Una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación que reflexiona sobre el significado de la función

Andrea Carolina Quintero Baños

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación Matemática

Directora:
Dra. Sandra Evely Parada Rico
Doctora en Ciencias de la Especialidad Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga
2020

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a Dios por permitirme llegar hasta este punto de mi vida.

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional. A mi mamá Nancy por sus palabras de motivación día a día; a mi papá German por su amor y cariño; a mis hermanas queridas, Lala y Pao, por ser mi soporte para cada minuto de esta fase; a mi abuelita Ceci por hacer parte de cada etapa de mi vida; a Normitan por darme felicidad cada día.

A la profesora Sandra Evely Parada Rico, mi directora de tesis, por su orientación y amistad durante este proceso. Agradezco infinitamente por sus conocimientos transmitidos durante estos años, por la confianza y su disposición de ayuda en todo momento.

Agradezco al profesor Pablo Flores quien con su experiencia y disposición contribuyó un granito de arena a este proceso durante mi estancia en la universidad de Granada.

A los profesores Jorge Enrique Fiallo y Carmen Olvera, mis evaluadores, por sus aportes realizados durante todo este trabajo de investigación.

A mis amigos, especialmente a Ingrid y Jackson, que siempre estuvieron acompañándome en los buenos momentos y también en las dificultades enfrentadas.

Al curso didáctica del cálculo del segundo semestre del 2018, quienes contribuyeron con sus conocimientos a este proyecto.

A la Universidad Industrial de Santander, especialmente a la escuela de matemáticas, el grupo de investigación EDUMAT y el departamento de relaciones exteriores, por su apoyo brindado para la asistencia a eventos académicos que permitieron que todo este proceso fuera más rico en conocimientos.

Gracias a todos!

Tabla de contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Apéndice

RESUMEN

TÍTULO: UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN QUE REFLEXIONA SOBRE EL SIGNIFICADO DE LA FUNCIÓN*

AUTOR: ANDREA CAROLINA QUINTERO BAÑOS**

PALABRAS CLAVES: COMUNIDAD DE PRÁCTICA, FUNCIÓN, SIGNIFICADOS NEGOCIADOS

DESCRIPCIÓN:

En este documento se presentan resultados de una investigación de corte cualitativo en la línea de formación inicial de profesores, la cual tuvo como objetivo caracterizar el pensamiento reflexivo de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación que negocia significados de la función.

Para lograr el objetivo, se retomaron elementos del Modelo teórico y metodológico de Parada (2011) denominado Modelo de Reflexión-y-Acción en comunidades de práctica de educadores matemáticos, que permitieron sustentar teórica y metodológicamente los procesos de reflexión y negociación de los profesores en formación. Dicho modelo permitió diseñar una secuencia de talleres enmarcados en temáticas del cálculo diferencial, promoviendo negociaciones en torno a los significados de la función y su enseñanza. También, permitió caracterizar los significados negociados por la comunidad de práctica, tomando evidencias de tres integrantes, en las tres componentes del pensamiento reflexivo: Pensamiento matemático (estudio de la función), Pensamiento didáctico (enseñanza y aprendizaje de la función) y Pensamiento Orquestal (uso de diferentes recursos).

En esta investigación se logró identificar cambios en las concepciones de los profesores en formación con respecto a los significados de la función y su enseñanza, así como las diferentes estrategias y recursos que implementarían para la resolución de problemas en el aula de clase.

* Trabajo de Grado
** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Sandra Evely Parada Rico

ABSTRACT

TITLE: A MATHEMATICS PRE-SERVICE TEACHERS' COMMUNITY OF PRACTICE THAT REFLECTS ABOUT THE MEANING OF THE FUNCTION *

AUTHOR: ANDREA CAROLINA QUINTERO BAÑOS**

KEY WORDS: COMMUNITY OF PRACTICE, FUNCTION, NEGOTIATED MEANINGS.

DESCRIPTION:

This document presents the results of a qualitative research on teachers' development which purpose was to typify the educators' reflective thinking processes in mathematics, taking part of a community of practice, negotiating the meaning of functions.

In order to achieve this objective, many elements from the methodological model of Reflection and Action (Parada, 2011) were taken to prove, theoretically and methodologically math pre-service teachers' reflective thinking processes and meaning negotiation. This Model allowed the design of a sequence of workshops embedded in differential calculus, promoting negotiations around the meaning of function and its teaching. Also, it allowed the characterization of negotiated meanings by the community of practice, taking evidence from three participants on the three components of the reflective thinking: Mathematics thinking (study of function), didactic thinking (teaching and learning of the function) and orchestral thinking (use of different resources).

This research achieved the identification of changes in pre-service teachers' conceptions about the meanings of the function and their teaching, as well as the different strategies and resources implemented in order to solve math problems.

---

* Degree work

* * Faculty of Sciences. School of Mathematics PhD. Sandra Evely Parada Rico.

Introducción

La línea de formación de profesores en las últimas décadas ha tenido gran acogida por parte de los investigadores en educación matemática. Una de las mayores preocupaciones que llevan a esto, son las dificultades que ya han sido reportadas alrededor de la comprensión y enseñanza de diferentes conceptos matemáticos por parte de los profesores. Diferentes investigadores reportan que dichas dificultades se pueden asociar a la falta de experiencias prácticas que permiten al profesor en formación acercarse a la práctica real. Al respecto, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia en el 2014 expone que la práctica en la formación de profesores debe considerarse como un proceso de autorreflexión.

Desde la Universidad Industrial de Santander, en el plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas, se han venido incorporando prácticas iniciales para los futuros profesores de matemáticas. Por ejemplo, Botello (2013) posibilitó un espacio de tutorías entre pares en una asignatura correspondiente al quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas, didáctica del cálculo.

Dicho espacio de tutorías es retomado para la presente investigación y adicional a ello, se incorporan dinámicas de las comunidades de práctica posibilitando espacios de reflexión en dicho curso. Con esta investigación se buscaba caracterizar el pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas en formación constituidos como una comunidad de práctica (CoP), cuando negociaban significados de la función. Para ello, se usó el Modelo de Reflexión-y-Acción (R-y-A) de Parada (2011) con el que se analizó el pensamiento matemático, didáctico y orquestal de los profesores en formación.

Para lograr el objetivo se tomaron evidencias de tres integrantes de la CoP de quienes se tenían datos completos de las actividades trabajadas dentro de la comunidad y quienes siempre estuvieron en el núcleo de participación (en términos de Wenger (1998)). Al final del documento se presenta el reporte de significados negociados rescatando diferentes evidencias de los casos seleccionados.

Este documento se constituye como el reporte final de la investigación y consta de cinco capítulos que están distribuidos de la siguiente manera:

En el **Capítulo 1** se expone la problemática de la investigación aludiendo a algunos trabajos de investigación ya reportados asociados a la formación de profesores, las comunidades de práctica y la comprensión del concepto de función. En este también se expone de forma explícita la pregunta y objetivo de investigación.

Los aspectos que dan sustento teórico a la investigación se presentan en el **Capítulo 2**. Particularmente, se describe la interpretación que se realiza del modelo R-y-A que permitió sustentar teórica y metodológicamente los procesos de reflexión y negociación de los profesores en formación. Los componentes del pensamiento reflexivo propuestos en el modelo (Pensamiento Matemático (estudio de la función), Pensamiento Didáctico (enseñanza y aprendizaje de la función) y Pensamiento Orquestal (uso de diferentes recursos)), fueron tenidos en cuenta para el diseño e implementación de los talleres, así como categorías de análisis para realizar el reporte de significados negociados.

En el **Capítulo 3** se presenta la metodología empleada en la investigación en la cual se describen las tres fases que constituyeron todo el proceso. Inicialmente, bajo la teoría de Wenger (1998), se realiza la caracterización del grupo didáctica del cálculo como una comunidad de práctica. Posteriormente se describe el proceso de diseño y desarrollo de las estrategias de reflexión y negociación para trabajar con la Comunidad de Práctica; y, por último, se describe de qué forma se reportarán los resultados de la investigación.

En el **Capítulo 4** se describe el análisis previo y el proceso de negociación de los talleres de reflexión y negociación. Para ello, se presentan evidencias de tres casos representativos de la CoP. El capítulo finaliza con la descripción de los significados negociados en términos de los tres componentes del pensamiento reflexivo, Pensamiento Matemático, Pensamiento Didáctico y Pensamiento Orquestal.

Las conclusiones de la investigación se presentan en el **Capítulo 5,** el cual se constituye de tres categorías correspondientes a las tres componentes del pensamiento reflexivo. En cada una de las categorías se presentan los significados negociados por la comunidad de práctica desde las evidencias de las tres profesoras en formación.

1. Problemática, contexto y antecedentes de la investigación

Para dar a conocer el objeto de estudio de nuestra investigación, el presente capítulo está compuesto por los siguientes dos apartados: En el primero se describe el contexto y problemática de la investigación; y en el segundo se realiza una descripción de algunos antecedentes relacionados a los tres aspectos que intervienen en la investigación: formación de profesores, comunidades de práctica y comprensión del concepto de función.

1.1 Contexto de estudio y problemática

Algunos autores como Hitt (1996; 1998), Olvera-Martínez (2015), Carlson y Oehrtman (2005) y Amaya, Pino-Fan y Medina (2016) mencionan dificultades que tanto estudiantes como profesores muestran en la comprensión del concepto de función. En particular, es de gran preocupación las dificultades que los docentes puedan presentar alrededor de un concepto, ya que estos son quienes tienen la tarea de enseñar. Shulman (1987) ratifica que un profesor que hace parte de una unidad educativa debe comprender bien la estructura y la organización conceptual de la materia a enseñar.

En el desempeño del profesor, se deben afrontar constantemente situaciones donde no se tiene una respuesta inmediata, y es aquí cuando pueden salir a flote las diferentes dificultades que los docentes tienen alrededor de un concepto. Por ello, es de gran importancia incentivar a los docentes a realizar constantemente una tarea reflexiva sobre su quehacer, y que dicha reflexión sea vista como un proceso de aprendizaje, en el que se identifiquen dificultades y fortalezas, para así plantear alternativas de mejoramiento y superación.

En los principios y estándares del NCTM (2000) se menciona que la eficacia docente requiere de reflexión y esfuerzos continuos para conseguir mejorarla, es decir, el docente al realizar una reflexión sobre sí mismo, lo hace consciente de aquellas cosas que debe mejorar, aunque algunas veces necesite de otro punto de vista para dar cuenta de ello. Al respecto, Flores (1998) recalca la importancia de la reflexión como una herramienta en la formación y desarrollo profesional de los profesores, ya que esta permite que los profesores mediten e indaguen sobre las dificultades que se pueden presentar en su práctica.

La universidad industrial de Santander (UIS) cuenta con una Licenciatura en Matemáticas, la cual tiene tres ejes de formación, matemático, didáctico y pedagógico. El eje matemático, es el encargado de brindar una formación sólida sobre los objetos matemáticos, y es en el componente didáctico donde los estudiantes se confrontan con sus saberes, esto se da en el momento en que reflexionan epistemológica y didácticamente sobre los diferentes objetos matemáticos, precisamente cuando necesitan hacer diseños didácticos para la enseñanza.

Una de las materias que ofrece este componente didáctico es Didáctica del cálculo, la cual está orientada específicamente a reflexionar sobre los objetos matemáticos estudiados en Cálculo, entre ellos el concepto de función. Los estudiantes que matriculan esta asignatura han cursado y aprobado materias como cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo multivariable y ecuaciones diferenciales, cursos que ofrecen al estudiante aspectos teóricos del cálculo. Este curso ofrece una balanza equilibrada de aspectos epistemológicos y aspectos didácticos del cálculo, por lo tanto, su objetivo es ofrecer desde la teoría y la práctica fundamentos para el diseño de metodologías adecuadas para el aprendizaje del cálculo (Escuela de Matemáticas, 2010).

En este contexto se identificaron dos oportunidades de investigación y acción para la mejora de un programa de formación de profesores, oportunidades como: i) la constitución de comunidades de práctica para la formación de profesores, y, ii) el fortalecimiento tanto conceptual como didáctico de la noción de función.

Así, resulta de nuestro interés responder a la pregunta de investigación: ¿Qué significados sobre el concepto de función y su enseñanza, negocia una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación?, y para dar respuesta a dicha pregunta, nos planteamos como objetivo: caracterizar el pensamiento reflexivo de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación que negocia significados de la función.

