-s) s^{-2a+1} S_2.
\end{aligned}$$

Ahora vamos a estimar S_1 y S_2 por separado. Comenzando con S_1 , tenemos que

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| |\xi|^{(N-1)-2c} |k|^{1-2b} |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k|^{-1-2b} \left[\int_{B(0,1)} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| |k|^2 |\xi|^{(N-1)-2c} |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \right. \\
& \quad \left. + \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0,1)} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| |k|^2 |\xi|^{2(N-1)} |\xi|^{-(N-1)-2c} |\hat{\varphi}(\xi, -k)| d\xi \right] \\
&\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k|^{-1-2b} \left[\| |(\xi, k)| |k|^2 \hat{\varphi} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})} \int_{B(0,1)} |\xi|^{(N-1)-2c} d\xi \right. \\
& \quad \left. + C \| |(\xi, k)| |k|^2 |\xi|^{2(N-1)} \hat{\varphi} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})} \int_{\mathbb{R}^{N-1} \setminus B(0,1)} |\xi|^{-(N-1)-2c} d\xi \right] \\
&\leq C \left(\| |(\xi, k)| |k|^2 \hat{\varphi} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})} + \| |(\xi, k)| |k|^2 |\xi|^{2(N-1)} \hat{\varphi} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})} \right) < \infty
\end{aligned}$$

Procediendo de modo análogo al que fue utilizado para estimar S_1 , obtenemos que

$$S_2 \leq C \left(\left\| |(\xi, k)|^3 |k|^2 \hat{\varphi} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})} + \left\| |(\xi, k)|^3 |k|^2 |\xi|^{2(N-1)} \hat{\varphi} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z})} \right) < \infty$$

Por lo tanto,

$$|\langle B(u, v)(t) - B(u, v)(s), \varphi \rangle| \leq C(\varphi) \varepsilon \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \|v\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \left[(t^{-2a+1} - s^{-2a+1}) + (t-s)s^{-2a+1} \right],$$

donde $C(\varphi)$ es una constante que también depende de la función φ . Para el caso $t < s$ se obtienen similarmente expresiones que van para cero cuando $s \rightarrow t$. Por fin, la demostración de la propiedad de convergencia a cero cuando $t \rightarrow 0^+$ puede ser obtenida análogamente.

□

Finalmente, enunciamos y demostramos el teorema principal del trabajo

Teorema 3.0.9. *Sean b y c tales que*

$$\frac{1}{2} < b < 1, \quad \frac{N-1}{2} < c < N-1, \quad b+c > N-1.$$

Asuma que $u_0 \in \mathcal{PM}^{d, (N-1)-d}$ con $\nabla \cdot u_0 = 0$, donde $d > (N-1) - c$, satisfice

$$\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d, (N-1)-d}} \leq \eta, \text{ para algún } 0 < \eta < \frac{1}{4C_1 C_2 \varepsilon^{1-d}}$$

donde C_1, C_2 son las constantes en los Lemas 3.0.7 y 3.0.8, respectivamente. Entonces,

existe una solución blanda del sistema 3.2 en el espacio $\mathcal{X}_{b,c}$. Esta es la única solución blanda que satisface la condición $\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq 2C_1\varepsilon^{b-d}\eta$ y ella depende continuamente del dato inicial u_0 en el sentido del Lema 3.0.6. También, $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ en \mathcal{S}' cuando $t \rightarrow 0^+$. Por último, con las condiciones adicionales $2b - 1 < d < 2(N - 1) - 2c$ garantizamos la propiedad de persistencia, esto es, que $u \in L^\infty((0, \infty); \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d})$.

Demostración. Del Lema 3.0.8 sigue que el operador $B(\cdot, \cdot)$ definido en 3.14 bilineal y continuo en $\mathcal{X}_{b,c}$. Ahora, sigue del Lema 3.0.7 que

$$\|G_\varepsilon(\cdot)u_0\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq C_1\varepsilon^{b-d}\|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} \leq C_1\varepsilon^{b-d}\eta,$$

y por lo tanto, por el Lema 3.0.6 existe una única solución $u \in \mathcal{X}_{b,c}$ de la ecuación $u = G_\varepsilon(\cdot)u_0 + B(u, u)$, tal que $\|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}} \leq 2C_1\varepsilon^{b-d}\eta$. La convergencia débil de la solución sigue de las convergencias de la parte lineal y bilineal mostradas en los Lemas 3.0.7 y 3.0.8.

Finalmente, para mostrar $u \in L^\infty((0, \infty); \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d})$ sean $(\xi, k) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{Z}^*$ y $t > 0$, entonces, de las cuentas realizadas en el Lema 3.0.8, sigue que

$$\begin{aligned} |\widehat{u}(\xi, k, t)| &\leq \left| e^{-4\pi^2 t (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{u}_0(\xi, k) \right| \\ &\quad + \left| \int_0^t e^{-4\pi^2 (t-\sigma) (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \widehat{\mathbb{P}}(\xi, k) 2\pi i \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \cdot \widehat{(u \otimes u)}(\xi, k, \sigma) d\sigma \right| \\ &\leq |\widehat{u}_0(\xi, k)| + C|k|^{1-2b} |\xi|^{(N-1)-2c} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}^2 \\ &\quad \times \int_0^t e^{-4\pi^2 (t-\sigma) (|\xi|^2 + |\frac{k}{\varepsilon}|^2)} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\ &=: |\widehat{u}_0(\xi, k)| + J(\xi, k, t). \end{aligned}$$

