

**LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS APLICADAS A LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 EN EL APRENDIZAJE DE  
ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO DE UNA INSTITUCIÓN OFICIAL DE LA  
CIUDAD DE BUCARAMANGA**

**JORGE IVÁN CARREÑO BELTRÁN**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
ESCUELA DE EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA  
BUCARAMANGA**

**2016**

**LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS APLICADAS A LA SOLUCIÓN DE  
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2, EN EL APRENDIZAJE DE  
ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO DE UNA INSTITUCIÓN OFICIAL DE LA  
CIUDAD DE BUCARAMANGA**

**JORGE IVÁN CARREÑO BELTRÁN**

**Trabajo de grado para optar al título de Magister en pedagogía**

**Directora:**

**MARÍA HELENA QUIJANO H.**

**Magister en Educación**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS**

**ESCUELA DE EDUCACIÓN**

**MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA**

**BUCARAMANGA**

**2016**

A DIOS por colmar de bendiciones nuestro camino y brindar las oportunidades en nuestro crecimiento continuo, y a mi familia, por su incondicional apoyo y motivación, pues gracias a ellos siento la satisfacción de lograr un propósito importante en mi vida.

Jorge Iván Carreño Beltrán

## **AGRADECIMIENTOS**

El autor expresa sus agradecimientos a:

A la directora y orientadora, María Helena Quijano H. por su paciencia, dedicación y aportes valiosos durante todo el proceso de investigación, que hicieron posible la realización y culminación de mi proyecto de grado.

A la Universidad Industrial de Santander, con el plantel de Docentes de la Maestría en Pedagogía, que formaron parte de este proyecto a través de su orientación y aportes para mi crecimiento profesional.

A los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Pública del Municipio de Bucaramanga, quienes formaron parte de esta investigación a través de sus aportes, disposición y participación; que hicieron posible la realización de este proyecto.

A todas las personas que de una u otra forma, aportaron en el logro de los objetivos planteados, en este, mi proyecto de grado.

## TABLA DE CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
INTRODUCCIÓN	20
1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	23
1.1 DESCRIPCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	23
1.2 JUSTIFICACIÓN	37
1.3 OBJETIVO GENERAL	41
1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	41
2. MARCO TEÓRICO	42
2.1 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN	42
2.1.1 Ámbito internacional.	42
2.1.2 Ámbito nacional.	44
2.1.3 Ámbito local.	46
2.2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	48
2.2.1 Situación matemática.	48
2.2.2 Procesos de la actividad matemática.	49
2.2.3 Pensamientos matemáticos y sus respectivos sistemas.	50
2.2.4 Situación didáctica.	51
2.2.5 Teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.	52
2.2.6 Tipos de interacción con el medio	53
2.2.7 Conceptos matemáticos básicos.	57
2.2.8 Conceptos matemáticos objeto de la investigación.	61
3. DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN	71
3.1 CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	73
3.2 PARTICIPANTES	73
3.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS	74
3.3.1 Técnicas	74
3.3.2 Instrumentos	79
3.4 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO METODOLÓGICO	80
3.4.1 Diagnóstico.	80
3.4.2 Intervención.	82
3.4.3 Reflexión.	88
4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	91

4.1 ANÁLISIS DEL TALLER DE PRESABERES.	95
4.1.1 Situación uno. Funciones.	96
4.1.2 Situación dos. rectas en el plano cartesiano	105
4.1.3 Situación tres. Modelación de una situación lineal real	119
4.1.4 Situación cuatro. Modelación recta paralela.	128
4.1.5 Situación cinco. Modelación recta perpendicular.	133
4.2 ANÁLISIS DIARIO DE CAMPO TALLER DE PRESABERES.	139
4.2.1 Presentación Diario de campo taller de presaberes.	140
4.2.2 Interpretación por categorías-Diario de campo	141
4.3 ANALISIS UNIDAD DIDACTICA.	145
4.3.1 secuencia didáctica 1: interpretación sistemas de ecuaciones 2x2	146
4.3.2 Secuencia Didáctica 2: Resolución de problemas.	156
4.4 APLICACIÓN DE PRUEBA FINAL.	183
4.5 RESULTADOS PRUEBA FINAL	187
5. CONCLUSIONES	189
6. RECOMENDACIONES	191
BIBLIOGRAFÍA	193
ANEXOS	197

## LISTA DE TABLA

	<b>pág.</b>
Tabla 1. Puntajes promedio y desviaciones estándar en matemáticas, lectura y ciencias, PISA 2012.	24
Tabla 2. Porcentajes de estudiantes en niveles 5 y 6, en nivel 2 (nivel básico) y por debajo de nivel 2 en PISA 2012.	25
Tabla 3. Puntajes promedio y porcentajes de estudiantes en niveles 5 y 6, nivel 2 y por debajo del nivel 2 en Colombia. 2006, 2009 y 2012.	26
Tabla 4. Competencias y componentes evaluados en las pruebas aplicadas en 2012.	28
Tabla 5. Descripciones genéricas de los niveles de desempeño.	29
Tabla 6. Resultados de evaluaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales 2x2 aplicadas a estudiantes de una Institución oficial de Bucaramanga durante los años 2013-2014.	33
Tabla 7. Aplicación de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, al taller de presaberes.	81
Tabla 8. Aplicación de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, al primer taller de investigación.	83
Tabla 9. Aplicación de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, al segundo taller de investigación.	85
Tabla 10. Aplicación de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, a la tercera unidad del taller de investigación.	87
Tabla 11 . Valoración de respuestas de los estudiantes en el reconocimiento de funciones.	96
Tabla 12. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de dominio, codominio y rango, figura 1, 2 y 3.	102
Tabla 13. Nivel de comprensión de los estudiantes en reconocer el dominio, codominio y rango de las relaciones 1, 2 y 3.	102
Tabla 14. Respuestas en despeje de (Y o X), de las ecuaciones a, b y c.	106

Tabla 15. Respuesta de los despeje de (Y o X), de las ecuaciones d, e y f.	107
Tabla 16. Nivel de comprensión de los estudiantes en despeje de variables de las ecuaciones a, b, c, d, e y f.	107
Tabla 17. Respuestas del cálculo de valores en tablas de ecuaciones a, b y c.	109
Tabla 18. Respuestas del cálculo de valores en tablas de ecuaciones d, e y f.	110
Tabla 19. Habilidad en el cálculo de valores tablas de ecuaciones a, b, c, d, e y f.	110
Tabla 20. Ejemplos de gráficas de las ecuaciones a, b, c, d, e y f. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 3.	112
Tabla 21. Habilidad de los estudiantes en gráficas de las ecuaciones a, b, c, d, e y f. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 3.	113
Tabla 22. Habilidad de los estudiantes para ubicar puntos en el plano cartesiano de las ecuaciones a, b, c, d, e y f.	115
Tabla 23. Resumen: Reconocimiento y clasificación de las rectas a, b, c, d, e y f. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 4.	116
Tabla 24. Resumen respuestas en comparación e interpretación de gráficas a y b. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 5.	118
Tabla 25. Resumen de respuestas, reconocimiento de variables, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 1.	119
Tabla 26. Clasificación de variables y reconocimiento de puntos, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 2.	121
Tabla 27. Resumen. Respuestas: Clasificación de variables y reconocimiento de puntos, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 2.	121
Tabla 28. Ejemplo gráficas Función de la recta, Recta paralela y Perpendicular	123
Tabla 29. Gráficas de estudiantes de la función lineal, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 3.	124
Tabla 30. Resumen: Tipo de soluciones a ecuación general y ordinaria, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 5.	127
Tabla 31. Resumen: reconocimiento de punto y pendiente, recta paralela. Taller de presaberes situación 4, ejercicio 1.	129

Tabla 32. Resumen: respuestas ecuación general, ordinaria y punto $P_2$ , recta paralela. Taller de pre-saberes situación 4, ejercicio 2.	130
Tabla 33. Resumen: respuestas, comparación rectas Atleta 1 y 2. Taller de pre-saberes situación 4, ejercicio 3.	132
Tabla 34. Resumen: respuestas reconocimiento de punto y pendiente, perpendicular. Taller de pre-saberes situación 5, ejercicio 1.	134
Tabla 35. Resumen: respuestas, ecuación general, ordinaria y punto $P_2$ , recta perpendicular. Taller de presaberes situación 5, ejercicio 2.	136
Tabla 36. Resumen: respuestas, comparación rectas Atleta 1 y 3. Taller de presaberes situación 5, ejercicio 4.	137
Tabla 37. Ejercicio propuesto 1, Método igualación. Niveles de solución.	148
Tabla 38. Resumen respuestas de los estudiantes. Método igualación.	149
Tabla 39. Ejemplo: Niveles de solución. Método Eliminación o reducción.	150
Tabla 40. Resumen respuestas de los estudiantes. Método eliminación o reducción.	151
Tabla 41. Ejemplo: Niveles de solución. Método Sustitución.	152
Tabla 42. Resumen respuestas de los estudiantes. Método Sustitución.	153
Tabla 43. Ejemplo: Niveles de solución. Método Crámer.	154
Tabla 44. Resumen respuestas de los estudiantes. Método Sustitución.	155
Tabla 45. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 1. Conformación de grupos.	157
Tabla 46. Solución: Ejercicio 1 Granja. Método asignado por grupo.	159
Tabla 47. Resumen: Solución Ejercicio 1 Granja. Método asignado por grupo.	160
Tabla 48. Solución: Ejercicio 2 Camiones. Método asignado por estudiante. Grupo G6.	162
Tabla 49. Resumen: Solución Ejercicio 2 Camiones de carga. Método asignado por integrante del grupo.	163
Tabla 50. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 3. Planteamiento por los estudiantes de una Situación real.	164
Tabla 51. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 3. Solución insuficiente de Situación real planteada por los grupos G1 y G2.	167

Tabla 52. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 3. Solución satisfactoria de Situación real planteada por los grupos G3, G4, G5 y G6.	168
Tabla 53. Unidad didáctica, Secuencia 3. Reconocimiento de errores, Ejercicio 1, Método de Igualación.	171
Tabla 54. Unidad didáctica, Secuencia 3. Correcciones propuestas por los grupos de estudiantes frente a errores, Ejercicio 1, Método de Igualación.	173
Tabla 55. Unidad didáctica, Secuencia 3. Reconocimiento de errores, Ejercicio 2, Método de Reducción.	176
Tabla 56. Unidad didáctica, Secuencia 3. Correcciones propuestas por los grupos de estudiantes frente a errores, Ejercicio 1, Método de Reducción.	178
Tabla 57. Unidad didáctica, Secuencia 3. Reconocimiento de errores, Ejercicio 3, Método de Sustitución.	180
Tabla 58. Unidad didáctica, Secuencia 3. Correcciones propuestas por los grupos de estudiantes frente a errores, Ejercicio 1, Método de Sustitución.	182
Tabla 59. Ejemplos de respuestas prueba diagnóstica final No. 1.	184
Tabla 60. Ejemplos de respuestas prueba diagnóstica final No. 1.	186
Tabla 61. Confrontación de resultados de evaluaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales 2x2 aplicadas a estudiantes de una Institución oficial de Bucaramanga durante los años 2013-2014 frente a muestra 2015.	187

## LISTA DE GRAFICAS

	pág.
Gráfica 1. Comparación de porcentajes según niveles de desempeño en el departamento y el país en matemáticas, noveno grado.	29
Gráfica 2. Comparación de porcentajes según niveles de desempeño en la entidad territorial de Bucaramanga y el país en matemáticas, noveno grado.	30
Gráfica 3. Resultados de noveno grado en el área de matemáticas. Distribución de los estudiantes según rangos de puntajes y niveles de desempeño en matemáticas, noveno grado	31
Gráfica 4. Estructura de una situación matemática.	48
Gráfica 5. Los cinco procesos de la actividad matemática.	49
Gráfica 6. Los cinco pensamientos del análisis matemático y sus respectivos sistemas.	50
Gráfica 7. Esquema de una situación didáctica.	52
Gráfica 8. Teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.	53
Gráfica 9. Tipos de interacción del estudiante con el medio.	54
Gráfica 10. Esquema general de una situación de acción.	55
Gráfica 11. Esquema general de una situación de formulación.	56
Gráfica 12. Esquema general de una situación de validación.	57
Gráfica 13. El plano cartesiano.	59
Gráfica 14. Representación de puntos en el plano cartesiano	60
Gráfica 15. Ejemplo método gráfico	63
Gráfica 16. Instancias del taller investigativo.	78
Gráfica 17. Proceso de investigación acción a aplicar en el estudio.	90
Gráfica 18. Proceso de triangulación metodológica de resultados.	91
Gráfica 19. Categorización de taller de pre saberes.	94
Gráfica 20. Relación entre categorías del taller de pre saberes.	95
Gráfica 21. Taller de pre-saberes situación 1, ejercicio 1. Reconocimiento de una función.	96

Gráfica 22. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de funciones.	97
Gráfica 23. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de dominio, Codominio y rango.	99
Gráfica 24. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de dominio, Codominio y rango, de la figura 2.	100
Gráfica 25. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de dominio, codominio y rango, de la figura 3	101
Gráfica 26. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de dominio, codominio y rango, figuras 1, 2 y 3.	103
Gráfica 27. Reconocimiento de los estudiantes de los ejes coordenados.	106
Gráfica 28. Habilidad de los estudiantes para despejar variables de las ecuaciones a, b, c, d, e, f.	108
Gráfica 29. Habilidad de los estudiantes para despejar variables de las ecuaciones a, b, c, d, e, f.	108
Gráfica 30. Cálculo de valores tablas de ecuaciones a, b, c, d, e y f.	109
Gráfica 31. Resumen Habilidad de los estudiantes en el cálculo de valores tablas de ecuaciones a, b, c, d, e y f.	110
Gráfica 32. Solución gráfica de las ecuaciones a, b, c, d, e y f.	111
Gráfica 33. Habilidad de los estudiantes al graficar rectas de ecuaciones a, b, c, d, e y f. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 3.	113
Gráfica 34. Habilidad de los estudiantes para ubicar puntos en el plano cartesiano de las ecuaciones a, b, c, d, e y f.	115
Gráfica 35. Reconocimiento y clasificación de las rectas a, b, c, d, e y f. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 4.	117
Gráfica 36. Habilidad para comparar e interpretar gráficas a y b. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 5.	118
Gráfica 37. Habilidad en reconocimiento de variables, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 1.	120

Gráfica 38. Clasificación de variables y reconocimiento de puntos, aplicación 1. Taller de pre-saberes situación 3, ejercicio 2.	122
Gráfica 39. Solución gráficas de los estudiantes: aplicación 1, paralela y perpendicular. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 3.	123
Gráfica 40. Resumen Gráficas de estudiantes de la función lineal, recta paralela y recta perpendicular a la aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 3.	124
Gráfica 41. Resultados sobre reconocimiento de pendiente, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 4.	125
Gráfica 42. Resultados: Tipo de soluciones a ecuación general y ordinaria, aplicación 1. Taller de pre-saberes situación 3, ejercicio 5.	127
Gráfica 43. Resultados: reconocimiento de punto y pendiente, recta paralela. Taller de presaberes situación 4, ejercicio 1.	129
Gráfica 44. Resultados, respuestas ecuación general, ordinaria y punto $P_2$ , recta paralela. Taller de presaberes situación 4, ejercicio 2.	131
Gráfica 45. Resultados, comparación rectas Atleta 1 y 2. Taller de pre-saberes situación 4, ejercicio 3.	133
Gráfica 46. Resultados en reconocimiento de punto y pendiente, recta perpendicular. Taller de pre-saberes situación 5, ejercicio 1.	135
Gráfica 47. Resultados respuestas, ecuación general, ordinaria y punto $P_2$ , recta perpendicular. Taller de presaberes situación 5, ejercicio 2.	136
Gráfica 48. Resultados respuestas, comparación recta Atletas 1 y 3. Taller de presaberes situación 5, ejercicio 4.	138
Gráfica 49. Fundamentación teórica del contenido	139
Gráfica 50. Categorización del diario de campo. Taller de pre-saberes.	141
Gráfica 51. Categorización Unidad Didáctica.	145
Gráfica 52. Solución método Igualación	149
Gráfica 53. Solución método de eliminación o reducción	151
Gráfica 54. Solución Método Sustitución	153
Gráfica 55. Solución método Crámer	155

Gráfica 56. Nivel avanzado de solución -Ejercicio Granja	160
Gráfica 57. HABILIDADES EN NIVEL AVANZADO Solución: Ejercicio Camiones de carga	163
Gráfica 58. Confrontación de resultados de evaluaciones a estudiantes de 9° años 2013-2016, en métodos para la solución de ecuaciones lineales 2x2.	188

## LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Declaración del docente investigador.....	197
Anexo B. Asentamiento informado de los estudiantes.....	198
Anexo C. Consentimiento informado para los padres de familia de los estudiantes participantes de la investigación .....	199
Anexo D. Modelo taller de presaberes.....	201
Anexo E. Modelo unidad didáctica.....	210
Anexo F. Resumen nivel de respuestas de los estudiantes Unidad didáctica .....	222
Anexo G. Resumen argumentos de los estudiantes al confrontar resultados.....	226
Anexo H. Prueba final. Evaluación d aprendizaje 1. Método igualación y eliminación.....	232
Anexo I Prueba final. Evaluación d aprendizaje 1. Método sustitución y Cramer.	235

## RESUMEN

**TÍTULO:** LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS APLICADAS A LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2, EN EL APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO DE UNA INSTITUCIÓN OFICIAL DE LA CIUDAD DE BUCARAMANGA\*

**AUTOR:** JORGE IVAN CARREÑO BELTRÁN\*\*

**PALABRAS CLAVE:**

Sistemas de ecuaciones lineales, Método-Igualación-Eliminación -Sustitución -Cramer - Gráfico, Situaciones didácticas, Pensamiento matemático, Competencias matemáticas.

**DESCRIPCIÓN:**

La aplicación del presente proyecto busca dar respuesta a la pregunta: ¿Cómo solucionar problemas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales, dos por dos, implementando la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau en estudiantes de noveno grado de una institución pública de Bucaramanga?, para esto fue necesario identificar la forma como los estudiantes interpretan la aplicabilidad de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 al tratar de adaptarlo a situaciones de la vida real, con el propósito de reconocer sus dificultades conceptuales y procedimentales y así diseñar situaciones didácticas donde se apliquen momentos de acción, formulación y validación dentro del aula de clases.

En la fase inicial se busca identificar la situación problema en la Institución Educativa donde se desarrolla la investigación, que permita diseñar una propuesta metodológica. El segundo capítulo contiene el desarrollo del marco teórico conformado por los antecedentes de investigación y la fundamentación teórica enmarcada en la enseñanza y aprendizaje de la matemática que sustentan teóricamente las categorías emergentes de esta investigación y el análisis de los resultados obtenidos. El tercer capítulo presenta la contextualización de la investigación y descripción del proceso metodológico con enfoque desde el paradigma cualitativo y diseño basado en la Investigación Acción. Finalmente, el cuarto capítulo detalla los resultados analizados desde las categorías emergentes del proceso de recolección de información: “Habilidad cognitiva, interpretativa, procedimental, argumentativa y propositiva”, en la aplicación de la prueba diagnóstica, notas de campo e implementación de una Unidad Didáctica, para finalmente presentar las conclusiones y recomendaciones, orientadas a generar un impacto en la población objeto de estudio fortaleciendo en el aprendiz el desarrollo de habilidades analíticas propias del concepto matemático adquirido, y así adaptarlas a situaciones reales del entorno, aportando en la solución de problemas que surgen en el desarrollo de la actividad diaria.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Directora: María Helena Quijano, Magister en Educación.

## ABSTRACT

**TITLE:** THE DIDACTIC SITUATIONS APPLIED TO THE SOLUTION OF 2X2 LINEAR EQUATION SYSTEMS IN NINTH GRADE STUDENTS' LEARNING FROM A PUBLIC SCHOL IN BUCARAMANGA\* .

**AUTHOR:** JORGE IVAN CARREÑO BELTRÁN\*\*

**KEYWORDS:**

linear equation system, Equalization - Elimination – Substitution -Cramer –by graphing-Method, didactic situations, mathematical thinking, math skills.

**DESCRIPTION:**

The implementation of this project seeks to answer the question: how to solve problems related to 2x2 linear equation systems, implementing Guy Brousseau's didactic situations theory In ninth grade students from a public school in Bucaramanga?, for this, it was necessary to identify the way students interpret the applicability of a 2 x 2 linear equation system when trying to adapt it to real life situations, with the purpose of recognizing their conceptual and procedural difficulties and to design didactic situations where moments of action, formulation and validation are applied within the classroom.

The initial phase seeks to identify the problem at the school where the situation takes place which will allow the design of a methodological proposal.. The second chapter contains the development of a theoretical framework consisting on the research background and theoretical foundation framed in the teaching and learning of mathematics that theoretically support the emerging categories of this research and analysis of the corresponding results. The third chapter presents the contextualization of research and description of the methodological approach process from the qualitative paradigm and design based on the Action Research. Finally, the fourth chapter details the results analyzed from the emerging categories of the process of data collection: "cognitive, interpretative, procedural, argumentative and purposeful Skill" in the application of the diagnostic test, field notes and implementation of a teaching unit to finally present the conclusions and recommendations aimed to generating an impact on the population studied strengthening in the learner the development of own analytical math skills, and thus adapt to real situations of the environment, contributing in solving problems resulting in the development of daily activity.

---

\* Grade work

\*\* Faculty of Human Sciences. School of Education. Director: María Helena Quijano, Magister en Educación.

## INTRODUCCIÓN

Los desafíos presentes en la educación, producto de los cambios que se han suscitado a raíz de la globalización y el surgimiento de una sociedad que exige nuevas tendencias que llenen las expectativas de un mundo encaminado a facilitar el logro de las necesidades generadas por el crecimiento continuo de la ciencia y la tecnología, exige la formación de personas abiertas al cambio, que estén en condiciones de asimilar y afrontar nuevos retos, con la ayuda de un pensamiento crítico, capaz de realizar procesos de análisis, interpretación y adaptación a ese nuevo mundo. Es así como a través de esta investigación, se busca que el personal encargado de la educación, implemente nuevas estrategias y metodologías encaminadas en alcanzar los objetivos de una sociedad en continua evolución, y en específico, que este proyecto permita a los estudiantes de noveno grado, mediante la implementación de la teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, superar las dificultades detectadas en el aprendizaje de los métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ , despertando en el estudiante, la habilidad de adaptar éste conocimiento matemático, a su aplicabilidad en múltiples situaciones reales que aporten en el logro de las exigencias de este nuevo mundo.

Fue necesario identificar la forma como los estudiantes interpretan la aplicabilidad de un sistema de ecuaciones lineales  $2 \times 2$  al tratar de adaptarlo a situaciones de la vida real para identificar las dificultades conceptuales y procedimentales que presentan en la solución de problemas donde se involucran dos condiciones propias de un fenómeno; y así determinar situaciones didácticas generadoras de condiciones que favorezcan en el estudiante la aplicación del conocimiento matemático, a su vez, diseñar situaciones didácticas donde se desarrolle momentos de acción, formulación y validación dentro del aula de clases,

encaminados a la solución de problemas relacionados a sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, e implementarlas.

La estructura del informe, se encuentra organizado en cuatro capítulos, que aparecen explicados brevemente a continuación:

En el capítulo uno se presenta la formulación del problema de investigación, el cual contiene: descripción y planteamiento del problema, justificación, objetivo general y específicos. En esta fase inicial se busca identificar y orientar la situación problema, propia del contexto de la Institución Educativa en la que se desarrolla el estudio, con el propósito de permitir al docente investigador, diseñar una propuesta metodológica mediante la aplicación de estrategias basadas en la Teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.

Seguidamente, el capítulo dos contiene el desarrollo del marco teórico conformado por los antecedentes de investigación en el ámbito internacional, nacional y local; fundamentación teórica enmarcada en la enseñanza y aprendizaje de la matemática: Procesos de la actividad matemática, Pensamientos matemáticos y sus respectivos sistemas, Situación didáctica, Teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau y Conceptos matemáticos básicos tales como Variable “dependiente e independiente”, Plano cartesiano, Ecuación lineal, Sistema de ecuaciones lineales  $2 \times 2$  y Métodos para solución de ecuaciones lineales  $2 \times 2$  (Gráfico, algebraicos y por determinantes). La anterior información sustenta teóricamente las categorías emergentes de esta investigación y orientan el análisis de los resultados obtenidos.

A continuación, en el capítulo tres se presenta el diseño metodológico de investigación conformado por la contextualización de la investigación, descripción de la población participante, técnicas e instrumentos y descripción del proceso metodológico, el enfoque metodológico se realiza a partir del paradigma cualitativo y se plantea el diseño metodológico desde la Investigación Acción.

Finalmente, en el capítulo cuatro se desarrolla el proceso de análisis de resultados, con la interpretación, análisis y desarrollo de las categorías que resultaron de todo un proceso obtenido en la recolección de datos como fueron la aplicación del taller de presaberes, diario de campo e implementación de la Unidad Didáctica. Las categorías emergentes analizadas fueron: “Habilidad cognitiva, interpretativa, procedimental, argumentativa y propositiva” para finalmente presentar las conclusiones y recomendaciones, referentes bibliográficos y los anexos.

La estructura anteriormente presentada, está enfocada en generar un impacto a la población objeto de estudio, con el propósito de enriquecer en el aprendizaje el desarrollo de habilidades analíticas propias del concepto matemático, que le permitan contextualizar el conocimiento adquirido, para lograr adaptarlas a las situaciones reales propias del entorno, aportando de esta forma en la solución de problemas que surgen en el desarrollo de la actividad diaria.

# 1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

## 1.1 DESCRIPCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El manejo de conceptos abstractos propios de la matemática, es un tema que por largo tiempo representa uno de los principales problemas de estudio de pedagogos e investigadores de la educación, que dedican largas horas del día y no ahorran esfuerzos por encontrar mejores estrategias que ayuden a reducir las dificultades de aprendizaje que presentan los jóvenes al atravesar por las diferentes etapas en las que cambia su forma de pensamiento, y en particular en estudiantes de noveno grado en edades entre los 13 y 17 años, que de acuerdo con la labor desarrollada por los expertos encargados de organizar los contenidos curriculares y de definir los procesos de pensamiento a desarrollar en la educación básica correspondientes a estos grados, incrementan el grado de complejidad conceptual y procedimental del currículo actual en forma progresiva, intensificándose el manejo de conceptos abstractos que el estudiante difícilmente formaliza a sus estructuras cognitivas, tal como lo señala Michéle Artigue<sup>5</sup> *“existen grandes dificultades para que los alumnos alcancen una comprensión satisfactoria de los conceptos abstractos y métodos del pensamiento que son el centro de la educación matemática.”*, tales como la solución de ecuaciones algebraicas, el trabajo con variables que modelan situaciones de la vida cotidiana, el uso de diferentes unidades de medidas, la representación gráfica de funciones en el plano cartesiano, entre otras, constituyéndose este en uno de los principales problemas para los jóvenes que no alcanzan a desarrollar eficientemente su capacidad de aprendizaje para este tipo de temas, que según Estándares Básicos de Competencias Matemáticas<sup>6</sup> corresponden a los sistemas algebraico y analítico

---

<sup>5</sup> Artigué, M. Ingeniería Didáctica en Ingeniería en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. México. (1995). P.97.

<sup>6</sup> MEN, Desarrollo pedagógico. Matemática-Lineamientos curriculares. Cooperativa editorial magisterio. Bogotá, D.C. julio de 1998.

y que son propios del pensamiento variacional, necesarios en el estudiante, quien debe apropiarse de ellos para asimilar estos nuevos conceptos.

Un referente que a nivel internacional, puede ayudar a dimensionar la magnitud del problema que presenta la matemática en Colombia, son los resultados obtenidos en la tercera participación en la que Colombia toma parte del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA 2012 -sigla en inglés), proyecto que la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) desarrolla desde finales de la década de los años 1990, con el objetivo de evaluar qué tan bien preparados están los estudiantes de 15 años de edad para enfrentar los retos de la vida adulta. Desde el año 2000, las pruebas PISA se llevan a cabo cada tres años, con la finalidad de evaluar los niveles de competencias de los estudiantes, en matemáticas, lectura y ciencias naturales. Cada aplicación enfatiza en una de las tres áreas, siendo en los años 2003 y 2012 el énfasis de la prueba en el área de matemática, y cuyos resultados obtenidos en el año 2012 pueden observarse en la Tabla 1.

**Tabla 1. Puntajes promedio y desviaciones estándar en matemáticas, lectura y ciencias, PISA 2012<sup>7</sup>.**

Puntajes promedio y desviaciones estándar en matemáticas, lectura y ciencias, PISA 2012

Países	Matemáticas		Lectura		Ciencias	
	Promedio	Desviación estándar	Promedio	Desviación estándar	Promedio	Desviación estándar
Chile	423	81	441	78	445	80
México	413	74	424	80	415	71
Uruguay	409	89	411	96	416	95
Costa Rica	407	68	441	74	429	71
Brasil	391	78	410	85	405	79
Argentina	388	77	396	96	406	86
<b>Colombia</b>	<b>376</b>	<b>74</b>	<b>403</b>	<b>84</b>	<b>399</b>	<b>76</b>
Perú	368	84	384	94	373	78
Promedio OCDE	494	92	496	94	501	93
Shanghái	613	101	570	80	580	82

Nota: los países latinoamericanos están ordenados de mayor a menor puntaje promedio en matemáticas.

Fuente: OCDE, 2013.

Fuente: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), 2013.

<sup>7</sup> Información sobre Pruebas PISA 2012 (que evalúan las Pruebas PISA). Disponible en: <file:///D:/Users/HP/Downloads/RESUMEN%20PISA%202012.PDF>

La participación colombiana estuvo conformada por una muestra de 9073 estudiantes de 352 instituciones a nivel nacional; los resultados que Colombia obtuvo en matemáticas fueron de los más bajos, pues de 65 países participantes que estuvieron presentes en el 2012, aparece clasificado en el puesto 62, con un promedio de 376 puntos, ubicándose en los últimos lugares de la tabla, con resultados similares a los de Perú, que obtuvo el peor puntaje en el área de matemáticas.

PISA clasifica los resultados de los estudiantes en tres niveles, tal como se puede observar en la Tabla 2, los cuales se encuentran organizados de la siguiente forma: el nivel 5 y 6 (nivel avanzado), nivel 3 y 4 (nivel satisfactorio) ,nivel 2 (nivel básico) y nivel <2 (estudiantes que no alcanzan el nivel básico) en matemáticas.

**Tabla 2. Porcentajes de estudiantes en niveles 5 y 6, en nivel 2 (nivel básico) y por debajo de nivel 2 en PISA 2012<sup>8,9</sup>**

Porcentajes de estudiantes en niveles 5 y 6, en nivel 2 (nivel básico) y por debajo de nivel 2 en PISA 2012

Países	Matemáticas			Lectura			Ciencias		
	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)
Chile	1,6	25,3	51,5	0,6	35,1	33,0	1,0	34,6	34,5
México	0,6	27,8	54,7	0,4	34,5	41,1	0,1	37,0	47,0
Uruguay	1,4	23,0	55,8	0,9	28,9	47,0	1,0	29,3	46,9
Costa Rica	0,6	26,8	59,9	0,6	38,1	32,4	0,2	39,2	39,3
Brasil	0,8	20,4	67,1	0,5	30,1	49,2	0,3	30,7	53,7
Argentina	0,3	22,2	66,5	0,5	27,3	53,6	0,2	31,1	50,9
<b>Colombia</b>	<b>0,3</b>	<b>17,8</b>	<b>73,8</b>	<b>0,3</b>	<b>30,5</b>	<b>51,4</b>	<b>0,1</b>	<b>30,8</b>	<b>56,2</b>
Perú	0,6	16,1	74,6	0,5	24,9	59,9	0,0	23,5	68,5
Promedio OCDE	12,6	22,5	23,0	8,4	23,5	18,0	8,4	24,5	17,8
Shanghái	55,4	7,5	3,8	25,1	11,0	2,9	27,2	10,0	2,7

Nota: los países latinoamericanos están ordenados de mayor a menor puntaje promedio en matemáticas.

Fuente: OCDE, 2013.

Fuente: OCDE, 2013.

<sup>8</sup> Ibíd., p. 8.

<sup>9</sup> Oecd.org. Panorama de la educación 2013. Indicadores de la OCDE. [Citado el 10 de febrero de 2016]. Disponible en: <https://www.oecd.org/edu/Panorama%20de%20la%20educacion%202013.pdf>

Del grupo de estudiantes que participó por Colombia, clasificados según los niveles de competencia ya señalados, se puede observar que solo un 0,3% de los estudiantes, alcanzaron los niveles 5 y 6, logrando un pensamiento y razonamiento matemático avanzado, lo cual significa que tienen habilidades para seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas, para conceptuar, generalizar y utilizar información, aplicando conocimientos poco estandarizados; y reflexionar sobre su trabajo formulando y comunicando sus interpretaciones y razonamientos. Solo el 17,8% de los estudiantes, aparecen ubicados en el nivel 2; lo cual refleja que tienen habilidades para hacer interpretaciones literales de los resultados de problemas matemáticos, emplear algoritmos básicos, formulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas de números enteros, e interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. Pero de forma alarmante, se observa que el 73,8% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 2, mostrando un deficiente desempeño en los temas anteriormente señalados.

Otro aspecto a tener en cuenta de este análisis, es la comparación a través de los años en los que Colombia ha participado, para identificar si se han presentado progresos en la formación matemática de los jóvenes, de acuerdo a la información contenida en la Tabla 3.

**Tabla 3. Puntajes promedio y porcentajes de estudiantes en niveles 5 y 6, nivel 2 y por debajo del nivel 2 en Colombia. 2006, 2009 y 2012.**

Puntajes promedio y porcentajes de estudiantes en niveles 5 y 6, nivel 2 y por debajo del nivel 2 en Colombia. 2006, 2009 y 2012

	Matemáticas				Lectura				Ciencias			
	Promedio	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)	Promedio	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)	Promedio	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)
2006	370	0,4	18,2	71,9	385	0,6	25,2	55,7	388	0,2	27,2	60,2
2009	381	0,1	20,3	70,4	413	0,6	30,6	47,1	402	0,1	30,2	54,1
2012	376	0,3	17,8	73,8	403	0,3	30,5	51,4	399	0,1	30,8	56,2

Fuente: OCDE, 2013

Desde su primera participación en PISA, en 2006, los resultados de Colombia han permanecido estables, a pesar de los aumentos en la cobertura, que se dieron principalmente para vincular al sistema educativo a la población en edad escolar en situación de vulnerabilidad. En matemáticas, el crecimiento anual en resultados ha sido de 1,1 puntos entre 2006 y 2012.

Por otra parte, en los informes se reitera el efecto de haber recibido educación preescolar sobre el desempeño académico posterior de los estudiantes. En Colombia, los estudiantes que afirmaron haber asistido a programas de educación inicial por más de un año obtuvieron 34 puntos más en la prueba de matemáticas que aquellos que no lo hicieron. Esta diferencia equivale a un año de escolaridad aproximadamente. Esto es especialmente sobresaliente en Colombia, puesto que solo una tercera parte de los estudiantes afirmó haber asistido al preescolar por más de un año y el 14% no tuvo esta experiencia formativa. En países como Argentina, Uruguay y México, el porcentaje de estudiantes que asiste por un año y más se encuentra alrededor del 70%.

La prueba PISA consta de 6 tipos de preguntas categorizadas en 3 índices: el índice de exposición a problemas que exigen la comprensión de un texto (ICT), el índice de exposición a la aplicación de las matemáticas (IAM) y el índice de exposición a teorías y conceptos matemáticos o matemáticas formales (IMF). Este último índice IMF, es el que en mayor proporción afecta los resultados de Colombia en matemáticas, pues existe una diferencia bastante significativa entre los estudiantes que reciben mayor formación en teorías y conceptos relacionados con el álgebra y geometría de aproximadamente 91 puntos superior a quienes no profundizan en estos temas, lo que representa más de dos años de retraso en escolaridad, creándose la necesidad de reforzar estos conceptos en el aula de clases, con el propósito de mejorar los resultados en futuras participaciones en esta prueba.

Otro referente que puede mostrarnos la magnitud de la problemática evidente en el área de matemáticas en nuestro país, son los resultados de las pruebas SABER aplicadas por el ICFES en octubre de 2012<sup>10</sup>, a estudiantes de los grados 3°, 5° y 9° de todo el territorio nacional en establecimientos educativos oficiales y privados, urbanos y rurales. Se evaluaron cerca de 2,4 millones de alumnos de aproximadamente 20.000 establecimientos educativos, quienes contestaron pruebas de lenguaje y matemáticas. Adicionalmente, los de quinto y noveno grados fueron examinados en ciencias naturales y competencias ciudadanas. La construcción de estas pruebas se efectuó según los estándares establecidos por el MEN, en cuanto a las competencias y componentes definidos en cada una de estas áreas (véase Tabla 4).

**Tabla 4. Competencias y componentes evaluados en las pruebas aplicadas en 2012.**

Competencias y componentes evaluados en las pruebas aplicadas en 2012.

Área	Competencias	Componentes
<b>Lenguaje</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comunicativa - lectora</li> <li>• Comunicativa - escritora</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Semántico</li> <li>• Sintáctico</li> <li>• Pragmático</li> </ul>
<b>Matemáticas</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Razonamiento y argumentación</li> <li>• Comunicación, representación y modelación</li> <li>• Planteamiento y resolución de problemas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Numérico-variacional</li> <li>• Geométrico-métrico</li> <li>• Aleatorio</li> </ul>
<b>Ciencias naturales</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uso comprensivo del conocimiento científico</li> <li>• Explicación de fenómenos</li> <li>• Indagación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entorno vivo</li> <li>• Entorno físico</li> <li>• Ciencia, tecnología y sociedad</li> </ul>

Fuente: ICFES interactivo, 2013.

En la guía elaborada por el ICFES, “Pruebas SABER 3°, 5° y 9°. Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2012”, se pueden consultar las descripciones de lo que se evalúa en cada una de las áreas. Del mismo modo la

<sup>10</sup>icfes.gov.co. Información sobre las Pruebas Saber 2012 (qué evalúan las Pruebas Saber). [Citado el 13 de marzo de 2016]. Disponible en: <http://www.icfes.gov.co/examenes/pruebas-saber/guias-y-ejemplos-de-preguntas>.

información aparece clasificada en cuatro categorías según aparece relacionado en la Tabla 5.

**Tabla 5. Descripciones genéricas de los niveles de desempeño.**

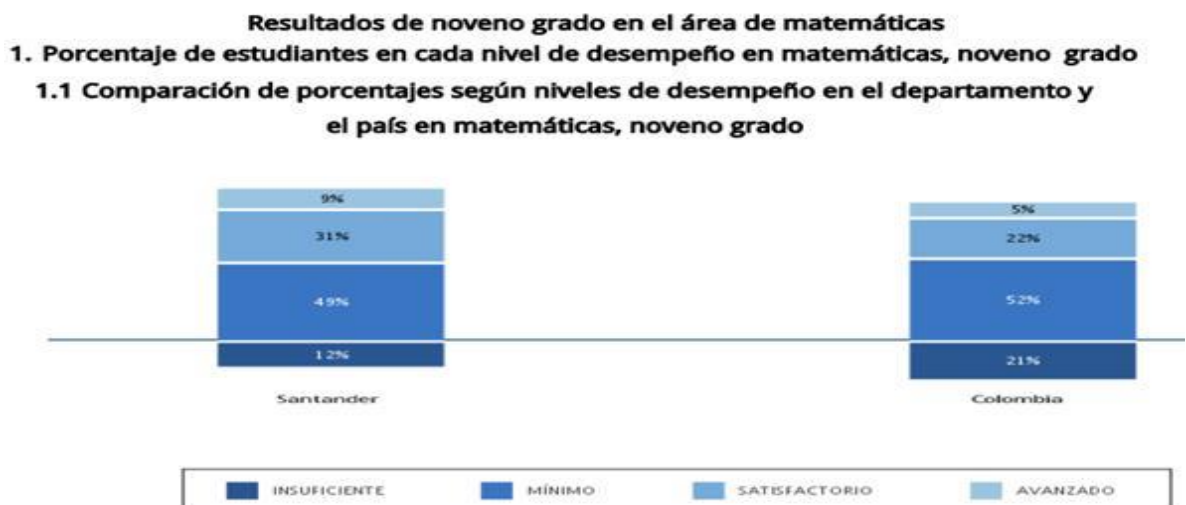
Descripciones genéricas de los niveles de desempeño.

Nivel	Descripción <i>Un estudiante promedio ubicado en este nivel...</i>
<b>Avanzado</b>	Muestra un desempeño sobresaliente en las competencias esperadas para el área y grado evaluados.
<b>Satisfactorio</b>	Muestra un desempeño adecuado en las competencias exigibles para el área y grado evaluados. <b>Este es el nivel esperado que todos o la gran mayoría de los estudiantes deberían alcanzar.</b>
<b>Mínimo</b>	Supera las preguntas de menor complejidad de la prueba para el área y grado evaluados.
<b>Insuficiente</b>	No supera las preguntas de menor complejidad de la prueba para el área y el grado evaluados.

Fuente: ICFES interactivo, 2013.

Según los niveles de desempeño relacionados (Avanzado, Satisfactorio, Mínimo e Insuficiente) se puede observar en la Gráfica 1, una comparación de porcentajes según niveles de desempeño en el departamento y el país en matemáticas en noveno grado, de acuerdo a los resultados obtenidos en el año 2012.

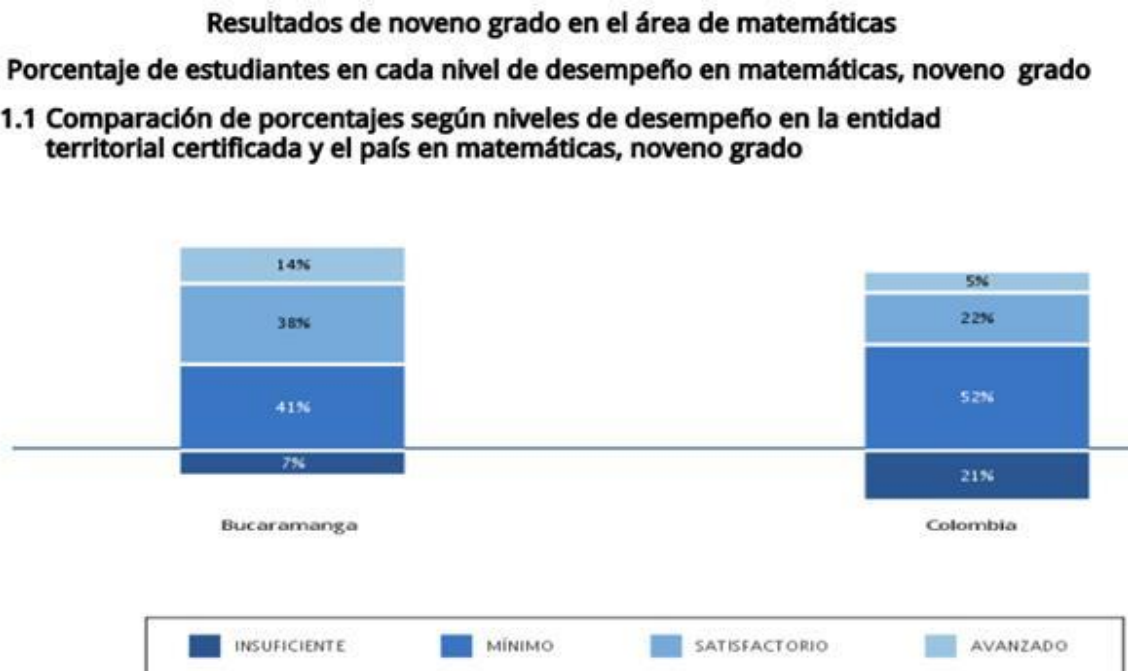
**Gráfica 1. Comparación de porcentajes según niveles de desempeño en el departamento y el país en matemáticas, noveno grado.**



Fuente: ICFES interactivo, 2013.

En esta gráfica se evidencia, que los resultados en el área de matemáticas a nivel del departamento de Santander, aunque aparecen levemente por encima del promedio nacional, no son buenos; pues el 12% de los estudiantes del departamento se encuentran en un nivel insuficiente y el 49% solo alcanzan un nivel mínimo de desempeño en esta área, lo cual representa que 6 de cada 10 estudiantes a nivel del departamento, no alcanzan un nivel satisfactorio o avanzado, frente a 7 de cada 10 estudiantes a nivel nacional, lo cual es bastante alarmante. Por otra parte a nivel de la entidad territorial de Bucaramanga, realizando un cuadro comparativo con los resultados alcanzados a nivel nacional en 2012, aparece la siguiente información relacionada en la Gráfica 2.

**Gráfica 2. Comparación de porcentajes según niveles de desempeño en la entidad territorial de Bucaramanga y el país en matemáticas, noveno grado.**



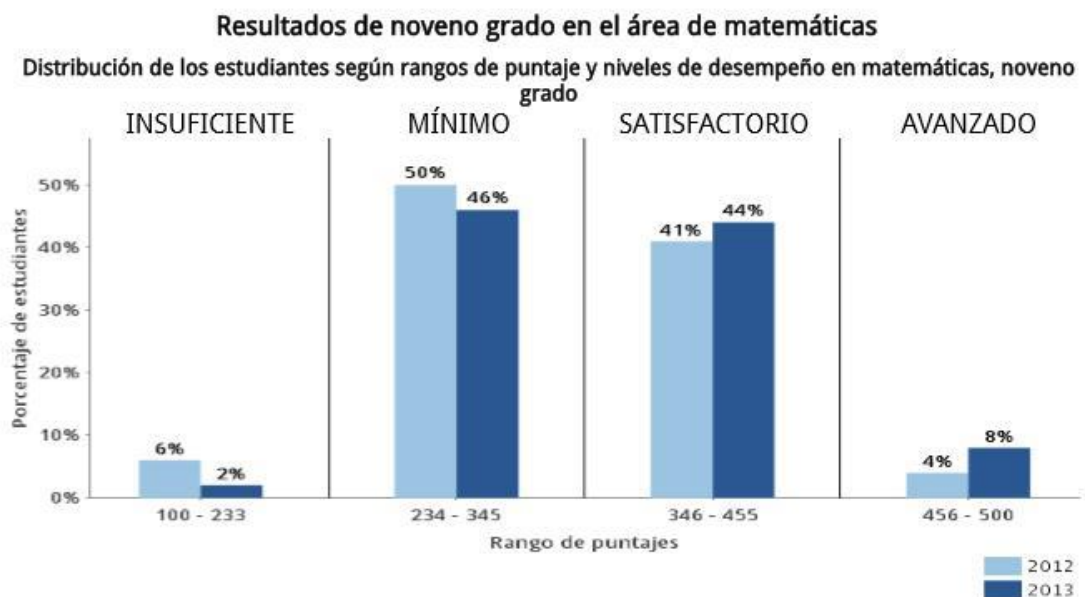
Fuente: ICFES interactivo, 2013.

Se observa como la entidad territorial de Bucaramanga al igual que ocurre en el departamento de Santander, alcanzan un desempeño relativamente significativo

por encima del promedio nacional, donde el 73% de los estudiantes a nivel nacional frente al 48 % de los estudiantes de Bucaramanga, no alcanzan el nivel satisfactorio en la prueba, lo cual significa que en la capital santandereana, 5 de cada 10 estudiantes no llenan las expectativas en su desempeño al manejar los conceptos matemáticos evaluados en las pruebas saber 2012.

Por otra parte, tomando como referencia los resultados de las pruebas SABER<sup>11</sup>, en las que participó la Institución oficial objeto del presente estudio durante los años 2012 y 2013, y cuya información se encuentra relacionada en la Gráfica 3, que el desempeño de los estudiantes en el área de matemática no es satisfactorio, confirmando el problema que se ve reflejado tanto a nivel nacional en las pruebas saber, como a nivel internacional en las pruebas PISA, presentadas en el año 2012.

**Gráfica 3. Resultados de noveno grado en el área de matemáticas. Distribución de los estudiantes según rangos de puntajes y niveles de desempeño en matemáticas, noveno grado**



Fuente: ICFES interactivo, 2014.

<sup>11</sup> Información sobre las Pruebas Saber 2012 y 2013 (qué evalúan las Pruebas Saber). Disponible en: <file:///D:/Users/HP/Downloads/RESUMEN%20SABER%202009.pdf>.

La gráfica muestra que aproximadamente la mitad de los estudiantes de noveno grado de la Institución (50% en el año 2012 y 46% en el 2013), alcanzaron un desempeño mínimo en la prueba saber, lo cual indica que para este nivel, solo muestran un dominio en las distintas formas de representar una función y solucionar problemas en contextos aditivos y multiplicativos, entre tanto el 41% y 44% respectivamente, alcanzan un nivel satisfactorio, que significa que además de tener conocimiento en los conceptos anteriormente descritos; reflejan un manejo al recurrir a expresiones algebraicas y representaciones gráficas para modelar situaciones simples de variación; comparan atributos medibles de uno o varios eventos, usan ecuaciones e informaciones presentadas en tablas para resolver problemas, donde se analizan situaciones modeladas a través de funciones lineales. Únicamente el 4% y 8% de los estudiantes de la Institución respectivamente, alcanzan un nivel sobresaliente, indicando que adicional a las competencias ya señaladas, presentan habilidades para pasar de la representación algebraica a las propiedades de una función, además son capaces de establecer equivalencias entre expresiones algebraicas y numéricas, enuncian propiedades relativas a determinados subconjuntos numéricos. Finalmente, un 6% en el año 2012 y 2% en el 2013 se encuentran en el nivel insuficiente, con problemas en la mayoría de los conceptos anteriormente especificados. Esta situación se ha convertido en una preocupación para la Institución, pues de cada uno de los niveles de desempeño, únicamente una proporción cercana a la mitad de los estudiantes (45% año 2012 y 52% año 2013), logra superar los resultados esperados.

Además, de acuerdo a las calificaciones de las evaluaciones de aprendizaje realizadas por el docente de matemáticas en el primer periodo y aplicadas durante los últimos dos años, a la población de estudiantes que cursan noveno grado de la básica secundaria de la Institución, se ha podido observar el alto grado de dificultad en el manejo de conceptos tales como: ecuación, variable, despeje de

una variable, igualdad, solución de una ecuación, etc.; y de los procesos que se realizan en cada uno de los métodos (gráfico, sustitución, reducción, igualación y determinantes) referentes a la solución de ecuaciones lineales 2x2 y la forma como relacionan el planteamiento de estas ecuaciones a situaciones del contexto propio de su diario vivir, constituyéndose esta en una de las principales causas de reprobación de estudiantes de noveno grado, en el área de matemáticas, tal como se puede observar en los datos mostrados en la Tabla 6.

**Tabla 6. Resultados de evaluaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales 2x2 aplicadas a estudiantes de una Institución oficial de Bucaramanga durante los años 2013-2014.**

INSTITUCIÓN OFICIAL DE BUCARAMANGA			
RESULTADOS EVALUACIONES SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES AÑO 2013			
	Estudiantes 9-1	Estudiantes 9-2	Estudiantes 9-3
APROBADOS	12	11	13
REPROBADOS	22	22	21
<i>TOTAL EVALUADOS</i>	<i>34</i>	<i>33</i>	<i>34</i>
RESULTADOS EVALUACIONES SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES AÑO 2014			
	Estudiantes 9-1	Estudiantes 9-2	Estudiantes 9-3
APROBADOS	13	14	10
REPROBADOS	21	20	25
<i>TOTAL EVALUADOS</i>	<i>36</i>	<i>34</i>	<i>35</i>

De la información correspondientes a la cantidad de estudiantes de los grados 9-1, 9-2 y 9-3 a quienes fueron aplicadas las evaluaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales 2x2, se evidencia que un 65% de los estudiantes que cursaron noveno grado durante el año 2013 y el 63% durante el año 2014, reprobaron las evaluaciones, siendo estos resultados bastante preocupantes, constituyéndose este aspecto curricular, cognitivo y procedimental, en objeto de estudio de la presente investigación.

La forma de considerar las matemáticas como un área que maneja conceptos muy difíciles y que ha sido creada solo para personas privilegiadas, genera una predisposición en el estudiante frente a esta área. Sierpinska (2000)<sup>12</sup> se concentra en algunos aspectos del razonamiento de los estudiantes, que podrían ser los responsables de algunas dificultades en el estudio del álgebra. La autora argumenta que los estudiantes tienden a pensar más en forma práctica que teórica, y señala que esta tendencia afecta negativamente el razonamiento en el ámbito del álgebra. Distingue tres modos de pensamiento en álgebra lineal: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural. Estos tres modos de pensamiento aparecen en la historia de la matemática de forma secuencial, pero ninguno de ellos eliminó a los otros dos.

Otro factor es el poco dominio de pre-saberes necesarios para afrontar el tema de funciones y ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, lo cual se refleja en su desempeño académico, así como el cambio de concepciones que tienen que afrontar al pasar de la básica primaria a la básica secundaria, generándose en ellos algunas dificultades reflejadas en el momento de aplicar la modelación geométrica, el manejo de operaciones algebraicas, el despeje de variables y manejo de propiedades geométricas plasmadas en el plano cartesiano y dominio de operaciones con racionales que resultan al despejar algunas de las variables que representan la ecuación de la recta, presentándose desequilibrio e incertidumbre en los estudiantes, ya que es un proceso que presenta cambios en las estructuras cognitivas para los cuales algunos estudiantes no están preparados.

Además si se conoce que la Matemática es una ciencia abstracta y lógica donde los estudiantes que aún no han pasado de la fase operacional concreta, a las operaciones formales, presentan falencias para incorporar significativamente a sus

---

<sup>12</sup> Sierpinska, A. On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds.), The Teaching of Linear Algebra in Question (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers. Netherlands. 2000

estructuras cognoscitivas, relaciones entre dos o más abstracciones secundarias, tales como el despeje de variables en una ecuación, el manejo de operaciones con fracciones algebraicas, el remplazo de la cantidad equivalente a una variable dentro de una ecuación, el manejo de signos en adición y multiplicación de expresiones algebraicas, entre otras, requerirán de: *“actividades que refuercen la forma de asimilar y de apropiarse de estos contenidos, a menos que dispongan de apoyos empírico-concretos que ayuden a asimilar significativamente estos conceptos”* (Inhelder y Piaget, 1958, en Ausubel, 1976)<sup>13</sup>.

Encontrar la forma de reducir al máximo el bajo rendimiento académico, que presentan los estudiantes de noveno grado en el área de matemáticas según se muestra en la Tabla 6, se constituye en el principal objetivo del presente trabajo de investigación, ante los resultados deficientes en el manejo de conceptos abstractos propios de la matemática y en específico en la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Para poder abordar esta problemática, cabe resaltar la importancia de tener presentes los diferentes aportes en el campo de la investigación matemática, realizados por parte del Ministerio de Educación Nacional (MEN)<sup>14</sup>, a través de diferentes propuestas realizadas tales como el programa de capacitación y acompañamiento a docentes de Cundinamarca y Duitama para el desarrollo de los niveles de Competencia de matemáticas y diseño de secuencias didácticas a partir de las experiencias significativas de los maestros en el manejo de la función lineal en diferentes contextos, el taller Estándares Básicos para Matemáticas. División de perfeccionamiento y calidad de la Educación, entre otros, en los cuales se han llegado a conocer algunos aspectos importantes en el campo del manejo de conceptos propios de las función lineal, tales como el cambio y la variación de cantidades y magnitudes propias de esta función, sus relaciones y correlaciones y

---

<sup>13</sup> Ausubel, Novak y Hanesian. Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. Editorial Trillas. (1976)

<sup>14</sup> Ministerio de Educación Nacional. (2005). Taller: Estándares Básicos para Matemáticas. División de perfeccionamiento y calidad de la Educación.

la descripción y representación en diferentes registros de estas variaciones y relaciones. Así mismo, el privilegio de la representación algebraica para la operatividad con variaciones lineales, entre otros conceptos.

Todo lo anteriormente planteado, muestra la necesidad que para la Institución, representa abordar el problema de los sistemas para la solución de ecuaciones lineales, para lo cual será indispensable responder a las siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son las principales dificultades y errores conceptuales o procedimentales que presentan los estudiantes de noveno grado de la Institución, en el manejo de conceptos que se requieren para la solución de sistemas de ecuaciones lineales?,
- ¿Cómo interpretan los problemas relacionados con la temática referente a la solución de sistemas de ecuaciones lineales?,
- ¿Qué tipo de estrategias didácticas permiten facilitar la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones lineales dos por dos?
- ¿Qué resultados se obtienen al implementar las situaciones didácticas a los sistemas de ecuaciones lineales dos por dos?

Es así como La Teoría de las situaciones didácticas planteadas por Guy Brousseau<sup>15</sup>, resulta siendo una alternativa importante para aplicar en el contexto de este tipo de problemática, pues hace aportes importantes en el campo de la didáctica, que permite establecer estrategias que facilitan la aplicación de los conceptos abstractos en el aula de clases.

Todos estos argumentos llevan a concretar en este caso la importancia de realizar un estudio sobre ***¿Cómo solucionar problemas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales, dos por dos, implementando la teoría de las***

---

<sup>15</sup> Brousseau, Guy. Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas-1ª ed. Buenos Aires- Libros del Zorzal 2007.

## ***situaciones didácticas en estudiantes de noveno grado de una Institución pública de Bucaramanga?***

Luego resulta pertinente considerar para la presente investigación el planteamiento de estrategias que faciliten la solución de problemas relacionados con los diferentes conceptos que se presentan en la enseñanza de los sistemas para resolver ecuaciones lineales dos por dos, recurriendo a la aplicación de la teoría de las situaciones didácticas descritas por Guy Brousseau, y determinar si existen mejoras en el aprendizaje en esta área en los estudiantes de noveno grado de la Institución.

### **1.2 JUSTIFICACIÓN**

Resulta pertinente considerar la importancia de la problemática planteada, referente al manejo de los conceptos y procedimientos propios de los sistemas para la solución de ecuaciones lineales, donde el estudiante debe apropiarse de conocimientos como la modelación geométrica, el manejo de operaciones algebraicas, el despeje de variables, manejo de propiedades geométricas plasmadas en el plano cartesiano, dominio de operaciones con racionales que resultan al despejar algunas de las variables que representan la ecuación de la recta, el manejo adecuado de los signos en operaciones algebraicas, entre otros aprendizajes de la matemática que posteriormente los estudiantes tendrán que desarrollar en diferentes contextos propios de su quehacer, cuyas aplicaciones van desde las ciencias naturales, las ramas de la administración de empresas y la ingeniería, que son algunos de los campos donde las ecuaciones lineales son ampliamente usadas en diferentes áreas del saber propios de la ciencia, la estadística, la física, los negocios, la ingeniería y el diseño resolviendo innumerables situaciones tales como los problemas de flujo de tráfico, problemas de balanceo de ecuaciones químicas, problemas de flujo de agua en una tubería, problemas de dietas, etc., motivos que hacen pertinente la presente investigación,

constituyéndose el tema de las ecuaciones lineales en un conocimiento relevante para la educación básica, por lo que se espera sea de gran utilidad para el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Formulada y descrita la aplicabilidad de los sistemas de ecuaciones lineales, se comprende la íntima relación que existe entre la interpretación-argumentación-modelación de estructuras algebraicas y la matemática. La matemática es una continua búsqueda de síntesis y claridad que cada día da mayor importancia al estudio de la solución de ecuaciones lineales como uno de los requerimientos fundamentales que ayuda a tener una mejor comprensión de los conceptos algebraicos y su finalidad. De allí que una de las principales preocupaciones que sirve de referencia para el desarrollo del presente trabajo de investigación, es la percepción de dificultad que se observa en la mayoría de los estudiantes de los diferentes grados de la secundaria en el eje disciplinar de la Matemáticas frente al manejo de conceptos algebraicos, de acuerdo a los comentarios hechos por los mismos estudiantes, actitud que se supone, puede influir en forma negativa, en el óptimo aprendizaje y desarrollo de la habilidad para resolver expresiones algebraicas, motivo por el que se hace necesario llegar a conocer la causa por la cual los estudiantes llegan con este tipo de predisposiciones frente a la solución de ecuaciones lineales.

Existen varias hipótesis por parte de los docentes del área de matemática, que tratan de dar explicación a la situación anteriormente descrita, en las que se cree derivan de factores tales como la falta de preparación en estudiantes que culminan la básica primaria e ingresan a la básica secundaria, sin poseer los conocimientos fundamentales y necesarios que se supone forman parte de su formación, y que deben recibir los estudiantes durante sus primeros ocho años de estudio, en el manejo de los conceptos y operaciones propios de la aritmética, que sirven de base conceptual en el dominio y aplicación de estructuras algebraicas motivo por el cual la importancia de abordar este problema, muestra a los estudiantes la

relevancia de su aplicabilidad, despertando en él un interés de acuerdo a lo que tenga como proyecto de vida, permitiendo clarificar los campos de acción y la forma de hacer útil el manejo de estas estructuras cognitivas que incidirán positivamente en su quehacer profesional; del mismo modo les permitirá formar bases importantes para el manejo de futuras asignaturas de la educación superior, en temas como el álgebra lineal y ecuaciones diferenciales que están presentes en la mayoría de los planes de estudio de las carreras universitarias, motivo por el que esta investigación suministra una valiosa herramienta no solo para los estudiantes, sino del mismo modo apoya y facilita la labor docente de los grados superiores de la secundaria, así como la de los docentes encargados de dirigir las asignaturas que abordan estos conceptos en la educación superior.

Por otra parte, para Kieran & Filloy otra de las dificultades que presentan los estudiantes es: la falta de habilidad para expresar formalmente los métodos y procedimientos que se usan para resolver problemas (Kieran & Filloy, 1989, p. 230). Se considera que una de las causas importantes de las dificultades que numerosos alumnos padecen en las clases de matemáticas, está en la concepción de lo que son las matemáticas y de cómo se aprenden, y aún más en la forma como se contextualizan estos conceptos, lo que hace necesario estructurar cada día nuevas estrategias didácticas que ayuden a mejorar las metodologías de estudio frente a la adquisición de nuevos conceptos, para tener seguridad que como futuros profesionales, tendrán claridad en la forma de aplicarlos adecuadamente. Si la implementación de estas estrategias genera un óptimo resultado en el aprendizaje de los estudiantes, ellos mismos tomarán conciencia de la importancia que tiene el manejo de sistemas de ecuaciones lineales al momento de aplicarlas en el aula de clase, de acuerdo con los resultados que obtendrán al trabajar estos conceptos y posteriormente al utilizarlos, cuando llegue la hora en su rol como profesionales.