Para la realización de esta investigación se realizó una revisión bibliográfica que nos ha permitido identificar una problemática de estudio y algunas formas de abordarla. En el siguiente apartado se presenta una síntesis de dicha revisión.

1.2 Algunos antecedentes

El presente apartado pretende dar cuenta de la revisión bibliográfica realizada, para la cual se analizaron algunos artículos, tesis y libros publicados a nivel nacional e internacional asociados con la problemática de estudio descrita en el apartado anterior. A continuación, se describen algunos trabajos que guardan relación con los aspectos de la presente investigación, como lo son: formación de profesores, comunidades de práctica y comprensión del concepto de función.

1.2.1 Algunos trabajos asociados a la Formación de profesores. En este apartado, se inició reconociendo que el volumen de investigaciones en la línea de formación de profesores ha aumentado considerablemente en los últimos años. Sin embargo, para esta investigación sólo se citan algunos seleccionados por estar relacionados con la problemática que aquí planteamos.

Inicialmente, se quiere rescatar el trabajo de Flores (1998) quien menciona que en la formación de profesores es importante que los estudiantes para profesor tengan acercamientos a la actividad docente ya que por medio de esta se pueden aproximar a las dificultades del quehacer profesional. Para ello, el autor propone un currículo de formación de profesores de matemática, en el que se lleva a cabo un proceso sistemático de reflexión sobre dos tipos de tareas profesionales: (i) las cuestiones surgidas durante las prácticas; y, (ii) el diseño e implementación de un módulo de dicho curso. Además, resalta que la implementación de este currículo ayuda a los futuros profesores de matemáticas a desarrollar otros hábitos profesionales de los que no son conscientes, tales como técnicas de comunicación, selección de actividades, empleo de materiales curriculares y técnicas de gestión de la puesta en común.

Así mismo, Llinares (2012) menciona que uno de los objetivos de los programas de formación de profesores de matemáticas es “potenciar el desarrollo de la competencia docente denominada “mirar con sentido” los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” (p, 54). Además, el autor menciona que diseñar entornos para desarrollar esta competencia en los futuros profesores es un desafío para los formadores. El autor, en el artículo citado, presenta algunos entornos de aprendizaje para favorecer dicha competencia (la de “mirar con sentido”), uno de esos entornos es un espacio de interacción social, donde se permita la colaboración e interacción discursiva entre los profesores en formación, y que, para potenciar estas interacciones, los profesores deben tener un foco de interés compartido.

Por otra parte, en Colombia, Botello (2013) concibe los cursos de profesores en formación como un espacio de reflexión y aprendizaje para la vida profesional. En su tesis de maestría, la autora plantea otro escenario de formación (en términos de Llinares), el cual consiste en que los profesores en formación posibiliten tutorías académicas a estudiantes de primer nivel de Cálculo Diferencial. A través de este escenario, se pretendía confrontar al profesor en formación (tutor) con sus dominios conceptuales y didácticos, y que a través del ejercicio de tutoría ellos lograran fortalecer algunos conceptos matemáticos que no habían quedado bien construidos, y además identificaron otras formas de enseñar cálculo.

A partir de las investigaciones anteriormente mencionadas, se toman algunas ideas para la estructura del curso de didáctica del cálculo, el cual será el escenario de esta investigación. Esa estructura del curso se constituirá en uno de los resultados de la investigación que aquí se reporta.

1.2.2 Algunos trabajos asociados a las Comunidades de práctica (CoP). Como se mencionó anteriormente, el escenario de nuestra investigación es el curso de didáctica del cálculo, el cual siguió las dinámicas de una comunidad de práctica, en ese sentido, se revisó literatura en la cual las comunidades de práctica se han usado como escenarios para la formación de profesores.

Inicialmente, se rescatan los trabajos realizados en Brasil de los investigadores Cyrino (2013) y Acevedo-Rincón (2018), quienes utilizan de base la propuesta de Wenger (1998), en la que destaca la importancia del proceso de negociación de significados para el aprendizaje.

Cyrino (2013) destaca que la construcción de grupos de estudio con profesores de matemáticas, futuros profesores e investigadores y que estos se construyan en CoP, permite consolidar aprendizajes a través de trayectorias individuales y sociales que favorecen esos aprendizajes, en particular, repertorios compartidos, oportunidades de discutir sus producciones escritas, relatos y discusiones de encuentros anteriores.

Acevedo-Rincón (2018) resalta la importancia de la Teoría social de Aprendizaje como enfoque teórico para comprender las experiencias de aprendizaje y formación profesional de los estudiantes en etapa de práctica docente. Las relaciones e interacciones entre las personas y sus prácticas producen aprendizajes, los cuales, a pesar de ser comunes a todos los participantes, desencadenan intereses y experiencias diversas y no homogéneas pues envuelven sujetos con historias sociales y culturales diferentes, es decir, las interpretaciones y negociaciones de significados de las experiencias serán personales. La autora construye cuatro escenarios de formación en los que futuros profesores de matemáticas negocian los significados de escuela, aprender matemáticas y escuela pública, y los que finalmente desencadenan experiencias en ellos acercándolos a la realidad de la matemática escolar, en cuanto son parte de las prácticas docentes. Este trabajo, constituye una base para la lectura de las dinámicas que se viven al interior de una CoP en distintos escenarios de formación.

Al igual que estos autores, Parada (2009, 2011) utiliza como base la teoría social de Wenger (1998) como estructura de formación, en este caso de profesores de matemáticas. No obstante, centra las dinámicas de participación y cosificación en los procesos de reflexión; procesos que requieren guía y orientación con el fin de centrar la atención del maestro en aspectos puntuales de su acción pedagógica. Así, la autora propone un modelo teórico (el cual ha denominado de Reflexión-y-Acción (R-y-A)) para promover dichos procesos de reflexión en Comunidades de Práctica de educadores matemáticos, como alternativa a su desarrollo profesional. La autora afirma que la negociación de significados que se posibilita con la participación, cosificación y puesta en común de experiencias al interior de una CoP, promueve la capacidad de sus miembros para reflexionar críticamente sobre sus prácticas profesionales. Dado que para el diseño y desarrollo de la investigación que aquí se plantea se usara dicho modelo, la explicación amplia de él la presentamos en el capítulo 2.

Moreno (2015), mediante el uso del modelo R-y-A, desarrolló una investigación cuyo objetivo fue caracterizar los significados negociados en una comunidad de práctica de educadores matemáticos que participaron en un curso de precálculo, para estudiantes de nuevo ingreso a la universidad. En ésta, el autor presenta evidencia de que a través de la comunidad de práctica se pudieron lograr tres cosas en particular: i) significar los contenidos matemáticos, en este caso la derivada, ii) fortalecer los aspectos didácticos sobre el cálculo diferencial y, iii) dar valor al uso de las tecnologías, en particular GeoGebra.

1.2.3 Algunos trabajos asociados a la comprensión del concepto de función. Por otra parte, como se mencionó en la problemática, el concepto de función ha dado lugar a un gran número de investigaciones. Entre estas, se encuentran las que dan cuenta de concepciones y dificultades que tanto estudiantes, como profesores en formación y profesores en ejercicio, presentan en la comprensión de dicho concepto. A continuación, se presenta una breve síntesis de lo encontrado en las investigaciones revisadas.

Autores como Dubinsky y Harel (1992), Hitt (2003) y Burgos y Flores (2017) realizaron estudios donde reportaron algunas dificultades que los estudiantes presentan alrededor del concepto de función.

El estudio realizado por Dubinsky y Harel (1992), consistió en proporcionar un cuestionario a cada estudiante donde se presentaban diferentes situaciones representadas de diversas maneras, los estudiantes debían analizar si cada situación correspondía a la representación de una función. En los resultados encontrados, se identificaron algunas ideas erróneas sobre la definición de función, algunas de estas son: i) la necesidad de realizar operaciones para decidir si una representación es o no una función; ii) pensar que el dominio y rango de una función, deben ser conjuntos de números, y; iii) considerar que siempre la gráfica de una función no debe tener saltos, es decir, siempre es continua.

Adicionalmente a estas dificultades mencionadas, Hitt (2003) y Burgos y Flores (2017) coinciden en que otra de las dificultades que presentan los estudiantes, es que se limitan a trabajar con la expresión algebraica de la función, y se les dificulta relacionarla con su representación gráfica.

También se encontraron investigaciones que reportan dificultades en la comprensión del concepto de función por parte de profesores de matemáticas en formación.

Huang y Kulm (2012), muestran que una de las dificultades gira en torno a las diferentes formas de representación que tiene una función. Por ejemplo, al pedirles a los profesores en formación que relacionaran las diferentes representaciones algebraicas de las transformaciones de una función, con sus representaciones gráficas, estos presentaron dificultad en lograr conexiones entre ellas. Even (1993), señala que otra dificultad que presentan profesores en formación, es que cuando se les presenta una gráfica en el plano cartesiano, asumen que el eje x es el dominio, y el eje y es el rango de la función.

Por otra parte, se reportan investigaciones como las de Hitt (2003), Steele y Hillen (2012) y Amaya, Pino-Fan y Medina (2016), que dejan ver que al igual que estudiantes y profesores en formación, los profesores en ejercicio también presentan dificultades en la comprensión del concepto de función. Algunas de estas dificultades son: no tener claridad de la diferencia entre ecuación y función (Hitt, 2003); al momento de definir una función, no tienen en cuenta la unicidad, es decir no tienen en cuenta que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del rango (Steele y Hillen, 2012); dificultad para identificar y relacionar los elementos de una función en uno o varios registros (Amaya, Pino-Fan y Medina, 2016);

Las anteriores investigaciones, dan cuenta de la necesidad de buscar mejoras para la comprensión del concepto de función. Al respecto, investigadores como Kastberg y Leathanm (2005), Cuevas y Pluvinage (2009), Cullen, Hertel y John (2013), y Olvera-Martínez (2015), entre otros, han mostrado que cuando se involucra la resolución de problemas y el uso mediado de tecnologías, se llega a una mejor comprensión de dicho concepto.

Olvera-Martínez (2015), desarrolló una investigación en la que presenta el análisis y documentación de diferentes formas de razonamiento que desarrollan profesores de matemáticas de bachillerato, cuando abordan y resuelven actividades relacionadas con el estudio de funciones.

La autora encuentra que el trabajar la resolución de problemas bajo el uso de tecnologías, permite a los profesores realizar modelos de las situaciones planteadas, además, ayuda a darle significado a los objetos matemáticos estudiados. Otro resultado obtenido, fue que los profesores pasaron de tener un razonamiento empírico a tener un razonamiento formal, esto dado al uso de tecnologías que favoreció el planteamiento de conjeturas con argumentos visuales, y que posteriormente pudieron integrar dichos argumentos con sus argumentos algebraicos y geométricos para justificar las conjeturas.

La investigación que aquí se plantea se une a la línea antes mencionada, en la cual se pretenden aportar elementos que favorezcan la comprensión del concepto de función con el uso de resolución de problemas y tecnologías digitales (entre otros recursos), esto, en el marco de una comunidad de práctica que reflexiona sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo.

2. Aspectos teóricos y conceptuales

Para el desarrollo de la investigación se usó principalmente una interpretación del modelo Teórico-metodológico de Reflexión y Acción (R-y-A) de Parada (2011), en el cual se propone trabajar al interior de Comunidades de Práctica (CoP) de educadores matemáticos. Dado que dicho modelo se enmarca en la teoría social de las CoP, es importante describir aquí algunos de los elementos de dicha teoría.

2.1 Comunidades de Práctica (CoP)

Para Wenger (1998), una CoP es un grupo de personas que tienen algunas cosas en común, por ejemplo, comparten una preocupación, un conjunto de problemas o presentan interés por algún tema, y que sobre lo que tienen en común, trabajan colaborativamente para construir el conocimiento que favorecerá a cada uno de los miembros de la comunidad.

Este mismo autor fija tres características que toda comunidad de práctica debería tener:

1. Compromiso mutuo: Esta característica encamina al objetivo que se tiene dentro de la CoP. El compromiso entre los participantes posibilita una relación entre ellos, permitiendo la diversidad de pensamiento, es decir, el compromiso mutuo no supone únicamente el conocimiento individual, sino que también se tiene en cuenta el de los demás.
2. Empresa conjunta: Wenger considera que una empresa conjunta es el resultado de un proceso colectivo de negociación que muestra el compromiso mutuo. La conformación como empresa, mantiene unida la comunidad de práctica, ya que no se trata simplemente de establecer una meta, sino que se trata de crear entre los participantes, relaciones de responsabilidad mutua.
3. Repertorio compartido: La conformación de la CoP como empresa conjunta, produce recursos que posibilitan la negociación de significados. Entre estos recursos está el repertorio que producen o adoptan los integrantes, este repertorio incluye: palabras, instrumentos, relatos, gestos, símbolos, acciones o conceptos.