Luego, como $1 + d - 2b, 2(N - 1) - 2c + d > 0$ tenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
& |k|^d |\xi|^{(N-1)-d} J(\xi, k, t) \\
& \leq C |k|^{1+d-2b} |\xi|^{2(N-1)-2c-d} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}^2 \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
& = C \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}^2 \varepsilon^{1+d-2b} \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^{1+d-2b} |\xi|^{2(N-1)-(2c+d)} \left| \left(\xi, \frac{k}{\varepsilon} \right) \right| \\
& \quad \times \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
& \leq C \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}^2 \varepsilon^{1+d-2b} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right)^{\frac{1+d-2b}{2} + \frac{2(N-1)-(2c+d)}{2} + \frac{1}{2}} \\
& \quad \times \int_0^t e^{-4\pi^2(t-\sigma)} \left(|\xi|^2 + \left| \frac{k}{\varepsilon} \right|^2 \right) \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
& \leq C \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}^2 \varepsilon^{1+d-2b} \int_0^t \frac{1}{4\pi^2(t-\sigma)^{N-b-c}} \sigma^{(N-1)-b-c} d\sigma \\
& = C \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}^2 \varepsilon^{1+d-2b} t^{-N+b+c+(N-1)-b-c+1} \int_0^1 (1-z)^{-N+b+c} z^{(N-1)-b-c} dz \\
& = C \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}^2 \varepsilon^{1+d-2b} \beta(-(N-1)+b+c, N-b-c).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $t > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} &= \sup_{k \in \mathbb{Z}^*} |k|^d \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{N-1}} |\xi|^{(N-1)-d} |\widehat{u}(\xi, k, t)| \\
&\leq \|u_0\|_{\mathcal{PM}^{d,(N-1)-d}} + C \varepsilon^{1+d-2b} \|u\|_{\mathcal{X}_{b,c}}^2 < \infty,
\end{aligned}$$

y por ende, $u \in L^\infty((0, \infty); \mathcal{PM}^{d,(N-1)-d})$.

□

Referencias

- Alves, M. P. (2019). *Soluções globais para as equações de navier-stokes com quimiotaxia e em domínios finos* (Tesis Doctoral no publicada). [sn].
- Cannone, M. (1997). A generalization of a theorem by kato on navier-stokes equations. *Revista matemática iberoamericana*, 13(3), 515–541.
- Cannone, M., y Karch, G. (2004). *Smooth or singular solutions to the navier-stokes system*. *J. Differential Equations* 197.
- Casado-Díaz, J., Luna-Laynez, M., y Suarez-Grau, F. J. (2013). Asymptotic behavior of the navier–stokes system in a thin domain with navier condition on a slightly rough boundary. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 45(3).
- Ferreira, L. C., y Pérez-López, J. E. (2018). Besov-weak-herz spaces and global solutions for navier–stokes equations. *Pacific Journal of Mathematics*, 296(1), 57–77.
- Folland, G. B. (1999). *Real analysis: modern techniques and their applications* (Vol. 40). John Wiley & Sons.
- Fontecha Medina, E. J., Miguel Aangel; Villamizar Roa. (Tesis (pregrado) 2018). *ecuaciones de navier-stokes en un espacio de distribuciones*. Universidad Industrial de Santander. Escuela de matemáticas.
- Fujita, H., y Kato, T. (1963). *On the navier-stokes initial value problem. i* (n.º 121). Department of Mathematics, Stanford University.
- Hörmander, L. (Berlin, 2003.) *The analysis of linear partial differential operators. i. classics in mathematics*. Springer-Verlag.

- Iftimie, D., y Raugel, G. (2001). Some results on the navier–stokes equations in thin 3d domains. *Journal of Differential Equations*, 169(2).
- lorio Jr, I. J., y de Magalhaes lório, V. (2001). *Fourier analysis and partial differential equations* (n.º 70). Cambridge University Press.
- Kato, T. (1984). Strong L^p -solutions of the navier-stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift*, 187, 471–480.
- Kato, T. (1992). Strong solutions of the navier-stokes equation in morrey spaces. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 22, 127–155.
- Koch, H., y Tataru, D. (2001). Well-posedness for the navier–stokes equations. *Advances in Mathematics*, 157(1), 22–35.
- Kozono, H., y Yamazaki, M. (1994). Semilinear heat equations and the navier-stokes equation with distributions in new function spaces as initial data. *Communications in Partial Differential Equations*, 19(5-6), 959–1014.
- Kukavica, I., y Ziane, M. (2007). On the regularity of the navier–stokes equation in a thin periodic domain. *Journal of Differential Equations*, 234(2).
- Liao, X. (2016). On the strong solutions of the inhomogeneous incompressible navier-stokes equations in a thin domain.
- Mazzucato, A. (2003). Besov-morrey spaces: function space theory and applications to non-linear pde. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(4), 1297–1364.
- Schwartz, L. (1958). Théorie des distributions à valeurs vectorielles. ii. En *Annales de l'institut fourier* (Vol. 8, pp. 1–209).

Temam, R. (1995). *Navier–stokes equations and nonlinear functional analysis*. SIAM.

www.claymath.org/millennium-problems. (s.f.).