

IDENTIDADES POLINOMIALES GRADUADAS PARA EL ÁLGEBRA DE MATRICES
TRIANGULARES SUPERIORES DE ORDEN 2

ALBERT ANDRETTI CUADROS PEÑA

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Carlos Arturo Rodríguez Palma
Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2026

Agradecimientos

La culminación de este trabajo de grado representa un logro académico y personal que no habría sido posible sin el apoyo, la confianza y el acompañamiento de muchas personas que hicieron parte de este proceso.

En primer lugar, expreso mi más profundo agradecimiento a mi familia, en especial a mis padres Fernando y Milena por ser el pilar fundamental de mi vida. Gracias por su amor incondicional, su paciencia, sus palabras de aliento y el apoyo constante durante cada etapa de mi formación. Su confianza en mis capacidades ha sido la motivación que me impulsó a superar los desafíos y a perseverar hasta alcanzar esta meta.

Deseo expresar un especial reconocimiento a mi director de trabajo de grado Carlos Arturo, por su orientación, dedicación y valiosos aportes académicos. Su experiencia, disposición para compartir conocimientos y acompañamiento permanente fueron esenciales para el desarrollo de esta investigación. Agradezco profundamente el tiempo, la confianza y el compromiso con los que guio este proceso.

Asimismo, quiero agradecer de manera muy especial a aquellos que en algún momento tomaron una tutoría conmigo, quienes compartieron conmigo este camino de aprendizaje. Cada clase, cada pregunta, cada reflexión y cada experiencia vivida en las tutorías enriquecieron no solo este trabajo, sino también mi crecimiento como persona. Su entusiasmo, compromiso y deseo de aprender fueron una fuente constante de inspiración y reafirmaron mi vocación por la enseñanza.

Finalmente, agradezco a todos mis amigos que, de una u otra manera, contribuyeron a la realización de este proyecto y me brindaron su apoyo durante este importante capítulo de mi vida académica. Este logro también les pertenece.

Contenido

Introducción	5
1. Álgebras	7
1.1. Propiedades básicas y ejemplos de álgebras	7
1.2. Álgebras cocientes	13
1.3. Homomorfismos de álgebras	15
1.4. Álgebras libres	19
2. PI-Álgebras	23
2.1. Identidades polinomiales	23
2.2. T-ideales y variedades	27
3. Álgebras graduadas	33
3.1. G-graduaciones	33
3.2. Polinomios multilineales	40
4. Graduaciones e identidades graduadas sobre $UT_2(\mathbb{F})$	47
4.1. Graduaciones en $UT_2(\mathbb{F})$	47
4.2. Identidades graduadas en $UT_2(\mathbb{F})$	50
Bibliografía	55

Resumen

TÍTULO: IDENTIDADES POLINOMIALES GRADUADAS PARA EL ÁLGEBRA DE MATRICES TRIANGULARES SUPERIORES DE ORDEN 2*

AUTOR: ALBERT ANDRETTI CUADROS PEÑA**

PALABRAS CLAVE: ÁLGEBRA, IDENTIDAD POLINOMIAL, ÁLGEBRAS GRADUADAS, PI-ÁLGEBRA, T-IDEALES.

DESCRIPCIÓN:

Este trabajo de grado desarrolla un estudio sistemático de las identidades polinomiales en álgebras, con énfasis en el caso de álgebras graduadas y, en particular, en el álgebra de matrices triangulares superiores de orden dos $UT_2(\mathbb{F})$. En una primera parte, se presentan los conceptos preliminares de la teoría de álgebras, incluyendo definiciones básicas, ejemplos representativos, así como nociones fundamentales como homomorfismos, ideales y álgebras libres, con el fin de establecer el marco teórico necesario. Posteriormente, se introduce la teoría de identidades polinomiales, abordando sus definiciones, ejemplos y la noción de T-ideales, herramienta esencial para el estudio estructural de las identidades que satisface un álgebra. A continuación, se extiende este análisis al contexto de álgebras graduadas, desarrollando sus definiciones, ejemplos y el estudio de identidades polinomiales graduadas, centrando la atención en el caso particular de $UT_2(\mathbb{F})$, que constituye el objeto principal de investigación.

Seguidamente, se analizan los polinomios multilineales y su relevancia en la caracterización de identidades polinomiales, destacando su papel en la reducción y simplificación de los problemas considerados. Finalmente, tras introducir diversas definiciones, lemas y resultados auxiliares, se alcanza el objetivo central del trabajo: la demostración de un teorema principal que describe de manera explícita un sistema generador de las identidades polinomiales graduadas del T_2 -ideal de $UT_2(\mathbb{F})$. Este teorema constituye el principal aporte del trabajo, ya que no solo sintetiza las herramientas desarrolladas previamente, sino que también proporciona una caracterización precisa de la estructura de dichas identidades, consolidando así el estudio del comportamiento algebraico de $UT_2(\mathbb{F})$ en el contexto graduado.

* Trabajo de grado.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Arturo Rodríguez Palma, Doctor en Matemáticas.

Abstract

TITLE: GRADED POLYNOMIAL IDENTITIES FOR THE ALGEBRA OF UPPER TRIANGULAR MATRICES OF ORDER 2*

AUTHOR: ALBERT ANDRETTI CUADROS PEÑA**

KEYWORDS: ALGEBRA, POLYNOMIAL IDENTITY, GRADED ALGEBRAS, PI-ALGEBRAS, T-IDEALS.

DESCRIPTION:

This undergraduate thesis develops a systematic study of polynomial identities in algebras, with emphasis on the case of graded algebras and, in particular, on the algebra of upper triangular matrices of order two $UT_2(F)$. In the first part, the preliminary concepts of algebra are presented, including basic definitions, representative examples, and fundamental notions such as homomorphisms, ideals, and free algebras, in order to establish the necessary theoretical framework. Subsequently, the theory of polynomial identities is introduced, addressing their definitions, examples, and the notion of T-ideals, an essential tool for the structural study of the identities satisfied by an algebra. The analysis is then extended to the context of graded algebras by introducing their definitions, examples, and the study of graded polynomial identities, focusing in particular on the case of $UT_2(\mathbb{F})$, which constitutes the main object of investigation.

Thereafter, multilinear polynomials are analyzed, highlighting their importance in the characterization of polynomial identities and their role in simplifying the problems under consideration. Finally, after establishing several auxiliary definitions, lemmas, and results, the main objective of the thesis is achieved: the proof of a principal theorem that explicitly describes a generating system for the graded polynomial identities of the T_2 -ideal of $UT_2(\mathbb{F})$. This result constitutes the fundamental contribution of the thesis, as it not only synthesizes the tools developed previously, but also provides a precise characterization of the structure of these identities, thereby consolidating the study of the algebraic behavior of $UT_2(\mathbb{F})$ in the graded context.

* Bachelor's thesis.

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Advisor: Carlos Arturo Rodríguez Palma, Ph.D. in Mathematics.

Introducción

El estudio de las identidades polinomiales constituye una de las líneas de investigación más importantes dentro de la teoría de álgebras asociativas. Desde los trabajos pioneros de Amitsur y Levitzki en [7], que demostraron que toda álgebra de matrices satisface identidades polinomiales no triviales, esta área ha experimentado un desarrollo continuo y profundo, dando origen a la teoría de las álgebras con identidades polinomiales, o simplemente PI-álgebras. En este contexto, una identidad polinomial describe una relación algebraica que permanece invariante bajo cualquier evaluación de sus variables en una determinada álgebra, permitiendo caracterizar propiedades estructurales mediante herramientas provenientes del álgebra libre.

La importancia de esta teoría radica en que las identidades polinomiales constituyen un mecanismo para clasificar álgebras desde una perspectiva funcional. El conjunto de todas las identidades satisfechas por un álgebra determina un objeto algebraico denominado T-ideal, el cual contiene a todas las relaciones polinomiales invariantes bajo todos los endomorfismos del álgebra libre. La descripción de estos T-ideales, así como la obtención de sistemas finitos de generadores, representa uno de los problemas fundamentales de la teoría moderna de PI-álgebras y ha motivado numerosos desarrollos relacionados con la clasificación de identidades polinomiales. Una exposición detallada de estos aspectos puede encontrarse en las obras de Drensky en [1] y de Giambruno y Zaicev en [8], las cuales constituyen referencias fundamentales en esta área.

A partir de los resultados obtenidos para identidades polinomiales surgió un interés por estudiar álgebras provistas de una estructura adicional, como las graduaciones por grupos. Una graduación descompone un álgebra en una suma directa de componentes homogéneas cuyo producto es compatible con la operación del grupo. Esta estructura aparece de manera natural en diversas ramas de las matemáticas, razón por la cual el estudio de identidades polinomiales graduadas ha adquirido una importancia creciente durante las últimas décadas.

Desde el punto de vista de las PI-álgebras, la introducción de una graduación modifica sustancialmente el problema clásico de las identidades polinomiales. Las variables del álgebra libre pasan a poseer un grado fijo y únicamente pueden evaluarse sobre elementos homogéneos del mismo grado, originando así nuevas familias de identidades que reflejan simultáneamente la estructura del álgebra y la información proporcionada por la graduación. En consecuencia, el correspondiente T-ideal graduado contiene una información considerablemente más amplia que el T-ideal, convirtiéndose en uno de los principales objetos de estudio dentro de la teoría contemporánea de álgebras graduadas.

Dentro de este contexto, el álgebra de matrices triangulares de orden dos $UT_2(\mathbb{F})$ constituye uno de los ejemplos fundamentales. A pesar de tratarse de un álgebra de dimensión finita relativa-

mente sencilla, presenta una estructura suficientemente compleja para exhibir fenómenos característicos de la teoría de identidades polinomiales. Numerosos resultados obtenidos para esta álgebra han servido posteriormente como modelo para el estudio de álgebras de mayor dimensión y de otras familias de PI-álgebras. Su reducido tamaño permite obtener descripciones explícitas de sus identidades conservando las dificultades esenciales propias del problema general.

El estudio de las identidades polinomiales graduadas de $UT_2(\mathbb{F})$ ha sido desarrollada por diversos autores. En [2], Valenti determina las identidades graduadas correspondientes a esta álgebra, proporcionando una descripción explícita de los polinomios que generan el T-ideal graduado. Este trabajo constituye uno de los antecedentes más importantes para investigaciones posteriores relacionadas con la clasificación de identidades graduadas en álgebras de matrices triangulares.

Entre las posibles graduaciones de $UT_2(\mathbb{F})$ se encuentra la graduación canónica, en donde las matrices diagonales forman la componente homogénea de grado cero, mientras que las matrices estrictamente triangulares superiores constituyen la componente homogénea de grado uno. El presente trabajo se desarrolla precisamente en este contexto. Su objetivo principal consiste en describir el T_2 -ideal de las identidades polinomiales graduadas del álgebra equipada con la graduación canónica, obteniendo un sistema generador para dicho ideal y demostrando que toda identidad polinomial graduada es consecuencia de este conjunto de generadores. Para ello se emplean herramientas provenientes de la teoría de álgebras libres, las PI-álgebras, los T-ideales y la teoría de graduaciones, desarrollando cada uno de estos conceptos.

La organización del documento responde a este objetivo. En el primer capítulo se presentan los fundamentos algebraicos necesarios para el desarrollo del trabajo, incluyendo resultados sobre álgebras asociativas, homomorfismos, ideales, álgebras libres, PI-álgebras, T-ideales y graduaciones. Estos conceptos constituyen el marco teórico indispensable para el estudio posterior de las identidades graduadas.

En el segundo capítulo, se estudian las principales propiedades estructurales y se describe la graduación canónica del álgebra $UT_2(\mathbb{F})$ que será considerada a lo largo del trabajo. Posteriormente se desarrollan los resultados auxiliares necesarios para analizar las consecuencias de dicha graduación sobre las identidades polinomiales del álgebra. En donde, posteriormente se demuestra el resultado principal del trabajo, consistente en la caracterización del T_2 -ideal del álgebra con la graduación canónica mediante un conjunto explícito de generadores. Esta demostración reúne las herramientas desarrolladas en los capítulos anteriores y constituye la principal contribución del presente trabajo, ofreciendo una exposición detallada de un resultado clásico dentro de la teoría de identidades polinomiales graduadas.

1. Álgebras

En este trabajo de grado estudiaremos identidades polinomiales en el contexto de las álgebras graduadas. Comenzaremos este capítulo presentando algunas definiciones y propiedades de álgebras, identidades polinomiales, álgebras graduadas y polinomios multilineales necesarias para el planteamiento y desarrollo del problema de estudio, así mismo presentaremos los resultados principales a tratar basados en las definiciones de Drensky en [1].

1.1 Propiedades básicas y ejemplos de álgebras

Podemos definir un álgebra como un espacio vectorial al cual le añadiremos una nueva operación producto entre los elementos del espacio, la cual satisface ciertas propiedades con respecto a la suma y producto escalar del espacio vectorial, obteniendo una nueva estructura algebraica llamada **álgebra** que contiene tres operaciones. A continuación presentaremos definiciones y ejemplos de álgebras.

Definición 1.1.1. *Un espacio vectorial A sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es llamado **álgebra** (o $\mathbb{F}$ -álgebra) si A está equipado con una operación binaria $(\cdot)$, llamado producto, tal que para todo $a, b, c \in A$ y para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que:*

$$\mathcal{A}_1. (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$\mathcal{A}_2. a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$\mathcal{A}_3. \lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$$

Dicho de otra manera, podemos definir un álgebra como una estructura algebraica con tres operaciones, en donde dos de ellas son las operaciones suma y producto por escalares definidas en el espacio vectorial A y la otra es un producto entre los elementos de A . Usualmente el producto escalar se denota simplemente por λa y el producto $a \cdot b$ por juxtaposición ab .

Note que la definición de álgebra no exige que exista un módulo (o neutro multiplicativo) en A , ni tampoco que el producto sea asociativo o conmutativo. Sin embargo, en este trabajo trabajaremos con álgebras donde el producto es asociativo con unitario.

A continuación se presentan algunos ejemplos de álgebras.

Ejemplo 1.1.2. *El espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$ de todas las matrices cuadradas de orden n con entradas reales, sobre el cuerpo de los números reales, es un álgebra con el producto usual de matrices.*

Ejemplo 1.1.3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, entonces el conjunto $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ de todas las transformaciones lineales de V en V ; es decir,

$$\text{End}_{\mathbb{F}}(V) = \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ es transformación lineal}\},$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con las operaciones suma y producto por escalar de funciones. Además, $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ es un álgebra con el producto siendo la composición de funciones.

Ejemplo 1.1.4. El espacio vectorial $sl_n(\mathbb{F})$ de todas las matrices cuadradas de orden n con traza cero, sobre un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$, es un álgebra con el producto

$$[X, Y] = XY - YX \in sl_n(\mathbb{F});$$

donde al producto $[A, B]$ se le llama conmutador de Lie de X y Y .

Definición 1.1.5. Un subespacio vectorial S de un álgebra A es llamado una **subálgebra** de A si este es cerrado respecto al producto; es decir, para todo $s_1, s_2 \in S$, se tiene que $s_1 s_2 \in S$.

Observe que una subálgebra S de un álgebra A , es un subconjunto que es por si mismo un álgebra, con las operaciones definidas en A restringidas a los elementos de S . A continuación se presentan algunos ejemplos de subálgebras.

Ejemplo 1.1.6. Sabemos que el conjunto $UT_n(\mathbb{R})$ formado por todas las matrices triangulares superiores de orden n con coeficientes en los números reales es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$. Este subespacio es una subálgebra de $M_n(\mathbb{R})$ bajo el producto usual de matrices.