A lo largo del presente trabajo de investigación se pretende que el estudiante asuma roles diferentes en el manejo de conceptos propios del álgebra y del pensamiento variacional de tal forma que aprenda a resolver ecuaciones de primer grado, mejore su comprensión del significado de las operaciones algebraicas que realiza y relacione los aspectos algebraicos con los geométricos, de forma que facilite el aprendizaje de sistemas ecuaciones lineales dos por dos. Se persigue de la misma forma que se familiarice con la terminología utilizada en este campo y la emplee adecuadamente: ecuación, solución, variable, etc.

Es necesario tener presente que los alumnos señalan que las matemáticas son difíciles, complicadas, que el profesor explica para él, no le entienden, el profesor repite muchas veces lo mismo, debe haber variación de actividades y que no explique muy rápido (Vázquez, 2008). Con este trabajo se pretende reconocer las posibles causas que generan dificultad en el estudiante de noveno grado y que afectan su desempeño frente al manejo de los conceptos que permiten solucionar sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, con el propósito de establecer e implementar mediante la aplicación de la teoría de las situaciones didácticas, la metodología apropiada a desarrollar en el aula de clases con el fin de facilitar el aprendizaje de todo lo relacionado a los sistemas para la solución de ecuaciones lineales.

Se espera que este proyecto permita reconocer los principales problemas que estén afectando el rendimiento de los estudiantes, asociados a la resolución de problemas en la aplicación de sistemas de ecuaciones lineales, para abrir la posibilidad de futuros estudios que den origen a la creación de nuevas estrategias que mejoren el desempeño del estudiante, en mejoría no solo de su rendimiento académico en el área de la matemática, sino del mismo modo en la aplicación de su conocimiento en los diferentes campos de su actividad profesional. Por tal motivo esta investigación se espera suministre beneficios significativos en el contexto de la Institución, sirviendo de apoyo para la estructuración de importantes

metodologías, que ayuden a corregir posibles fallas presentes en estudiantes y docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, frente a la solución de ecuaciones lineales, con el aprovechamiento óptimo de las ayudas didácticas que sean necesarias para la formación integral de los alumnos.

### **1.3 OBJETIVO GENERAL**

Diseñar e implementar situaciones didácticas en la solución de problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales dos por dos, en estudiantes de noveno grado de la educación básica secundaria de una Institución educativa de Bucaramanga.

### **1.4 OBJETIVOS ESPECIFICOS**

- Identificar las principales dificultades y errores conceptuales o procedimentales relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales dos por dos, en estudiantes de noveno grado de una Institución oficial de la ciudad de Bucaramanga.
- Determinar la forma como los estudiantes interpretan los problemas relacionados con ecuaciones lineales.
- Diseñar y aplicar situaciones didácticas, que impliquen las fases de *acción, formulación y validación* para que los estudiantes creen y solucionen problemas relativos a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.
- Evaluar los resultados y el progreso alcanzado por los estudiantes, una vez implementados las situaciones didácticas a los sistemas de ecuaciones lineales dos por dos.

## 2. MARCO TEORICO

### 2.1 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación será sustentada en estudios e investigaciones que se han realizado tanto a nivel nacional como internacional, en torno a los sistemas de ecuaciones lineales dos por dos, dando relevancia a aquellos que se consideran como antecedentes importantes pues la temática abordada se relaciona con la del presente estudio o porque sus hallazgos amplían la visión relacionada al tema en cuestión.

**2.1.1 Ámbito internacional.** En el año 2013, Figueroa<sup>16</sup> en su investigación de maestría en la enseñanza de las matemáticas, titulada: “Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas”, realizada en la Pontificia Universidad Católica del Perú, detalla la elaboración, aplicación y análisis de los resultados de una secuencia didáctica orientada a estimular en los estudiantes de cuarto año de secundaria del colegio, Weberbauer de la ciudad de Lima, Perú el desarrollo de la capacidad para resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. El objetivo es el de contribuir a que los estudiantes superen las dificultades que suelen presentarse al resolver problemas de ecuaciones lineales dos por dos. La secuencia didáctica fue diseñada teniendo como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, en la cual propone actividades de modo que los estudiantes pasen por situaciones de acción, formulación y validación, al resolver problemas relacionados con sistema de ecuaciones lineales con dos variables. Como proceso metodológico utiliza la Ingeniería Didáctica. En el análisis de los resultados aplica la Teoría de Registros

---

<sup>16</sup> Figueroa Vera, Rocío Elizabeth. Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. (2013).

de Representación Semiótica de Duval. En su investigación, aplica la secuencia didáctica a los alumnos del cuarto año del nivel secundario y recopila y analiza los resultados obtenidos. Como resultados de esta investigación resalta la importancia de incluir en las actividades para el aprendizaje de las matemáticas en general, y en particular de los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, situaciones que induzcan al alumno a pasar por las fases de acción, formulación, validación e institucionalización individuales y grupales de dificultades graduadas. Igualmente considera importante diseñar actividades grupales pensadas especialmente para propiciar el desarrollo de las fases de formulación y validación y estimular el desarrollo de la capacidad de crear problemas a partir de un registro algebraico fomentando el uso de una herramienta tecnológica, preferentemente dinámica como el Geo-Gebra, para resolver problemas, contextualizados o no, que involucren sistemas de ecuaciones lineales.

Otro referente internacional es presentado en el año 2009 por Ochoviet<sup>17</sup> quien en su investigación de doctorado en matemática educativa, con el nombre de: “Sobre el concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas”, elaborada en el Instituto Politécnico Nacional, Centro De Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Unidad Legaria de Montevideo – Uruguay, aplica un estudio basado en las dificultades detectadas en los estudiantes, mediante la enseñanza del concepto de solución de un sistema de ecuaciones, no restringido al ámbito de los sistemas de dos ecuaciones. Ofrece a los estudiantes diferentes tareas, donde tengan que enfrentar distintos tipos de situaciones que involucren dos o más ecuaciones lineales. También recomienda que los sistemas de ecuaciones deben ser presentados en diferentes modos de pensamiento como los presentados por Sierpinska (2000): el sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico estructural. Diferentes formas de pensar sobre los objetos matemáticos

---

<sup>17</sup> Ochoviet Filgueiras, Teresa Cristina. Sobre el concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Instituto Politécnico Nacional, Centro De Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Unidad Legaria de Montevideo – Uruguay. (2009).

permite a los estudiantes una comprensión más profunda de ellos. Los objetivos en este trabajo son estudiar qué concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales construyen los estudiantes uruguayos (de 14-15 años y 17-18 años) cuando la enseñanza del tema se inicia a través de los sistemas  $2 \times 2$ ; y diseñar una secuencia de enseñanza y de actividades, para los estudiantes de 14–15 años, del concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, que tiene en cuenta los datos relevados a partir del primer objetivo. Los resultados de este trabajo estuvieron centrados en el logro alcanzado en los estudiantes en la construcción de una visión amplia del concepto solución de un sistema de ecuaciones lineales lo que puede permitirles en un futuro aprender estructuras más generales y abstractas.

**2.1.2 Ámbito nacional.** En su trabajo de maestría, de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá, Guerra (2012)<sup>18</sup>, desarrolla un estudio titulado: “Propuesta para la enseñanza de Sistemas de ecuaciones lineales”, en la que pretende presentar diversos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales y propone el estudio de situaciones contextualizadas a hechos de la vida cotidiana en las que el estudiante, además de generar ciertas habilidades con su desarrollo, debe evaluar las limitaciones y alcances de cada método estudiado, de tal forma que cuente con las herramientas necesarias para decidir cuál método le resulte “mejor” para plantear y resolver el sistema lineal asociado a cada situación. Posteriormente realiza una descripción de algunos conceptos básicos asociados a matrices por ser de gran utilidad en el estudio de algunos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales y luego se presentan métodos matriciales y numéricos para la solución de este tipo de sistemas. Igualmente presenta una propuesta de actividades trabajadas desde algunas aplicaciones de los sistemas lineales enmarcadas en diversos contextos provenientes de las matemáticas o de otras ciencias. Finalmente los resultados obtenidos a través de su implementación,

---

<sup>18</sup> Guerra González, Andrés Aníbal. Propuesta para la enseñanza de Sistemas de ecuaciones lineales. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá (2012).

constituye una excelente oportunidad para contribuir al desarrollo de habilidades relativas al razonamiento, la resolución de problemas, la comunicación, la modelación y la ejercitación de procedimientos; procesos que según los lineamientos curriculares, tienen que ver con el aprendizaje de las matemáticas y deben trabajarse en las aulas.

Igualmente se puede observar en el trabajo de investigación realizado por Arenas (2013)<sup>19</sup>, con el nombre de: “Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas”, muestra la experiencia que desde las aulas de clase se puede trabajar en la temática de ecuaciones lineales como un eje transversal con las demás ciencias del conocimiento, es por esto que a través de esta propuesta de trabajo, Arenas busca apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes del grado noveno en dicha temática, para ello toma como referente teórico el constructivismo. Para cumplir el objetivo de este estudio, el autor elabora diferentes instrumentos que permitan al educador ver la concepción que tiene el estudiante de los conceptos de variable, igualdad, ecuación y solución de ecuaciones, luego propone iniciar una transcripción del lenguaje cotidiano al simbolismo matemático donde se evidencie si el estudiante logra identificar la importancia de cada uno de los conceptos a trabajar para finalmente entrar en la solución de la ecuación siendo enfáticos en la viabilidad de la solución. Los resultados de este estudio fundamentalmente radicaron en la implementación de diferentes herramientas en la enseñanza de las matemáticas que permitió a los estudiantes visualizar, manipular y sobre todo participar activamente de su propio proceso de enseñanza aprendizaje, potencializar no sólo un aprendizaje significativo, sino la construcción de valores, la comunicación, la aceptación por la diferencia y la autonomía.

---

<sup>19</sup> Arenas Suaza, Bibiana Sirley. Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas. Universidad Nacional de Colombia. Medellín (2013).

Otro estudio en el ámbito nacional es la propuesta desarrollada por FLOREZ (2012)<sup>20</sup>, realizado para alcanzar el título de Magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Esta propuesta va encaminada al diseño e implementación de una estrategia didáctica para la comprensión, análisis y solución de ecuaciones lineales mediante las nuevas tecnologías: Estudio de caso aplicado en el CLEI 4 (Ciclo Lectivo Especial Integrado) de la Institución Educativa la Salle de Campoamor, Medellín-Antioquia. Con la aplicación de la práctica docente en la plataforma **ERUDITO**, cuya meta principal es recrear de manera interactiva el proceso de enseñanza/aprendizaje en un aula de clase virtual en forma desafiante, colaborativa y divertida. Se busca, que los estudiantes adquieran aprendizaje significativo en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas aprovechando su innato interés por el uso de las nuevas tecnologías, siguiendo los lineamientos curriculares y estándares establecidos en el Ministerio de Educación. Los logros obtenidos en este estudio es incentivar la utilización de nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje, como una estrategia que facilita la labor académica, e introduce nuevos elementos al aula que elevan la motivación de los estudiantes y facilitan el aprendizaje significativo.

**2.1.3 Ámbito local.** Por otra parte en el ámbito local, se encuentra la propuesta de ARDOSGOITIA y RAMOS (2011)<sup>21</sup>, realizada para alcanzar el título de Especialista en educación matemática, la cual pretende facilitar el tránsito entre los modos de pensamiento sintético-geométrico (SG) y aritmético-analítico (AA) planteados por Sierpiska (2000), para mejorar la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales, realizando el diseño de una secuencia de actividades que

---

<sup>20</sup> FLOREZ VALDES, WILMAR ANTONIO. Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la comprensión, análisis y solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante las nuevas tecnologías: Estudio de caso aplicado en el CLEI 4 (Ciclo Lectivo Especial Integrado) de la Institución Educativa la Salle de Campoamor, Medellín-Antioquia. (2012).

<sup>21</sup> RAMOS JAIMES, Sulegna y ARDOSGOITIA ESCORCIA, Yenis María. Análisis de la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de noveno grado cuando realizan actividades que promueven el tránsito entre los pensamientos analítico-aritmético y sintético-geométrico. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Santander. (2011).

permitan al educando valerse de diferentes representaciones para comprender un sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución. La propuesta diseñada es aplicada a los estudiantes de noveno grado del Colegio Nuestra Señora de la Paz, del municipio de San Vicente de Chucuri (Santander), se realiza un análisis de resultados a la luz de los antecedentes, del marco teórico y del análisis a priori de las situaciones planteadas para finalmente concluir reconociendo la importancia de proponer actividades en el aula de clase que incentiven el tránsito entre el pensamiento (SG), como punto de partida para motivar el pensamiento (AA), que predomina cuando los sistemas de ecuaciones lineales se hacen más complejos.

Igualmente, en el ámbito local, aparece la propuesta de ARDILA y MONTAÑEZ (2010)<sup>22</sup>, realizada para alcanzar el título de Especialistas en educación matemática, la cual pretende responder a la pregunta ¿Qué dificultades se presentan en estudiantes del grado noveno y los estudiantes de Álgebra Lineal II, al transitar entre los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural al resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas e interpretar su solución? Cuyo interés se centra en determinar evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento, a través de la interacción con un grupo de estudiantes de noveno grado de básica secundaria y segundo semestre de programas presenciales de pregrado, mediante la aplicación de una prueba diagnóstica, a partir de la cual, diseñan actividades para realizar una entrevista didáctica con una muestra del grupo de estudiantes seleccionados, con el objeto de realizar un análisis de sus respuestas, bajo la óptica de los modos de pensamiento en Álgebra lineal, expuestos por Sierpínska (2000): pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, que permita detectar fortalezas y debilidades que se presentan, cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

---

<sup>22</sup> ARDILA CORZO, Álvaro y MONTAÑEZ VILLAMIZAR, Claudia. Evidencias del tránsito entre los modos del pensamiento geométrico, aritmético y estructural en estudiantes de secundaria y primer año de universidad: El caso de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Santander. (2010).

Finalmente plantean algunas observaciones de tipo metodológico, con el propósito de mejorar el proceso de acompañamiento que deben orientar los maestros, para la construcción pertinente de conocimiento matemático en los estudiantes.

## 2.2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Para el desarrollo del presente trabajo, se busca facilitar en el estudiante, la comprensión y asimilación de conceptos propios de los sistemas para la solución de ecuaciones lineales dos por dos, donde se hace necesario identificar entre otros:

**2.2.1 Situación matemática.** Los componentes propios de toda situación matemática y las estructuras que la componen, aparecen según se puede observar en la siguiente gráfica:

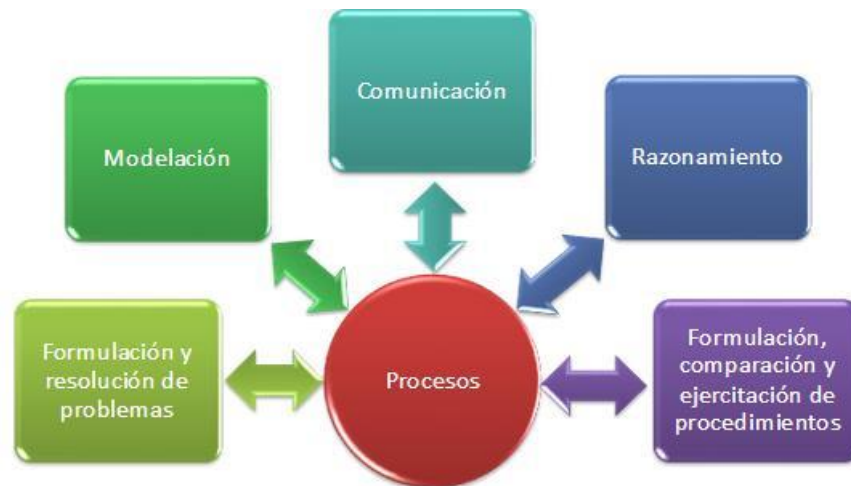
**Gráfica 4. Estructura de una situación matemática.**



Fuente: MEN, Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá, 1998.

**2.2.2 Procesos de la actividad matemática.** Del gráfico anterior se puede observar que toda situación matemática en el desarrollo de los procedimientos propios de esta área, tales como la forma de solucionar dicha situación y las competencias, destrezas o habilidades que deben estar presentes en el estudiante, se desarrollan cinco procesos que se encuentran representados en el siguiente gráfico.

**Gráfica 5. Los cinco procesos de la actividad matemática.**



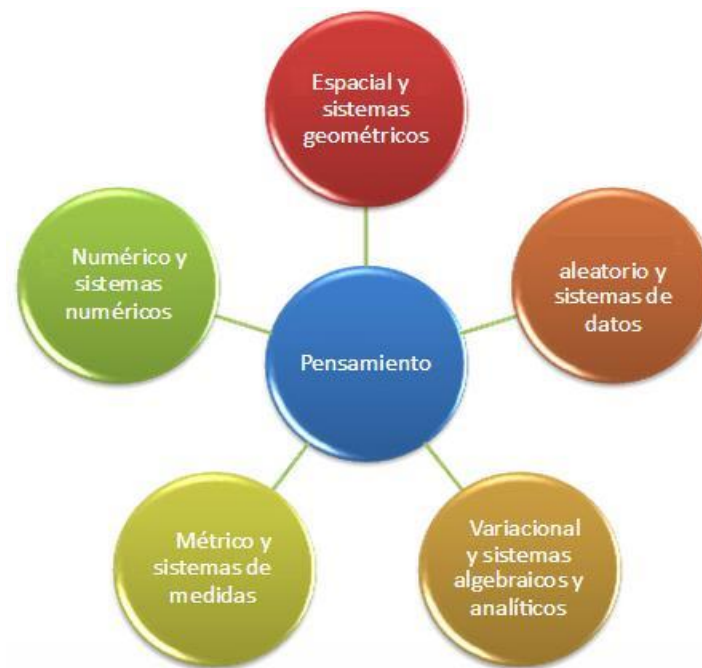
Entre estos cinco procesos generales contemplados en los lineamientos curriculares de matemática<sup>23</sup>, la actividad matemática de **formular y resolver problemas** ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático. La resolución de problemas debe ser el eje central del currículo de matemáticas, y como tal debe ser un objetivo primario en la enseñanza y parte integral de la actividad matemática, por otra parte la **modelación** puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente, entre tanto la **comunicación** es la esencia de la

<sup>23</sup> MEN. Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá (1998). P.74.

enseñanza en la que el estudiante adquiere seguridad para hacer conjeturas, para preguntar por qué, para explicar su razonamiento, para argumentar y para resolver problemas y de esta forma discuta, escuche y negocie sus ideas matemáticas con otros estudiantes; y finalmente el **razonamiento** es la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión, donde el estudiante debe dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones y justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.

**2.2.3 Pensamientos matemáticos y sus respectivos sistemas.** Del mismo modo se puede observar en la gráfica 6, que de acuerdo a los saberes previos que deben conocer los estudiantes y los conceptos que involucra la situación en relación con los procesos generales y los planeamientos curriculares organizados por el Ministerio de Educación Nacional, existen 5 pensamientos principales con sus respectivos sistemas en el manejo de la matemática, los cuales son:

**Gráfica 6. Los cinco pensamientos del análisis matemático y sus respectivos sistemas.**



Es así como en el manejo de los métodos para la solución de ecuaciones lineales dos por dos, el pensamiento variacional es el que tiene mayor presencia y está relacionado con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos, que el MEN lo define como aquellos procesos cognitivos que permiten analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas, donde la variación se encuentra como sustrato de ellas. (MEN, 1998:72).

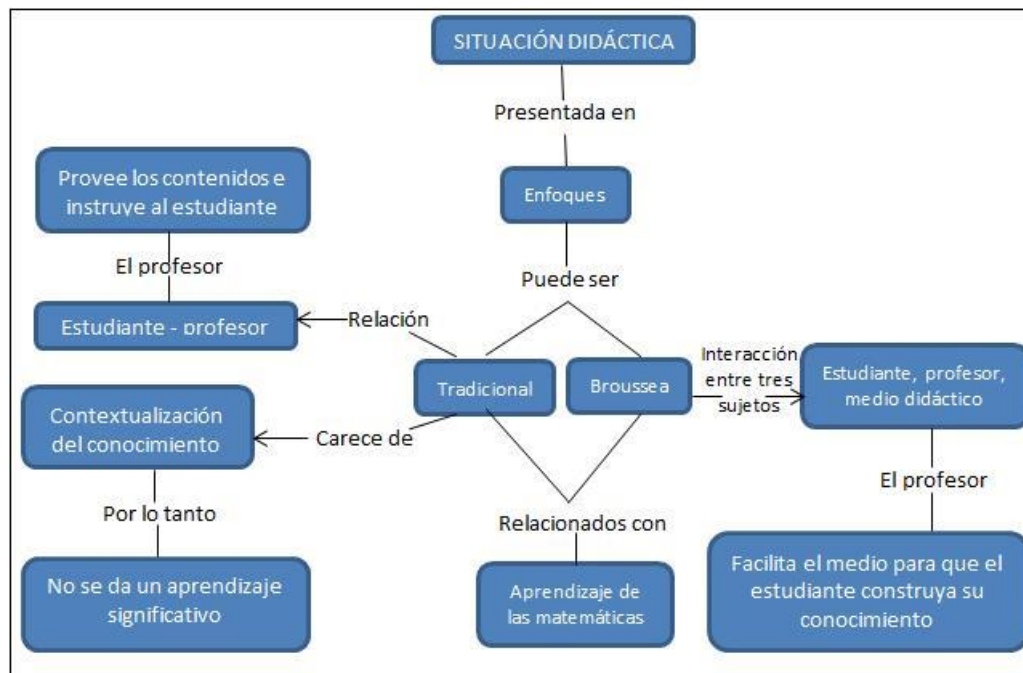
Dentro del pensamiento variacional, los estándares básicos de competencias, de octavo a noveno grado, relacionados con el tema de los sistemas para la solución de ecuaciones lineales dos por dos, son: *“Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales”*, e *“Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas”*.

**2.2.4 Situación didáctica.** Otro dominio conceptual importante en la realización de este trabajo, es el de la situación didáctica. El significado del saber matemático del alumno está fuertemente influenciado por la forma didáctica con que el contenido le es presentado. El desarrollo del alumno dependerá de la estructuración de las diferentes actividades de aprendizaje a través de una situación didáctica. Según la definición de Brousseau (1986):

Una situación didáctica es un conjunto de relaciones establecidas explícitamente y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, en un cierto medio, comprendiendo, eventualmente, instrumentos y objetos y, un sistema educativo (el

profesor) con la finalidad de posibilitar a estos alumnos un saber constituido o en vías de constitución... el trabajo del alumno debería, al menos en parte, reproducir las características del trabajo científico propiamente dicho, como garantía de una construcción efectiva de conocimientos pertinentes.

**Gráfica 7. Esquema de una situación didáctica.**

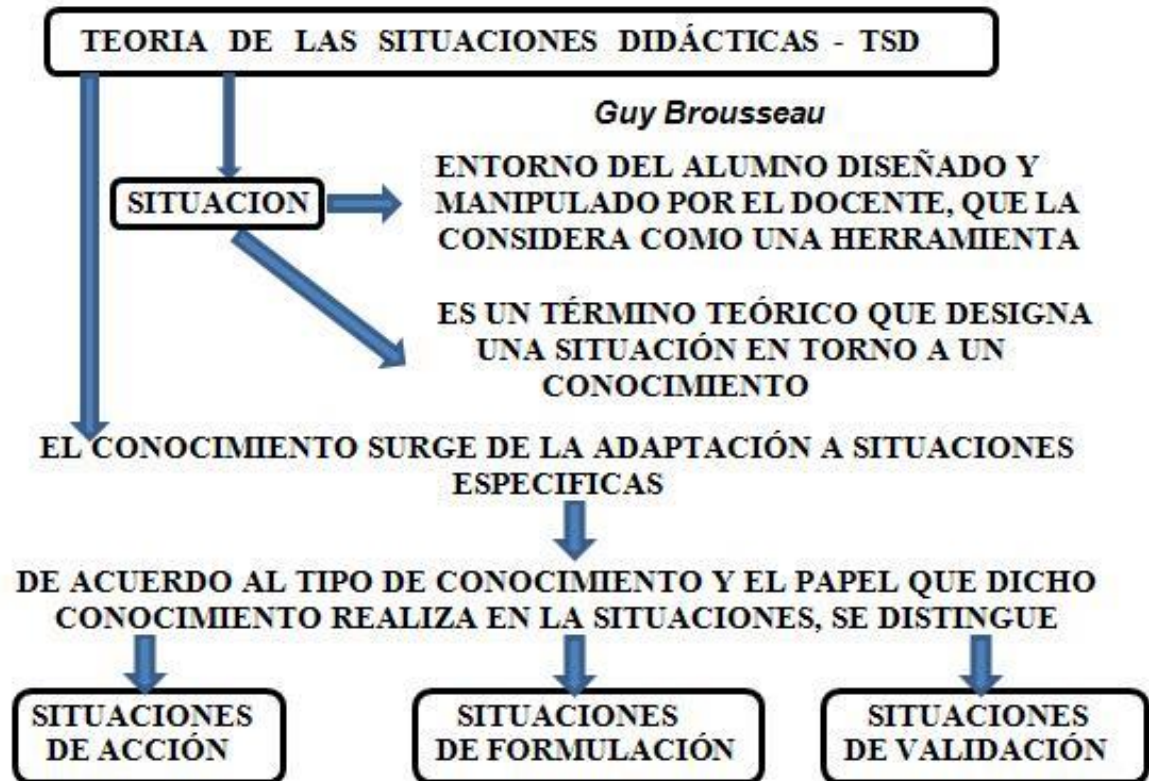


Toda situación didáctica es regida por un determinado tipo de contrato didáctico, o sea un conjunto de obligaciones implícitas y explícitas relativas a un saber interpuesto entre profesor-alumnos, que Guy Brousseau lo explicita a través de la Teoría de las situaciones didácticas.

**2.2.5 Teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.** La teoría de las situaciones didácticas desarrolladas por Guy Brousseau, está fundamentado en el planteamiento al estudiante de actividades que lo induzcan a pasar por situaciones de acción, formulación y validación, y sobre aquellas que le ayuden a asimilar en

forma apropiada los conceptos propios de este tipo de conocimiento matemático, hecho que aparece representado en la siguiente gráfica:

**Gráfica 8. Teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau.**



**2.2.6 Tipos de interacción con el medio.** Las formas en que el estudiante puede interactuar con el medio, puede clasificarse en tres grandes grupos o situaciones (Brousseau. 2007. p. 23):

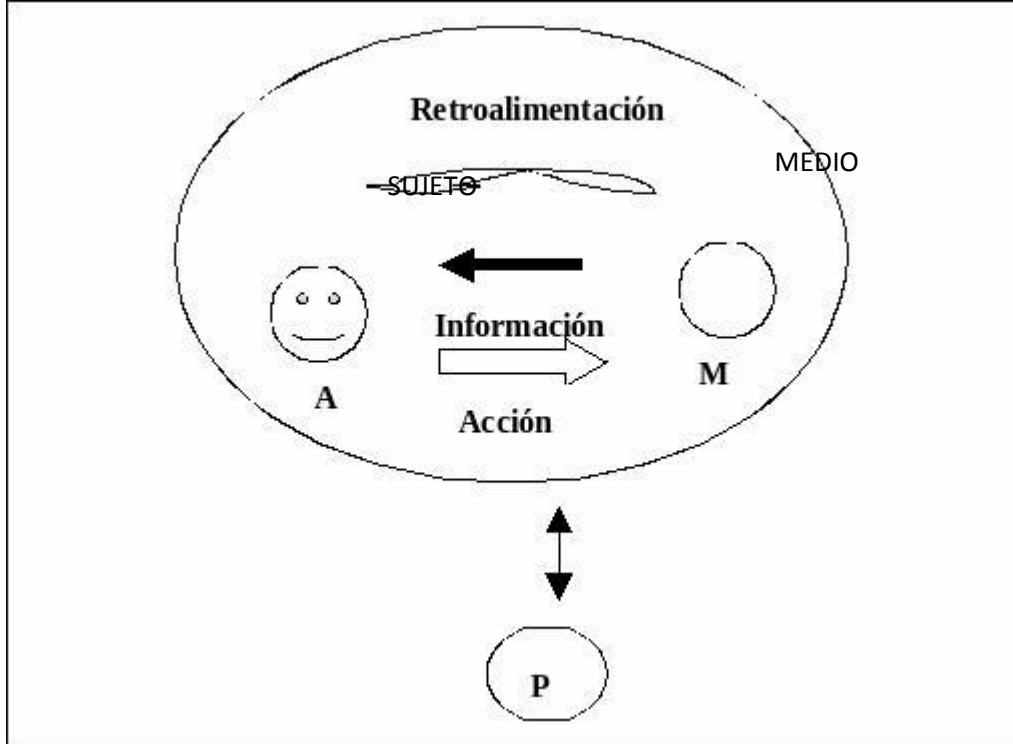
**Gráfica 9. Tipos de interacción del estudiante con el medio.**



- Intercambios de informaciones no codificadas o sin lenguaje (acciones y decisiones);
- Intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje (formulación-mensaje).
- Intercambios de juicios (validación-sentencias que se refieren a un conjunto de enunciados que tienen un rol de teoría).

**Situación de acción.** En este tipo de situación didáctica, el estudiante actúa sobre un problema sin la intervención del profesor, aplicando sus pre-saberes y analizando los resultados, admitiendo o desechando patrones de solución, dando libertad al estudiante de intentar a través de diferentes estrategias que él aplicará mediante juicios y ajustes que realice de su acción, donde la sucesión de situaciones de acción, constituye el proceso por el cual el alumno va a aprender un método de resolución de su problema que al final seleccionará gracias a la retroalimentación generada por medio de la situación.

**Gráfica 10. Esquema general de una situación de acción.**

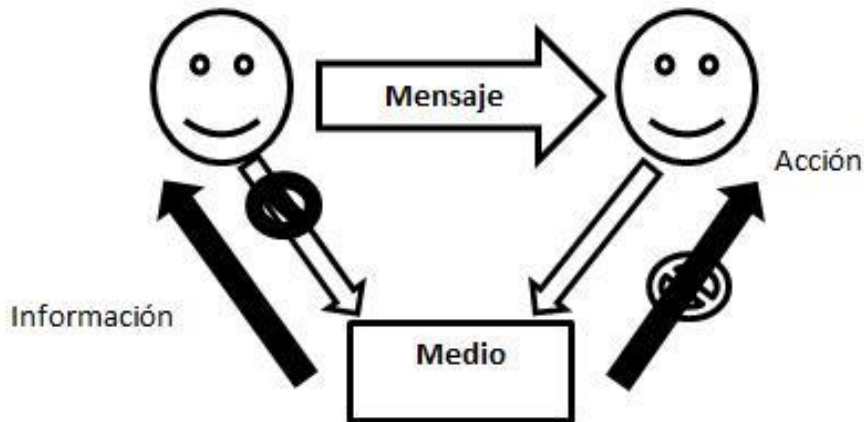


Fuente: TSD, Guy Brousseau, 2007.

*Para un sujeto “actuar” consiste en elegir directamente los estados del medio que reaccionan a partir de los procesos desarrollados por el adversario, en función de sus propias motivaciones. Si a través del medio se presentan reacciones del adversario con cierta regularidad, el sujeto puede llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones (retroalimentación), a anticipar sus reacciones y a tenerlo en cuenta en sus propias acciones futuras. (Brousseau, 2007, p. 21).*

**Situación de formulación.** Es una situación didáctica de comunicación, desarrollada en dos momentos: un primer momento en el que un representante de cada grupo recoge la información acerca de la actividad para en un segundo momento compartirla o comunicarla a sus compañeros, quienes le devuelven la información, intercambian mensajes escritos u orales, para crear un modelo explícito.

**Gráfica 11. Esquema general de una situación de formulación.**



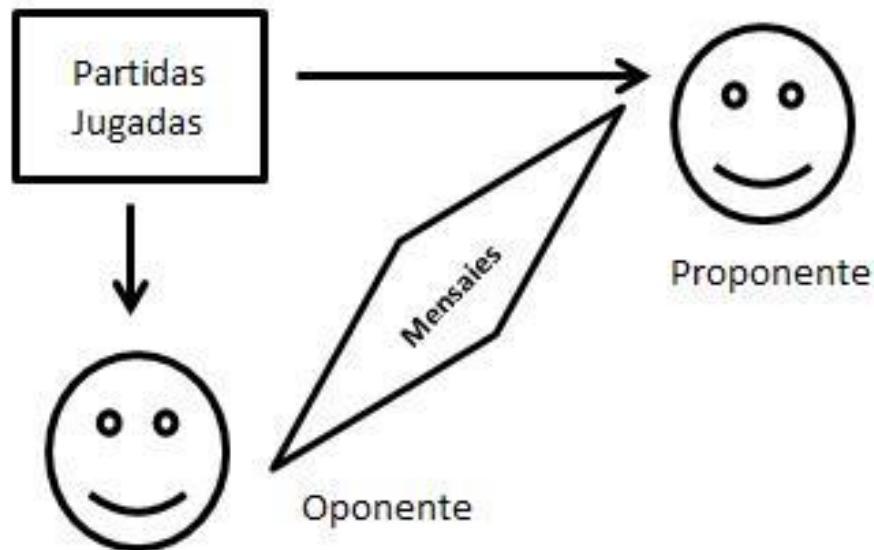
Fuente: TSD, Guy Brousseau, 2007.

Panizza (2006), describe esta situación de la siguiente forma: *Un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) con base en el conocimiento contenido en el mensaje.* La formulación consiste en la capacidad que un sujeto tiene para retomar un conocimiento (identificarlo, analizarlo, interpretarlo y codificarlo en un sistema lingüístico), donde el medio le exigirá involucrar a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información y para determinar el contenido de la comunicación deben interactuar con un medio externo, de modo que la única forma de lograr los objetivos sea obteniendo del otro, la formulación de los conocimientos en cuestión.

**Situación de validación.** Esta situación didáctica utiliza el recurso de la discusión y la validación. Es así que, el alumno emisor realiza la función de postulante y el alumno receptor se convierte en oponente, ambos poseen suficiente información para debatir y aportar argumentos que ayuden en la búsqueda de la verdad. El postulante debe explicar la veracidad y coherencia de su modelo y realizar si es posible, una demostración. El oponente puede pedir más argumentos o rechazar

aquellos en los que no está de acuerdo. Finalmente el alumno debe demostrar que el modelo que ha elegido o creado es válido.

**Gráfica 12. Esquema general de una situación de validación.**



Fuente: TSD, Guy Brousseau, 2007.

“El alumno no sólo tiene que comunicar una información sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración” (Brousseau, 2007, p.23).

**2.2.7 Conceptos matemáticos básicos.** Otros conceptos que resultan importantes en el manejo de los métodos para la solución de ecuaciones lineales dos por dos, encontramos el de variable, variable dependiente, variable independiente, plano cartesiano, ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales 2x2, método para solución de ecuaciones lineales 2x2, método gráfico, método sustitución, método de reducción o eliminación, método igualación y método determinantes, que aparecen relacionados a continuación:

**Variable.** Por tratarse esta investigación de un trabajo enfocado en el pensamiento algebraico, es importante recordarle al lector, que en el álgebra las ecuaciones se encuentran conformadas por variables, que son símbolos constituyentes de un predicado, fórmula, algoritmo o de una proposición. El término «variable» se utiliza aun fuera del ámbito matemático para designar una cantidad susceptible de tomar distintos valores numéricos dentro de un conjunto de números especificado. Las variables se clasifican en variable dependiente o variable independiente. Por ejemplo, en las variables (distancia-tiempo); la distancia constituye la variable dependiente y se representa en el plano cartesiano por el eje Y; la variable tiempo es independiente y en el plano cartesiano se encuentran en el eje X.

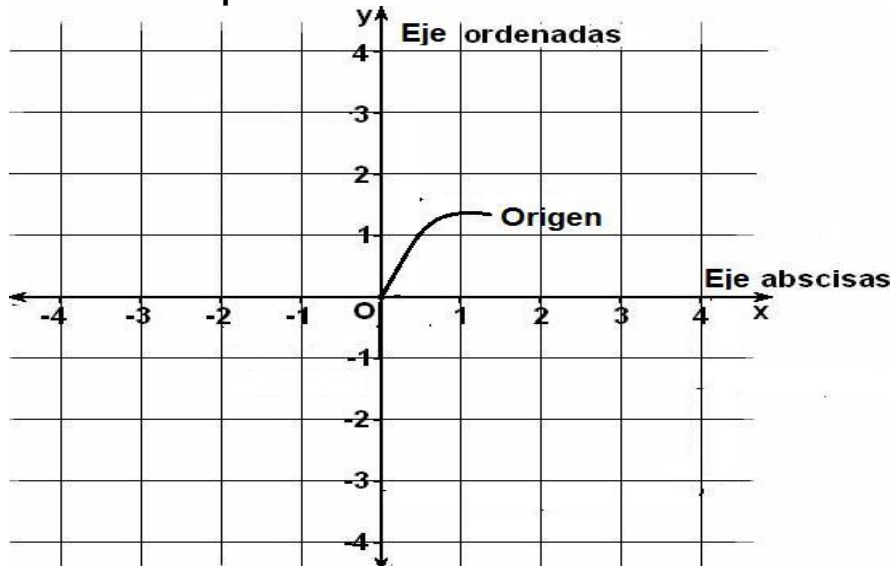
**Variable dependiente.** Es necesario tener presente que una variable dependiente es aquella cuyos valores dependen de los que tome otra variable. En una función se suele representar por la letra (y) la cual se encuentra en el eje de las ordenadas. Son las variables de respuesta que se observan en el estudio y que podrían estar influidas por los valores de las variables independientes. En el ejemplo anterior con relación a las variables (distancia-tiempo), la distancia es dependiente, ya que si un objeto recorre una distancia en un tiempo específico, a mayor tiempo, el objeto recorre mayor distancia y viceversa. Luego la distancia está sujeta a la cantidad de tiempo transcurrida.

**Variable independiente.** La variable independiente, también conocida como variable manipulada, se encuentra en el centro de cualquier diseño experimental cuantitativo. En una función se suele representar por la letra (x) graficada en el eje de las abscisas. Este es el factor manipulado por el investigador y produce uno o más resultados, conocidos como variables dependientes. Generalmente, en un experimento no hay más de una o dos variables independientes a prueba, de lo contrario, sería difícil determinar la influencia de cada una sobre los resultados

finales. Continuando con el ejemplo de las variables (distancia-tiempo), el tiempo es la variable independiente, pues en todo tipo de experimentos en los que interviene el tiempo, este constituye la variable manipulable e independiente, pues es una magnitud cuya naturaleza no puede ser modificada por la influencia de otros factores o variables.

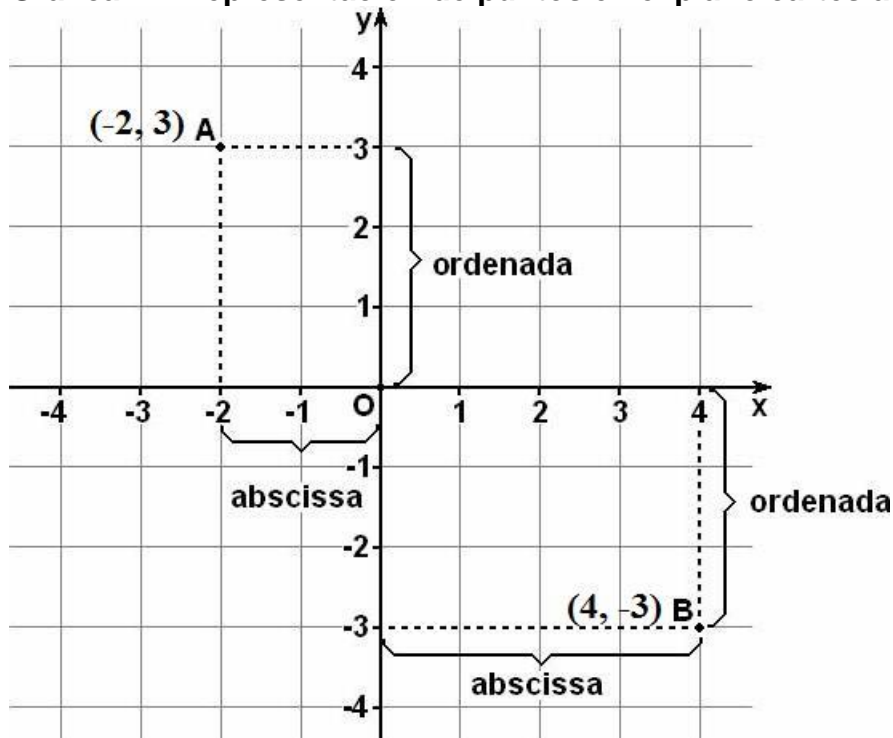
**Plano cartesiano.** Otro concepto importante en el estudio de la solución de sistemas de ecuaciones lineales dos por dos, correspondiente a la aplicación del método gráfico, es el plano cartesiano. Este se encuentra formado por dos rectas numéricas, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto. La recta horizontal es llamada eje de las abscisas o de las equis ( $x$ ), y la vertical, eje de las ordenadas o de las yes, ( $y$ ); el punto donde se cortan recibe el nombre de origen. El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados. Las coordenadas se forman asociando un valor del eje de las "X" y uno de las "Y", respectivamente, esto indica que un punto se puede ubicar en el plano cartesiano con base en sus coordenadas, lo cual se representa como:  $P(x, y)$ .

**Gráfica 13. El plano cartesiano.**



Al ubicar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento: Primero, para localizar la abscisa o valor de  $x$ , se cuentan las unidades correspondientes hacia la derecha si son positivas o hacia la izquierda si son negativas, a partir del punto de origen, en este caso el cero. Por otra parte, para localizar las ordenadas o valores en  $y$ , se cuentan las unidades correspondientes hacia arriba si son positivas o hacia abajo si son negativas.

**Gráfica 14. Representación de puntos en el plano cartesiano**



**Ecuación lineal.** Una ecuación de primer grado o ecuación lineal significa que es un planteamiento de igualdad, involucrando una o más variables a la primera potencia, que no contiene productos entre las variables, es decir, una ecuación que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia.

Ej.:  $(2x - 3y = 15)$ .

**Problemas cuyo planteamiento requieren de una ecuación lineal.** En matemáticas y álgebra lineal, un problema que involucra el planteamiento de una ecuación lineal es aquel cuya fórmula algebraica es de primer grado y se llaman así porque corresponde a situaciones que involucran dos variables, una dependiente y otra independiente (ej.: velocidad vs. Tiempo), representadas en el plano cartesiano como la gráfica de una línea recta que sigue la referencia de:  $y = mx + b$ , donde "m" es la pendiente de la recta y "b" es el punto donde la recta intersecta al eje de las "y".

**2.2.8 Conceptos matemáticos objeto de la investigación.** Los más importantes relacionados con el tema objeto del presente estudio son:

**Sistema de ecuaciones lineales 2x2.** Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas o simplemente, sistema 2x2 de ecuaciones lineales, es la agrupación de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right\}$$

**Problemas cuyo planteamiento requieren de un sistema de ecuaciones lineales dos por dos.** En matemáticas, un problema que requieren de un sistema de ecuaciones lineales dos por dos es aquel que a través de un conjunto de dos ecuaciones con dos incógnitas busca encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen dichas ecuaciones. En un sistema de ecuaciones algebraicas las incógnitas son valores numéricos o más generalmente elementos de un cuerpo sobre el que se plantean las ecuaciones.

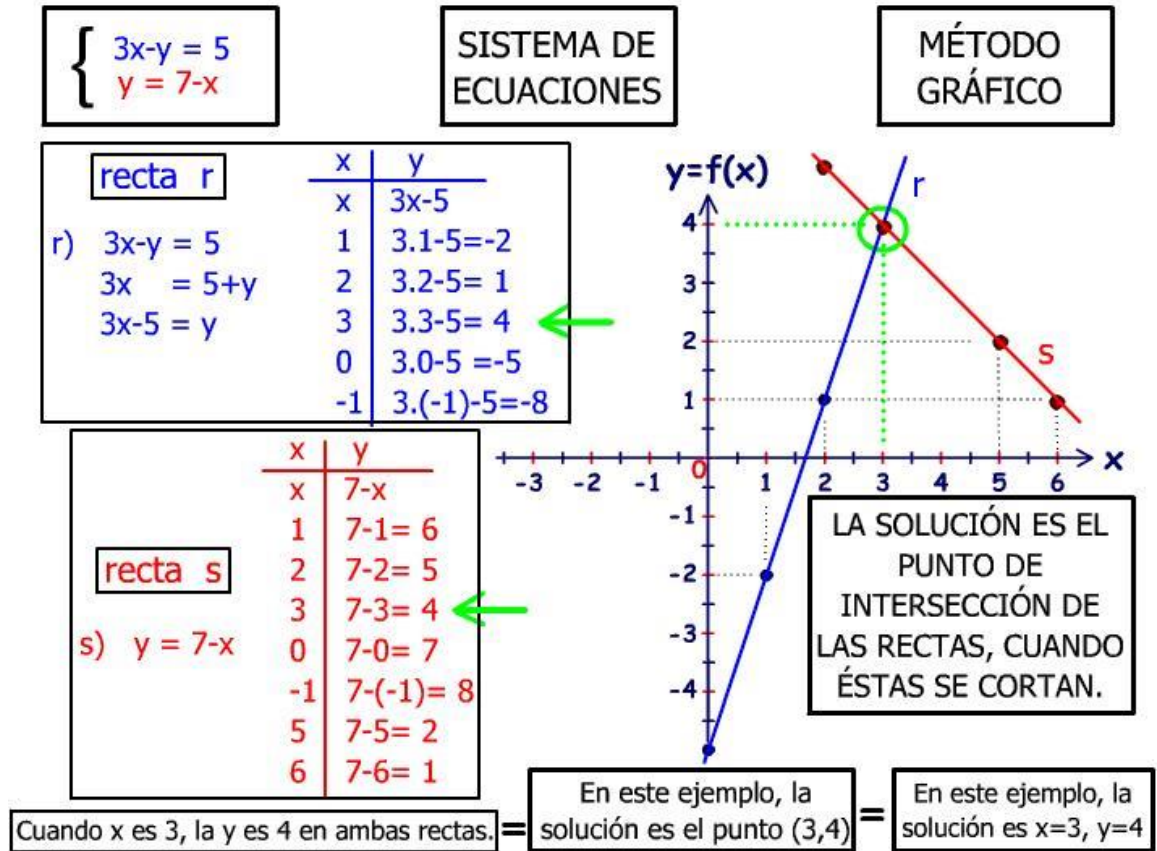
**Método para solución de ecuaciones lineales 2x2.** Se llama solución de un sistema 2x2, a cualquier pareja de valores de x e y que sea solución de ambas ecuaciones a la vez. Las soluciones de este tipo de sistemas son los puntos de

corte de las rectas que representan cada una de las ecuaciones del sistema. Los métodos para solución de ecuaciones lineales 2x2 más usados son:

- Método gráfico
- Métodos algebraicos:
  - Sustitución
  - Reducción o eliminación
  - Igualación
  
- Método de determinantes.

**Método gráfico.** Para este método usualmente se despeja en ambas ecuaciones, la variable dependiente, “y”. Se empieza pasando el termino independiente (x) al otro lado de la igualdad, posteriormente se realiza una tabla de valores en la que utilizando las ecuaciones anteriormente despejadas, se le asignan valores a (x), para encontrar los correspondientes valores de la variable (y), esto permite conformar pares ordenados de datos (x,y) que representan los puntos a graficar en el plano cartesiano para el par de rectas. El lugar donde se presenta el cruce o intersección de las dos rectas graficadas corresponde a un punto del plano cartesiano (x,y), que representa la solución para este método.

Gráfica 15. Ejemplo método gráfico



Fuente: <http://sistemadejaider.blogspot.com.co/>.

**Método de sustitución.** El método de sustitución consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra. Así, la ecuación sustituida, que se queda con una sola incógnita, se resuelve, lo que permite averiguar esa incógnita. Finalmente, el valor de la otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido.

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{array}$$

**SOLUCIÓN:**

**Paso N° 01:** Se despeja una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones:

$$x - y = 1 \rightarrow x = 1 + y$$

**Paso N° 02:** Se sustituye el valor de la incógnita despejada en el paso 1 en la otra ecuación:  $x = 1 + y$

$$2x + 3y = 12 \rightarrow 2(1 + y) + 3y = 12$$

**Paso N° 03:** Resolvemos la ecuación obtenida a fin de despejar la incógnita.

$$2 + 2y + 3y = 12$$

$$5y = 12 - 2$$

$$y = \frac{10}{5}$$

$$y = 2$$

**Paso N° 04:** El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparece la incógnita despejada

$$x = 1 + y; \quad \text{Con } y = 2 \quad \text{implica que: } x = 1 + (2) = 3$$

**Paso N° 05:** Los valores que constituyen la solución del sistema son:  $x = 3$   $y = 2$ .  
 $R/ (3,2)$

**Método de igualación.** El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones resultantes. Así, nos queda una ecuación con una sola incógnita. Esta se resuelve y permite averiguar dicha incógnita. Finalmente, el valor de la otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido.

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

**Paso N° 01:** Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 3 \\ -x + 5y = 16 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow 2y = 3 - 3x \\ \rightarrow 5y = 16 + x \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} y = \frac{3-3x}{2} \\ y = \frac{16+x}{5} \end{array}$$

**Paso N° 02:** Se igualan ambas expresiones despejadas (obtenidas en el paso N° 01).

$$y = y$$
$$\frac{3 - 3x}{2} = \frac{16 + x}{5}$$

**Paso N° 03:** Se resuelve la ecuación a fin de obtener la incógnita.

$$\begin{aligned} 5(3 - 3x) &= 2(16 + x) \\ 15 - 15x &= 32 + 2x \\ -15x - 2x &= 32 - 15 \\ -17x &= 17 \\ x &= \frac{17}{-17} = -1 \end{aligned} \quad x = -1$$

**Paso N° 04:** Se reemplaza el valor de x en una de los despejes de la incógnita y.

$$\begin{aligned} y &= \frac{16 + x}{5} \\ y &= \frac{16 + (-1)}{5} \\ y &= \frac{15}{5} \end{aligned} \quad y = 3$$

**Paso N° 05:** La solución del sistema es:  $x = -1$ ,  $y = 3$ . **R/ (-1,3)**

**Método de reducción o eliminación.** El método de reducción consiste en obtener ecuaciones equivalentes a las de partida, de manera que al sumarlas, se obtenga una ecuación en la que se ha eliminado una de las incógnitas. Así, nos queda una ecuación con una sola incógnita, que se resuelve, permitiendo averiguar dicha incógnita. Finalmente, el valor de la otra incógnita se obtiene sustituyendo el valor obtenido.

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 5x + 6y &= 20 \\ 3x + 8y &= 34 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{array}$$

**SOLUCIÓN:**

**Paso N° 01:**

Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convengan con su respectivo signo, positivo o negativo, para anular una de las variables.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 6y = 20 \\ 3x + 8y = 34 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times (3) \\ \times (-5) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 15x + 18y = 60 \\ -15x - 40y = -170 \end{array}$$

**Paso N° 02:** Sumamos algebraicamente y desaparece una de las incógnitas.

$$\begin{array}{r} 15x + 18y = 60 \\ -15x - 40y = -170 \\ \hline -22y = -110 \end{array}$$

**Paso N° 03:** Se resuelve la ecuación resultante, despejando y obteniendo el valor de la variable existente.

$$y = \frac{-110}{-22} = 5 \longrightarrow \mathbf{y = 5}$$

**Paso N° 04:** El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparece la incógnita despejada y se encuentra la otra incógnita.

$$5x + 6y = 20 \longrightarrow 5x + 6(5) = 20 \longrightarrow 5x + 30 = 20 \longrightarrow 5x = 20 - 30 \longrightarrow x = \frac{-10}{5}$$

$\mathbf{x = -2}$

**Paso N° 05:** La solución del sistema es:  $x = -2$  ;  $y = 5$ .  $\mathbf{R/ (-2,5)}$

**Método de determinantes.** Es un método que aplica el concepto de matrices, encontrando el determinante para el sistema y, obteniendo como solución los valores correspondientes de cada variable al realizar la división de estas sobre la determinante hallada.

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 9x + 11y = -14 \\ 6x - 5y = -34 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{array}$$

**SOLUCIÓN:**

**Paso N° 01:** Conformamos la matriz principal con los términos independientes y los coeficientes de x y de y:

Coeficientes

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \left. \begin{array}{l} 9x + 11y = -14 \\ 6x - 5y = -34 \end{array} \right\} \text{Matriz} = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -14 \\ -34 \end{array} \\
 \text{Términos independientes} \nearrow
 \end{array}$$

**Paso N° 02:** La determinante del sistema D se obtiene con los coeficientes de x y de y, las cuales se escriben dentro de dos barras así:

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}$$

Se multiplican los términos de la diagonal principal menos el producto de los términos de la diagonal secundaria.

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}$$

Diagonal Principal

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}$$

Diagonal Secundaria

Diagonal principal:  $(9)x(-5) = -45$

Diagonal secundaria:  $(11)x(6) = 66$

Finalmente se hace la resta y se obtiene D:

$$D = (-45) - (66) = -111 \quad \mathbf{D = -111}$$

**Paso N° 03:** Para obtener la determinante de x se coloca en la matriz los términos independientes y los coeficientes de y de las ecuaciones, así:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -14 & 11 \\ -34 & -5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Diagonal principal } (-14 \times -5 = 70) \\ \text{Diagonal secundaria } (11 \times -34 = -374) \end{array}$$

$$\Delta x = 90 - (-374) = 90 + 374 = 444 \quad \mathbf{\Delta x = 444}$$

**Paso N° 04:** Para obtener la determinante de y se coloca en la matriz los coeficientes de x y los términos independientes de las ecuaciones, así:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 9 & -14 \\ 6 & -34 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Diagonal principal } (9 \times -34 = -306) \\ \text{Diagonal secundaria } (-14 \times 6 = -84) \end{array}$$

$$\Delta y = -306 - (-84) = -306 + 84 = -222 \quad \Delta y = -222$$

**Paso N° 05:** El valor de x se obtiene dividiendo la determinante  $\Delta x$  en la determinante del sistema D, así:

$$x = \frac{\Delta x}{D} = \frac{444}{-111} \quad x = -4$$

Y el de y dividiendo la determinante  $\Delta y$  en la determinante del sistema D, así

$$y = \frac{\Delta y}{D} = \frac{-222}{-111} \quad y = 2$$

**Solución de un sistema de ecuaciones.** Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones para las que se busca una solución común. Los sistemas se clasifican en lineales y no lineales. Los sistemas de ecuaciones lineales son aquellos en los que todas las ecuaciones son de primer grado y se llaman así porque su representación **gráfica** es una línea recta. Para explicar el concepto de solución de un sistema, se utilizará un sistema lineal con dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ X + y = 3 \end{array} \right\}$$

La pareja de valores  $(x, y) = (1, 0)$ , no es solución del sistema pues al sustituir dichos valores en el sistema, las igualdades aritméticas que resultan son falsas. (Las ecuaciones no quedan satisfechas):

$$2 \cdot 1 + 0 \neq 5 \quad y \quad 1 + 0 \neq 3$$

La pareja de valores  $(2, 1)$  sí es solución del sistema porque “satisface” ambas ecuaciones:

$$2 \cdot 2 + 1 = 5 \quad y \quad 2 + 1 = 3$$

Luego la solución de un sistema de ecuaciones lineales, es el conjunto valores que satisface las incógnitas presentes en dichas ecuaciones. Para llegar a la solución de un número determinado de incógnitas  $n$ , debe existir un número igual  $n$  de ecuaciones para poder ser resuelto, de lo contrario, sería imposible.

Cuando consideramos ecuaciones lineales cuyas soluciones son números racionales, reales o complejos o más generalmente un cuerpo  $K$ , la solución puede encontrarse mediante Regla de Cramer. Para sistemas de muchas ecuaciones la regla de Cramer puede ser computacionalmente más costosa y suelen usarse otros métodos más "económicos" en número de operaciones como la eliminación de Gauss-Jordan y la descomposición de Cholesky. Existen también métodos indirectos (basados en iteraciones) como el método de Gauss-Seidel.

Si el cuerpo es infinito (como es el caso de los números reales o complejos), entonces solo puede darse una de las tres siguientes situaciones:

- el sistema no tiene solución (en dicho caso se dice que el sistema está sobredeterminado o que es inconsistente)
- el sistema tiene una única solución (el sistema es consistente determinado)
- el sistema tiene un número infinito de soluciones (el sistema es consistente indeterminado).

**Unidad didáctica.** Las unidades didácticas son unidades de programación de enseñanza con un tiempo determinado. La Unidad Didáctica es una propuesta de trabajo relativa a un proceso de enseñanza aprendizaje completo. Este modelo didáctico aparece muy ligado a las teorías constructivistas. Utilizada generalmente en los primeros niveles educativos como la Educación infantil y la Educación primaria se utiliza como medio de planificación de lo que se va a realizar a lo largo de un tiempo determinado.

Una Unidad didáctica suele constar como mínimo de:

- **Objetivos didácticos.** Coherentes con los objetivos generales y referenciales. Es una enunciación de las capacidades previstas que debe alcanzar el estudiante al final de la unidad.
- **Competencias.** Habilidades que deben desarrollarse a través de sus dimensiones y estrategias.
- **Contenidos.** Saberes organizados de manera armónica y que se enuncian como conceptos, procedimientos y actitudes.
- **Metodología.** Estilo de enseñanza, organización de los grupos, tiempos y espacios y materiales empleados.
- **Actividades.** Medios para alcanzar los objetivos previstos. Se suele establecer diferentes tipos de actividades que abarcan la recogida de ideas previas, actividades introductorias, de desarrollo, de síntesis y de expresión en diferentes ámbitos.
- **Evaluación.** No solo de los resultados obtenidos sino de la unidad en sí.

### 3. DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

El tipo de investigación que se utilizó en el presente estudio, es Investigación - Acción, que se caracterizó por atender o intervenir problemas concretos. En este caso la dificultad que presentaron los estudiantes para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, en una población concreta de estudiantes de noveno grado de una Institución oficial de la ciudad de Bucaramanga. Su propósito fue de tipo descriptivo – exploratorio, pues se buscó profundizar en la comprensión del problema sin posturas ni definiciones previas, efectuado un buen diagnóstico. Por ende, se optó por un proceso de investigación – acción para constituir un proceso continuo, de intervención directa sobre el problema, iniciando con la etapa de *Diagnóstico* – o momento de problematización; luego y consecuente con lo presentado anteriormente, se diseñó una propuesta de *Intervención*, seguido de la aplicación de la propuesta o desarrollo del Plan de Acción, para terminar con una tercera etapa de *Reflexión o evaluación* en donde se dejó abierta la posibilidad de reiniciar un nuevo circuito partiendo de una nueva problematización.

Por otra parte, el paradigma cualitativo es el más indicado para abordar la presente investigación, no solo porque facilitó la interacción entre los participantes activos del proceso de investigación, sino que también permitió replantear acciones, de acuerdo a los hallazgos encontrados, sin descartar la aplicación de instrumentos cuantitativos que servirán en la fase exploratoria. Además, el enfoque cualitativo resultó apropiado debido a que “*produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas habladas o escritas, y la conducta observable*” tal como lo explican Rodríguez y et Al<sup>24</sup>, quienes además señalan los siguientes aspectos que también se aplicaran en esta investigación:

- ✓ Las personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo.

---

<sup>24</sup> RODRÍGUEZ G, y otros, “Metodología de la Investigación cualitativa” Ed. Aljibe. Málaga, 1999. Pág. 32

- ✓ Los investigadores cualitativos tratan de comprender a las personas dentro del marco de referencia de ellas mismas.
- ✓ El investigador cualitativo aparta sus propias creencias, perspectivas y predisposiciones.
- ✓ Para el investigador cualitativo todas las perspectivas son valiosas.

Por otra parte, la investigación cualitativa resalta la importancia de que el investigador y el sujeto objeto de investigación contribuyan en la identificación de la situación a investigar y de la misma forma construyan alternativas que faciliten el surgimiento de nuevas formas de aprendizaje que resultan de cada una de las etapas en las que se evalúan las categorías que permiten identificar la causa de los problemas que presentan los estudiantes y de esta forma llegar a la solución esperada. El método cualitativo permite captar el origen, el proceso y la naturaleza de los significados que brotan de la interacción simbólica entre los individuos.

La metodología de investigación anteriormente descrita fue seleccionada, por encontrarse fundamentada en tres principios propios de la investigación acción: el primero, que es una investigación donde los participantes que experimentan el problema (profesor y sus estudiantes de noveno grado), son quienes mejor estudian e investigan su propio entorno problémico (problemática sobre dificultades en la aplicación de los métodos para la solución de ecuaciones lineales 2x2). Segundo, las actitudes de quienes participan en el estudio, está directamente influenciada con el entorno problémico en el cual se desarrolla la investigación (actividades desarrolladas en el aula de clases), y tercero, que las metodologías cualitativas, son las más adecuadas para realizar investigaciones en entornos educativos (Mckernan, 1996, p. 25).

### **3.1 CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN**

La investigación fue realizada a estudiantes de noveno grado de una Institución oficial de la ciudad de Bucaramanga, que cuenta con tres sedes A, B y C, una planta de 60 docentes: 30 en la básica primaria y 30 en secundaria, de los cuales 4 conforman el área de matemáticas, en ella se encuentran matriculados 600 estudiantes de secundaria y 400 de primaria en la jornada de la mañana y 500 de primaria en la jornada de la tarde. En su planta directiva se encuentra el rector, 3 coordinadores de disciplina, un coordinador académico, una Psico-orientadora, 3 celadores y 4 secretarias, además de 2 personas encargadas de oficios varios; en total 1500 estudiantes y 75 personas entre administrativos y docentes, encargados del desarrollo de las actividades de la institución.

### **3.2 PARTICIPANTES**

En la Institución, la población de estudiantes de noveno grado se encuentran conformada por tres grupos 9-1, 9-2 y 9-3 (100 estudiantes matriculados aproximadamente, de los estratos 1, 2 y 3), entre los 13 y 16 años de edad, seleccionados para este estudio por ser un grado en el que los estudiantes durante los últimos 5 años, se presentó dificultades en el desarrollo de los conceptos propios de los métodos para la solución de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ , y por tratarse de un contenido conceptual importante en diferentes aplicaciones de la economía, las ingenierías, la contabilidad entre otras áreas de futuros estudios a realizar durante su formación superior y profesional, de los cuales, la población participante o activa fue el grupo 9-3, conformado por 24 estudiantes de ambos géneros, quienes formaron parte de la presente investigación y donde el investigador es el docente de la asignatura, licenciado en matemática e informática de la Universidad Francisco de Paula Santander.