Por su parte, Juárez (2004) plantea unas características de las CoP no muy alejadas de las planteadas por Wenger, estas son: tener dominio de un interés compartido; que la práctica permita la interacción de sus integrantes; y que se dé un aprendizaje en conjunto.

Parada (2011) agrega otro aspecto importante de las CoP, ella menciona que "estas emplean como estrategia el aprendizaje colaborativo, el cual es un sistema de interacciones cuidadosamente diseñadas que organizan e inducen la influencia recíproca entre los integrantes de un equipo" (p, 37).

Dentro de las Comunidades de Práctica se posibilitan tres aspectos particulares importantes: la negociación de significados, la participación y la cosificación. Aspectos que se retoman del modelo R-y-A, y se describen brevemente como siguen.

2.1.1 Negociación de significados. Para hablar de negociación de significados, se parte de las ideas de Wenger (1998) sobre negociación y significado. El término negociación es el encargado de trasmitir la idea de una interacción continua, de un logro gradual y de un proceso constante de dar y recibir; y el término significado se concibe como el producto de las experiencias vividas que influyen en la identidad y en las acciones individuales, y surge a partir de la participación activa y el intercambio de saberes que se da al interior de las comunidades de práctica.

Por ello, se entiende por negociación de significados como el proceso mediante el cual los participantes de una comunidad de práctica interactúan unos con otros, permean y enriquecen sus significados con relación a los de los demás.

Así pues, para esta investigación se considera que la interacción entre los profesores en formación que conforman la comunidad de práctica permite la negociación de significados, ya que por medio de discusiones se presentan intercambios de saberes referentes al significado de la función.

La negociación de significados supone la interacción de dos procesos que Wenger (1998) llama participación y cosificación.

2.1.2 Participación. El término participación es común escucharlo en el día a día, y para la teoría de las comunidades de práctica de Wenger (1998), su definición no se aleja mucho de la del común. La participación se refiere al proceso que combina las habilidades de hacer, hablar, pensar, sentir y pertenecer. Así, esta se caracteriza por ser un proceso tanto personal como social en el que interviene el cuerpo, mente, emociones y relaciones sociales.

La participación es algo más que una simple intervención directa en actividades con otras personas. En el contexto de comunidades de práctica, Lave & Wenger (1991) citado por Parada (2011), mencionan que algunos miembros de la comunidad inicialmente presentan una participación periférica en las actividades que se plantean, pero que a medida que se relacionan con los demás participantes, van adquiriendo una participación plena. Entendiendo que presentan una participación periférica los integrantes de la CoP que asisten a los encuentros, pero intervienen ocasionalmente y, por otra parte, presentan una participación plena los integrantes de la CoP que participan activamente en todas las discusiones y actividades; es decir, están en el núcleo de participación.

2.1.3 Cosificación. De manera general, el término cosificación se emplea para dar referencia al proceso donde se producen objetos que convierten la experiencia en una cosa.

Desde el punto de vista de Wenger (1998), puede verse como un proceso o un producto que incluyen hacer, diseñar, representar, nombrar, codificar, describir, percibir, interpretar, utilizar, reutilizar, descifrar y reestructurar, pero tomando estos no solamente como objetos concretos, sino también como reflejos de las prácticas y de los significados propios de los participantes de una comunidad de práctica.

La participación y la cosificación son procesos distintos, pero no implica que sean disjuntos, cuando estas se producen mutuamente, dan lugar a gratas experiencias de negociación de significados.

Para esta investigación, la cosificación implica que, como producto de los encuentros de la CoP se van a obtener unos resultados, un recurso propio, es decir, que las reflexiones que se den se convierten en acciones.

2.2 Una interpretación del modelo R-y-A para el estudio de la función

Parada (2011) retoma las ideas de la teoría de comunidades de práctica de Wenger (1998) en el planteamiento de un modelo teórico y metodológico denominado modelo de reflexión-y-acción en comunidades de práctica de educadores de matemáticos (R-y-A), que se fundamenta en dos elementos claves: la reflexión y la acción.

- **Reflexión:** Parada retoma la idea de Dewey (1989) para tomar la reflexión como un proceso de resolución de conflictos, de dudas, a la vez que una actitud de disposición para revisar su actuación.

  Los educadores matemáticos cuentan con saberes conceptuales y experiencias valiosas, y es la reflexión sobre estos, la que logra mejorarlos, corregirlos y potenciarlos a favor de la educación matemática. De este modo, la reflexión es el proceso sobre el cual se fundamenta el modelo R-y-A.

- **Acción:** En términos de Dewey (1989), Parada afirma que la reflexión conlleva a una acción, y añade que “es la acción, recurso fundamental sobre el que reflexionamos, acción entendida como la actuación del profesor de matemáticas en sus propias prácticas profesionales" (Parada, 2011, p.33). La acción es un proceso de doble función, primero es sobre la acción que se realiza una reflexión, y segundo, a partir de esa reflexión se realiza una nueva acción.

Como ya se mencionó, la presente investigación tiene como fundamento teórico el modelo R-y-A. Con la intención de trabajar en el contexto que nos compete, la

Figura **1** presenta una interpretación de dicho modelo.

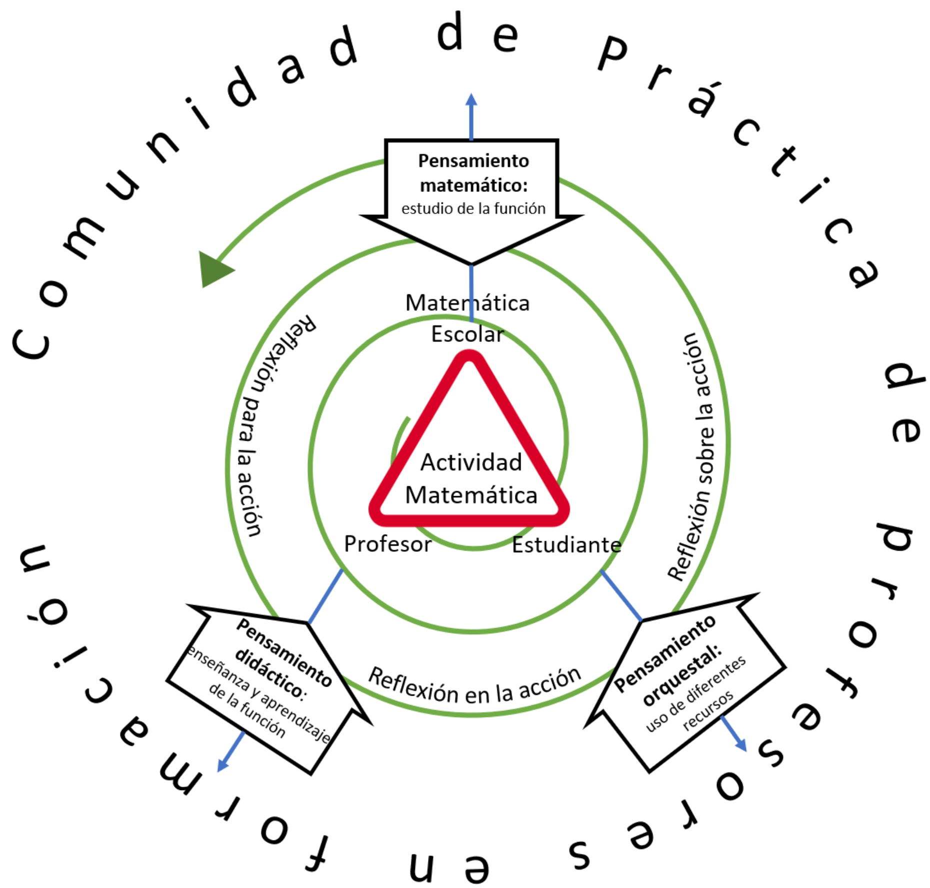


Figura 1. Bosquejo de la Interpretación del modelo R-y-A de Parada (2011)

La descripción del modelo R-y-A que se recoge en este documento se hace desde las palabras del autor, la cual se encuentra ampliamente explicada en Parada (2011). El anillo exterior hace énfasis en que las actividades de reflexión y acción que se plantean se promueven al interior de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas, en la investigación que aquí se reporta se habla de una Comunidad de Práctica de profesores de matemáticas en formación que hacen parte de un curso de Didáctica del Cálculo.

El esquema tiene una lectura del centro al exterior. Tiene de fondo la actividad matemática que surge de la interacción de un triángulo pedagógico tomado de Saint-Onge (1997) citado por Parada (2011), en el que se identifican las siguientes relaciones:

- Matemática escolar - profesor: relación de comprensión
- Profesor – estudiante: relación de mediación.
- Estudiantes – matemática escolar: relación de estudio.

Parada (2011) retoma las ideas de Chevallard, Bosh y Gascón (1997) para caracterizar la actividad matemática por medio de tres tipos de actividades que pueden considerarse matemáticas: i) utilizar matemáticas conocidas: cuando se resuelven problemas a partir de herramientas que ya se conocen; b) aprender y enseñar matemáticas: enfrentarse a un problema que no sabe resolver, y; iii) crear matemáticas: todo alumno que aprende matemáticas participa de alguna manera en un trabajo creador. En el modelo R-y-A se espera que sea el profesor quien despliegue una actividad matemática, para que tenga claridad de qué es lo que quiere lograr en la clase, y como lo va a lograr, esto en términos de los tres tipos de pensamiento.

Por otro lado, la autora explica que el modelo se muestra en forma de espiral, porque considera que los procesos de reflexión van evolucionando en la medida en que se van haciendo parte del ser humano; las reflexiones van a ser más objetivas, más críticas y con mayor sustento en la medida que se analizan. Parada propone realizar el proceso de reflexión en tres momentos: i) reflexión-para-la acción, la cual se da antes de la clase; ii) reflexión-en-la acción, se hace presente durante la clase, y; iii) reflexión-sobre-la acción, se da después de clase. Terminados los tres momentos, se inicia otra vuelta en espiral.

Las tres flechas que se presentan alrededor de la espiral dan cuenta de tres aspectos sobre los cuales se propone desarrollar el pensamiento reflexivo de los profesores de matemáticas y son transversales en los tres procesos de reflexión. Estos aspectos son: pensamiento matemático (estudio de la función), pensamiento didáctico (enseñanza y aprendizaje de la función) y el pensamiento orquestal (uso de diferentes recursos).

2.2.1 Procesos de reflexión. Los tres procesos de reflexión que se dan sobre la actividad matemática son pieza fundamental del modelo R-y-A, en el cual se retoman ideas de Dewey (1989) y de Schön (1992) citados por Parada (2011), para fundamentar los tres procesos que propone. Así, Dewey (1989) dice que la reflexión implica la organización secuencial de ideas, de tal manera que una idea determine la siguiente. Este autor también menciona que los profesores constantemente presentan inseguridades que los llevan a analizar su práctica, ya sea durante o después de esta.

De esta manera, lo que busca el modelo en términos de Dewey (1989) y Schön (1992), es promover la reflexión de los maestros sobre la actividad matemática, antes, durante y después de la clase, y que en términos de Parada y Pluvinage (2014), estos momentos se llaman reflexión-para-la acción, reflexión-en-la acción, y reflexión-sobre-la acción respectivamente.

- **Reflexión-para-la acción:** este proceso de reflexión se da antes de la clase, en la interacción de la matemática escolar y el profesor, cuando el profesor prepara la actividad que se va a desarrollar en el aula y selecciona los recursos que usará para esto.

  En particular para esta investigación, esta reflexión refiere a todo lo que se realiza dentro de la comunidad de práctica antes de la implementación del proyecto, es decir, a raíz de cada uno de los encuentros (exposiciones, talleres, negociación de significados) el profesor en formación reflexiona sobre lo que puede ocurrir en su implementación del diseño didáctico, y a partir de eso prepara su sesión (ampliación en el capítulo 3).

El modelo R-y-A propone el uso de la herramienta ruta cognitiva para este primer momento de reflexión. Las rutas cognitivas son caracterizadas por el modelo retomando algunas ideas de Robert y Rogalski (2005): i) se basan en la actividad matemática que el profesor propone en la clase, ii) esbozan la estructura de los contenidos matemáticos que se proponen estudiar, y iii) consideran los procesos matemáticos que los estudiantes podrían realizar durante la clase para responder a lo que propone el profesor, así dando paso a una nueva actividad para tratar de lograr los objetivos de la clase.