Ejemplo 1.1.7. Sabemos que el conjunto $S_n(\mathbb{F})$ de todas las matrices simétricas de orden n , sobre un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{F})$. Este subespacio es una subálgebra con el producto dado por:

$$X \circ Y = XY + YX.$$

En efecto, veamos que el producto es cerrado en $S_n(\mathbb{F})$. Sean X, Y matrices simétricas de orden n , y sea $Z = X \circ Y$. Basta verificar que $Z \in S_n(\mathbb{F})$, es decir, que $Z^T = Z$. Para ello, observemos que

$$Z^T = (XY + YX)^T = (XY)^T + (YX)^T = Y^T X^T + X^T Y^T,$$

y dado que X, Y son matrices simétricas entonces $X^T = X$ y $Y^T = Y$, al reemplazar en la desigualdad anterior se obtiene que:

$$Z^T = YX + XY = XY + YX = Z,$$

por lo tanto, hemos probado que $S_n(\mathbb{F})$ es una subálgebra de $M_n(\mathbb{F})$ bajo el producto definido por $X \circ Y = XY + YX$.

Ejemplo 1.1.8. Sabemos que el conjunto $O_n(\mathbb{F})$ de todas las matrices anti-simétricas de orden n sobre un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{F})$. Este subespacio es una subálgebra con el producto dado por:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

La prueba es análoga al Ejemplo 1.1.7.

Ejemplo 1.1.9. Sea A una $\mathbb{F}$ -álgebra. El **centro de** A definido por

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa \text{ para todo } x \in A\}$$

es una subálgebra de A . Si $a \in Z(A)$, decimos que a es un elemento central de A . Si $Z(A) = \mathbb{F}$, decimos que A es un **álgebra central**.

En efecto, sean $a, b \in Z(A)$, y para todo $x \in A$ se cumple que:

$$ax = xa \quad \text{y} \quad bx = xb,$$

entonces:

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax) = (xa)b = x(ab),$$

por lo tanto, se cumple que:

$$ab \in Z(A).$$

Así, hemos probado que $Z(A)$ es una subálgebra de A bajo el producto definido en el álgebra A .

Definición 1.1.10. Sea A un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, diremos que:

- A es un álgebra asociativa si $(ab)c = a(bc)$ para todo $a, b, c \in A$.
- A es un álgebra con unitario, si existe un elemento $1 \in A$ talque $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo $a \in A$. El elemento 1 se llama **unitario**.
- A es un álgebra conmutativa si $ab = ba$ para todo $a, b \in A$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de álgebras con dichas propiedades.

Ejemplo 1.1.11. Sea $M_n(\mathbb{F})$ el álgebra de todas las matrices cuadradas de orden n (con $n \geq 2$) sobre un cuerpo arbitrario bajo el producto usual de matrices, se tiene que el álgebra es asociativa, con unitario y no conmutativa.

Ejemplo 1.1.12. Sea $A = UT_n(\mathbb{F})$ el álgebra de todas las matrices triangulares superiores de orden n sobre un cuerpo arbitrario bajo el producto usual de matrices, se tiene que el álgebra es asociativa, con unitario y no conmutativa.

Ejemplo 1.1.13. Sea $A = S_2(\mathbb{R})$ el álgebra de todas las matrices simétricas de orden dos sobre el cuerpo de los números reales bajo el producto dado por:

$$X \circ Y = XY + YX,$$

se tiene que el álgebra es no asociativa, con unitario y conmutativa.

En efecto, veamos que el álgebra es no asociativa, con unitario y conmutativa. Sean $X, Y, Z \in S_2(\mathbb{R})$ matrices simétricas de segundo orden, veamos que

- **No asociativa:** Veamos que no se cumple la propiedad asociativa, pues:

$$(X \circ Y) \circ Z = (XY + YX) \circ Z = XYZ + YXZ + ZXY + ZYX,$$

mientras que

$$X \circ (Y \circ Z) = X(YZ + ZY) = XYZ + XZY + YZX + ZYX,$$

donde los dos términos no son necesariamente iguales, pues no siempre satisface que $YXZ + ZXY = XZY + YZX$, por ejemplo si

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

podemos ver que

$$(X \circ Y) \circ Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \circ (Y \circ Z) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $(X \circ Y) \circ Z \neq X \circ (Y \circ Z)$, así, se obtiene que el producto no es asociativo.

- **Unitario:** La matriz

$$U = \frac{1}{2}I_2,$$

satisface que para toda $X \in S_2(\mathbb{R})$ que:

$$(U \circ X) = \frac{1}{2}I_2X + X\frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X = X,$$

análogamente para $(X \circ U)$, es decir, se cumple que $X \circ U = U \circ X = X$, por lo tanto, el álgebra posee unitario.

■ **Conmutativa:** veamos que

$$X \circ Y = XY + YX = YX + XY = Y \circ X,$$

por lo tanto, el álgebra es conmutativa.

Así, hemos probado que $S_2(\mathbb{R})$ es un álgebra no asociativa, con unitario y conmutativa.

Ejemplo 1.1.14. Sea $A = sl_2(\mathbb{R})$ el álgebra de todas las matrices de segundo orden con traza cero sobre el cuerpo de los números reales bajo el producto dado por

$$[X, Y] = XY - YX,$$

se tiene que el álgebra es no asociativa, sin unitario y no conmutativa.

La prueba es análoga al Ejemplo 1.1.13.

Definición 1.1.15. Una subálgebra I de un álgebra A es llamada ideal izquierdo de A si $AI \subseteq I$; es decir, $ai \in I$ para todo $a \in A, i \in I$, y será llamada ideal derecho si $IA \subseteq I$; es decir, $ia \in I$ para todo $a \in A, i \in I$. En el caso que I sea ideal por derecha y por izquierda, I se llamará ideal bilateral (o simplemente ideal) y lo denotaremos por $I \triangleleft A$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de ideales.

Ejemplo 1.1.16. Sea $A = M_2(\mathbb{F})$ el álgebra de matrices cuadradas de orden dos sobre un cuerpo arbitrario bajo el producto usual de matrices, entonces el subálgebra

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{F} \right\},$$

es un ideal por derecha, pero no es ideal por izquierda de $M_2(\mathbb{F})$.

En efecto, veamos que I es un ideal por derecha, pero no por izquierda. Sean

$$i = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}),$$

entonces

$$iX = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq I,$$

por tanto, I es un ideal por derecha, sin embargo, veamos que para $c, x, y \neq 0$, tenemos que

$$Xi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ cx & cy \end{pmatrix} \notin I,$$

y por lo tanto, I no es un ideal por izquierda.

Ejemplo 1.1.17. Sea $A = UT_2(\mathbb{F})$ el álgebra de matrices triangulares superiores de orden dos sobre un cuerpo arbitrario bajo el producto usual de matrices, entonces el subálgebra

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{F} \right\},$$

es un ideal bilateral de $UT_2(\mathbb{F})$.

En efecto, veamos que I es un ideal. Sean

$$i = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in UT_2(\mathbb{F}),$$

entonces

$$iX = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx + cy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq I,$$

por tanto, I es un ideal por derecha, además:

$$Xi = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subseteq I,$$

y por lo tanto, I también es un ideal por izquierda. Así hemos probado que I es un ideal bilateral de $UT_2(\mathbb{F})$.

Ejemplo 1.1.18. Sea $A = UT_2(\mathbb{F})$ el álgebra de matrices triangulares superiores de segundo orden sobre un cuerpo arbitrario bajo el producto usual de matrices, entonces el subálgebra

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{F} \right\},$$

es un ideal bilateral de $UT_2(\mathbb{F})$.

La prueba es análoga al Ejemplo 1.1.17.

Observación 1.1.19. Al analizar los posibles ideales de $M_2(\mathbb{F})$, se concluye que esta álgebra no

posee ideales bilaterales no triviales. De manera análoga, para $UT_2(\mathbb{F})$ se obtiene que existen únicamente dos ideales bilaterales no triviales, los descritos en los Ejemplos 1.1.17 y 1.1.18.

1.2 Álgebras cocientes

Con frecuencia, resulta útil clasificar los elementos de un álgebra tomando como referencia las propiedades o el comportamiento de los elementos de un ideal asociado. En este marco, al considerar el cociente del álgebra por dicho ideal, los elementos pueden adquirir nuevas propiedades que no poseían previamente. Esta construcción da lugar a una nueva estructura denominada álgebra cociente. El análisis de estas álgebras es relevante en este trabajo, ya que estructuras posteriores tales como las álgebras libres y los espacios de polinomios multilineales pueden verse como casos particulares de álgebras cocientes, caracterizadas por propiedades como la asociatividad, la conmutatividad, entre otras. A continuación, se presenta el proceso de construcción de álgebras cocientes con el objetivo de introducir formalmente estos objetos.

Definición 1.2.1. Dado I un ideal de un álgebra A , diremos que dos elementos $a, b \in A$ se relacionan entre sí módulo I mediante $\sim_I$ si y solo si $a - b \in I$. La relación entre a y b es denotada por $a \sim_I b$ o $a \equiv b \pmod{I}$.

Proposición 1.2.2. La relación $\sim_I$ definida en la Definición 1.2.1 es una relación de equivalencia.

Demostración. Para demostrar que $\sim_I$ es una relación de equivalencia debemos probar que es reflexiva, simétrica y transitiva. Sean $a, b, c \in A$, entonces:

- **Reflexiva:** $a - a = 0 \in I$, por lo tanto, $a \sim_I a$.
- **Simetría:** Si $a \sim_I b$ entonces $b - a \in I$, además note que $(b - a) + (a - b) = 0 \in I$, por lo tanto, $a - b \in I$, así $b \sim_I a$.
- **Transitiva:** Si $a \sim_I b$ y $b \sim_I c$ se cumple que $b - a, c - b \in I$, además note que $c - a = (b - a) + (c - b) \in I$, por lo tanto, $c - a \in I$, así $a \sim_I c$.

De manera que $\sim_I$ es una relación de equivalencia. □

Proposición 1.2.3. La relación de equivalencia $\sim_I$ es una **congruencia**, es decir, respeta las operaciones suma y multiplicación del álgebra.

Demostración. Si $a \sim_I b$ y $c \sim_I d$, queremos ver que respeta la suma, es decir que $(a + c) \sim_I (b + d)$ y que respeta la multiplicación, es decir que $ac \sim_I bd$. Podemos ver que $b - a, d - c \in I$, entonces $(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c) \in I$, lo cual es equivalente a decir que $(a + c) \sim_I (b + d)$. Por otra parte, podemos ver que $(b - a)c, b(d - c) \in I$, entonces $(b - a)c + b(d - c) = bd - ac \in I$,

lo cual es equivalente a decir que $ac \sim_I bd$. Lo que demuestra que la relación de equivalencia $\sim_I$ es una congruencia. $\square$

Definición 1.2.4. El conjunto denotado por:

$$a + I = \{b \in A \mid a \sim_I b\} = \{b \in A \mid b - a \in I\},$$

es llamada **clase de equivalencia** de a en A módulo I .

Observación 1.2.5. La clase de equivalencia de a en A módulo I se puede denotar también por $\bar{a}$.

Definición 1.2.6. Denotaremos por A/I al conjunto de todas las clases de equivalencia de A , es decir:

$$A/I = \{a + I \mid a \in A\}$$

Proposición 1.2.7. El conjunto A/I es un álgebra con las operaciones dadas por:

$$i) (a + I) + (b + I) = (a + b) + I.$$

$$ii) (a + I)(b + I) = (ab) + I.$$

Demostración. Sean $a, b, c \in A/I$.

$\mathcal{A}_1$. Para la prueba de esta propiedad note que:

$$\begin{aligned} [(a + I) + (b + I)](c + I) &= [(a + b) + I](c + I) = (a + b)c + I \\ &= (ac + bc) + I = (ac + I) + (bc + I) \\ &= (a + I)(c + I) + (b + I)(c + I) \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_2$. La prueba de esta propiedad es análoga a la prueba de $\mathcal{A}_1$.

$\mathcal{A}_3$. Para la prueba de esta propiedad note que:

$$\begin{aligned} \lambda[(a + I)(b + I)] &= \lambda(ab + I) = \lambda(ab) + I \\ &= (\lambda a)b + I = (\lambda a + I)(b + I) = [\lambda(a + I)](b + I) \\ &= a(\lambda b) + I = (a + I)(\lambda b + I) = (a + I)[\lambda(b + I)] \end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado que el conjunto A/I es un álgebra con las operaciones dadas. Dicha álgebra es conocida como **álgebra cociente**. $\square$

Ejemplo 1.2.8. Sea $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ el grupo de las clases residuales módulo 2. La relación $a \equiv b \pmod{2}$ tiene sentido si y sólo si el resultado de operar $(a - b)/2$ tiene residuo nulo. Por ejemplo, $10 \equiv 4 \pmod{2}$, de ahí, $10 \in 4 + 2\mathbb{Z}$ (análogamente podemos decir que $4 \in 10 + 2\mathbb{Z}$). En general el representante de clase será el menor entero de cada clase, es decir, para $\mathbb{Z}_2$ serán 0 y 1. Por ejemplo, 10 y 4 pertenecen a la clase de $\bar{0}$, donde $\bar{0} = 0 + 2\mathbb{Z}$.

1.3 Homomorfismos de álgebras

En el estudio del álgebra, los homomorfismos desempeñan un papel fundamental, ya que permiten comparar y relacionar diferentes estructuras algebraicas conservando sus operaciones. Un homomorfismo entre álgebras es una aplicación que respeta tanto la estructura lineal (como espacio vectorial) como la multiplicación definida en el álgebra. El concepto de homomorfismo no solo permite clasificar álgebras según sus propiedades estructurales, sino que también facilita la construcción de nuevas álgebras a partir de otras, como en el caso de los cocientes o de las subálgebras. A continuación presentaremos definiciones formales y resultados importantes sobre homomorfismos de álgebras.

Definición 1.3.1. La transformación lineal $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ de las álgebras A_1 y A_2 , es un homomorfismo de álgebras si para todo $a, b \in A_1$ se cumple que:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Observe que la definición de transformación lineal implica que para todo $a, b \in A_1$ y todo $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple que:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \text{y} \quad \varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$$

Similarmente diremos que un isomorfismo entre dos álgebras es un homomorfismo que además es biyectivo. Diremos que un automorfismo de un álgebra A es un isomorfismo de A en A . Y diremos que un endomorfismo de un álgebra A es un homomorfismo de A en A , sin ser necesariamente biyectivo.

Proposición 1.3.2. Sea A un álgebra, entonces el conjunto $\text{End}_{\mathbb{F}}(A)$ de todos los endomorfismos de A en A es un álgebra bajo las operaciones dadas por:

- i) $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$
- ii) $(\varphi_1\varphi_2)(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x).$
- iii) $(\lambda\varphi_1)(x) = \lambda[\varphi_1(x)]$

Demostración. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \text{End}_{\mathbb{F}}(A)$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$.

$\mathcal{A}_1$. Para la prueba de esta propiedad note que:

$$\begin{aligned} [(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_3](x) &= [(\varphi_1 + \varphi_2)(x)]\varphi_3(x) = [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]\varphi_3(x) \\ &= \varphi_1(x)\varphi_3(x) + \varphi_2(x)\varphi_3(x) = (\varphi_1\varphi_3)(x) + (\varphi_2\varphi_3)(x) \\ &= [\varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3](x) \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_2$. La prueba de esta propiedad es análoga a la prueba de $\mathcal{A}_1$.