### **3.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS**

Las técnicas e instrumentos que se aplicó aparecen relacionadas a continuación:

**3.3.1 Técnicas.** Se ha seleccionado inicialmente la aplicación de un taller de presaberes, y durante la intervención del estudio se determinó la observación participante y la aplicación de tres talleres de investigación como técnicas que lleven el estudio al alcance de los objetivos planteados.

#### **Taller de pre-saberes.**

Este taller se aplicó en la fase inicial de intervención del proyecto de investigación, con el objetivo de determinar las principales dificultades y errores conceptuales y procedimentales con que llegan los estudiantes al grado noveno en los temas que son necesarios para el buen desarrollo de los conceptos propios de los métodos para la solución de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ . Se evaluaron algunos conceptos tales como el uso de diferentes unidades de medidas, la representación gráfica de pares ordenados en el plano cartesiano, el manejo adecuado de las operaciones básicas con cantidades fraccionarias y decimales, operaciones con enteros y manejo de signos entre otras. Esta técnica fue utilizada, debido a la gran importancia que representó para el investigador, tener presente los errores conceptuales que los estudiantes presentaron en los pre-saberes al inicio de la temática en mención, para definir las estrategias metodológicas implementada y así intentar reducir los errores detectados en la fase diagnóstica, que está estructurada en seis etapas de acuerdo con las situaciones didácticas de Guy Brousseau, que aparecen detalladas y especificadas más adelante en la descripción del proceso metodológico.

#### **Observación participante.**

Se realizó en el aula de clases, en el instante en el que se abordó los temas referentes a la intervención del proyecto, con la información obtenida de las experiencias y vivencias que se obtuvo tanto de los estudiantes como del docente en la enseñanza de los métodos para la solución de ecuaciones lineales 2x2. Los datos obtenidos de la observación, permiten conocer de primera mano, la forma como ocurren los hechos en un grupo humano. Explica Rodríguez y colaboradores que: “Podemos preguntar a un grupo de alumnos por el clima de relaciones educativas en el aula de clase,... pero probablemente podría obtenerse una información más precisa observando a los alumnos mientras permanecen en sus aulas.”<sup>25</sup> De esta forma la observación ayudó a eliminar posibles desviaciones en la información que algunos estudiantes pueden generar frente a la figura de autoridad que representa el profesor o por figurar positivamente ante el docente, lo cual produce información sesgada y genera datos erróneos. Por lo tanto la observación, afirma Rodríguez “permite obtener información sobre un fenómeno o acontecimiento tal y como éste se produce”<sup>26</sup>.

En el marco de la observación, Rodríguez y colaboradores presentan cuatro sistemas de observación:

- Sistemas descriptivos, en los que no hay unas categorías fijas pero si un objetivo general de observación:
- Sistemas categoriales, en los que se debe establecer con anterioridad las categorías que se van a observar:
- Sistemas tecnológicos en los que se utilizan grabadoras, fotografías, o videos y permiten recoger mucha información y
- Sistemas narrativos, que describen con detalle lo que ocurre en un tiempo determinado y posteriormente se elabora un diario de campo.

---

<sup>25</sup> *Ibíd.*, Pág. 149

<sup>26</sup> *Ibíd.*, Pág. 149

Para el objetivo de la investigación, se hizo uso de los sistemas de observación tecnológico y narrativo, debido a que se realizó una observación durante algún tiempo e inicialmente la información obtenida de la observación, es registrada en documentos de audio, Rodríguez explica que el objetivo de este sistema es *“recoger de la forma más detallada posible todo el flujo de una conducta, el periodo de observación va a quedar delimitada por los propios límites de la conducta o acontecimientos a observar, es decir la duración de la observación va a coincidir con la duración del acontecimiento”*.<sup>27</sup>

En cuanto a la forma de registro de la información se hizo según el método tradicional denominado como “notas de campo”. Explica Rodríguez y colaboradores que *“las notas de campo son apuntes para recordar la observación de modo que nos facilite un posterior estudio y reflexión sobre el problema”*.<sup>28</sup>

Igualmente es importante este tipo de registro, pues permitió guardar aspectos inesperados de la observación, pues: *“Un punto fuerte importante del enfoque de las notas de campo es que no está estructurado rígidamente y así abre al investigador a lo no anticipado y a lo inesperado; el investigador ve las cosas como son, no como está programado que sean.”* (Mckernan, 1996, p. 115), situación que pueden resultar bastante relevantes al momento del análisis y que en ausencia de esta técnica muchos datos podrían borrarse de la memoria del investigador alterando los resultados.

### **Taller de investigación.**

Los talleres de investigación se realizaron utilizando como instrumento las Unidades didácticas; para este caso fue focalizados en las situaciones didácticas: *acción, formulación, y validación* y desarrollados de la siguiente forma:

---

<sup>27</sup> *Ibíd.* Pág. 160

<sup>28</sup> *Ibíd.* Pág. 161

El primer taller se trabajó en forma individual, después de recibir las explicaciones correspondientes a cada método y en el cual el estudiante debe resolver problemas de su propio contexto, aplicando las características aprendidas en cada método.

El segundo se realizó en grupos de trabajo de cuatro estudiantes y fue centrado en el desarrollo de la competencia argumentativa, el cual presenta tres fases: En la primera fase los estudiantes resolvieron un problema por los cuatro métodos analítico algebraicos y discutieron en sus grupos de trabajo lo que observaron y experimentaron con los resultados que obtuvieron por cada uno de ellos. La segunda fase cada estudiante del grupo resolvió un mismo ejercicio por un método diferente y finalmente en la tercera fase, se propusieron situaciones de su vida cotidiana que consideren importante resolver y eligen en sus respectivos grupos el método apropiado para dar solución a dicha situación.

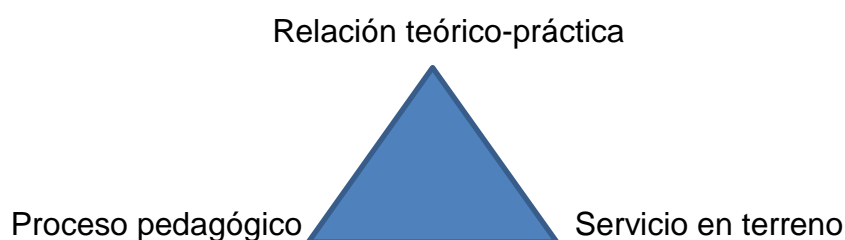
El tercero estuvo centrado en el desarrollo de la competencia propositiva, donde a los estudiantes en grupos de trabajo de cinco estudiantes, se les proporcionó una cantidad de ejercicios resueltos y debió identificar errores procedimentales y proponer estrategias para dar solución a dichos problemas, identificando las repercusiones que trae en una situación de la vida real, la presencia de estos errores en los resultados en la alteración de las cantidades presentes en dicha situación.

Es así, como el taller educativo o de investigación fue seleccionado en la fase de intervención del presente estudio, por suministrar al docente elementos importantes en la formación integral de los estudiantes, pues: *“mediante el taller, los docentes y los alumnos desafían en conjunto problemas específicos buscando también que el aprender a ser, el aprender a aprender y el aprender a hacer se*

*den de manera integrada, como corresponde a una auténtica educación o formación integral” (Maya, 1996. P 17).<sup>29</sup>*

Por otra parte es importante resaltar del taller investigativo las tres instancias que lo integran señaladas por Maya (1996), citando a Aylwin de Barros y Gissi Bustos (1977) a través de la siguiente gráfica:

**Gráfica 16. Instancias del taller investigativo.**



Fuente: Maya, 1996.

Las tres instancias muestran la importancia del taller educativo, en el logro de los objetivos de proyectos en los cuales a nivel de investigación educativa se busca superar o dar solución a problemáticas que han sido detectadas dentro del aula de clases por el mismo docente con la única finalidad de generar beneficios formativos en los estudiantes, ya que: *“El servicio en terreno, implica una respuesta profesional a las necesidades y demandas que surgen de la realidad en la cual se va a trabajar, y el proceso pedagógico se centra en el desarrollo del alumno y se da como resultado de la vivencia que éste tiene de su acción en terreno, formando parte de un equipo de trabajo, y de la implementación teórica de esta acción”* entre tanto *“La relación teoría-práctica es la dimensión del taller que intenta superar la antigua separación entre la teoría y la práctica al interrelacionar el conocimiento y la acción y así aproximarse al campo de la tecnología y de la acción fundamentada. Esta instancia requiere de la reflexión, del análisis de la acción, de la teoría y de la sistematización.”* (Maya, 1996. P 18), que son los

---

<sup>29</sup> Maya Betancourt, Arnobio. El taller educativo ¿Qué es? Fundamentos, como organizarlo y dirigirlo, como evaluarlo. Bogotá, Cooperativa editorial magisterio. Primera edición, 1996.

principales rasgos que deben caracterizar los talleres de investigación en búsqueda de formación de jóvenes con pensamiento crítico.

Igualmente se logró a través del taller educativo el fortalecimiento de importantes principios pedagógicos tal como lo menciona Maya (1996) citando a Ezequiel Ander Egg, al señalar que por medio de los talleres educativos se puede lograr:

- *Eliminación de las jerarquías docentes preestablecidas e incuestionables.*
- *Relación docente-alumno en una tarea común de cogestión, superando la práctica paternalista del docente y la actitud pasiva y meramente receptora del alumno.*
- *Superación de las relaciones competitivas entre los alumnos por el criterio de la producción conjunta grupal.*
- *Formas de evaluación conjunta docente-estudiantil en relación con la forma gestionada de la producción de la tarea.*
- *Redefinición de roles: el rol docente como orientador y catalizador del proceso de cogestión; el rol alumno como base creativa del mismo proceso.*
- *Control y decisión sobre la marcha del proceso didáctico-pedagógico por sus naturales protagonistas, es decir, docente y alumnos, bajo formas organizadas que el propio docente-estudiante decida.*

**3.3.2 Instrumentos.** Por otra parte, los instrumentos se aplicaron en cada una de las técnicas mencionadas anteriormente son los siguientes:

- Para el diagnóstico se determinó el taller de Pre-saberes
- Para la observación se utilizó dos instrumentos: documentos de audio y las Notas de campo.
- Para el Taller investigativo, el instrumento lo constituyeron unidades didácticas.

### 3.4 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO METODOLÓGICO

Tal como define McKernan, la Investigación acción, es el proceso de reflexión en un área-problema determinado, donde se desea mejorar la práctica o la comprensión personal, el profesional en ejercicio lleva a cabo un estudio – en primer lugar, para definir con claridad el problema; en segundo lugar, para especificar un plan de acción – que incluye el examen de hipótesis por la aplicación de la acción al problema. Luego se emprende una evaluación para comprobar y establecer la efectividad de la acción tomada. Por último, los participantes reflexionan, explican los progresos y comunican estos resultados a la comunidad de investigadores de la acción. La investigación acción es un estudio científico autorreflexivo de los profesionales para mejorar la práctica. (Mckernan, 1999, p. 25). Es así, como el proceso metodológico a desarrollar, se encontró definido en tres momentos:

**3.4.1 Diagnóstico.** Se aplicó una prueba diagnóstico o taller de presaberes, en el que se evaluó los conocimientos previos que los estudiantes de noveno grado necesitan manejar a nivel conceptual y procedimental (Operaciones básicas – suma, resta, multiplicación y división – con fraccionarios, despeje de variables en ecuaciones de primer grado, ley de signos en las operaciones básicas, ley distributiva de la multiplicación, ubicación de puntos y gráfica de rectas en el plano cartesiano). Conceptos que son necesarios para poder asimilar con mayor facilidad los procedimientos propios de los métodos para la solución de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ , que estuvo distribuido en seis fases, conjuntamente desarrolladas con la aplicación de las situaciones didácticas de Gay Brousseau, las cuales son:

Diseño del taller de presaberes, con manejo de conceptos como: Operaciones básicas con fraccionarios, despeje de variables, ley de signos, ley distributiva de la multiplicación, ubicación de puntos y gráfica en el plano cartesiano.

**Tabla 7. Aplicación de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, al taller de presaberes.**

<b>SITUACIÓN DIDÁCTICA</b>	<b>MOMENTO</b>	<b>PROCESOS DE PENSAMIENTO</b>
Fase 1. Acción	Aplicación del taller: trabajo en clase individual. De un conjunto de situaciones contextualizadas propias de la aplicación de las operaciones básicas y conceptos requeridos en el manejo de ecuaciones lineales, los estudiantes debieron identificar que operaciones le ayudaran a encontrar su solución y decidió la estrategia a desarrollar para llegar a la misma, mediante el uso de las operaciones que consideren pertinentes.	Análisis de resultados  Toma de decisiones
Fase 2. Formulación	Detección de errores conceptuales y procedimentales y definición de estrategias metodológicas a implementar. Una vez aplicada la estrategia de solución por cada estudiante, el docente dio indicaciones que orienten a los estudiantes de los posibles errores cometidos, para que ellos mismos los descubran y planteen preguntas e hipótesis que intentarán resolver.	Comprensión de la situación  Planteamiento de preguntas e hipótesis  Formulación de nuevas situaciones
Fase 3. Acción	Aplicación de estrategias: Trabajos en grupo en el manejo de los conceptos en los que se detectó mayor dificultad en los estudiantes.	Toma de decisiones  Análisis de resultados

Continuación tabla 7

<b>Fase 4. Validación</b>	<b>Verificación de avances: Evaluación de los conceptos para determinar si se presentan avances conceptuales y procedimentales en los estudiantes. Se socializaron y expusieron los hallazgos de cada estudiante, se intercambiaron experiencias y se establecieron generalidades de dichos hallazgos.</b>	<b>Argumentación</b>  <b>Demostración</b>
	<b>Sistematización y Análisis de resultados.</b> <b>Reflexión y revisión del problema.</b>	

Estas cuatro fases del diagnóstico, cuyos procesos aparecen definidos en la tabla 7, permitió detectar las principales falencias con las que llegan comúnmente los estudiantes de noveno grado al inicio del curso, en lo referente a los presaberes necesarios para el manejo de la función de la recta y la aplicación de los métodos para la solución de las variables (x, y) dentro de dicha función, al presentarse la intersección de dos rectas.

**3.4.2 Intervención.** Esta fase se encontró conformada por el diseño y la aplicación de tres talleres de investigación, que son desarrollados y aplicados a través de unidades didácticas, en la enseñanza de los conceptos propios de los métodos para la solución de ecuaciones lineales 2x2. Los talleres de investigación aparecen relacionados a continuación:

En el primer taller se trabajó la competencia interpretativa, mediante la aplicación de actividades individuales sobre los conceptos desarrollados en clase con los estudiantes, referente a cada uno de los métodos para la solución de ecuaciones lineales 2x2, y una vez encontró la respuesta, debió compararla y discutirla con

algunos de sus compañeros. Este taller tubo como finalidad que el estudiante al trabajar individualmente, reconoció sus fortalezas y debilidades en cada uno de los métodos y al comparar su respuesta con la de sus compañeros descubra sus aciertos y sus errores conceptuales y procedimentales, para que interiorice mejor cada procedimiento y aclare sus dudas al resolver cada problema. Está fundamentado en las situaciones didácticas de Guy Brousseau de la siguiente forma:

**Tabla 8. Aplicación de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, al primer taller de investigación.**

SITUACIÓN DIDACTICA	MOMENTO	PROCESOS DE PENSAMIENTO
Situación acción	<b>Solución individual del problema:</b> cada estudiante aplicó lo aprendido en clase de cada método e interioriza los procedimientos requeridos para la solución.	Toma de decisiones  Análisis de resultados
Situación validación	<b>Comparación de respuestas:</b> El estudiante discutió con sus compañeros acerca de las diferencias y similitudes encontradas en sus respuestas, para que defina los aciertos y errores cometidos en el ejercicio.	Argumentación  Demostración
Situación Formulación	<b>Ajustes procedimentales:</b> El estudiante escribió en su cuaderno de trabajo después de cada ejercicio, los errores descubiertos con sus compañeros e hizo interrogantes y propuestas que ayuden a evitar cometer los mismos errores.	Comprensión de la situación Planteamiento de preguntas e hipótesis Formulación de nuevas situaciones

Continuación tabla 8

Situación Validación	<b>Exposición de resultados:</b> Los estudiantes expusieron los hallazgos significativos que descubran de este proceso de interiorización de los conceptos correspondientes a los métodos estudiados.	Argumentación  Demostración
<i>Nota: Este ciclo se repitió para cada ejercicio desarrollado en clase, y para cada uno de los métodos aprendidos, hasta que concluya la primera unidad.</i>		

El segundo taller se realizó en tres fases a través del trabajo en grupo conformado por cinco estudiantes, donde se centró en la competencia argumentativa. En la primera fase, los estudiantes una vez conocen los diferentes métodos que existen para solucionar un sistema de ecuaciones 2x2, debió desarrollar un mismo ejercicio planteado por el profesor, utilizando los cinco métodos y discutió al final de cada ejercicio lo que descubren acerca de los resultados. La segunda fase permite que cada estudiante del grupo encuentre y elija de su propia experiencia, el método que mejor se acopla a su estructura cognitiva y que sea diferente al de sus compañeros para resolver un mismo ejercicio que el profesor le haya planteado, de tal forma que al final comparen sus respuestas y saquen conclusiones acerca de sus resultados y las escriban en sus cuadernos de trabajo. En la tercera fase los estudiantes deben plantear propuestas en grupo para la solución de situaciones de su propio contexto sugeridas entre ellos mismos y elegirán el método que consideran el más apropiados para dar solución a dicho ejercicio. La finalidad de esta segunda unidad es que los estudiantes mediante comparación que realicen de cada proceso, discutan en sus grupos de trabajo lo

que observan y descubran con la solución que obtienen por cada método que los resultados no se alteran. En esta unidad, se desarrollará la teoría de Brousseau en la siguiente forma:

**Tabla 9. Aplicación de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, al segundo taller de investigación.**

SITUACIÓN DIDACTICA	MOMENTO	PROCESOS DE PENSAMIENTO
PRIMERA FASE		
Situación acción	<b>Solución de ejercicios en grupo por los cinco métodos:</b> El grupo solucionó un ejercicio planteado por el profesor por todos los métodos.	Toma de decisiones Análisis de resultados
Situación validación	<b>Comparación de respuestas:</b> Los estudiantes discutieron lo que van descubriendo con respecto a sus resultados e hicieron apuntes en su cuaderno acerca de sus hallazgos.	Argumentación  Demostración
Situación formulación	<b>Ajustes procedimentales:</b> Los estudiantes de cada grupo escribió en sus cuadernos de trabajo después de cada ejercicio, los errores descubiertos con sus compañeros e hicieron propuestas que les ayude a evitar dichos errores.	Comprensión de la situación Planteamiento de preguntas e hipótesis Formulación de nuevas situaciones
SEGUNDA FASE		
Situación acción	<b>Elección del método a aplicar:</b> Cada estudiante dentro de su grupo elige un método diferente al de sus compañeros para solucionar un ejercicio planteado por el profesor.	Toma de decisiones  Análisis de resultados
	<b>Solución del ejercicio:</b> planteado por el profesor.	

Continuación tabla 9

Situación validación	<b>Comparación de respuestas:</b> Los estudiantes discuten lo que van descubriendo con respecto a sus resultados y hacen apuntes en su cuaderno acerca de sus hallazgos.	Argumentación  Demostración
TERCERA FASE		
Situación formulación	<b>Planteamiento de situaciones problema:</b> Los grupos propusieron situaciones de su propio contexto que consideren puedan ser solucionadas por métodos de ecuaciones lineales y eligen el que más dominen.	Comprensión de la situación  Planteamiento de preguntas e hipótesis  Formulación de nuevas situaciones
Situación Acción	<b>Solución del ejercicio de su entorno:</b> Que fue propuesto por los mismos estudiantes.	Toma de decisiones  Análisis de resultados
Situación validación	<b>Discusión de respuestas:</b> Los estudiantes discutieron sobre los resultados y lo que estos representan para su entorno de acuerdo a la situación planteada. Finalmente se socializaron los resultados y conclusiones obtenidas por cada grupo.	Argumentación  Demostración
<p><i>Nota:</i> <i>El ciclo de cada fase se repite para los ejercicios desarrollados en clase, hasta que concluya la segunda unidad.</i></p>		

Finalmente el tercer taller se realiza en grupos de estudiantes, y está centrado en la aplicación de la competencia propositiva, desarrollando tareas de comparación y verificación de información en la que se han desarrollado situaciones del contexto, con la aplicación de los métodos para solución de ecuaciones 2x2 donde identificaron, cuáles de ellas suministran respuestas válidas y coherentes al problema propuesto y con el desarrollo de los procedimientos adecuados y cuáles de ellas presentan errores en sus procedimientos para elegir y proponer en grupo, posibles estrategias de solución y tomar las decisiones que serían válidas para corregir los resultados. El objetivo de esta tercera unidad fue permitir que el estudiante trabajando en grupo, fue capaz de reconocer mediante la aplicación del conocimiento adquirido, los posibles errores conceptuales y procedimentales, que pueden estar presentes en el desarrollo de alguno de los métodos mediante el cual se esté solucionando una situación de la vida real, y adquiera la destreza, para identificar la mejor forma de dar solución a dicho error. Del mismo modo se buscó que el estudiante descubriera lo que puede representar en la vida real, la presencia de dicho error, y encuentre las alteraciones que se presentaron en su contexto con las respuestas erradas en cada ejercicio. Esta fase de intervención fue estructurada en la teoría de las situaciones didácticas de la siguiente forma:

**Tabla 10. Aplicación de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, a la tercera unidad del taller de investigación.**

SITUACIÓN DIDACTICA	MOMENTO	PROCESOS DE PENSAMIENTO
Situación acción	<b>Revisión de ejercicios:</b> de una cantidad de ejercicios resueltos que el profesor les suministró a un grupo de estudiantes, revisaron los procedimientos aplicados.	Toma de decisiones Análisis de resultados

Continuación tabla 10

Situación validación	<b>Verificación de procedimientos y respuestas:</b> cada grupo de estudiantes debió realizar procesos de análisis y comparación de procedimientos y respuestas, para identificar cuáles fueron bien desarrollados y cuáles presentaron errores.	Argumentación  Demostración
Situación formulación	<b>Propuesta de ajustes procedimentales:</b> El estudiante discutió con sus compañeros acerca de los errores descubiertos y de la forma como pueden repercutir estos en una situación de la vida real y propuso los ajustes que considere necesarios para solucionarlos.	Comprensión de la situación Planteamiento de preguntas e hipótesis Formulación de nuevas situaciones
Situación acción	<b>Corrección del ejercicio:</b> Los estudiantes realizan los ajustes que proponen para solucionar los errores del ejercicio y escriben en su cuaderno de apuntes las conclusiones que obtienen de esta experiencia.	Toma de decisiones  Análisis de resultados
Situación validación	<b>Exposición de resultados:</b> De esta experiencia cada grupo expone la hipótesis resuelta, los resultados y conclusiones obtenidas de dicho proceso.	Argumentación  Demostración
<i>Nota: Este ciclo se repite para cada ejercicio desarrollado en clase, y para cada uno de los métodos aprendidos, hasta que concluya la tercera unidad.</i>		

### 3.4.3 Reflexión.

Hacer investigación en el ámbito educativo, y específicamente en la práctica docente, requiere elegir una metodología adecuada a las necesidades del

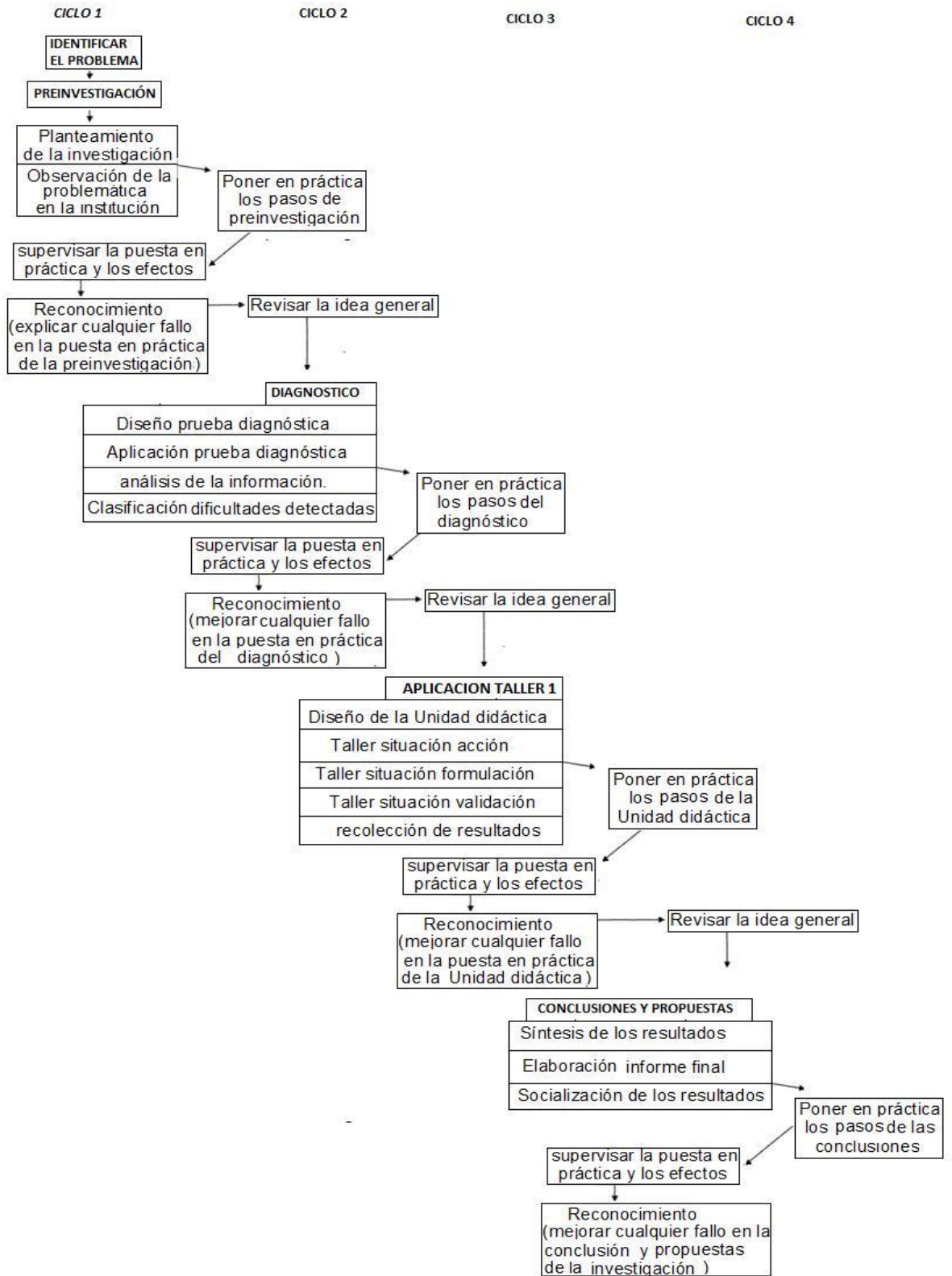
investigador, alumnos y contexto socio-cultural, centrada en el enfoque de la Investigación-acción, la cual cumple con rasgos del paradigma cualitativo; que acorde al estudio acerca de los métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, constituye una guía de reflexiones sistemáticas sobre las prácticas desarrolladas en el aula de clases con el fin de optimizar los procesos de enseñanza-aprendizaje. El docente debe contar con la capacidad de observar, analizar, interpretar, teorizar y llevar a la práctica las mejoras y transformaciones que, la educación actual exige. Esto lo logró a partir de la reflexión constante de su labor docente y preparación o actualización que lo conducirán a una verdadera profesionalización de su tarea diaria. Su principal objetivo va centrado hacia el estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad en donde el investigador se encuentra inmerso, en este caso, la práctica docente.

Toulmin<sup>30</sup>, dice que, la investigación- acción, es una “espiral de ciclos” porque a partir de la propia práctica se identifica una problemática producto de la reflexión, este saber que se genera a la luz de la reflexión sistemática, de la investigación formal, de la teorización hecha por el maestro de la divulgación de la cualificación y transformación de las prácticas, de la confrontación y validación al interior de la comunidad pedagógica, va configurando progresiva e históricamente el saber de lo pedagógico, de la pedagogía. Con el nuevo conocimiento y saber, el maestro vuelve sobre su experiencia de forma transformadora, generando nuevas prácticas- praxis pedagógica, práctica reflexionada y sustentada teóricamente. Esquemáticamente se puede representar el proceso a desarrollar en el presente estudio de la siguiente forma:

---

<sup>30</sup> Toulmin, Fruto de las ambiciones o ideales explicativos, de hombres y mujeres – maestros (as) que comparten un campo de acción intelectual común: La Educación. 1977.

**Gráfica 17. Proceso de investigación acción a aplicar en el estudio.**



#### 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Una vez obtenido los datos, para identificar las dificultades y errores conceptuales en la aplicación de los métodos para la solución de ecuaciones lineales 2x2 en los estudiantes, se realiza el proceso de triangulación metodológica de los resultados, con el fin de obtener el análisis de la información a través de la prueba diagnóstica o taller de pre-saberes, la observación participante y del taller de investigación. Gran parte de los investigadores han considerado que cuanto mayor sea la variedad de las metodologías, datos e investigadores empleados en el análisis de un problema específico, mayor será la fiabilidad de los resultados finales. Este proceso se encuentra plasmado en la siguiente gráfica.

**Gráfica 18. Proceso de triangulación metodológica de resultados.**



Las principales ventajas del método de triangulación radican en la presencia del alto grado de validez de los resultados y la productividad en el análisis y recolección de datos, puesto que el estudio se desarrolla con la importante cercanía del investigador al objeto de estudio; igualmente, la integración de métodos incrementa las garantías de la investigación lo cual ayuda a obtener una aproximación al entendimiento de la realidad en los procesos dinámicos.

Según Denzin (1970), *“la triangulación es la combinación de dos o más teorías, fuentes de datos o métodos de investigación, en el estudio de un fenómeno singular”*<sup>31</sup>, que para este caso, se realizará mediante la confrontación de los datos recolectados en las notas de campo redactadas de los textos de audio de las clases observadas conjuntamente con la información relevante y significativa que pueda extractarse del taller de pre-saberes y el taller investigativo. La información confrontada permitió realizar la sistematización y análisis que suministró las principales conclusiones que llevó al logro de los objetivos de este estudio. Igualmente, una vez realizada la triangulación metodológica, se realizó una triangulación teórica, donde se confrontó los resultados a diferentes aportes teóricos realizados por investigadores en el campo de la didáctica y de la educación, y se indicó si los resultados confirman o contradicen los resultados ya realizados en otros ámbitos educativos.

**Análisis e interpretación de los resultados.** El análisis de los resultados permite al docente, determinar cómo los estudiantes interpreta los problemas y como orientar su diseño, a una solución óptima aplicando situaciones didácticas de acción, formulación y validación de acuerdo a los lineamientos curriculares que definen evaluar los resultados, el significado del diseño para resolver sistemas lineales 2x2 apoyado en los referentes teóricos de la investigación. Para la presente investigación, se parte de los conceptos de variables y planos cartesianos, con el fin de desarrollar los talleres pre-saberes y diarios de campos,

---

<sup>31</sup> Denzin, N. K. *Sociological Methods: a Source Book*. Aldine Publishing Company. Chicago.1970

que permiten mediante la observación y análisis, determinar el nivel de conocimiento de los estudiantes.

El análisis del investigador, logra de forma correcta, responder a las inquietudes y objetivos del proyecto, observando de manera más clara al estudiante asumiendo su aprendizaje significativo y logrando los resultados esperados. Estos resultados, son producto de la evaluación, donde se tiene en cuenta las habilidades procedimentales, argumentativas e interpretativas, desde el intercambio de experiencia antes y después de los talleres pre-saberes, posibilitando la aplicación de conocimiento y el enriquecimiento del mismo.

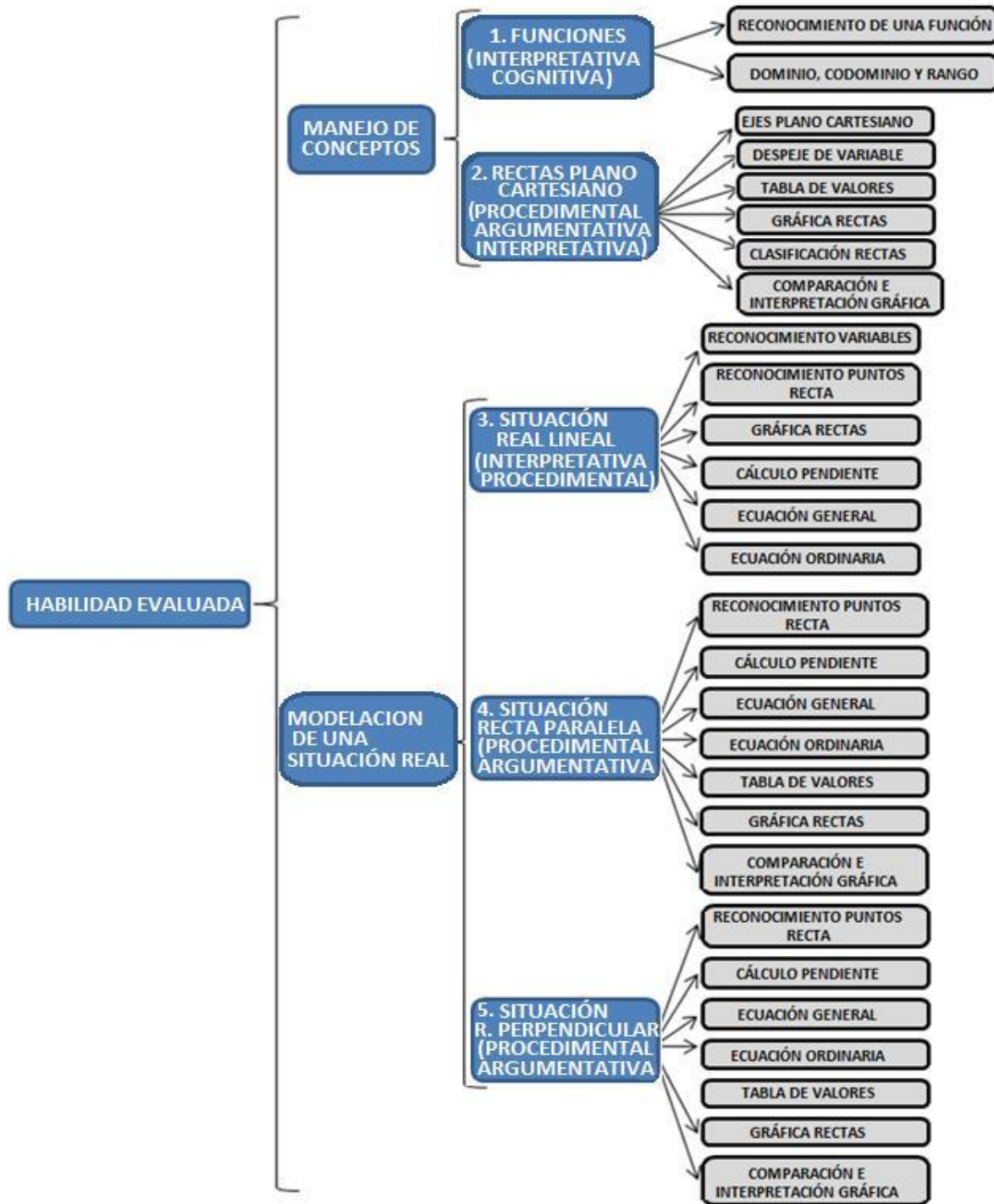
En primera instancia se observa en la habilidad evaluada, dos categorías fundamentales que el estudiante debe tener en cuenta a la hora de resolver un problema, el manejo de conceptos y la modelación de una situación real.

En la primera categoría, Manejo de conceptos, el estudiante debe reconocer una función y sus propiedades, con el fin de realizar una interpretación cognitiva del problema para su solución. Por lo que refiere a las rectas del plano cartesiano, estas se desarrollan a través de un procedimiento, se debe definir cuál va hacer la variable dependiente e independiente, argumentada a través de los conceptos adquiridos en su desarrollo, para luego interpretar el ejercicio de acuerdo a su clasificación gráfica.

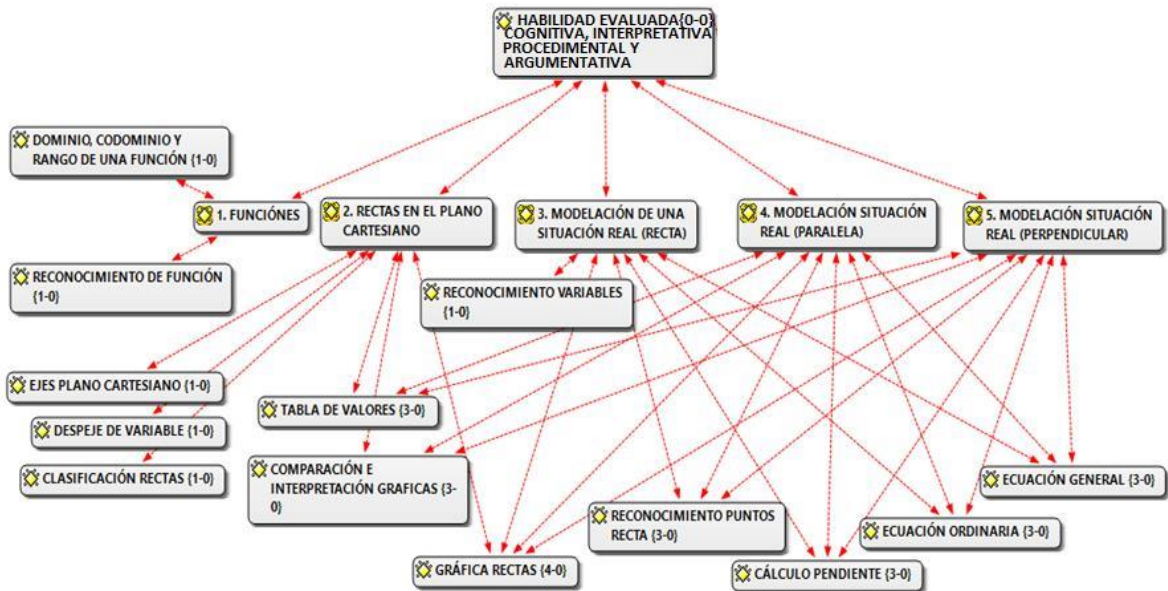
En cuanto a la segunda categoría, la modelación de una situación real, esta se desarrolla a través de 2 componentes, interpretativa-Procedimental y procedimental-argumentativa, donde la primera está ligada más a concepto para su interpretación, y una vez realizada su interpretación se lleve a cabo el proceso de desarrollo y la segunda, a través del proceso argumentar los resultados, es decir desde lo procedimental se busca comprender el ejercicio antes de su desarrollo, analizar y describir el ejercicio. Por otra parte lo argumentativo tiene su relación con el argumento que demuestra el estudiante y el razonamiento puesto

en el ejercicio, por ultimo lo interpretativo busca resolver el problema a través de cuadros comparativos, representaciones gráficas y análisis del contenido.

**Gráfica 19. Categorización de taller de pre saberes.**



**Gráfica 20. Relación entre categorías del taller de pre saberes.**



Una vez definidas las habilidades evaluadas, dentro de los conceptos enmarcados en la solución de sistemas lineales  $2 \times 2$ , el contenido temático se plantea de la siguiente forma:

#### 4.1 ANÁLISIS DEL TALLER DE PRESABERES.

Incluye el desarrollo de cada problema, específicamente las técnicas de preparación, donde cada actividad es acompañada de pequeños pasos dispuestos de forma secuencial y acompañado de un enfoque metodológico para reducir errores, retroalimentación inmediata y la libertad para que el estudiante desarrolle el problema a su propio ritmo de aprendizaje.

Las prácticas de demostración, que evidencian una descripción exacta de las acciones que se precisan para realizar un proceso y/o procedimiento.

**4.1.1 Situación uno. Funciones. (Interpretativa-Cognitiva).** Conformada por 2 ejercicios presentados a continuación:

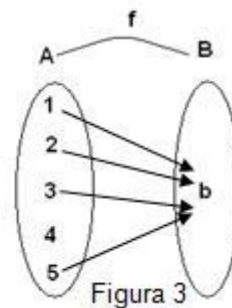
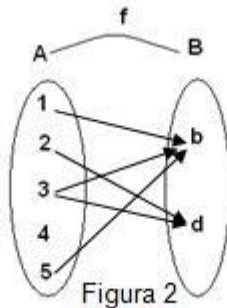
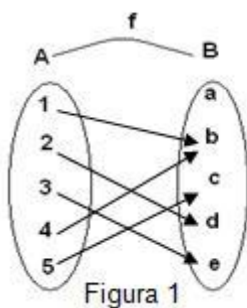
**Ejercicio 1: Reconocimiento de una función.** La primera parte de esta situación consiste en identificar cuáles de las tres figuras propuestas y que aparecen en la gráfica 21, representan funciones y cuáles no:

**Gráfica 21. Taller de pre-saberes situación 1, ejercicio 1. Reconocimiento de una función.**

Función Si  No

Función Si  No

Función Si  No



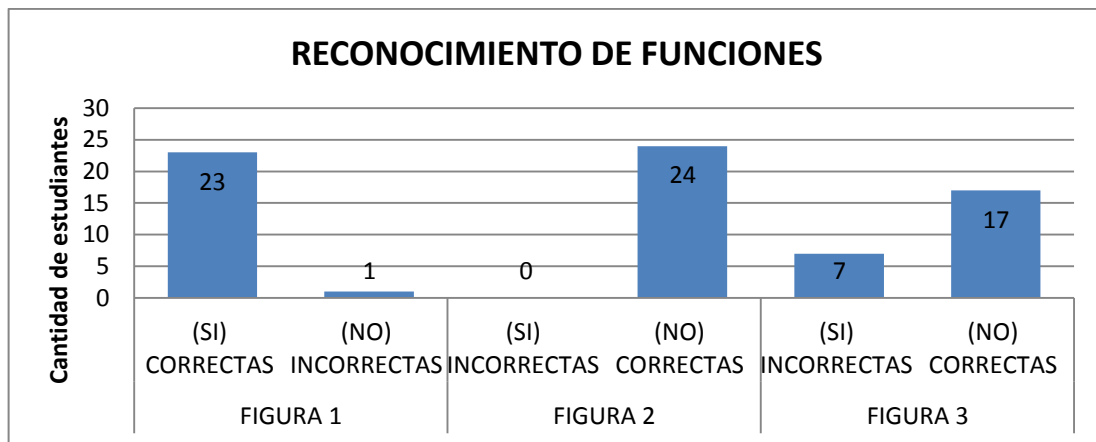
De este ejercicio propuesto, se obtuvieron los resultados contenidos en la siguiente tabla.

**Tabla 11 . Valoración de respuestas de los estudiantes en el reconocimiento de funciones.**

RESPUESTAS	FIGURA 1		FIGURA 2		FIGURA 3	
	SI	NO	SI	NO	SI	NO
CORRECTAS	23			24		17
INCORRECTAS		1	0		7	

En el desarrollo de la clase en esta parte del taller se pudo observar, como de los 24 estudiantes, solo el estudiante EH8 presenta error en dos de las figuras, es decir solo respondió correctamente una pregunta, lo que permite identificar dificultades conceptuales para el reconocimiento de funciones, entre tanto 7 de los 24 estudiantes tuvieron dificultad para identificar la función de la figura 3, pero en términos generales una proporción bastante significativa de estudiantes muestran buen dominio para identificar las funciones planteadas en las tres figuras mostrando un desempeño avanzado en esta parte del taller en lo referente a la habilidad cognitiva relacionada con el reconocimiento de funciones, esta situación puede observarse más claramente en la gráfica 22, que aparece a continuación.

**Gráfica 22. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de funciones.**



Esta gráfica refleja la claridad que tienen los estudiantes para identificar la función de la figura 1 cuando se trata de ejemplos en los que cada uno de los elementos del dominio, tienen una única relación con elementos del Codominio, pues 23 de los 24 estudiantes la reconocen acertadamente, y solo un estudiante afirma que no se trata de una función.

Igualmente en la figura 2, cuando uno o varios elementos del dominio tienen más de una relación con elementos del Codominio, todos los estudiantes tienen claro que estos casos no corresponden a una función. Por el contrario en la figura 3 se observa muy dividida la opinión de los estudiantes para identificar este ejemplo, en el cual el dominio presenta cuatro elementos relacionados correctamente con un único elemento del Codominio y un elemento aparece no relacionado con elementos del Codominio, esto posiblemente confunde a los estudiantes que dieron prioridad al hecho de ser mayor la cantidad de relaciones acertadas frente al elemento no relacionado, pues aun sin ser una función, 7 estudiantes afirman que lo es y 17 que no.

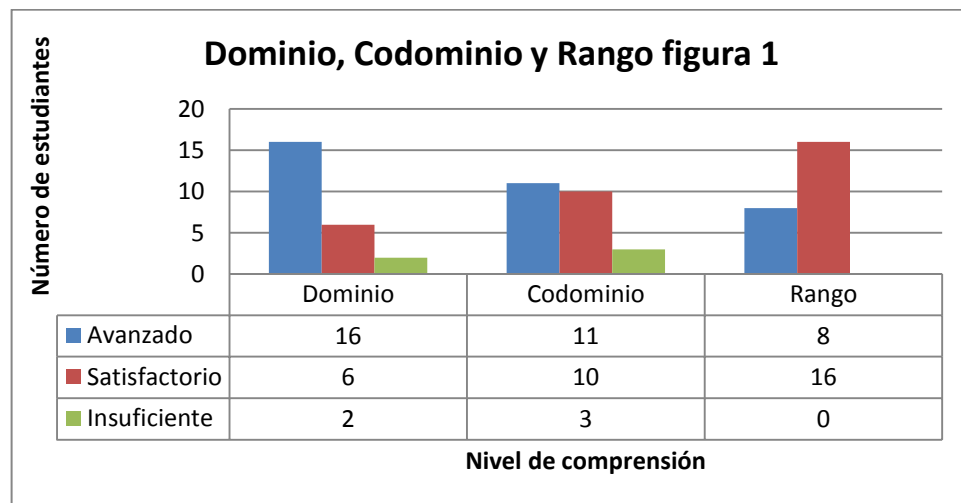
**Ejercicio 2: Dominio, Codominio y rango de una función.** En la segunda parte de la situación uno, los estudiantes debían identificar el dominio, Codominio y rango de las tres figuras propuestas anteriormente y al evaluar las soluciones dadas se califican cinco categorías, que son:

1. Nominar el conjunto (le da un nombre al conjunto, usando una letra mayúscula)
2. Agrupar elementos (uso adecuado de los signos de agrupación)
3. Separar elementos (Internamente en el conjunto)
4. Reconocer el conjunto (diferencia el dominio del codominio y el rango)
5. Respetar la estructura del conjunto (evita hacer cambios en los elementos del conjunto como: minúsculas a mayúsculas; inclusión o exclusión de elementos que no corresponden, o suplantar signos de agrupación).

Los estudiantes que cumplen con 4 o más categorías de evaluación se clasificaron en un nivel de comprensión avanzado, los que cumplen con 3 categorías en un nivel satisfactorio de comprensión y los que aciertan en 2 o menos categorías en un nivel insuficiente en el reconocimiento de los conjuntos del dominio, el codominio y el rango. Los resultados fueron los siguientes:

Es así como el resultado en el reconocimiento de la figura 1 obtenido de las respuestas y que aparece representado en la gráfica 23, se observa que de los 24 estudiantes, 16 presentan un nivel avanzado en el reconocimiento del dominio, 11 en el reconocimiento del codominio y 8 en el rango, pero cabe resaltar que de estos estudiantes clasificados en el nivel avanzado, solo la estudiante EM11 cumple con todas las categorías de evaluación, en el reconocimiento del dominio y del codominio.

**Gráfica 23. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de dominio, Codominio y rango.**

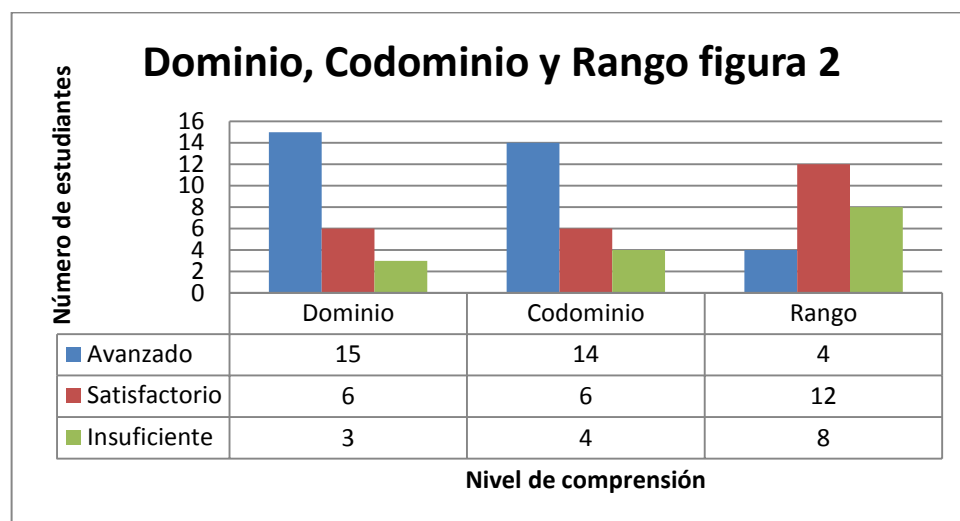


De acuerdo a la gráfica 23, dos de cada tres estudiantes tienen claro que es el dominio de una función, aproximadamente la mitad de ellos tienen claridad para identificar el codominio y tan solo uno de cada tres estudiantes define muy bien el rango de la función. Aunque los porcentajes anteriores definen la excelencia de un estudiante, al 25% le hace falta mejorar un poco para determinar el dominio de la función, al 41% con respecto al codominio y al 66% definir el rango.

De acuerdo a este análisis, el 8% de los estudiantes demuestran deficiencia para hallar el dominio, 13% para hallar el codominio y aunque ningún estudiante

demuestra insuficiencia con respecto al rango, hay que colocar más atención al tema, para que se logre llegar al estudiante de forma adecuada. Continuando con el análisis de la figura 2, cuyas respuestas de los 24 estudiantes se encuentran representadas en la gráfica, presentan un nivel avanzado de reconocimiento del dominio 15 estudiantes, del codominio 14 estudiantes y del rango 4. En un nivel satisfactorio de reconocimiento del dominio, codominio y rango 6, 6 y 12 estudiantes respectivamente; y en lo referente al nivel insuficiente se encuentran en el reconocimiento del dominio 3 estudiantes, del codominio 4 estudiantes y del rango 8.

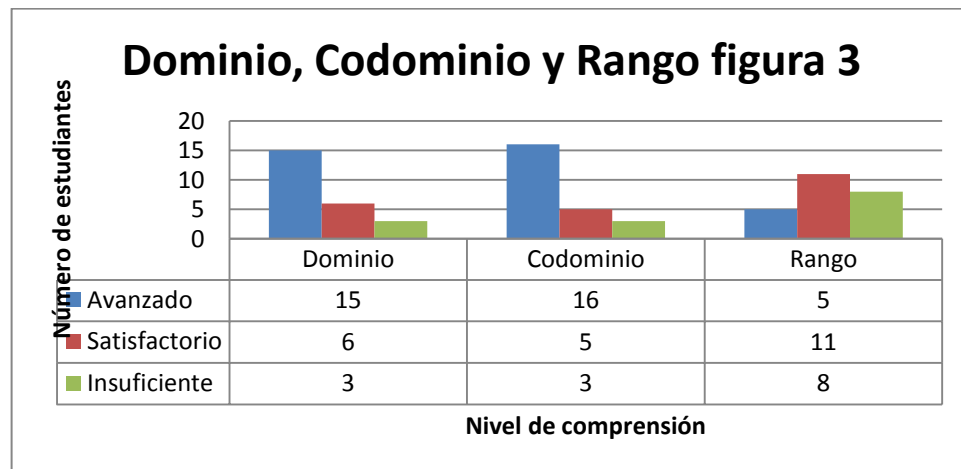
**Gráfica 24. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de dominio, Codominio y rango, de la figura 2.**



Cuando se realiza el cambio de gráfica, el estudiante tiende a confundirse un poco y su criterio cambia totalmente, la mayoría de los casos, el estudiante opta por un solo método de aprendizaje y es por esta razón que se presenta ciertas falencias. En lo correspondiente a la figura 3 a continuación se puede observar que de los 24 estudiantes, se encuentran en un nivel avanzado al reconocer el dominio de esta figura 15 estudiantes, del codominio 16 estudiantes y del rango 5, tal como se muestra en la gráfica 25. En un nivel satisfactorio de reconocimiento del dominio 6

estudiantes, del codominio 5 estudiantes y del rango 11. Finalmente en un nivel insuficiente se encuentran en el reconocimiento del dominio 3 estudiantes, del codominio 3 estudiantes y del rango 8. En esta tercera figura al igual que ocurrió con la figura 1 y 2, la estudiante EM11 resuelve correctamente la representación del conjunto del dominio y del codominio, y los estudiantes EM9 y EH2 cometen el mismo error a los cometidos en la figura 1 y 2 confundiendo los elementos del dominio y del codominio.

**Gráfica 25. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de dominio, codominio y rango, de la figura 3**



La tabla 12 que aparece a continuación muestra un resumen del desempeño de los estudiantes en las tres figuras interpretadas en este ejercicio. El color rosado de la tabla, muestra el número de estudiantes que han dado respuestas en un nivel avanzado de interpretación en cada figura, el verde el nivel satisfactorio y el celeste el nivel insuficiente.

**Tabla 12. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de dominio, codominio y rango, figura 1, 2 y 3.**

<i>RESPUESTAS</i>	<i>Figura 1</i>			<i>Figura 2</i>			<i>Figura 3</i>		
<i>SOLUCIÓN</i>	<i>AVANZ.</i>	<i>SATISF.</i>	<i>INSUFIC.</i>	<i>AVANZ.</i>	<i>SATISF.</i>	<i>INSUFIC.</i>	<i>AVANZ.</i>	<i>SATISF.</i>	<i>INSUFIC.</i>
DOMINIO	16	6	2	15	6	3	15	6	3
CODOMINIO	11	10	3	14	6	4	16	5	3
RANGO	8	16	0	4	12	8	5	11	8

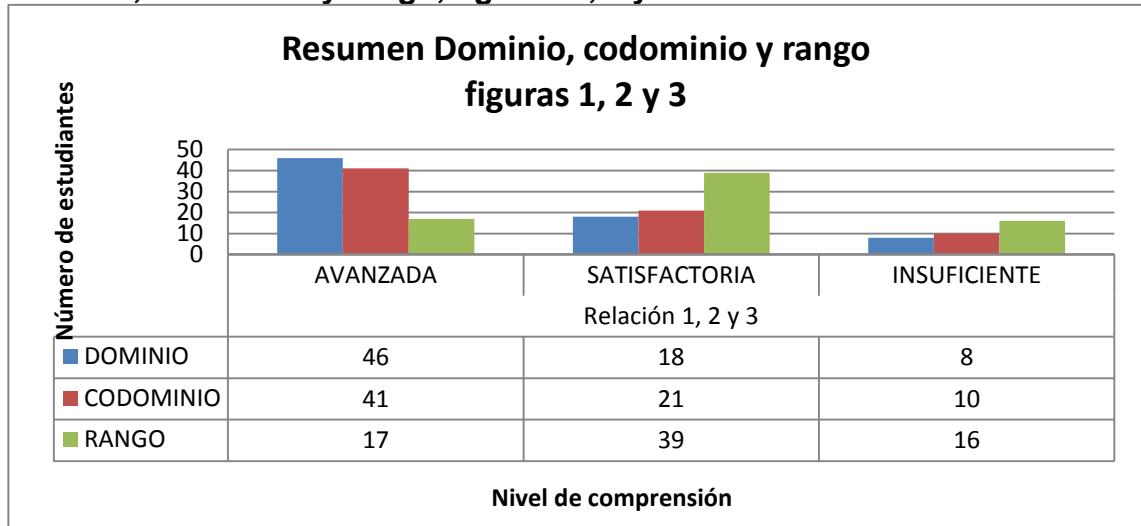
En la tabla 13, se resume y determina mejor el nivel de comprensión de los estudiantes, de acuerdo a los resultados, entre más avanzado es el ejercicio, el estudiante presenta más dificultades para desarrollarlo, de acuerdo a las repuestas obtenidas, el estudiante debe tener menos errores en la figura 2 que en las demás.

**Tabla 13. Nivel de comprensión de los estudiantes en reconocer el dominio, codominio y rango de las relaciones 1, 2 y 3.**

<i>RESPUESTAS</i>	<i>Relación 1, 2 y 3</i>		
<i>SOLUCIÓN</i>	<i>AVANZADA</i>	<i>SATISFACTORIA</i>	<i>INSUFICIENTE</i>
DOMINIO	46	18	8
CODOMINIO	41	21	10
RANGO	17	39	16

Se puede observar en la gráfica 26, que de las respuestas dadas por los estudiantes, el 63,9% presentan un nivel avanzado en el reconocimiento del dominio y un 56,9% en el reconocimiento del codominio, señalando la presencia de habilidad en el manejo de este concepto por este grupo de estudiantes, entre tanto el 54,2% de las respuestas se clasifican en un nivel satisfactorio en el reconocimiento del rango, situación que refleja mayor dificultad en el grupo para reconocer las relaciones que se presentan entre el dominio y el codominio de las funciones expresadas en las tres figuras.

**Gráfica 26. Nivel de comprensión de los estudiantes en el reconocimiento de dominio, codominio y rango, figuras 1, 2 y 3.**



En el caso del dominio y el codominio, los errores más comunes en las respuestas satisfactorias de los estudiantes es la falta de nominación en el conjunto y la ausencia de signos de agrupación y en el nivel de comprensión insuficiente además de los errores anteriormente señalados los más notorios son errores de estructura, al excluir elementos que corresponden al conjunto, y en los estudiantes EH2, EH9 y EM9 quienes confunden los elementos del dominio con los del codominio.

Por otra en el reconocimiento del rango, se reducen significativamente los estudiantes que presentan un nivel avanzado de comprensión, y en esta parte los errores más comunes es el uso incorrecto de signos de agrupación y de separación de elementos dentro del conjunto, el desconocer algunas relaciones entre elementos del dominio y el codominio y en términos generales el no uso de la nominación para el conjunto.

Del mismo modo en el manejo del rango, todos los estudiantes tienen claro que los elementos del conjunto del rango, son los subconjuntos conformados por las relaciones presentes entre los elementos del dominio y el Codominio, 16 de los cuales utilizan signos de agrupación para cada subconjunto del rango; 12 de ellos separan los elementos de cada subconjunto con coma (,) y solo 8 separan con coma (,) cada subconjunto entre sí. 12 no separan con coma los elementos que se relacionan entre el dominio y Codominio, alterando el significado de lo que quieren representar; y los estudiantes EH2 y EM9 cambian la presentación de algunos elementos (de minúscula a mayúscula) como por ejemplo las relaciones “(1,B)” o “2D” respectivamente que no corresponden para las diferentes figuras; finalmente 4 estudiantes utilizan signos de agrupación para reunir todos los subconjuntos conformados por las relaciones presentes en las tres figuras, un estudiante intenta hacer lo mismo, pero no cierra el signo de agrupación que los reúne y ninguno utiliza una letra mayúscula para nominar el conjunto del rango.

En esta parte del taller se pudo observar un dominio relativamente satisfactorio de la competencia interpretativa-cognitiva, pues la mayoría de los ejercicios propuestos fueron superados en la forma esperada, lo que induce a concluir que esta categoría del conocimiento metacognitivo, puede ayudar a elegir estrategias más adecuadas para tener una mejor comprensión, frente al desarrollo de razonamientos lógicos que relacionan las preconcepciones con respecto a las nuevas, confrontándolas y validándolas de acuerdo a las estrategias exitosas o poco exitosas utilizadas en su cotidianidad. El conocimiento del estudiante se refiere al que se tiene de sí mismo, y al de sus capacidades y limitaciones cognitivas, así como de otros estados y características que incluye sus presaberes, que pueden afectar su rendimiento en la solución de situaciones problema.

Por esta razón, los estudiantes se inclinan por el sentido dado por D' Amore (1999), considerando las misconcepciones, también como “concepciones

momentáneas no correctas, en espera de organización cognitiva, más elaborada y crítica. Atención: el estudiante, sin embargo, no lo sabe y por lo tanto considera que las suyas, aquellas que para el investigador son misconcepciones, son para él concepciones absolutamente verdaderas. Por lo tanto, es el adulto quien puede determinar cuándo las concepciones elaboradas y asumidas como propias por los estudiantes son misconcepciones. Llamarlas errores es demasiado simplista y banal, no se trata de castigar, de evaluar negativamente; se trata, en cambio, de dar los elementos para la elaboración crítica” (D’Amore, 1999,2003b).

**4.1.2 Situación dos. rectas en el plano cartesiano.** (Interpretativa-argumentativa-procedimental). Constituida por cinco ejercicios como aparecen a continuación:

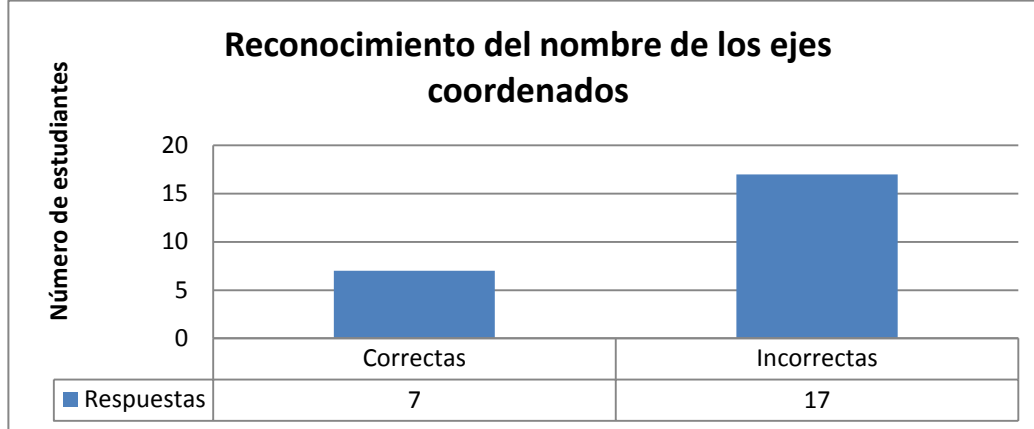
**Ejercicio 1: Ejes plano cartesiano.** Para identificar el reconocimiento que tienen los estudiantes de los ejes coordenados del plano cartesiano, se les realiza la siguiente pregunta:

**El plano cartesiano está conformado por dos ejes, el eje (x) y el eje (y), ¿cuál de los dos corresponde al eje de las ordenadas y cual al eje de las abscisas?**

R/ \_\_\_\_\_

De la anterior pregunta se clasificaron las respuestas de los estudiantes en dos categorías: respuestas correctas e incorrectas, que aparecen detalladas en la siguiente Grafica.