- **Reflexión-en-la acción:** esta reflexión se hace presente durante la clase cuando el profesor hace el papel de mediador entre el conocimiento y el estudiante; también está presente cuando el profesor responde a situaciones inesperadas en la clase (Schön, 1983).

Cuando el profesor en formación se enfrenta a la aplicación de su proyecto, debe estar dispuesto a actuar usando estrategias para ayudar al estudiante en las dificultades que no tenía previstas desde su planeación, es en este momento donde se evidencia la reflexión por parte del profesor.

Para este segundo momento de reflexión, el modelo propone el uso de la herramienta videograbación. Cuando el profesor está en su clase, es difícil observar y reflexionar sobre cada uno de los momentos que se presentan, es por esto por lo que se propone realizar videograbaciones de sus actividades realizadas, ya que por medio de estas quedan plasmados todos los momentos resultantes de su clase.

- **Reflexión-sobre-la acción:** esta reflexión se presenta cuando el profesor desde un punto de vista crítico evalúa lo ocurrido en su clase, es aquí donde el profesor compara la actividad matemática que había planeado, con la actividad matemática que logró.

  Al finalizar la aplicación del proyecto, el profesor en formación realiza una reflexión sobre la acción, analiza y reflexiona si sus objetivos se cumplieron, reestructura y plantea nuevas estrategias para un posible nuevo encuentro con los estudiantes.

  En este caso, el modelo R-y-A propone realizar una nueva ruta cognitiva teniendo en cuenta lo sucedido durante la clase, y así poder realizar una comparación de las rutas cognitivas realizadas antes y después de la clase. En este comparativo, se puede identificar con mayor claridad lo que se logró, e identificar qué fue lo que se hizo que posibilitó el logro de la actividad matemática que se planeó, o que fue lo que se hizo que distorsionó todo lo que se tenía planeado.

El modelo R-y-A propone centrar estos procesos de reflexión en los pensamientos presentados a continuación.

2.2.2 Pensamiento reflexivo del profesor de matemáticas en formación que negocia significados de la función. Parada (2011) rescata la idea que en la formación de profesores no se debe tener como objetivo acumular más y más conocimiento en los profesores, sino que se debe apuntar a que estos desarrollen un pensamiento reflexivo, en el que se destaquen cada uno de los conocimientos adquiridos por el maestro durante su proceso de preparación. En términos de Vega (1990), citado por Parada (2011), el pensamiento es una actividad global del sistema cognitivo, que va a ocurrir siempre que nos enfrentemos a una tarea o problema con un objetivo e incertidumbre, sobre la forma de realizarlo.

Reflexionar en cada uno de los procesos que se presentaron en el apartado 2.2.1 se hace muy complejo, por lo que el modelo R-y-A propone reflexionar en torno a tres pensamientos: pensamiento matemático, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal.

2.2.2.1 Pensamiento Matemático: estudio de la función. En el modelo no se habla de conocimiento, ni de saberes, sino de pensamientos, es decir, se hace referencia a que el interés no es saber cuánta matemática sabe el profesor, sino, el interés está en cómo el profesor usa este conocimiento para su práctica docente: proponer tareas; seleccionar, usar y diseñar recursos; comunicarse en el aula; hacer adaptaciones curriculares; entre otras.

Se necesita que el profesor antes de la clase reflexione si sobre ese objeto matemático sobre el cual va a promover actividad matemática, es de su completo dominio. Así mismo durante la clase, cuando el profesor está realizando la clase y surgen preguntas por parte de los alumnos que no pueden resolver, el profesor se confronta con su pensamiento matemático.

Para esta investigación, el pensamiento matemático está enfocado en el significado de la función inmerso en las temáticas esenciales del cálculo diferencial.

Desde una revisión a diferentes libros de texto de enseñanza de cálculo a nivel de bachillerato y universidad, como lo son Purcell (2000), Stewart (2001), Larson (2006) entre otros, se evidencia que predomina la definición del concepto de función en términos de una correspondencia entre variables, definición que asociamos a la dada por Dirichlet en 1837 (citado en Boyer, 1986, p. 687):

> Si una variable y está relacionada con otra variable x, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x, hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

Se considera que, la anterior definición abarca aspectos importantes del concepto de función, por lo tanto, se toma postura de ella.

De igual forma, es importante que, para la enseñanza del concepto de función, los profesores en formación reflexionen sobre las principales ideas que giran alrededor de este. Cooney, Beckmann y Lloyd (2010) proponen cinco grandes ideas entorno a las funciones:

1. **Concepto de función:** la gran idea 1 hace énfasis en reconocer como característica principal de las funciones la unicidad de esta, es decir, que a cada elemento del conjunto de salida (dominio) le corresponde un solo elemento del conjunto de llegada (recorrido).
2. **Covariación y tasa de cambio:** la gran idea 2 alude a la necesidad de identificar las funciones como medio para describir cantidades relacionadas que varían conjuntamente. También, alude a estudiar la tasa de cambio como la cuantificación de la covariación entre dos variables y a reconocerla como una característica que determina el tipo de problema que se vaya a modelizar.

3. **Familias de funciones:** la gran idea 3 hace referencia a la identificación de características de los diferentes tipos de funciones. Dos de estas características son el dominio de la función y el comportamiento de la tasa de cambio. Por ejemplo, en una sucesión aritmética puede ser considerada función lineal siempre y cuando el dominio se límite a los enteros positivos; y, que la tasa de cambio de una función lineal siempre va a ser constante.
4. **Combinación y transformación de funciones:** la gran idea 4 apunta a la combinación de funciones desde una suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones, así como a las condiciones deben cumplir las funciones para poder realizar cada una de estas combinaciones.
5. **Múltiples representaciones de funciones:** la gran idea 5 refleja la importancia de que los profesores deben reconocer las diferentes representaciones de una función, tales como: la algebraica, gráfica, tabular y verbal. También, expresa la importancia de conocer las características de cada una de las representaciones para saber cuándo el uso de una es más conveniente que el uso de otra.

Las anteriores ideas se retoman como base para el diseño de los talleres y como organizadores para el reporte los significados negociados en el desarrollo de los talleres trabajados con los integrantes de CoP.

2.2.2.2 Pensamiento Didáctico: enseñanza y aprendizaje de la función. El pensamiento didáctico del profesor se desarrolla cuando éste se cuestiona sobre las diferentes maneras de llevar un conocimiento al aula de clase, de tal forma que este conocimiento se pueda hacer más comprensible para los estudiantes.

Se plantea trabajar en pensamiento desde la resolución de problemas, para ello, es importante que el profesor no solamente sepa de teoría de resolución de problemas en el estudio de las funciones, y nos logre relacionar la teoría con su autor y con la escuela, sino que en realidad interesa que, eso que ha aprendido teóricamente lo pueda llevar a la clase, que si el habla de resolución de problemas, en realidad pueda hacer un diseño de clase con la metodología de resolución de problemas.

Las habilidades que el profesor tenga sobre su pensamiento didáctico le permitirán llevar de diferentes formas el contenido del objeto matemático (en este caso funciones) a sus estudiantes. Polya (1945) menciona que para que el profesor sea habilidoso en la resolución de problemas, debe cumplir con dos tareas: orientar al estudiante sin ponerle imposiciones, y tratar de entender lo que éste está pensando, para poder guiarlo y acercarlo a la solución del problema por medio de preguntas.

Así, para esta investigación se quería que además de reflexionar y negociar significados acerca de la función, se problematizara con los profesores en formación sobre las formas como ellos lo enseñarían. Por ello dentro de la investigación se dio un espacio para que los integrantes de la CoP realizaran un proyecto de Reflexión-y-Acción a lo largo del curso, y reflexionaran sobre la planeación, la implementación y la evaluación de los logros alcanzados por sus estudiantes gracias a este diseño didáctico.

2.2.2.3 Pensamiento Orquestal: uso de diferentes recursos. Este pensamiento hace referencia a como los profesores de matemáticas usan los diferentes recursos con los que cuenta en el aula de clase. Se habla de recursos en términos de los materiales que el maestro utiliza para promover la actividad matemática, entre ellos están: los problemas, hojas de trabajo, materiales didácticos, tecnologías digitales, libros de texto, lenguaje matemático, entre otros.

Para la selección de los recursos, el modelo R-y-A retoma la idea de la orquestación instrumental de Trouche (2004), quien expone que cuando el maestro selecciona los recursos que va a incorporar en la clase, lo debe hacer como lo haría el director de una orquesta para poner en escena la mejor versión de ella, es decir, si el profesor sabe con qué recursos cuenta, debe hacer una justa selección para la clase, ya que por medio de ese recurso se puede llegar al logro de esa actividad matemática prevista para esta. El maestro necesita reflexionar si en realidad eso que va a llevar al aula, le va a ayudar o no con su objetivo propuesto para la clase y que, si no le va a ayudar, sencillamente no lo necesita.

Para esta investigación, específicamente se rescató el uso de tecnologías digitales (GeoGebra), en particular, cuando se resuelven problemas. Al respecto, Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) caracterizan cuatro episodios que ayudan a estructurar la manera en cómo se deben usar las tecnologías digitales cuando se proponen tareas con resolución de problemas:

i. Comprensión del problema: se identifican aspectos relevantes del enunciado, y que conocimientos matemáticos se requieren para su solución;
ii. Exploración del problema: se parte de lo identificado en el episodio i) y se busca la manera de representarlo. Aquí juega un papel clave la tecnología, en este caso

GeoGebra, ya que por medio de este se posibilita una mejor visualización de lo que se va a representar.

iii. Diferentes acercamientos hacia la solución del problema: el profesor promueve la búsqueda de diferentes soluciones. Por ejemplo, para el caso de funciones, se puede partir de cada una de sus diferentes representaciones.

iv. Integración de los acercamientos: aquí se integran y analizan cada uno de los acercamientos y justificaciones que dieron los estudiantes cuando intentaron solucionar el problema.

Diferentes estudios como los mencionados en el apartado de antecedentes (Kastberg y Leathanm (2005), Cuevas y Pluvinage (2009), Cullen, Hertel y John (2013), Olvera-Martínez (2015)) muestran que efectivamente las tecnologías y la resolución de problemas juegan un papel importante en la comprensión de los significados de la función.

Así, por medio de las actividades trabajadas al interior de la CoP, se observaron las reflexiones que los profesores en formación realizaron al hacer uso de las tecnologías digitales respecto a las potencialidades y limitaciones que estas tienen.

3. Proceso metodológico

Este estudio se basa en la metodología de investigación acción-colaborativa, desde la perspectiva de Elliott (1993), quien menciona que este tipo de investigación se encarga de realizar un estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción en la misma, y es colaborativa porque las investigadoras tienen el papel de moderadoras dentro de la CoP. El papel de las moderadoras fue de gran importancia, ya que en términos de Wenger (1998), estas fueron las encargadas de planificar y facilitar las actividades, y de potenciar el enriquecimiento mutuo y el intercambio de experiencias dentro de la comunidad. De este modo, este tipo de metodología permitió dar evidencia de la caracterización que se propuso realizar en este estudio.

En la Figura 2 resumimos las tres etapas que conformaron el proceso metodológico de la investigación. A continuación, se describen en qué consistió cada una de las fases y resultados de alguna de ellas.