$\mathcal{A}_3$. Para la prueba de esta propiedad note que:

$$\begin{aligned} [\lambda(\varphi_1\varphi_2)](x) &= \lambda(\varphi_1\varphi_2)(x) = \lambda\varphi_1(x)\varphi_2(x) \\ &= [\lambda\varphi_1(x)]\varphi_2(x) = [(\lambda\varphi_1)\varphi_2](x) \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} [\lambda(\varphi_1\varphi_2)](x) &= \lambda\varphi_1(x)\varphi_2(x) = \varphi_1(x)\lambda\varphi_2(x) \\ &= \varphi_1(x)[(\lambda\varphi_2)(x)] = [\varphi_1(\lambda\varphi_2)](x) \end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado que el conjunto $\text{End}_{\mathbb{F}}(A)$ es un álgebra con las operaciones previamente mencionadas. $\square$

Definición 1.3.3. Sea $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ un homomorfismo de álgebras. Entonces el kernel (o núcleo) de φ , esta definido por:

$$\text{Ker}(\varphi) = \{a \in A_1 \mid \varphi(a) = 0\}.$$

La imagen de φ esta definida por:

$$\text{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \in A_2 \mid a \in A_1\}.$$

La imagen de φ también se denota por $\varphi(A_1)$.

Teorema 1.3.4. Sea $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ un homomorfismo de álgebras. Entonces:

- a. $\text{Ker}(\varphi)$ es un ideal bilateral de A_1 .
- b. $\text{Im}(\varphi)$ es una subálgebra de A_2 .

Demostración.

- a. Para probar que $\text{Ker}(\varphi)$ es un ideal bilateral, primero se debe verificar que es una subálgebra, es decir, que sea cerrado respecto al producto. Considere $x, y \in \text{Ker}(\varphi)$, note que por ser homomorfismo se cumple que:

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto, $\text{Ker}(\varphi)$ es una subálgebra de A_1 . Para ver que también es un ideal bilateral, considere $a \in A_1$, queremos probar que $ax \in \text{Ker}(\varphi)$ y que $xa \in \text{Ker}(\varphi)$, es decir,

$$\varphi(xa) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(ax) = 0.$$

Para esto, note que

$$\varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = 0 \cdot \varphi(a) = 0,$$

análogamente

$$\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(a) \cdot 0 = 0.$$

Así $ax, xa \in \text{Ker}(\varphi)$ para todo $a \in A_1$ y por lo tanto $\text{Ker}(\varphi)$ es un ideal bilateral de A_1 .

- b. Para probar que $\text{Im}(\varphi)$ es una subálgebra de A_2 , basta probar que es cerrada bajo el producto, es decir, si $\varphi(a), \varphi(b) \in \text{Im}(\varphi)$ entonces $\varphi(ab) \in \text{Im}(\varphi)$. Dado que φ es un homomorfismo de álgebras entonces se cumple que:

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab),$$

además, dado que $a, b \in A_1$ entonces también se cumple que $ab \in A_1$, entonces $\varphi(ab) \in \text{Im}(\varphi)$. Por tanto, $\text{Im}(\varphi)$ es cerrada bajo el producto y por lo tanto es una subálgebra.

□

Proposición 1.3.5. *Sea A un álgebra y sea I un ideal de A . La aplicación $\pi : A \rightarrow A/I$, definida por $\pi(a) = a + I$, es un homomorfismo de álgebras, llamado **proyección canónica**.*

Demostración. Sean $a, b \in A$, y $\lambda \in \mathbb{F}$ y sea I un ideal de A . Por definición, es fácil ver que π es sobreyectivo, además, considerando las operaciones dadas en la Proposición 1.2.7 se tiene que:

$$\pi(a + b) = (a + b) + I = (a + I) + (b + I) = \pi(a) + \pi(b),$$

además:

$$\pi(\lambda a) = \lambda a + I = \lambda(a + I) = \lambda\pi(a).$$

Así, se tiene que π es una transformación lineal. Para ver que también es un homomorfismo de álgebras basta ver que:

$$\pi(ab) = (ab) + I = (a + I)(b + I) = \pi(a)\pi(b).$$

Adicionalmente, podemos notar que $I = \text{Ker}(\pi)$, pues para todo $x \in I$ se tiene que $\pi(x) = x + I = I$ y así $x \in \text{Ker}(\pi)$, recíprocamente si $x \in \text{Ker}(\pi)$ entonces $x + I = \pi(x) = I$, y por tanto $x \in I$. Así $I = \text{Ker}(\pi)$. $\square$

Teorema 1.3.6. (Teorema fundamental del homomorfismo de álgebras). Sea $a \in A_1$ y sea $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ un homomorfismo de álgebra. Si I es un ideal de A_1 con $I \subseteq \text{Ker}(\varphi)$, entonces φ induce un homomorfismo de álgebras dado por:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : A_1/I &\rightarrow A_2 \\ a + I &\rightarrow \varphi(a) \end{aligned}$$

Además, si $I = \text{Ker}(\varphi)$, entonces $\bar{\varphi}$ es inyectivo y por lo tanto $A/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\bar{\varphi}) = \text{Im}(\varphi)$ y es conocido como **Teorema del isomorfismo**.

Demostración. Teniendo en cuenta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \text{Im}(\varphi) \\ & \searrow \pi & \uparrow \bar{\varphi} \\ & & A/\text{Ker}(\varphi) \end{array}$$

Definiremos $\bar{\varphi}$ de tal manera que $\bar{\varphi}(\pi(a)) = \varphi(a)$ para todo $a \in A$, donde $\pi(a)$ es la proyección canónica que podemos ver como $\pi(a) = \bar{a}$. Queremos probar que $\bar{\varphi}$ está bien definida y es un isomorfismo de álgebras.

- **$\bar{\varphi}$ está bien definida:** queremos probar que si se cumple que $a = b$ entonces $\bar{\varphi}(\pi(a)) = \bar{\varphi}(\pi(b))$, lo cual es análogo a decir que si $\bar{a} = \bar{b}$ entonces $\varphi(a) = \varphi(b)$, veamos que:

$$\begin{aligned} \varphi(a) - \varphi(b) &= \varphi(a - b) = \bar{\varphi}(\pi(a - b)) \\ &= \bar{\varphi}(\pi(a) - \pi(b)) = \bar{\varphi}(\bar{a} - \bar{b}) \\ &= \bar{\varphi}(\bar{0}) = \bar{\varphi}(\pi(0)) = \varphi(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi(a) = \varphi(b)$ y así $\bar{\varphi}$ es bien definida.

- **$\bar{\varphi}$ es un homomorfismo de álgebras:** verificamos que $\bar{\varphi}$ es una transformación lineal, sean $\bar{a}, \bar{b} \in A/\text{Ker}(\bar{\varphi})$, y $\lambda \in \mathbb{F}$ note que:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\bar{a} + \bar{b}) &= \bar{\varphi}(\pi(a) + \pi(b)) = \bar{\varphi}(\pi(a + b)) \\ &= \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \\ &= \bar{\varphi}(\pi(a)) + \bar{\varphi}(\pi(b)) \\ &= \bar{\varphi}(\bar{a}) + \bar{\varphi}(\bar{b})\end{aligned}$$

Además:

$$\bar{\varphi}(\lambda \bar{a}) = \bar{\varphi}(\lambda \pi(a)) = \bar{\varphi}(\pi(\lambda a)) = \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a) = \lambda \bar{\varphi}(\pi(a)) = \lambda \bar{\varphi}(\bar{a}),$$

por tanto se tiene que $\bar{\varphi}$ es una transformación lineal, ahora veamos que $\bar{\varphi}$ es un homomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\bar{a} \cdot \bar{b}) &= \bar{\varphi}(\overline{ab}) = \bar{\varphi}(\pi(ab)) = \varphi(ab) \\ &= \varphi(a)\varphi(b) = \bar{\varphi}(\pi(a))\bar{\varphi}(\pi(b)) \\ &= \bar{\varphi}(\bar{a}) \cdot \bar{\varphi}(\bar{b})\end{aligned}$$

por tanto, $\bar{\varphi}$ es un homomorfismo de álgebras.

- **$\bar{\varphi}$ es biyectiva:** para ver que $\bar{\varphi}$ es sobreyectiva, considere $x \in \text{Im}(\varphi)$, entonces existe algún $a \in A$ tales que:

$$x = \varphi(a) = \bar{\varphi}(\pi(a)) = \bar{\varphi}(\bar{a}),$$

así, $\bar{\varphi}$ es sobreyectiva. Para ver que $\bar{\varphi}$ es inyectiva, considere $\bar{a} \in \text{Ker}(\bar{\varphi})$ y note que

$$0 = \bar{\varphi}(\bar{a}) = \bar{\varphi}(\pi(a)) = \varphi(a),$$

de ahí, note que $\varphi(a) = 0$ si y solo si $a \in \text{Ker}(\varphi)$ y además $a \in \text{Ker}(\varphi)$ si y solo si $I = \text{Ker}(\varphi)$, de ahí, se tiene que $\text{Ker}(\bar{\varphi}) = \{\bar{0}\}$ y así $\bar{\varphi}$ es inyectiva.

Por los items anteriores, se tiene que $\bar{\varphi}$ es un homomorfismo biyectivo (isomorfismo de álgebras) y $A/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\bar{\varphi})$. □

1.4 Álgebras libres

En el estudio del álgebra, uno de los conceptos fundamentales es el de álgebra libre, el cual proporciona una construcción universal y sin restricciones que permite generar cualquier álgebra

a partir de un conjunto dado de generadores. A continuación presentaremos definiciones formales, ejemplos y algunos resultados importantes.

Definición 1.4.1. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ un conjunto arbitrario de variables, el **álgebra libre** $\mathbb{F}$ generada por X cumple que para cualquier álgebra A y cualquier función $f : X \rightarrow A$ existe un único homomorfismo de álgebras $\phi : \mathbb{F} \rightarrow A$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{K} \\ & \searrow f & \downarrow \phi \\ & & A \end{array}$$

donde i es la función inclusión.

Proposición 1.4.2. Para cualquier conjunto X , el álgebra $\mathbb{F}\{X\}$ cuya base son todos los monomios no asociativos ni conmutativos $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ y producto definido por

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) \quad x_{i_k}, x_{j_l} \in X, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

es el álgebra libre.

Demostración. Sea A un álgebra arbitraria, y sea $f : X \rightarrow A$ una función, definiremos $\phi(x_i) = f(x_i)$ para todo i . Sea ϕ es un homomorfismo, entonces por propiedades de transformación lineal se cumple que:

$$\phi(\lambda x_{i_1} x_{j_1} + \mu x_{i_2} x_{j_2}) = \lambda \phi(x_{i_1} x_{j_1}) + \mu \phi(x_{i_2} x_{j_2}).$$

Para ver que ϕ es único, suponga que existe otro homomorfismo ψ tales que $\psi(x_i) = f(x_i)$ para todo i , además considere $\psi(\lambda x_{i_1} x_{j_1} + \mu x_{i_2} x_{j_2})$ entonces note que:

$$\begin{aligned} \psi(\lambda x_{i_1} x_{j_1} + \mu x_{i_2} x_{j_2}) &= \lambda \psi(x_{i_1} x_{j_1}) + \mu \psi(x_{i_2} x_{j_2}) \\ &= \lambda \psi(x_{i_1}) \psi(x_{j_1}) + \mu \psi(x_{i_2}) \psi(x_{j_2}) \\ &= \lambda f(x_{i_1}) f(x_{j_1}) + \mu f(x_{i_2}) f(x_{j_2}) \\ &= \lambda \phi(x_{i_1}) \phi(x_{j_1}) + \mu \phi(x_{i_2}) \phi(x_{j_2}) \\ &= \phi(\lambda x_{i_1} x_{j_1} + \mu x_{i_2} x_{j_2}) \end{aligned}$$

Considere $\gamma = \lambda x_{i_1} x_{j_1} + \mu x_{i_2} x_{j_2} \in \mathbb{F}\{X\}$, entonces se tiene que $\psi(\gamma) = \phi(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathbb{F}\{X\}$, y por lo tanto ϕ es único. $\square$

Ejemplo 1.4.3. Sea $X = \{x, y\}$, entonces una base para el álgebra $\mathbb{F}\{X\}$ es:

$$\{I, x, y, xx, yy, xy, yx, (xy)y, x(yy), (yy)x, y(yx), (xx)y, x(xy),$$

$$(xy)x, x(yx), (yx)x, y(xx), (yx)y, y(xy), (xx)x, x(xx), (yy)y, y(yy), \dots\}.$$

Definición 1.4.4. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ un conjunto arbitrario de variables, el **álgebra libre asociativa** $\mathbb{F}$ generada por X cumple que para cualquier álgebra asociativa A y cualquier función $f : X \rightarrow A$ existe un único homomorfismo de álgebras $\phi : \mathbb{F} \rightarrow A$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{K} \\ & \searrow f & \downarrow \phi \\ & & A \end{array}$$

donde i es la función inclusión.

Proposición 1.4.5. Para cualquier conjunto X , el álgebra $\mathbb{F}\langle X \rangle$ con base lineal el conjunto de todas las palabras

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n}, \quad x_{i_k} \in X, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(incluyendo la palabra vacía 1) y producto definido por:

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) = x_{i_1} \cdots x_{i_m} x_{j_1} \cdots x_{j_n}, \quad x_{i_k} x_{j_l} \in X$$

es libre en la clase de todas las álgebras asociativas con unitario.

La demostración es análoga a la Proposición 1.4.2.

Ejemplo 1.4.6. Sea $X = \{x, y\}$, dado que el álgebra $\mathbb{F}\langle X \rangle$ es asociativa, entonces se cumple que $(xy)z = x(yz)$, por lo que, algunos elementos de la base del álgebra $\mathbb{F}\{X\}$ como por ejemplo

$$(yy)x \quad y(yx) \quad y^2x$$

son iguales y por lo tanto pueden ser definidas por un único representante, así, una base para el álgebra $\mathbb{F}\langle X \rangle$ es:

$$\{1, x, y, xy, yx, xx, yy, xyx, yxy, xxy, yxx, xyy, yyx, xxx, yyy, \dots\}$$

Definición 1.4.7. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ un conjunto arbitrario de variables, el **álgebra libre asociativa y conmutativa** $\mathbb{F}$ generada por X cumple que para cualquier álgebra asociativa y conmutativa A y cualquier función $f : X \rightarrow A$ existe un único homomorfismo de álgebras $\phi : \mathbb{F} \rightarrow A$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{K} \\ & \searrow f & \downarrow \phi \\ & & A \end{array}$$

donde i es la función inclusión.

Proposición 1.4.8. *Para cualquier conjunto X , el álgebra $\mathbb{F}[X]$ con base lineal el conjunto de todas las palabras*

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n}, \quad x_{i_k} \in X, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(incluyendo la palabra vacía 1) y producto definido por:

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) = x_{i_1} \cdots x_{i_m} x_{j_1} \cdots x_{j_n}, \quad x_{i_k} x_{j_l} \in X$$

es libre en la clase de todas las álgebras asociativas y conmutativas con unitario.

La demostración es análoga a la demostración de la Proposición 1.4.2.

Ejemplo 1.4.9. *Sea $X = \{x, y\}$, dado que el álgebra $\mathbb{F}[X]$ es asociativa y conmutativa, entonces se cumple que $(xy)z = x(yz)$ y $xy = yx$, por lo que, algunos elementos de la base del álgebra $\mathbb{F}\{X\}$ como por ejemplo*

$$(yy)x \quad y(yx) \quad y^2x \quad (yx)y \quad y(xy) \quad xy^2$$

son iguales y por lo tanto pueden ser definidas por un único representante, así, una base para el álgebra $\mathbb{F}\langle X \rangle$ es:

$$\{1, x, y, xy, xx, yy, xyy, yxx, xxx, yyy, \dots\}$$

2. PI-Álgebras

Dada una álgebra asociativa sobre un cuerpo, surge naturalmente la pregunta de si existen polinomios no triviales en el álgebra libre no conmutativa, es decir, polinomios que al ser evaluados en los elementos de dicha álgebra se anulen siempre. La existencia de tales polinomios lleva al concepto de álgebra con identidad polinómica, o simplemente PI-álgebra.