**Gráfica 27. Reconocimiento de los estudiantes de los ejes coordenados.**



A pesar de encontrar que los estudiantes reconocen el eje X como el eje horizontal y el eje Y como el eje vertical, se observa muchas dudas en el reconocimiento de los nombres de los ejes coordenados (eje de las ordenadas y eje de las abscisas), es así como solo 7 de los 24 estudiantes han señalado el eje de las abscisas y de las ordenadas correctamente, mostrando debilidades que se espera no afecte el desempeño de los estudiantes en el manejo del método gráfico al solucionar los sistemas de ecuaciones lineales.

**Ejercicio 2: Despeje de variable.** Las ecuaciones a despejar presentes en el taller de pre-saberes, y as respuestas obtenidas se encuentran en las tablas 14 y 15, con la presencia de tres niveles de comprensión, avanzada (A) si el despeje fue realizado en forma correcta, satisfactoria (S) si el estudiante presento problemas solo en el manejo de signos, e insuficiente (I) Cuando el estudiante presenta varios errores en un solo despeje.

**Tabla 14. Respuestas en despeje de (Y o X), de las ecuaciones a, b y c.**

<i>Ecuac.</i>	<i>ECUACIÓN (a)</i> $2x + y = 3$	<i>Nivel solución</i>	<i>ECUACIÓN (b)</i> $3x - 2y = 4$	<i>Nivel solución</i>	<i>ECUACIÓN (c)</i> $2x + 3 = x + 5$	<i>Nivel solución</i>
<i>SOLUC.</i>	$y = 3 - 2x$				$y = \frac{3x - 4}{2} = \frac{3x}{2} - 2$	

**Tabla 15. Respuesta de los despeje de (Y o X), de las ecuaciones d, e y f.**

<i>Ecuac.</i>	<b>ECUACIÓN (d)</b> $4 - y = 1 - 2y$	<i>Nivel solución</i>	<b>ECUACIÓN (e)</b> $3 + 4x = 3x + 3$	<i>Nivel solución</i>	<b>ECUACIÓN (f)</b> $4 + 5y = 4y + 4$	<i>Nivel solución</i>
<b>SOLUC.</b>	$y = -3$		$x = 0$		$y = 0$	

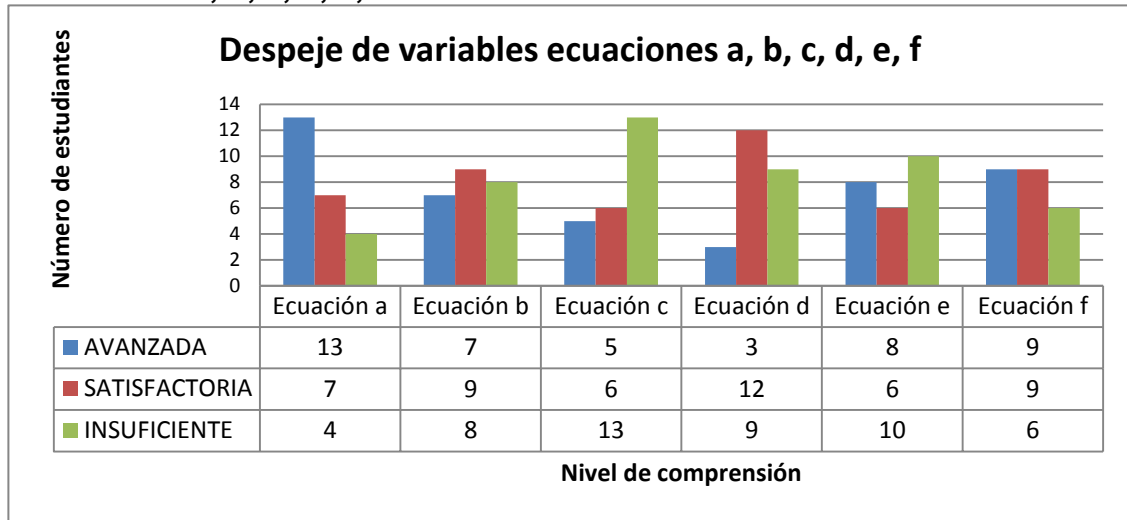
En la tabla 16 se encuentra el resumen de respuestas dadas por los estudiantes en las seis ecuaciones trabajadas en el taller, con el nivel de comprensión identificada en los estudiantes en el despeje de las variables señaladas en este ejercicio.

**Tabla 16. Nivel de comprensión de los estudiantes en despeje de variables de las ecuaciones a, b, c, d, e y f.**

SOLUCIÓN	AVANZADA	SATISFACTORIA	INSUFICIENTE
Ecuación a	13	7	4
Ecuación b	7	9	8
Ecuación c	5	6	13
Ecuación d	3	12	9
Ecuación e	8	6	10
Ecuación f	9	9	6

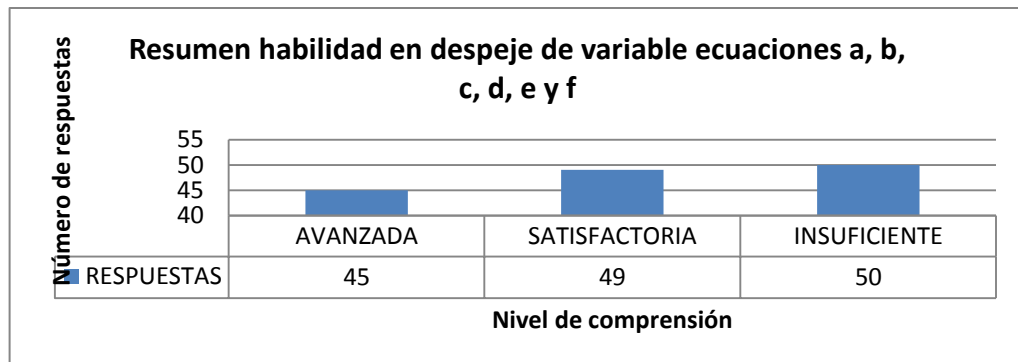
Este resumen se puede observar más claramente en la siguiente gráfica donde aparece representada la solución dada por los estudiantes en el despeje de las 6 ecuaciones propuestas.

**Gráfica 28. Habilidad de los estudiantes para despejar variables de las ecuaciones a, b, c, d, e, f.**



Los resultados muestran mayor dominio en la ecuación a; donde el despeje arroja tanto variables como términos independientes enteros, y por el contrario la mayor dificultad está presente en ecuaciones cuyo despeje presenta una sola variable “X” o “Y” donde el resultado solo contiene términos independientes positivos, negativos o nulos, posiblemente por tratarse de ecuaciones que aunque su despeje es más sencillo, no es común la presencia de este tipo de ecuaciones.

**Gráfica 29. Habilidad de los estudiantes para despejar variables de las ecuaciones a, b, c, d, e, f.**



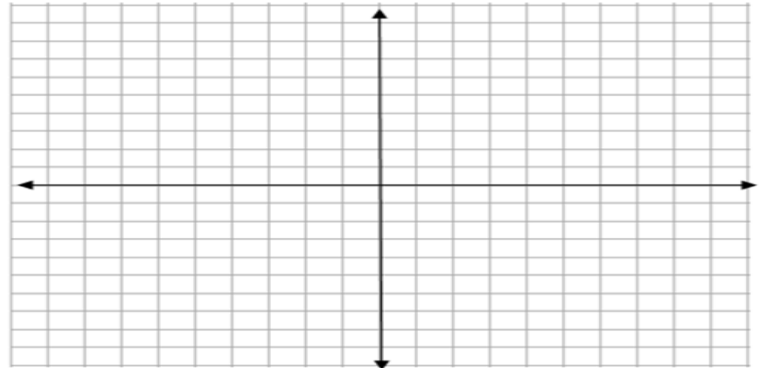
Claramente, se observa que 35% de los estudiantes, muestran insuficiencia con respecto al tema, lo que hace desfavorable el trabajo del docente, frente al despeje de las ecuaciones.

**Ejercicio 3: Tabla de valores.** En esta parte del taller, los estudiantes deben resolver la siguiente pregunta propuesta:

Para cada una de las ecuaciones anteriores, completa la tabla de valores dada; y representa en el plano cartesiano con colores diferentes cada una de las rectas (a, b, c, d, e, f).

**Gráfica 30. Cálculo de valores tablas de ecuaciones a, b, c, d, e y f.**

a)	X	-1	3
	Y		
b)	X	-2	4
	Y		
c)	X	2	2
	Y		
d)	X		
	Y	3	3
e)	X	0	0
	Y		
f)	X		
	Y	0	0



**Tabla 17. Respuestas del cálculo de valores en tablas de ecuaciones a, b y c.**

Ecuación	TABLA (a) $y = 3 - 2x$			TABLA (b) $y = \frac{3x - 4}{2}$			TABLA (c) $x = 2$					
<b>SOLUC.</b>	a)	X	-1	3	b)	X	-2	4	c)	X	2	2
		Y	5	-3		Y	-5	4		Y	R	R
<b>CÓDIGO</b>		X = -1	X = 3			X = -2	X = 4			X = 2	X = 2	
		Y = ?	Y = ?			Y = ?	Y = ?			Y = ?	Y = ?	

Nota: R=Cualquier cantidad correspondiente al conjunto de los números Reales.

**Tabla 18. Respuestas del cálculo de valores en tablas de ecuaciones d, e y f.**

Ecuación	TABLA (d) $y = -3$				TABLA (e) $x = 0$				TABLA (f) $y = 0$			
SOLUC.	d)	X	R	R	e)	X	0	0	f)	X	R	R
		Y	-3	-3		Y	R	R		Y	0	0
CÓDIGO	Y = -3 X = ?		Y = -3 X = ?		X = 0 Y = ?		X = 0 Y = ?		Y = 0 X = ?		Y = 0 X = ?	

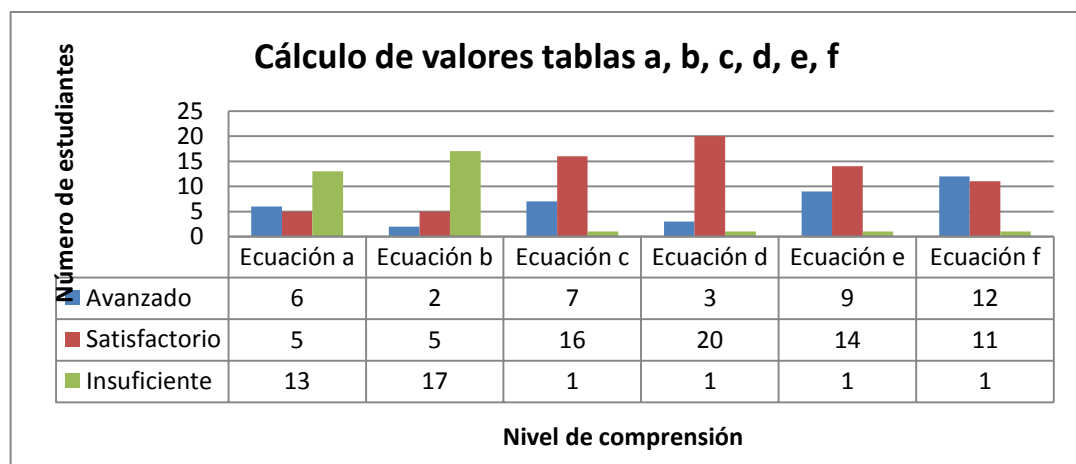
Nota: R=Cualquier cantidad correspondiente al conjunto de los números Reales.

Se considera avanzada la respuesta, cuando el estudiante calculo acertadamente las dos cantidades de la tabla, Satisfactoria si acertó solo en una de las dos cantidades e insuficiente cuando las dos cantidades son incorrectas.

**Tabla 19. Habilidad en el cálculo de valores tablas de ecuaciones a, b, c, d, e y f.**

Ecuación /Solución	Avanzado	Satisfactorio	Insuficiente
Ecuación a	6	5	13
Ecuación b	2	5	17
Ecuación c	7	16	1
Ecuación d	3	20	1
Ecuación e	9	14	1
Ecuación f	12	11	1

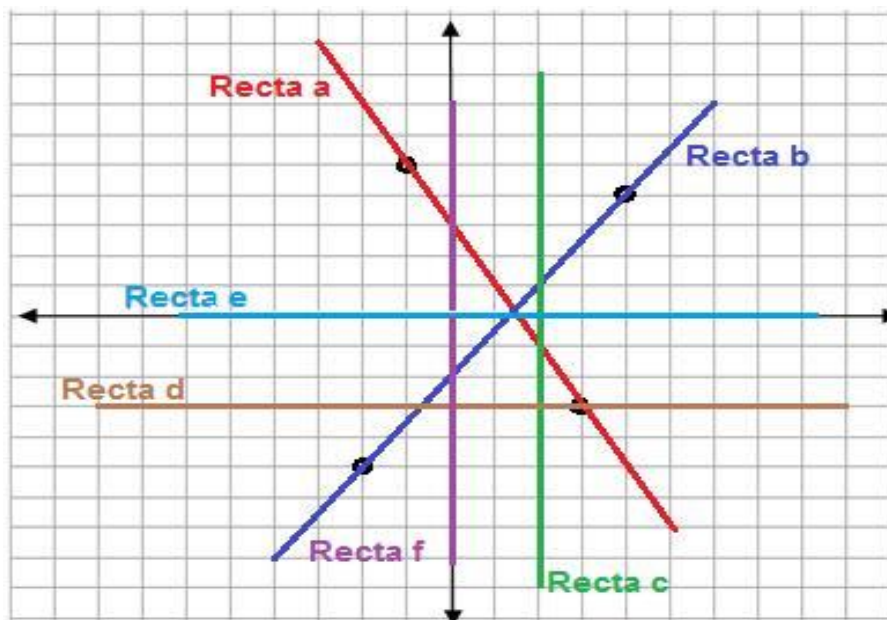
**Gráfica 31. Resumen Habilidad de los estudiantes en el cálculo de valores tablas de ecuaciones a, b, c, d, e y f.**



En esta parte del taller de pre-saberes, es necesario aclarar que aunque la tabla 19 y la gráfica 31, donde se resumen los resultados de las respuestas de los estudiantes, muestran mayor cantidad de respuestas insuficientes en las tablas de las ecuaciones a y b, la realidad es que hubo mayor dificultad en las tablas de las ecuaciones c, d, e y f, pues ningún estudiante comprendía la forma de completar estas tablas y solo pudieron completarlas en el momento que se les explicó que cualquier valor era correcto por no existir una variable por reemplazar, aclaración que fue necesario realizar para que las preguntas posteriores que dependían de estos datos, se pudieran completar, por eso en las tablas correspondientes a estas ecuaciones presentan un margen bastante bajo de desempeño insuficiente, donde solo la estudiante EM8 fue quien presentó este nivel, por haber dejado esta respuesta en blanco.

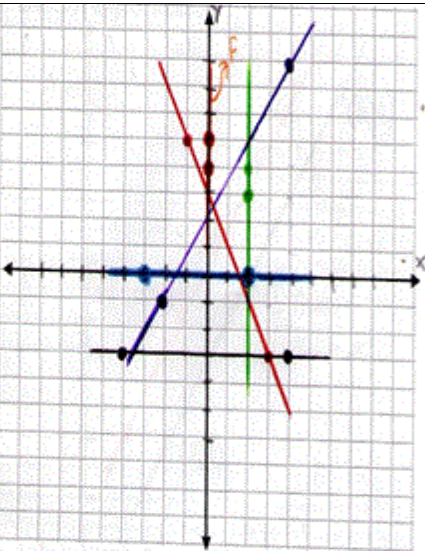
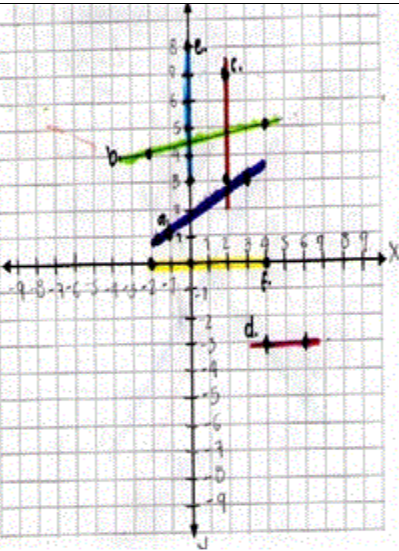
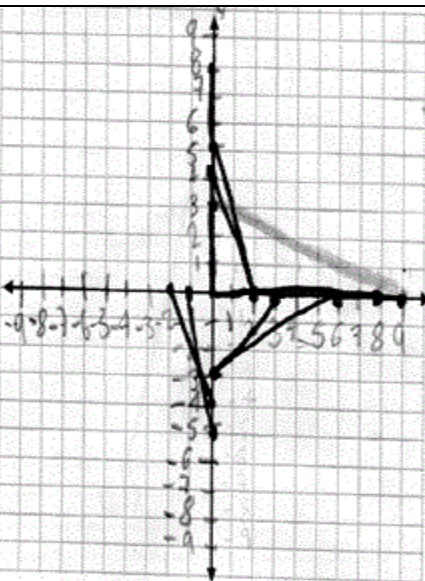
### Gráfica de rectas

Gráfica 32. Solución gráfica de las ecuaciones a, b, c, d, e y f.



A continuación aparecen las soluciones relacionadas con las gráficas de las rectas a, b, c, d, e y f, donde se presentan los siguientes niveles de respuestas: (A) avanzada, (S) satisfactoria, (I) insuficiente y (NG) no presenta gráfica, presentadas por los estudiantes en sus respectivos talleres:

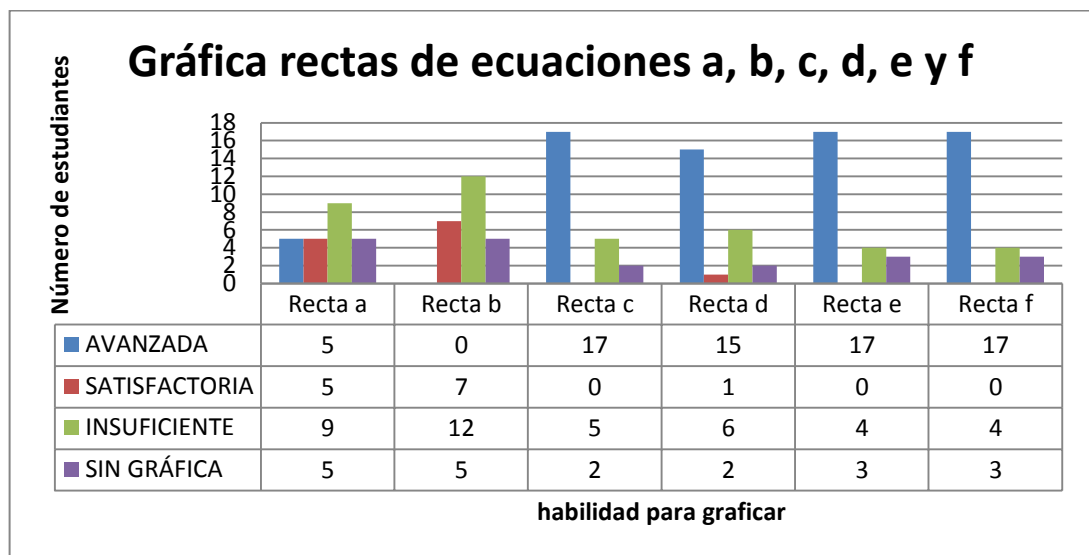
**Tabla 20. Ejemplos de gráficas de las ecuaciones a, b, c, d, e y f. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 3.**

RESPUESTA AVANZADA EH1	RESPUESTA SATISFATORIA EM2																																																																																																
<table border="1" style="width: 100%;"> <tr><td>a)</td><td>X</td><td>-1</td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>5</td><td>-3</td></tr> <tr><td>b)</td><td>X</td><td>-2</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>-1</td><td>8</td></tr> <tr><td>c)</td><td>X</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>d)</td><td>X</td><td>4</td><td>-4</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>-3</td><td>-3</td></tr> <tr><td>e)</td><td>X</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>2</td><td>-3</td></tr> <tr><td>f)</td><td>X</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> 	a)	X	-1	3		Y	5	-3	b)	X	-2	4		Y	-1	8	c)	X	2	2		Y	2	4	d)	X	4	-4		Y	-3	-3	e)	X	0	0		Y	2	-3	f)	X	4	5		Y	0	0	<table border="1" style="width: 100%;"> <tr><td>a)</td><td>X</td><td>-1</td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>b)</td><td>X</td><td>-2</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>-4</td><td>5</td></tr> <tr><td>c)</td><td>X</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>d)</td><td>X</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>-3</td><td>-3</td></tr> <tr><td>e)</td><td>X</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>3</td><td>6</td></tr> <tr><td>f)</td><td>X</td><td>-2</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> 	a)	X	-1	3		Y	1	3	b)	X	-2	4		Y	-4	5	c)	X	2	2		Y	3	7	d)	X	4	6		Y	-3	-3	e)	X	0	0		Y	3	6	f)	X	-2	4		Y	0	0
a)	X	-1	3																																																																																														
	Y	5	-3																																																																																														
b)	X	-2	4																																																																																														
	Y	-1	8																																																																																														
c)	X	2	2																																																																																														
	Y	2	4																																																																																														
d)	X	4	-4																																																																																														
	Y	-3	-3																																																																																														
e)	X	0	0																																																																																														
	Y	2	-3																																																																																														
f)	X	4	5																																																																																														
	Y	0	0																																																																																														
a)	X	-1	3																																																																																														
	Y	1	3																																																																																														
b)	X	-2	4																																																																																														
	Y	-4	5																																																																																														
c)	X	2	2																																																																																														
	Y	3	7																																																																																														
d)	X	4	6																																																																																														
	Y	-3	-3																																																																																														
e)	X	0	0																																																																																														
	Y	3	6																																																																																														
f)	X	-2	4																																																																																														
	Y	0	0																																																																																														
RESPUESTA INSUFICIENTE EH2	NO PRESENTA RESPUESTA EM4																																																																																																
<table border="1" style="width: 100%;"> <tr><td>a)</td><td>X</td><td>-1</td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>-5</td><td>9</td></tr> <tr><td>b)</td><td>X</td><td>-2</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>-4</td><td>8</td></tr> <tr><td>c)</td><td>X</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>d)</td><td>X</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>-3</td><td>-3</td></tr> <tr><td>e)</td><td>X</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>9</td><td>4</td></tr> <tr><td>f)</td><td>X</td><td>9</td><td>8</td></tr> <tr><td></td><td>Y</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> 	a)	X	-1	3		Y	-5	9	b)	X	-2	4		Y	-4	8	c)	X	2	2		Y	4	5	d)	X	6	3		Y	-3	-3	e)	X	0	0		Y	9	4	f)	X	9	8		Y	0	0	<p>NO PRESENTA RESPUESTA EM4</p>																																																
a)	X	-1	3																																																																																														
	Y	-5	9																																																																																														
b)	X	-2	4																																																																																														
	Y	-4	8																																																																																														
c)	X	2	2																																																																																														
	Y	4	5																																																																																														
d)	X	6	3																																																																																														
	Y	-3	-3																																																																																														
e)	X	0	0																																																																																														
	Y	9	4																																																																																														
f)	X	9	8																																																																																														
	Y	0	0																																																																																														

**Tabla 21. Habilidad de los estudiantes en gráficas de las ecuaciones a, b, c, d, e y f. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 3.**

RECTA	AVANZADA	SATISFACTORIA	INSUFICIENTE	SIN GRÁFICA
Recta a	5	5	9	5
Recta b	0	7	12	5
Recta c	17	0	5	2
Recta d	15	1	6	2
Recta e	17	0	4	3
Recta f	17	0	4	3

**Gráfica 33. Habilidad de los estudiantes al graficar rectas de ecuaciones a, b, c, d, e y f. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 3.**



Se consideró avanzadas las rectas graficadas por los estudiantes acordes al despeje realizado de la ecuación de cada recta; por otra parte la solución fue satisfactoria en los casos en los cuales los puntos en la tabla son correctos, pero al graficar un punto está correctamente ubicado y el otro no, e igualmente en los casos en los que a pesar de aparecer bien graficada la recta (por indicación del profesor de completar las tablas b, c, d, f; con cualquier valor) pero la ecuación no

fue despejada correctamente por el estudiante. La ecuación fue valorada insuficiente cuando no coincide ni la recta ni el despeje de la ecuación, además de algunos estudiantes que no realizaron algunas o ninguna gráfica.

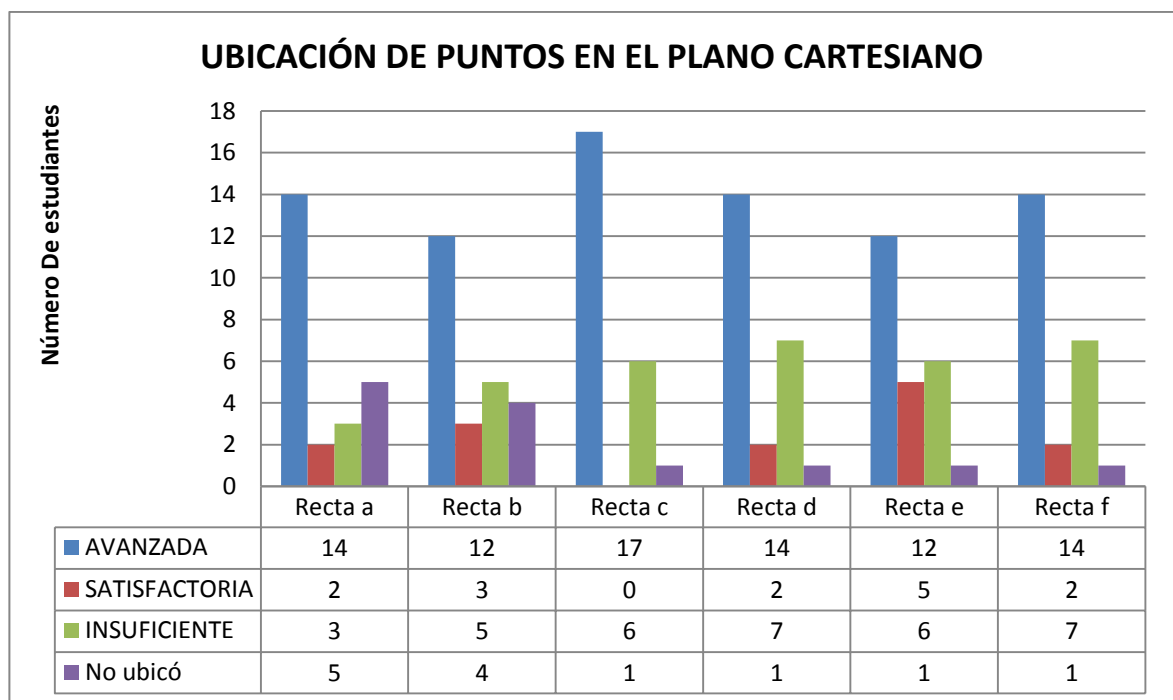
El 20% de los estudiantes logra identificar de forma Avanzada la recta a de la gráfica, otro 20% lo hace satisfactoriamente, aunque el 38% lo hace de forma insuficiente, el 20% final no muestra conocimiento por el tema. Con respecto a la recta b, ningún estudiante lo hace excelentemente, el 29% lo hace de forma satisfactoria, el 50% no logra entender la recta y el 20% restante no muestra conocimiento por el tema. En cuanto a la recta c, el 71% de los estudiantes lo hace excelentemente, el 20% muestra insuficiencia por el tema y el 8% no muestra interés por el tema, al no realizar la actividad. En la recta d, el 63% lo hace excelentemente, el 4% satisfactoriamente, el 25% lo hace mal y el 8% no muestra interés por el tema. En cuanto a la recta e al igual que la f, el 71% lo realiza excelentemente, el 17% lo hace mal y el 13% no tiene interés por el tema.

De acuerdo a lo anterior, se evidencia que los estudiantes aparentemente muestran mayor dominio para graficar las rectas c, d, e y f y mayor dificultad en las gráficas de las ecuaciones a y b, por tratarse de las gráficas a las cuales ya se había explicado a los estudiantes que podían completar sus tablas con cualquier valor por no tener variable a reemplazar, lo cual generó mejores resultados para presentar estas gráficas correctamente, por tal motivo se hace necesario hacer otro análisis del dominio que presentan los estudiantes para ubicar correctamente puntos en el plano cartesiano independientemente de que los valores correspondan correctamente a los solicitados, con el objetivo de identificar en qué tipo de rectas los estudiantes pueden identificar correctamente sus coordenadas en el momento de llevar un punto al plano cartesiano, información que se presenta en la tabla 22.

**Tabla 22. Habilidad de los estudiantes para ubicar puntos en el plano cartesiano de las ecuaciones a, b, c, d, e y f.**

<i>Ubicación Puntos</i>	<i>AVANZADA</i>	<i>SATISFACTORIA</i>	<i>INSUFICIENTE</i>	<i>No ubicó</i>
Recta a	14	2	3	5
Recta b	12	3	5	4
Recta c	17	0	6	1
Recta d	14	2	7	1
Recta e	12	5	6	1
Recta f	14	2	7	1

**Gráfica 34. Habilidad de los estudiantes para ubicar puntos en el plano cartesiano de las ecuaciones a, b, c, d, e y f.**



En esta parte del análisis se puede observar que el desempeño de los estudiantes es muy similar al ubicar los puntos de todas las rectas en el plano cartesiano, pues aproximadamente entre un 50% y un 70% de las respuestas el desempeño ha sido avanzado y de un 30% a 38% insuficiente, es decir que la mayor dificultad de

los estudiantes no consiste en llevar los puntos al plano cartesiano, sino calcular correctamente las cantidades que corresponden a la variable despejada de la ecuación.

**Ejercicio 4: Clasificación de rectas.** A continuación se presenta una actividad donde los estudiantes debían clasificar las seis rectas anteriormente graficadas, teniendo presente las características que observan en cada una de ellas, a través del siguiente planteamiento:

*Frente a los nombres de las siguientes rectas, ubica la letra de la recta que has obtenido.*

*RECTA COLINEAL CON EL EJE X..... ( )*

*RECTA CON PENDIENTE CRECIENTE..... ( )*

*RECTA PARALELA AL EJE DE LAS Y..... ( )*

*RECTA COLINEAL CON EL EJE Y..... ( )*

*RECTA CON PENDIENTE DECRECIENTE..... ( )*

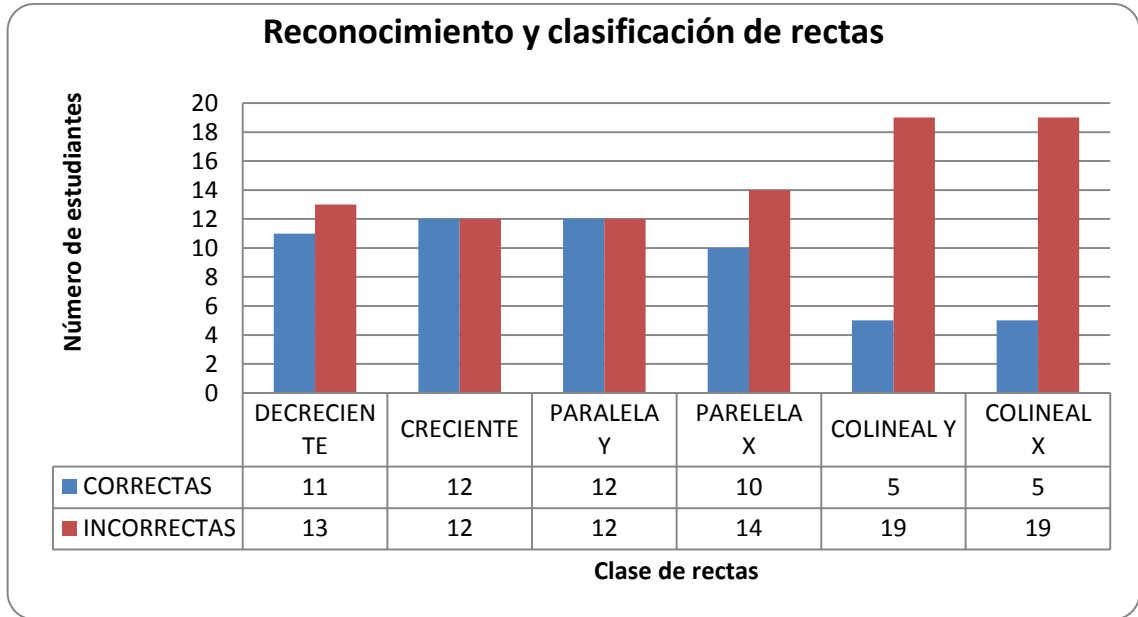
*RECTA PARALELA AL EJE DE LAS X..... ( )*

Y los resultados obtenidos fueron los siguientes:

**Tabla 23. Resumen: Reconocimiento y clasificación de las rectas a, b, c, d, e y f. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 4.**

RECTA	DECRECIENTE	CRECIENTE	PARALELA Y	PARALELA X	COLINEAL Y	COLINEAL X
CORRECTAS	11	12	12	10	5	5
INCORRECTAS	13	12	12	14	19	19

**Gráfica 35. Reconocimiento y clasificación de las rectas a, b, c, d, e y f. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 4.**



La anterior información muestra un mayor dominio en el reconocimiento de las rectas creciente, decreciente y las paralelas a los ejes coordenados, con aproximadamente la mitad de la población de estudiantes evaluados con respuestas correctas; entretanto hay mayor dificultad en el reconocimiento de las rectas colineales a los ejes coordenados con un margen de error del 80%. En promedio, tan solo el 38% de los estudiantes acierta correctamente en el reconocimiento y clasificación de las rectas, mientras que el 62% restante lo hace incorrectamente.

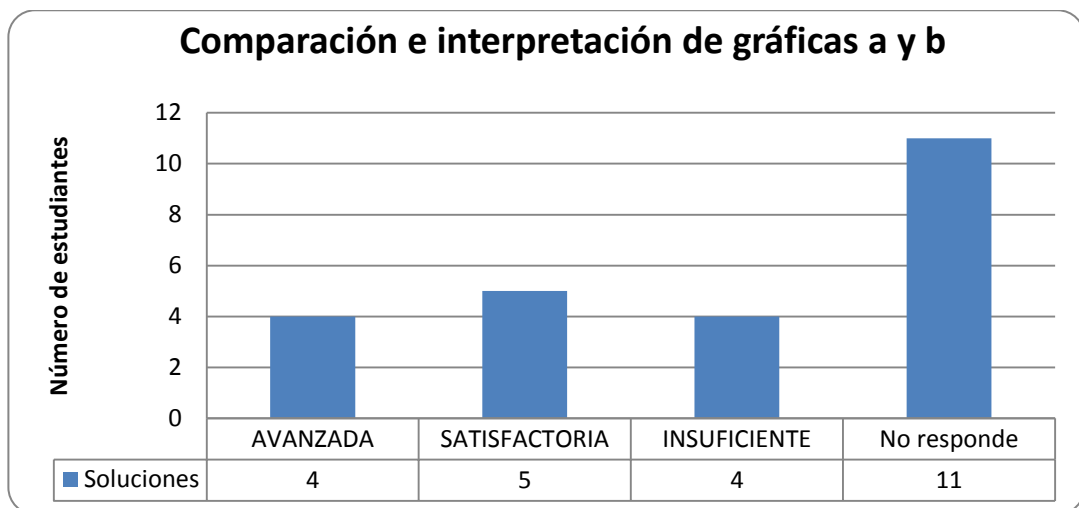
**Ejercicio 5. Comparación e interpretación de gráficas.** Finalmente en esta segunda situación, los estudiantes debían interpretar y argumentar la diferencia que observan entre las gráficas a y b y los resultados obtenidos fueron:

**Tabla 24. Resumen respuestas en comparación e interpretación de gráficas a y b. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 5.**

<i>OPCIONES</i>	<i>AVANZADA</i>	<i>SATISFACTORIA</i>	<i>INSUFICIENTE</i>	<i>No responde</i>
<i>Soluciones</i>	4	5	4	11
Nota: Respuesta <b>Avanzada</b> : Diferencia una recta creciente de una decreciente <b>Satisfactoria</b> : Solo reconoce una de las rectas. <b>Insuficiente</b> : No las reconoce.				

Los valores de la tabla 24 aparecen representados en la siguiente gráfica:

**Gráfica 36. Habilidad para comparar e interpretar gráficas a y b. Taller de presaberes situación 2, ejercicio 5.**



Se evidencia dificultad en los estudiantes para argumentar lo que piensan e interpretan de lo que observan, pues 11 de 24 estudiantes, no dan ningún tipo de argumento a la pregunta sobre la diferencia que encuentran entre las rectas a y b, y otros 4 estudiantes dan respuestas incorrectas, para un total del 62,5 % de error, en este tipo de competencia.

**4.1.3 Situación tres. Modelación de una situación lineal real. (interpretativa-procedimental).** Esta parte del taller está conformado por cinco ejercicios, se busca representar mediante la función lineal, una situación real acerca del desempeño de un deportista, acorde al entrenamiento que realiza para mejorar su rendimiento, y cuyo planteamiento es el siguiente:

**Ejercicio 1. Reconocimiento de variables (y su clasificación).** Tres deportistas son entrenados para competir en las próximas olimpiadas en Brasil en atletismo de velocidad. Andrés (atleta 1) en el mes 2 de entrenamiento desarrollaba una velocidad de 2 m/s y cada mes va incrementando su velocidad constantemente hasta alcanzar al mes 6 una velocidad de 8 m/s.

Indica el nombre de las dos variables que forman parte de este ejercicio.

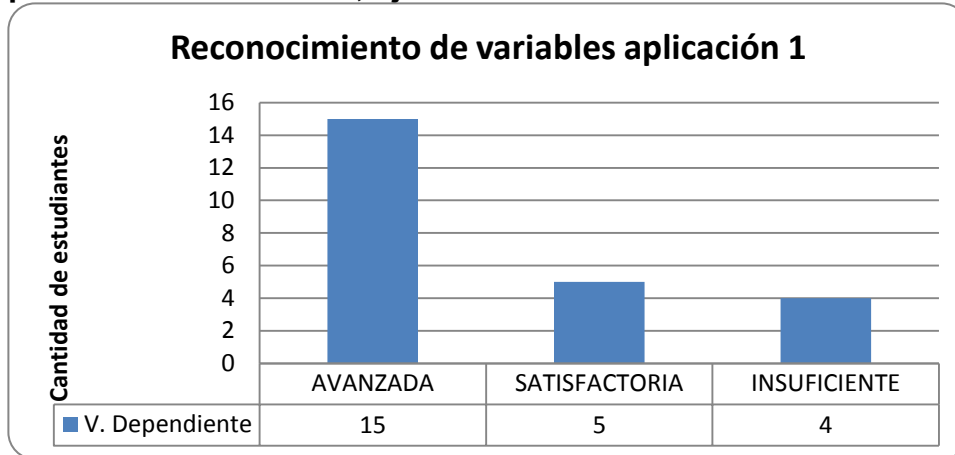
\_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

**Tabla 25. Resumen de respuestas, reconocimiento de variables, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 1.**

<i>OPCIONES</i>	<i>AVANZADA</i>	<i>SATISFACTORIA</i>	<i>INSUFICIENTE</i>
<i>Soluciones</i>	15	5	4

Los estudiantes debían indicar sobre las líneas, las variables velocidad y tiempo. Si el estudiante reconocía el nombre de las dos variables, su respuesta es avanzada, si solo reconoce una de las dos variables satisfactoria y en caso de no reconocer el nombre de las variables su respuesta es insuficiente.

**Gráfica 37. Habilidad en reconocimiento de variables, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 1.**



En la gráfica anterior evidenciamos, que el 63% de los estudiantes reconocen excelentemente la variable de la aplicación 1, el 21% lo hace satisfactoriamente y el 16% restante no lo hace correctamente. A continuación se evalúa la habilidad del estudiante para identificar cuál de las dos variables anteriormente señaladas corresponde a la variable dependiente y cual a la independiente, planteamiento que fue propuesto a través de la siguiente tabla:

**Ejercicio 2. Reconocimiento de puntos de la recta.** Mediante la siguiente tabla se busca que los estudiantes clasifiquen las variables identificadas en la aplicación planteada del rendimiento de un deportista, como dependiente e independiente e igualmente identificar los puntos que dentro del problema describe el planteamiento, completando la siguiente tabla.

Llena la siguiente tabla

**Tabla 26. Clasificación de variables y reconocimiento de puntos, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 2.**

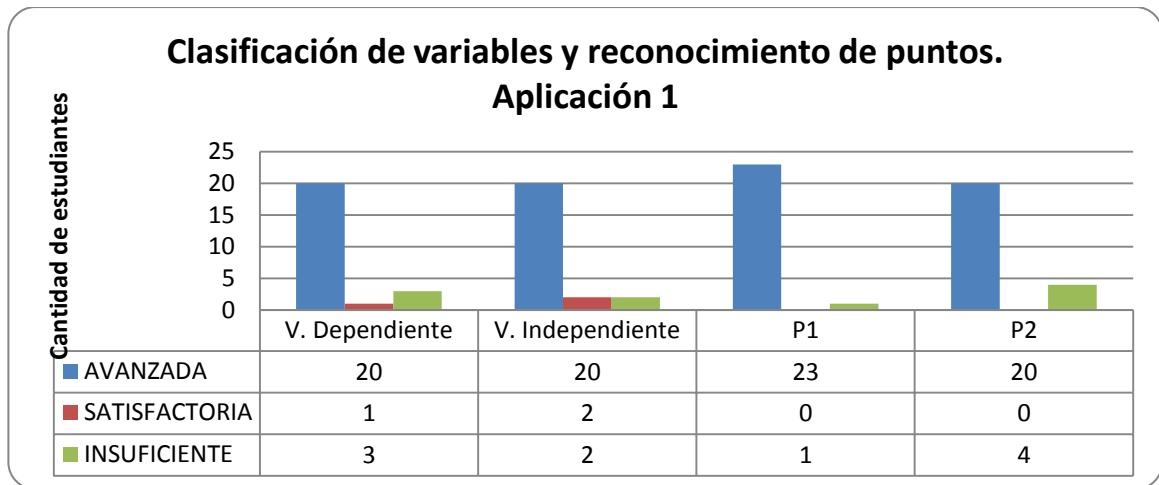
VARIABLE DEPENDIENTE	
VARIABLE INDEPENDIENTE	
PUNTO P1	P1( , )
PUNTO P2	P2( , )

En esta parte del taller, los estudiantes debían indicar la velocidad como variable dependiente, el tiempo como variable independiente, el punto  $P_1$  (2,2) y el punto  $P_2$  (6,8). La respuesta era Avanzada si el estudiante clasificaba bien las dos variables y reconocía correctamente el par de puntos, Satisfactoria si solo reconocía las variables o los puntos, e Insuficiente en caso de clasificar mal las variables y confundir o cambiar las coordenadas en los puntos.

**Tabla 27. Resumen. Respuestas: Clasificación de variables y reconocimiento de puntos, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 2.**

OPCIONES	AVANZADA	SATISFACTORIA	INSUFICIENTE
V. Dependiente	20	1	3
V. Independiente	20	2	2
P1	23	0	1
P2	20	0	4

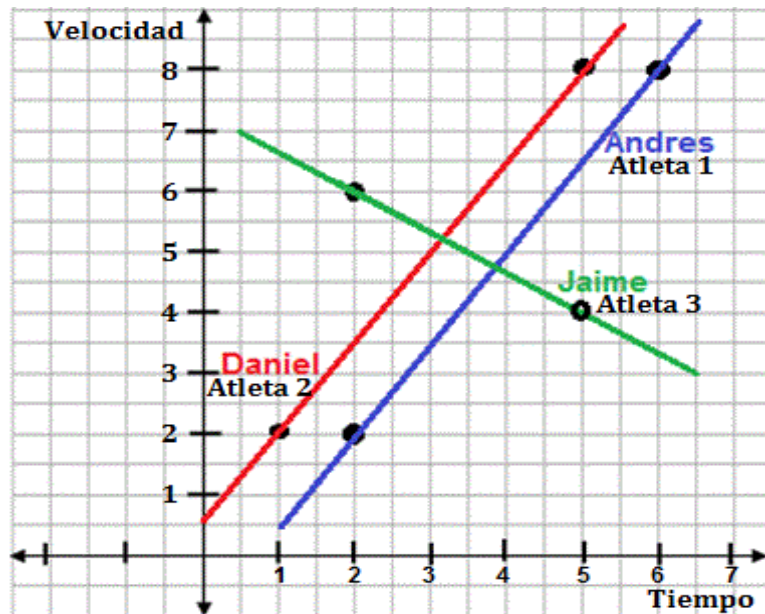
**Gráfica 38. Clasificación de variables y reconocimiento de puntos, aplicación 1. Taller de pre-saberes situación 3, ejercicio 2.**



El 83% de los estudiantes presenta un nivel Avanzado en reconocer las variables dependiente e independiente, en un nivel Satisfactorio el 4% reconoce la variable dependiente y el 8% variable independiente, entretanto el 13% no reconoce la variable dependiente y el 8% la variable independiente.

**Ejercicio 3. Grafica (recta, paralela y perpendicular).** A continuación aparecen las soluciones relacionadas con las gráficas de la recta de la aplicación 1, e igualmente la correspondiente a la recta paralela de la aplicación 2 relacionada con la situación 4 y de la recta perpendicular de la aplicación 3 relacionada con la situación 5, pues estas tres aplicaciones de las situaciones 3, 4 y 5 son presentadas en un solo plano cartesiano, para que se pueda observar claramente las características propias de cada una de las rectas planteadas y que son presentadas por los estudiantes en sus respectivos talleres:

**Gráfica 39. Solución gráficas de los estudiantes: aplicación 1, paralela y perpendicular. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 3.**

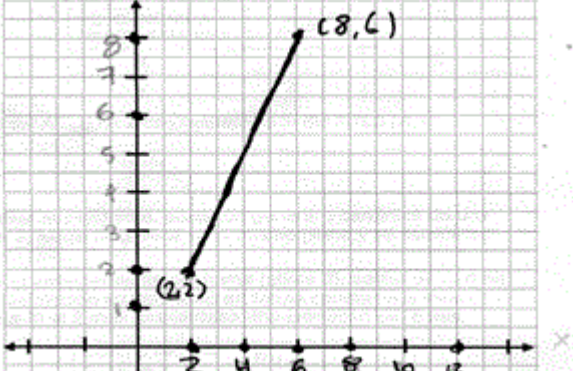


Las siguientes son las soluciones presentadas por los estudiantes, donde se presentan los siguientes niveles de respuestas: (A) avanzada, (S) satisfactoria, (I) insuficiente y (NG) no presenta gráfica:

**Tabla 28. Ejemplo gráficas Función de la recta, Recta paralela y Perpendicular**

GRAFICA AVANZADA EH5	GRAFICA SATISFATORIA EH1
<p>Gráfica Avanzada EH5 muestra un sistema de ejes con 'm/s' en el eje vertical (rango 0-8) y 'mes' en el eje horizontal (rango -2 a 7). Se representan tres líneas rectas: una roja y una azul que son paralelas entre sí, y una verde que es perpendicular a ellas.</p>	<p>Gráfica Satisfactoria EH1 muestra un sistema de ejes con 'm/s' en el eje vertical (rango 0-8) y 'mes' en el eje horizontal (rango -2 a 7). Se representan dos líneas rectas paralelas, una roja y una azul. Se indican los puntos <math>(2, 2)</math> y <math>(6, 8)</math> en la línea azul, y se hace una referencia a 'Atleta 1'.</p>

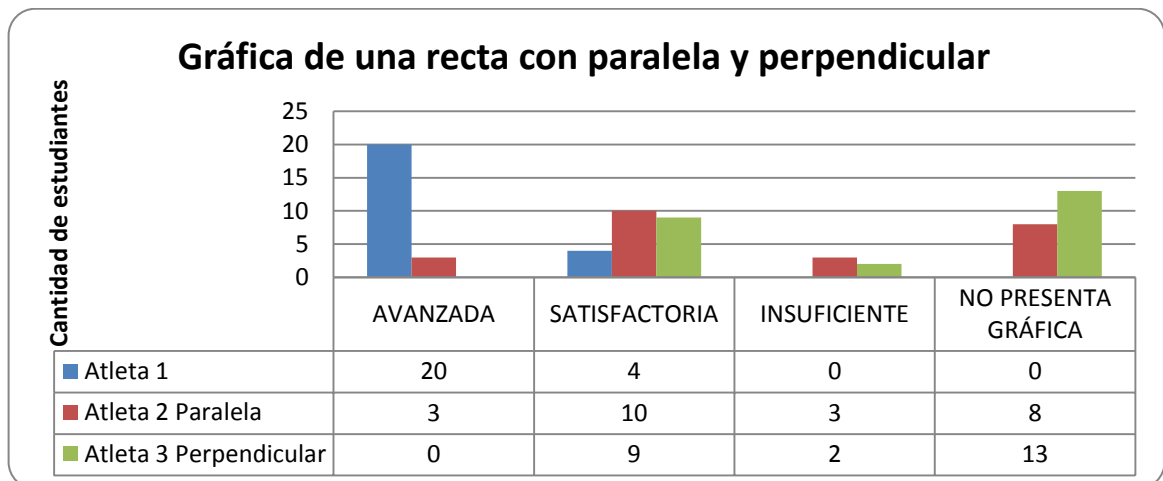
Continuación tabla 28

GRAFICA INSUFICIENTE EH2	NO PRESENTA GRÁFICA
	<p>En Esta parte del taller, todos los estudiantes presentaron al menos una de las tres rectas.</p>

**Tabla 29. Gráficas de estudiantes de la función lineal, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 3.**

RECTAS	AVANZADA	SATISFACTORIA	INSUFICIENTE	NO PRESENTA GRÁFICA
Atleta 1	20	4	0	0
Atleta 2 Paralela	3	10	3	8
Atleta 3 Perpendicular	0	9	2	13

**Gráfica 40. Resumen Gráficas de estudiantes de la función lineal, recta paralela y recta perpendicular a la aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 3.**



Los resultados muestran mayor dominio de los estudiantes al graficar una recta cuyo comportamiento no depende de la representación gráfica de otros fenómenos. Por otra parte, la mayor dificultad está presente cuando deben representar un fenómeno que muestra un comportamiento inversamente proporcional a otra situación, entretanto presentan un conocimiento satisfactorio al representar mediante una gráfica, una situación cuyo comportamiento es similar o paralelo a otro.

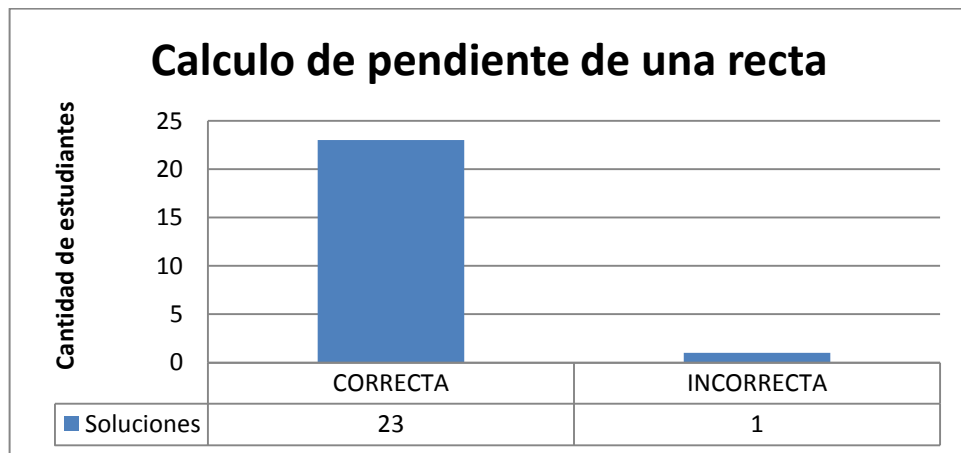
**Ejercicio 4. Calculo de pendiente.** En esta parte del taller se pide a los estudiantes la siguiente información:

Con la siguiente ecuación halla la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Elije la pendiente correcta:  $\rightarrow m_1 =$  a)  $\frac{2}{3}$  b)  $-\frac{3}{2}$  c)  $\frac{3}{2}$  d)  $-\frac{2}{3}$

**Gráfica 41. Resultados sobre reconocimiento de pendiente, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 4.**



La gráfica 41 muestra que 23 de los 24 estudiantes han hallado correctamente el valor de la pendiente de la recta que representa el comportamiento del atleta 1, al seleccionar la opción C, correspondiente a  $3/2$ , mostrando dominio en la aplicación de la ecuación de la pendiente, a partir de dos momentos o puntos presentes en el entrenamiento de este deportista.

**Ejercicio 5. Ecuación general y ordinaria de la recta.** Con la siguiente ecuación (ecuación punto pendiente) halle la ecuación general y la ecuación ordinaria:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ECUACIÓN GENERAL	
ECUACIÓN ORDINARIA	

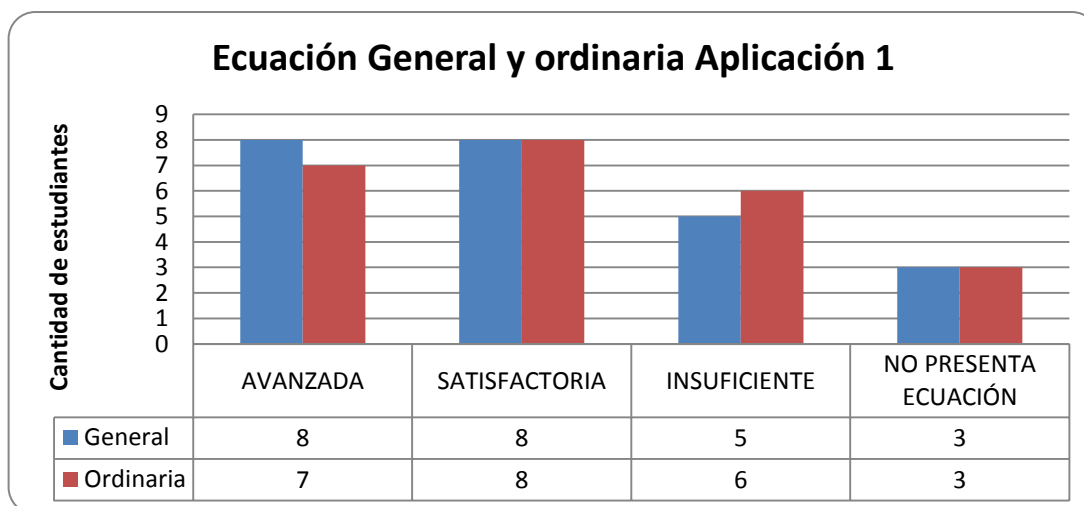
Se considera que la respuesta es Avanzada cuando la ecuación fue correctamente calculada, Satisfactoria, si el estudiante presenta error de signos, e Insuficiente cuando Comete varios errores en una sola ecuación como por ejemplo cambio de signos o coeficientes de las variables incorrectos.

En esta parte del taller, se ha considerado satisfactoria una respuesta cuyo signo sea incorrecto, porque se ha observado en el desarrollo del taller, que el estudiante pudo realizar en forma correcta varios procesos en la solución del ejercicio (como ser despeje de variables en el orden correcto, manejo de operaciones entre fracciones, simplificación correcta de fracciones, entre otras), pero aun comete errores en los signos al cambiar cantidades de un lado al otro de la igualdad.

**Tabla 30. Resumen: Tipo de soluciones a ecuación general y ordinaria, aplicación 1. Taller de presaberes situación 3, ejercicio 5.**

ECUACIÓN	AVANZADA	SATISFACTORIA	INSUFICIENTE	NO PRESENTA ECUACIÓN
General	8	8	5	3
Ordinaria	7	8	6	3

**Gráfica 42. Resultados: Tipo de soluciones a ecuación general y ordinaria, aplicación 1. Taller de pre-saberes situación 3, ejercicio 5.**



La gráfica 42 muestra que el 33% de los estudiante reconocen avanzadamente y satisfactoriamente la ecuación general de la recta, el 21% lo realiza insuficientemente, entretanto el 13% no muestra interés por la actividad, por otra parte, en referencia a la ecuación ordinaria, el 29% lo realiza Avanzadamente, el 33% satisfactoriamente, el 25% lo hace en forma insuficiente y el 13% no muestra interés por la actividad.

Lo anterior permite deducir que los estudiantes presentan un desempeño relativamente bueno en la aplicación de la ecuación punto pendiente al conocer un punto y la pendiente de la situación planteada del atleta 1, pues las dos terceras partes de los estudiantes, realizaron los procedimientos requeridos en el despeje de las variables y en el manejo de los signos en esta parte del proceso, y solo la tercera parte de los estudiantes han tenido dificultades al hallar estas ecuaciones o han mostrado apatía frente a esta actividad, pues no han hecho el intento de aplicar el procedimiento en el cálculo de las ecuaciones, aun así teniendo el riesgo de cometer errores.

**4.1.4 Situación cuatro. Modelación recta paralela. (procedimental-argumentativa).** Esta parte del taller está conformado por cuatro ejercicios, se busca representar mediante la función lineal, la situación de un deportista cuyo entrenamiento le suministra una mejoría en su rendimiento deportivo con un comportamiento de evolución similar o paralelo al de otro deportista (Atleta 1), y cuyo planteamiento es el siguiente:

**Ejercicio 1: Reconocimiento punto y pendiente de la recta paralela.** Teniendo en cuenta la información del ejercicio anterior, hallar una recta que represente el entrenamiento que Daniel realiza (atleta 2), quien al mes 1 presentaba una velocidad de 2 m/s manteniendo la misma constante de incremento de velocidad que Andrés (atleta 1).

PENDIENTE RECTA ATLETA 1	$m_1 =$		PUNTO RECTA ATLETA 2	$P_1( \quad , \quad )$
--------------------------	---------	--	----------------------	------------------------

1. Con la siguiente ecuación hallar la pendiente del ATLETA 2 y selecciona la respuesta correcta:

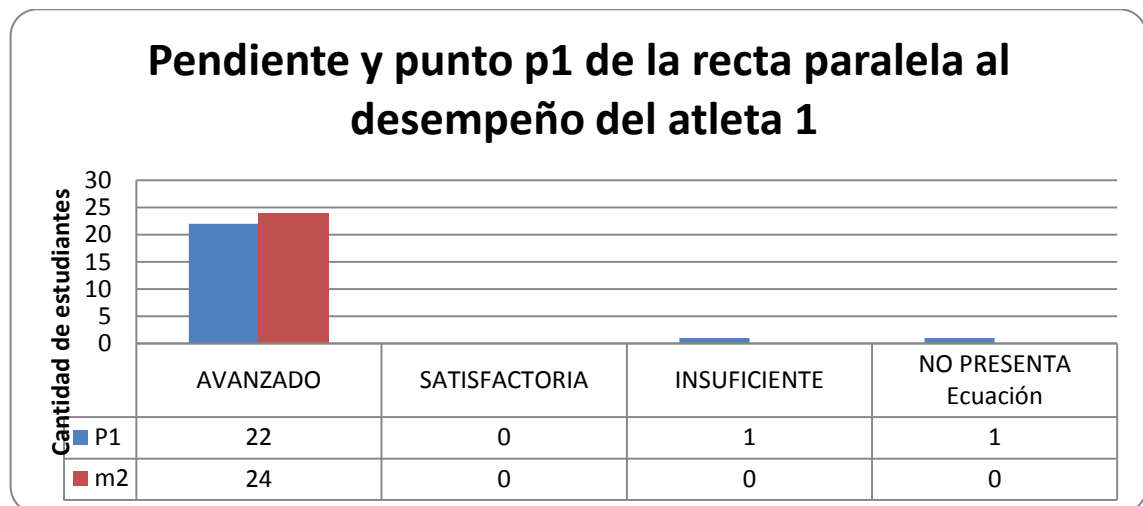
$$m_2 = m_1 \longrightarrow m_2 = a) \frac{2}{3} \quad b) \frac{-3}{2} \quad c) \frac{3}{2} \quad d) \frac{-2}{3}$$

La respuesta se considera Avanzada, para  $m_1$ , si el estudiante reconoce apropiadamente la pendiente de acuerdo al ejercicio del atleta 1; para  $P_1$ , si identifica las coordenadas de las variables dependiente e independiente del problema del atleta 2 y para  $m_2$ , si selecciona la opción C; de las respuestas propuestas en el taller, una vez aplicada la ecuación de rectas paralelas con la información correspondiente al atleta 2. Satisfactoria si comete algún error de signo en sus respuestas e insuficiente, si cambia los valores de las cantidades.

**Tabla 31. Resumen: reconocimiento de punto y pendiente, recta paralela. Taller de presaberes situación 4, ejercicio 1.**

ECUACIÓN	AVANZADO	SATISFACTORIA	INSUFICIENTE	NO PRESENTA Ecuación
m1	23	0	1	0
P1	22	0	1	1
m2	24	0	0	0

**Gráfica 43. Resultados: reconocimiento de punto y pendiente, recta paralela. Taller de presaberes situación 4, ejercicio 1.**



La gráfica 43 muestra que todos los 24 estudiantes han hallado correctamente el valor de la pendiente de la recta paralela a la situación 1, pues tienen facilidad

para identificar la igualdad que se presenta entre las pendientes de ambas rectas, y 22 de los 24 estudiantes han identificado correctamente las coordenadas del punto p1, necesario para la aplicación de la ecuación punto pendiente.