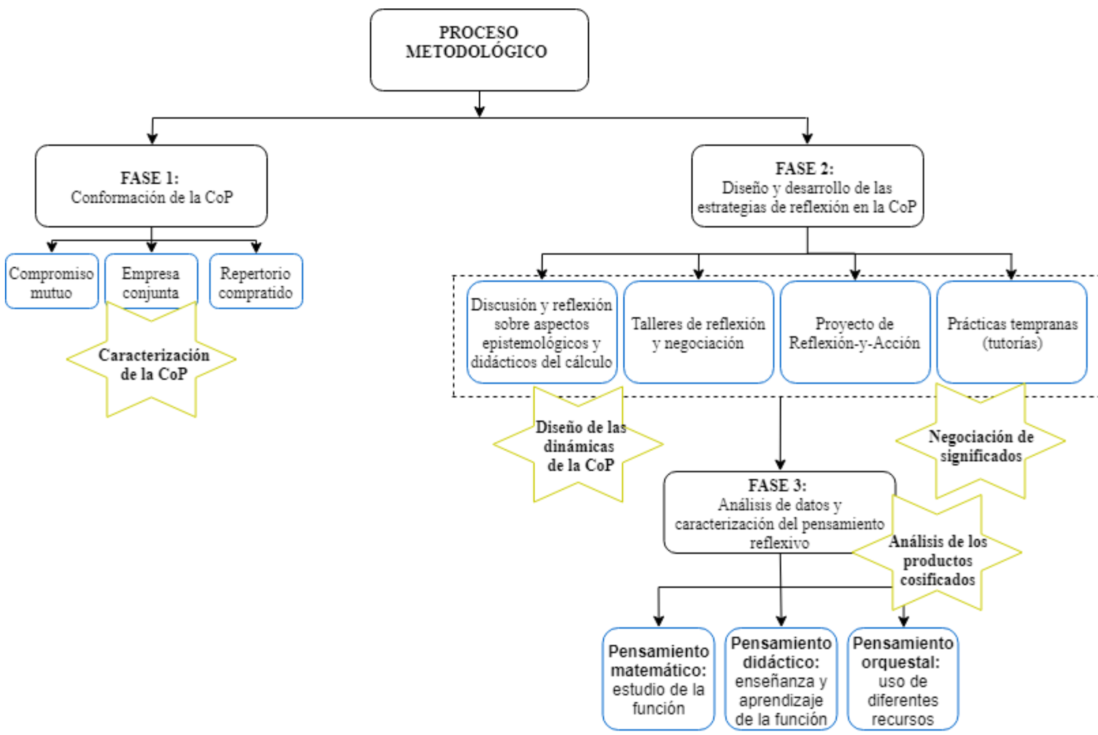


Figura 2. Proceso metodológico de la investigación.

3.1 FASE 1: Caracterización de la CoP

La población en la cual se llevó a cabo la investigación fue un curso de Didáctica del Cálculo que hace parte de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS).

Una primera caracterización del curso Didáctica del Cálculo como una Comunidad de Práctica fue realizada por Moreno (2015) en un estudio que tuvo como objetivo identificar y explicar significados negociados por educadores matemáticos que realizaron prácticas tempranas en un programa de seguimiento y acompañamiento a estudiantes de Cálculo Diferencial.

De igual manera, en el primer semestre del 2018 se realizó una segunda caracterización de dicho curso en un estudio realizado por Amaya y Fiallo (2019). En este estudio, que tuvo como objetivo caracterizar los significados negociados por una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación que participaron en el curso de Didáctica del Cálculo y que reflexionaron sobre el proceso de la demostración, se realizó una planeación curricular basada en dinámicas de las Comunidades de Prácticas, de la cual se retomaron algunos aspectos y se direccionaron de tal manera que las dinámicas allí definidas posibilitaran a la comunidad la reflexión y negociación del significado de la función.

De esta manera, en la primera fase de nuestra investigación se caracterizó el curso de Didáctica del Cálculo del segundo semestre del 2018 como una comunidad de práctica. Se considera que los integrantes de dicho curso se constituyen como una comunidad de práctica según la caracterización que propone Wenger (1998) porque:

- ✓ Los integrantes del curso están comprometidos en promoverse para el mejoramiento de su formación académica. Las actividades propuestas en el curso posibilitaron que ellos se autoevaluaran permanentemente, identificando así sus fortalezas y debilidades, proceso que se vio enriquecido mediante la puesta en común de los procesos de reflexión sobre el significado de la función, sus formas y diferentes recursos para enseñarlo.
- ✓ El curso se consolida como una empresa conjunta, porque las actividades que se realizaron a nivel personal fueron compartidas dentro del grupo y todos se vieron beneficiados de las reflexiones de los otros. Entendiendo así, que en la docencia se

necesita reconocer a los colegas como equipo para que en términos de tiempo se logre una ganancia, porque las planeaciones de unos pueden ser usadas por los otros, construyendo así en equipo unos materiales y unas negociaciones conceptuales para la enseñanza del Cálculo, en este caso específico.

- ✓ El lenguaje, el proceso de comunicación y los intereses que se generaron con las dinámicas al interior de la comunidad, produjo un repertorio compartido. Repertorio en términos de los saberes sobre la epistemología del concepto de función, los acercamientos didácticos al concepto de función y el uso adecuado de diferentes recursos.

A partir de dicha caracterización, se reconoció la siguiente estructura entre sus integrantes:

- ✓ Dos moderadoras: una moderadora 1, quien es la profesora titular del curso (directora de la tesis que aquí se reporta) y una moderadora 2, quien es una investigadora en Educación Matemática (investigadora principal de esta tesis).
- ✓ Doce profesores en formación, quienes son los generadores de cada una de las experiencias de reflexión de la CoP.

A partir de cada una de las experiencias en el interior de la comunidad de práctica, se observó cómo las características de la comunidad permearon los procesos de reflexión y acción de cada uno de los profesores en formación que hacían parte de esta.

3.2 FASE 2: Diseño y desarrollo de las estrategias de reflexión en la CoP

Con la finalidad de generar un espacio de exploración, reflexión y cosificación de significados, se planearon y diseñaron actividades de trabajo colaborativo que favoreciera los debates y discusiones alrededor de temáticas del cálculo (variación, funciones, límites y derivadas). Estas actividades se organizaron en las siguientes estrategias de trabajo:

- Discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos y didácticos del cálculo
- Talleres de reflexión y negociación
- Proyecto de Reflexión-y-Acción
- Prácticas tempranas

Las actividades se llevaron a cabo durante 23 sesiones cada una de 120 minutos, tal como se muestra en la Tabla 1. Este cronograma de trabajo propio de la investigación fue articulado con la programación general del curso, el que constó de 35 sesiones de trabajo a lo largo de siete meses.

A continuación, se describen cada una de las estrategias de reflexión y negociación de significados diseñadas y desarrolladas en la CoP de profesores de matemáticas en formación con quienes se desarrolló la investigación que aquí se reporta. Sin embargo, es importante señalar, que para efectos de la investigación que se está reportando aquí, sólo se usarán como datos para el análisis los resultados de los talleres de reflexión y negociación.

3.2.1 Discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos y didácticos del cálculo. Según Llinares (2012), en los cursos de formación de profesores se deben generar entornos de interacción social, donde se les permita a los profesores en formación participar de espacios de colaboración e interacción discursiva entre ellos.

Por ello, para este trabajo de campo se generaron espacios para la discusión y reflexión acerca de la epistemología y la didáctica de los contenidos del cálculo diferencial (variación, función, límite y derivada) mediante exposiciones, videoconferencias y conferencias.

Tabla 1

Cronograma de los procesos de participación, reflexión y acción

Sesión	Actividad	Encargado
1	Presentación y discusión del cronograma de actividades	Moderadoras
2	Socialización de experiencia sobre aprendizaje del Cálculo.	Todos
3	Diagnóstico inicial del significado de la función.	Todos
4	Discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos del concepto de función.	Profesor en formación
5	Videoconferencia aspectos didácticos del concepto de función.	Dra. Carmen Olvera Martínez
6	Continuación discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos del concepto de función.	Profesor en formación
7	Discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos y didácticos de la noción de variación.	Profesor en formación
8	Taller de reflexión y negociación (variación)	Todos
9	-Avance 1 del proyecto de Reflexión-y-Acción	Todos
	-Socialización de experiencia de prácticas tempranas.	Todos
10	Discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos y didácticos de la noción de función.	Profesor en formación
11	Avance 2 del proyecto de Reflexión-y-Acción.	Todos
12	Taller de reflexión y negociación (función - Parte I)	Todos
13	Discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos y didácticos de la noción de límite.	Profesor en formación
14	Avance 3 del proyecto de Reflexión-y-Acción.	Todos
15	Conferencia modelo de Reflexión-y-Acción.	Moderadora 1
16	-Taller de reflexión y negociación (función – Parte II)	Todos
	-Avance 4 del proyecto de Reflexión-y-Acción.	Todos
17	Taller de reflexión y negociación (función y límite)	Todos
18	-Socialización de experiencia de prácticas tempranas.	Todos
19	Discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos y didácticos de la noción de derivada.	Profesor en formación
20	-Avance 5 del proyecto de Reflexión-y-Acción	Todos
	- Taller de reflexión y negociación (función y derivada)	Todos
21	Diagnóstico final del significado de la función.	Todos
22	Avance 6 del proyecto de Reflexión-y-Acción.	Todos
23	-Presentación de resultados del proyecto.	Todos
	-Informe final de experiencia de prácticas tempranas.	Todos

Las exposiciones fueron asignadas por parejas a los profesores en formación y preparadas previamente bajo la guía de la moderadora 1 de la comunidad. Para la preparación de las exposiciones, los estudiantes (integrantes de la comunidad) debían hacer una lectura previa de un documento, el indicado por los expositores, con el fin de usar argumentos teóricos para participar y discutir. Para ello, se revisaron tesis, artículos y libros que sirvieron como guía para construir un recorrido epistemológico de cada uno de los conceptos, así como diferentes acercamientos didácticos.

Dentro de esta estrategia, se llevó a cabo una videoconferencia orientada por la profesora María del Carmen Olvera Martínez de la Universidad Juárez del Estado de Durango (México) y se tituló: “El uso de herramientas digitales en el estudio de funciones y el desarrollo de competencia matemática para la enseñanza”. La profesora presentó groso modo un acercamiento didáctico para la enseñanza de las funciones que consistió en incorporar el uso coordinado de diversas tecnologías digitales al momento de resolver problemas. Con esto se tuvo la intención de ampliar el panorama de los profesores en formación sobre algunos procesos didácticos al momento de abordar la temática de funciones dentro del aula.

Otra sesión importante que se dio dentro de esta actividad fue la conferencia sobre el modelo de Reflexión-y-Acción orientada por la autora misma del modelo, quien además es una de las moderadoras de la comunidad. Esta conferencia además de tener como objetivo presentar el modelo teórico-metodológico de reflexión-y-acción de Parada (2011) con el cual se buscaba orientar los procesos de reflexión por parte del profesor en formación antes, durante y después de la aplicación del proyecto, tuvo como objetivo discutir sobre el significado de la “reflexión” y su papel en la formación permanente del profesor de matemáticas.

Las negociaciones dadas durante estas discusiones hicieron parte de la reflexión que los profesores en formación realizaron de forma paralela tanto al desarrollo del proyecto como de las prácticas como tutores. En varias ocasiones, esas negociaciones permitieron reflexiones-para-la acción.

3.2.2 Talleres de reflexión y negociación. Una parte esencial para la reflexión y negociación del significado de la función, fueron los talleres referentes a este. En total se realizaron seis talleres que iban enlazados a cada una de las exposiciones anteriormente mencionadas, por lo tanto, estos talleres estuvieron dirigidos a reflexionar sobre aspectos teóricos y didácticos del cálculo diferencial.

Para el diseño de los talleres se tuvo en cuenta algunas actividades referentes al concepto de función planteadas por Hitt (2003), Olvera-Martínez (2015) y; Fiallo y Parada (2018), así como las cinco grandes ideas sobre funciones planteadas por Cooney et. Al (2010) las cuales fueron descritas en el apartado 2.2.2.1. Los estudios realizados por estos autores coinciden en tener un enfoque basado en la resolución de problemas (en términos de Santos Trigo, 2010) y el uso de diferentes recursos didácticos, entre ellos las tecnologías digitales. Adicionalmente, para el diseño de algunos de los talleres, se tuvo en cuenta la estructura de las actividades trabajadas con profesores en formación, en un estudio realizado por Juarez, Arredondo y Pluvinage en 2014.

Los seis talleres siguieron un orden epistemológico y una estructura metodológica que guiaron la reflexión y la negociación en el siguiente orden:

i. Taller 1. Diagnóstico inicial del significado de la función (S.I)

ii. Taller 2. Reflexión y negociación (variación) (T.V)

iii. Taller 3. Reflexión y negociación (función) (T.F)

iv. Taller 4. Reflexión y negociación (función y límite) (T.FyL)

v. Taller 5. Reflexión y negociación (función y derivada) (T.FyD)

vi. Taller 6. Diagnóstico final del significado de la función (S.F)

La estructura de los talleres está dada para reflexionar alrededor del pensamiento reflexivo propuestos en el modelo R-y-A: pensamiento matemático, pensamiento didáctico y pensamiento orquestal. A continuación, se presenta dicha estructura:

A) PARTE I: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Por medio de problemas tomados de estudios reportados por Olvera-Martínez (2015), y Fiallo y Parada (2018), se buscaba indagar acerca del pensamiento matemático del profesor en formación. El diseño de estos problemas integra una parte de trabajo individual con otra parte grupal, además, se propició el trabajo a lápiz y papel con el uso de tecnologías digitales (GeoGebra). En una primera parte se buscaba confrontar de manera individual al profesor en formación con sus saberes matemáticos, para posteriormente por medio de dinámicas grupales, interactuaran unos con otros y reflexionaran alrededor de sus respuestas en relación con las de los demás.