El estudio de PI-álgebras busca no solo identificar la existencia de dichas identidades, sino también determinar el conjunto de todas las identidades polinomiales que satisface una álgebra dada. Esto se traduce, en muchos casos, en analizar los ideales de identidades dentro del álgebra relativamente libre. En particular, cuando se estudian familias específicas de álgebras (como álgebras de matrices o álgebras de dimensión finita), el desafío consiste en caracterizar de manera explícita estas identidades y entender su influencia en la estructura general del álgebra.

En esta sección nos adentraremos en los fundamentos teóricos de las PI-álgebras, revisando definiciones, ejemplos relevantes y resultados clásicos. Además, sentaremos las bases para abordar, en capítulos posteriores, problemas de determinación de identidades en casos concretos, con especial énfasis en el álgebra de matrices triangulares superiores de orden dos, que será objeto de estudio detallado más adelante.

2.1 Identidades polinomiales

Consideremos un conjunto infinito numerable de variables no conmutativas $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ y sea $\mathbb{F}\langle X \rangle$ el álgebra libre asociativa con unitario generada por X .

Definición 2.1.1. Sea A un álgebra asociativa y sea $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$. Diremos que $f \equiv 0$ es una **identidad polinomial** para A si

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0,$$

para todo $a_1, \dots, a_n \in A$.

Definición 2.1.2. Si un álgebra A satisface una identidad polinomial no trivial, es decir, $f \equiv 0$, con f un elemento distinto de cero de $\mathbb{F}\langle X \rangle$, entonces diremos que A es un álgebra con identidades polinomiales o simplemente una PI-Álgebra.

Observación 2.1.3. Note que el polinomio trivial $f = 0$ es una identidad polinomial para cualquier álgebra A .

A continuación se presentan algunos ejemplos de identidades polinomiales para algunas álgebras.

Ejemplo 2.1.4. Sea A un álgebra nilpotente, es decir, un álgebra para la cual existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$. Entonces el polinomio $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ es una identidad polinomial para el álgebra.

En efecto, por definición de nilpotencia, se tiene que:

$$A^n = \{\text{todos las posibles sumas de productos de } n \text{ elementos de } A\} = \{0\}.$$

Es decir, cualquier suma de productos de n elementos de A en cualquier orden es igual al elemento 0, así el polinomio:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n = 0.$$

Es decir, para todo $a_1, \dots, a_n \in A$ se cumple que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Ejemplo 2.1.5. Sea A un álgebra conmutativa, entonces el polinomio $f(x, y) = [x, y] = xy - yx$ es una identidad polinomial para A .

En efecto, sean $a_1, a_2 \in A$, note que:

$$f(a_1, a_2) = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0,$$

pues como A es conmutativa entonces $a_1 a_2 = a_2 a_1$, es decir, para todo $a_1, a_2 \in A$ se cumple que $f(a_1, a_2) = 0$.

Ejemplo 2.1.6. Sea $A = M_2(\mathbb{F})$ el álgebra de todas las matrices cuadradas de orden dos sobre un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$, entonces el polinomio $f(x, y, z) = [[x, y]^2, z]$ es una identidad polinomial para $M_2(\mathbb{F})$ conocida como **identidad de Hall**.

En efecto, sea $X \in M_2(\mathbb{F})$, recordemos que el polinomio característico de una matriz X está dada por:

$$p(x) = x^2 - \text{tr}(X)x + \det(X),$$

además, por el teorema de Cayley-Hamilton, se tiene que $p(X) = 0$, es decir:

$$p(X) = X^2 - \text{tr}(X)X + \det(X)I = 0.$$

Definamos

$$H := [X, Y] = XY - YX,$$

queremos ver que $[H^2, Z] = 0$. Note que:

$$\text{tr}(H) = \text{tr}(XY - YX) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX),$$

y dado que $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ entonces

$$\text{tr}(H) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) = 0,$$

por lo tanto, H es una matriz de traza cero, y así:

$$p(H) = H^2 + \det(H)I = 0,$$

en particular,

$$H^2 = -\det(H)I.$$

Definamos $\lambda \in \mathbb{F}$ como $\lambda = -\det(H)$, y así:

$$H^2 = \lambda I,$$

podemos ver que H^2 es un múltiplo escalar de la matriz identidad. Finalmente:

$$[H^2, Z] = H^2Z - ZH^2 = (\lambda I)Z - Z(\lambda I) = \lambda Z - \lambda Z = 0.$$

Es decir, para toda $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{F})$ se cumple que $[[X, Y]^2, Z] = 0$.

Ejemplo 2.1.7. Sea $A = UT_2(\mathbb{F})$ el álgebra de todas las matrices triangulares superiores de orden dos sobre un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$, entonces el polinomio $f(x, y, z, w) = [x, y][z, w]$ es una identidad polinomial para $UT_2(\mathbb{F})$.

Ejemplo 2.1.8. Sea $M_2(\mathbb{F})$ el álgebra de todas las matrices cuadradas de orden dos sobre un cuerpo arbitrario $\mathbb{F}$, entonces el polinomio estándar de grado 4 dado por:

$$\text{St}_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)},$$

donde S_4 es el grupo de permutaciones de $\{1, 2, 3, 4\}$ y $(-1)^\sigma$ es el signo de σ , es una identidad polinomial para $M_2(\mathbb{F})$, es decir, para toda $A, B, C, D \in M_2(\mathbb{F})$ se cumple que $\text{St}_4(A, B, C, D) = 0$.

En general, se tiene que el polinomio St_{2n} es una identidad polinomial para el álgebra $A = M_n(\mathbb{F})$, donde

$$\text{St}_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(N)},$$

para S_N el grupo de permutaciones de $\{1, 2, \dots, N\}$. Este resultado se mencionará más adelante en el Teorema 3.2.8.

Proposición 2.1.9. *Sea A un álgebra arbitraria, y sea $f \in \mathbb{F}\langle X \rangle$, entonces decimos que f es una identidad polinomial para A si y sólo si f pertenece al kernel de todos los homomorfismos $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle \rightarrow A$.*

Demostración. Supongamos que $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ es una identidad polinomial para A y consideremos un homomorfismo arbitrario $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle \rightarrow A$, queremos ver que $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Por la propiedad universal (ver Definición 1.4.1) del álgebra libre, dicho homomorfismo queda determinado por las imágenes de las variables, es decir

$$\varphi(x_i) = a_i \quad \text{con} \quad a_i \in A \quad \text{para todo} \quad i = 1, \dots, n$$

Podemos escribir el polinomio f de la forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l_1, \dots, l_k} \lambda_{l_1, \dots, l_k} x_{l_1} \cdots x_{l_k},$$

donde $\lambda_{l_1, \dots, l_k} \in \mathbb{F}$, aplicando el homomorfismo φ , obtenemos:

$$\varphi(f) = \sum_{l_1, \dots, l_k} \lambda_{l_1, \dots, l_k} \varphi(x_{l_1}) \cdots \varphi(x_{l_k}) = \sum_{l_1, \dots, l_k} \lambda_{l_1, \dots, l_k} a_{l_1} \cdots a_{l_k} = f(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Pues f es identidad polinomial para A , en particular se tiene que $\varphi(f) = 0$ y por lo tanto, $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Y dado que φ es un homomorfismo arbitrario, entonces f pertenece al kernel de todos los homomorfismos $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle \rightarrow A$.

Recíprocamente, sea $f \in \text{Ker}(\varphi)$ para cualquier homomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle \rightarrow A$, queremos ver que f es una identidad polinomial para A , es decir, queremos probar que para toda $a_1, \dots, a_n \in A$ se tiene que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Por la propiedad universal del álgebra libre existe un único homomorfismo $\bar{\varphi} : \mathbb{F}\langle X \rangle \rightarrow A$ tales que:

$$\bar{\varphi}(x_i) = a_i \quad \text{con} \quad a_i \in A \quad \text{para todo} \quad i = 1, \dots, n$$

además, por hipótesis $f \in \text{Ker}(\varphi)$, por lo tanto, $\varphi(f) = 0$ para cualquier homomorfismo φ , entonces:

$$0 = \bar{\varphi}(f) = f(\bar{\varphi}(x_1), \dots, \bar{\varphi}(x_n)) = f(a_1, \dots, a_n).$$

Dado que los $a_i \in A$ son arbitrarios, entonces en particular:

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0,$$

para todo $a_1, \dots, a_n \in A$, por lo tanto, se tiene que f es una identidad polinomial para A . $\square$

2.2 T-ideales y variedades

Definición 2.2.1. Sea A un álgebra arbitraria, denotamos por $\text{Id}(A)$ al conjunto de todas las identidades polinomiales de A , es decir:

$$\text{Id}(A) = \{f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ para todo } a_i \in A\}$$

Proposición 2.2.2. Sea A un álgebra arbitraria, entonces $\text{Id}(A)$ es un ideal bilateral de $\mathbb{F}\langle X \rangle$.

Demostración. Para ver que $\text{Id}(A)$ es un ideal bilateral de $\mathbb{F}\langle X \rangle$, primero hay que verificar que es un subespacio vectorial. Sea $\lambda \in \mathbb{F}$ y sean $f = f(x_1, \dots, x_n)$ y $g = g(x_1, \dots, x_m)$ que pertenecen a $\text{Id}(A)$ y considere $k = \max\{n, m\}$, para la cerradura bajo la suma note que

$$(f + g)(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k) + g(x_1, \dots, x_k),$$

luego, para toda $a_1, \dots, a_k \in A$ se tiene que

$$(f + g)(a_1, \dots, a_k) = f(a_1, \dots, a_k) + g(a_1, \dots, a_k),$$

y dado que $f, g \in \text{Id}(A)$ entonces $f(a_1, \dots, a_k) = 0$ y $g(a_1, \dots, a_k) = 0$ de ahí que

$$(f + g)(a_1, \dots, a_k) = 0 + 0 = 0,$$

así, $f + g \in \text{Id}(A)$. Además, para la cerradura bajo el producto escalar note que

$$(\lambda f)(x_1, \dots, x_k) = \lambda f(x_1, \dots, x_k),$$

luego, para toda $a_1, \dots, a_k \in A$ se tiene que

$$(\lambda f)(a_1, \dots, a_k) = \lambda f(a_1, \dots, a_k),$$

y dado que $f \in \text{Id}(A)$ entonces $f(a_1, \dots, a_k) = 0$ de ahí que

$$\lambda f(a_1, \dots, a_k) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

así, se tiene que $\lambda f \in \text{Id}(A)$ y por tanto, $\text{Id}(A)$ es un subespacio vectorial, note además que es una

subálgebra, pues

$$(fg)(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k)g(x_1, \dots, x_k),$$

luego, para toda $a_1, \dots, a_k \in A$ se tiene que

$$(fg)(a_1, \dots, a_k) = f(a_1, \dots, a_k)g(a_1, \dots, a_k),$$

y dado que $f, g \in \text{Id}(A)$ entonces $f(a_1, \dots, a_k) = 0$ y $g(a_1, \dots, a_k) = 0$ de ahí que

$$(fg)(a_1, \dots, a_k) = 0 \cdot 0 = 0,$$

así se tiene que $fg \in \text{Id}(A)$ y por tanto es una subálgebra de $\mathbb{F}\langle X \rangle$. Para ver que es un ideal bilateral es necesario que

$$\text{Id}(A)\mathbb{F}\langle X \rangle \subseteq \text{Id}(A), \quad \text{y} \quad \mathbb{F}\langle X \rangle\text{Id}(A) \subseteq \text{Id}(A),$$

para esto considere $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \text{Id}(A)$ y $h = h(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ y considere $k = \max\{n, p\}$, entonces

$$(fh)(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k)h(x_1, \dots, x_k),$$

y dado que $f \in \text{Id}(A)$ entonces para toda $a_1, \dots, a_k \in A$ se tiene que $f(a_1, \dots, a_k) = 0$, de ahí que

$$(fh)(a_1, \dots, a_k) = f(a_1, \dots, a_k)h(a_1, \dots, a_k) = 0 \cdot h(a_1, \dots, a_k) = 0,$$

entonces $fh \in \text{Id}(A)$ así, se tiene que $\text{Id}(A)\mathbb{F}\langle X \rangle \subseteq \text{Id}(A)$ y por lo tanto $\text{Id}(A)$ es un ideal derecho. La prueba para ver que es ideal izquierdo es análoga, por lo tanto, se tiene que $\text{Id}(A)$ es un ideal bilateral de $\mathbb{F}\langle X \rangle$. $\square$

Definición 2.2.3. Sea I un ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$, diremos que I es un T-ideal si para todo endomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle \rightarrow \mathbb{F}\langle X \rangle$ se cumple que $\varphi(I) \subseteq I$.

Proposición 2.2.4. $\text{Id}(A)$ es un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$.

Demostración. En la Proposición 2.2.2 demostramos que $\text{Id}(A)$ es un ideal bilateral de $\mathbb{F}\langle X \rangle$, por lo tanto, ahora queremos ver que para todo endomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle \rightarrow \mathbb{F}\langle X \rangle$ se cumple que $\varphi(\text{Id}(A)) \subseteq \text{Id}(A)$. Sea $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \text{Id}(A)$ y sea $\varphi \in \text{End}(\mathbb{F}\langle X \rangle)$ un endomorfismo arbitrario. Vamos a probar que $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) \in \text{Id}(A)$.

Como φ está determinado por las imágenes de las variables, entonces podemos definir a φ de la siguiente manera:

$$\varphi(x_i) = g_i(x_1, \dots, x_m), \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n,$$

donde $g_i = g_i(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$. Además, dado que φ es homomorfismo tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) &= f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)), \\ &= f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)).\end{aligned}$$

Sean $a_1, \dots, a_m \in A$ elementos arbitrarios y definamos $b_i = g_i(a_1, \dots, a_m)$, para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces

$$\begin{aligned}(\varphi(f(x_1, \dots, x_n))(a_1, \dots, a_m)) &= (f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)))(a_1, \dots, a_m) \\ &= f(g_1(a_1, \dots, a_m), \dots, g_n(a_1, \dots, a_m)) \\ &= f(b_1, \dots, b_n).\end{aligned}$$

Como $f \in \text{Id}(A)$, se tiene que $f(b_1, \dots, b_n) = 0$, pues $b_i \in A$. En consecuencia,

$$(\varphi(f(x_1, \dots, x_n)))(a_1, \dots, a_m) = f(b_1, \dots, b_n) = 0,$$

así, $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) \in \text{Id}(A)$. Por lo tanto, $\text{Id}(A)$ es un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$. □

Proposición 2.2.5. *El conjunto $\text{Id}(A)$ de identidades polinomiales para un álgebra A es un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$. Más aún, si I es un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$, entonces existe algún álgebra B tal que $\text{Id}(B) = I$.*

Demostración. Sea I un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$, y definamos el álgebra $A = \mathbb{F}\langle X \rangle / I$, queremos probar que $I = \text{Id}(A)$.

- Veamos que $I \subseteq \text{Id}(A)$. Sea $f = f(x_1, \dots, x_n) \in I$. Probemos que $f(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = 0$ para cada $\overline{g_i} = g_i + I$, donde $g_i \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ con $i = 1, \dots, n$. Entonces:

$$\begin{aligned}f(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) &= f(g_1 + I, \dots, g_n + I) \\ &= f(g_1, \dots, g_n) + I,\end{aligned}$$

Como I es un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$, entonces para todo $\tilde{\varphi} \in \text{End}(\mathbb{F}\langle X \rangle)$ se tiene que $\tilde{\varphi}(I) \subseteq I$. En particular, consideremos el endomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle \rightarrow \mathbb{F}\langle X \rangle$ dado por $\varphi(x_i) = g_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces:

$$\begin{aligned}f(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) &= f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) + I \\ &= \varphi(f(x_1, \dots, x_n)) + I \\ &= 0,\end{aligned}$$

pues $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) \in I$. Por lo tanto, $f \in \text{Id}(A)$.