**Ejercicio 2. Ecuación general, ordinaria y tabla de valores recta paralela.** Con la siguiente ecuación halle ecuación general y ordinaria (ATLETA 2) y grafique

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

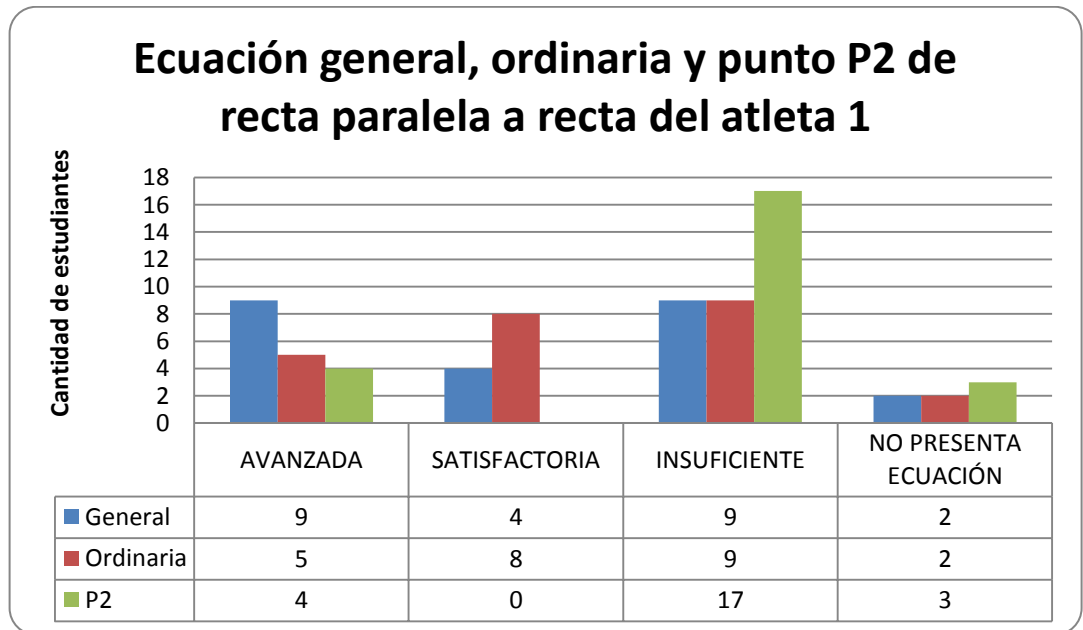
EC. GENERAL RECTA ATLETA 2		
EC. ORDINARIA RECTA ATLETA 2		
x	1	5
y	2	

Se considera la respuesta Avanzada si la ecuación fue correctamente calculada, Satisfactoria, si el estudiante presenta error de signos, e Insuficiente cuando Comete varios errores en una sola ecuación como por ejemplo cambio de signos o coeficientes de las variables incorrectos; y se considera Avanzada la respuesta para el punto P<sub>2</sub> si presenta correcto el signo y la cantidad en la respuesta correspondiente a la incógnita Y, una vez remplace el valor de X en la ecuación ordinaria, Satisfactoria, si el estudiante presenta error de signos en la cantidad e Insuficiente cuando cambia el valor en la respuesta correspondiente al punto P<sub>2</sub>.

**Tabla 32. Resumen: respuestas ecuación general, ordinaria y punto P<sub>2</sub>, recta paralela. Taller de pre-saberes situación 4, ejercicio 2.**

ECUACIÓN	AVANZADA	SATISFACTORIA	INSUFICIENTE	NO PRESENTA ECUACIÓN
General	9	4	9	2
Ordinaria	5	8	9	2
P <sub>2</sub>	4	0	17	3

**Gráfica 44. Resultados, respuestas ecuación general, ordinaria y punto P<sub>2</sub>, recta paralela. Taller de presaberes situación 4, ejercicio 2.**



La gráfica 44 muestra que aproximadamente la mitad de los estudiantes presentan un buen desempeño y la otra mitad muestran dificultades en la aplicación de la ecuación punto pendiente correspondiente a la situación planteada del atleta 2, mostrando que los estudiantes a pesar de tratarse de un procedimiento similar al realizado al hallar las mismas ecuaciones del atleta 1, se genera en ellos un mayor grado de dificultad, cuando se trata de una situación que está conectada o relacionada al desempeño de otro fenómeno ya solucionado. Por otra parte se observa gran dificultad para identificar el punto P<sub>2</sub> de la recta generada por el entrenamiento del atleta 2, pues solo 4 estudiantes han hallado correctamente este punto y 20 estudiantes no han realizado adecuadamente este procedimiento.

**Ejercicio 3. Gráfica recta paralela.** Buscar información de las respuestas dadas por los estudiantes en el punto 3.3, Tabla 28, páginas 122-123.

**Ejercicio 4. Comparación e interpretación de gráficas.** ¿Qué característica presenta la recta del ATLETA 2 con respecto a la del ATLETA 1?

---



---

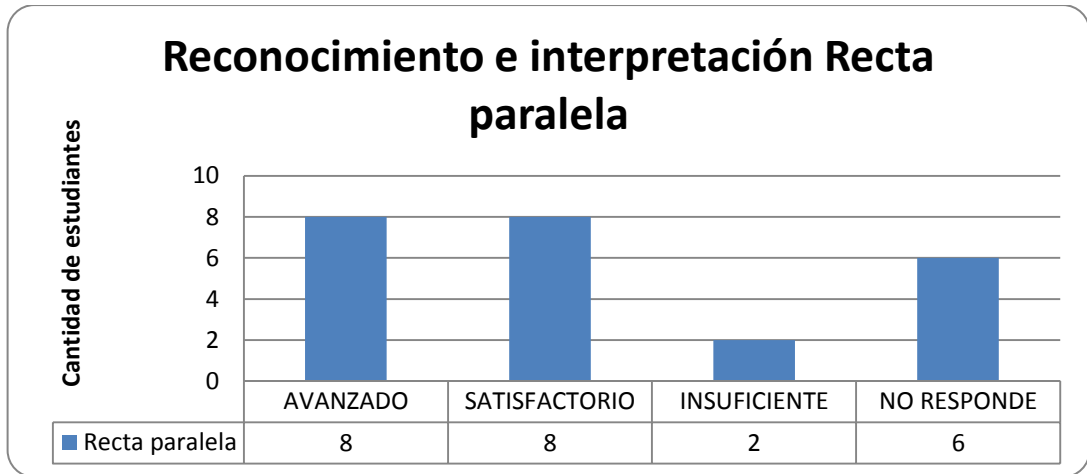
La respuesta se clasifica como Avanzada, si el estudiante logra identificar que con la información del atleta 1 y el atleta 2 se generan dos rectas paralelas, Satisfactoria cuando el estudiante no tiene claro el concepto de rectas paralelas, pero logra describir con sus palabras, que las dos rectas tienen comportamientos similares o que ambas son crecientes e insuficiente si la respuesta describe información que no esté relacionada con el concepto de rectas paralelas.

**Tabla 33. Resumen: respuestas, comparación rectas Atleta 1 y 2. Taller de pre-saberes situación 4, ejercicio 3.**

NIVEL	AVANZADO	SATISFACTORIO	INSUFICIENTE	NO RESPONDE
Recta paralela	8	8	2	6

Con respecto a esta pregunta, el 33% argumentan en forma Avanzada su respuesta, igualmente otro 33% responden satisfactoriamente, el 8% su respuesta es insuficiente, entretanto el 25% de los participantes no muestran interés por el tema, al no intentar dar alguna solución al ejercicio.

**Gráfica 45. Resultados, comparación rectas Atleta 1 y 2. Taller de pre-saberes situación 4, ejercicio 3.**



En la gráfica 45 se puede identificar que 8 de los 24 estudiantes tienen dificultades para realizar una interpretación de la relación que existe entre las rectas generadas por el desempeño del atleta 1 y el atleta 2, con 6 de ellos que no dieron respuesta alguna, y 16 han logrado entender que la similitud en el progreso del entrenamiento de ambos deportistas, genera en el plano cartesiano, dos rectas que al graficarlas son paralelas. Entre los cuales 8 dan respuestas muy claras de esta situación.

**4.1.5 Situación cinco. Modelación recta perpendicular. (procedimental-argumentativa).** Esta parte del taller está conformado por cuatro Ejercicios, se busca representar mediante la función lineal, la situación de un deportista cuyo deterioro en su estado de salud hace que su entrenamiento se vea afectado disminuyendo su rendimiento deportivo con un comportamiento inverso o contrario al de otro deportista (Atleta 1), lo cual genera una recta perpendicular a la primera y cuyo planteamiento es el siguiente:

**Ejercicio 1. Reconocimiento punto y pendiente de la recta perpendicular.** Se requiere hallar, una recta que represente el entrenamiento de Jaime (atleta 3),

sabiendo que ha padecido una afección pulmonar, lo cual ha disminuido su velocidad en forma constante e inversa a la velocidad de Andrés (atleta 1). Jaime (atleta 3) al mes 2 presentaba una velocidad de 6 m/s.

PENDIENTE RECTA ATLETA 1	$m_1=$		PUNTO RECTA ATLETA 3	$P_1( \quad , \quad )$
--------------------------	--------	--	----------------------	------------------------

Con la siguiente ecuación hallar la pendiente del ATLETA 3 y selecciona la respuesta correcta:

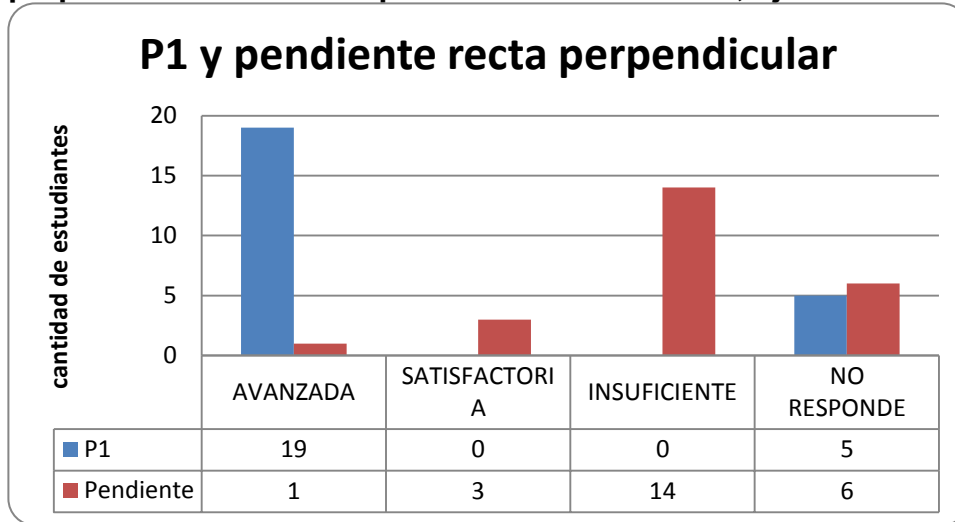
$$m_3 = \frac{-1}{m_1} \longrightarrow m_3 = a) \frac{2}{3} \quad b) \frac{-3}{2} \quad c) \frac{3}{2} \quad d) \frac{-2}{3}$$

La respuesta se considera Avanzada, para  $P_1$ , si el estudiante identifica las coordenadas de las variables dependiente e independiente del problema del atleta 3 y para  $m_2$ , si selecciona la opción “d”; entre las respuestas propuestas en el taller, una vez aplicada la ecuación de rectas perpendiculares con la información correspondiente al atleta 3. Satisfactoria si comete algún error de signo en sus respuestas e insuficiente, si cambia los valores de las cantidades.

**Tabla 34. Resumen: respuestas reconocimiento de punto y pendiente, perpendicular. Taller de pre-saberes situación 5, ejercicio 1.**

RESPUESTA	AVANZADA	SATISFACTORIA	INSUFICIENTE	NO RESPONDE
$P_1$	19	0	0	5
Pendiente	1	3	14	6

**Gráfica 46. Resultados en reconocimiento de punto y pendiente, recta perpendicular. Taller de pre-saberes situación 5, ejercicio 1.**



La gráfica 46 muestra que 20 de los 24 estudiantes han presentado dificultades para hallar el valor de la pendiente de la recta perpendicular a la situación 1, pues tienen presentan errores para aplicar correctamente la ecuación  $m_1 * m_2 = -1$ , y 19 de los 24 estudiantes han identificado correctamente las coordenadas del punto p1 necesario para la aplicación de la ecuación punto pendiente, relacionada con el atleta 3.

**Ejercicio 2. Ecuación general, ordinaria y tabla de valores recta perpendicular.** Con la siguiente ecuación halle ecuación general y canónica (ATLETA 3) y grafique.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

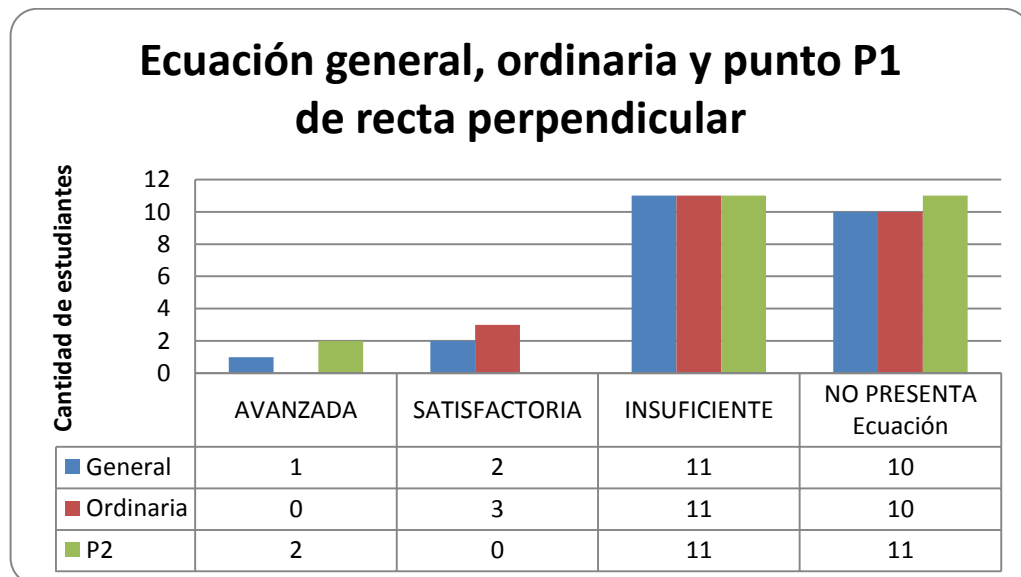
EC. GENERAL RECTA ATLETA 3		
EC. CANÓNICA RECTA ATLETA 3		
x	6	10
y		

En la tabla 35 la respuesta es Avanzada si la ecuación fue correctamente calculada, Satisfactoria, si el estudiante presenta error de signos, e Insuficiente cuando Comete varios errores en una sola ecuación; y se considera Avanzada la respuesta para el punto  $P_2$  si presenta correcto el signo y la cantidad en la respuesta correspondiente a la incógnita Y, Satisfactoria, si el estudiante presenta error de signos en la cantidad e Insuficiente cuando cambia el valor en la respuesta correspondiente al punto  $P_2$ .

**Tabla 35. Resumen: respuestas, ecuación general, ordinaria y punto  $P_2$ , recta perpendicular. Taller de presaberes situación 5, ejercicio 2.**

ECUACIÓN	AVANZADA	SATISFACTORIA	INSUFICIENTE	NO PRESENTA Ecuación
General	1	2	11	10
Ordinaria	0	3	11	10
$P_2$	2	0	11	11

**Gráfica 47. Resultados respuestas, ecuación general, ordinaria y punto  $P_2$ , recta perpendicular. Taller de presaberes situación 5, ejercicio 2.**



La gráfica 47 muestra que solo 3 de los 24 estudiantes presentan un buen desempeño y 21 estudiantes muestran dificultades en la aplicación de la ecuación punto pendiente correspondiente a la situación planteada del atleta 3 y de los procedimientos necesarios en sus despejes para encontrar la ecuación general y la ordinaria basados en el comportamiento de otro atleta, principalmente cuando se trata de una situación cuyo desempeño es inverso o contrario al realizado en este caso por el primer atleta. Igualmente se observa gran dificultad para identificar el punto P2 de la recta generada por el entrenamiento del atleta 3, pues solo 2 estudiantes han hallado correctamente este punto y 22 estudiantes no han realizado adecuadamente este procedimiento.

**Ejercicio 3. Gráfica recta perpendicular.** Buscar información de las respuestas de los estudiantes en el punto 3.3, Tabla 28, página 123.

**Ejercicio 4. Comparación e interpretación de gráficas.** ¿Qué característica presenta la recta del ATLETA 3 con respecto a la del ATLETA 1?

---



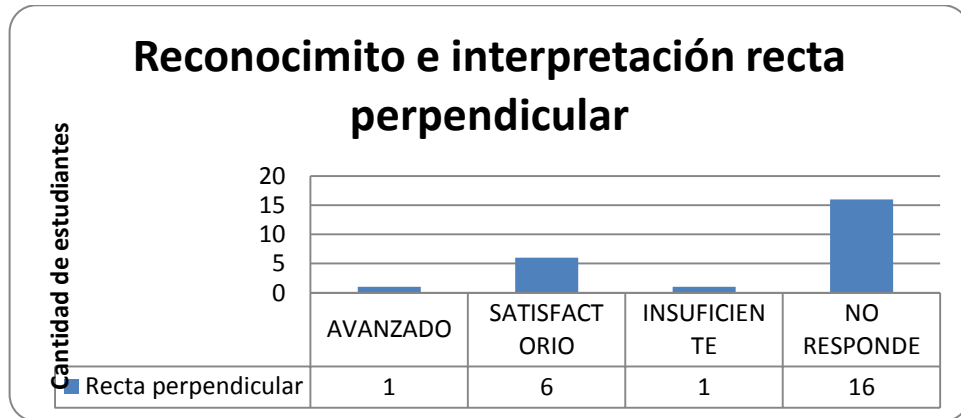
---

La respuesta se clasifica como Avanzada, si el estudiante logra identificar con la información del atleta 1 y el atleta 3, que se generan dos rectas perpendiculares, Satisfactoria cuando el estudiante no tiene claro el concepto de rectas perpendiculares, pero logra describir con sus palabras, que las dos rectas tienen comportamientos contrarios e insuficiente si la respuesta describe información que no esté relacionada con el concepto de rectas perpendiculares.

**Tabla 36. Resumen: respuestas, comparación rectas Atleta 1 y 3. Taller de presaberes situación 5, ejercicio 4.**

RECONOCIMIENTO	AVANZADO	SATISFACTORIO	INSUFICIENTE	NO RESPONDE
Recta perpendicular	1	6	1	16

**Gráfica 48. Resultados respuestas, comparación recta Atletas 1 y 3. Taller de presaberes situación 5, ejercicio 4.**

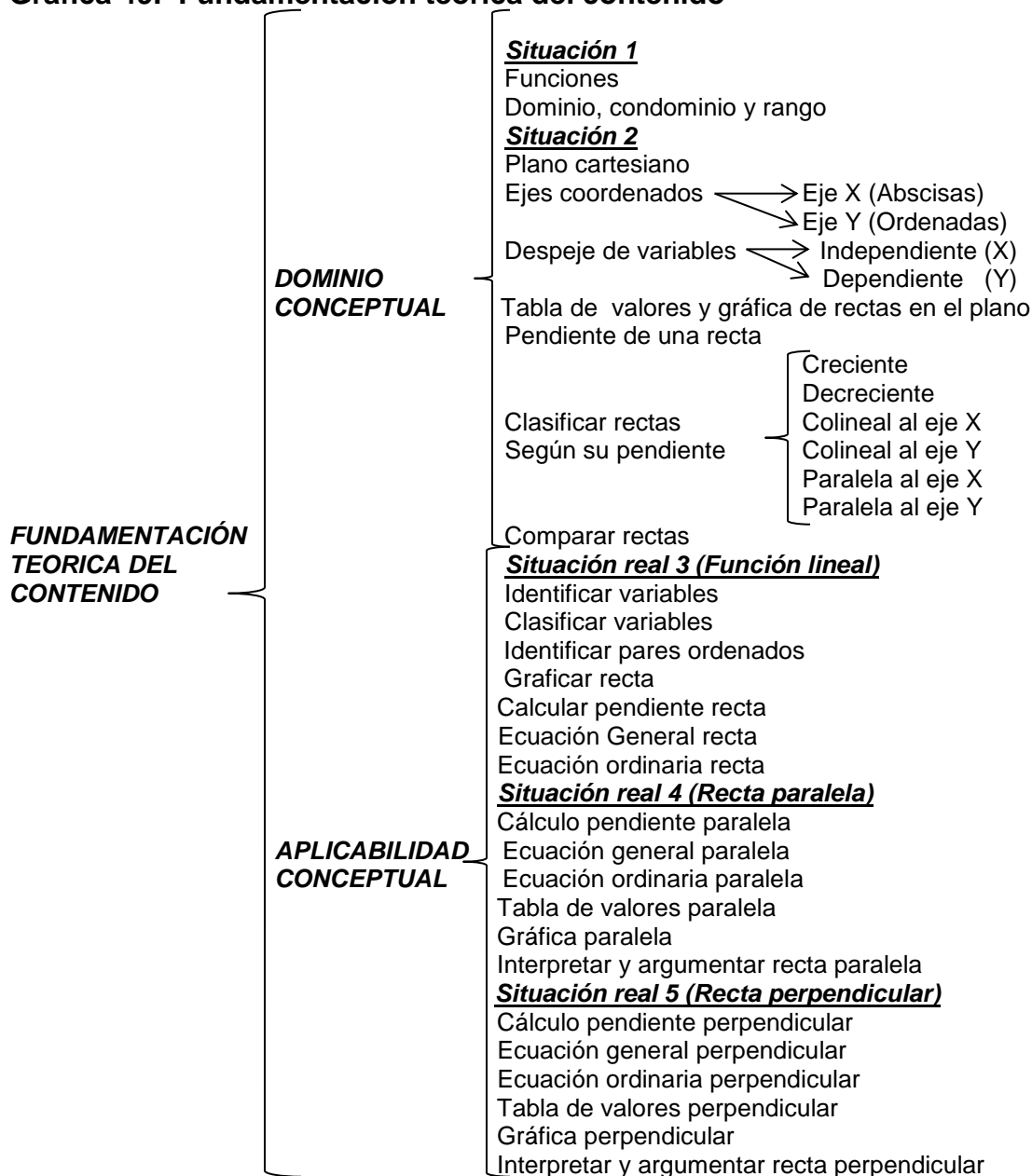


En la gráfica 48 se puede identificar que 17 de los 24 estudiantes tienen dificultades para realizar una interpretación de la relación que existe entre las rectas generadas por el desempeño del atleta 1 y el atleta 3, con 16 de ellos que no dieron respuesta alguna. Por otra parte 7 estudiantes han logrado entender que el desempeño inverso del entrenamiento de ambos deportistas, genera en el plano cartesiano dos rectas que al graficarlas son perpendiculares, donde solo 1 de ellos da respuestas muy claras al respecto y 6 tienen algunas nociones referentes a esta situación.

## 4.2 ANÁLISIS DIARIO DE CAMPO TALLER DE PRESABERES.

La siguiente grafica muestra las actividades que se desarrollaron en la resolución de problemas, definidas de acuerdo a la situación presentada.

**Gráfica 49. Fundamentación teórica del contenido**



**4.2.1 Presentación Diario de campo taller de presaberes.** La realización de este taller cuya pretensión ha sido evaluar los fundamentos cognitivos presentes en el grupo de estudiantes que forman parte de la presente investigación, en los saberes que son necesarios para incursionar en el tema de los métodos para solucionar sistema de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ , se buscó organizar este taller en 5 situaciones que ayuden a identificar las competencias presentes en los estudiantes en el manejo de diferentes conceptos, como ser:

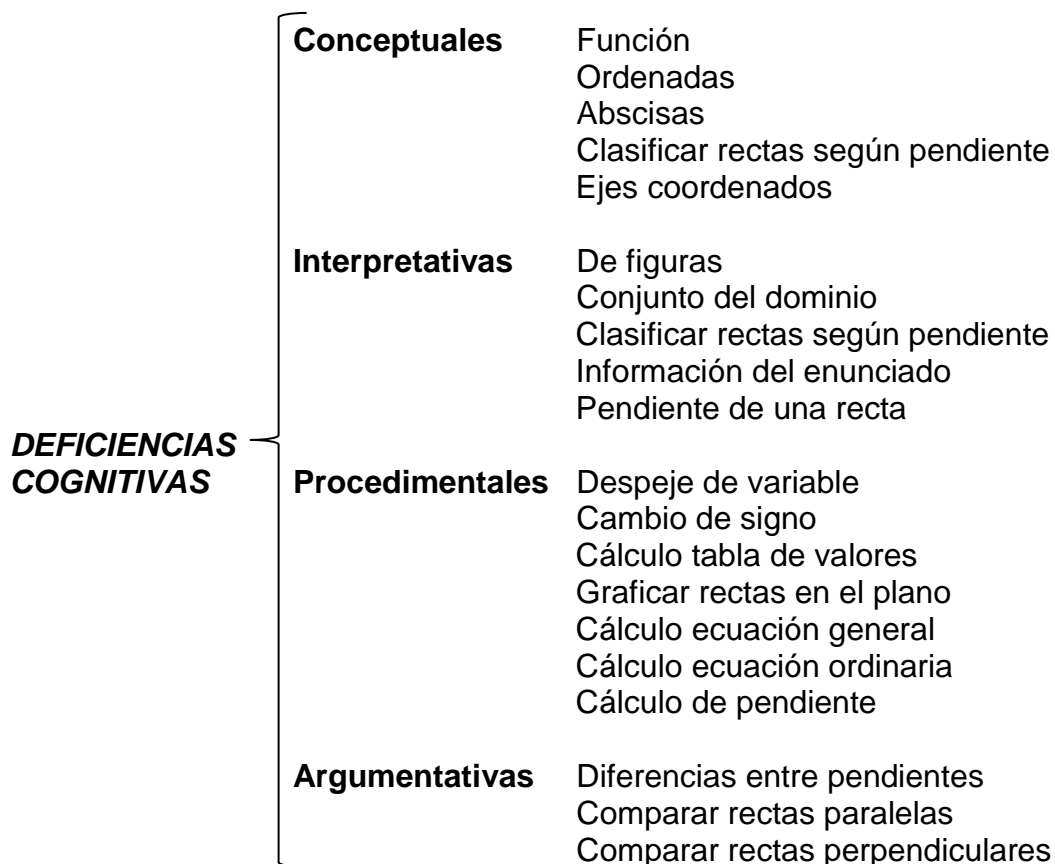
El manejo del concepto de función y de relación, identificando los elementos del dominio, del codominio y del rango de una función, presentes en la situación 1; por trabajar en esta investigación funciones lineales, al solucionar sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ .

En la situación 2 con el manejo de los ejes coordenados del plano cartesiano y los despejes de variables correspondientes a ecuaciones dadas, necesarias para el cálculo de puntos correspondientes a estas ecuaciones que generen los diferentes tipos de rectas además de la habilidad para graficarlas en el plano y clasificarlas de acuerdo a las características de cada una de ellas como rectas paralelas, perpendiculares o colineales según sea el caso.

En las situaciones 3, 4 y 5 con la aplicación del concepto de función lineal a hechos de un contexto real, en el caso de este taller al comportamiento y evolución de tres deportistas después de un periodo de entrenamiento, en cada una de estas situaciones generando las variables dependiente e independiente conjunto con las coordenadas del par de puntos contenidos en las variables propias del ejercicio, hallando con estos puntos la pendiente, las ecuaciones general y ordinaria de cada recta con sus respectivas gráficas e interpretación de las mismas, al trabajar la función lineal en la situación 3, el concepto de rectas paralelas en la situación 4 y de rectas perpendiculares en la situación 5, competencias que ayudan al estudiante a comprender la aplicabilidad contenida

en este tema de estudio y su importancia en diferentes campos del saber y de la representación de diversos fenómenos presentes en múltiples campos de la vida real.

**Gráfica 50. Categorización del diario de campo. Taller de pre-saberes.**



**4.2.2 Interpretación por categorías-Diario de campo.** Las categorías emergentes del análisis realizado a las notas recolectadas de la observación de la clase realizada en el taller de pre-saberes son las siguientes:

**Conceptuales.** En el componente cognitivo evaluado a través del taller de pre-saberes, se observa buen dominio en el manejo de los conceptos función, relación, dominio, codominio, rango, rectas, pendiente de una recta, manejo de

ecuación punto pendiente para hallar la ecuación general y ordinaria de una recta, y el concepto de rectas paralelas, pues solo se presentan algunos casos aislados en el insuficiente manejo de algunos conceptos como por ejemplo la dificultad del estudiante EH8 quien desconoce el concepto de función, igualmente EH7 y EH11 no tienen claros los elementos del dominio de una función y del mismo modo EM9 y EH2, presentan dificultad para identificar dominio y codominio y el manejo del concepto de rectas paralelas que no dominan las estudiantes EM3 y EM10; lo cual muestra que en términos generales el grupo tienen buen dominio del concepto de función, de la presencia de relación entre dominio y codominio, facilidad para reconocer los elementos de una función, habilidad para identificar el eje X y el eje Y en el plano cartesiano (aun así desconozcan su denominación como eje de las ordenadas y eje de las abscisas), así como también mostraron habilidad para relacionar dos situaciones reales, donde las variables que representan el entrenamiento de dos atletas, cuyo comportamiento en la evolución de su condición física es similar, pueden dar origen a un par de rectas paralelas en el plano cartesiano.

Por otra parte se pueden observar algunas dificultades conceptuales que en términos generales son muy visibles en el grupo, como por ejemplo EM1, EM3, EM5, EM6 EM9, EM12, EH4, EH6, EH9 y EH12; expresan no tener claro el concepto de ordenadas y abscisas, e igualmente EM4, EM12 y EH8 señalan no recordar la forma como se clasifican las rectas, pero principalmente la presencia de dificultades en la mayoría de los estudiantes al trabajar conceptos relacionados a aplicaciones de situaciones reales que conectan con información de otros ejercicios donde el manejo de las variables es inversa en su comportamiento generando rectas perpendiculares en el plano cartesiano, principalmente en estudiantes EH3, EH6 y EM10 y EH11, que no saben cómo trabajar este tipo de conceptos y entregan sus informes sin contestar este punto.

**Interpretativas.** La forma como se organizó el trabajo fue para resolverlo en forma coordinada con avance grupal, para manejar apropiadamente la solución de dudas presentes en los estudiantes, de las cuales solo fueron resueltas las relacionadas a la interpretación de los contenidos del taller, si estos generaban confusión en los estudiantes; dificultad que estuvo presente solo al comprender la tabla de la situación 3 en la que los estudiantes debían identificar del enunciado, los valores de los puntos  $p_1$  y  $p_2$  para hallar la pendiente de la recta generada por el entrenamiento del atleta 1.

Con relación a los ejercicios resueltos en el taller se presentan deficiencias de la competencia interpretativa en los estudiantes EM2, EM9 y EH11 al tratar de resolver la situación 1, en la interpretación de la figura 3, sobre funciones y en general todos los estudiantes ven muy difícil completar las tablas c, d, e y f, por tratarse de ecuaciones correspondientes a rectas paralelas y colineales a los ejes coordenados del plano cartesiano, las cuales presentan solo una variable y que son poco usadas al manejar el concepto de función lineal, dificultad que principalmente pudo observarse en los estudiantes EH1 EM4, EM6 y EM7.

Por otra parte, se observó en los estudiantes facilidad para interpretar e identificar las variables correspondientes a la evolución de la condición deportiva en los entrenamientos de los atletas 1 y 2, correspondiente a la función lineal y al manejo de rectas paralelas; pero al comparar el comportamiento de las variables que representan el entrenamiento del atleta 1 frente al atleta 3, se observan grandes dificultades en la mayoría del grupo (17 de 24 estudiantes), quienes no logran establecer conceptos que describan su interpretación frente a situaciones donde las variables describen comportamientos inversamente proporcionales y que dan paso a rectas perpendiculares en el plano cartesiano.

**Procedimentales.** Las principales dificultades procedimentales se observan al realizar despeje de variables, en el momento de hallar la ecuación general y ordinaria que representan la función lineal y sobre rectas paralelas y perpendiculares, pues se presentan muchas dudas al aplicar las reglas de despeje de variables y en el manejo de los signos, tanto al aplicar ley distributiva de multiplicación a valores agrupados, como al momento de simplificar términos semejantes.

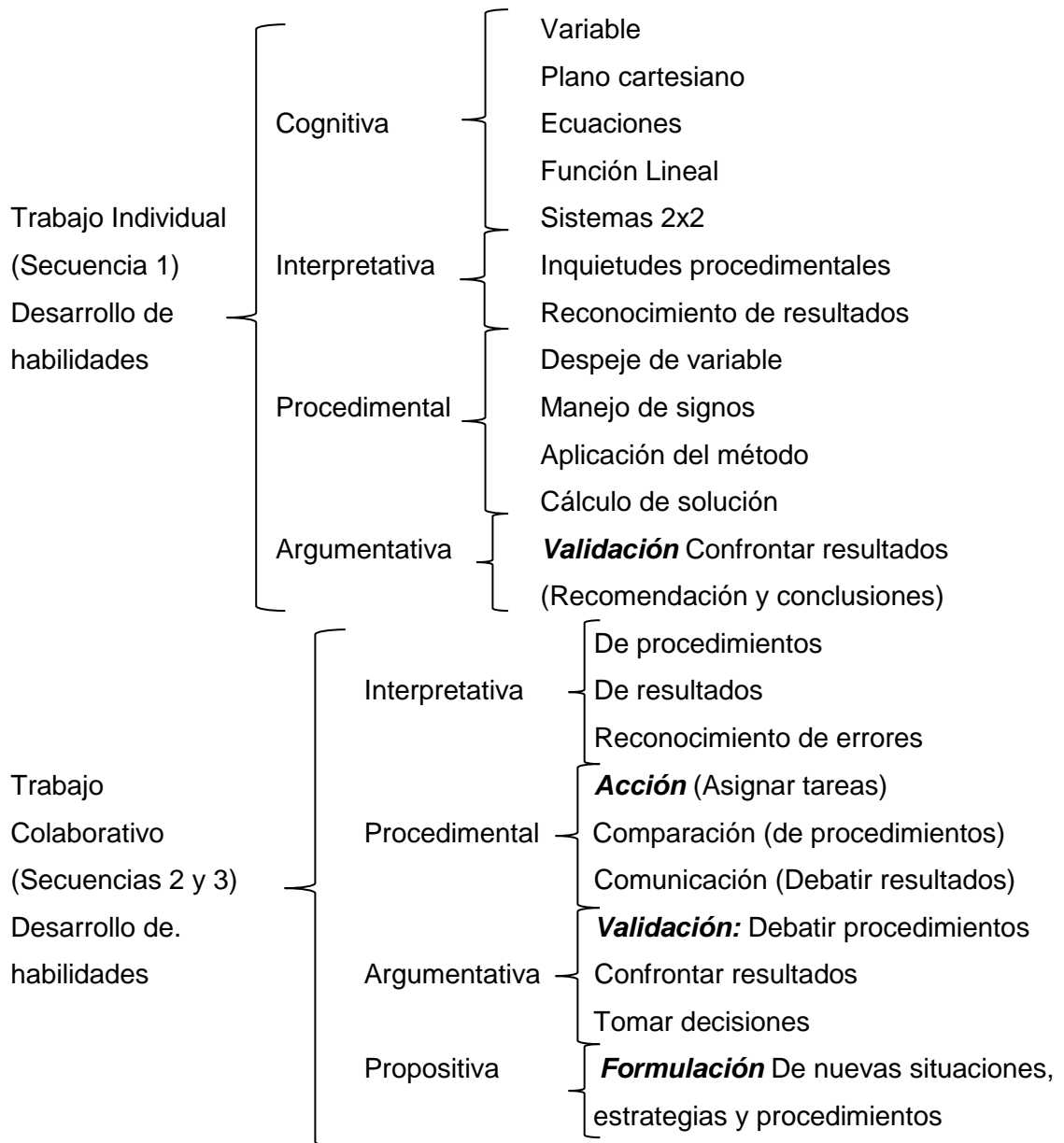
La mayor presencia de dificultades en el manejo de signos se observó en EM8, EH2 y EH11 al despejar ecuaciones a, b, c, d, e y f; EH8 y EM3 al trabajar la situación de la ecuación del atleta 1 y EH4, EH6 y EM2, en la solución de la ecuación del atleta 2. Igualmente EM11 presentó dificultad para graficar las diferentes rectas, por no trabajar el plano cartesiano.

**Argumentativas.** Pudo observarse en términos generales dificultad del grupo para argumentar sus observaciones al comparar las rectas graficadas en el plano cartesiano, y en las cuales se les solicitó expresar con sus palabras las diferencias observadas una vez obtenidos sus resultados; principalmente al comparar las rectas a y b con pendientes contrarias (creciente y decreciente) de la situación 2, donde los estudiantes EH8, EM6, EM7, EM8 EM9 Y EH11, no argumentaron sus observaciones en este ejercicio, tampoco al comparar las rectas perpendiculares generadas por el comportamiento de las variables que representan el entrenamiento del atleta 1 frente al entrenamiento del atleta 3; e igualmente aunque en menor proporción, al comparar las gráficas de los atletas 1 y 2, que generan rectas paralelas.

### 4.3 ANALISIS UNIDAD DIDACTICA.

La unidad didáctica fue desarrollada mediante el uso de las siguientes categorías:

**Gráfica 51. Categorización Unidad Didáctica.**



**4.3.1 secuencia didáctica 1: interpretación sistemas de ecuaciones 2x2.** La cual se encuentra organizada de la siguiente forma:

**Presentación.** Trabajo individual, conformado por la presentación de un video explicativo de cada método, cuyo procedimiento aparece descrito en la unidad, seguido de un ejercicio planteado para poner en práctica lo aprendido, confrontar y debatir respuestas y sacar conclusiones con los demás compañeros. Esta secuencia será resuelta en un tiempo de 2 horas y será planteado un ejercicio para resolver y practicar en casa lo aprendido en la unidad, y para la presentación del informe por grupo.

**Metodología.** La metodología fue diseñada teniendo en cuenta los siguientes parámetros:

- **Presentación del método:** Cada método será presentado a través de un video de YouTube de la página Julio profe, con el propósito de mantener la atención de todos los estudiantes y posterior al video se aclaran dudas y se resuelve un ejercicio planteado en la unidad didáctica.
- **Solución individual del problema:** Aplicar las instrucciones asignadas para cada método e interiorizar los procedimientos requeridos para la solución de los ejercicios resueltos en el taller.
- **Comparación de respuestas:** Discutir con otros compañeros acerca de las diferencias y similitudes encontradas en las respuestas, para definir los aciertos y errores cometidos en el ejercicio.
- **Ajustes procedimentales:** Escribir en el portafolio, los errores descubiertos con los compañeros y hacer interrogantes y propuestas que eviten los mismos errores.
- **Aplicación software *Graphmatica*:** Cada uno de los ejercicios resueltos por cada método, al finalizar la unidad didáctica, se resolverán por método gráfico

con la ayuda del software **Graphmatica**, para comparar respuestas con la ayuda de métodos tecnológicos y visuales.

- **Exposición de resultados:** Expresar frente al curso los hallazgos significativos descubiertos en este proceso al interiorizar los conceptos correspondientes a los métodos estudiados.

**Resultados obtenidos.** Después de presentado el video y solucionar las dudas que surgen de los procedimientos propios de cada método, a continuación se presentan los resultados de los informes entregados por cada estudiante, correspondiente a los ejercicios planteados en la unidad para desarrollar en clase, por cada uno de los métodos aplicados de la siguiente forma:

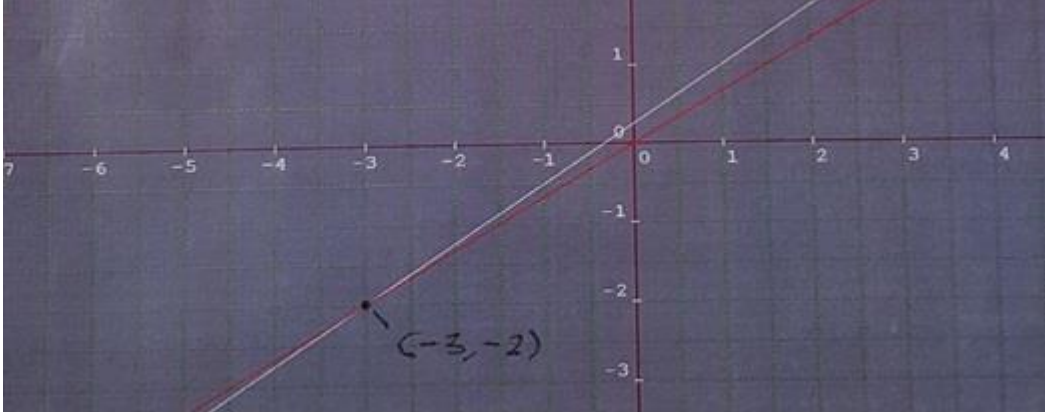
**Método igualación.** En este método el ejercicio planteado fue el siguiente:

$$\begin{cases} -6x + 8y = 2 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases}$$

Y las respuestas de los grupos aparecen en la tabla 1, ANEXO G, con la respectiva valoración a la respuesta dada por cada grupo:

Una vez finalizadas las tres secuencias de la unidad didáctica, los estudiantes en el aula de informática, resuelven al final de la unidad con la ayuda del software matemático **Graphmatica**, cada uno de los ejercicios de las 3 secuencias de la unidad didáctica, para confrontar sus respuestas con la solución arrojada por el software, con el propósito de verificar los posibles errores o aciertos en la ejecución de cada método, al realizar cada uno de los ejercicios resueltos en clase. Por esta causa en cada uno de los informes presentados a continuación en este análisis de las respuestas entregadas por los estudiantes, se mostrará igualmente la solución obtenida en la aplicación del software a nivel grupal.

Tabla 37. Ejercicio propuesto 1, Método igualación. Niveles de solución.

SOLUCIÓN AVANZADA EM9	SOLUCIÓN SATISFATORIA EH7
<p><b>Localización</b></p> $-6x + 8y = 2 \quad (1)$ $4x - 6y = 0 \quad (2)$ <p><b>Paso 1</b></p> $8y = 2 + 6x \quad +6y = 0 - 4x$ $(3) \quad y = \frac{2+6x}{8} \quad y = \frac{4x}{6}$ <p><b>Paso 2</b></p> $6(2+6x) = 8(4x)$ $12 + 36x = 32x$ $36x - 32x = -12$ $4x = -12$ $x = \frac{-12}{4}$ $x = -3$ <p><b>Paso 4</b></p> $y = \frac{4(3)}{6} = \frac{12}{6} = 2$ $y = -2$ <p><b>Paso 5</b></p> $-6(-3) + 8(-2) = 2$ $18 - 16 = 2 \quad 2 = 2 \checkmark$	<p><math>-6x + 8y = 2 \quad (1)</math>  <math>4x - 6y = 0 \quad (2)</math></p> <p><b>Paso 1</b> despejamos <math>x</math> y <math>y</math></p> <p><b>Paso 2</b> <math>(1) = (2)</math></p> $-6x + 8y = 2$ $4x - 6y = 0 \Rightarrow 4x = 6y \Rightarrow x = \frac{6y}{4}$ <p><b>Paso 3</b></p> $-6\left(\frac{6y}{4}\right) + 8y = 2$ $-9y + 8y = 2$ $-y = 2 \Rightarrow y = -2$ <p><b>ERROR DE SIGNOS</b></p> <p><b>Paso 4</b></p> $4x = 6y$ $4x = 6(-2)$ $4x = -12 \Rightarrow x = -3$
SOLUCIÓN INSUFICIENTE EM1	NO PRESENTAN SOLUCIÓN
<p>Trabajo de Matemáticas</p> <p><b>Paso 1</b></p> $(1) -6x + 8y = 2$ $(2) 4x - 6y = 0$ <p><b>Paso 2</b></p> $y = \frac{2+6x}{8}$ <p><b>Paso 3</b></p> <p><b>Paso 4</b></p> <p>Medio</p>	<p>Los estudiantes EM1, EM5, EH10, EM10, EM11 y EM12, no resolvieron este ejercicio.</p>
Ejercicio propuesto Igualación. GRUPO: G4 (MÉTODO GRÁFICO) "GRAPHMATICA"	
	

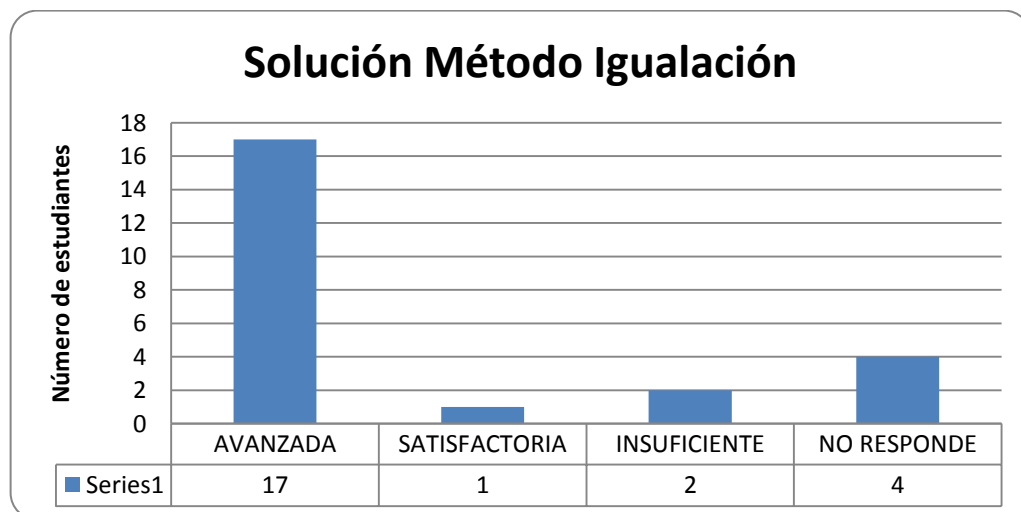
Satisfactoria: El estudiante EH7 presenta una variable correcta  $Y = -2$  y una incorrecta  $X = 3$ , pues presenta error de signos desde el inicio del despeje de la variable  $Y$ , tal como se muestra en la figura de solución satisfactoria de la tabla 37.

Insuficiente: La estudiante EM1 solo inicia el procedimiento y no lo concluye, entre tanto el estudiante EM11 presenta error de signos al realizar los despejes y realizar ley distributiva de la multiplicación, lo que altera sus resultados, presentando una variable errada  $X = 2$  y la variable  $Y$ , no aparece solucionada.

**Tabla 38. Resumen respuestas de los estudiantes. Método igualación.**

<i>Nivel de respuesta</i>	<i>Número de estudiantes</i>
AVANZADA	17
SATISFACTORIA	1
INSUFICIENTE	2
NO RESPONDE	4

**Gráfica 52. Solución método Igualación**

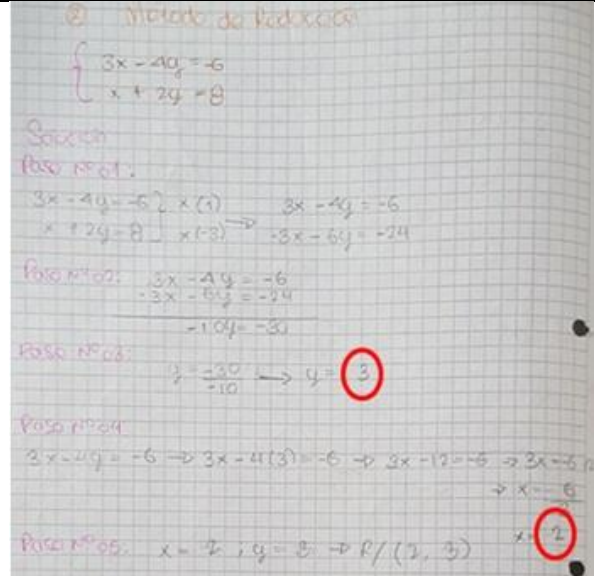
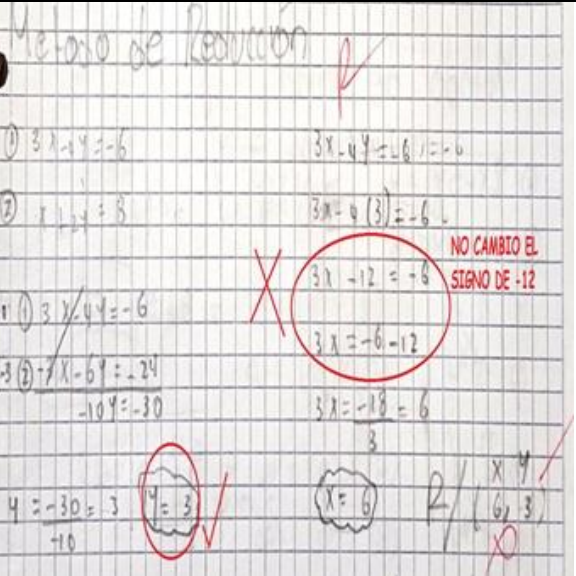


**Método eliminación o reducción.** En este método el ejercicio planteado fue el siguiente:

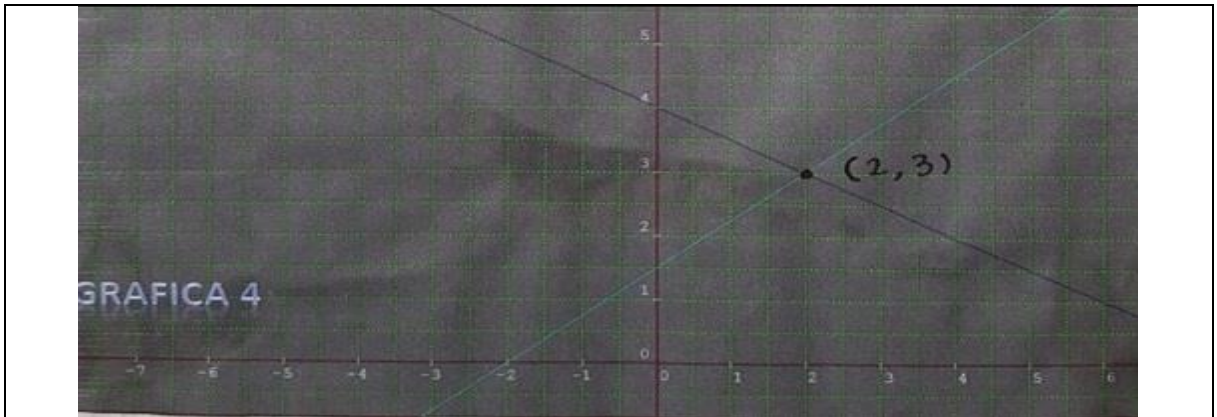
$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Y las respuestas de los grupos aparecen en la tabla 2, ANEXO G con la respectiva valoración a la respuesta dada por cada grupo:

**Tabla 39. Ejemplo: Niveles de solución. Método Eliminación o reducción.**

SOLUCIÓN AVANZADA (EM3)	SOLUCIÓN SATISFATORIA (EM11)
	
<b>SOLUCIÓN INSUFICIENTE</b>	<b>NO PRESENTAN SOLUCIÓN</b>
<p>Ninguna respuesta aparece en este nivel.</p>	<p>Los estudiantes EM5, EH10, EM10 y EM12, no presentaron la solución de este ejercicio, y posteriormente al indagarlos, los estudiantes afirman tener muchas dudas al respecto.</p>
<p><b>Ejercicio propuesto Reducción. GRUPO: G2 (MÉTODO GRÁFICO). "GRAPHMATICA"</b></p>	

Continuación tabla 39

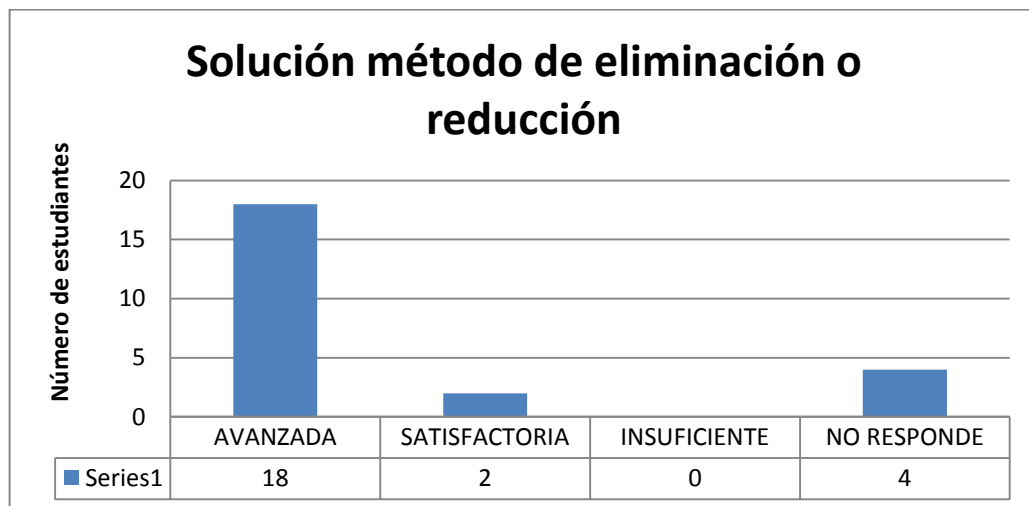


SOLUCIÓN SATISFACTORIA: El estudiante EH9 y EM11 presentan la variable  $Y=3$  correcta, y la variable  $X$  incorrecta, igualadas a 6 y a 4 respectivamente, ambos cometen error de signos.

**Tabla 40. Resumen respuestas de los estudiantes. Método eliminación o reducción.**

<i>Nivel de respuesta</i>	<i>Número de estudiantes</i>
AVANZADA	18
SATISFACTORIA	2
INSUFICIENTE	0
NO RESPONDE	4

**Gráfica 53. Solución método de eliminación o reducción**

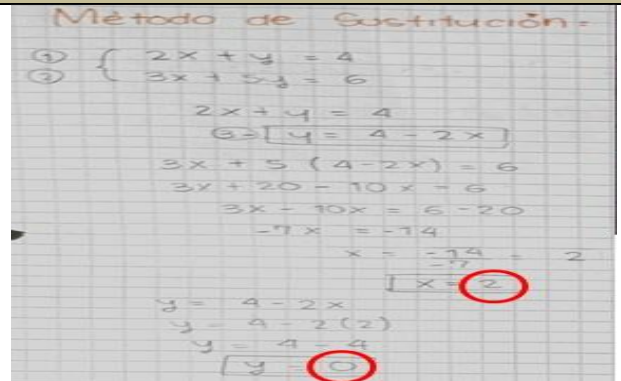
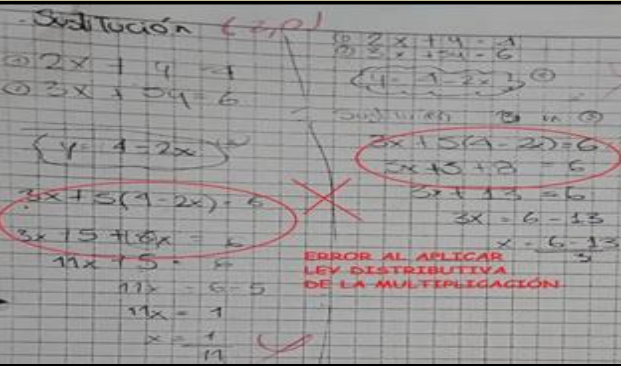
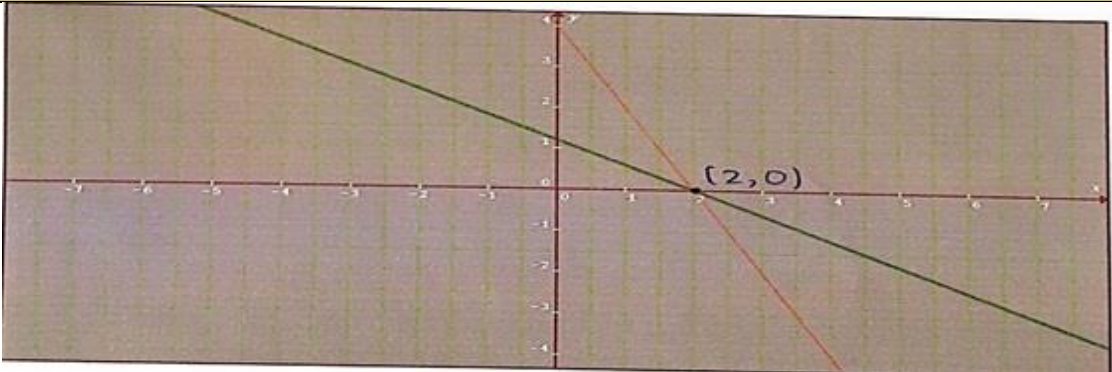


**Método sustitución.** En este método el ejercicio planteado fue el siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$$

Y las respuestas de los grupos aparecen en la tabla 3 del ANEXO G, con la respectiva valoración a la respuesta dada por cada grupo:

**Tabla 41. Ejemplo: Niveles de solución. Método Sustitución.**

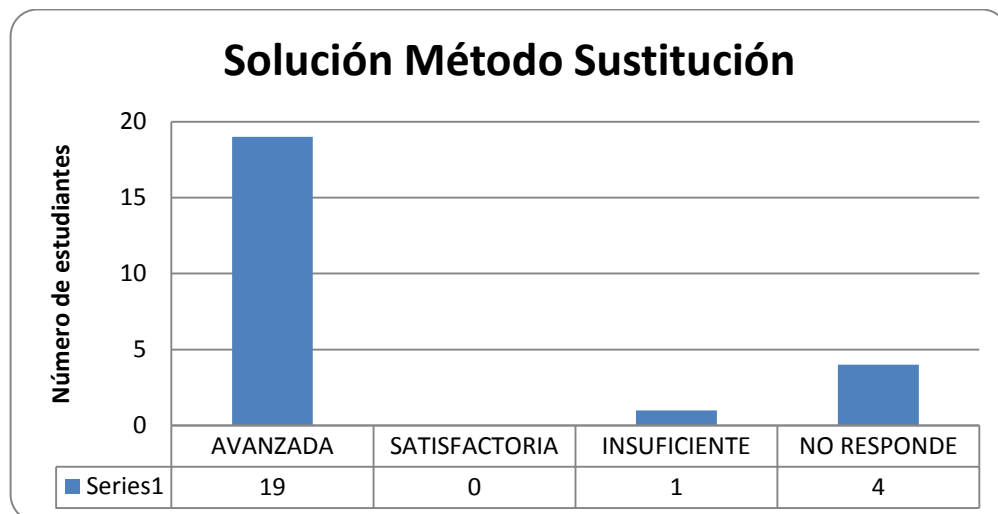
SOLUCIÓN AVANZADA (EM2)	SOLUCIÓN SATISFACTORIA
 <p>Método de Sustitución:</p> $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$ $2x + y = 4 \Rightarrow [y = 4 - 2x]$ $3x + 5(4 - 2x) = 6$ $3x + 20 - 10x = 6$ $3x - 10x = 6 - 20$ $-7x = -14$ $x = \frac{-14}{-7} = 2$ $[x = 2]$ $y = 4 - 2x$ $y = 4 - 2(2)$ $y = 4 - 4$ $[y = 0]$	<p>Ninguna respuesta aparece en este nivel.</p>
SOLUCIÓN INSUFICIENTE (EM11)	NO PRESENTAN SOLUCIÓN
 <p>Sustitución (err)</p> $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$ $y = 4 - 2x$ $3x + 5(4 - 2x) = 6$ $3x + 20 - 10x = 6$ $11x + 5 = 6$ $11x = 6 - 5$ $11x = 1$ $x = \frac{1}{11}$ <p>ERROR AL APLICAR LEY DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN</p>	<p>Los estudiantes EM5, EH10, EM10 y EM 12.</p>
Ejercicio propuesto Sustitución. GRUPO: G5 (MÉTODO GRÁFICO). "GRAPHMATICA"	
	

Insuficiente: La estudiante EM 11 presenta las dos respuestas erradas, pues al sustituir el valor de la variable Y que resulta de la ecuación 1 en la segunda ecuación, no aplica correctamente la ley distributiva de la multiplicación, cambiando sus resultados.

**Tabla 42. Resumen respuestas de los estudiantes. Método Sustitución.**

Nivel de respuesta	Número de estudiantes
AVANZADA	19
SATISFACTORIA	0
INSUFICIENTE	1
NO RESPONDE	4

**Gráfica 54. Solución Método Sustitución**

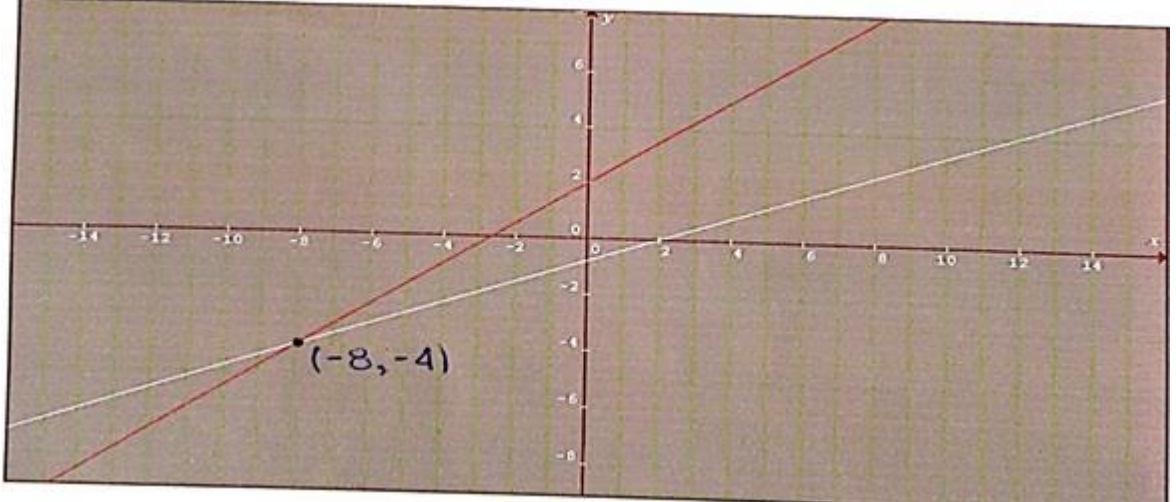


**Método de Crámer.** En este método el ejercicio planteado fue el siguiente:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ -3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Y las respuestas de los grupos aparecen en la tabla 4 del ANEXO G, con la respectiva valoración a la respuesta dada por cada grupo:

Tabla 43. Ejemplo: Niveles de solución. Método Crámer.