B) PARTE 2: PENSAMIENTO REFLEXIVO

Para esta parte, se diseñaron diferentes actividades y preguntas con las que se buscaba que el profesor en formación reflexionará alrededor de su pensamiento matemático, su pensamiento didáctico y su pensamiento orquestal tal como lo establece el modelo R-y-A. En particular, los talleres 4 y 5 comparten un mismo tipo de pregunta, las cuales se presentan a continuación:

i. **Reflexiones sobre el pensamiento Matemático:** Con el fin de que los profesores en formación examinaran sus dominios conceptuales sobre los objetos matemáticos, se plantea un paralelo en el que se les pide identificar las fortalezas y debilidades que enfrentaron al resolver el problema de la primera parte.

1. En el siguiente cuadro escribe las fortalezas y debilidades conceptuales que identificaste en ti cuando resolviste el problema de la primera parte de este taller.

FORTALEZAS	DEBILIDADES

Figura 3. Preguntas relacionadas al pensamiento matemático

ii. **Reflexiones sobre el pensamiento didáctico:** En esta parte se buscaba confrontar a los profesores en formación sobre la forma cómo estaban resolviendo los problemas para ver si ellos estaban comprendiendo, como usuarios, la metodología de resolución de problemas. Para ello, se plantearon algunas preguntas asociadas con las tres etapas que Santos Trigo (2010) menciona se deben tener en cuenta en la resolución de problemas (entendimiento del problema, diseño de un plan, ejecución del plan).

iii. **Reflexiones sobre el pensamiento orquestal:** Los incisos con los que se concluyeron los talleres estaban orientados a indagar sobre el uso de recursos para resolver el problema. Por ejemplo, analizar la pertinencia de usar un software matemático interactivo para interpretar el problema, para elaborar algoritmos de resolución o para desarrollar ese algoritmo.

2. Reflexionemos sobre los aspectos didácticos del diseño del taller respondiendo las siguientes preguntas:
   a) ¿Crees que se logra la comprensión del problema?
   b) ¿Qué estrategias usaste para resolver el problema?
   c) ¿Qué aspectos del aprendizaje de los estudiantes crees que se pueden evaluar con el desarrollo de este taller?
   d) ¿Qué nociones matemáticas posibilitó trabajar el desarrollo del taller?
   e) ¿Crees que estuvo bien redactado el problema?
   f) ¿Las preguntas planteadas en la hoja de trabajo fueron suficientes, pertinentes, claras? **Justifica tu respuesta.**
   g) ¿Qué opinas sobre el uso que se le dio a las tecnologías digitales (TD) en el diseño del taller? ¿Era necesario incorporar las TD en este taller? ¿Qué otro recurso didáctico se podría incorporar al taller? **Justifica**

3. Si tuvieras que implementar este taller con tus estudiantes de ASAE, ¿Le cambiarias algo?¿Qué?¿Por qué?

Figura 4. Preguntas relacionadas al pensamiento didáctico y orquestal

3.2.3 Proyecto de Reflexión-y-Acción (P.RyA). En la formación inicial de profesores es importante que los estudiantes para profesor tengan acercamientos a la actividad docente, esto, con la intención que se aproximen a las problemáticas del quehacer profesional (Flores, 1998).

Atendiendo esta idea, se planteó el desarrollo de un proyecto de diseño didáctico en el que esperaba verse reflejado el producto de las reflexiones y negociaciones del significado de la función que se iban obteniendo en cada uno de los encuentros con la comunidad. Los profesores en formación diseñaron e implementaron un proyecto que giró en torno a alguna problemática alrededor de la enseñanza del cálculo. Dicha problemática fue evidenciada por ellos mediante la literatura o su práctica como tutores (ver siguiente apartado).

Durante el diseño del proyecto se dieron seis sesiones dentro de los encuentros con la comunidad, en las que los profesores en formación mostraron sus avances y recibieron sugerencias y orientaciones por parte de las moderadoras. Se orientó a los profesores en formación para que realizaran reflexión en los tres procesos que propone el modelo de Reflexión-y-Acción: reflexión-para-la acción (durante el diseño), reflexión-en-la acción (durante la implementación) y reflexión-sobre-la acción (posterior a la implementación). Así mismo, para que en cada uno de esos tres procesos reflexionaran sobre su pensamiento matemático, su pensamiento didáctico y su pensamiento orquestal.

3.2.4 Prácticas tempranas. Botello (2013) sugiere que en los cursos de formación de profesores se generen espacios en los que estos posibiliten tutorías académicas a estudiantes de primeros niveles de la universidad.

Por ello, durante todo el proceso de participación dentro de la comunidad, los profesores en formación hicieron parte de un programa de atención, seguimiento y acompañamiento a estudiantes (ASAE), en el que se desempeñaron como tutores de cuatro estudiantes que cursaban Cálculo Diferencial en la Universidad Industrial de Santander. Su función como tutores era guiar el proceso de aprendizaje de los estudiantes por medio de talleres, los cuales eran preparados previamente para cada una de las sesiones. Como producto de cada sesión, el profesor en formación debía realizar un seguimiento de cada uno de sus estudiantes en el que plasmaba las dificultades y fortalezas que este presentaba durante la sesión.

Durante la puesta en común de todas las estrategias anteriormente mencionadas, los profesores en formación participaron en cada una de las sesiones con diferentes niveles de responsabilidad (en algunos casos en el núcleo y en otros casos de forma periférica). En el núcleo el profesor de matemáticas estuvo cuando moderó una exposición, cuando socializó su proyecto de Reflexión-y-Acción y los resultados de su implementación. Por otro lado, la participación fue periférica cuando el profesor en formación escuchaba y reflexionaba sobre las producciones de otro participante, cuando con sus interpretaciones a las lecturas de exposición aportó al compañero moderador, entre otras posibilidades que la misma dinámica del grupo fue generando.

Las evidencias de todo el proceso de participación, reflexión y acción fueron recolectadas por medio de los siguientes instrumentos:

- Videograbaciones: Durante cada encuentro con la comunidad de práctica se realizaron videograbaciones como evidencia y refuerzo de cada una de las reflexiones que se dieron dentro de la comunidad.
- Hojas de trabajo: En cada una de las sesiones de implementación de los talleres de reflexión y negociación se hizo entrega de un material impreso donde los profesores en formación registran sus respuestas y algunas de sus reflexiones, después de la puesta en común de los talleres se recogieron las hojas de trabajo.
- Informes: Durante el diseño del proyecto de Reflexión-y-Acción se recogieron informes que los profesores en formación iban presentando sobre sus avances, así como el producto final de ducho proyecto. De igual forma, se tomaron los seguimientos que cada uno de estos realizó sobre sus sesiones de tutorías.
- Bitácora de la investigadora: Uno de los papeles de la investigadora (moderadora 2) en cada uno de los encuentros con la CoP, fue tomar apuntes de las reflexiones sobre cada uno los acontecimientos importantes que emergían.

3.3 FASE 3: Análisis de datos y caracterización del pensamiento reflexivo

Finalmente, en la última fase del proceso metodológico se analizaron desde el modelo de Reflexión-y-Acción los datos recolectados durante todo el proceso de participación, reflexión y Acción en la CoP. De este análisis se tomaron evidencias que nos permitieron responder a nuestra pregunta de investigación por medio de tres categorías de análisis: Pensamiento matemático “estudio de la función”, pensamiento didáctico “enseñanza y aprendizaje de la función” y pensamiento orquestal “uso de diferentes recursos”.

4. Significados negociados sobre la función y su enseñanza

En este capítulo se exhiben los resultados del proceso de análisis, con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Qué significados sobre el concepto de función y su enseñanza, negocia una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación?

Como se mencionó en el apartado 3.1, la CoP en la que se desarrolló la investigación estuvo conformada por 12 estudiantes (profesores en formación) y dos profesoras que tuvieron el rol de moderadoras. Para efectos del análisis de resultados, se tomó como criterio usar los datos de los participantes que estuvieron en el núcleo de participación (como se explicó en el apartado 2.1.2).

Tabla 2

Resumen de la calidad de los datos de cada sesión

NOMBRE	S.I	T.V	T.F	T.FyL	T.FyD	S.F	P.RyA
Mariana	✓	✓	✓	✓	R	✓	✓
Integrante	R	R	✓	✓	X	R	✓
Integrante	✓	X	✓	R	✓	R	X
Integrante	R	X	R	✓	X	✓	✓
Integrante	X	X	X	R	R	R	X
Integrante	✓	X	✓	✓	✓	R	✓
Integrante	✓	R	✓	R	X	R	R
Integrante	R	R	✓	X	R	X	X
Tania	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Angélica	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Integrante	✓	X	X	R	X	R	X
Integrante	X	X	X	R	X	X	R

✓ : Datos relevantes; R: Datos regulares; X: Datos poco relevantes.

Para identificar los integrantes que estuvieron en el núcleo, se revisaron los productos y la calidad de los datos en cada una de las sesiones. Tal como se muestra en la Tabla 2, Mariana, Tania y Angélica, son los sujetos con datos de mayor calidad para efectos de la investigación que aquí se reporta. A continuación, se realiza una breve descripción de cada una de estas integrantes.

Mariana durante la fase del estudio, fue estudiante de séptimo nivel de la licenciatura en matemáticas. Ella en su proceso de formación, cursó dos veces la asignatura de cálculo diferencial y justifica la reprobación del curso por primera vez debido a sus pocas bases matemáticas traídas del colegio y a sus malos hábitos de estudio. Mariana en ese momento no había tenido experiencias docentes, ni como tutora ni como profesora.

Tania cursaba octavo semestre de la licenciatura en matemáticas. Ella manifiesta que siempre quiso ser profesora de matemáticas y que por ello ingresó al programa queriendo estudiarla. Ella aprobó la asignatura cálculo diferencial la primera vez que la cursó. En ocasiones anteriores tuvo experiencia como profesora de clases particulares en la asignatura de álgebra lineal.

Angélica era estudiante de séptimo semestre de la licenciatura en matemáticas. En el aprendizaje del cálculo, cursó tres veces la asignatura cálculo diferencial y manifiesta que esto se debió a no tener un buen método para estudiar. Anteriormente había tenido la posibilidad de ser profesora de clases de matemáticas particulares.

Por otra parte, como se mencionó en el apartado 3.2, las estrategias de trabajo colaborativo que se llevaron a cabo en la intervención fueron: discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos y didácticos de las funciones; talleres de reflexión y negociación; proyecto de Reflexión-y-Acción y, prácticas tempranas como tutores. Para el análisis del proceso de negociación se recogieron datos por medio de videograbaciones, hojas de trabajo e informes de cada una de las estrategias mencionadas anteriormente. No obstante, se infiere que las negociaciones que se dieron durante las sesiones de discusión y reflexión sobre aspectos epistemológicos y didácticos de las funciones pueden verse reflejadas en la planeación de actividades del proyecto y en el desarrollo de los talleres, por lo tanto, no se presentan explícitamente los significados negociados en estas sesiones.

Los procesos de negociación posibilitados en la CoP a través de las prácticas tempranas dieron un volumen de datos muy amplio que no se analizan en este estudio dadas las limitaciones del tiempo, empero, pueden ser objeto de estudio de futuras publicaciones.

Teniendo en cuenta que la presente investigación tuvo como objetivo caracterizar el pensamiento reflexivo de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación que negocia significados de la función, los significados negociados emergentes de los procesos de reflexión se dan en términos del pensamiento reflexivo: pensamiento matemático (estudio de la función), pensamiento didáctico (enseñanza y aprendizaje de la función), y pensamiento orquestal (uso de diferentes recursos).

4.1 Talleres de reflexión y negociación

El proceso de negociación a partir de la implementación de los talleres se acoge a lo que el modelo R-y-A expone frente a la necesidad de ofrecer a los miembros de la CoP oportunidades para reflexionar sobre los objetos matemáticos y la didáctica que los rodea. Para efectos de la investigación que aquí se reporta, el propósito de los talleres fue coadyuvar a los profesores a reflexionar sobre el significado de la función y su vinculación con los demás objetos del cálculo.