- Veamos que $\text{Id}(A) \subseteq I$. Sea $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \text{Id}(A)$, entonces $f(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = I$ para todo $\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n} \in A = \mathbb{F}\langle X \rangle / I$. En particular, consideremos $\overline{g_i} = x_i + I$, luego

$$I = f(x_1 + I, \dots, x_n + I)$$

$$I = f(x_1, \dots, x_n) + I,$$

y de ahí, se tiene que $f(x_1, \dots, x_n) \in I$.

□

Observación 2.2.6. Si I es un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$, el álgebra $A = \mathbb{F}\langle X \rangle / I$ satisface que $I = \text{Id}(A)$.

Definición 2.2.7. Dado S un subconjunto de $\mathbb{F}\langle X \rangle$. El T-ideal generado por S , denotado por $\langle S \rangle_T$, se define como la intersección de todos los T-ideales que contienen a S ; es decir,

$$\langle S \rangle_T = \bigcap_{S \subseteq I} I,$$

con I un T-ideal.

Definición 2.2.8. Dados S un subconjunto de polinomios de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ y $f \in \mathbb{F}\langle X \rangle$, diremos que f es consecuencia de S si $f \in \langle S \rangle_T$.

Proposición 2.2.9. El T-ideal generado por un subconjunto $S \subseteq \mathbb{F}\langle X \rangle$ está dado por

$$\langle S \rangle_T = \left\{ \sum_i p_i f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) q_i \mid f_i \in S, p_i, h_{i_j}, q_i \in \mathbb{F}\langle X \rangle \right\}$$

Demostración. Sea

$$G = \left\{ \sum_i p_i f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) q_i \mid f_i \in S, p_i, h_{i_j}, q_i \in \mathbb{F}\langle X \rangle \right\},$$

queremos ver que $G = \langle S \rangle_T$. Note que si $S = \emptyset$, entonces $\langle S \rangle_T = (0)$ y así mismo $G = \{0\}$, con lo cual es trivial la igualdad. Suponga $S \neq \emptyset$, veremos que G es un T-ideal que contiene a S .

Si $f \in S$ entonces

$$f = 1 \cdot f(x_1, \dots, x_n) \cdot 1 \in G,$$

es decir, $S \subseteq G$. Ahora, veamos que G es una subálgebra de $\mathbb{F}\langle X \rangle$. Sean

$$u = \sum_{i=1}^m p_i f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) q_i, \quad v = \sum_{j=1}^l p_j f_j(h_{j_1}, \dots, h_{j_n}) q_j,$$

tales que $u, v \in G$. Así:

$$u + v = \sum_{i=1}^m p_i f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) q_i + \sum_{j=1}^l p_j f_j(h_{j_1}, \dots, h_{j_n}) q_j,$$

la cual es una suma de términos del mismo tipo, por lo que $u + v \in G$. De manera similar, el producto entre términos tiene la forma

$$uv = \sum_{i,j} p_i f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) q_i p_j f_j(h_{j_1}, \dots, h_{j_n}) q_j,$$

y dado que se cumple que $q_i p_j f_j(h_{j_1}, \dots, h_{j_n}) q_j \in \mathbb{F}\langle X \rangle$, lo podemos reescribir como $\widehat{q_{ij}} = q_i p_j f_j(h_{j_1}, \dots, h_{j_n}) q_j$, así:

$$uv = \sum_{i,j} p_i f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) \widehat{q_{ij}} \in G,$$

por lo tanto, G es una subálgebra de $\mathbb{F}\langle X \rangle$. Para ver que G es un ideal, note que para $g \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ se tiene que:

$$gu = \sum_{i=1}^m g p_i f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) q_i = \sum_{i=1}^m \widehat{p_i} f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) q_i \in G,$$

análogamente se demuestra que $ug \in G$, luego G es un ideal bilateral. Finalmente, veamos que G es un T-ideal. Sea $\varphi \in \text{End}(\mathbb{F}\langle X \rangle)$, note que:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi \left(\sum_{i=1}^m p_i f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) q_i \right) = \sum_{i=1}^m \varphi[p_i f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) q_i] \\ &= \sum_{i=1}^m \varphi(p_i) \varphi[f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n})] \varphi(q_i) = \sum_{i=1}^m \varphi(p_i) f_i(\varphi(h_{i_1}), \dots, \varphi(h_{i_n})) \varphi(q_i) \end{aligned}$$

y dado que $\varphi(p_i), \varphi(h_{i_j}), \varphi(q_i) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ entonces, vale que:

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^m p'_i f_i(h'_{i_1}, \dots, h'_{i_n}) q'_i \in G,$$

por lo tanto, G es un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ que contiene a S , además, por definición $\langle S \rangle_T$ es el menor T-ideal que contiene a S , es decir, $\langle S \rangle_T \subseteq G$.

Para la contención recíproca consideremos I un T-ideal tal que $S \subseteq I$, queremos ver que $G \subseteq I$. Si $f_i \in S$, entonces $f_i \in I$, y dado que es un T-ideal entonces para cualquier $h_{i_j} \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ se tiene

que: $f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) \in I$, y por ser ideal bilateral entonces

$$p_i f_i(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) q_i \in I$$

para cualesquiera $p_i, q_i \in \mathbb{F}\langle X \rangle$, además, cualquier suma finita de tales elementos pertenece a I , en particular, $G \subseteq I$, y dado que I era arbitrario entonces:

$$G \subseteq \bigcap_{S \subseteq I} I = \langle S \rangle_T,$$

por lo tanto, $\langle S \rangle_T = G$. □

Definición 2.2.10. Dos conjuntos de polinomios serán llamados *equivalentes* si generan el mismo T-ideal.

3. Álgebras graduadas

Dado un grupo arbitrario, podemos clasificar los elementos de un álgebra en subespacios vectoriales no triviales, donde a cada subespacio vectorial le corresponde un elemento del grupo. En este capítulo introduciremos el concepto de álgebras graduadas, esta estructura nos permitirá estudiar con mayor detalle propiedades del álgebra a través de sus componentes homogéneas. Un aspecto fundamental que se destacará es que muchas de las definiciones centrales del álgebra, tales como ideales, homomorfismos e identidades polinomiales, entre otras; admiten formulaciones análogas en el contexto de álgebras graduadas. En esencia, estas nociones conservan su significado estructural, pero se adaptan para respetar la graduación, lo que da lugar a conceptos como ideales graduados, homomorfismos graduados e identidades polinomiales graduadas, entre otras. Presentaremos los resultados principales a tratar basados en las definiciones de Giambruno y Zaicev en [8].

3.1 G-graduaciones

Definición 3.1.1. Sea G un grupo, se dice que un álgebra A es **G -graduada** si puede escribirse como una suma directa de subespacios propios no triviales $A^{(g)} \subseteq A$, esto es

$$A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)},$$

tales que $A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$ para todo $g, h \in G$. Los subespacios $A^{(g)}$ se llaman **componentes homogéneas** de A .

A continuación se presentan algunos ejemplos de álgebras G -graduadas.

Ejemplo 3.1.2. Sea A un álgebra arbitraria y sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Consideremos los subespacios de A dados por:

$$A^{(0)} = A \quad \text{y} \quad A^{(1)} = \{0_A\},$$

donde 0_A es el elemento neutro del álgebra. Entonces, podemos probar que $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ es una álgebra $\mathbb{Z}_2$ -graduada, denominada **graduación trivial**.

En efecto, note que $A^{(0)} \cap A^{(1)} = A^{(1)} = \{0_A\}$, y además, todo elemento $a \in A$ puede escribirse como $a = a^{(0)} + a^{(1)}$, donde $a^{(0)} = a \in A^{(0)}$ y $a^{(1)} = 0_A \in A^{(1)}$, de donde, $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$. Para ver que $A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(g+h)}$ notemos que:

- Sean $a_1^{(0)}, a_2^{(0)} \in A^{(0)} = A$ entonces:

$$a_1^{(0)} a_2^{(0)} \in A = A^{(0)}.$$

Así, $A^{(0)} A^{(0)} \subseteq A^{(0+0)} = A^{(0)}.$

- Sean $a_1^{(0)} \in A^{(0)}, a_1^{(1)} \in A^{(1)},$ tales que $a_1^{(1)} = 0_A,$ entonces:

$$a_1^{(0)} a_1^{(1)} = a_1^{(0)} \cdot 0_A = 0_A \in A^{(1)}.$$

En donde, $A^{(0)} A^{(1)} \subseteq A^{(0+1)} = A^{(1)}.$

- Sean $a_1^{(1)} \in A^{(1)},$ tales que $a_1^{(1)} = 0_A,$ $a_0^{(0)} \in A^{(0)}$ entonces:

$$a_1^{(1)} a_1^{(0)} = 0_A \cdot a_1^{(0)} = 0_A \in A^{(1)}.$$

Así, $A^{(1)} A^{(0)} \subseteq A^{(1+0)} = A^{(1)}.$

- Sean $a_1^{(1)}, a_2^{(1)} \in A^{(1)},$ tales que $a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = 0_A$ entonces:

$$a_1^{(1)} a_2^{(1)} = 0_A \cdot 0_A = 0_A \in A^{(1)} \cap A \subseteq A = A^{(0)}.$$

En donde, $A^{(1)} A^{(1)} \subseteq A^{(1+1)} = A^{(0)}.$

Por lo tanto, toda álgebra A puede ser graduada trivialmente bajo $\mathbb{Z}_2.$

Ejemplo 3.1.3. Sea $A = UT_2(\mathbb{F})$ el álgebra de las matrices triangulares superiores de orden dos, sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ un grupo, y denotemos por E_{ij} la matriz elemental donde la entrada ij -ésima es 1 y las demás 0, entonces $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ tiene estructura de álgebra graduada al considerar los subespacios de A dados por:

$$A^{(0)} = \text{Span}\{E_{11}, E_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{F} \right\}$$

$$A^{(1)} = \text{Span}\{E_{12}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F} \right\}$$

A esta graduación se le conoce como **graduación canónica de $UT_2(\mathbb{F})$ con el grupo $\mathbb{Z}_2$** o simplemente **$\mathbb{Z}_2$ -graduación canónica**, y diremos que $UT_2(\mathbb{F})$ es $\mathbb{Z}_2$ -graduada.

En efecto, veamos que $A^{(0)} \cap A^{(1)} = \{0\}$. Por otro lado, para toda

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in UT_2(\mathbb{F})$$

tenemos que:

$$X = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir, $X = (aE_{11} + bE_{12}) + cE_{22}$, en donde $X^{(0)} = aE_{11} + cE_{22} \in A^{(0)}$ y $X^{(1)} = bE_{12} \in A^{(1)}$, así $X = X^{(0)} \oplus X^{(1)}$, y por lo tanto, se tiene que $UT_2(\mathbb{F})$ es una suma directa de los subespacios $A^{(0)}$ y $A^{(1)}$, es decir: $UT_2(\mathbb{F}) = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$, ahora debemos probar que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(g+h)}$ para toda $g, h \in \mathbb{Z}_2$. Sea $x \in A^{(g)}$, $y \in A^{(h)}$, entonces por casos se tiene que:

- Consideremos $X_1^{(0)}, X_2^{(0)} \in A^{(0)}$, entonces $X_1^{(0)} = \alpha E_{11} + \beta E_{22}$ y $X_2^{(0)} = \gamma E_{11} + \delta E_{22}$ entonces:

$$X_1^{(0)}X_2^{(0)} = (\alpha E_{11} + \beta E_{22})(\gamma E_{11} + \delta E_{22}) = \alpha\gamma E_{11} + \beta\delta E_{22} \in A^{(0)},$$

de donde tenemos que: $A^{(0)}A^{(0)} \subseteq A^{(0+0)} = A^{(0)}$.

- Consideremos $X_1^{(0)} \in A^{(0)}$, $X_1^{(1)} \in A^{(1)}$, entonces $X_1^{(0)} = \alpha E_{11} + \beta E_{22}$ y $X_1^{(1)} = \lambda E_{12}$ entonces:

$$X_1^{(0)}X_1^{(1)} = (\alpha E_{11} + \beta E_{22})(\lambda E_{12}) = \alpha\lambda E_{12} \in A^{(1)},$$

así $A^{(0)}A^{(1)} \subseteq A^{(0+1)} = A^{(1)}$.

- Consideremos $X_1^{(1)} \in A^{(1)}$, $X_1^{(0)} \in A^{(0)}$ entonces $X_1^{(1)} = \lambda E_{12}$ y $X_1^{(0)} = \alpha E_{11} + \beta E_{22}$ entonces:

$$X_1^{(1)}X_1^{(0)} = (\lambda E_{12})(\alpha E_{11} + \beta E_{22}) = \lambda\beta E_{12} \in A^{(1)},$$

de donde tenemos que: $A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1+0)} = A^{(1)}$.

- Consideremos $X_1^{(1)}, X_2^{(1)} \in A^{(1)}$ entonces $X_1^{(1)} = \lambda E_{12}$ y $X_2^{(1)} = \alpha E_{12}$ entonces:

$$X_1^{(1)}X_2^{(1)} = (\lambda E_{12})(\alpha E_{12}) = 0 \in A^{(0)},$$

así $A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(1+1)} = A^{(0)}$.

Por lo tanto, $UT_2(\mathbb{F})$ es $\mathbb{Z}_2$ -graduado.

Ejemplo 3.1.4. Sea $A = M_2(\mathbb{F})$ el álgebra de las matrices cuadradas de orden dos, y sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, entonces $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ tiene estructura de álgebra graduada si consideramos los

subespacios de A dados por:

$$A^{(0)} = \text{Span}\{E_{11}, E_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{F} \right\}$$

$$A^{(1)} = \text{Span}\{E_{12}, E_{21}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{F} \right\}$$

A esta graduación se le conoce como **graduación tipo bloques de $\mathbb{Z}_2$** , y diremos que $M_2(\mathbb{F})$ es $\mathbb{Z}_2$ -graduada.

Omitimos la prueba, pues es análoga al Ejemplo 3.1.3.

Observación 3.1.5. Toda álgebra $\mathbb{Z}_2$ -graduada es también llamada **superálgebra**.

Definición 3.1.6. Sea A un álgebra G -graduada y sea I un ideal de A , diremos que I es un ideal G -graduado si

$$I = \bigoplus_{g \in G} I^{(g)},$$

donde $I^{(g)} = I \cap A^{(g)}$. Es decir, I es un ideal graduado si todo $b \in I$ se puede escribir en la forma

$$b = \sum_{g \in G} b^{(g)},$$

donde $b^{(g)} \in I^{(g)}$ para todo $g \in G$.

Proposición 3.1.7. Sea A un álgebra G -graduada y sea I un ideal G -graduado de A , entonces

$$A/I = \bigoplus_{g \in G} (A^{(g)} / I^{(g)})$$

es un álgebra G -graduada, denotada por A^{gr}/I donde $(a + I)^{(g)} = a^{(g)} + I^{(g)}$.

Demostración. Sea $a + I \in A/I$ entonces:

$$a + I = \sum_{g \in G} a^{(g)} + \sum_{g \in G} I^{(g)} = \sum_{g \in G} (a^{(g)} + I^{(g)}) = \sum_{g \in G} (a + I)^{(g)} \in \bigoplus_{g \in G} (A^{(g)} / I^{(g)}).$$

La contenencia recíproca es análoga. □

Definición 3.1.8. Sean A, B álgebras G -graduadas tales que:

$$A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)} \quad \text{y} \quad B = \bigoplus_{g \in G} B^{(g)}.$$

Diremos que $\varphi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de álgebras G -graduadas si es un homomorfismo de álgebras y además:

$$\varphi(A^{(g)}) \subseteq B^{(g)}$$

para todo $g \in G$.