SOLUCIÓN AVANZADA EM1	SOLUCIÓN SATISFATORIA EH3
<p>Método de Cramer</p> $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 2 - 3x + 4y = 8 \end{cases} \quad \Delta_5 = -7 \quad \Delta_1 = 28$ $\Delta_5 = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (-5)(-3) = 8 - 15 = -7$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (4)(4) - (-5)(2) = 16 + 10 = 26$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = (2)(8) - (-4)(-3) = 16 - 12 = 4$ <p> <math>x = \frac{\Delta_1}{\Delta_5} = \frac{26}{-7} \approx -3.71</math>  <math>y = \frac{\Delta_2}{\Delta_5} = \frac{4}{-7} \approx -0.57</math> </p> <p> <b>R/ (-8, -4)</b>                  * Comparación entre mis compañeros.                  • Compare mi ejercicio con el de mi compañero así bien e igual.                  • Estime la estimación.             </p>	<p>Método de Cramer</p> <p><b>ERROR DE SIGNO AL ESCRIBIR LA ECUACIÓN</b></p> $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 2 - 3x + 4y = 8 \end{cases}$ $\Delta_5 = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (-5)(-3) = 8 - 15 = -7$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (4)(4) - (-5)(2) = 16 + 10 = 26$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = (2)(8) - (-4)(-3) = 16 - 12 = 4$ <p> <math>x = \frac{\Delta_1}{\Delta_5} = \frac{26}{-7}</math>  <math>y = \frac{\Delta_2}{\Delta_5} = \frac{4}{-7}</math> </p>
SOLUCIÓN INSUFICIENTE EH9	NO PRESENTAN SOLUCIÓN
<p>Cramer</p> $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ -3x + 4y = 8 \end{cases} \quad \Delta_5 = -7 \quad \Delta_1 = 28$ $\Delta_5 = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (-5)(-3) = 8 - 15 = -7$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (4)(4) - (-5)(2) = 16 + 10 = 26$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = (2)(8) - (-4)(-3) = 16 - 12 = 4$ <p> <math>x = \frac{\Delta_1}{\Delta_5} = \frac{26}{-7}</math>  <math>y = \frac{\Delta_2}{\Delta_5} = \frac{4}{-7}</math> </p>	<p>Los estudiantes EH7, EM5, EH10, EM10 y EM12.</p>
Ejercicio propuesto Crámer. GRUPO: G5 (MÉTODO GRÁFICO) "GRAPHMATICA"	
	

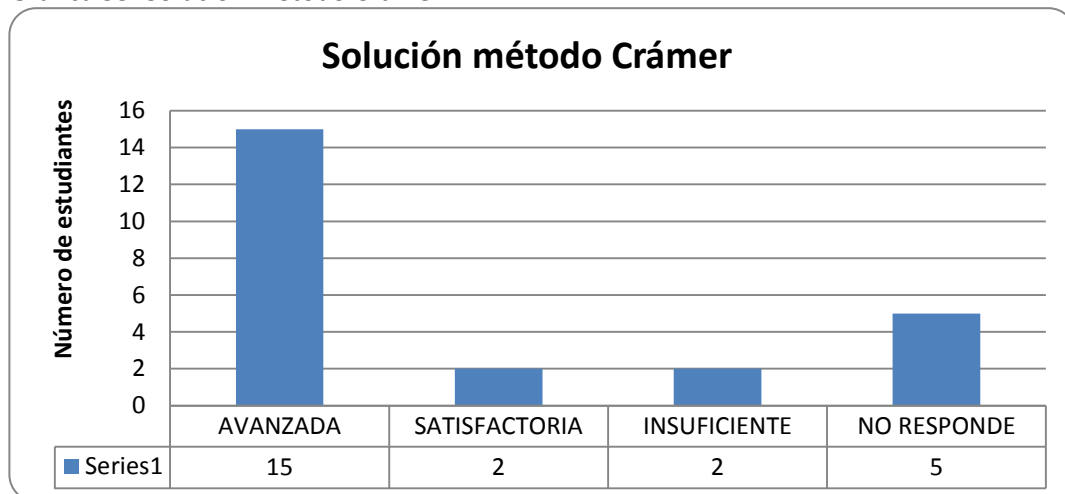
**Solución satisfactoria:** El estudiante EH3, presenta una respuesta correcta  $Y = -4$  , y una incorrecta  $X = -24/7$ , generada por descuido del estudiante al escribir la ecuación del ejercicio planteado. Otra solución satisfactoria es la del estudiante EH8, quien presenta error de signos en ambas respuestas, generada por colocar signo incorrecto en la respuesta de la determinante del sistema, y esto altera el signo de ambas respuestas.

**Solución insuficiente.** Solución estudiante la presentan los estudiantes EM11 y EH9, quienes presentan procedimientos incompletos, sin respuesta para las variables.

**Tabla 44. Resumen respuestas de los estudiantes. Método Sustitución.**

<i>Nivel de respuesta</i>	<i>Número de estudiantes</i>
AVANZADA	15
SATISFACTORIA	2
INSUFICIENTE	2
NO RESPONDE	5

Gráfica 55. Solución método Crámer



**4.3.2 Secuencia Didáctica 2: Resolución de problemas.** Se Encuentra organizada en tres fases, cada una de ellas conformadas por las siguientes actividades:

**Secuencia Didáctica dos: Primera fase.** Para el desarrollo de la Secuencia 2 de la Unidad didáctica, se conformaron 6 grupos de 4 estudiantes, cada estudiante con una función específica dentro del grupo, asignada por el profesor, que permita y facilite la aplicación de las situaciones didácticas planteadas por Guy Brousseau; cada función con las siguientes características:

- **Nombramiento de un líder:** Que es el estudiante de cada grupo, que más ha mostrado manejo y apropiación de la matemática en las evaluaciones que se hayan realizado en el año, y es la persona encargada de dirigir las actividades dentro del grupo, solicitar al profesor aclaraciones de dudas que puedan presentarse en el grupo y en lo posible, aclarar dudas a sus compañeros en las diferentes fases de cada situación que conforman la unidad didáctica a desarrollar.
- **Emisario del grupo:** Es el miembro del grupo, con el segundo mayor promedio de rendimiento académico cuya función consiste en intercambiar y debatir procedimientos y resultados obtenidos en cada una de las aplicaciones realizadas durante el desarrollo de la unidad.
- **Moderador del grupo:** Tiene un rendimiento académico satisfactorio, y su función es ayudar a tomar apuntes y organizar el reporte que presenta cada grupo de las discusiones presentes en la solución de cada situación, además de reportar al profesor si alguno de los miembros del grupo, no cumple con la función asignada.
- **Receptor del grupo:** Es el estudiante del grupo que ha tenido mayores dificultades en el manejo de la matemática y que en los resultados de sus evaluaciones ha mostrado deficiencias y su principal función dentro del grupo es pedir al líder las aclaraciones necesarias, para que asimile los contenidos y ejercicios desarrollados, con la misma propiedad que lo logran sus compañeros de

grupo, y de apoyar al moderador en la elaboración del informe que entregan por grupo.

**Conformación de los grupos de trabajo.** Tanto los grupos como los roles ejercidos cada estudiante dentro de los grupos, fueron asignados por el profesor, de acuerdo al rendimiento académico observado durante el año lectivo en curso, los cuales quedaron constituidos de la siguiente forma:

**Tabla 45. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 1. Conformación de grupos.**

<i>NUMERO DE GRUPO</i>	<i>CÓDIGO IDENTIFICACIÓN</i>	<i>INTEGRANTES</i>	<i>FUNCIÓN</i>
GRUPO 1	G1	EH1	LIDER
		EM3	EMISARIO
		EH11	MODERADOR
		EM13	RECEPTOR
GRUPO 2	G2	EH2	LIDER
		EM1	EMISARIO
		EH9	MODERADOR
		EM11	RECEPTOR
GRUPO 3	G3	EH3	LIDER
		EM8	EMISARIO
		EM9	MODERADOR
		EH10	RECEPTOR
GRUPO 4	G4	EH4	LIDER
		EM4	EMISARIO
		EM5	MODERADOR
		EH8	RECEPTOR
GRUPO 5	G5	EH5	LIDER
		EM2	EMISARIO
		EM10	MODERADOR
		EM12	RECEPTOR
GRUPO 6	G6	EH6	LIDER
		EH7	EMISARIO
		EM6	MODERADOR
		EM8	RECEPTOR

Cada grupo debía resolver una situación real planteada en la unidad, cumpliendo las siguientes indicaciones:

**Solución de situaciones contextualizadas en grupo por diferentes métodos:**

El grupo resolvía una situación planteada por el profesor quien asignaba a cada grupo un método diferente para su solución.

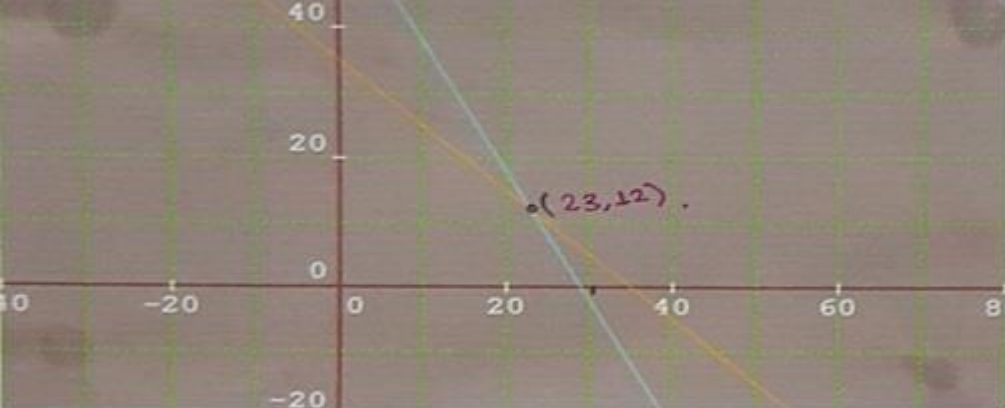
**Comparación de respuestas:** Los estudiantes comparaban sus respuestas con otros grupos y discutió lo que iban descubriendo al comparar sus resultados y debían hacer apuntes en el folder acerca de sus hallazgos.

**Ajustes procedimentales:** Los estudiantes dentro de los grupo después de cada ejercicio, escribían en su folder los errores descubiertos con sus compañeros e hicieron propuestas que les ayudara a evitar dichos errores.

**Resultados obtenidos:** Una vez fue explicado en clase la forma de solucionar una situación real planteada en la unidad didáctica y aclaradas las dudas que surgen en los estudiantes, se presenta una situación real, cuyos resultados de los informes entregados por cada grupo, aparecen en la tabla 5 del ANEXO F, seguidamente se presenta la situación planteada:

**Situación 1.** *Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?*

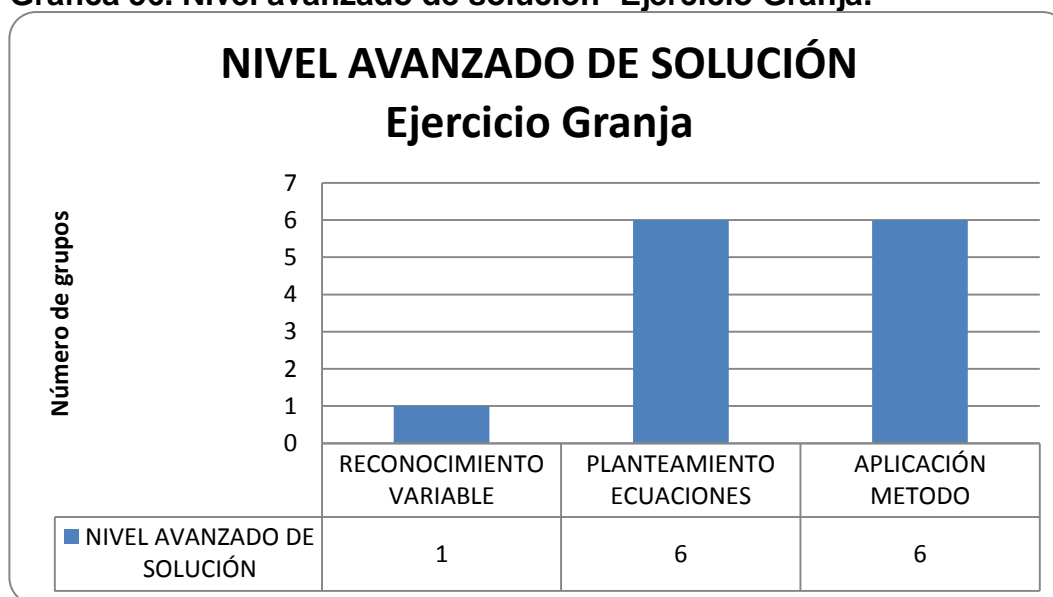
Tabla 46. Solución: Ejercicio 1 Granja. Método asignado por grupo.

SOLUCIÓN MÉTODO IGUALACIÓN G3	SOLUCIÓN MÉTODO REDUCCIÓN
<p><i>Ignoración cerdos y patos:</i></p> $x + y = 35$ $2x + 2y = 116$ $y = 35 - x$ $2x + 2(35 - x) = 116$ $2x + 70 - 2x = 116 - 70$ $0 = 46$ <p><i>23</i></p> $y = 35 - 23 = 12$ <p><i>12</i></p> <p><i>4(23) + 2(12) = 116</i></p> <p><i>92 + 24 = 116</i></p>	<p><i>Método de Reducción</i> SECUENCIA: DOS</p> $x + y = 35$ $4x + 2y = 116$ $x + y = 35 \quad * \quad +4 = +4x + 4y = 140$ $4x + 2y = 116 \quad * \quad -1 = -4x - 2y = -116$ $-2y = 24$ $y = -12$ <p><i>12</i></p> <p><i>Conclusiones</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Comprobamos con qué y tienen algunos dif. signos</li> <li>* En algunos casos está procediendo pero ya de y no se entendió no</li> <li>* Cuando pasamos a otro algunos no habíamos</li> </ul> <p><i>23</i></p> <p><i>12</i></p>
SOLUCIÓN MÉTODO SUSTITUCIÓN G1	SOLUCIÓN MÉTODO CRÁMER G6
<p><i>1 = Cerdos, 2 variable, Cabezas, 2 ecuaciones</i></p> <p><i>4 = Patos, 2 variable, Patas, 2 ecuaciones</i></p> <p><i>Método de Sustitución</i></p> $x + y = 35 \rightarrow y = 35 - x$ $2x + 2y = 116 \rightarrow 2x + 2(35 - x) = 116$ $2x + 70 - 2x = 116 - 70$ $0 = 46$ <p><i>23</i></p> <p><i>12</i></p> <p><i>R/ (23, 12)</i></p>	$x + y = 35$ $2x + 2y = 116$ $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (1)(2) = 2 - 2 = 0$ $\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 116 \\ 1 & 35 \end{vmatrix} = (2)(35) - (116)(1) = 70 - 116 = -46$ $\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 116 \\ 1 & 35 \end{vmatrix} = (2)(35) - (116)(1) = 70 - 116 = -46$ $x = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-46}{0} = \text{no se puede dividir}$ $y = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{-46}{0} = \text{no se puede dividir}$ <p><i>23</i></p> <p><i>12</i></p>
<p><b>Aplicación propuesta Granja. GRUPO: G3 (MÉTODO GRÁFICO) "GRAPHMATICA"</b></p>	
	

**Tabla 47. Resumen: Solución Ejercicio 1 Granja. Método asignado por grupo.**

ACTIVIDAD MATEMATICA	NIVEL AVANZADO DE SOLUCIÓN
RECONOCIMIENTO VARIABLE	1 (G1)
PLANTEAMIENTO ECUACIONES	6
APLICACIÓN METODO	6

**Gráfica 56. Nivel avanzado de solución -Ejercicio Granja.**



Todos los grupos presentan un nivel avanzado de solución para los procesos matemáticos relacionados con el planteamiento de las ecuaciones y con la aplicación del método asignado a sus grupos, lo cual refleja que el grupo ha asimilado satisfactoriamente el conocimiento procedimental contenido en la unidad al punto de caracterizar adecuadamente una situación real relacionada con el tema de los métodos para solucionar ecuaciones 2x2, entre tanto solo 1 grupo identificó el nombre de las variables del problema acertadamente y al indagar posteriormente a los estudiantes la causa de no indicar las variables, ellos afirman

que fue por descuido, pues no consideraron importante este tipo de información, al no formar parte de los procedimientos propios de los métodos aplicados.

Al indagar a los estudiantes de los grupos que argumentan haber encontrado errores de procedimientos y de signos, tal como aparece en la tabla 5 del ANEXO G coinciden en afirmar que estos errores fueron detectados pero fueron identificadas, debatidas y corregidas por el grupo que presentaba el error.

**Secuencia didáctica 2: segunda fase.** Los integrantes de cada grupo solucionan una situación real planteada en la unidad didáctica, siguiendo los siguientes pasos:

- **Elección del método a aplicar:** El profesor plantea una situación problema y Cada estudiante dentro de su grupo elige un método diferente al de sus compañeros para encontrar su solución.
- **Solución del ejercicio:** planteado por el profesor, aplicando el método elegido.
- **Comparación de respuestas:** Los estudiantes discutirán lo que van descubriendo con respecto a sus resultados y harán apuntes en su hoja de examen acerca de sus hallazgos.

A continuación se presenta el ejercicio que fue planteado para esta segunda fase y en la tabla 6 del ANEXO F las respuestas dadas por los estudiantes:

**EJERCICIO:** Con dos camiones cuya capacidad de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizaron cada camión?

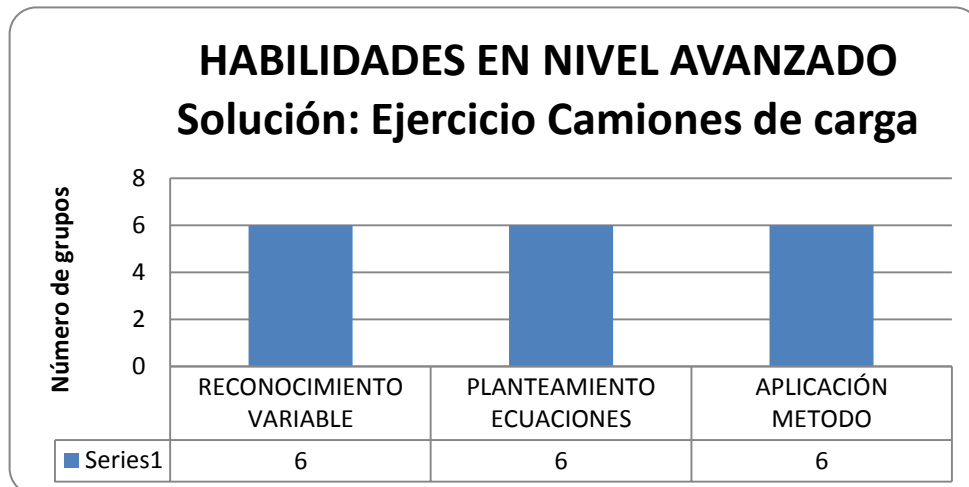
Tabla 48. Solución: Ejercicio 2 Camiones. Método asignado por estudiante. Grupo G6.

Método Igualación. Estudiante EM8 (G6)	Método Reducción. Estudiante EM6 (G6)
<p>Igualación EM8</p> $\begin{aligned} x + y &= 23 \\ 3x + 4y &= 80 \end{aligned}$ $\begin{aligned} x - x & & 3x + 4y &= 80 - 4y \\ 23 - y - 80 - 4y & & & \\ 3(23 - y) &= 80 - 4y \\ 69 - 3y - 80 - 4y & & & \\ -3y + 4y &= 80 - 69 \\ y &= 11 \end{aligned}$ $\begin{aligned} x + y &= 23 \\ x + (11) &= 23 \\ x &= 23 - 11 \\ x &= 12 \end{aligned}$ <p><math>R(12, 11)</math></p>	<p>Reducción EM6</p> $\begin{aligned} x + y &= 23 \quad \cdot -3 \\ 3x + 4y &= 80 \end{aligned}$ $\begin{aligned} -3x - 3y &= -69 \\ 3x + 4y &= 80 \\ \hline y &= 11 \end{aligned}$ $\begin{aligned} x + (11) &= 23 \\ x &= 23 - 11 \\ x &= 12 \end{aligned}$
Método Sustitución. Estudiante EH6 (G6)	Método Crámer. Estudiante EH7 (G6)
<p>Sustitución EH6</p> $\begin{aligned} x + y &= 23 \\ 3x + 4y &= 80 \end{aligned}$ $\begin{aligned} x + y &= 23 \\ x &= 23 - y \end{aligned}$ $\begin{aligned} 3(23 - y) + 4y &= 80 \\ 69 - 3y + 4y &= 80 \\ -3y + 4y &= 80 - 69 \\ y &= 11 \end{aligned}$ $\begin{aligned} x + 11 &= 23 \\ x &= 23 - 11 \\ x &= 12 \end{aligned}$	<p>EH7</p> $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 1 \times 3 = 4 - 3 = 1$ $\Delta x = \begin{vmatrix} 23 & 1 \\ 80 & 4 \end{vmatrix} = (23 \times 4) - (1 \times 80) = 92 - 80 = 12$ $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 23 \\ 3 & 80 \end{vmatrix} = (1 \times 80) - (23 \times 3) = 80 - 69 = 11$ $x = \frac{\Delta x}{\Delta A} = \frac{12}{1} = 12$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta A} = \frac{11}{1} = 11$
Aplicación propuesta Volquetas. GRUPO: G6 (MÉTODO GRÁFICO) "GRAPHMATICA"	

**Tabla 49. Resumen: Solución Ejercicio 2 Camiones de carga. Método asignado por integrante del grupo.**

ACTIVIDAD MATEMATICA	NIVEL AVANZADO DE SOLUCIÓN
RECONOCIMIENTO VARIABLE	6
PLANTEAMIENTO ECUACIONES	6
APLICACIÓN METODO	6

**Gráfica 57. HABILIDADES EN NIVEL AVANZADO Solución: Ejercicio Camiones de carga**



Todos los integrantes de cada grupo han realizado en forma correcta la solución de la aplicación del ejercicio 2, sobre las cargas realizadas por dos tipos de camión, en cada una de las habilidades evaluadas, tanto en el reconocimiento de las variables, así como también en el planteamiento de las ecuaciones y en la aplicación del método asignado a cada uno de los estudiantes de cada grupo, lo cual demuestra en esta parte del taller que el tema es asimilado apropiadamente por los estudiantes.

Una vez los grupos resuelven esta situación, los estudiantes de cada grupo confrontan sus respuestas y los resultados de dicha confrontación dan origen a la tabla 6 del ANEXO G, con los argumentos propuestos por los estudiantes de los diferentes grupos.

**Secuencia didáctica 2. Tercera fase.** Finalmente cada grupo conformado planteará una situación de su contexto relacionada a los sistemas de ecuaciones 2x2, y la resolverán por cualquiera de los métodos, cumpliendo con los siguientes pasos:

- **Planteamiento de situaciones problema:** Los grupos propondrán una situación de su propio contexto que consideren pueda ser solucionada por los métodos de ecuaciones lineales y elegirán el que más dominen.
- **Solución del ejercicio de su entorno:** Cada estudiante del grupo plantea las ecuaciones que surgen de la situación planteada y solucionara el ejercicio propuestos por ellos mismos, por el método elegido.
- **Discusión de respuestas:** Los estudiantes comparan y discuten los resultados obtenidos con otros grupos y lo que estos representarían de acuerdo a la situación planteada. Finalmente se socializarán los resultados y conclusiones obtenidas por cada grupo.

**Tabla 50. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 3. Planteamiento por los estudiantes de una Situación real.**

GRUPO	PROBLEMA PROPUESTO POR LOS GRUPOS	ECUACIONES PLANTEADAS POR LOS GRUPOS
G1	<p>2 atletas corrieron en la maratón quince, el número 1 corrió 15 minutos y por minuto corre 25 metros, el número 2 corrió 18 minutos ¿Cuál atleta corrió más?</p>	No presenta ecuaciones

Continuación tabla 50

G2	<p><b>Problema</b> Hay 2 Heladeros, la primera produce 50 helados de Fresa y 20 de chocolate al día, la segunda produce 75 de Fresa y 12 de chocolate al día. Si al cabo de una semana producen 1500 helados ¿Cuántos produce cada una?</p>	$x + y = 1500$ $70x + 37 = 1500$
G3	<p>El niño Aníbal come 4 libras de pavo a la semana que cuesta \$500 y el corte estirado lo consume 2 veces a la semana y le cuesta por cada una \$20 ¿Cuánto gasta el dueño a la semana por los dos pava?</p>	<p><math>x = \text{pavo}</math> } variable <math>y = \text{corte}</math> }</p> $x + y = 580$ $4x + 2y = 920$
G4	<p>En una fábrica de calzado se diseñan zapatos tanto de hombre como mujer y su producción por hora son de 100 y 80 zapatos, por día 240 y 120 de calzado</p>	$x + 100y = 240$ $x + 8y = 120.$
G5	<p>Maria compró 4 cajas de helado y 5 cajas de manzanas por un total de 37 y Julian compró 2 cajas de helado y 7 de manzanas por un total de 48.</p>	<p>Maria <math>4x + 5y = 37</math> Julian <math>x + 7y = 48</math></p>
G6	<p>Con dos carros de velocidad de 10 kilómetros y el otro de 80 se hicieron 3 viajes para transportar 15 personas.</p>	$x + y = 3$ $10x + 80y = 15.$

NOTA: Se observa en los estudiantes mucha confusión y expresaron que no sabían cómo plantear adecuadamente una situación que genere un sistema de ecuaciones 2x2.

**Interpretación aspectos positivos.** A destacar los siguientes detalles en esta parte de la actividad:

- Todos los grupos tienen claro que en este tipo de problemas, es necesario confrontar dos componentes que forman parte de un mismo fenómeno o situación.
- El grupo G5 fue el grupo que más se aproximó a un planteamiento adecuado de un sistema 2x2, solo que no culminó su planteamiento, formulando una

pregunta, pero toda la información de su ejercicio habría sido correcta y se hubiera preguntado por ejemplo: ¿Cuánto cuesta cada caja de helados y de manzanas?

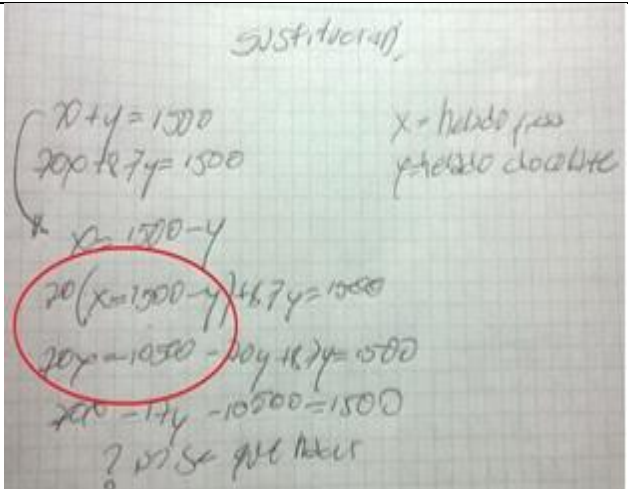
- Al plantear las ecuaciones todos los grupos relacionan cada componente o elemento de la situación a una variable. Ejemplo Gatos angora = X. Gato Egipcio = Y. A excepción del grupo 1 que no tuvo idea de cómo plantear las ecuaciones.
- Las ecuaciones planteadas, aunque las variables no presentan coeficientes coherentes al planteamiento de la situación en todos los casos, se puede evidenciar la claridad de la estructura de una ecuación, con una variable X, otra variable Y, y un resultado o termino independiente al cual se igualan las dos cantidades que representan las variables.
- Los estudiantes son intuitivamente capaces de reconocer que sus planteamientos tienen incoherencias que les impide completar el ejercicio con la aplicación de los métodos para solucionar ecuaciones 2x2, pues no se aventuran a solucionarlo por que reconocen que sus respuestas serian sin sentido común.

**Interpretación aspectos negativos.** Las principales dificultades halladas en el grupo fueron:

- Existe mucha dificultad en los estudiantes en su competencia propositiva, pues no tienen claridad para plantear una situación real que pueda asociarse apropiadamente, en este caso a un sistema de ecuaciones 2x2.
- Al no haber claridad de la forma como deben asignarse valores en un problema para confrontar dos situaciones reales, no pueden los estudiantes plantear adecuadamente ecuaciones que den solución al ejercicio.
- Como las ecuaciones quedan mal planteadas, los estudiantes se bloquean para resolver y aplicar los métodos aprendidos en clase, correspondientes a este tipo de ejercicios creados por ellos mismos.
- De acuerdo a lo anterior, resulta importante y necesario, incrementar el trabajo donde se requiera que los estudiantes propongan y planteen ejercicios que modelen los diferentes conceptos matemáticos trabajados en clase.

Cada grupo debía solucionar el problema que ellos mismos habían planteado, por un método diferente, que les asignaba el profesor. Los grupos G1 y G2 no presentaron claridad para ejecutar los pasos del método, tal como puede observarse en la siguiente tabla.

**Tabla 51. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 3. Solución insuficiente de Situación real planteada por los grupos G1 y G2.**

GRUPO	SOLUCIÓN	MÉTODO ASIGNADO E INTERPRETACIÓN
G1	No presenta solución	<p><b>IGUALACIÓN.</b> El grupo al no presentar las ecuaciones del ejercicio no lo pueden resolver.</p>
G2		<p><b>SUSTITUCIÓN.</b> No tienen clara la información que han planteado y ambas ecuaciones las igualan a un mismo dato dentro del problema, lo cual les enreda la solución que además presenta errores procedimentales, al sustituir erradamente el valor de la variable X y aplicar mal la ley distributiva de la multiplicación.</p>

Por otra parte, los grupos G3, G4, G5 y G6, han tenido un desempeño satisfactorio en la aplicación del método, pues a pesar de presentar errores en el planteamiento del problema propuesto, han desarrollado acertadamente algunos pasos propios de la solución por este método.

Tabla 52. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 3. Solución satisfactoria de Situación real planteada por los grupos G3, G4, G5 y G6.

GRUPO G3 "CRÁMER"	GRUPO G4 "REDUCCIÓN"
<p>Método Cramer</p> $\begin{cases} x + y = 580 \\ 1x + 2y = 970 \end{cases}$ $\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 580 & 1 \\ 970 & 2 \end{vmatrix} = 1160 - 970 = 190$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 580 \\ 1 & 970 \end{vmatrix} = 970 - 580 = 390$ $x = \frac{190}{1} = 190$ $y = \frac{390}{1} = 390$	<p>Problema propuesto</p> <p>Solución</p> $\begin{cases} x = \text{zapato hombre} \\ y = \text{zapato mujer} \end{cases}$ <p>Método reducción</p> <p>Paso 1</p> $\begin{cases} x + 100y = 240 \\ x + 2y = 120 \end{cases} \quad +(-1)$ $\begin{matrix} x + 100y = 240 \\ -x + 2y = -120 \\ \hline 98y = 120 \\ y = \frac{120}{98} = \frac{30}{23} \end{matrix}$ <p>Paso 2</p> $\begin{cases} x + 8y = 120 \\ x + 2(\frac{30}{23}) = 120 \end{cases}$ $x + \frac{60}{23} = 120$ $x = 120 - \frac{60}{23} = \frac{2760 - 60}{23} = \frac{2700}{23}$ <p>No se si esta bien?</p>
GRUPO G5 "IGUALACIÓN"	GRUPO G5 "SUSTITUCIÓN"
<p>Método igualación</p> $\begin{cases} 4x + 5y = 39 \\ x + 2y = 17 \end{cases}$ $x = \frac{39 - 5y}{4} = 9.75 - 1.25y$ $9.75 - 1.25y + 2y = 17$ $9.75 + 0.75y = 17$ $0.75y = 17 - 9.75$ $0.75y = 7.25$ $y = \frac{7.25}{0.75} = \frac{29}{3}$ $x = \frac{39 - 5(\frac{29}{3})}{4} = \frac{117 - 145}{12} = \frac{-28}{12} = \frac{-7}{3}$	<p>Método sustitución</p> $\begin{cases} 10x + 80y = 15 \\ x + y = 3 \end{cases}$ $x = 3 - y$ $10(3 - y) + 80y = 15$ $30 - 10y + 80y = 15$ $70y = 15 - 30$ $70y = -15$ $y = \frac{-15}{70} = \frac{-3}{14}$ $x = 3 - \frac{-3}{14} = \frac{42}{14} + \frac{3}{14} = \frac{45}{14}$
<b>PROBLEMA PROPUESTO POR ESTUDIANTES GRUPO: G3 (MÉTODO GRÁFICO) "GRAPHMATICA"</b>	

**Interpretación:** Estos grupos muestran claridad en la solución del ejercicio, pues sus procedimientos fueron aplicados correctamente, de acuerdo al método

asignado, pero la información no es coherente, en el planteamiento del ejercicio, luego los resultados arrojados no tienen sentido.

**4.3.3 Secuencia didáctica 3: Identificar errores al solucionar sistemas de ecuaciones lineales 2x2.** En grupos de 4 estudiantes revisan tres problemas resueltos e identifican los posibles errores conceptuales o procedimentales presentes en su solución al aplicar los métodos de igualación, reducción y sustitución, comparan resultados con otros grupos y posteriormente se desplazan con el profesor al aula de informática, para revisar la solución de todos los ejercicios de la unidad por el método gráfico, con la ayuda del software Graphmatica.

En este momento se realizará en grupos de estudiantes, y estará centrado en probar tu capacidad interpretativa y propositiva, desarrollando tareas de comparación y verificación de información en la que se han desarrollado situaciones del contexto, con la aplicación de los métodos para solución de ecuaciones 2x2 donde identificarán, cuáles de ellas suministran respuestas válidas y coherentes al problema propuesto y con el desarrollo de los procedimientos adecuados y cuáles de ellas presentan errores en sus procedimientos para elegir y proponer en grupo, posibles estrategias de solución y tomar las decisiones que serían válidas para corregir los resultados.

**Metodología.** Organizada en la siguiente forma:

- **Análisis de situaciones:** de una cantidad de situaciones del contexto que el profesor suministra ya resueltos a un grupo de estudiantes, revisarán los procedimientos aplicados.
- **Verificación de procedimientos y respuestas:** cada grupo de estudiantes debió realizar procesos de análisis y comparación de procedimientos y respuestas, para identificar cuáles fueron bien desarrollados y cuáles presentaron errores.

- **Propuesta de ajustes procedimentales:** El estudiante discutió con sus compañeros acerca de los errores descubiertos y de la forma como pueden repercutir estos en una situación de la vida real y propondrá los ajustes que considere necesarios para solucionarlos.
- **Corrección del ejercicio:** Los estudiantes realizaron los ajustes que propusieron para solucionar los errores del ejercicio y escribirán en su cuaderno de apuntes las conclusiones que obtienen de esta experiencia.
- **Exposición de resultados:** De esta experiencia cada grupo expondrá la hipótesis resuelta y los resultados y conclusiones obtenidas de dicho proceso.

**Ejercicio 1:** Se reúnen 30 estudiantes entre hombres y mujeres. Se sabe que el doble de los hombres excede en 10 al triple de las mujeres. Plantear y resolver el sistema de ecuaciones por el método de igualación.

En la solución del ejercicio propuesto, se presentan 4 errores que aparecen explicados a continuación.

$X = \text{Número de hombres}$   
 $Y = \text{Número de mujeres}$

$$\begin{array}{l}
 X + Y = 30 \\
 2X = 3Y + 10
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{l}
 X + Y = 30 \\
 2X - 3Y = 10
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 Y = 30 - X \\
 Y = \frac{10 - 2X}{3}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 Y = Y \\
 30 - X = \frac{10 - 2X}{3}
 \end{array}$$

1 el denominador debía ser -3

$$\begin{array}{l}
 3(30 - X) = 10 - 2X \\
 90 - X = 10 - 2X \\
 -X - 2X = -90 + 10 \\
 -3X = -80 \\
 X = \frac{-80}{-3} = -26,66
 \end{array}$$

2 Error ley distributiva de la multiplicación

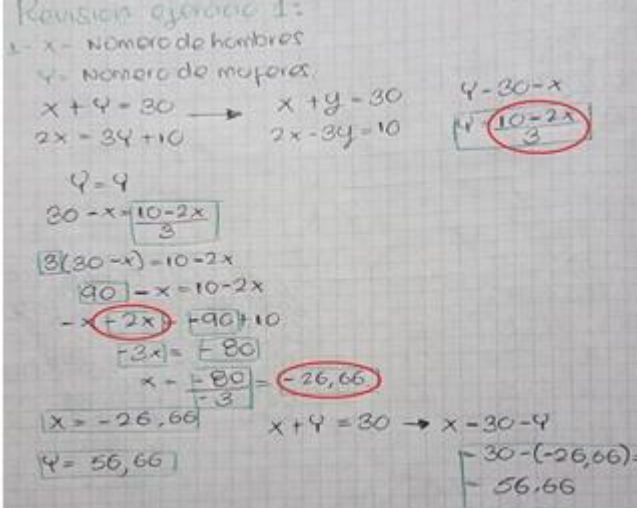
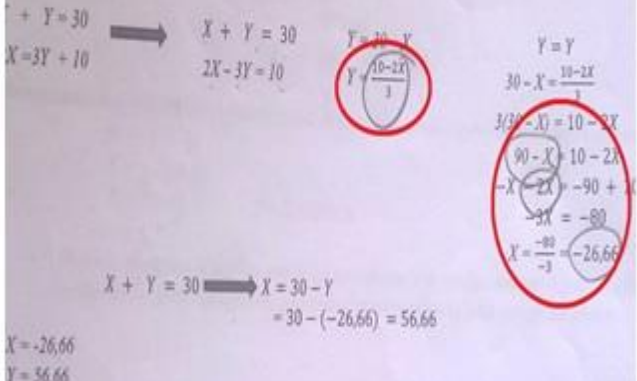
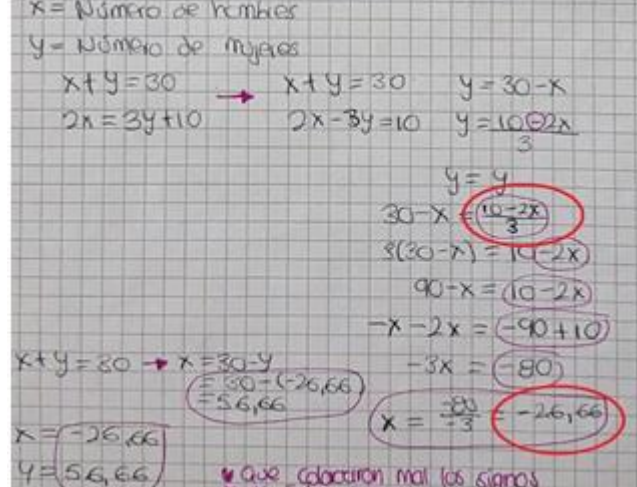
3 Error de signos

4 Error de signos al dividir

$X = -26,66$   
 $Y = 56,66$

En este ejercicio, se evalúa la capacidad de los estudiantes para identificar errores de signos y ley distributiva de la multiplicación. Las respuestas de los estudiantes fueron:

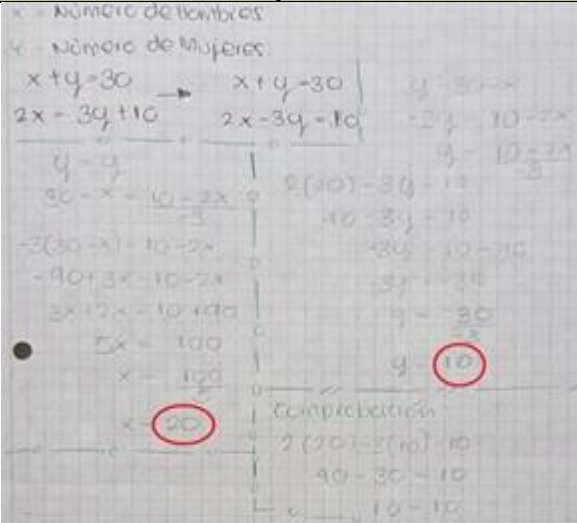
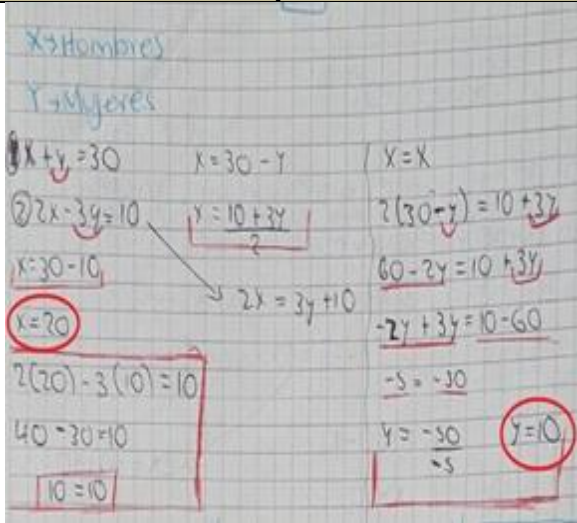
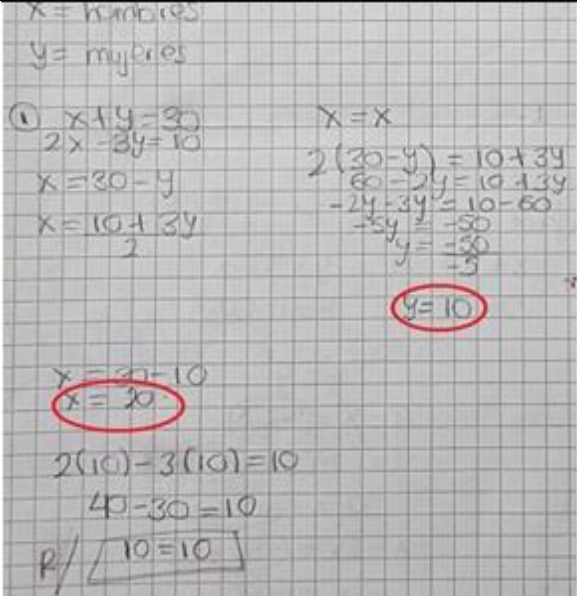
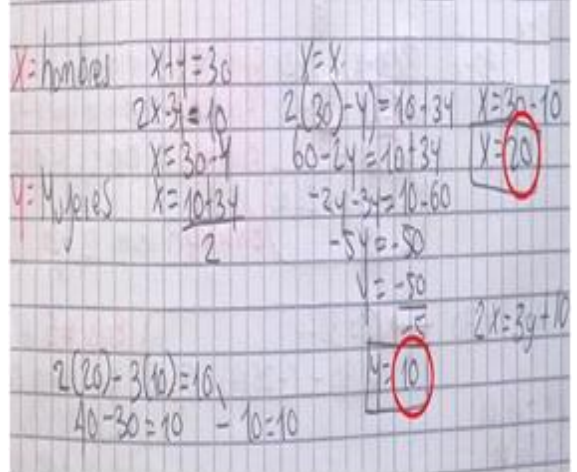
**Tabla 53. Unidad didáctica, Secuencia 3. Reconocimiento de errores, Ejercicio 1, Método de Igualación.**

GRUPO	ERRORES DETECTADOS EJERCICIO 1	INTERPRETACIÓN
G1	 <p>Revisión ejercicio 1:  <math>x</math> - Número de hombres  <math>y</math> - Número de mujeres  <math>x + y = 30 \rightarrow x + y = 30</math>  <math>2x = 3y + 10 \rightarrow 2x - 3y = 10</math>  <math>y = 30 - x</math>  <math>y = \frac{10 - 2x}{3}</math>  <math>3(30 - x) = 10 - 2x</math>  <math>90 - x = 10 - 2x</math>  <math>-x + 2x = 10 - 90</math>  <math>x = \frac{-80}{-3} = -26,66</math>  <math>x = -26,66</math>  <math>y = 56,66</math>  <math>x + y = 30 \rightarrow x = 30 - y</math>  <math>30 - (-26,66) = 56,66</math></p>	<p>Aunque encontraron los errores 1, 3 y 4, parece que no hay plena claridad de en qué consiste el ejercicio, pues señalan una cantidad de errores inexistentes, y no queda claro si los aciertos que han tenido sean por dominio del tema o por haber marcado tantos errores, inclusive en algunos pasos donde no había error.</p> <p><b>R/ SATISFACTORIA</b></p>
G2	 <p><math>x + y = 30 \rightarrow x + y = 30</math>  <math>x = 30 - y</math>  <math>2x = 3y + 10 \rightarrow 2x - 3y = 10</math>  <math>y = \frac{10 - 2x}{3}</math>  <math>y = y</math>  <math>30 - x = \frac{10 - 2x}{3}</math>  <math>3(30 - x) = 10 - 2x</math>  <math>90 - 3x = 10 - 2x</math>  <math>-x - 2x = 10 - 90</math>  <math>-3x = -80</math>  <math>x = \frac{-80}{-3} = -26,66</math>  <math>x + y = 30 \rightarrow x = 30 - y</math>  <math>= 30 - (-26,66) = 56,66</math>  <math>x = -26,66</math>  <math>y = 56,66</math></p>	<p>El grupo identificó correctamente los 4 errores planteados en el ejercicio.</p> <p><b>R/ AVANZADA</b></p>
G3	 <p><math>x</math> = Número de hombres  <math>y</math> = Número de mujeres  <math>x + y = 30 \rightarrow x + y = 30</math>  <math>2x = 3y + 10 \rightarrow 2x - 3y = 10</math>  <math>y = 30 - x</math>  <math>y = \frac{10 - 2x}{3}</math>  <math>y = y</math>  <math>30 - x = \frac{10 - 2x}{3}</math>  <math>3(30 - x) = 10 - 2x</math>  <math>90 - x = 10 - 2x</math>  <math>-x - 2x = 10 - 90</math>  <math>-3x = -80</math>  <math>x = \frac{-80}{-3} = -26,66</math>  <math>x + y = 30 \rightarrow x = 30 - y</math>  <math>= 30 - (-26,66) = 56,66</math>  <math>x = -26,66</math>  <math>y = 56,66</math>      * Que colocaron mal los signos      * No sabe sumar.</p>	<p>El grupo identificó correctamente los errores 1 y 4, pero no hay claridad en el ejercicio, pues continua señalando la repercusión de los primeros errores identificados.</p> <p><b>R/ SATISFACTORIA</b></p>

Continuación tabla 53

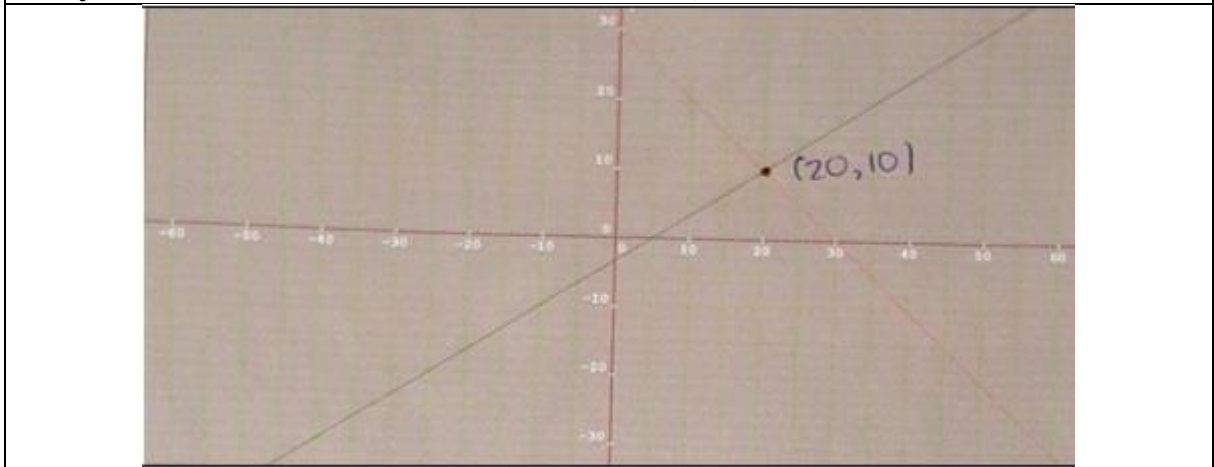
<p>G4</p>		<p>El grupo encontró los errores 1, 3 y 4, solo el error 2 no fue identificado.</p> <p><b>R/SATISFACTORIA</b></p>
<p>G5</p>		<p>Aunque encontraron todos los errores, parece que no hay plena claridad del ejercicio, pues señalan una cantidad de errores reiteradamente, como consecuencia de los errores iniciales detectados.</p> <p><b>R/ AVANZADA</b></p>
<p>G6</p>		<p>El grupo encontró los errores 2, 3 y 4, solo el error 1 no fue identificado.</p> <p><b>R/SATISFACTORIA</b></p>

Tabla 54. Unidad didáctica, Secuencia 3. Correcciones propuestas por los grupos de estudiantes frente a errores, Ejercicio 1, Método de Igualación.

<b>CORRECCIONES EJERCICIO 1 "IGUALACIÓN"</b>	
<b>Grupo G1</b>	<b>Grupo G2</b>
 <p>Ejercicio resuelto correctamente y con procedimientos claros. <b>R/ AVANZADA</b></p>	 <p>Ejercicio resuelto correctamente pero presenta desorden en los procedimientos, lo que dificulta su solución. <b>R/ AVANZADA</b></p>
<b>Grupo G3</b>	<b>Grupo G4</b>
	

Grupo G5	Grupo G6
$\begin{aligned} X+Y &= 30 & Y &= 30-X \\ 2X-3Y &= 10 & & \\ & & Y &= \frac{10-2X}{-3} \\ & & Y &= Y \\ \frac{10-2X}{-3} &= 30-X \\ 10-2X &= -90+3X \\ 10-2X &= -90+3X \\ 10+90 &= 3X+2X \\ 100 &= 5X \\ X &= \frac{100}{5} & & 20 \end{aligned}$	$\begin{aligned} X &= \text{Hombres} \\ Y &= \text{Mujeres} \\ X &= X \\ \textcircled{1} X+Y &= 30 & 2(30-Y) &= 10+3Y & X &= 30-10 \\ 2X-3Y &= 10 & 60-2Y &= 10+3Y & X &= 20 \\ X+30-Y & & -2Y-3Y &= 10-60 & & 2(20)-3(10) &= 10 \\ X &= \frac{10+3Y}{2} & -5Y &= -50 & & 40-30 &= 10 \\ & & Y &= \frac{-50}{-5} & & & 10=10 \\ & & Y &= 10 & & & \end{aligned}$

**Ejercicio 1 Corrección de errores. GRUPO: G5 (MÉTODO GRÁFICO) "GRAPHMATICA"**



**Ejercicio 2:** Con dos camiones cuya capacidad de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizaron cada camión? Resolver por el método de eliminación

En este ejercicio no se presentan errores procedimentales, pero las ecuaciones fueron mal planteadas, tal como se muestra a continuación:

- Establecemos las variables:  $x =$  viajes camión 1  
 $y =$  viajes camión 2
- Planteamos las ecuaciones de las dos informaciones del ejercicio:

Los viajes del camión 1 más los del camión 2 son:

1  $x + y = 80$  ECUACIÓN MAL PLANTEADA  
ECUACIÓN CORRECTA  $X+Y=23$

Las toneladas transportadas en los viajes hechos por cada camión será:

2  $3x + 4y = 23$  ECUACIÓN MAL PLANTEADA  
ECUACIÓN CORRECTA  $3X+4Y=80$

- Formamos el sistema de ecuaciones 2x2

$$\begin{array}{l} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 23 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 23 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{array}$$

- Por el método de reducción multiplicamos la primera ecuación por  $(-3)$  para eliminar  $x$ :

$$\begin{array}{r} x + y = 80 \quad (-3) \\ 3x + 4y = 23 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} -3x - 3y = -240 \\ \underline{3x + 4y = 23} \\ y = -217 \end{array}$$

- Hacemos lo mismo para eliminar  $y$ , multiplicando la ecuación 1 por  $(-4)$ :

$$\begin{array}{r} x + y = 80 \quad (-4) \\ 3x + 4y = 23 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} -4x - 4y = -320 \\ \underline{3x + 4y = 23} \\ -x = -297 \end{array} \quad \text{3 } x = -297 \quad \text{ERROR DE SIGNO}$$

En este ejercicio, se da preferencia en la evaluación de las respuestas de los estudiantes, a la capacidad para identificar el error 1 y 2 sobre el planteamiento de las ecuaciones, que se requieren antes de aplicar cualquiera de los métodos correspondientes al presente estudio. Las respuestas de los estudiantes fueron:

**Tabla 55. Unidad didáctica, Secuencia 3. Reconocimiento de errores, Ejercicio 2, Método de Reducción.**

GRUPO	ERRORES DETECTADOS EJERCICIO 2	INTERPRETACIÓN
G1	<p>Establecemos las variables: <math>x = \text{viajes camión 1}</math>  <math>y = \text{viajes camión 2}</math></p> <p>Planteamos las ecuaciones de las dos informaciones del ejercicio:</p> <p>Los viajes del camión 1 más los del camión 2 son:</p> $x + y = 80$ <p>Las toneladas transportadas en los viajes hechos por cada camión será:</p> $3x + 4y = 23$ <p>Formamos el sistema de ecuaciones 2x2</p> $\begin{cases} x + y = 80 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 23 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$ <p>Por el método de reducción multiplicamos la primera ecuación por (-3) para eliminar x:</p> $\begin{array}{r} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -3x - 3y = -240 \\ \hline \phantom{-3x} + y = -217 \end{array}$ <p>Hacemos lo mismo para eliminar y, multiplicando la ecuación 1 por (-4):</p> $\begin{array}{r} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -4x - 4y = -320 \\ \hline \phantom{-4x} + y = -297 \end{array}$ <p><math>x = -297</math></p>	<p>El grupo G1 identifica el error 3 correspondiente al manejo de signos, pero muestra dificultad para identificar la forma correcta de plantear una ecuación de dos variables, con la información suministrada por el ejercicio, pues no detecto los errores 1 y 2.</p> <p>Solución: SATISFACTORIA</p>
G2	<p>Establecemos las variables: <math>x = \text{viajes camión 1}</math>  <math>y = \text{viajes camión 2}</math></p> <p>Planteamos las ecuaciones de las dos informaciones del ejercicio:</p> <p>Los viajes del camión 1 más los del camión 2 son:</p> $x + y = 80$ <p>Las toneladas transportadas en los viajes hechos por cada camión será:</p> $3x + 4y = 23$ <p>Formamos el sistema de ecuaciones 2x2</p> $\begin{cases} x + y = 80 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 23 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$ <p>Por el método de reducción multiplicamos la primera ecuación por (-3) para el:</p> $\begin{array}{r} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -3x - 3y = -240 \\ \hline \phantom{-3x} + y = -217 \end{array}$ <p>Hacemos lo mismo para eliminar y, multiplicando la ecuación 1 por (-4):</p> $\begin{array}{r} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -4x - 4y = -320 \\ \hline \phantom{-4x} + y = -297 \end{array}$ <p><math>x = -297</math></p>	<p>El grupo G2, ha logrado identificar los errores 1 y 2, correspondientes al planteamiento de las ecuaciones generadas por la información del ejercicio, pero no detectaron el error de signos presente al final de la solución.</p> <p>Solución: AVANZADA</p>
G3	<p>Establecemos las variables: <math>x = \text{viajes camión 1}</math>  <math>y = \text{viajes camión 2}</math></p> <p>Planteamos las ecuaciones de las dos informaciones del ejercicio:</p> <p>Los viajes del camión 1 más los del camión 2 son:</p> $x + y = 80$ <p>Las toneladas transportadas en los viajes hechos por cada camión será:</p> $3x + 4y = 23$ <p>Formamos el sistema de ecuaciones 2x2</p> $\begin{cases} x + y = 80 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 23 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$ <p>Por el método de reducción multiplicamos la primera ecuación por (-3) para elimi</p> $\begin{array}{r} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -3x - 3y = -240 \\ \hline \phantom{-3x} + y = -217 \end{array}$ <p>Hacemos lo mismo para eliminar y, multiplicando la ecuación 1 por (-4):</p> $\begin{array}{r} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -4x - 4y = -320 \\ \hline \phantom{-4x} + y = -297 \end{array}$ <p><math>x = -297</math></p>	<p>El grupo G3, ha logrado identificar todos los errores, tanto del planteamiento de las ecuaciones como el correspondiente al manejo de signos.</p> <p>Solución: AVANZADA</p>

Continuación tabla 55

<p>G4</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecemos las variables: <math>x =</math> viajes camión 1 <math>y =</math> viajes camión 2</li> <li>• Planteamos las ecuaciones de las dos informaciones del ejercicio: Los viajes del camión 1 más los del camión 2 son: <math display="block">x + y = 80</math> Las toneladas transportadas en los viajes hechos por cada camión será: <math display="block">3x + 4y = 23</math></li> <li>• Formamos el sistema de ecuaciones 2x2 <math display="block">\begin{cases} x + y = 80 &amp; \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 23 &amp; \text{Ecuación 2} \end{cases}</math></li> <li>• Por el método de reducción multiplicamos la primera ecuación por (-3) para eliminar x: <math display="block">\begin{array}{r} x + y = 80 \quad (-3) \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -3x - 3y = -240 \\ \phantom{-3x} + 4y = 23 \\ \hline y = -217 \end{array}</math></li> <li>• Hacemos lo mismo para eliminar y, multiplicando la ecuación 1 por (-4): <math display="block">\begin{array}{r} x + y = 80 \quad (-4) \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -4x - 4y = -320 \\ \phantom{-4x} + 4y = 23 \\ \hline -x = -297 \end{array}</math> <math display="block">x = -297</math></li> </ul>	<p>El grupo G1 identifica el error 3 correspondiente al manejo de signos, pero muestra dificultad para identificar la forma correcta de plantear una ecuación de dos variables, con la información suministrada por el ejercicio, pues no detecto los errores 1 y 2.</p> <p>Solución: SATISFACTORIA</p>
<p>G5</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecemos las variables: <math>x =</math> viajes camión 1 <math>y =</math> viajes camión 2</li> <li>• Planteamos las ecuaciones de las dos informaciones del ejercicio: Los viajes del camión 1 más los del camión 2 son: <math display="block">x + y = 80</math> Las toneladas transportadas en los viajes hechos por cada camión será: <math display="block">3x + 4y = 23</math></li> <li>• Formamos el sistema de ecuaciones 2x2 <math display="block">\begin{cases} x + y = 80 &amp; \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 23 &amp; \text{Ecuación 2} \end{cases}</math></li> <li>• Por el método de reducción multiplicamos la primera ecuación por (-3) para eliminar x: <math display="block">\begin{array}{r} x + y = 80 \quad (-3) \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -3x - 3y = -240 \\ \phantom{-3x} + 4y = 23 \\ \hline y = -217 \end{array}</math></li> <li>• Hacemos lo mismo para eliminar y, multiplicando la ecuación 1 por (-4): <math display="block">\begin{array}{r} x + y = 80 \quad (-4) \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -4x - 4y = -320 \\ \phantom{-4x} + 4y = 23 \\ \hline -x = -297 \end{array}</math> <math display="block">x = -297</math></li> </ul> <p><i>No encontramos error</i></p>	<p>El grupo G1 identifica el error 3 correspondiente al manejo de signos, pero muestra dificultad para identificar la forma correcta de plantear una ecuación de dos variables, con la información suministrada por el ejercicio, pues no detecto los errores 1 y 2.</p> <p>Solución: INSUFICIENTE</p>
<p>G6</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecemos las variables: <math>x =</math> viajes camión 1 <math>y =</math> viajes camión 2</li> <li>• Planteamos las ecuaciones de las dos informaciones del ejercicio: Los viajes del camión 1 más los del camión 2 son: <math display="block">x + y = 80</math> Las toneladas transportadas en los viajes hechos por cada camión será: <math display="block">3x + 4y = 23</math></li> <li>• Formamos el sistema de ecuaciones 2x2 <math display="block">\begin{cases} x + y = 80 &amp; \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 23 &amp; \text{Ecuación 2} \end{cases}</math></li> <li>• Por el método de reducción multiplicamos la primera ecuación por (-3) para eliminar x: <math display="block">\begin{array}{r} x + y = 80 \quad (-3) \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -3x - 3y = -240 \\ \phantom{-3x} + 4y = 23 \\ \hline y = -217 \end{array}</math></li> <li>• Hacemos lo mismo para eliminar y, multiplicando la ecuación 1 por (-4): <math display="block">\begin{array}{r} x + y = 80 \quad (-4) \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -4x - 4y = -320 \\ \phantom{-4x} + 4y = 23 \\ \hline -x = -297 \end{array}</math> <math display="block">x = -297</math></li> </ul>	<p>El grupo G1 identifica el error 3 correspondiente al manejo de signos, pero muestra dificultad para identificar la forma correcta de plantear una ecuación de dos variables, con la información suministrada por el ejercicio, pues no detecto los errores 1 y 2.</p> <p>Solución: SATISFACTORIA</p>

Tabla 56. Unidad didáctica, Secuencia 3. Correcciones propuestas por los grupos de estudiantes frente a errores, Ejercicio 1, Método de Reducción.