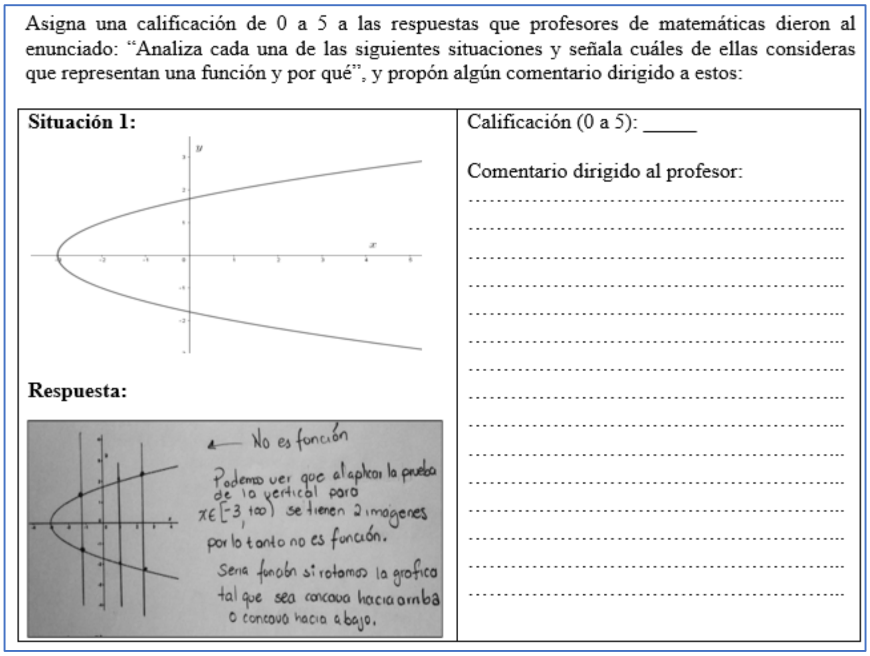
A continuación, se muestran evidencias del proceso de negociación de significados posibilitado por cada uno de los talleres (en el orden en que fueron mencionados en el apartado 3.2.2). Para cada uno de los talleres se presenta su respectivo análisis previo y la descripción del proceso de implementación y negociación en términos del pensamiento reflexivo, en los que se rescatan evidencias de los tres casos representativos (Angélica, Mariana y Tania). Por último, se muestra a modo de resultados, los significados negociados por medio de los talleres, de las tres profesoras en formación.

4.1.1 Taller 1. Significados iniciales de la función. Para este taller se tomaron algunos ítems de actividades planteadas por Olvera-Martínez (2015) y algunas respuestas a esas actividades que fueron dadas por la población con la que trabajó la autora. De igual manera, estas actividades se adecuaron a un modelo de pregunta planteado por Juarez, Arredondo y Pluvinage (2014).

4.1.1.1 Análisis previo del taller de significados iniciales de la función. Este primer taller tuvo como objetivo general identificar las concepciones que tenían los profesores en formación) sobre el significado de la función, así como su capacidad para representarla.

El tiempo previsto para el desarrollo del taller fue de 120 minutos, de los cuales se esperaba que en 60 minutos se desarrollara la hoja de trabajo y en los otros 60 minutos se llevara a cabo la puesta en común.

En el taller se presentan cuatro situaciones problema con una respuesta y la intención es que el profesor en formación le asigne una calificación de 0 a 5 a esa respuesta. Se les menciona que esa respuesta fue dada por un profesor de matemáticas. Concretamente, el enunciado se presenta tal como se muestra en la Figura 5.


Asigna una calificación de 0 a 5 a las respuestas que profesores de matemáticas dieron al enunciado: "Analiza cada una de las siguientes situaciones y señala cuáles de ellas consideras que representan una función y por qué", y propón algún comentario dirigido a estos:

Situación 1:	Calificación (0 a 5): _____
Respuesta: ← No es función. Podemos ver que al aplicar la prueba de la vertical para $x \in [-3, +\infty)$ se tienen 2 imágenes por lo tanto no es función. Sería función si rotamos la gráfica tal que sea cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.	Comentario dirigido al profesor: ....

Figura 5. Situación uno del taller diagnóstico inicial

En la primera situación (Figura 5) se esperaba que cuando los profesores en formación evaluaran la respuesta presentada, tuvieran en cuenta que variable está en función de cual, es decir si x estaba en función de y, o si y estaba en función de x. Lo anterior, con el fin de aclarar cuál sería el conjunto de salida, y cuál el conjunto de llegada. Si se toma como conjunto de salida los valores de x, y de llegada el conjunto de los valores de y, está representación no se puede considerar como una función, y la justificación que se da en la respuesta es válida, ya que de alguna forma está indicando el trasfondo de la prueba de la recta vertical al indicar que para cada valor de $x \in [-3, +\infty)$ se tienen dos imágenes. Sin embargo, quien da la respuesta cae en el error de incluir el valor de $x = -3$ en el intervalo ya para ese valor la gráfica no está tomando dos valores de y. En el caso contrario, al tomar como conjunto de salida los valores de y, y como conjunto de llegada los valores de x, esa representación sí se consideraría como una función, y el argumento que se muestra en la respuesta no es válido porque el que sea o no función no depende de la concavidad de la parábola.

Al igual que en la situación 1, en la situación 4 (Figura 6) no basta con argumentar que la representación si es una función por la prueba de la recta vertical, sino que dicha consideración siempre va a depender de qué conjunto se tome como el dominio y cuál como el rango de la función.

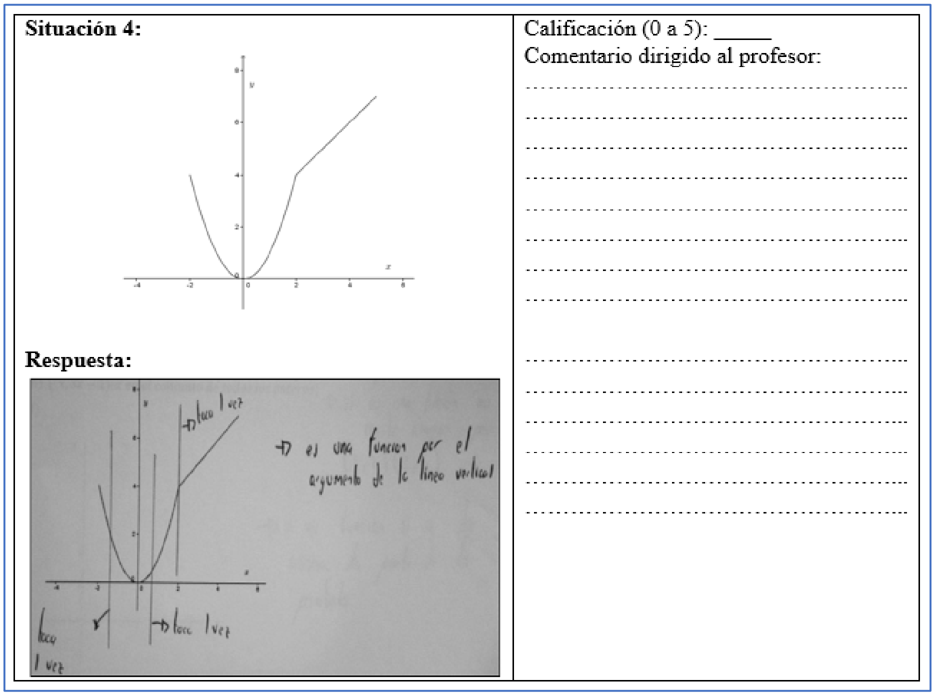


Figura 6. Situación cuatro del taller diagnóstico inicial

La segunda situación (Figura 7), se planteó con el fin de que el profesor en formación identificara el conjunto de pares ordenados como una función, pues como lo reporta Olvera-Martínez (2015), los profesores presentan dificultad para identificar una función expresada de esa forma.

Situación 2: $\{(1,2-x): x \in R\}$

Respuesta: Sí es una función porque para cada valor de x existe el valor 1 correspondiente.

Calificación (0 a 5):_____
Comentario dirigido al profesor:

Figura 7. Situación dos del taller diagnóstico inicial

Se esperaba que el profesor en formación identificara que cuando se toman los valores de *x* que pertenecen a los números reales como el conjunto de salida, y las parejas ordenadas (1, 2-*x*) como conjunto de llegada, a cada valor de *x* le corresponderá una única pareja ordenada, por lo tanto, dicha situación puede considerarse como una función. Un aspecto importante aquí, es que el valor de *x* del dominio es diferente al valor de *x*=1 de la pareja ordenada. Ahora bien, lo que se esperaba era que cuando el profesor en formación analizara la respuesta que se muestra, diera cuenta que no se está tomando esa representación como pareja ordenada y que hacen faltan condiciones para que se pueda afirmar lo que se afirma. Puede notar que realmente lo que nos indica la respuesta es que al tomar como conjunto de salida los valores de *x* que pertenecen a los números reales y los relaciona mediante la expresión 2-*x* y a su vez envía estos valores a 1, sí podría considerarse dicha representación como una función.

En la situación tres (Figura 8) se presentan las respuestas de dos profesores de matemáticas a la tabla que relaciona un nombre con un adeudo.

Situación 3:

Deuda total de los miembros de un club deportivo:

Nombre	Adeudo ($)
Ana	1030
Juan	740
Raúl	210
Isis	420
Luis	740
Sara	1030
José	375
Karla	560
Pedro	740

Respuesta 1:

No es una función.
No puede convertirse en función.
No hay manera de asociar un nombre con una deuda mediante una expresión.

Respuesta 2:

No es función, porque el dominio no son números reales.
Si lo cambio por un conjunto de números reales sí sería.

Calificación 1 (0 a 5): _____
Comentario dirigido al profesor 1:

Calificación 2 (0 a 5): _____
Comentario dirigido al profesor 2:

Figura 8. Situación tres del taller diagnóstico inicial

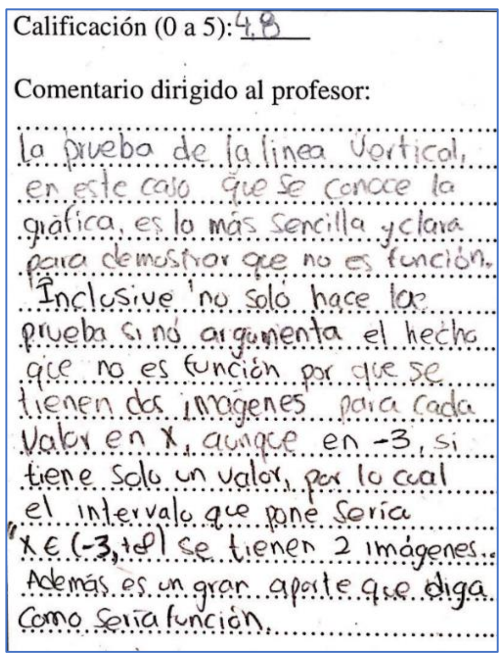
Para la primera respuesta se esperaba que el profesor en formación identificara la idea errónea que se muestra, la cual consiste en pensar que para que exista la función siempre debe existir una expresión algebraica que relacione los elementos de un conjunto de salida con los de un conjunto de llegada. Por su parte, para la segunda respuesta puede percatarse que únicamente se está admitiendo el conjunto de los números reales como el dominio de la función. Se puede decir que esta idea va arraigada a la definición de función con la cual el profesor esté familiarizado. Por ejemplo, la definición dada por Dirichlet (1837) (citado en Boyer, 1986, p. 687) admite únicamente valores numéricos para las variables que se relacionan:

> Si una variable y está relacionada con otra variable *x*, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a *x*, hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente *x*.

Y por su parte Zill y Wright (2011, p.2), definen una función en términos generales, es decir hablan de una regla de correspondencia entre conjuntos X y Y: “Una función de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento *x* en X exactamente un elemento *y* en Y".

4.1.1.2 Implementación y negociación de significados del taller de significados iniciales. Como se tenía previsto, la intervención del taller diagnóstico inicial se llevó a cabo durante dos (2) horas. En la primera hora, se desarrolló la hoja de trabajo que fue entregada a cada uno de los profesores en formación para que contestaran individualmente. En la segunda hora, se realizó la puesta en común donde se reflexionó sobre cada una de las respuestas de ellos.

En este apartado se describen algunas de las respuestas dadas por Mariana, Tania y Angélica en cada uno de los ítems de este primer taller.