Sea G un grupo, para cada $g \in G$ sean $X^{(g)} = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \dots\}$ conjuntos numerables finitos. Para $X = \bigcup_{g \in G} X^{(g)}$, consideremos el álgebra libre $\mathbb{F}\langle X \rangle$, libremente generada por X . Una variable $x \in X$ es de grado homogéneo g si $x \in X^{(g)}$. El grado homogéneo de un monomio $x_{i_1}^{(g_1)} \dots x_{i_n}^{(g_n)} \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ se define por $g_1 g_2 \dots g_n \in G$ y su grado total es n . Se denota por $\mathbb{F}\langle X \rangle^{(g)}$ al subespacio de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ generado por todos los monomios de grado homogéneo g . Note que

$$\mathbb{F}\langle X \rangle = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{F}\langle X \rangle^{(g)},$$

y además, $\mathbb{F}\langle X \rangle^{(g)} \mathbb{F}\langle X \rangle^{(h)} \subseteq \mathbb{F}\langle X \rangle^{(gh)}$ para todo $g, h \in G$. Por tanto, $\mathbb{F}\langle X \rangle$ es un álgebra G -graduada, denotada por $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$.

Definición 3.1.9. $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ es el álgebra libre G -graduada.

A continuación se presentan algunos ejemplos de polinomios G -graduados.

Ejemplo 3.1.10. Sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ y sea $\mathbb{F}\langle X \rangle$ el álgebra libre asociativa sobre el conjunto $X = X^{(0)} \cup X^{(1)}$, donde $X^{(g)} = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \dots\}$ para todo $g \in \mathbb{Z}_2$. Entonces $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr} = \mathbb{F}\langle X \rangle^{(0)} \oplus \mathbb{F}\langle X \rangle^{(1)}$ es una $\mathbb{Z}_2$ -graduación. Note que el polinomio $f \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ dado por:

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = x_1^{(1)} x_1^{(0)} x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(0)} + x_2^{(1)} x_1^{(1)} x_2^{(0)}$$

es suma de los monomios:

- $f_1 = x_1^{(1)} x_1^{(0)} x_3^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(0)}$ de grado homogéneo 1 y grado total 5.
- $f_2 = x_2^{(1)} x_1^{(1)} x_2^{(0)}$ de grado homogéneo 0 y grado total 3.

Ejemplo 3.1.11. Sea G un grupo y sea $f \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ un polinomio dado por:

$$f = f(x_1^{(g_2)}, x_1^{(g_3)}, x_2^{(g_1)}, x_3^{(g_2)}, x_3^{(g_3)}) = x_1^{(g_1)} x_2^{(g_1)} x_1^{(g_3)} + x_1^{(g_3)} x_3^{(g_3)} + x_3^{(g_2)} x_1^{(g_1)}$$

Podemos observar que el polinomio $f \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ es suma de los monomios:

- $f_1 = x_1^{(g_1)} x_2^{(g_1)} x_1^{(g_3)}$ de grado homogéneo $g_1 g_1 g_3$ y grado total 3.
- $f_2 = x_1^{(g_3)} x_3^{(g_3)}$ de grado homogéneo $g_3 g_3$ y grado total 2.

- $f_3 = x_3^{(g_2)} x_1^{(g_1)}$ de grado homogéneo $g_2 g_1$ y grado total 2.

Proposición 3.1.12. *El álgebra $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ cumple con la propiedad universal de álgebras G -graduadas, es decir, para toda álgebra A G -graduada y cualquier función $f : X \rightarrow A$ existe un único homomorfismo de álgebras G -graduadas $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr} \rightarrow A$ tales que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr} \\ & \searrow f & \downarrow \varphi \\ & & A \end{array}$$

donde i es la función inclusión.

La demostración es análoga al caso no graduado, pues todo homomorfismo respeta graduaciones.

Definición 3.1.13. *Sea A un álgebra G -graduada y sea $f(x_{i_1}^{(g_1)}, \dots, x_{i_n}^{(g_n)}) \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$. Diremos que $f \equiv 0$ es una **identidad polinomial G -graduada** para A si*

$$f(a_{i_1}^{(g_1)}, \dots, a_{i_n}^{(g_n)}) = 0,$$

para toda $a_{i_k}^{(g_k)} \in A^{(g_k)}$.

Si A satisface una identidad polinomial G -graduada no trivial, diremos que A es una **PI-álgebra G -graduada**.

A continuación se presentan algunos ejemplos de identidades polinomiales G -graduadas.

Ejemplo 3.1.14. *Sea $A = UT_2(\mathbb{F})$ el álgebra de todas las matrices triangulares superiores de orden dos y sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, y consideremos la $\mathbb{Z}_2$ -graduación canónica de $UT_2(\mathbb{F})$, entonces el polinomio*

$$f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = x_1^{(1)} x_2^{(1)},$$

es una identidad polinomial $\mathbb{Z}_2$ -graduada para $UT_2(\mathbb{F})$.

En efecto, sean $M_1^{(1)}, M_2^{(1)} \in A^{(1)}$, es decir:

$$M_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$f_1(M_1^{(1)}, M_2^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, para toda $M_1^{(1)}, M_2^{(1)} \in A^{(1)}$ se cumple que $f_1(M_1^{(1)}, M_2^{(1)}) = 0$.

Ejemplo 3.1.15. Sea $A = UT_2(\mathbb{F})$ el álgebra de todas las matrices triangulares superiores de orden dos y sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, y consideremos la $\mathbb{Z}_2$ -graduación canónica de $UT_2(\mathbb{F})$, entonces el polinomio

$$f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] = x_1^{(0)}x_2^{(0)} - x_2^{(0)}x_1^{(0)},$$

es una identidad polinomial $\mathbb{Z}_2$ -graduada para $UT_2(\mathbb{F})$.

En efecto, sean $M_1^{(0)}, M_2^{(0)} \in A^{(0)}$, es decir:

$$M_1^{(0)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2^{(0)} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} f_2(M_1^{(0)}, M_2^{(0)}) &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2a_1 & 0 \\ 0 & c_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es decir, para toda $M_1^{(0)}, M_2^{(0)} \in A^{(0)}$ se cumple que $f_2(M_1^{(0)}, M_2^{(0)}) = 0$.

Ejemplo 3.1.16. Sea $A = UT_2(\mathbb{F})$ el álgebra de todas las matrices triangulares superiores de orden dos y sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, y consideremos la $\mathbb{Z}_2$ -graduación canónica de $UT_2(\mathbb{F})$, entonces el polinomio

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_1^{(1)}x_3^{(0)}x_2^{(1)},$$

es una identidad polinomial $\mathbb{Z}_2$ -graduada para $UT_2(\mathbb{F})$.

En efecto, para $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2$ sean

$$M_i^{(0)} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & c_i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_j^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & b_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, M_3^{(0)}, M_1^{(1)}, M_2^{(1)}) &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es decir, para toda $M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, M_3^{(0)} \in A^{(0)}$, y para toda $M_1^{(1)}, M_2^{(1)} \in A^{(1)}$ se cumple que

$$f(M_1^{(0)}, M_2^{(0)}, M_3^{(0)}, M_1^{(1)}, M_2^{(1)}) = 0.$$

Definición 3.1.17. Sea A un álgebra G -graduada, denotaremos por $\text{Id}^{gr}(A)$ al conjunto de todas las identidades polinomiales graduadas de A , es decir:

$$\text{Id}^{gr}(A) = \{f(x_{i_1}^{(g_1)}, \dots, x_{i_n}^{(g_n)}) \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr} \mid f(a_{i_1}^{(g_1)}, \dots, a_{i_n}^{(g_n)}) = 0, \forall a_{i_k}^{(g_k)} \in A^{(g_k)}\}$$

Observación 3.1.18. Note que se tiene que $\text{Id}(A) \subseteq \text{Id}^{gr}(A)$ dado que para $f \in \text{Id}(A)$ se cumple que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para toda $a_1, \dots, a_n \in A$, así en particular se tiene que f es identidad polinomial para toda G -graduación de A y por lo tanto $f \in \text{Id}^{gr}(A)$. Sin embargo, podemos ver que la contenencia recíproca no se cumple, por ejemplo, para el álgebra $UT_2(\mathbb{F})$ con la $\mathbb{Z}_2$ -graduación canónica el polinomio $f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = x_1^{(1)}x_2^{(1)}$ es una identidad polinomial $\mathbb{Z}_2$ - (ver Ejemplo 3.1.14), pero en general el polinomio $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ no es una identidad polinomial para $UT_2(\mathbb{F})$, por ejemplo, para $X, Y \in UT_2(\mathbb{F})$ con $X = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ se tiene que $f(X, Y) = \begin{pmatrix} 15 & -19 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \neq 0$.

3.2 Polinomios multilineales

Se denomina polinomio multilineal a aquel polinomio que es lineal en cada una de sus variables de manera independiente, es decir, cada una de sus variables es de grado uno, lo cual permite descomponer y analizar su estructura con mayor precisión. La importancia de los polinomios multilineales en las PI-álgebras radica en que cualquier identidad polinomial puede reducirse mediante polinomios multilineales.

Definición 3.2.1. Un polinomio $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ es homogéneo de grado d_i en x_i si todos sus monomios tienen grado d_i en x_i . Si además f es homogénea para toda x_i diremos que f es multihomogénea. Si f es multihomogénea y cada variable x_i es de grado uno diremos que f es multilineal. Se denota por P_n al subespacio de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ de todos los polinomios multilineales de grado n . Finalmente, denotaremos por $\deg_{x_i} f$ al grado de f en la variable x_i .

Ejemplo 3.2.2. Para los siguientes polinomios se tiene que:

- $f(x, y, z) = xyz$ es multilineal.
- $f(x, y, z) = 3xyz + 2zyx$ es multilineal.
- $f(x, y) = yx^2 - y^3zx^2$ es homogéneo en la variable x de grado 2.

- $f(x, y) = x^2y - 5yx^2$ es multihomogéneo de multigrado $(2, 1)$.

Observación 3.2.3. Note que P_n es generado por los monomios $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$, donde $\sigma \in S_n$ y S_n es el grupo de permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$; es decir,

$$P_n = \text{Span}\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\},$$

y $\dim(P_n) = n!$. Por ejemplo, $P_3 = \text{Span}\{xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx\}$, con $\dim(P_3) = 3! = 6$.

Observación 3.2.4. Si $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ es multilineal, entonces f tiene la forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_{\sigma} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

donde $\lambda_{\sigma} \in \mathbb{F}$.

Proposición 3.2.5. Sea A una $\mathbb{F}$ -álgebra generada como un espacio vectorial por un conjunto B sobre $\mathbb{F}$. Si f es un polinomio multilineal que se anula en B , entonces f es una identidad polinomial para A .

Demostración. Sea $f = f(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio multilineal que se anula en B . Es decir, para todo $b_1, \dots, b_n \in B$ se tiene que

$$f(b_1, \dots, b_n) = 0.$$

Probaremos que f es una identidad polinomial para A . Sean $a_1, \dots, a_n \in A$. Como B genera a A como un espacio vectorial, entonces cada $a_j \in A$ con $j = 1, \dots, n$ puede escribirse en la forma

$$a_j = \sum_{i_j=1}^{m_j} \lambda_{ji_j} b_{ji_j},$$

donde $\lambda_{ji_j} \in \mathbb{F}$ y $b_{ji_j} \in B$. Como f es multilineal, al reemplazar las descomposiciones y usar la linealidad sucesivamente en cada variable obtenemos que:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \lambda_{1i_1} b_{1i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{m_n} \lambda_{ni_n} b_{ni_n}\right), \\ &= \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_n=1}^{m_n} \lambda_{1i_1} \dots \lambda_{ni_n} f(b_{1i_1}, \dots, b_{ni_n}), \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{m_1, \dots, m_n} \lambda_{1i_1} \dots \lambda_{ni_n} f(b_{1i_1}, \dots, b_{ni_n}) = 0, \end{aligned}$$

dado que $f(b_{1i_1}, \dots, b_{ni_n}) = 0$ en B tenemos que

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Por lo tanto, f es una identidad polinomial para A . □

Dos resultados clásicos de la teoría de PI-álgebras son los mostrados en la Proposición 3.2.6 y el Teorema 3.2.8.

Proposición 3.2.6. *Sea A una $\mathbb{F}$ -álgebra con $\dim(A) < n$, entonces A satisface la identidad estándar de grado n dada por:*

$$St_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

donde $(-1)^\sigma$ es el signo de σ .

Ejemplo 3.2.7. *Considere el álgebra $A = \mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, como*

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2,$$

se tiene que $\dim(A) < 3$, entonces por la Proposición 3.2.6, se tiene que A satisface la identidad estándar de grado 3, es decir,

$$St_3 = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)},$$

desarrollando la suma se tiene que

$$\begin{aligned} St_3(x_1, x_2, x_3) = & x_1 x_2 x_3 - x_1 x_3 x_2 - x_2 x_1 x_3 \\ & + x_2 x_3 x_1 + x_3 x_1 x_2 - x_3 x_2 x_1. \end{aligned}$$

Puesto que el producto en $\mathbb{C}$ es conmutativo, todos los productos anteriores coinciden, de modo que

$$St_3(x_1, x_2, x_3) = (1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1)x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Por consiguiente, $\mathbb{C}$ satisface la identidad estándar de grado 3.

Teorema 3.2.8. *(Teorema de Amitsur y Levitzki). Sea $A = M_n(\mathbb{F})$ el álgebra de matrices $n \times n$, entonces el polinomio estándar de grado $2n$ dado por:*

$$St_{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2n)}$$

es una identidad polinomial para $M_n(\mathbb{F})$. En particular, es el polinomio estándar de menor grado que satisface el álgebra de matrices de orden n .

El siguiente teorema garantiza que, sobre un cuerpo con un número suficiente de elementos, toda identidad polinómica puede descomponerse en sus componentes multihomogéneas, las cuales continúan siendo identidades del álgebra. Esta propiedad permite restringir el estudio a polinomios multihomogéneos sin pérdida de generalidad y constituye una herramienta esencial en la demostración del teorema principal de este trabajo, donde se determinará un conjunto generador del T_2 -ideal de identidades polinomiales graduadas de $UT_2(\mathbb{F})$.