CORRECCIÓN EJERCICIO 2. SECUENCIA DIDÁCTICA 3.		
Grupo G1	Grupo G2	Grupo G3
<p>→ Método de reducción.</p> $\begin{aligned} x + y &= 23 \\ 3x + 4y &= 80 \\ -3x - 3y &= -69 \\ \hline 3x + 4y &= 80 \\ y &= 11 \end{aligned}$ <p>Rta (12, 11)</p> $\begin{aligned} x + (11) &= 23 \\ x &= 23 - 11 \\ x &= 12 \end{aligned}$	<p>Reduccion</p> $\begin{aligned} x + y &= 23 \\ 3x + 4y &= 80 \\ -3x - 3y &= -69 \\ \hline 3x + 4y &= 80 \\ y &= 11 \end{aligned}$ $\begin{aligned} x + (11) &= 23 \\ x &= 23 - 11 \\ x &= 12 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x + y &= 23 \quad \times 3 \\ 3x + 4y &= 80 \\ -3x - 3y &= -69 \rightarrow \text{Reduccion} \\ \hline 3x + 4y &= 80 \\ y &= 11 \end{aligned}$ $\begin{aligned} x + (11) &= 23 \\ x &= 23 - 11 \\ x &= 12 \end{aligned}$
Grupo G4	Grupo G5	Grupo G6
<p>Reduccion</p> $\begin{aligned} x + y &= 23 \quad \times -3 \\ 3x + 4y &= 80 \\ -3x - 3y &= -69 \\ \hline 3x + 4y &= 80 \\ y &= 11 \end{aligned}$ $\begin{aligned} y + (11) &= 23 \\ y &= 23 - 11 \\ y &= 12 \end{aligned}$	<p>-REDUCCION</p> $\begin{aligned} x + y &= 23 \times 3 \\ 3x + 4y &= 80 \\ -3x - 3y &= -69 \\ \hline 3x + 4y &= 80 \\ y &= 11 \end{aligned}$ $\begin{aligned} x + (11) &= 23 \\ x &= 23 - 11 \\ x &= 12 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x + y &= 23 \quad \times -3 \\ 3x + 4y &= 80 \\ -3x - 3y &= -69 \\ \hline 3x + 4y &= 80 \\ y &= 11 \end{aligned}$ $\begin{aligned} x + (11) &= 23 \\ x &= 23 - 11 \\ x &= 12 \end{aligned}$
CORRECCIÓN EJERCICIO 2. (MÉTODO GRÁFICO) "GRAPHMATICA"		

**Ejercicio 3:** Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y patas hay? (SUSTITUCIÓN). En este tercer ejercicio, al aplicar el método de sustitución, aparecen tres errores procedimentales que se muestran a continuación.

$$X = \text{CERDOS}$$

$$Y = \text{PAVOS}$$

$$X + Y = 35$$

$$4X + 2Y = 116$$

$$X = 35 + Y \quad \text{1 ERROR DE SIGNO AL DESPEJAR X}$$

$$4(35 + Y) + 2Y = 116$$

2 ERROR LEY  
DISTRIBUTIVA DE  
MULTIPLICACIÓN

$$140 + Y + 2Y = 116$$

$$3Y = 116 - 140$$

$$Y = -24/3 = -8 \text{ PAVOS}$$

*Remplazamos la cantidad de pavos hallada dentro de la primera ecuación para hallar el número de cerdos:*

$$X + Y = 35$$

$$X + (-8) = 35$$

$$X = 35 - 8$$

$$X = 27 \text{ CERDOS}$$

3 ERROR DE SIGNO AL CAMBIAR EL 8 DE LADO

En este ejercicio, se evalúa la capacidad de los estudiantes para identificar errores de signos y ley distributiva de la multiplicación. Las respuestas de los estudiantes fueron:

**Tabla 57. Unidad didáctica, Secuencia 3. Reconocimiento de errores, Ejercicio 3, Método de Sustitución.**

GRUPO	ERRORES DETECTADOS EJERCICIO 3	INTERPRETACIÓN
G1	<p> <math>X + Y = 35</math>  <math>4X + 2Y = 116</math>  <math>X = 35 + Y</math>  <math>4(35 + Y) + 2Y = 116</math>  <math>140 + Y + 2Y = 116</math>  <math>3Y = 116 - 140</math>  <math>Y = -24/3 = -8 \text{ PAVOS}</math>  <i>emplazamos la cantidad de pavos hallada dentro de la primera ecuación</i>  <math>X + Y = 35</math>  <math>X + (-8) = 35</math>  <math>X = 35 - 8</math>      <math>X = 27 \text{ CERDOS}</math> </p>	<p>El grupo G1 evidencia tener claridad en el manejo de signos, pues logró identificar los errores 1 y 3 pero el error 2 no lo detectaron, posiblemente haya dudas acerca de la ley distributiva de la multiplicación aplicada a un conjunto de datos.</p> <p>Solución: SATISFACTORIA</p>
G2	<p> <math>X + Y = 35</math>  <math>4X + 2Y = 116</math>  <math>X = 35 + Y</math>  <math>4(35 + Y) + 2Y = 116</math>  <math>140 + Y + 2Y = 116</math>  <math>3Y = 116 - 140</math>  <math>Y = -24/3 = -8 \text{ PAVOS}</math>  <i>emplazamos la cantidad de pavos hallada dentro de la primera ecuación</i>  <math>X + Y = 35</math>  <math>X + (-8) = 35</math>  <math>X = 35 - 8</math>      <math>X = 27 \text{ CERDOS}</math> </p>	<p>El grupo G2 detectó en forma correcta los 3 errores presentes en el ejercicio 3, al parecer el grupo tiene claro el tema de los signos y la ley distributiva de la multiplicación.</p> <p>Solución: AVANZADA</p>
G3	<p> <math>X + Y = 35</math>  <math>4X + 2Y = 116</math>  <math>X = 35 + Y</math>  <math>4(35 + Y) + 2Y = 116</math>  <math>140 + Y + 2Y = 116</math>  <math>3Y = 116 - 140</math>  <math>Y = -24/3 = -8 \text{ PAVOS}</math>  <i>emplazamos la cantidad de pavos hallada dentro de la primera ecuación para</i>  <math>X + Y = 35</math>  <math>X + (-8) = 35</math>  <math>X = 35 - 8</math>      <math>X = 27 \text{ CERDOS}</math> </p>	<p>El grupo G3 detectó en forma correcta los 3 errores presentes en el ejercicio 3, al parecer el grupo tiene claro el tema de los signos y la ley distributiva de la multiplicación.</p> <p>Solución: AVANZADA</p>

Continuación tabla 57

<p>G4</p>	<p> <math>X + Y = 35</math>  <math>4X + 2Y = 116</math>  <math>X = 35 + Y</math>  <math>4(35 + Y) + 2Y = 116</math>  <math>140 + Y + 2Y = 116</math>  <math>3Y = 116 - 140</math>  <math>Y = -24/3 = -8 \text{ PAVOS}</math>  <i>os la cantidad de pavos hallada dentro de la primera ecuación,</i>  <math>X + Y = 35</math>  <math>X + (-8) = 35</math>  <math>X = 35 - 8</math>  <math>X = 27 \text{ CERDOS}</math> </p>	<p>El grupo G4 evidencia tener claridad en el manejo de signos, pues logró identificar los errores 1 y 3 pero el error 2 no lo detectaron, posiblemente haya dudas acerca de la ley distributiva de la multiplicación aplicada a un conjunto de datos.</p> <p>Solución: SATISFACTORIA</p>
<p>G5</p>	<p> <math>X + Y = 35</math>  <math>4X + 2Y = 116</math>  <math>X = 35 + Y</math>  <math>4(35 + Y) + 2Y = 116</math>  <math>140 + Y + 2Y = 116</math>  <math>3Y = 116 - 140</math>  <math>Y = -24/3 = -8 \text{ PAVOS}</math>  <i>mos la cantidad de pavos hallada dentro de la primera ecuación,</i>  <math>X + Y = 35</math>  <math>X + (-8) = 35</math>  <math>X = 35 - 8</math>  <math>X = 27 \text{ CERDOS}</math> </p>	<p>El grupo G5 detectó en forma correcta los 3 errores presentes en el ejercicio 3, al parecer el grupo tiene claro el tema de los signos y la ley distributiva de la multiplicación.</p> <p>Solución: AVANZADA</p>
<p>G6</p>	<p> <math>X + Y = 35</math>  <math>4X + 2Y = 116</math>  <math>X = 35 + Y</math>  <math>4(35 + Y) + 2Y = 116</math>  <math>140 + Y + 2Y = 116</math>  <math>3Y = 116 - 140</math>  <math>Y = -24/3 = -8 \text{ PAVOS}</math>  <i>amos la cantidad de pavos hallada dentro de la primera ecuación,</i>  <math>X + Y = 35</math>  <math>X + (-8) = 35</math>  <math>X = 35 - 8</math>  <math>X = 27 \text{ CERDOS}</math> </p>	<p>El grupo G6 evidencia tener claridad en el manejo de signos, pues logró identificar los errores 1 y 3 pero el error 2 no lo detectaron, posiblemente haya dudas acerca de la ley distributiva de la multiplicación aplicada a un conjunto de datos.</p> <p>Solución: SATISFACTORIA</p>

Tabla 58. Unidad didáctica, Secuencia 3. Correcciones propuestas por los grupos de estudiantes frente a errores, Ejercicio 1, Método de Sustitución.

CORRECCIÓN EJERCICIO 3		
Grupo G1	Grupo G2	Grupo G3
<p>Secuencia 3</p> <p>X = Pavos Y = Cerdos</p> <p>① <math>x + y = 35</math> ② <math>2x + 4y = 116</math></p> <p>Sustitución</p> <p><math>x = 35 - y</math></p> <p><math>2(35 - y) + 4y = 116</math> <math>70 - 2y + 4y = 116</math> <math>-2y + 4y = 116 - 70</math> <math>2y = 46</math> <math>y = \frac{46}{2} = 23</math></p> <p><math>x = 35 - y</math> <math>= 35 - 23</math> <math>x = 12</math></p>	<p>Secuencia 3</p> <p>X = Pavos Y = Cerdos</p> <p>① <math>x + y = 35</math> ② <math>2x + 4y = 116</math></p> <p>Sustitución</p> <p>① <math>x = 35 - y</math> ② <math>2(35 - y) + 4y = 116</math> <math>70 - 2y + 4y = 116</math> <math>-2y + 4y = 116 - 70</math> <math>2y = 46</math> <math>y = \frac{46}{2} = 23</math></p> <p><math>x = 35 - y</math> <math>= 35 - 23</math> <math>x = 12</math></p>	<p>Secuencia 3</p> <p>X = Pavos Y = Cerdos</p> <p>① <math>x + y = 35</math> ② <math>2x + 4y = 116</math></p> <p>Sustitución</p> <p>① <math>x = 35 - y</math> ② <math>2(35 - y) + 4y = 116</math> <math>70 - 2y + 4y = 116</math> <math>-2y + 4y = 116 - 70</math> <math>2y = 46</math> <math>y = \frac{46}{2} = 23</math></p> <p><math>x = 35 - y</math> <math>= 35 - 23</math> <math>x = 12</math></p>
Grupo G4	Grupo G5	Grupo G6
<p>Secuencia 3</p> <p>X → Pavos Y → Cerdos</p> <p>① <math>x + y = 35</math> ② <math>2x + 4y = 116</math></p> <p>Sustitución</p> <p>① <math>x = 35 - y</math> ② <math>2(35 - y) + 4y = 116</math> <math>70 - 2y + 4y = 116</math> <math>-2y + 4y = 116 - 70</math> <math>2y = 46</math> <math>y = \frac{46}{2} = 23</math></p> <p><math>x = 35 - y</math> <math>= 35 - 23</math> <math>x = 12</math></p>	<p>Secuencia 3</p> <p>X = Pavos Y = Cerdos</p> <p>① <math>x + y = 35</math> ② <math>2x + 4y = 116</math></p> <p>Sustitución</p> <p>① <math>x = 35 - y</math> ② <math>2(35 - y) + 4y = 116</math> <math>70 - 2y + 4y = 116</math> <math>-2y + 4y = 116 - 70</math> <math>2y = 46</math> <math>y = \frac{46}{2} = 23</math></p> <p><math>x = 35 - y</math> <math>= 35 - 23</math> <math>x = 12</math></p>	<p>Secuencia 3</p> <p>X = Pavos Y = Cerdos</p> <p>① <math>x + y = 35</math> ② <math>2x + 4y = 116</math></p> <p>Sustitución</p> <p>① <math>x = 35 - y</math> ② <math>2(35 - y) + 4y = 116</math> <math>70 - 2y + 4y = 116</math> <math>-2y + 4y = 116 - 70</math> <math>2y = 46</math> <math>y = \frac{46}{2} = 23</math></p> <p><math>x = 35 - y</math> <math>= 35 - 23</math> <math>x = 12</math></p>
CORRECCIÓN EJERCICIO 2. (MÉTODO GRÁFICO) "GRAPHMATICA"		

#### 4.4 APLICACIÓN DE PRUEBA FINAL.

Una vez concluida la etapa de aplicación de los instrumentos (Taller de presaberes y Unidad didáctica), con los estudiantes de noveno grado, se aplicaron dos pruebas diagnósticas con el propósito de medir el impacto de las estrategias diseñadas en este proyecto e identificar los logros alcanzados en la enseñanza de los métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ , de acuerdo a los resultados de las pruebas.

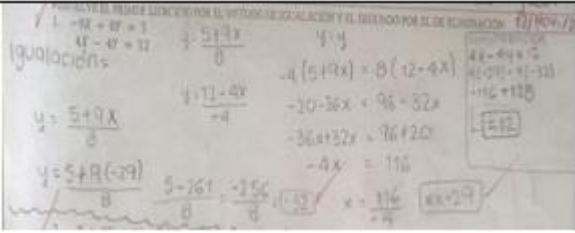
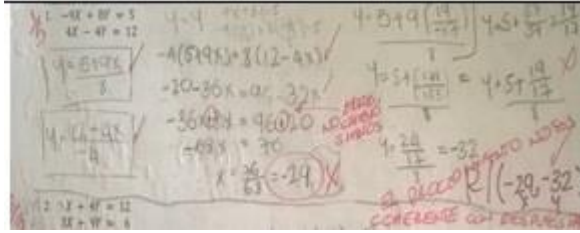
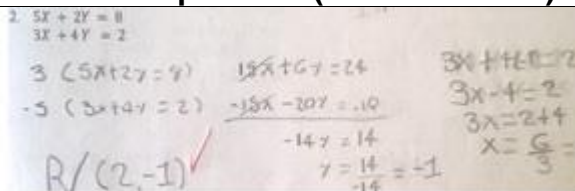
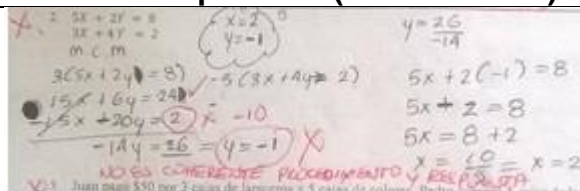
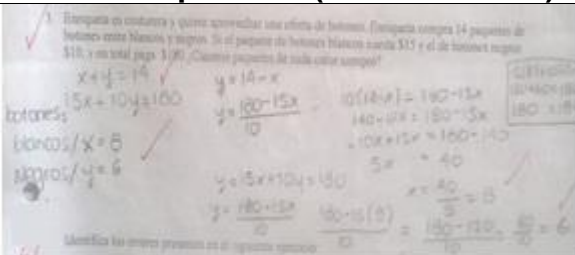
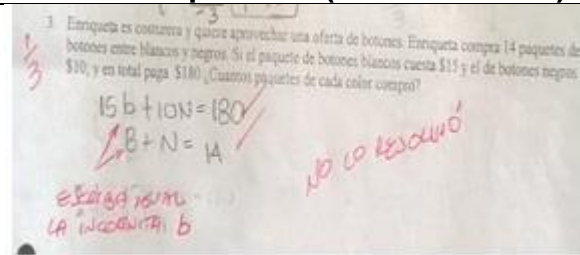
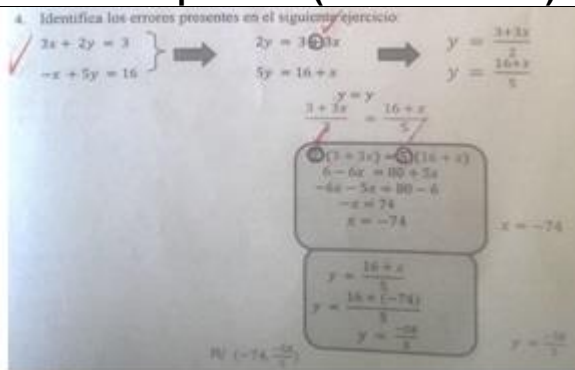
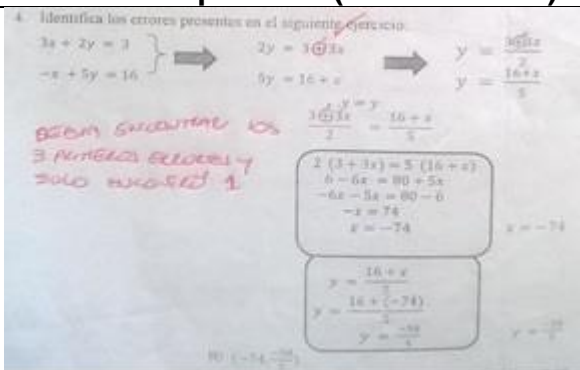
La primera prueba consta de 4 puntos (ver anexo h), aplicada el 12 de noviembre de 2015, se evaluó el método de igualación y el de eliminación, y se encuentra estructurada de la siguiente forma:

- Primer punto: Aplicación a un sistema  $2 \times 2$  del método de igualación.
- Segundo punto: Aplicación a un sistema  $2 \times 2$  del método de eliminación.
- Tercer punto: Aplicar a un problema propuesto de la vida real, el planteamiento de las ecuaciones que surgen en el problema, para conformar el sistema de ecuaciones  $2 \times 2$  y posteriormente darle solución por uno de los dos métodos (igualación o eliminación).
- Cuarto punto: Encontrar tres de los errores presentes en un ejercicio propuesto por el profesor y resuelto por el método de igualación.

La solución es aprobada si el estudiante cumple en un 60% con procedimientos coherentes al método aplicado y sus respuestas son acertadas, de acuerdo con los criterios de calificación del profesor y la solución es reprobada, si el estudiante realiza procedimientos que no corresponden al método solicitado, con errores de signo o de cantidad o si el estudiante no entrega ninguna solución al ejercicio.

En la tabla 59, se encuentran algunos ejemplos de las respuestas (Avanzada o insuficiente), dadas por los estudiantes a los ejercicios planteados, así:

Tabla 59. Ejemplos de respuestas prueba diagnóstica final No. 1.

<p><b>1. Aplicar método de igualación al sistema: <math>-9x + 8y = 5</math> ; <math>4x - 4y = 12</math></b></p>	
<p><b>Solución aprobada (18 estudiantes)</b></p> 	<p><b>Solución reprobada (6 estudiantes)</b></p> 
<p>Respuestas y procedimientos correctos</p>	<p>Respuestas no coinciden con procedimientos</p>
<p><b>2. Aplicar método eliminación al sistema: <math>5x + 2y = 8</math> ; <math>3x + 4y = 2</math></b></p>	
<p><b>Solución aprobada (21 estudiantes)</b></p> 	<p><b>Solución reprobada (3 estudiantes)</b></p> 
<p>Respuestas y procedimientos correctos</p>	<p>Respuestas no coinciden con procedimientos</p>
<p><b>3. En una situación real plantear las ecuaciones y aplicar igualación o eliminación</b></p>	
<p><b>Solución aprobada (14 estudiantes)</b></p> 	<p><b>Solución reprobada (10 estudiantes)</b></p> 
<p>Planteamiento de ecuaciones, procedimientos y respuestas correctas.</p>	<p>Planteo ecuaciones pero no resolvió el ejercicio</p>
<p><b>4. Descubrir 3 errores en la aplicación de ejercicio resuelto por igualación</b></p>	
<p><b>Solución aprobada (21 estudiantes)</b></p> 	<p><b>Solución reprobada (3 estudiantes)</b></p> 
<p>Encontró los tres errores solicitados</p>	<p>Solo encontró 1 de los 3 errores solicitados</p>

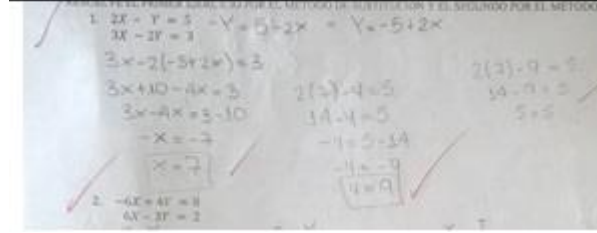
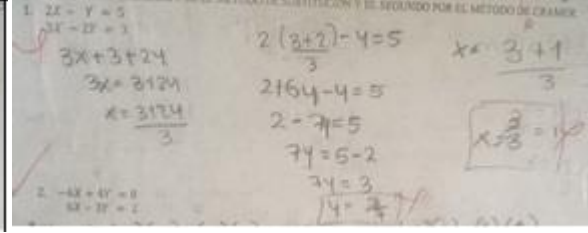
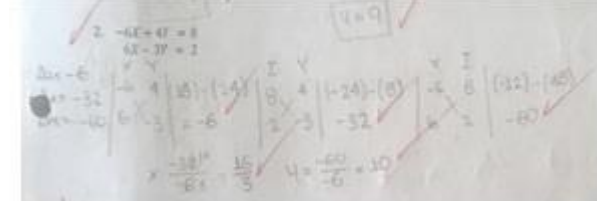
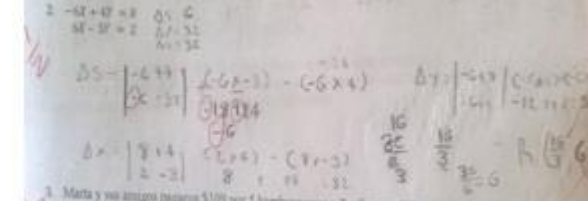
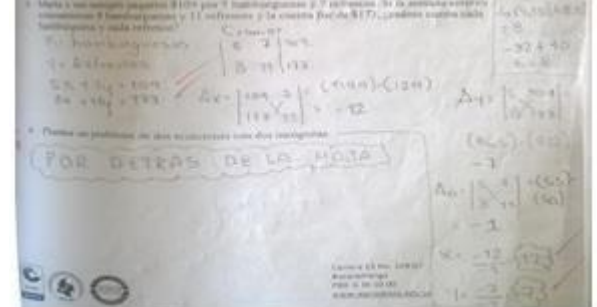
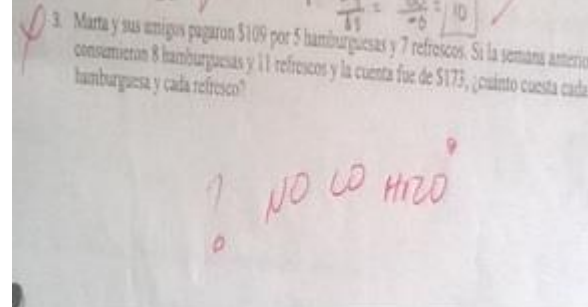
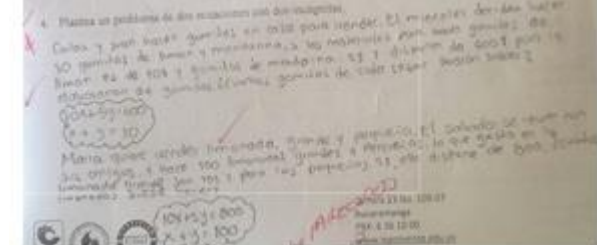
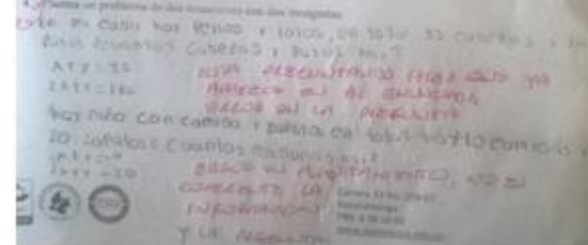
La segunda prueba consta de 4 puntos (ver anexo i), aplicada el 13 de noviembre de 2015, se evaluó el método de sustitución y el de cramer, y se encuentra estructurada de la siguiente forma:

- Primer punto: Aplicación a un sistema 2x2 del método de sustitución.
- Segundo punto: Aplicación a un sistema 2x2 del método de cramer.
- Tercer punto: Aplicar a un problema propuesto de la vida real, el planteamiento de las ecuaciones que surgen en el problema, para conformar el sistema de ecuaciones 2x2 y posteriormente darle solución por uno de los dos métodos (sustitución o cramer).
- Cuarto punto: Proponer un problema que genere un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y plantear las ecuaciones, que dan solución al problema planteado.

Igualmente a la primera prueba, en esta evaluación se considera la solución como aprobada si el estudiante cumple en un 60% con el desarrollo de procedimientos coherentes al método aplicado y sus respuestas son acertadas, de acuerdo con los criterios de calificación del profesor y la solución se considera reprobada, si el estudiante realiza procedimientos que no corresponden al método solicitado, con errores de signo o de cantidad o si el estudiante no entrega ninguna solución al ejercicio.

En la tabla 60, se encuentran algunos ejemplos de las respuestas (Avanzada o insuficiente), dadas por los estudiantes a los ejercicios planteados en los puntos anteriormente descritos, así:

Tabla 60. Ejemplos de respuestas prueba diagnóstica final No. 2.

<p><b>1. Aplicar método de igualación al sistema: <math>-9x + 8y = 5</math> ; <math>4x - 4y = 12</math></b></p>	
<p><b>Solución aprobada (17 estudiantes)</b></p> 	<p><b>Solución reprobada (7 estudiantes)</b></p> 
<p>Respuestas y procedimientos correctos</p>	<p>Respuestas incorrectas</p>
<p><b>2. Aplicar método eliminación al sistema: <math>5x + 2y = 8</math> ; <math>3x + 4y = 2</math></b></p>	
<p><b>Solución aprobada (22 estudiantes)</b></p> 	<p><b>Solución reprobada (2 estudiantes)</b></p> 
<p>Respuestas y procedimientos correctos</p>	<p>Error en signos, procedimiento y respuesta.</p>
<p><b>3. En una situación real plantear las ecuaciones y aplicar igualación o eliminación</b></p>	
<p><b>Solución aprobada (18 estudiantes)</b></p> 	<p><b>Solución reprobada (6 estudiantes)</b></p> 
<p>Planteamiento de ecuaciones, procedimientos y respuestas correctas.</p>	<p>Ejercicio no resuelto</p>
<p><b>4. Descubrir 3 errores en la aplicación de ejercicio resuelto por igualación</b></p>	
<p><b>Solución aprobada (17 estudiantes)</b></p> 	<p><b>Solución reprobada (7 estudiantes)</b></p> 
<p>Ejercicio propuesto y ecuaciones correctas</p>	<p>Error en problema propuesto y en planteamiento de ecuaciones.</p>

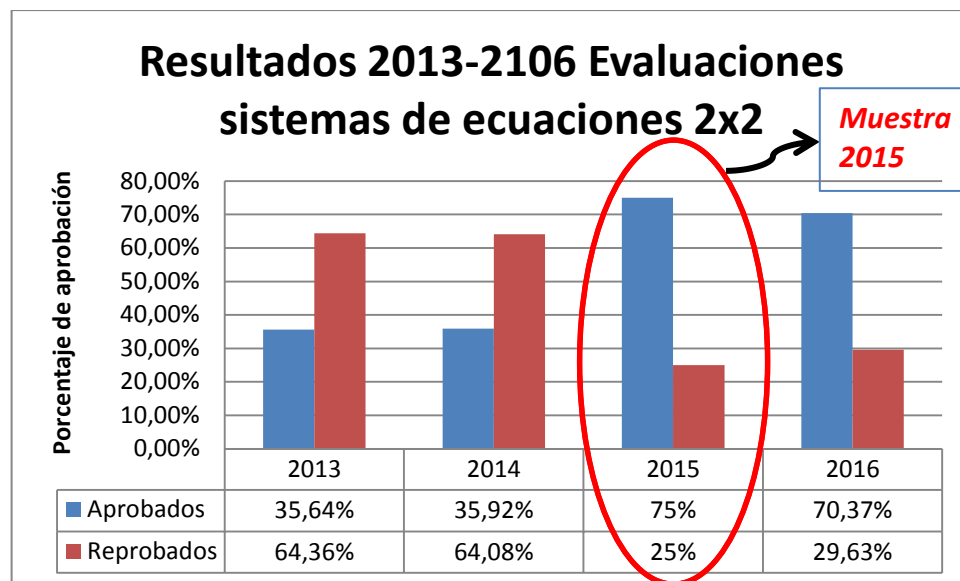
#### 4.5 RESULTADOS PRUEBA FINAL

A continuación en la tabla 61, se presenta un resumen de los resultados en evaluaciones, donde se confrontan los acumulados totales de 2013 y 2014, frente a los resultados del grupo evaluado en el 2015 que formaron parte de este proyecto, teniendo presente que un estudiante figura como aprobado con un puntaje entre 60 y 100 puntos y reprobado con puntaje inferior a los 60 puntos.

**Tabla 61. Confrontación de resultados de evaluaciones sobre sistemas de ecuaciones lineales 2x2 aplicadas a estudiantes de una Institución oficial de Bucaramanga durante los años 2013-2014 frente a muestra 2015.**

INSTITUCIÓN OFICIAL DE BUCARAMANGA				
RESULTADOS EVALUACIONES SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES AÑO 2013				
	Estudiantes 9-1	Estudiantes 9-2	Estudiantes 9-3	% Total 9º/2013
APROBADOS	12	11	13	35,64%
REPROBADOS	22	22	21	64,36%
<i>TOTAL EVALUADOS</i>	<i>34</i>	<i>33</i>	<i>34</i>	<i>100%</i>
RESULTADOS EVALUACIONES SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES AÑO 2014				
	Estudiantes 9-1	Estudiantes 9-2	Estudiantes 9-3	% Total 9º/2013
APROBADOS	13	14	10	35,92%
REPROBADOS	21	20	25	64,08%
<i>TOTAL EVALUADOS</i>	<i>36</i>	<i>34</i>	<i>35</i>	<i>100%</i>
RESULTADOS EVALUACIONES SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES MUESTRA ESTUDIANTES NOVENO 2015				
	Muestra 9-3			% Muestra 2015
APROBADOS	18			75%
REPROBADOS	6			25%
<i>TOTAL EVALUADOS</i>	<i>24</i>			<i>100%</i>
RESULTADOS EVALUACIONES SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES AÑO 2016				
	Estudiantes 9-1	Estudiantes 9-2	Estudiantes 9-3	% Total 9º/2013
APROBADOS	25	29	22	70,37%
REPROBADOS	11	8	13	29,63%
<i>TOTAL EVALUADOS</i>	<i>36</i>	<i>37</i>	<i>35</i>	<i>100%</i>

**Gráfica 58. Confrontación de resultados de evaluaciones a estudiantes de 9° años 2013-2016, en métodos para la solución de ecuaciones lineales 2x2.**



Se puede observar una mejoría bastante significativa en los resultados arrojados en las evaluaciones realizadas con la muestra de estudiantes que formaron parte de la presente investigación, pues se logró mejorar el porcentaje de los resultados en las evaluaciones, de un 35% a un 75% de aprobación, y vale resaltar que la cantidad de reprobados en el grupo de los 24 estudiantes que formaron parte de este proyecto, fueron 6 estudiantes y todos obtuvieron resultados entre (2,7 y 2,9 puntos) sobre 5 puntos posibles, lo que indica que aun estos estudiantes lograron asimilar medianamente los conceptos correspondientes a los métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales 2x2. Por otra parte el promedio general de las evaluaciones en los tres últimos años fueron:

- 2013 promedio de 2,24, y 2014 promedio de 2,13
- frente a 3,9 de promedio en el 2015, y en 2016 después de la aplicación del proyecto el promedio fue de 3,4. Todo lo anterior representa avances bastantes significativos para la institución en la que se realizó la aplicación.

## 5. CONCLUSIONES

A través del presente estudio se encontraron mejores estrategias para reducir las dificultades que presentan los estudiantes de noveno grado en la solución de sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ , disminuyendo el grado de complejidad conceptual y procedimental en forma progresiva, desarrollando eficientemente su capacidad de aprendizaje.

La explicación de temas mediante el uso de las nuevas tecnologías, brinda grandes ventajas en la entrega cognitiva de los temas propios de la matemática, ya que este tipo de conocimiento requiere de gran concentración y atención, para asimilar adecuadamente los procedimientos de solución, y a través de ejercicios como el de la video clase, permitió evidenciar que los jóvenes permanecen en silencio y atentos a las explicaciones que observan en la pantalla del televisor, facilitando la apropiación del concepto matemático.

Se identificaron las principales dificultades y errores conceptuales y procedimentales, relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ , a través de la interpretación de los problemas diseñando situaciones didácticas para la formulación y validación en la resolución de problemas.

Por otra parte, la implementación de las Situaciones Didácticas, como estrategia metodológica generó en los estudiantes cambios positivos actitudinales, además de los cognitivos y procedimentales, resaltando el uso de la herramienta virtual en el desarrollo de la Unidad Didáctica, la cual posibilitó también, el mejoramiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje en forma dinámica, activa y participativa.

La asignación de roles para el desarrollo del trabajo en equipo, permite al docente, tener mayor control del grupo de estudiantes, ya que dentro de un equipo de trabajo donde cada estudiante ejerce tareas específicas, todos sus miembros se

encargan de exigir a cada integrante del grupo, el cumplimiento de sus funciones, en búsqueda de un bien común en la obtención de resultados satisfactorios de sus aportes en la solución de problemas.

La retroalimentación dada en la Unidad Didáctica en la fase de confrontación, permitió entre el docente investigador y estudiantes, un ambiente de confianza, facilitando un conocimiento más a fondo de las concepciones que tienen los estudiantes, sus falencias y aciertos sobre las estrategias que emplearon al resolver situaciones problema.

El trabajo colaborativo y las actividades grupales motivan al estudiante, pues es donde se establecen metas, se evalúan y confrontan estrategias e identifican cambios cognitivos, procedimentales y actitudinales, que deben realizarse para mejorar el desempeño en las actividades de clase.

Una de las principales falencias detectadas en las competencias observadas en el desarrollo de los instrumentos de investigación, fue la habilidad de argumentar y de proponer nuevas situaciones, identificado a través del lenguaje limitado que los estudiantes utilizan para expresar sus ideas y de la falta de un sentido lógico en los planteamientos, considerándose que es parte de los procesos de desarrollo cognitivo más complejos de adquirir en el desarrollo del estudiante.

## 6. RECOMENDACIONES

Establecer el trabajo en equipo, como estrategia de aprendizaje grupal, que permita la retroalimentación entre estudiantes, facilitando el aprendizaje colaborativo y cooperativo, donde se afiance el conocimiento orientado por el docente, a su vez, se generen espacios de confrontación y debate, que permita exponer inquietudes con respecto a los avances cognitivos logrado por los estudiantes, de esta manera que refleje mayor interés y actitud proactiva del mismo, quien finalmente termine siendo reconocido por el docente.

Se recomienda como tarea importante para el docente dentro del aula de clase, la implementación de actividades motivadoras y de trabajo en equipo y colaborativo, con el uso de las nuevas tecnologías, en complemento de las estrategias utilizadas para la entrega de los contenidos temáticos ya que el estudiante, encuentra en ellas una forma de acople que le permiten incrementar el interés y la atención en el desarrollo de la clase.

Se sugiere revisar los planes de área y de asignatura de la matemática, para incrementar en los diferentes ejes temáticos desarrollados en clase, la práctica de ejercicios relacionados con situaciones reales y de la vida cotidiana, así como también actividades que incluyan el desarrollo de la competencia propositiva y la habilidad argumentativa en los estudiantes.

Otra recomendación es implementar estrategias en las cuales los estudiantes en pequeños grupos, ejerzan roles específicos y variados, donde sus funciones sean muy particulares dentro del grupo, para exigir a cada elemento del grupo, el cumplimiento de sus funciones necesarias para alcanzar el objetivo planteado en la clase, y cuyos roles puedan rotarse con el propósito de desarrollar en el estudiante diferentes habilidades en ocasiones de liderazgo, y en otras siguiendo instrucciones dadas por sus compañeros en forma eficiente y con responsabilidad.

Se sugiere asignar ejercicios y compromisos de trabajo en casa, en los que se incluya actividades en las que el estudiante ejercite las diferentes habilidades matemáticas y de trabajo en equipo y colaborativo aplicadas en la clase, en las que se incluya a la familia en los procesos y estrategias de enseñanza-aprendizaje, con el propósito de generar espacios de integración familiar en el proceso de formación de los jóvenes, al mismo tiempo, poder indagar a los padres de familia acerca del comportamiento académico que presentan los jóvenes en sus hogares al realizar las tareas relacionadas con la resolución de problemas matemáticos, en cada una de las competencias que se deben desarrollar en los estudiantes.

Finalmente se recomienda a los docentes, despertar el espíritu de investigación dentro del aula de clases, para ahondar en temas que permitan mejorar el nivel académico en las instituciones educativas, mediante la implementación de estrategias que sean desarrolladas de acuerdo a la experticia desarrollada por el propio docente en el ejercicio de su labor, y de los hallazgos que el mismo detecte en sus grupos de trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

ARENAS SUAZA, Bibiana Sirley. Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas. Universidad Nacional de Colombia. Medellín. 2013.

ARTIGUÉ, M. Ingeniería Didáctica en Ingeniería en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. México. 1995.

AUSUBEL, Novak y Hanesian. Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. Editorial Trillas. 1976.

BROUSSEAU, Guy. Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas- 1ª ed. Buenos Aires- Libros del Zorzal 2007.

DENZIN, N. K. Sociological Methods: a Source Book. Aldine Publishing Company. Chicago.1970

D´ AMORE, Bruno; FANDIÑO, Martha; MARAZZANI, Inés y SBARAGLI, Silvia. La Didáctica y la Dificultad en Matemáticas: Análisis de situaciones con falta de aprendizaje. Editorial Magisterio, primera edición. Bogotá. 2010.

FIGUEROA VERA, Rocío Elizabeth. Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. (2013). [Citado el 5 de febrero de 2016]. Disponible en: [http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/4736/FIGUEROA\\_VERA\\_ROCIO\\_RESOLUCION\\_DIDACTICAS.pdf?sequence=1](http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/4736/FIGUEROA_VERA_ROCIO_RESOLUCION_DIDACTICAS.pdf?sequence=1)

FLOREZ VALDES, Wilmar Antonio. Diseño e implementación de una estrategia didáctica para la comprensión, análisis y solución de sistemas de ecuaciones

lineales mediante las nuevas tecnologías: Estudio de caso aplicado en el CLEI 4 (Ciclo Lectivo Especial Integrado) de la Institución Educativa la Salle de Campoamor, Medellín-Antioquia. 2012.

GUERRA GONZÁLEZ, Andrés Aníbal. Propuesta para la enseñanza de Sistemas de ecuaciones lineales. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá (2012). [Citado el 11 de Enero de 2016]. Disponible en: <http://www.bdigital.unal.edu.co/8842/1/andresanibalguerragonzalez.2012.pdf>.

Información sobre Pruebas PISA 2012 (que evalúan las Pruebas PISA). [Citado el 21 de febrero de 2016]. Disponible en: <file:///D:/Users/HP/Downloads/RESUMEN%20PISA%202012.PDF>

Icfes.gov.co. Información sobre las Pruebas Saber 2012 (qué evalúan las Pruebas Saber). [Citado el 13 de marzo de 2016]. Disponible en: <http://www.icfes.gov.co/examen/pruebas-saber/guias-y-ejemplos-de-preguntas>.

LEY ESTATUTARIA 1581 DE 2012. Protección de datos personales. [Citado el 18 de marzo de 2016]. [Disponible en]: <http://www.alcaldiabogota.gov.co/sisjur/normas/Norma1.jsp?i=53646#0>  
[Consultado en]: Marzo 7 de 2015.

MAYA BETANCOURT, Anobio. El taller educativo ¿Qué es? Fundamentos, como organizarlo y dirigirlo, como evaluarlo. Bogotá, Cooperativa editorial magisterio. Primera edición, 1996.

MCKERNAN, James. Investigación-acción y curriculum: métodos y recursos para profesionales. Londres, Ediciones Morata, S. L. Primera edición 1999. [Citado el

19 de febrero de 2016]. Disponible en:  
[http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=IlzVMRMIA28C&oi=fnd&pg=PA160&ots=XrYltrfJd&sig=w8sb\\_iuCpfXD8Dkc1MmKXydiMxw#v=onepage&q&f=false](http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=IlzVMRMIA28C&oi=fnd&pg=PA160&ots=XrYltrfJd&sig=w8sb_iuCpfXD8Dkc1MmKXydiMxw#v=onepage&q&f=false).

MEN, Desarrollo pedagógico. Matemática-Lineamientos curriculares. Cooperativa editorial magisterio. Bogotá, D.C. julio de 1998.

Ministerio de Educación Nacional. Taller: Estándares Básicos para Matemáticas. División de perfeccionamiento y calidad de la Educación. 2005

Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá.1998

NARVAES VALENCIA, Carmen Alicia. Funciones Lineales. Disponible en:  
<http://es.calameo.com/read/00282629131fed047c801>

OCHOVIET FILGUEIRAS, Teresa Cristina. Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Instituto Politécnico Nacional. Centro de investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología avanzada. Unidad Legaria, Uruguay. (2009). [Citado el 22 de enero de 2016]. Disponible en:  
[http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/ochoviet\\_2009.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/ochoviet_2009.pdf).

Oecd.org. Panorama de la educación 2013. Indicadores de la OCDE. [Citado el 10 de febrero de 2016]. Disponible en:  
<https://www.oecd.org/edu/Panorama%20de%20la%20educacion%202013.pdf>

RAMOS JAIMES, Sulegna y ARDOSGOITIA ESCORCIA, Yenis María. Análisis de la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de noveno grado cuando realizan actividades que promueven el tránsito entre los

pensamientos analítico-aritmético y sintético-geométrico. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Santander. (2011). [Citado el 17 de marzo de 2016]. Disponible en: [http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/pags/cat/popup/pa\\_detalle\\_matbib\\_N.jsp?para metros=158463|%20|8|86](http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/pags/cat/popup/pa_detalle_matbib_N.jsp?para metros=158463|%20|8|86).

REPÚBLICA DE COLOMBIA. MINISTERIO DE SALUD. Resolución N° 008430 de 1993. [Citado el 23 de marzo de 2016]. [Citado el 7 de marzo de 2016]. Disponible en [http://www.unisabana.edu.co/fileadmin/Documentos/Investigacion/comite\\_de\\_etica/Res\\_8430\\_1993\\_-\\_Salud.pdf](http://www.unisabana.edu.co/fileadmin/Documentos/Investigacion/comite_de_etica/Res_8430_1993_-_Salud.pdf).

RODRÍGUEZ G, y otros, “Metodología de la Investigación cualitativa” Ed. Aljibe. Málaga, 1999.

SIERPINSKA, A. On Some Aspects of Students’thinking in Linear Algebra En Dorier, J. L. (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers. Netherlands. 2000

THOMPSON GARCÍA, Julia. Los principios de ética y biomédica. [Citado el 7 de febrero de 2016]. Disponible en [http://www.scp.com.co/precop/precop\\_files/modulo\\_5\\_vin\\_4/15-34.pdf](http://www.scp.com.co/precop/precop_files/modulo_5_vin_4/15-34.pdf)

## ANEXOS

### Anexo A. Declaración del docente investigador



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS**

**ESCUELA DE EDUCACIÓN**

**MAESTRIA EN PEDAGOGÍA**

### DECLARACIÓN DEL DOCENTE INVESTIGADOR

Yo JORGE IVAN CARREÑO BELTRÁN, con c.c. 13507956 de Cúcuta, certifico que le he explicado al menor de edad y a su padre o acudiente, la naturaleza y el objetivo de la investigación, y que ellos entienden en qué consiste su participación, los posibles riesgos y beneficios implicados.

Todas las preguntas que los sujetos me han hecho le han sido contestadas en forma adecuada. Así mismo, he leído y explicado adecuadamente las partes del asentimiento y el consentimiento informado.

Hago constar con mi firma.

Nombre del investigador: \_\_\_\_\_

Firma: \_\_\_\_\_

Cedula de Ciudadanía número: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

## Anexo B. Asentamiento informado de los estudiantes



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**  
**FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS**  
**ESCUELA DE EDUCACIÓN**  
**MAESTRIA EN PEDAGOGÍA**

### **ASENTAMIENTO INFORMADO DE LOS ESTUDIANTES**

Acepto participar voluntariamente en esta investigación, dirigida por JORGE IVÁN CARREÑO BELTRÁN. He sido informado (a) de que el objetivo principal de este estudio es Diseñar e implementar situaciones didácticas en la solución de problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales dos por dos, que mejore el aprendizaje de la matemática al interior de la sede educativa, en estudiantes de noveno grado de la educación básica secundaria.

Me han indicado también que tendré que responder un cuestionario participar en diálogos, trabajos en grupo y talleres, lo cual no tomará muchos minutos de mi tiempo.

Reconozco que la información que yo provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento. He sido informado de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento, sin que esto acarree perjuicio alguno para mi persona. De tener preguntas sobre mi participación en este estudio, puedo realizar contacto con quien lo dirige al correo:

**Investigador principal:** Jorge Iván Carreño Beltrán, profesor, Licenciado en matemática e informática; Celular 3103018384, mail: [matematicaivan@hotmail.com](mailto:matematicaivan@hotmail.com) o al **Comité de Ética de Investigación Científica** de la Universidad Industrial de Santander, Facultad de Salud, oficina 304, Teléfono: 6344000 ext. 3208 – 2644 correo: [comitedetica@uis.edu.co](mailto:comitedetica@uis.edu.co).

**Firma del Participante**

**Fecha**

---

---

## **Anexo C. Consentimiento informado para los padres de familia de los estudiantes participantes de la investigación**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS**

**ESCUELA DE EDUCACIÓN**

**MAESTRIA EN PEDAGOGÍA**

### **CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LOS PADRES DE FAMILIA DE LOS ESTUDIANTES PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN**

El propósito de esta ficha de consentimiento es proveer a los padres de familia de los estudiantes participantes en esta investigación una clara explicación de la naturaleza de la misma.

La presente investigación será realizada por el estudiante JORGE IVÁN CARREÑO BELTRÁN bajo la dirección de MARIA HELENA QUIJANO H., de la Maestría en Pedagogía de la Universidad Industrial de Santander. El objetivo principal de este estudio Diseñar e implementar situaciones didácticas en la solución de problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales dos por dos, que mejore el aprendizaje de la matemática al interior de la sede educativa, en estudiantes de noveno grado de la educación básica secundaria.

Si usted autoriza la participación de su hijo en este estudio, se le pedirá responder preguntas en una encuesta, participar de diálogos en clase, realizar trabajos en grupo y participar de talleres, que no tomará muchos minutos de su tiempo. Lo que responda se tendrá en cuenta para reconocer el alcance de los objetivos propuestos.

La participación en este estudio es estrictamente voluntaria. La información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de

esta investigación. Sus respuestas al cuestionario serán codificadas usando un número de identificación y por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento. Si alguna de las preguntas de la encuesta, le parecen incómodas, tiene usted el derecho de hacérselo saber al investigador o de no responderla.

Desde ya le agradezco su valiosa participación.

**Nombre del padre de familia**

**Firma del padre de familia**

---

---

**Nombre de mi hijo (a) participante**

**Fecha:**

---

---

## Anexo D. Modelo taller de presaberes



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS

ESCUELA DE EDUCACIÓN

MAESTRIA EN PEDAGOGÍA

AUTOR: JORGE IVÁN CARREÑO BELTRÁN

PROYECTO: LAS SITUACIONES DIDACTICAS APLICADAS A LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES  $2 \times 2$ , EN EL APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO DE UNA INSTITUCION OFICIAL DE LA CIUDAD DE BUCARAMANGA.

### TALLER DE PRESABERES

Asignatura: MATEMÁTICA

Estudiante: \_\_\_\_\_

Grado:

Periodo: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

**Propósito:** Identificar las principales dificultades conceptuales y procedimentales que presentan los estudiantes en el manejo de conceptos necesarios para el manejo de sistemas de ecuaciones lineales  $2 \times 2$ .

**NOTA: Esta prueba solo tiene fines investigativos.**

## 1. INTRODUCCIÓN

Este taller aborda los principales conceptos que se utilizan para desarrollar una situación problema relacionada con la **función lineal**, tanto en todo lo correspondiente a los procedimientos analíticos necesarios para su resolución, y está diseñada y dirigida a estudiantes de noveno grado de una institución pública de Bucaramanga.

**Tiempo estimado:** 120 minutos.

**Recursos:** Calculadora, escuadras, hojas de examen cuadrículadas, colores.

CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
<ul style="list-style-type: none"><li>✓ Función lineal,</li><li>✓ Variable: (dependiente e independiente)</li><li>✓ Plano cartesiano,</li><li>✓ Eje de las abscisas,</li><li>✓ Eje de las ordenadas,</li><li>✓ Par ordenado de puntos,</li><li>✓ Pendiente de una recta: (creciente, decreciente, constante e indeterminada)</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>✓ <b>Analizar</b> una situación problema relacionada con la función lineal.</li><li>✓ <b>Reconocer</b> las variables que intervienen e identificar: variable dependiente, independiente, ¿cuál corresponde al eje de las ordenadas? y ¿cuál al de las abscisas?</li><li>✓ <b>Representar</b> gráficamente en el plano cartesiano y señalar el par ordenado (x,y) que genera dicha situación.</li><li>✓ <b>Identificar</b> si la pendiente de la recta es creciente, decreciente, constante o indeterminada.</li><li>✓ <b>Verificar</b> que la pendiente calculada corresponda con la gráfica.</li><li>✓ <b>Determinar</b> la ecuación general y canónica de dicha recta, a partir de la ecuación punto pendiente.</li></ul>

### 3. DESARROLLO DE CONTENIDOS

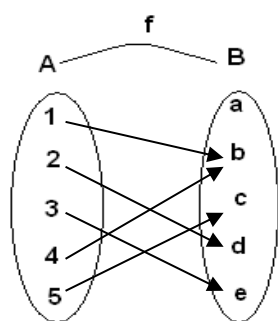
Lee y resuelve los ejercicios de las cinco situaciones que se presentan a continuación.

➤ **Situación uno.**

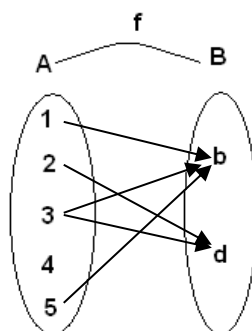
Una función  $f$  de variable real, es una correspondencia definida en el conjunto de los números reales, que asocia a cada elemento de un conjunto llamado conjunto de salida (Dominio), un único número real que se designa  $y = f(x)$  y que pertenece a otro conjunto denominado conjunto de llegada<sup>32</sup> (Codominio).

**Ejercicio:** Indica si las siguientes relaciones son funciones:

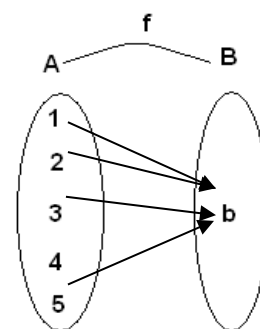
Función Si \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_



Función Si \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_



Función Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_



Señala el Dominio, Codominio y el Rango:

Dominio: \_\_\_\_\_ Dominio: \_\_\_\_\_ Dominio: \_\_\_\_\_

Codominio: \_\_\_\_\_ Codominio: \_\_\_\_\_ Codominio: \_\_\_\_\_

Rango: \_\_\_\_\_ Rango: \_\_\_\_\_ Rango: \_\_\_\_\_

➤ **Situación dos.**

Una **función lineal es afín** si es de la forma:

$$y = mx \pm b$$

<sup>32</sup> Gil F. Leidi Cristina. Aprender juntos Matemáticas 9. Ediciones SM SA-Editorial Delfín Ltda. (2013). 1ª Edición. p. 40.

Con  $m$  y  $b$  números reales diferentes de cero. Donde  $m$  representa un número real y se le llama pendiente y  $b$  punto de corte de la recta con el eje  $y$ . La representación gráfica asociada a una ecuación lineal es una recta. Si la ecuación es:

$m > 0$	se obtiene una recta cuya pendiente es creciente
$m < 0$	se obtiene una recta cuya pendiente es decreciente
$m = \infty$	se obtiene una recta vertical, paralela al eje de ordenadas
$m = 0$	se obtiene una recta horizontal, paralela al eje de abscisas

En una función lineal el dominio son todos los números reales, el Codominio son también todos los números reales, y su expresión analítica es un polinomio de primer grado<sup>33</sup>.

### Ejercicio.

1. El plano cartesiano está conformado por dos ejes, el eje ( $x$ ) y el eje ( $y$ ), ¿cuál de los dos corresponde al eje de las ordenadas y cual al eje de las abscisas?

R/ \_\_\_\_\_

2. Despeja la variable ( $y$ ) en las siguientes ecuaciones, en caso de no existir ( $y$ ), despejar ( $x$ ):

---

<sup>33</sup> Ibíd. p. 47.

a)  $2x + y = 3$  \_\_\_\_\_

d)  $4 - y = 1 - 2y$  \_\_\_\_\_

b)  $3x - 2y = 4$  \_\_\_\_\_

e)  $3 + 4x = 3x + 3$  \_\_\_\_\_

c)  $2x + 3 = x + 5$  \_\_\_\_\_

f)  $4 + 5y = 4y + 4$  \_\_\_\_\_

3. Para cada una de las ecuaciones anteriores, completa la tabla de valores dada y representa en el plano cartesiano con colores diferentes cada una de las rectas (a, b, c, d, e, f).

a)	X	-1	3
	Y		

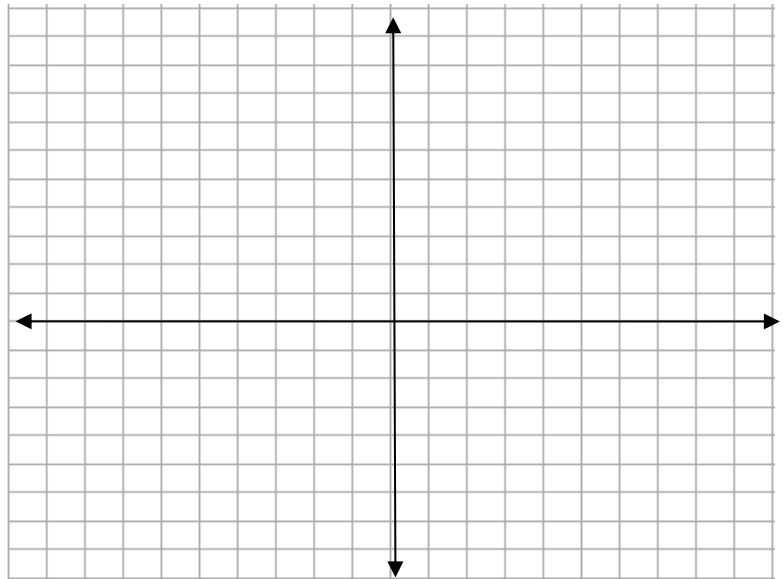
b)	X	-2	4
	Y		

c)	X	2	2
	Y		

d)	X		
	Y	3	3

e)	X	0	0
	Y		

f)	X		
	Y	0	0



4. Frente a los nombres de las siguientes rectas, ubica la letra de la recta que has obtenido.

RECTA COLINEAL CON EL EJE X..... ( )

RECTA CON PENDIENTE CRECIENTE..... ( )

RECTA PARALELA AL EJE DE LAS Y..... ( )

RECTA COLINEAL CON EL EJE Y..... ( )

RECTA CON PENDIENTE DECRECIENTE..... ( )

RECTA PARALELA AL EJE DE LAS X..... ( )

5. Observando las gráficas, ¿Qué diferencia observa entre las rectas generadas por las ecuaciones a y b, del ejercicio 2 de la situación 2?

R/ \_\_\_\_\_

➤ **Situación tres.**

Existen situaciones de la vida cotidiana, que se pueden representar a través de dos variables, donde una de estas situaciones depende de la otra, por ejemplo, la velocidad de un objeto depende del tiempo, el precio de un artículo depende de su calidad, el peso de un niño depende de su estatura, etc. Para analizar estas situaciones se hace necesario identificar primero ¿cuál de las dos variables es dependiente y cual independiente?, ¿cuál de ellas se representa en el eje (x) y cual en el eje (y), para así realizar su grafica correcta y los cálculos analíticos correspondientes a dicha situación.

**Ejercicio:**

Tres deportistas son entrenados para competir en las próximas olimpiadas en Brasil en atletismo de velocidad. Andrés (atleta 1) en el mes 2 de entrenamiento desarrollaba una velocidad de 2m/s y cada mes va incrementando su velocidad constantemente hasta alcanzar al mes 6 una velocidad de 8 m/s.

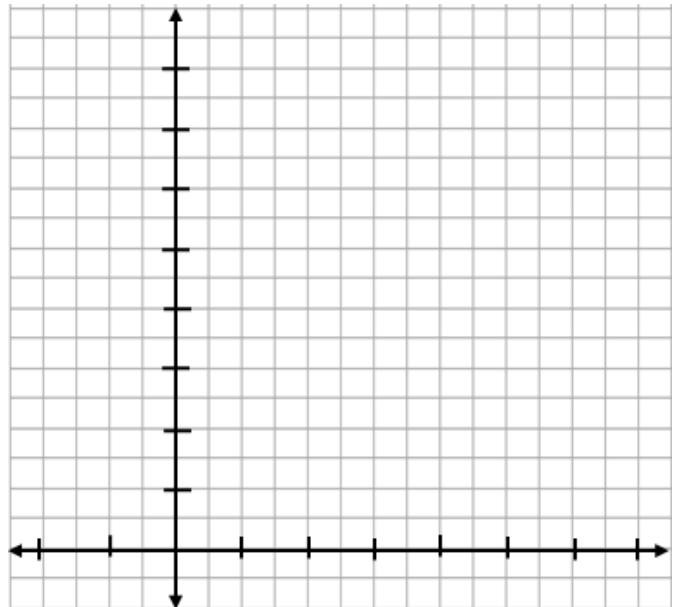
1. Indica el nombre de las dos variables que forman parte de este ejercicio.

\_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

2. Llena la siguiente tabla

VARIABLE DEPENDIENTE	
VARIABLE INDEPENDIENTE	
PUNTO P1	P1(     ,     )
PUNTO P2	P2(     ,     )

3. Gráfica la anterior situación



4. Con la siguiente ecuación halla la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Elige la pendiente correcta:  $\longrightarrow m_1 =$  a)  $\frac{2}{3}$     b)  $-\frac{3}{2}$     c)  $\frac{3}{2}$     d)  $-\frac{2}{3}$

5. Con la siguiente ecuación (ecuación punto pendiente) halle la ecuación general y la ecuación canónica:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ECUACIÓN GENERAL	
ECUACIÓN CANÓNICA	

➤ **Situación cuatro**

A continuación se realiza un ejercicio para hallar la pendiente, ecuación general y canónica de una recta que muestre el entrenamiento del carro 2, luego se grafica en el mismo plano y se comparan.

**Ejercicio:**

Teniendo en cuenta la información del ejercicio anterior, hallar una recta que represente el entrenamiento que Daniel realiza (atleta 2), quien al mes 1 presentaba una velocidad de 2m/s manteniendo la misma constante de incremento de velocidad que Andrés (atleta 1).

PENDIENTE RECTA ATLETA 1	$m_1=$	PUNTO RECTA ATLETA 2	$P_1( \quad , \quad )$
-----------------------------	--------	-------------------------	------------------------

1. Con la siguiente ecuación hallar la pendiente del atleta 2 y selecciona la respuesta correcta:

$$m_2 = m_1 \longrightarrow m_2 = \text{a) } \frac{2}{3} \quad \text{b) } -\frac{3}{2} \quad \text{c) } \frac{3}{2} \quad \text{d) } -\frac{2}{3}$$

2. Con la siguiente ecuación halle ecuación general y canónica (atleta 2) y grafique

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EC. GENERAL RECTA ATLETA 2		
EC. CANÓNICA RECTA ATLETA 2		
x	1	5
y	2	

3. ¿Qué característica presenta la recta del atleta 2 con respecto a la del atleta 1?

---



---

➤ **Situación cinco.**

A continuación se realiza un ejercicio para hallar la pendiente, ecuación general y canónica de una recta que muestre el entrenamiento del atleta 3, luego se grafica en el mismo plano y se comparan.

**Ejercicio**

Se requiere hallar, una recta que represente el entrenamiento de Jaime (Atleta 3), sabiendo que ha padecido una afección pulmonar, lo cual ha disminuido su velocidad en forma constante e inversa a la velocidad de Andrés (Atleta 1). Jaime (Atleta 3) al mes 2 presentaba una velocidad de 6 m/s.

PENDIENTE RECTA ATLETA 1	$m_1=$	PUNTO RECTA ATLETA 3	$P_1( \quad , \quad )$
-----------------------------	--------	-------------------------	------------------------

1. Con la siguiente ecuación hallar la pendiente del carro 2 y selecciona la respuesta correcta:

$$m_3 = \frac{-1}{m_1} =$$

a)  $\frac{1}{11}$       b)  $\frac{-1}{12}$       c)  $\frac{-1}{14}$       d)  $\frac{1}{15}$

2. Con la siguiente ecuación halle ecuación general y canónica (atleta 3) y grafique.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EC. GENERAL RECTA ATLETA 2		
EC. CANÓNICA RECTA ATLETA 2		
x	6	10
Y		

3. ¿Qué característica presenta la recta del atleta 3 con respecto a la del atleta 1?


---



---

### BIBLIOGRAFÍA

---

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVENZA</b>	Código: M-02-F02
		Versión: 01.1 Fecha: Abril de 2014 Página 210 de 1
<b>GUIA DE APRENDIZAJE</b>		

## Anexo E. Modelo unidad didáctica



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**  
**FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS**  
**ESCUELA DE EDUCACIÓN**  
**MAESTRIA EN PEDAGOGÍA**  
 Docente Jorge Iván Carreño Beltrán

Trabajo de investigación: Las situaciones didácticas aplicadas a la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, en el aprendizaje de estudiantes de noveno grado de una Institución Educativa oficial de la ciudad de Bucaramanga.

### UNIDAD DIDÁCTICA: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2

Asignatura: MATEMÁTICA  
 Período: \_\_\_\_\_

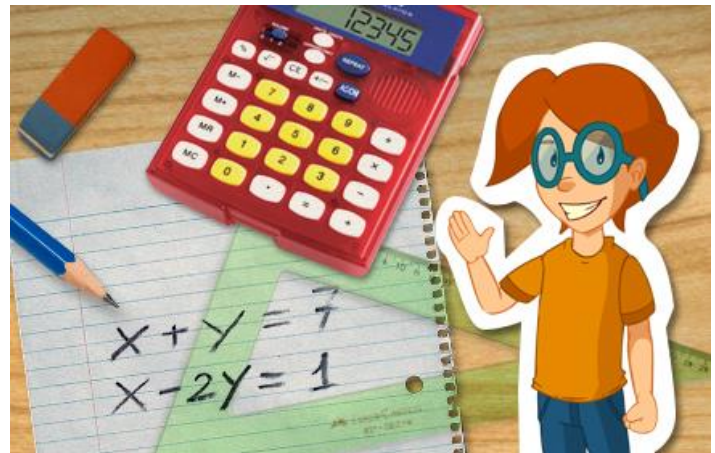
Estudiante: \_\_\_\_\_  
 Fecha: \_\_\_\_\_

#### INTRODUCCIÓN

En esta unidad se abordará la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, aplicando los métodos: igualación y reducción, sustitución y método de Crámer; distribuido en tres secuencias.

En la primera secuencia se trabaja la competencia interpretativa y se realiza en forma individual, con la ayuda de un video referente a cada método; la segunda y tercera secuencia se realiza en grupos y se trabaja las competencias interpretativa, argumentativa y propositiva, y se debaten procedimientos y resultados.

Una vez cumplidas las 3 secuencias, los estudiantes resolverán en el aula de informática de la institución, con la ayuda del software graphmática, cada uno de los ejercicios de la unidad, y verificarán si coinciden con las respuestas obtenidas por los diferentes métodos en el aula de clases.



#### OBJETIVOS


- Resolver analíticamente sistemas de ecuaciones lineales por los métodos de igualación, reducción, sustitución y determinantes.
- Comparar con los compañeros los resultados obtenidos.
- Discutir las diferencias encontradas y hacer los registros necesarios correspondientes a dichas diferencias.
- Desarrollar trabajo colaborativo, en las actividades propuestas dentro de la unidad.
- Identificar las principales estrategias para corregir errores identificados o cometidos.
- Exponer frente al grupo los principales hallazgos de cada método.

#### SECUENCIA DIDÁCTICA 1: INTERPRETACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2

Trabajo individual, conformado por la presentación de un video explicativo de cada método, cuyo procedimiento aparece descrito en la unidad, seguido de un ejercicio planteado para poner en práctica lo aprendido, confrontar y debatir respuestas y sacar conclusiones con los demás compañeros. Esta secuencia será resuelta en un tiempo de 2 horas y quedará cantidad de ejercicios planteados para resolver y practicar en casa lo aprendido en la unidad.