Teorema 3.2.9. *Sea A un álgebra arbitraria y $\mathbb{F}$ un cuerpo con más de n elementos. Si $f = 0$ es una identidad polinomial para A entonces cada componente multihomogénea de f es también una identidad polinomial para A .*

Demostración. Sea $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ una identidad polinomial para A , fijemos la variable x_1 , y descompongamos $f(x_1, \dots, x_n)$ de forma que:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d f_i(x_1, \dots, x_n),$$

donde f_i es homogéneo de grado i en la variable x_1 y d denota el máximo grado con el que la variable x_1 aparece en f . Queremos ver que $f_i \in \text{Id}(A)$ para todo $i = 0, \dots, d$. Sean $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d$ elementos dos a dos distintos de $\mathbb{F}$, y dado que f_i es homogéneo de grado i en x_1 con $j = 0, \dots, d$ entonces

$$f_i(\lambda_j x_1, \dots, x_n) = \lambda_j^i f_i(x_1, \dots, x_n),$$

es decir

$$f(\lambda_j x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d \lambda_j^i f_i(x_1, \dots, x_n)$$

y dado que $f \in \text{Id}(A)$ entonces $f(\lambda_j a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \dots, a_n \in A$ y todo $j = 0, \dots, d$. Así, tomando $a_1, \dots, a_n \in A$ arbitrarios, y definiendo $f_i = f_i(a_1, \dots, a_n)$ se obtiene el sistema

$$\sum_{i=0}^d \lambda_j^i f_i = 0 \quad \text{con} \quad j = 0, \dots, d,$$

es decir,

$$\begin{cases} \lambda_0^0 f_0 + \lambda_0^1 f_1 + \cdots + \lambda_0^d f_d = 0, \\ \lambda_1^0 f_0 + \lambda_1^1 f_1 + \cdots + \lambda_1^d f_d = 0, \\ \vdots \\ \lambda_d^0 f_0 + \lambda_d^1 f_1 + \cdots + \lambda_d^d f_d = 0. \end{cases}$$

luego, de forma equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0^1 & \cdots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1^1 & \cdots & \lambda_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_d^1 & \cdots & \lambda_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

el cual tiene como matriz de coeficientes a la matriz de Voldermonde

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \cdots & \lambda_0^d \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \lambda_d^2 & \cdots & \lambda_d^d \end{pmatrix}$$

donde, al calcular su determinante se obtiene que

$$\det(\Delta) = \prod_{0 \leq i < j \leq d} (\lambda_j - \lambda_i),$$

el cual es no nulo, pues los λ_k son distintos dos a dos y, por lo tanto, el sistema es homogéneo con solución única (la trivial), es decir, $f_i = 0$ para todo $i = 0, \dots, d$. luego, dado que los $a_1, \dots, a_n \in A$ eran arbitrarios, se deduce que $f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $a_1, \dots, a_n \in A$, y así $f_i \in \text{Id}(A)$. $\square$

Ejemplo 3.2.10. Consideremos $UT_2(\mathbb{R}) = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ con la $\mathbb{Z}_2$ -graduación canónica y sean $x_1^{(0)} = y_1$, $x_2^{(0)} = y_2$, $x_1^{(1)} = z$, y consideremos el polinomio

$$f(y_1, y_2, z) = \underbrace{y_1 z y_2 z + z y_1 z}_{f_2} + \underbrace{z y_1 y_2 - z y_2 y_1}_{f_1} + \underbrace{[y_1, y_2]}_{f_0}$$

note que este polinomio puede ordenarse como suma de sus componentes homogéneas según el grado de la variable z , donde

$$f = f_2 + f_1 + f_0,$$

al evaluar el polinomio se obtiene que $f(y_1, y_2, z) = 0$, es decir, es una identidad polinomial graduada de $UT_2(\mathbb{R})$ y por el Teorema 3.2.9 entonces cada f_i con $i = 0, 1, 2$ es también una identidad polinomial graduada.

Teorema 3.2.11. *Si el cuerpo es de característica cero, entonces cada identidad polinomial $f = f(x_1, \dots, x_n)$ es equivalente a un conjunto de identidades multilineales.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.9, el polinomio f es equivalente al conjunto de sus componentes multihomogéneas, por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f = f(x_1, \dots, x_n)$ es multihomogéneo, y además, es de la forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d f_i(x_1, \dots, x_n),$$

donde d es el mayor grado de la componente homogénea f_i del polinomio f en la variable x_1 . Note que si $d = 1$ entonces f es lineal en x_1 y por lo tanto es trivial, supongamos entonces que $d > 1$. Considere la sustitución $x_1 \mapsto y_1 + y_2$, de ahí que

$$f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d f_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n),$$

donde cada f_i es homogéneo de grado i en y_1 y de grado $d - i$ en y_2 , y conserva los grados en las demás variables. Evaluando en $y_1 = y_2$, se obtiene

$$f(2y_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d f_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n),$$

por otra parte, como f es homogéneo de grado d en x_1 entonces

$$f(2y_1, x_2, \dots, x_n) = 2^d f(y_1, x_2, \dots, x_n),$$

luego, por el teorema del binomio se tiene que

$$2^d = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i},$$

y por consiguiente:

$$2^d f(y_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d f_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n),$$

es decir,

$$\sum_{i=0}^d \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d f_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n).$$

y por lo tanto, para todo $i = 0, \dots, d$ tenemos que

$$\binom{d}{i} f(y_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n),$$

finalmente, dado que $\text{Char}(\mathbb{F}) = 0$ entonces $\binom{d}{i} \neq 0$ para todo $i = 0, \dots, d$. Por lo tanto, f es consecuencia de f_i con $i = 1, \dots, d-1$, donde f_i tiene grado i en y_1 y grado $d-i$ en y_2 , por lo que, al menos una de ellas es de grado menor a d . Note que repitiendo este procedimiento para cada variable cuyo grado sea mayor que 1, y aplicando inducción sobre el grado total, se obtiene un conjunto finito de polinomios que son lineales en cada variable. Por lo tanto, f es equivalente a un conjunto finito de polinomios multilineales. $\square$

4. Graduaciones e identidades graduadas sobre $UT_2(\mathbb{F})$

El estudio de las álgebras graduadas y sus identidades polinomiales graduadas constituye una extensión natural de la teoría de identidades polinomiales en álgebras. En este contexto, las graduaciones por grupos permiten descomponer un álgebra en componentes homogéneas, introduciendo una estructura adicional. En este capítulo se analiza el caso del álgebra $UT_2(\mathbb{F})$ de matrices triangulares superiores de orden dos sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Este ejemplo resulta de suma importancia ya que permite ilustrar de manera clara la interacción entre la estructura graduada y las identidades polinomiales.

El desarrollo de este capítulo se basa en el trabajo de A. Valenti en [2], en donde se estudian las identidades graduadas de $UT_2(\mathbb{F})$ y se establecen resultados en este contexto. En particular, se utiliza el hecho de que toda G -graduación sobre $UT_2(\mathbb{F})$ es, salvo isomorfismos, trivial o canónica, lo cual permite reducir el análisis a un número finito de casos esenciales. A partir de esta clasificación, se procede al estudio de las identidades polinomiales graduadas del álgebra. En particular, se describen los polinomios que generan el T_2 -ideal de identidades graduadas, denotado por $\text{Id}^{\text{gr}}(A)$. Este ideal está formado por todos los polinomios graduados que se anulan bajo cualquier evaluación compatible con la graduación del álgebra, y su caracterización permite comprender con mayor profundidad la estructura algebraica de $UT_2(\mathbb{F})$.

4.1 Graduaciones en $UT_2(\mathbb{F})$

En adelante asumiremos que todo cuerpo $\mathbb{F}$ es un cuerpo de característica cero, es decir, $\text{Char}(\mathbb{F}) = 0$.

Definición 4.1.1. Sea G un grupo arbitrario y A un álgebra. Diremos que A tiene una G -graduación trivial si

$$A^{(e)} = A \quad \text{y} \quad A^{(g)} = \{0\},$$

donde e es el elemento neutro de G y $g \neq e$.

Definición 4.1.2. Sea G un grupo arbitrario, diremos que $UT_2(\mathbb{F})$ tiene una G -graduación canónica si existe $g \in G$, $g \neq e$, tal que $UT_2(\mathbb{F}) = B^{(e)} \oplus B^{(g)}$, donde $B^{(e)} = \mathbb{F}E_{11} + \mathbb{F}E_{22}$, y $B^{(g)} = \mathbb{F}E_{12}$

Ejemplo 4.1.3. Sea $G = \mathbb{Z}_4$, note que el álgebra $UT_2(\mathbb{F})$ satisface una $\mathbb{Z}_4$ -graduación canónica si consideramos los subespacios

$$(UT_2(\mathbb{F}))^{(0)} = \mathbb{F}E_{11} + \mathbb{F}E_{22}, \quad \text{y} \quad (UT_2(\mathbb{F}))^{(1)} = \mathbb{F}E_{12}$$

y los demás componentes son nulos, es decir,

$$(UT_2(\mathbb{F}))^{(2)} = (UT_2(\mathbb{F}))^{(3)} = 0.$$

Teorema 4.1.4. *Cualquier G -graduación de $UT_2(\mathbb{F})$ es, salvo isomorfismos, trivial o canónica.*

La demostración se basa en considerar una descomposición graduada de la forma

$$UT_2(\mathbb{F}) = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)},$$

y analizar cómo pueden ubicarse los elementos de una base del álgebra dentro de las componentes homogéneas. A partir de esta descomposición, se estudian las posibles dimensiones de las componentes y se procede por casos. Este análisis restringe los casos posibles y conduce a que, salvo isomorfismos, solo pueden presentarse dos tipos de graduaciones: la trivial y la canónica. Para una demostración detallada ver [9].

A partir de este momento, consideraremos el álgebra $UT_2(\mathbb{F})$ con la $\mathbb{Z}_2$ -graduación canónica dada en el Ejemplo 3.1.3. Además, de la Definición 3.1.9, podemos considerar el álgebra libre $\mathbb{Z}_2$ -graduada $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ sobre el conjunto de variables $X = Y \cup Z$, donde $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ y $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ tales que $Y \cap Z = \emptyset$, y las variables $y_i \in Y$ son de grado homogéneo 0, mientras que las variables $z_j \in Z$ son de grado homogéneo 1.

Así se obtiene la descomposición graduada

$$\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr} = \mathbb{F}\langle X \rangle^{(0)} \bigoplus \mathbb{F}\langle X \rangle^{(1)}, \quad (4.1)$$

donde $\mathbb{F}\langle X \rangle^{(0)}$ denota el subespacio generado por los monomios de grado homogéneo cero, es decir, aquellos en los que el número total de variables provenientes de Z es par. De manera análoga $\mathbb{F}\langle X \rangle^{(1)}$ corresponde al subespacio generado por los monomios homogéneos de grado uno, es decir, aquellos en los que el número total de variables de Z es impar.

Ejemplo 4.1.5. *Sea $G = \mathbb{Z}_2$ y sea $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ una superálgebra, tenemos que el monomio $y_1 y_2 z_1 y_3 z_2$ es de grado homogéneo $0 \in \mathbb{Z}_2$, mientras que el monomio $z_1 z_2 y_1 z_3$ es de grado homogéneo $1 \in \mathbb{Z}_2$. Además, podemos notar que el primer monomio tiene un número par de apariciones de las variables de Z , mientras que el segundo monomio tiene un número impar de apariciones de las variables de Z .*

De la Proposición 3.1.12, si consideramos el grupo $G = \mathbb{Z}_2$ y el conjunto $X = Y \cup Z$ tendremos que para cualquier función $f : Y \cup Z \rightarrow A$ que preserve graduaciones existe un único homomorfismo de superálgebras $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr} \rightarrow A$.

Definición 4.1.6. Sea $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ el álgebra libre asociativa G -graduada. Un ideal $I \subseteq \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ se denomina T_2 -ideal si es invariante bajo todos los endomorfismos graduados del álgebra libre, es decir, si para todo endomorfismo graduado

$$\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr} \rightarrow \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr},$$

se cumple que $\varphi(I) \subseteq I$.

Equivalentemente, se puede definir un T_2 -ideal como un ideal cerrado bajo endomorfismos de variables que respetan la graduación, es decir, endomorfismos que envían variables homogéneas en elementos homogéneos del mismo grado.

Proposición 4.1.7. Sea $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ un álgebra $\mathbb{Z}_2$ -graduada, entonces el ideal

$$\text{Id}^{gr}(A) = \{f \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr} \mid f = 0 \text{ en } A\},$$

es un T_2 -ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$.

Demostración. Sea $\text{Id}^{gr}(A)$. Para probar que I es un T_2 -ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$, basta verificar que es un ideal bilateral y que todo endomorfismo graduado preserva graduaciones.

La verificación de que I es un ideal bilateral de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ es análoga al caso no graduado (ver Proposición 2.2.2), ya que la evaluación de productos de polinomios en A respeta la multiplicación del álgebra y la estructura de la graduación.

Vamos a probar que para todo endomorfismo graduado $\varphi \in \text{End}(\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr})$, se tiene que

$$\varphi(\text{Id}^{gr}(A)) \subseteq \text{Id}^{gr}(A).$$

Sea $f(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s) \in \text{Id}^{gr}(A)$, donde las variables y_i son de grado homogéneo 0, para toda $i = 1, \dots, r$ y las variables z_j son de grado homogéneo 1, para toda $j = 1, \dots, s$. Y sea $\varphi \in \text{End}(\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr})$ un endomorfismo graduado arbitrario. Vamos a probar que $\varphi(f(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s)) \in \text{Id}^{gr}(A)$. Como φ preserva graduaciones, podemos definir φ de la siguiente manera

$$\varphi(y_i) = g_i(y_{i_1}, \dots, y_{i_n}, z_{j_1}, \dots, z_{j_m}) \quad \text{y} \quad \varphi(z_j) = h_j(y_{i_1}, \dots, y_{i_n}, z_{j_1}, \dots, z_{j_m}),$$

donde los g_i son polinomios de grado homogéneo 0 para toda $i = 1, \dots, r$ y los h_j son polinomios de grado homogéneo 1 para toda $j = 1, \dots, s$. Así, como φ es un homomorfismo tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(f(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s)) &= f(\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_r), \varphi(z_1), \dots, \varphi(z_s)) \\ &= f(g_1, \dots, g_r, h_1, \dots, h_s). \end{aligned}$$

Sean $a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in A^{(0)}$ y $b_{i_1}, \dots, b_{i_m} \in A^{(1)}$ elementos arbitrarios del álgebra y definimos $c_i = g_i(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, b_{i_1}, \dots, b_{i_m}) \in A^{(0)}$ y $d_j = h_j(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, b_{i_1}, \dots, b_{i_m}) \in A^{(1)}$ para todo $i = 1, \dots, r$ y $j = 1, \dots, s$. Denotando por $(\bar{a}, \bar{b})$ la $n + m$ -tupla $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, b_{j_1}, \dots, b_{j_m})$ de elementos de A , tenemos que $c_i = g_i(\bar{a}, \bar{b})$ y $d_j = h_j(\bar{a}, \bar{b})$. Luego

$$\begin{aligned} (\varphi(f(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s))) (\bar{a}, \bar{b}) &= (f(g_1, \dots, g_r, h_1, \dots, h_s)) (\bar{a}, \bar{b}) \\ &= f(g_1(\bar{a}, \bar{b}), \dots, g_r(\bar{a}, \bar{b}), h_1(\bar{a}, \bar{b}), \dots, h_s(\bar{a}, \bar{b})) \\ &= f(c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_s). \end{aligned}$$

Como $f \in \text{Id}^{\text{gr}}(A)$, entonces $f(c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_s) = 0$ para todo $c_i \in A^{(0)}$ y $d_j \in A^{(1)}$. De ahí que

$$\varphi(f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, b_{j_1}, \dots, b_{j_m})) = f(c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_s) = 0.$$

Por lo tanto, $\text{Id}^{\text{gr}}(A)$ es un T_2 -ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{\text{gr}}$. □

Definición 4.1.8. Sea S un subconjunto de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{\text{gr}}$. Definimos $\langle S \rangle_{T_2}$ como la intersección de todos los T_2 -ideales de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{\text{gr}}$ que contienen a S . Equivalentemente, $\langle S \rangle_{T_2}$ es el menor T_2 -ideal que contiene a S .

Proposición 4.1.9. El T_2 -ideal generado por un subconjunto $S \subseteq \mathbb{F}\langle X \rangle^{\text{gr}}$ está dado por

$$\langle S \rangle_{T_2} = \left\{ \sum_i p_i f_i(h_{i_1}^{(g_{i_1})}, \dots, h_{i_n}^{(g_{i_n})}) q_i \mid f_i \in S, h_{i_j}^{(g_{i_j})} \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{(g_{i_j})}, p_i, q_i \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{\text{gr}} \right\}.$$

La demostración es análoga a la Proposición 2.2.9.

Observación 4.1.10. El T_2 -ideal generado por un subconjunto S del álgebra libre asociativa graduada contiene, en particular, a todos los elementos de S . Además, a partir de estos generadores $f \in S$, se pueden obtener nuevos elementos del T_2 -ideal mediante tres operaciones: multiplicación por elementos del álgebra libre tanto por la izquierda como por la derecha, combinaciones lineales y, fundamentalmente, la aplicación de endomorfismos graduados. De esta manera, es posible reconocer si un polinomio pertenece a $\langle S \rangle_{T_2}$ construyéndolo a partir de los elementos de S usando estas operaciones, sin necesidad de recurrir directamente a la Definición 4.1.8.

4.2 Identidades graduadas en $UT_2(\mathbb{F})$

En esta sección estudiaremos las identidades polinomiales $\mathbb{Z}_2$ -graduadas de $UT_2(\mathbb{F})$ con su $\mathbb{Z}_2$ -graduación canónica dada en el Ejemplo 3.1.3. Sabemos de los Ejemplos 3.1.14 y 3.1.15 que los polinomios $f_1(z_1, z_2) = z_1 z_2$ y $f_2(y_1, y_2) = [y_1, y_2]$ son identidades polinomiales $\mathbb{Z}_2$ -graduadas

para $UT_2(\mathbb{F})$ y probaremos que estos generan el T_2 -ideal de identidades graduadas de $UT_2(\mathbb{F})$. Es decir,

$$\text{Id}^{\text{gr}}(UT_2(\mathbb{F})) = \langle f_1(z_1, z_2), f_2(y_1, y_2) \rangle_{T_2}$$

Lema 4.2.1. *Para toda variable $x = y + z$, se tiene que el polinomio $g(z_1, x, z_2) = z_1 x z_2 \in \langle f_1(z_1, z_2), f_2(y_1, y_2) \rangle_{T_2}$.*

Demostración. Consideremos la $\mathbb{Z}_2$ -álgebra libre $\mathbb{F}\langle X \rangle^{\text{gr}}$ dada por la ecuación 4.1; es decir

$$\mathbb{F}\langle X \rangle^{\text{gr}} = \mathbb{F}\langle X \rangle^{(0)} \bigoplus \mathbb{F}\langle X \rangle^{(1)}.$$

Y sea $x = y + z$ donde $y \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{(0)}$ y $z \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{(1)}$, entonces

$$\begin{aligned} g(z_1, x, z_2) &= z_1 x z_2 \\ &= z_1 (y + z) z_2 \\ &= z_1 y z_2 + z_1 z z_2. \end{aligned}$$

Como $f_1(z_1, z_2) \in \langle f_1(z_1, z_2), f_2(y_1, y_2) \rangle_{T_2}$ y $z_1 y \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{(1)}$, pues su grado homogéneo es $1 + 0 = 1$, entonces de la Proposición 4.1.9, considerando la sustitución $z_1 \rightarrow z_1 y$ en f_1 tenemos,

$$f_1(z_1, z_2) = f_1(z_1 y, z_2) = (z_1 y) z_2 \in \langle f_1(z_1, z_2), f_2(y_1, y_2) \rangle_{T_2},$$

y considerando la sustitución $z_2 \rightarrow z$ en f_1 tenemos,

$$f_1(z_1, z) z_2 = z_1 z z_2 \in \langle f_1(z_1, z_2), f_2(y_1, y_2) \rangle_{T_2},$$

de ahí que

$$g(z_1, x, z_2) = f_1(z_1 y, z_2) + (f_1(z_1, z)) z_2 \in \langle f_1(z_1, z_2), f_2(y_1, y_2) \rangle_{T_2}.$$

□

Ejemplo 4.2.2. *Por el Lema 4.2.1 tenemos que el polinomio $g(z_1, x, z_2) = z_1 x z_2 \in I = \langle f_1(z_1, z_2), f_2(y_1, y_2) \rangle_{T_2}$, y por la Proposición 2.2.5, tenemos que*

$$z_1 x z_2 \equiv 0 \pmod{(I)},$$

así, cualquier polinomio multilineal que contenga al menos dos de las variables de grado homogéneo 1, en este caso, las variables $z_1, z_2 \in Z$ pertenece a I . Por ejemplo, el polinomio

$z_1 y_1 z_3 y_2 z_2 + y_1 z_2 y_2 y_3 z_1$ pertenece a I , pues puede escribirse de la forma $(z_1(y_1 z_3))(y_2 z_2) \in I$ y $(y_1 z_2)(y_2 y_3 z_1) \in I$, luego, se sigue que el polinomio $z_1 y_1 z_3 y_2 z_2 + y_1 z_2 y_2 y_3 z_1 \in I$.

Ejemplo 4.2.3. Sea $I = \langle f_1(z_1, z_2), f_2(y_1, y_2) \rangle_{T_2}$ y sea $f \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ tal que

$$f(z, y_1, y_2, y_3, y_4) = \sum_{\sigma \in S_4} y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z y_{\sigma(3)} y_{\sigma(4)},$$

es decir, es un polinomio que permuta en los subíndices de las variables y_i . Dado que $f_2(y_i, y_j) = y_i y_j - y_j y_i \in I$, tenemos que $y_i y_j \equiv y_j y_i \pmod{I}$ en el álgebra cociente $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}/I$ para todo $i, j = 1, 2, 3, 4$. De ahí, algunos elementos de f en $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}/I$ que conmutan en las variables y_i son iguales, como por ejemplo los monomios

$$y_1 y_2 z y_3 y_4 \equiv y_1 y_2 z y_4 y_3 \equiv y_2 y_1 z y_3 y_4 \equiv y_2 y_1 z y_4 y_3,$$

así, podemos reescribir a f de la forma

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, z, y_3, y_4) &\equiv (4y_1 y_2 z y_3 y_4 + 4y_1 y_3 z y_2 y_4 + 4y_1 y_4 z y_2 y_3 \\ &\quad + 4y_2 y_3 z y_1 y_4 + 4y_2 y_4 z y_1 y_3 + 4y_3 y_4 z y_1 y_2) \pmod{I}. \end{aligned}$$

donde $4 \in \mathbb{F}$ es la multiplicidad de cada monomio. Evaluando en $y_1 = y_2 = E_{11}$, $y_3 = y_4 = E_{22}$ y $z = E_{12}$ obtenemos que $f(E_{11}, E_{11}, E_{12}, E_{22}, E_{22}) = 4E_{12}$, pues todo monomio que tenga al menos una de las variables y_3 o y_4 a la izquierda de z hará que el monomio se anule. Análogamente si tiene alguna de las variables y_1 o y_2 a la derecha de z .

Teorema 4.2.4. Las identidades polinomiales graduadas $f_1(z_1, z_2) = z_1 z_2$ y $f_2(y_1, y_2) = [y_1, y_2]$ generan a $\text{Id}^{gr}(UT_2(\mathbb{F}))$ como T_2 -ideal. Es decir

$$\langle f_1(z_1, z_2), f_2(y_1, y_2) \rangle_{T_2} = \text{Id}^{gr}(UT_2(\mathbb{F}))$$

Demostración. Sea $I = \langle f_1(z_1, z_2), f_2(y_1, y_2) \rangle_{T_2}$. Probemos que $I = \text{Id}^{gr}(UT_2(\mathbb{F}))$. Sea $f \in I$, entonces, por la Proposición 4.1.9 podemos escribir a f de la forma

$$f = p_1 f_1(h_1, h_2) q_1 + p_2 f_2(g_1, g_2) q_2,$$

donde $p_i, q_i \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$, con $i = 1, 2$ y $h_1, h_2 \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{(1)}$, $g_1, g_2 \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{(0)}$. Como $f_1, f_2 \in \text{Id}^{gr}(UT_2(\mathbb{F}))$, entonces $f_1(h_1, h_2) \equiv 0$ y $f_2(g_1, g_2) \equiv 0$, por lo tanto $f \equiv 0$. De ahí que $I \subseteq \text{Id}^{gr}(UT_2(\mathbb{F}))$.

Para la contenencia recíproca, sea $f = f(y_1, \dots, y_t, z_1, \dots, z_t) \in \text{Id}^{gr}(UT_2(\mathbb{F}))$, como la $\text{Char}(\mathbb{F}) = 0$, entonces por el Teorema 3.2.11 podemos suponer que f es multilineal. Luego, del

Ejemplo 4.2.2 tenemos que los monomios en f que tienen dos o más variables de grado homogéneo 1 son congruentes con cero módulo I , y los monomios con a lo más una variable de grado homogéneo 1 no están en I . Por lo tanto, podemos expresar a f en la forma

$$f \equiv g_1(y_1, \dots, y_p) + g_2(z, y_1, \dots, y_p) \pmod{I},$$

donde g_1 solo involucra variables de grado homogéneo 0 y g_2 contiene exactamente una variable de grado homogéneo 1, y además. g_1 y g_2 no son congruentes con cero módulo I a la vez. Luego, dado que $f \in \text{Id}^{\text{gr}}(UT_2(\mathbb{F}))$, queremos probar que $f \equiv 0 \pmod{I}$, dado que $f \equiv g_1 + g_2 \pmod{I}$ entonces $g_1 + g_2 - f \equiv 0 \pmod{I}$, es decir, $g_1 + g_2 - f \in \text{Id}^{\text{gr}}(UT_2(\mathbb{F}))$, por hipótesis $f \in \text{Id}^{\text{gr}}(UT_2(\mathbb{F}))$ lo que implica que $g_1 + g_2 \in \text{Id}^{\text{gr}}(UT_2(\mathbb{F}))$. Luego, por el Teorema 3.2.9, basta ver que

$$g_1 \equiv 0 \pmod{I} \quad \text{y} \quad g_2 \equiv 0 \pmod{I}.$$

Dado que $f_2(y_1, y_2) = y_1y_2 - y_2y_1 \in I$ tenemos que $y_1y_2 - y_2y_1 \equiv 0 \pmod{I}$, es decir, $y_1y_2 \equiv y_2y_1 \pmod{I}$, luego considerando

$$g_1(y_1, \dots, y_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \lambda_{\sigma} y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} \cdots y_{\sigma(p)},$$

donde $\lambda_{\sigma} \in \mathbb{F}$ para todo $\sigma \in S_p$, así se tiene que en el álgebra cociente $\mathbb{F}\langle X \rangle^{\text{gr}}/I$ se cumple que $y_i y_j \equiv y_j y_i \pmod{I}$ para toda $i, j = 1, \dots, p$, es decir, en módulo I las variables homogéneas de grado 0 conmutan entre sí permitiendo ordenar a todos los monomios de g_1 de la forma $y_1 \cdots y_p$, es decir,

$$g_1(y_1, \dots, y_p) = \left(\sum_{\sigma \in S_p} \lambda_{\sigma} \right) y_1 \cdots y_p,$$

donde $\sum_{\sigma \in S_p} \lambda_{\sigma} = \alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{F}$, obteniendo que

$$g_1(y_1, \dots, y_p) \equiv \alpha y_1 \cdots y_p \pmod{I}.$$

Queremos ver que $\alpha = 0$. Para ello, note que al realizar la evaluación $y_1 = \cdots = y_p = E_{11}$ se obtiene que

$$g_1(E_{11}, \dots, E_{11}) = \alpha E_{11},$$

y dado que $g_1 \in \text{Id}^{\text{gr}}(UT_2(\mathbb{F}))$ se tiene que $g_1(E_{11}, \dots, E_{11}) = 0$, es decir, $\alpha E_{11} = 0$, y dado que $E_{11} \neq 0$, entonces $\alpha = 0$, y por consiguiente,

$$g_1 \equiv 0 \pmod{I}.$$

Por otra parte, sea

$$g_2(z, y_1, \dots, y_p) = \sum \lambda_i y_{i_1} \cdots y_{i_k} z y_{i_{k+1}} \cdots y_{i_p},$$

un polinomio multilinear que contiene exactamente una variable homogénea de grado 1. Fijemos un monomio no nulo de g_2 . Sin pérdida de generalidad, supongamos que dicho monomio es de la forma

$$\beta y_1 \cdots y_n z y_{n+1} \cdots y_p,$$

donde $\beta \in \mathbb{F}$, es decir, con $\beta \neq 0$. Ahora, consideremos la evaluación $y_1 = \cdots = y_n = E_{11}$, $z = E_{12}$ y $y_{n+1} = \cdots = y_p = E_{22}$, donde se obtiene que

$$g_2(E_{12}, \underbrace{E_{11}, \dots, E_{11}}_{n \text{ veces}}, \underbrace{E_{22}, \dots, E_{22}}_{p-n \text{ veces}}) = \beta E_{12}.$$

Luego, observemos que todos los demás monomios se anulan, para ello, consideremos cualquier otro monomio de g_2 . Como es distinto del seleccionado, necesariamente existe al menos una variable ubicada en un lado diferente de la variable z , es decir, se tiene que alguna matriz de la forma E_{22} aparecerá a la izquierda de E_{12} o alguna matriz de la forma E_{11} aparecerá a la derecha de E_{12} y por consiguiente el monomio se anulará.

Luego, dado que $g_2 \in \text{Id}^{\text{gr}}(UT_2(\mathbb{F}))$ se tiene que $g_2(z, y_1, \dots, y_p) = 0$, es decir, $\beta E_{12} = 0$ y dado que $E_{12} \neq 0$, entonces $\beta = 0$, y por consiguiente, se llega a una contradicción, pues el monomio elegido era no nulo, de ahí se sigue que

$$g_2 \equiv 0 \pmod{(I)}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$f \equiv g_1 + g_2 \equiv 0 \pmod{(I)},$$

lo que implica que $f \in I$ y por consiguiente $\text{Id}^{\text{gr}}(UT_2(\mathbb{F})) \subseteq I$, quedando demostrado que

$$\text{Id}^{\text{gr}}(UT_2(\mathbb{F})) = \langle z_1 z_2, [y_1, y_2] \rangle_{T_2}.$$

□

Bibliografía

- [1] V. DRENSKY, *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*, Springer (2000).
- [2] A. VALENTI, *The graded identities of upper triangular matrices of size two*, Journal of Pure and Applied Algebra **172** (2002), 325–335.
- [3] S. VÉLEZ, *Graduaciones elementales sobre el álgebra de Lie de matrices triangulares superiores*, Universidad tecnológica del Pereira (2023). Trabajo de grado de Maestría.
- [4] A. VALENTI & M. ZAIVEC, *Abelian gradings on upper-triangular matrices*, Archiv Der Mathematik **80** (2003), 12–17.
- [5] A. VALENTI & M. ZAIVEC, *Group gradings on upper triangular matrices*, Archiv Der Mathematik **89** (2007), 33–40.
- [6] V. DRENSKY & E. FORMANEK, *Polynomial identity rings*, Birkhäuser (2004).
- [7] A. S. AMITSUR & J. LEVITZKI, *Minimal identities for algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society (aug 1950), 449–463.
- [8] A. GIAMBRUNO & M. ZAICEV, *Polynomial identities and asymptotic methods*, American Mathematical Society (2005).
- [9] F. MARTINO, *Polynomial identities of the Jordan algebra $UJ_2(F)$* , Università degli Studi di Palermo (2012).
- [10] Y. A. BAHTURIN & M. ZAIVEC, *Graded algebras and graded identities*, LECTURE NOTES IN PURE AND APPLIED MATHEMATICS (2003), 101–140.
- [11] C. PALACIOS, *Análisis del cálculo de cocaracteres para el álgebra de matrices triangulares superiores de tamaño dos*, Universidad tecnológica del Pereira (2023). Trabajo de grado de Maestría.
- [12] O. DI VICENZO, P. KOSHLUKOV & A. VALENTI, *Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities*, Journal of Algebra **275(2)** (2004), 550–566.
- [13] R. URERE & T. GOUVEIA, *Superidentities for the algebras ut_2 and ut_3 on a finite field*, arXiv preprint arXiv:2105.03359 (2021).