Carrera 23 No. 109-07  
 Bucaramanga  
 PBX: 6 36 10 00  
[www.ieprovenza.edu.co](http://www.ieprovenza.edu.co)

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVENZA</b>	Código: M-02-F02
		Versión: 01.1
	<b>GUIA DE APRENDIZAJE</b>	Fecha: Abril de 2014
		Página 211 de 1

### METODOLOGÍA:

La metodología está diseñada de la siguiente forma:

- **Solución individual del problema:** Aplicar las instrucciones asignadas para cada método e interiorizar los procedimientos requeridos para la solución de los ejercicios resueltos en el taller.
- **Comparación de respuestas:** Discutir con otros compañeros acerca de las diferencias y similitudes encontradas en las respuestas, para que definan los aciertos y errores cometidos en el ejercicio.
- **Ajustes procedimentales:** Escribir en el portafolio, los errores descubiertos con los compañeros y hacer interrogantes y propuestas que eviten los mismos errores.
- **Exposición de resultados:** Expresar frente al curso los hallazgos significativos descubiertos en este proceso al interiorizar los conceptos correspondientes a los métodos estudiados.

### DESARROLLO DE CONTENIDOS

#### a. Función lineal.

Una **función lineal**<sup>34</sup> es una función polinómica de primer grado; cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta. Esta función se puede escribir como:

$$y = mx + b$$

Donde  $x$  es una variable real. La constante  $m$  es la pendiente de la recta, y  $b$  es el punto de corte de la recta con el eje  $y$ . Si se modifica  $m$  entonces se modifica la inclinación de la recta, y si se modifica  $b$ , entonces la línea se desplazará hacia arriba o hacia abajo.

#### b. Sistemas de ecuaciones lineales con 2 incógnitas.

Un **sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas** es un sistema formado por dos ecuaciones que permite su resolución empleando técnicas básicas del álgebra. Los métodos utilizados en esta unidad para su solución son el método de reducción, igualación, sustitución y determinantes así como el método gráfico.

#### c. Resolución de sistemas

Resolver un sistema de ecuaciones consiste en hallar los valores que sustituidos en la incógnitas, transforman las ecuaciones en identidades, es decir, se satisfacen todas las ecuaciones que forman el sistema.

**Ejemplo:** El sistema

$$\begin{aligned} 5x - y &= 3 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

Tiene como solución:  $x = 1$ ,  $y = 2$ , puesto que:

$$\begin{aligned} 5x - y &= 3 & x + y &= 3 \\ 5(1) - (2) &= 3 & (1) + (2) &= 3 \end{aligned}$$

Luego  $x = 1$ ,  $y = 2$ ; satisface ambas ecuaciones y este corresponde a un sistema de solución única.

#### Métodos de resolución para sistemas con dos incógnitas:

- **Método de igualación:** en ambas ecuaciones se despeja la misma incógnita y se igualan las expresiones. En este método se analizará el video de YouTube: (Método igualación, Julio profe net; disponible en [www.julioprofe.net](http://www.julioprofe.net))
- **Método de reducción:** se multiplica una ecuación por un número y se le suma a la otra de forma que una de las incógnitas desaparezca. En este método se analizará el video de YouTube: (Método reducción, Julio profe net; disponible en [www.julioprofe.net](http://www.julioprofe.net))
- **Método de sustitución:** se despeja una incógnita de una ecuación y se sustituye en la otra. En este método se analizará el video de YouTube: (Método sustitución, Julio profe net; disponible en [www.julioprofe.net](http://www.julioprofe.net))
- **Método de Crámer:** Método utilizado para resolver sistemas de ecuaciones por determinantes. En este método se analizará el video de YouTube: (Método crámer, Julio profe net; disponible en [www.julioprofe.net](http://www.julioprofe.net))

<sup>34</sup> Narváez Valencia, Carmen Alicia. Funciones Lineales. Disponible en: <http://es.calameo.com/read/00282629131fed047c801>



**VEAMOS EL PROCEDIMIENTO PARA CADA MÉTODO...**

**MÉTODO DE IGUALACIÓN**

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

**Paso N° 01:** Despejamos la misma incógnita en ambas ecuaciones, en este caso despejaremos la variable x

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 3 \\ -x + 5y = 16 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow 2y = 3 - 3x \\ \longrightarrow 5y = 16 + x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} y = \frac{3-3x}{2} \\ y = \frac{16+x}{5} \end{array}$$

**Paso N° 02:** Se igualan ambas expresiones despejadas (obtenidas en el paso N° 01). con lo que se obtiene una ecuación con una incógnita.

$$\frac{3-3x}{2} = \frac{16+x}{5} \quad y = y$$

**Paso N° 03:** Se resuelve la ecuación a fin de obtener la incógnita.

$$\begin{aligned} 5(3-3x) &= 2(16+x) \\ 15-15x &= 32+2x \\ -15x-2x &= 32-15 \\ -17x &= 17 \\ x = \frac{17}{-17} &= -1 \quad x = -1 \end{aligned}$$

**Paso N° 04:** Se reemplaza el valor de x en una de los despejes de la incógnita y.

$$\begin{aligned} y &= \frac{16+x}{5} \\ y &= \frac{16+(-1)}{5} \\ y &= \frac{15}{5} \quad y = 3 \end{aligned}$$

**Paso N° 05:** Los valores que constituyen la solución del sistema son:  $x = -1, y = 3$ .  $\longrightarrow$  **R/ (-1,3)**

Comprobando los resultados en una de las ecuaciones que conforman el sistema nos queda;

$$3x + 2y = 3 \rightarrow 3(-1) + 2(3) = 3 \rightarrow -3 + 6 = 3 \rightarrow 3 = 3 \text{ ok.}$$



**Ahora: practica lo aprendido con el siguiente sistema:**

$$\left\{ \begin{array}{l} -6x + 8y = 2 \\ 4x - 6y = 0 \end{array} \right.$$



### MÉTODO DE REDUCCIÓN

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 6y = 20 \\ 3x + 8y = 34 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{array}$$

#### SOLUCIÓN:

##### Paso N° 01:

Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convengan con su respectivo signo, ya sea positivo o negativo, para anular una de las variables. Para este ejercicio multiplicamos la segunda ecuación por 2 para igualarlas y poder eliminarla.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 6y = 20 \\ 3x + 8y = 34 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times (3) \\ \times (-5) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 15x + 18y = 60 \\ -15x - 40y = -170 \end{array}$$

**Paso N° 02:** Sumamos algebraicamente y desaparece una de las incógnitas.

$$\begin{array}{r} 15x + 18y = 60 \\ -15x - 40y = -170 \\ \hline -22y = -110 \end{array}$$

**Paso N° 03:** Se resuelve la ecuación resultante, despejando y obteniendo el valor de la variable existente.

$$y = \frac{-110}{-22} = 5 \longrightarrow y = 5$$

**Paso N° 04:** El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparece la incógnita despejada y encontramos la otra incógnita.

$$5x + 6y = 20 \longrightarrow 5x + 6(5) = 20 \longrightarrow 5x + 30 = 20 \longrightarrow 5x = 20 - 30 \longrightarrow x = \frac{-10}{5} \quad x = -2$$

**Paso N° 05:** Los valores que constituyen la solución del sistema son:  $x = -2$  ;  $y = 5$ .  $\longrightarrow R / (-2, 5)$

Una forma de comprobar que los valores obtenidos son correctos es sustituyéndolos en la ecuación y debe conservarse la igualdad.

$5x + 6y = 20$ , sustituyendo las soluciones del sistema queda:

$$5(-2) + 6(5) = 20 \rightarrow -10 + 30 = 20 \rightarrow 20 = 20 \text{ ok}$$



**Ahora práctica lo aprendido con el siguiente sistema:**

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{array} \right.$$



### MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{array}$$

### **SOLUCIÓN:**

**Paso N° 01:** Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones, se recomienda despejar la incógnita que tenga coeficiente numérico más bajo.

En nuestro caso se decidió despejar de la segunda ecuación ( $x - y = 1$ ) la variable (y), quedando de la siguiente forma:

$$x - y = 1 \rightarrow x = 1 + y \quad x = 1 + y$$

**Paso N° 02:** Sustituimos en la otra ecuación que conforma el sistema, la variable x por el valor obtenido del paso N° 01  $x = 1 + y$

$$2x + 3y = 12 \rightarrow 2(1 + y) + 3y = 12$$

**Paso N° 03:** Resolvemos la ecuación obtenida a fin de despejar la incógnita.

$$\begin{aligned} 2 + 2y + 3y &= 12 \\ 5y &= 12 - 2 \\ y &= \frac{10}{5} \end{aligned}$$

y = 2

**Paso N° 04:** El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparece la incógnita des,

$x = 1 + y;$  Con  $y = 2$  implica que:  $x = 1 + (2) \rightarrow x = 3$

x = 3

**Paso N° 05:** Los valores que constituyen la solución del sistema son:  $x = 3$   $y = 2$ . R/ (3,2)

Comprobando los resultados en una de las ecuaciones que conforman el sistema nos queda;

$$2x + 3y = 12 \rightarrow 2(3) + 3(2) = 12 \rightarrow 6 + 6 = 12 \rightarrow 12 = 12 \text{ ok.}$$



**Ahora practica lo aprendido con el siguiente sistema:**

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \end{array} \right.$$





MÉTODO DE CRAMER

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 9x + 11y = -14 & \text{Ecuación 1} \\ 6x - 5y = -34 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Paso Nº 01: Conformamos la matriz principal con los términos independientes y los coeficientes de x y de y:

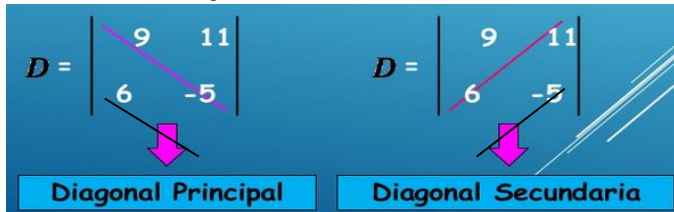
Coeficientes

$$\begin{matrix} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{Matriz} = \begin{vmatrix} 9 & 11 & -14 \\ 6 & -5 & -34 \end{vmatrix} \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{Términos independientes} \end{matrix}$$

Paso Nº 02: La determinante del sistema D se obtiene con los coeficientes de x y de y, las cuales se escriben dentro de dos barras así:

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}$$

Se multiplican los términos de la diagonal principal menos el producto de los términos de la diagonal secundaria.



Diagonal principal:  $(9)x(-5) = -45$

Diagonal secundaria:  $(11)x(6) = 66$

Finalmente se hace la resta y se obtiene D:

$$D = (-45) - (66) = -111 \quad \mathbf{D = -111}$$



Ahora práctica lo aprendido con el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ -3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Paso Nº 03: Para obtener la determinante de x se coloca en la matriz los términos independientes y los coeficientes de y de las ecuaciones, así:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -14 & 11 \\ -34 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Diagonal principal } (-14 \times -5 = 70) \\ \text{Diagonal secundaria } (11 \times -34 = -374) \end{matrix}$$

$$\Delta x = 90 - (-374) = 90 + 374 = 444 \quad \mathbf{\Delta x = 444}$$

Paso Nº 04: Para obtener la determinante de y se coloca en la matriz los coeficientes de x y los términos independientes de las ecuaciones, así:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 9 & -14 \\ 6 & -34 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Diagonal principal } (9 \times -34 = -306) \\ \text{Diagonal secundaria } (-14 \times 6 = -84) \end{matrix}$$

$$\Delta y = -306 - (-84) = -306 + 84 = -222 \quad \mathbf{\Delta y = -222}$$

Paso Nº 05: El valor de x se obtiene dividiendo la determinante Δx en la determinante del sistema D, así:

$$x = \frac{\Delta x}{D} = \frac{444}{-111} \quad \mathbf{x = -4}$$

Y el de y dividiendo la determinante Δy en la determinante del sistema D, así:

$$y = \frac{\Delta y}{D} = \frac{-222}{-111} \quad \mathbf{y = 2}$$

Paso Nº 06: Reemplazamos los valores de x y de y en la primera ecuación:

$$9x + 11y = -14 \quad \begin{matrix} 9(-4) + 11(2) \\ -36 + 22 = -14 \end{matrix}$$

Reemplazamos los valores de x y de y en la ecuación 2:

$$6x - 5y = -34 \quad \begin{matrix} 6(-4) - 5(2) \\ -24 - 10 = -34 \end{matrix}$$



**ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA:** Resuelve en casa por igualación, reducción, sustitución y Crámer los siguientes sistemas, siguiendo los pasos explicados en el taller:

$$\begin{array}{cccc}
 3x - 4y = -6 & 3x - 4y = -6 & 3x - 4y = -6 & 3x - 4y = -6 \\
 x + 2y = 8 & x + 2y = 8 & x + 2y = 8 & x + 2y = 8
 \end{array}$$

**NOTA:** Una vez concluidas las tres secuencias didácticas, se verificarán las respuestas de cada ejercicio, con la ayuda del software graphmatica, en el aula de informática, los estudiantes tomarán registros de los hallazgos de esta experiencia en su portafolio personal.

### SECUENCIA DIDÁCTICA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 EN LA SOLUCION DE SITUACIONES DE MI ENTORNO

En esta fase se trabajará armónicamente con sus compañeros resolviendo ejercicios planteados por el profesor, referentes a situaciones de la vida cotidiana, relacionados con los métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Los ejercicios estarán relacionados a contextos reales, los cuales se realizarán en grupo, con el propósito de lograr que los estudiantes adquieran estrategias propias de la actividad matemática, y tengan modelos que mejoren su modo de presentación, planteamiento y resolución de los problemas.

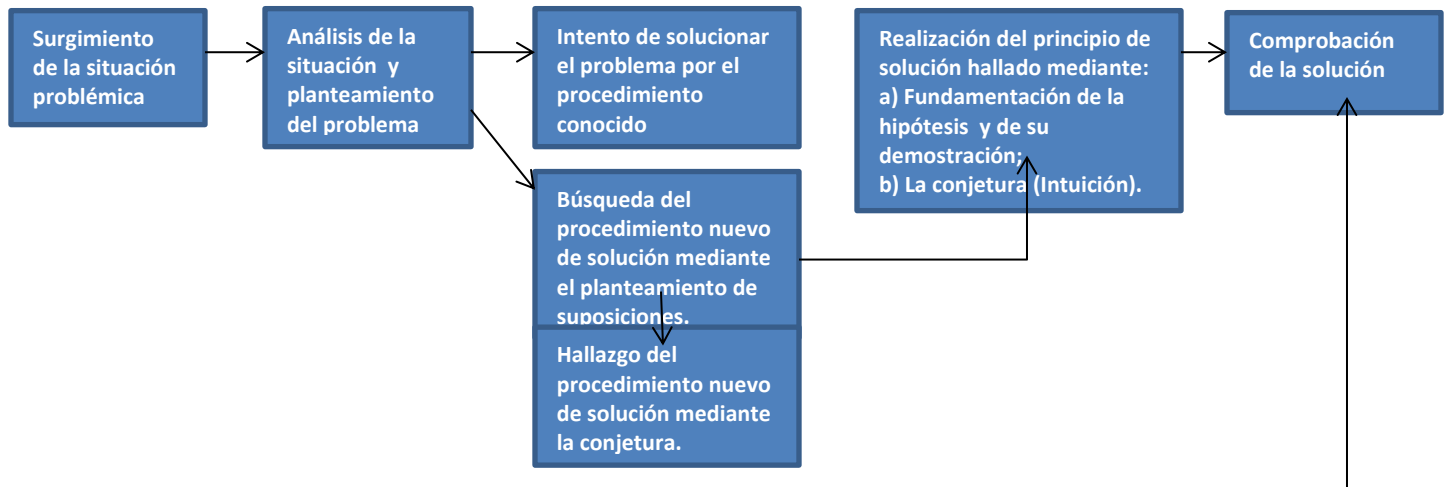
**PROPOSITO:** Desarrollar en el estudiante la habilidad para proponer posibles soluciones a una situación de su entorno, sobre la cual pueda aplicar los métodos para solucionar sistemas de ecuaciones 2x2, e interpretar y registrar los resultados mediante el uso del trabajo colaborativo.

## 1. DESARROLLO DE CONTENIDOS

### ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Los siguientes pasos son tomados del libro *La enseñanza problémica* de M. I. Majmutov, referentes a la forma de dar solución a una situación problema:

Esquema general del orden de las etapas de un proceso cognoscitivo problémico



## 2. METODOLOGIA:

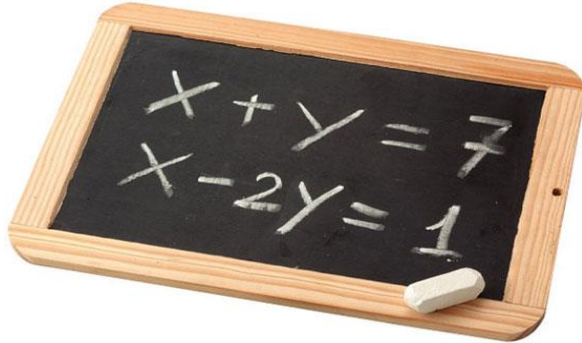
El curso será dividido grupos de cuatro estudiantes heterogéneos académicamente, cada grupo resolverá una situación real planteada en la unidad por diferente método, confrontarán sus respuestas con otros grupos y sacarán conclusiones del ejercicio. Posteriormente será resuelta otra situación real, donde los miembros de cada grupo escogen un método para resolverlo, debaten y sacan conclusiones de sus respuestas. Finalmente cada grupo conformado planteará una situación de su contexto relacionada a los sistemas de ecuaciones 2x2, y la resolverán por cualquiera de los métodos. Tiempo estimado 2 horas.

**PRIMERA FASE**

**Solución de situaciones contextualizadas en grupo por diferentes métodos:** El grupo resolverá una situación planteada por el profesor quien asignará a cada grupo un método diferente para su solución.

**Comparación de respuestas:** Los estudiantes compararán sus respuestas con otros grupos y discutirán lo que van descubriendo al comparar sus resultados y harán apuntes en una hoja de examen acerca de sus hallazgos.

**Ajustes procedimentales:** Los estudiantes de cada grupo después de cada ejercicio, escribirán en su hoja de examen los errores descubiertos con sus compañeros y harán propuestas que les ayude a evitar dichos errores.



*Manos a la obra...*

**Situación**

La empresa “**Organicomputer**”, fabricados modelos de computadoras personales: **cañón** y **clon**. Para armar una computadora modelo **cañón** necesita 12 horas de ensamblado y 2 para probarla e instalar sus programas. Para una **clon** requiere 10 horas de ensamblado, 6 para probarla e instalar programas. Si la fábrica dispone en horas por mes de 556 para ensamble, 220 para pruebas, e instalación de programas, ¿cuántas computadoras se pueden producir por mes?

**SOLUCIÓN:**

En nuestro caso las incógnitas es el número de cada tipo de computadora a producir:

- $x$  = número de computadoras cañón
- $y$  = número de computadoras clon

Para determinar las ecuaciones utilizamos los tiempos de ensamblado pruebas e instalación de programas.

RECURSO	CANÓN	CLÓN	TOTAL
Ensamblado	12X	10Y	540
Prueba e instalación de programa	2X	6Y	220


Luego las ecuaciones serán:

$$\left. \begin{array}{l} 12x + 10y = 540 \\ 2x + 6y = 220 \end{array} \right\}$$

- Una vez planteado el sistema de ecuaciones, ahora soluciona en una hoja de examen este sistema por el método que asigne el profesor a tu grupo, siguiendo los pasos aprendidos en el taller anterior (Igualación, Eliminación, Sustitución y Crámer): (tiempo estimado 30 minutos).
- Una vez solucionado el ejercicio, aplica lo aprendido a la siguiente situación problema:



**Ahora practica lo aprendido**

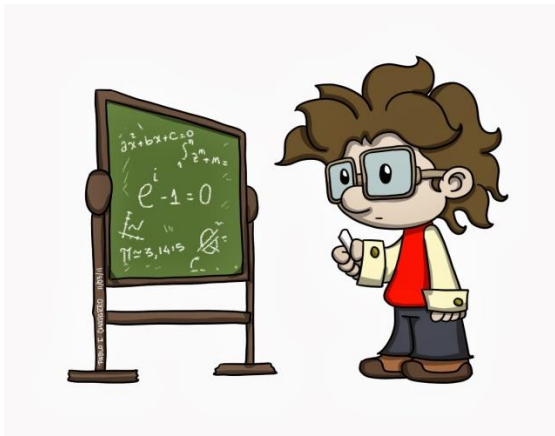
	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVENZA</b>	Código: M-02-F02
	<b>GUIA DE APRENDIZAJE</b>	Versión: 01.1 Fecha: Abril de 2014 Página 218 de 1

**Situación.** Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y patas hay?

- Al terminar el ejercicio los integrantes de tu grupo deben comparar sus respuestas con las obtenidas por los demás grupos que solucionaron el ejercicio por otro método.
- Luego escribe en la hoja de examen de tu grupo los hallazgos obtenidos de comparar tus respuestas con las de otros grupos.

#### SEGUNDA FASE

- **Elección del método a aplicar:** El profesor plantea una situación problema y Cada estudiante dentro de su grupo elige un método diferente al de sus compañeros para encontrar su solución.
- **Solución del ejercicio:** planteado por el profesor.
- **Comparación de respuestas:** Los estudiantes discutirán lo que van descubriendo con respecto a sus resultados y harán apuntes en su hoja de examen acerca de sus hallazgos.



**Vamos, inténtalo...**

**EJERCICIO:** Con dos camiones cuya capacidad de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

**TERCERA FASE**

- **Planteamiento de situaciones problema:** Los grupos propondrán una situación de su propio contexto que consideren pueda ser solucionada por los métodos de ecuaciones lineales y elegirán el que más dominen.
- **Solución del ejercicio de su entorno:** Cada estudiante del grupo solucionara los dos ejercicios propuestos por ellos mismos, eligiendo un método diferente.
- **Discusión de respuestas:** Los estudiantes discutirán sobre los resultados y lo que estos representarían para su entorno de acuerdo a la situación planteada. Finalmente se socializarán los resultados y conclusiones obtenidas por cada grupo.

**ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA:** Resuelve en casa por igualación, reducción, sustitución y Crámer las siguientes situaciones reales:

**Situación 1:** *Se reúnen 30 estudiantes entre hombres y mujeres. Se sabe que el doble de los hombres excede en 10 al triple de las mujeres. Plantear y resolver el sistema de ecuaciones por el método de igualación.*

**Situación 2:** *En un paquete tengo dos clases de caramelos. Si en total hay 200 caramelos y sabemos que mitad de los caramelos rojos equivalen a las tres cuartas partes de los caramelos verdes. Plantear y resolver el sistema de ecuaciones.*

**NOTA:** *Todos los problemas resueltos en esta secuencia serán comprobados por el método gráfico con el software Graphmatica, al finalizar las tres secuencias.*

**SECUENCIA DIDÁCTICA 3: IDENTIFICANDO ERRORES AL SOLUCIONAR SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2**

En grupos de 4 estudiantes revisarán tres problemas resueltos e identificarán los posibles errores conceptuales o procedimentales presentes en su solución al aplicar los métodos de igualación, reducción y sustitución. Posteriormente indicarán la estrategia adoptada para dar solución al problema. Tiempo estimado 2 horas.

En este momento se realizará en grupos de estudiantes, y estará centrado en probar tu capacidad interpretativa y propositiva, desarrollando tareas de comparación y verificación de información en la que se han desarrollado situaciones del contexto, con la aplicación de los métodos para solución de ecuaciones 2x2 donde identificarán, cuáles de ellas suministran respuestas válidas y coherentes al problema propuesto y con el desarrollo de los procedimientos adecuados y cuáles de ellas presentan errores en sus procedimientos para elegir y proponer en grupo, posibles estrategias de solución y tomar las decisiones que serían válidas para corregir los resultados.

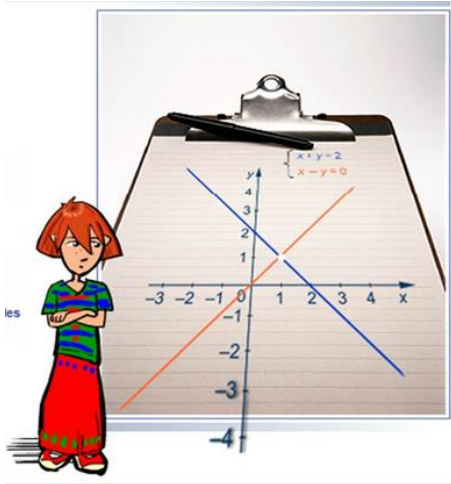
**PROPOSITO:** *Resaltar la forma como el estudiante asociará estos aspectos teóricos del tema referente a los sistemas de ecuaciones lineales con sus aplicaciones prácticas propias de su entorno, identificando procesos apropiados y errores conceptuales en dicha solución.*

**2. METODOLOGIA: (tiempo estimado 2h)**

- **Análisis de situaciones:** de una cantidad de situaciones del contexto que el profesor suministra ya resueltos a un grupo de estudiantes, revisarán los procedimientos aplicados.
- **Verificación de procedimientos y respuestas:** cada grupo de estudiantes deberá realizar procesos de análisis y comparación de procedimientos y respuestas, para identificar cuáles fueron bien desarrollados y cuáles presentaron errores.
- **Propuesta de ajustes procedimentales:** El estudiante discute con sus compañeros acerca de los errores descubiertos y de la forma como pueden repercutir estos en una situación de la vida real y propondrá los ajustes que considere necesarios para solucionarlos.
- **Corrección del ejercicio:** Los estudiantes realizarán los ajustes que propusieron para solucionar los errores del ejercicio y escribirán en su cuaderno de apuntes las conclusiones que obtienen de esta experiencia.
- **Exposición de resultados:** De esta experiencia cada grupo expondrá la hipótesis resuelta y los resultados y conclusiones obtenidas de dicho proceso.



GUIA DE APRENDIZAJE



Manos a la obra...

3. APLICACIÓN

Revisa las siguientes situaciones, resueltas por los métodos igualación, reducción y sustitución e identifica los posibles errores.

EJERCICIO 1: Se reúnen 30 estudiantes entre hombres y mujeres. Se sabe que el doble de los hombres excede en 10 al triple de las mujeres. Plantear y resolver el sistema de ecuaciones por el método de igualación.

X = Número de hombres

Y = Número de mujeres

X + Y = 30  
2X = 3Y + 10



X + Y = 30  
2X - 3Y = 10

Y = 30 - X  
Y = (10-2X)/3

Y = Y  
30 - X = (10-2X)/3

3(30 - X) = 10 - 2X

90 - 3X = 10 - 2X

-X - 2X = -90 + 10

-3X = -80

X = (-80)/-3 = -26,66

X + Y = 30



X = 30 - Y  
= 30 - (-26,66) = 56,66

X = -26,66

Y = 56,66

EJERCICIO 2: Con dos camiones cuya capacidad de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión? Resolver por el método de eliminación.

- Establecemos las variables: x= viajes camión 1  
y= viajes camión 2
- Planteamos las ecuaciones de las dos informaciones del ejercicio:

Los viajes del camión 1 más los del camión 2 son:

x + y = 80

Las toneladas transportadas en los viajes hechos por cada camión serán:

3x + 4y = 23

- Formamos el sistema de ecuaciones 2x2

x + y = 80

3x + 4y = 23



Ecuación 1

Ecuación 2



GUIA DE APRENDIZAJE

- Por el método de reducción multiplicamos la primera ecuación por  $(-3)$  para eliminar  $x$ :

$$\begin{array}{r} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 23 \end{array} \quad (-3) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} -3x - 3y = -240 \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -y = -217 \end{array}$$

- Hacemos lo mismo para eliminar  $y$ , multiplicando la ecuación 1 por  $(-4)$ :

$$\begin{array}{r} x + y = 80 \\ 3x + 4y = 23 \end{array} \quad (-4) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} -4x - 4y = -320 \\ 3x + 4y = 23 \\ \hline -x = -297 \end{array} \quad x = -297$$

**EJERCICIO 3:** Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y patas hay? (SUSTITUCIÓN).

$X = \text{CERDOS}$   
 $Y = \text{PAVOS}$

$$\begin{array}{l} X + Y = 35 \\ 4X + 2Y = 116 \end{array} \quad X = 35 + Y$$
$$\begin{array}{l} 4(35 + Y) + 2Y = 116 \\ 140 + 4Y + 2Y = 116 \\ 3Y = 116 - 140 \\ Y = -24/3 = -8 \text{ PAVOS} \end{array}$$

Reemplazamos la cantidad de pavos hallada dentro de la primera ecuación para hallar el número de cerdos:

$$\begin{array}{l} X + Y = 35 \\ X + (-8) = 35 \\ X = 35 - 8 \end{array} \quad X = 27 \text{ CERDOS}$$

- En la hoja de examen de tu grupo escribe las correcciones y las conclusiones que tu grupo consideran importante resaltar de las estrategias utilizadas y los procedimientos aplicados para corregir los errores.

**SOLUCIÓN DE ECUACIONES UTILIZANDO EL METODO GRÁFICO.**

Una vez culminadas los tres talleres, todos los ejercicios propuestos se deben resolver por el método gráfico con la ayuda de *graphmática* en el aula de informática y hacer las comparaciones con las soluciones obtenidas por los métodos aplicados. Luego se deben comparar las respuestas obtenidas con tres compañeros, y en el portafolio, se escriben los hallazgos, observados en las respuestas de los compañeros, describiendo fortalezas y debilidades en cada método aplicado.

**Anexo F. Resumen nivel de respuestas de los estudiantes Unidad didáctica****UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER****FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS****ESCUELA DE EDUCACION****MAESTRIA EN PEDAGOGÍA****ESTUDIANTE: JORGE IVÁN CARREÑO BELTRÁN****Código: 2148260****TITULO: LAS SITUACIONES DIDACTICAS EN LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2.****RESUMEN NIVEL DE RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES UNIDAD DIDACTICA****SECUENCIA 1**

Tabla 1. Unidad didáctica, secuencia 1. Respuestas Método de igualación.

<b>CÓDIGO IDENTIF.</b>	<b>SOLUCIÓN (<math>X = -3</math>)</b>	<b>SOLUCIÓN (<math>Y = -2</math>)</b>	<b>Solución</b>
	<b>Respuestas x</b>	<b>Respuestas y</b>	
EH1	-3	-2	AVANZADO
EH2	-3	-2	AVANZADO
EH3	-3	-2	AVANZADO
EH4	-3	-2	AVANZADO
EH5	-3	-2	AVANZADO
EH6	-3	-2	AVANZADO
EH7	3	-2	SATISFACTORIA
EM1	NO ME DIO	NO ME DIO	INSUFICIENTE
EM2	-3	-2	AVANZADO
EM3	-3	-2	AVANZADO
EM4	-3	-2	AVANZADO
EM5	---	---	NO RESPONDE
EM6	-3	-2	AVANZADO
EH8	-3	-2	AVANZADO
EM7	-3	-2	AVANZADO
EM8	-3	-2	AVANZADO
EM9	-3	-2	AVANZADO
EH9	-3	-2	AVANZADO
EH10	---	---	NO RESPONDE
EM10	---	---	NO RESPONDE
EM11	2	---	INSUFICIENTE
EH11	-3	-2	AVANZADO
EM12	---	---	NO RESPONDE
EM13	-3	-2	AVANZADO



Tabla 2. Unidad didáctica, secuencia 1. Respuestas Método de Reducción.

CÓDIGO IDENTIF.	SOLUCIÓN ( $X = 2$ )	SOLUCIÓN ( $Y = 3$ )	Solución
	Respuestas X	Respuestas Y	
EH1	2	3	AVANZADO
EH2	2	3	AVANZADO
EH3	2	3	AVANZADO
EH4	2	3	AVANZADO
EH5	2	3	AVANZADO
EH6	2	3	AVANZADO
EH7	2	3	AVANZADO
EM1	2	3	AVANZADO
EM2	2	3	AVANZADO
EM3	2	3	AVANZADO
EM4	2	3	AVANZADO
EM5	---	---	NO RESPONDE
EM6	2	3	AVANZADO
EH8	2	3	AVANZADO
EM7	2	3	AVANZADO
EM8	2	3	AVANZADO
EM9	2	3	AVANZADO
EH9	6	3	SATISFACTORIA
EH10	---	---	NO RESPONDE
EM10	---	---	NO RESPONDE
EM11	4	3	SATISFACTORIA
EH11	2	3	AVANZADO
EM12	---	---	NO RESPONDE
EM13	2	3	AVANZADO

Tabla 3. Unidad didáctica, secuencia 1. Respuestas Método de Sustitución.

CÓDIGO IDENTIF.	SOLUCIÓN ( $X = 2$ )	SOLUCIÓN ( $Y = 0$ )	Solución
	Respuestas X	Respuestas Y	
EH1	2	0	AVANZADO
EH2	2	0	AVANZADO
EH3	2	0	AVANZADO
EH4	2	0	AVANZADO
EH5	2	0	AVANZADO
EH6	2	0	AVANZADO
EH7	2	0	AVANZADO
EM1	2	0	AVANZADO
EM2	2	0	AVANZADO
EM3	2	0	AVANZADO
EM4	2	0	AVANZADO
EM5	---	---	NO RESPONDE
EM6	2	0	AVANZADO
EH8	2	0	AVANZADO
EM7	2	0	AVANZADO
EM8	2	0	AVANZADO
EM9	2	0	AVANZADO
EH9	2	0	AVANZADO
EH10	---	---	NO RESPONDE
EM10	---	---	NO RESPONDE
EM11	$\frac{1}{11}$	$6 - \frac{13}{3}$	INSUFICIENTE
EH11	2	0	AVANZADO
EM12	---	---	NO RESPONDE
EM13	2	0	AVANZADO



Tabla 4. Unidad didáctica, secuencia 1. Observaciones al comparar respuestas Método de Crámer.

CÓDIGO IDENTIF.	SOLUCIÓN ( $X = -8$ )	SOLUCIÓN ( $Y = -4$ )	Solución
	Solución	Solución	
EH1	-8	-4	AVANZADA
EH2	-8	-4	AVANZADA
EH3	$\frac{24}{-7}$	-4	SATISFACTORIA
EH4	-8	-4	AVANZADA
EH5	-8	-4	AVANZADA
EH6	-8	-4	AVANZADA
EH7	---	---	NO RESPONDE
EM1	-8	-4	AVANZADA
EM2	-8	-4	AVANZADA
EM3	-8	-4	AVANZADA
EM4	-8	-4	AVANZADA
EM5	---	---	NO RESPONDE
EM6	-8	-4	AVANZADA
EH8	8	4	SATISFACTORIA
EM7	-8	-4	AVANZADA
EM8	-8	-4	AVANZADA
EM9	-8	-4	AVANZADA
EH9	INCOMPLETO	INCOMPLETO	INSUFICIENTE
EH10	---	---	NO RESPONDE
EM10	---	---	NO RESPONDE
EM11	INCOMPLETO	INCOMPLETO	INSUFICIENTE
EH11	-8	-4	AVANZADA
EM12	---	---	NO RESPONDE
EM13	-8	-4	AVANZADA

**UNIDAD DIDACTICA, SECUENCIA 2**

Tabla 5. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 1. Respuestas Situación 1 Granja.

GRUPO	MÉTODO	VARIABLES		ECUACIONES PLANTEADAS		SOLUCIÓN	
		X= Cerdos Y= Pavos	Soluc.	$X + Y = 35$ $4X + 2Y = 116$	Soluc.	(23,12) 23 Cerdos 12 Pavos	Soluc.
G1	Sustitución	X= Cerdos Y= Pavos	A	$x + y = 35$ $4x + 2y = 116$	A	(23,12)	A
G2	Reducción	-----	NR	$x + y = 35$ $4x + 2y = 116$	A	(23,12)	A
G3	Igualación	-----	NR	$x + y = 35$ $4x + 2y = 116$	A	X=23 Y=12	A
G4	Igualación	-----	NR	$x + y = 35$ $4x + 2y = 116$	A	(23,12)	A
G5	Reducción	Cerdos y pavos	S	$x + y = 35$ $4x + 2y = 116$	A	X=23 Y=12	A
G6	Crámer	-----	NR	$x + y = 35$ $4x + 2y = 116$	A	X=23 Y=12	A



Tabla 6. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 2. Respuestas Situación real 2

GRUPO	VARIABLES	Soluc	MÉTODOS	ECUACIONES PLANTEADAS		SOLUCIÓN		
	X= Camión 1 (3 toneladas) Y= Camión 2 (4 toneladas)			$X + Y = 35$ $4X + 2Y = 116$	Solu c.	(12,11) 12 Camión 1 11 Camión 2	Solu c.	
G1	X=Camión 1 (3 toneladas) Y=Camión 2 (4 toneladas)	A	Igualación	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Reducción	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Sustitución	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Cramer	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
G2	X=Camión 1 (3 toneladas) Y=Camión 2 (4 toneladas)	A	Igualación	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Reducción	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	I	(12, 11)	A
			Sustitución	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Cramer	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
G3	X=Camión 1 (3 toneladas) Y=Camión 2 (1 toneladas)	S	Igualación	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Reducción	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Sustitución	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Cramer	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
G4	X=Camión 1 (3 toneladas) Y=Camión 2 (4 toneladas)	A	Igualación	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Reducción	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Sustitución	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Cramer	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
G5	X=Camión 1 (3 toneladas) Y=Camión 2 (4 toneladas)	A	Igualación	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Reducción	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Sustitución	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Cramer	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
G6	X=Camión 1 (3 toneladas) Y=Camión 2 (4 toneladas)	A	Igualación	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Reducción	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Sustitución	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A
			Cramer	$x + y = 23$	$3x + 4y = 80$	A	(12, 11)	A

**Anexo G. Resumen argumentos de los estudiantes al confrontar resultados.****UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER****FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS****ESCUELA DE EDUCACION****MAESTRIA EN PEDAGOGÍA****ESTUDIANTE: JORGE IVÁN CARREÑO BELTRÁN****Código: 2148260****TITULO: LAS SITUACIONES DIDACTICAS EN LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2.****RESUMEN ARGUMENTOS DE LOS ESTUDIANTES AL CONFRONTAR RESULTADOS****UNIDAD DIDACTICA, SECUENCIA 1**

Tabla 1. Unidad didáctica, secuencia 1. Observaciones al comparar respuestas Método de igualación.

<b>CÓDIGO IDENTIF.</b>	<b>Observaciones al comparar respuestas</b>	
	<b>Solución</b>	<b>Solución</b>
EH1	La mayoría bien la variable. Unos compañeros tuvieron errores con los signos. Un compañero se equivocó en el paso No. 4.	
EH2	Yo y mis compañeros despejamos bien las variables. Mi compañero me corrigió un signo en el paso de lado. Mis compañeros y yo coincidimos las respuestas.	
EH3	Al comparar desarrollamos bien el despeje. Mi compañero se equivocó al cambiar la variable no cambió de signo y se equivocó en el problema. Mis compañeros y yo tuvimos mismas respuestas.	
EH4	Me equivoque al simplificar en el paso 1. Con mis compañeros el resultado fue el mismo. Al plantear la ecuación en el paso No. 3 cometí un error.	
EH5	No reemplazó x en el paso 4. Cambian signos, los ponen bien. Realiza bien los despejes.	
EH6	Yo cometí un error y fue que al despejar y confundí los signos. Otro error fue comerme pasos. Mi compañero hizo una resta mal y yo la corregí.	
EH7	-----	
EM1	No me dio.	
EM2	Con mi compañero coincidimos en el resultado. Con otra compañera comparamos y ella tenía problema de signos. Con un compañero coincidimos en tiempo, forma y resultado; nos quedó bien.	



EM3	Compare mis ejercicios con Andrés Bustamante y obtuvimos las mismas respuestas. Nuestros signos estuvieron bien. Nos quedó todo bien	
EM4	Comparé con mi compañera y para que no quede mal toca poner los signos que son. Despejamos todo igual. Tener orden en el procedimiento eso nos confunden.	
EM5	-----	
EM6	Me equivoqué en los signos cuando cambiaba de lugar. Mi compañero se equivocó de signos. Mi compañera ubico mal la ecuación.	
EH8	Pues este método me pareció no tan práctico, la letra está fea, el orden. Esta solución solo él la entiende. Tiene que fijarse en detalles, etc.	
EM7	Yo compare con mi compañero y noté que me ha quedado bien y he podido resolver bien el procedimiento al igual que él. La única diferencia con mi compañero es que en el paso 4 el utilizó una distinta operación para sacar y. Todo nos ha quedado bien e igual y no hemos tenido problema al resolver la operación.	
EM8	Equivocación al escribir la ecuación. Coloqué mal los signos. Me equivoque en las operaciones.	
EM9	Mi error fue no remplazar x en el paso 4. Ambos trabajamos bien despeje de variable. Ambos utilizamos bien los signos.	
EH9	Mis compañeros al comparar estaba igual	
EH10	-----	
EM10	-----	
EM11	Los dos hicimos bien el despeje.	
EH11	E comparando con mi compañero Juan Pablo y me di de cuenta de que coincidimos en todo. Miramos los signos y fue muy bien la comparación. Nos demoramos un poco comparándolo todo, para quedar con todo bien.	
EM12	En el desarrollo del despeje de la variable tuvimos algunos problemas con respecto a los signos. Comparamos nuestros ejercicios con el niño Juan Pablo Murillo, el desarrollo quedó bien. Comparamos también los ejercicios cuando lo finalizamos con el niño Ronald Paredes habían ciertas diferencias en el desarrollo.	
EM13	Comparé con mi compañera y en los signos nos quedó igual, todo nos quedó igual y para que no quede mal toca poner los signos que son.	

Tabla 2. Unidad didáctica, secuencia 1. Observaciones al comparar respuestas Método de Reducción.

<b>CÓDIGO IDENTIF.</b>	<b>Observaciones al comparar respuestas</b>	
	<b>Solución</b>	<b>Valor</b>
EH1	Un compañero me corrigió un error en el paso No. 1. Un compañero tuvo un error en el paso No. 3. A la mayoría les quedó bien el ejercicio.	
EH2	Mi compañero me corrigió un error de signos. Mi compañero y yo coincidimos en respuestas. Yo seguí todos los pasos.	
EH3	Al comparar con mi compañero logramos verificar que no sucedió ningún error despejando por la misma variable.	
EH4	Al comparar con mi compañera Yuranny ella cometió un error en el paso 4 al no cambiar el signo al 12 después del igual. El ejercicio lo he desarrollado de manera correcta. Se cumplió lo asignado.	
EH5	Sume mal, cambie los signos. Nos quedó bien. Pasó mal los signos.	
EH6	Un compañero confundió un número y no le daba y yo se lo dije. Un compañero y yo hicimos todo bien y todo está correcto. Cometí un error al escribir primero la y que la x.	
EH7	-----	
EM1	Con mis compañeros comparamos y coincidimos en todo. Con mi otro compañero la situación fue diferente, a él le quedaron algunos procedimientos mal. Fueron algunos	



	pasos diferentes a los míos pero tenemos la misma respuesta.	
EM2	Al principio me confundí un poco con un signo y mi compañera me aclaró las dudas. Cuando terminé el ejercicio a mi compañera y a mí nos quedó bien hecho. En este método mi compañera fue más rápida que yo.	
EM3	Al comparar con Yeison Rey me di cuenta que al cambiar de un lugar a otro no cambie los signos, todo nos quedó bien hasta el paso 3, en el paso 4 ya tuve una equivocación. Después de corregir mi error y volverlo a comparar con otros compañeros, todo nos quedó bien e igual a los otros.	
EM4	Todos los procedimientos la teníamos iguales. Saber dividir y los signos. Yo comparé con mi compañera que no sabíamos lo de los signos y ya terminando nos había quedado mal.	
EM5	-----	
EM6	Con mi compañera coincidimos en todo. No coincidimos con los signos de él estaban mal.	
EH8	-----	
EM7	Al comparar con mi compañero notamos que él tuvo un error pero ya le he ayudado a arreglarlo. Notamos que todo nos quedó bien. Pudimos ver que las respuestas y todo el procedimiento está bien.	
EM8	Se confunde con los signos. Al paso de sustituir se confunde. Los resultados son iguales.	
EM9	Que los dos teníamos mal el signo. Ambos teníamos respuestas similares. Y sumamos bien la multiplicación.	
EH9	Vimos que los demás lo hicieron despejando y.	
EH10	-----	
EM10	-----	
EM11	Comparamos pero la (x) nos quedó mal.	
EH11	Comparé con mi compañero EH4 y concordamos en todo. Los signos en los 2 estaban bien. Hicimos la misma cantidad de pasos para sacar el resultado correcto.	
EM12	En el desarrollo del despeje de la y tuvimos algunos problemas con los signos. Comparamos con todos los compañeros del salón y concordamos en el que el resultado era $x=2$ y la $y=3$ . El compañero EH7 nos corrigió algunos errores que tuvimos al despejar y.	
EM13	Todos los procedimientos los tenemos iguales. Saber dividir y los signos. Comparé con mi compañera que no sabíamos lo de los signos y ya terminando nos había quedado mal.	

Tabla 3. Unidad didáctica, secuencia 1. Observaciones al comparar respuestas Método de Sustitución.

CÓDIGO IDENTIF.	Observaciones al comparar respuestas	
	Solución	Valor
EH1	Despeje bien la variable. Los compañeros cometieron error de signos. Los compañeros cometieron un error en el punto o paso No. 04.	
EH2	Despeje bien la variable. Los resultados coinciden. Corregí a un compañero un error de suma.	
EH3	-----	
EH4	-----	
EH5	Tuve un error de signos en el paso 3. Tuvimos un buen despeje en el paso 4. Multiplicamos bien en el paso 2.	
EH6	Al pasar el 7 a dividir no pase el signo y no me daba. Por tener el 7 positivo daba -2 y por eso no me daba. Un compañero se comió un paso y yo le dije.	
EH7	-----	
EM1	Con mis compañeros comparamos y todo me quedó igual. Además me quedo igual pero yo despeje x. Algunos pasos me los comí aunque me quedó bien, mientras que mis compañeros hicieron todos.	



EM2	Nos quedó bien a mi compañero y a mí y lo resolvimos de la misma manera. A otro compañero le daba diferente, pero el que tenía el error era él. Mi compañera y yo coincidimos en el tiempo en el que terminamos pero ella tuvo un error de signos.	
EM3	Comparando con Nicolás moreno, obtuvimos las mismas respuestas. Comparando con Andrés Bustamante, nos dimos cuenta que él tuvo un error de signos en el paso 3 y yo no. Comparando con Alejandra Rodríguez nos dimos cuenta que tuvo un error en signos y yo no.	
EM4	Comparando con una compañera y todo el procedimiento estaba mal. Toca aprender la ley de los signos para que el resultado salga bien.	
EM5	-----	
EM6	Me equivoqué en signos. Me equivoqué en la ubicación de ecuaciones. Mi compañera se equivocó en signos.	
EH8	-----	
EM7	En el momento que compare con mi compañera vimos que todo está bien. Hubieron varias cosas que nos quedó distintas pero al final notamos que todo nos quedó bien. Mi compañero tuvo un pequeño error pero luego yo le pude ayudar a solucionarlo y el entendió mejor todo.	
EM8	Signos mal ubicados. Ecuaciones mal ubicadas. Desorden al resolver los problemas.	
EM9	Ambos teníamos los signos bien. Hicimos despeje de variable bien. Sabemos utilizar bien los signos.	
EH9	Mis compañeros tenían lo mismo que yo tenía.	
EH10	-----	
EM10	-----	
EM11	-----	
EH11	Comparando con Yurany nos dimos de cuenta que no había errores. Nos dio la misma respuesta. No tuvimos errores de signos.	
EM12	Tuvimos problemas con los signos pero al final nos quedaron bien los ejercicios. Comparamos con nuestros compañeros y había algunas cosas diferentes, al final corregimos cada uno de los grupos y después coincidió todo. Tuvimos problemas en el despeje y nos tocó como corregirlo 2 veces	
EM13	Comparando con mi compañera al principio tuve algunos errores pro los corregí. Comparando el error que tuve fue en bajar paso 1 al paso 2 en el paréntesis. Después de mis dudas lo corregí y quedo bien.	

Tabla 4. Unidad didáctica, secuencia 1. Respuestas Método de Crámer.

CÓDIGO IDENTIF.	Observaciones al comparar respuestas	
	Solución	Valor
EH1	-----	
EH2	-----	
EH3	-----	
EH4	Al poder comprobar en el mismo ejercicio la necesidad de comparar con mi compañero pues puedo saber si me quedo bien o no. Al realizar el trabajo fue correcto mi desempeño. Mi compañero cometió un error en la división del paso No. 5.	
EH5	-----	
EH6	Tuve un gran error y porque multiplique mal 2 números. No coloque el 7 – y por eso no me daba. Mi amigo tuvo un error de suma.	
EH7	Diferente procedimiento y mismo resultado. Diferente método y mismo resultado. Diferente signo pero mismo resultado.	
EM1	Comparé mi ejercicio con el de mis compañeros está bien e igual. Este método está muy fácil.	
EM2	Un compañero lo hizo de distinta forma, pero a los dos nos dio lo mismo. Una compañera	



	lo hizo mal y yo le ayude a aclarar las dudas. Un compañero lo tenía bien y no sabía porque su procedimiento fue muy desordenado.	
EM3	-----	
EM4	-----	
EM5	-----	
EM6	Con mi compañera coincidimos en signos. Con mi compañero no coincidimos en signos él estaba mal.	
EH8	-----	
EM7	Al principio mi compañero estaba indeciso con que le alla quedado bien ya que tuvo un poco de problemas al solucionarlo pero al final vimos que estaba bien y repasamos todo de nuevo ya que él y yo teníamos unas pocas dudas.	
EM8	-----	
EM9	No supo utilizar bien los signos. Se comió muchos pasos. Por la rapidez no lo supo hacer.	
EH9	Los otros resultados que dieron eran iguales a los que teníamos.	
EH10	-----	
EM10	-----	
EM11	-----	
EH11	Mi compañero hizo todo igual a mí. No tuvimos ningún error de signos. Nos dio la misma R/ y con los mismos puntos.	
EM12	Con este método tuvimos menos problemas que con los demás. Varios compañeros compararon con nosotros porque nos había quedado correcto. Este caso es el más largo, por lo tanto gastamos más en hacerlo.	
EM13	-----	

**UNIDAD DIDACTICA, SECUENCIA 2**

Tabla 5. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 1. Observaciones al comparar respuestas Situación 1 Granja.

<b>CÓDIGO IDENTIF.</b>	<b>Observaciones al comparar respuestas</b>	
	<b>Solución</b>	<b>Valor</b>
G1	Comprobamos con otros grupos y tenían algunos diferentes signos. En algunos casos está el procedimiento muy desordenado y no se entendía nada. Cuando pasamos a comprobar algunos no habían terminado. A un grupo tenía mal la respuesta. La mayoría nos coincidía la respuesta.	
G2	Al comparar con los demás grupos coincidieron todas las respuestas. Un grupo tuvo error de signos. Al comparar con otro grupo y tenían diferentes respuestas. En algunos casos los ej. Eran muy desordenados y no entendíamos nada. La mayoría resolvieron bien los métodos.	
G3	A algunos les pareció un poco complicado por los signos. Comparando con mis compañeros todo nos quedó bien e igual. Comparando notamos que todos pudimos hacer bien todo el procedimiento. Al comparar vimos que todos entendimos bien el tema. Algunos se equivocaron pero al corregir todo se pudo solucionar y fue más sencillo.	
G4	Al comparar con otros grupos vimos que el procedimiento era muy diferente a lo de nosotros. La respuesta era igual. A un grupo el procedimiento no fue correcto.	
G5	Un grupo se confundió e hizo un ejercicio diferente. A todos los grupos les dio la misma respuesta.	
G6	Diferente procedimiento y mismo resultado. Diferente método y mismo resultado. Diferente signo pero mismo resultado.	



Tabla 6. Unidad didáctica, Secuencia 2, Fase 2. Observaciones al comparar respuestas Situación real 2. Camiones de carga.

<b>CÓDIGO IDENTIF.</b>	<b>Observaciones al comparar respuestas</b>	
	<b>Solución (recomendaciones)</b>	<b>Valor</b>
G1	<p>Al momento de despejar las variables, tener mucho cuidado con los signos, porque éstos son las falencias en muchos, cuando tenemos que encontrar la respuesta</p> <p>Yo recomiendo tener presente en el momento de despejar las variables, tener en cuenta o cuidado con cual ecuación estamos ejecutando la operación para no tener errores en la solución.</p> <p>En problemas de operaciones básicas yo recomiendo el estudio de estos porque son básicos en todos los ejercicios a desarrollar en cualquier problema matemático.</p> <p>(El estudiante) Debería aclarar dudas en clase antes de la evaluación o la misma clase que explica el profesor.</p> <p>Poder identificar las variables de un problema, la dependiente y la independiente, en estos cosas yo recomendaría leer atentamente la situación y dependiendo de eso ir sacando los datos y al momento de haberlo hecho ordenarlos para el desarrollo del problema. Esta sería una buena y factible estrategia.</p>	
G2	<p>Los signos, porqué deberían tener más bases en las reglas y no confundirlas con las de suma y resta y de multiplicación.</p> <p>Despee de variables deberían identificar la mejor para despejar la más fácil y saberlo hacer.</p> <p>Las sumas y restas, potencia, radicación, practiquen mucho y hagan las cosas bien.</p> <p>El primer valor es (X) y el segundo (Y) y los ejes porque varias veces se confunde</p>	
G3		
G4		
G5	A todos nos dio el mismo resultado con cada método. Coincidimos en el tiempo e terminar. Lo arreglamos de manera que se nos facilitara.	
G6		



Anexo H. Prueba final. Evaluación d aprendizaje 1. Método igualación y eliminación.

MODELO 1

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVENZA</b>	Código: M-03-F04
		Versión: 01.1
	<b>EVALUACION DEL APRENDIZAJE</b>	FECHA: Abril de 2014
		Página 1 de 6

PROFESOR: IVAN CARREÑO BELTRAN | MATEMATICA | GRADO 9\_\_\_ | NOMBRE:

RESUELVE EL PRIMER EJERCICIO POR EL METODO DE IGUALACIÓN Y EL SEGUNDO POR EL DE ELIMINACIÓN

1.  $5X + 2Y = -2$   
 $2X - Y = -8$

2.  $5X + 2Y = 8$   
 $3X + 4Y = 2$

3. Juan pagó \$50 por 3 cajas de lapiceros y 5 cajas de colores. Pedro compró 5 cajas de lapiceros y 7 de colores y tuvo que pagar \$74. ¿Cuál es el precio de cada caja de lapiceros y de cada caja de colores? Plantea las ecuaciones y resuélvelo por igualación o reducción.

4. Identifica los errores presentes en el siguiente ejercicio:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + 5y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y = 3 + 3x \\ 5y = 16 + x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{3+3x}{2} \\ y = \frac{16+x}{5} \end{cases}$$

$$\frac{3+3x}{2} = \frac{16+x}{5}$$

$$\begin{aligned} 2(3+3x) &= 5(16+x) \\ 6-6x &= 80+5x \\ -6x-5x &= 80-6 \\ -x &= 74 \\ x &= -74 \end{aligned}$$

 $x = -74$ 

$$\begin{aligned} y &= \frac{16+x}{5} \\ y &= \frac{16+(-74)}{5} \\ y &= \frac{-58}{5} \end{aligned}$$

 $y = \frac{-58}{5}$ 

R/  $(-74, \frac{-58}{5})$



Carrera 23 No. 109-07  
 Bucaramanga  
 PBX: 6 36 1000  
[www.ieprovenza.edu.co](http://www.ieprovenza.edu.co)



MODELO 2

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVENZA</b>	Código: M-03-F04
	<b>EVALUACION DEL APRENDIZAJE</b>	Versión: 01.1
		FECHA: Abril de 2014
		Página 2 de 6

PROFESOR: IVAN CARREÑO BELTRAN	MATEMATICA	GRADO 9 ___	NOMBRE:
--------------------------------	------------	-------------	---------

RESUELVE EL PRIMER EJERCICIO POR EL METODO DE IGUALACIÓN Y EL SEGUNDO POR EL DE ELIMINACIÓN

1.  $-9X + 8Y = 5$   
 $4X - 4Y = 12$

2.  $X + 4Y = 12$   
 $3X + 9Y = 6$

3. Enriqueta es costurera y quiere aprovechar una oferta de botones. Enriqueta compra 14 paquetes de botones entre blancos y negros. Si el paquete de botones blancos cuesta \$15 y el de botones negros \$10; y en total paga \$180 ¿Cuántos paquetes de cada color compró?

4. Identificalos errores presentes en el siguiente ejercicio:

$$\begin{array}{l} 5x + 6y = 20 \\ 3x + 8y = 34 \end{array} \left. \begin{array}{l} \times (3) \\ \times (-5) \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} 15x + 18y = 60 \\ -15x + 40y = 170 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15x + 18y = 60 \\ -15x + 40y = 170 \\ \hline 58y = 230 \end{array}$$

$$y = \frac{230}{58} = \longrightarrow y = \frac{115}{29}$$

$$5x + 6y = 20 \longrightarrow 5x + 6\left(\frac{115}{29}\right) = 20 \longrightarrow 5x + \frac{690}{29} = 20 \longrightarrow 5x = 20 + \frac{690}{29} \longrightarrow x = \frac{1270}{29}$$

$$x = \frac{254}{29}$$

$$x = \frac{254}{29} ; y = \frac{115}{29} \quad R / \left( \frac{254}{29}, \frac{115}{29} \right)$$



Carrera 23 No. 109-07  
 Bucaramanga  
 PBX: 6 36 10 00  
[www.ieprovenza.edu.co](http://www.ieprovenza.edu.co)



MODELO 3

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVENZA</b>	Código: M-03-F04
	<b>EVALUACION DEL APRENDIZAJE</b>	Versión: 01.1
		FECHA: Abril de 2014
		Página 3 de 6

PROFESOR: IVAN CARREÑO BELTRAN	MATEMATICA	GRADO 9 ___	NOMBRE:
--------------------------------	------------	-------------	---------

RESUELVE EL PRIMER EJERCICIO POR EL METODO DE IGUALACIÓN Y EL SEGUNDO POR EL DE ELIMINACIÓN

1.  $-2X + Y = 12$   
 $3X - 2Y = 6$

2.  $9X + 12Y = 6$   
 $5X + 2Y = 8$

3. La edad de Camila y de su mamá suman 54 años y dentro de 9 años la edad de la mamá será el doble de la edad de Camila. ¿Cuántos años tiene cada una?

4. Identifica los errores presentes en el siguiente ejercicio:

$$\begin{array}{rcl} 5x + 6y = 20 & \times (-3) & \longrightarrow & 15x + 18y = 60 \\ 3x + 8y = 34 & \times (5) & \longrightarrow & -15x - 40y = -170 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{15x} + 18y = -60 \\ \cancel{-15x} - 40y = 170 \\ \hline -22y = 110 \end{array}$$

$$y = \frac{110}{-22} = -5 \longrightarrow y = -5$$

$$5x + 6y = 20 \longrightarrow 5x + 6(-5) = 20 \longrightarrow 5x + 30 = 20 \longrightarrow 5x = 20 + 30 \longrightarrow x = \frac{50}{5}$$

$x = 10$

$x = 10 ; y = 5. \quad R/(10,5)$



Carrera 23 No. 109-07  
 Bucaramanga  
 PBX: 6 36 1000  
[www.ieprovenza.edu.co](http://www.ieprovenza.edu.co)



Anexo I Prueba final. Evaluación d aprendizaje 1. Método sustitución y Cramer.

MODELO 1

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVENZA</b>	Código: M-03-F04
	<b>EVALUACION DEL APRENDIZAJE</b>	Versión: 01.1
PROFESOR: IVAN CARREÑO BELTRAN		FECHA: Abril de 2014
MATEMATICA	GRADO 9 ____	Página 4 de 6
NOMBRE: _____		

RESUELVE EL PRIMER EJERCICIO POR EL METODO DE SUSTITUCIÓN Y EL SEGUNDO POR EL MÉTODO DE CRAMER.

1.  $-X + 3Y = 5$   
 $3X - 6Y = 9$

2.  $10X + 6Y = 12$   
 $4X + 3Y = 24$

3. Jovita y Felipe hacen paletas de chocolate para vender. El domingo deciden hacer 150 paletas entre grandes y chicas. Si La materia prima necesaria para hacer una paleta grande les cuesta \$5 y para una paleta chica \$3 y disponen de \$570 para su elaboración ¿cuántas paletas de cada tamaño podrán hacer?


4. Plantea un problema de dos ecuaciones con dos incógnitas.



Carrera 23 No. 109-07  
 Bucaramanga  
 PBX: 6 36 10 00  
[www.ieprovenza.edu.co](http://www.ieprovenza.edu.co)



## MODELO 2

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVENZA</b>	Código: M-03-F04	
	<b>EVALUACION DEL APRENDIZAJE</b>	Versión: 01.1	
		FECHA: Abril de 2014	
		Página 5 de 6	
PROFESOR: IVAN CARREÑO BELTRAN	MATEMATICA	GRADO 9 ____	NOMBRE: _____

RESUELVE EL PRIMER EJERCICIO POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN Y EL SEGUNDO POR EL MÉTODO DE CRAMER.

1.  $5X - 2Y = 15$   
 $-6X + Y = 24$

2.  $6X + 2Y = 4$   
 $4X - 3Y = 6$

3. El costo de las entradas a una función de titeres es de \$30 para los adultos y \$20 para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron \$5930, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a la función el sábado?


4. Plantea un problema de dos ecuaciones con dos incógnitas.



Carrera 23 No. 109-07  
Bucaramanga  
PBX: 6 36 10 00  
[www.ieprovenza.edu.co](http://www.ieprovenza.edu.co)



## MODELO 3

	<b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVENZA</b>	Código: M-03-F04
	<b>EVALUACION DEL APRENDIZAJE</b>	Version: 01.1
		FECHA: Abril de 2014
		Página 6 de 6

PROFESOR: IVAN CARREÑO BELTRAN	MATEMATICA	GRADO 9 ___	NOMBRE:
--------------------------------	------------	-------------	---------

RESUELVE EL PRIMER EJERCICIO POR EL METODO DE SUSTITUCIÓN Y EL SEGUNDO POR EL MÉTODO DE CRAMER.

1.  $2X - Y = 5$   
 $3X - 2Y = 3$

2.  $-6X + 4Y = 8$   
 $6X - 3Y = 2$

3. Marta y sus amigos pagaron \$109 por 5 hamburguesas y 7 refrescos. Si la semana anterior consumieron 8 hamburguesas y 11 refrescos y la cuenta fue de \$173, ¿cuánto cuesta cada hamburguesa y cada refresco?

4. Plantea un problema de dos ecuaciones con dos incógnitas.



Carrera 23 No. 109-07  
Bucaramanga  
PBX: 6 36 10 00  
[www.ieprovenza.edu.co](http://www.ieprovenza.edu.co)