Calificación (0 a 5): 4.8

Comentario dirigido al profesor:

la prueba de la linea Vertical, en este caso que se conoce la gráfica, es lo más sencilla y clara para demostrar que no es función. Inclusive no solo hace la prueba si nó argumenta el hecho que no es función por que se tienen dos imagenes para cada Valor en X, aunque en -3, si tiene solo un valor, por lo cual el intervalo que pone sería "$x \in (-3, +\infty)$ se tienen 2 imágenes. Además es un gran aporte que diga como sería función.

Figura 9. Respuesta de Tania a la situación 1

Inicialmente, se rescata la Respuesta de Tania a la situación 1 quien asignó una calificación alta a la respuesta y deja ver que está de acuerdo con la respuesta que allí (Figura 5) se muestra. Tania, tal como se evidencia en la Figura 9, admite la prueba de la recta vertical como argumento para decidir si una gráfica es o no función. Además, valora la justificación que allí se da de que a cada valor de *x* le debía corresponder un solo valor de y para poder considerarse función. No obstante, al parecer no le da importancia a indicar que variable se considera como el dominio y cual como el rango de la función.

Se presenta a continuación, lo que Tania dejó ver en la puesta en común sobre el dominio y el rango de la gráfica presentada:

Integrante 1: ¿Qué pasa si la variable dependiente fuera la *x*?
Integrante 2: Pues sí sería función.
Integrante 3: Pero es que también es claro, que equis(*x*) siempre es el dominio, y ye(y) las imágenes, o sea en la definición uno ya lo da por hecho.
Integrante 4: Lo que pasa es que cuando uno ve cálculo uno viene ya acostumbrado a que el dominio es el *x* y el rango es el *y*.
Integrante 5: Y de todas maneras el profesor copia, *x* que pertenece al intervalo, entonces se tiene como presente que *x* sería el dominio.
Integrante 4: Exacto, sí.
Integrante 1: Por eso, pero ahí él le está acomodando su dominio.
Integrante 4: exactamente, para la respuesta que el dio.
Integrante 5: Personalmente, en las clases de cálculo, el dominio siempre va a ser *x*, y el rango a va a ser *y*.
Tania: exacto, y el caso la primera situación es el ejemplo que le dan a uno, de cuando NO es una función.

(Episodio 1)

Tania deja ver que siempre consideró los valores de la equis (*x*) como el dominio, y los valores de la ye (*y*) como el rango, ya que en sus clases de cálculo siempre se trabajó así. Esta idea es compartida con lo reportado por Even (1993), quien menciona que los profesores en formación tienden a asumir el eje *x* como el dominio, y el eje y como el rango de una función cuando se les presenta una gráfica en el plano cartesiano.

En el caso de la situación 4 (Figura 6) que se presenta una situación similar a la situación 1, ninguno de los integrantes de la CoP consideró la posibilidad de tomar los valores de ye (y) en función de los valores de equis (*x*), particularmente en la Figura 10 se muestra la respuesta de Angélica. Ella admite que la prueba de la recta vertical puede considerarse un argumento válido para decidir si una gráfica en el plano cartesiano es o no función, siempre y cuanto se cumpla para todos los valores de f. Angélica no hace énfasis sobre los valores de f a los que hace referencia.

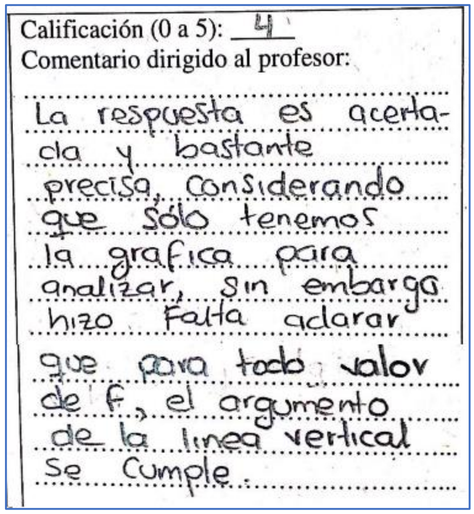

Calificación (0 a 5): 4
Comentario dirigido al profesor:
La respuesta es acertada y bastante precisa, considerando que sólo tenemos la grafica para analizar, sin embargo hizo falta aclarar que para todo valor de f, el argumento de la linea vertical se cumple.

Figura 10. Respuesta de Angélica a la situación 1

Podemos inferir desde la puesta en común que a los valores que Angélica estaba haciendo referencia son los valores de la variable *x*, ya que durante esta, hace referencia a que estos valores son los que en la respuesta dada en la Situación 4 (Figura 11), intersecan la función con las rectas verticales allí trazadas. Veamos la transcripción fiel de lo que dijo Angélica:

> **Angélica:** Yo le puse 4, porque a pesar de que hizo [trazó] tres líneas esa no es toda la gráfica, pues hace falta aclarar que eso de la línea vertical se cumple para todos los valores y no solo para los tres que él tomó.
> **Moderadora 2:** ¿Para todos los valores de qué?
> **Angélica:** De la función, o sea para los puntos de la función.
>
> *(Episodio 2)*

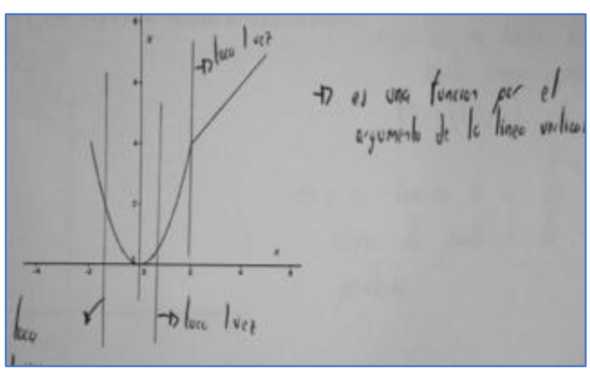


Figura 11. Respuesta presentada en la situación 4

Durante el desarrollo de la situación 1 y 4 se pudo evidenciar que la prueba de la recta vertical es el argumento que los profesores de matemáticas en formación utilizan para identificar si una gráfica representa una función o no, no obstante, no se cuestionan sobre si estas representaciones gráficas podrían ser función de ye (y) en equis (x).

En relación con la negociación de significados producto del desarrollo de la situación 2 (Figura 7) por parte la comunidad, se pudieron observar las mismas dificultades, por parte de los profesores en formación, reportadas por Olvera-Martínez (2015). Estas dificultades estuvieron relacionadas con la identificación del conjunto de pares ordenados que describe una función, que en términos de Castañeda (2014), una función es un conjunto f de pares ordenados tal que no existen dos pares distintos con la misma primera componente ($(a,b),(a,c) \in f \rightarrow b = c$), donde el dominio de la función es el conjunto de primeras componentes ($Dom(f) = \{a \in A\colon Existe\ b\ con\ (a,b) \in f\}$) y la imagen de la función es el conjunto de segundas componentes ($Im(f) = \{b \in B\colon Exite\ a\ con\ (a,b) \in f\}$).

En la solución de la situación 2 surgieron diferentes respuestas en torno a la notación de la representación mostrada. Algunos profesores en formación identificaron que dicha representación era una función lineal con pendiente -1 y corte con el eje y en 1,2. Otros identificaron esta situación como una recta vertical, por lo tanto, consideraron que esta representación no es una función. Veamos en la Figura 12 la respuesta de la profesora en formación Mariana.

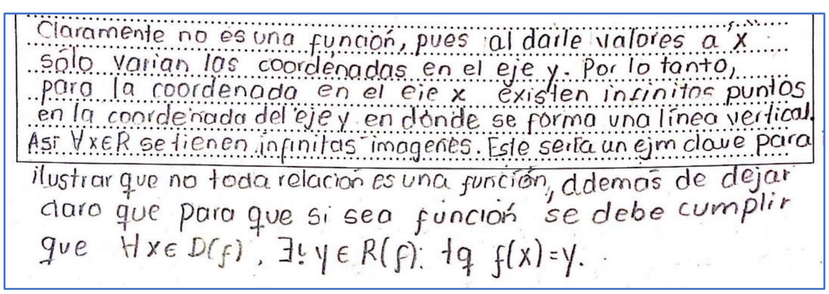
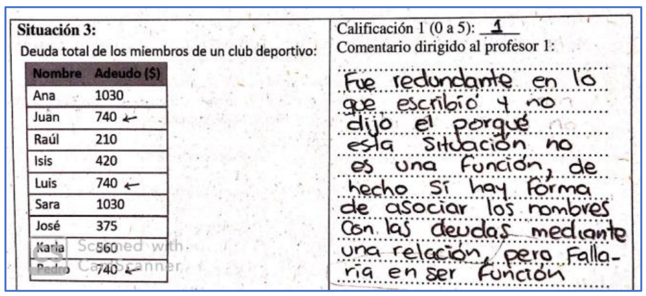

Claramente no es una función, pues al darle valores a x
solo varian las coordenadas en el eje y. Por lo tanto,
para la coordenada en el eje x existen infinitos puntos
en la coordenada del eje y en donde se forma una línea vertical.
Así $\forall x \in R$ se tienen infinitas imágenes. Este sería un ejm claro para
ilustrar que no toda relación es una función, además de dejar
claro que para que si sea función se debe cumplir
que $\forall x \in D(f)$, $\exists!\, y \in R(f)$: tq $f(x)=y$.

Figura 12. Respuesta de Mariana a la situación 2

En la respuesta de Mariana podemos ver que, a pesar de poner a variar los valores de x, toma como conjunto de salida únicamente x=1, por lo tanto, ella concluye que para el valor de x=1 corresponden infinitos puntos en la coordenada del eje y, y por ello se forma una línea vertical. Esto nos deja ver que Mariana sin dar una representación gráfica en el plano cartesiano, sí estaba pensando en ella.

Ante la situación 3, Angélica admite que sí se puede establecer una relación sin necesidad de ser mediante una expresión algebraica, no obstante, en su hoja de trabajo y durante la puesta en común dejar ver que dicha relación no es una función.


Situación 3:

Deuda total de los miembros de un club deportivo:

Nombre	Adeudo ($)
Ana	1030
Juan	740 ←
Raúl	210
Isis	420
Luis	740 ←
Sara	1030
José	375
Karla	560
Pedro	740 ←

Calificación 1 (0 a 5): 1

Comentario dirigido al profesor 1:

Fue redundante en lo que escribió y no dijo el porqué esta Situación no es una función, de hecho sí hay forma de asociar los nombres Con las deudas mediante una relación, pero Fallaria en ser función

Figura 13. Respuesta de Angélica a la situación tres

En la Figura 13 podemos ver que Angélica señala los valores “740” correspondientes a los nombres de Juan, Luis y Pedro, y en la puesta en común menciona que es por dicho argumento que esa relación no puede ser una función. Veamos lo que dice Angélica:

Angélica: No se puede mediante una expresión relacionar los datos que hay ahí, pero si se pueden relacionar.
Tania: Yo traté de buscarla, pero no encontré, porque uno puede poner, la persona 1 le corresponde…
Angélica: Que la relación exista, pues si existe, que sea función es otra cosa. No es función, porque, por ejemplo, Juan va a estar relacionado con el precio de él, de Sara, y de Pedro.
Integrante 1: o sea si es una relación, pero no es una función.
Angélica: ah sí, o sea hay una relación, pero no es función.
Integrante 2: Pero no, por ejemplo, la de x al cuadrado, cuando x vale 1, y para -1, vale lo mismo y es función, entonces no me parece que porque 740 sea de Juan y de Pedro no quiere decir que no sea función. Y para mi si es función, porque si uno hace un gráfico así (señala

el tablero), cambie el 1 por Ana, cambie el 2 por Juan, y se ve que cada uno está relacionado con un elemento del recorrido. [Posterior a este comentario se dieron otras reflexiones].
Angélica: Es que yo estaba pensando como en una función inyectiva pero igual pues primero me parece que fue muy redundante la respuesta, y segundo porque si hay forma de hacer una relación para que sea función, … está errado en el concepto de función y es demasiado redundante parea ser un profesor, debe ser más contundente con sus respuestas.

(Episodio 3)

Angélica estaba confundiendo la definición de función con la definición de función inyectiva, a lo que otro de los integrantes de la CoP dando el ejemplo de la función x^2, la hicieron caer en cuenta del error que estaba cometiendo. Esta idea errónea es expuesta en Ronau, Meyer y Crites (2014), quienes mencionan que los estudiantes pueden tener la dificultad de pensar que siempre al contradominio también le corresponde un solo valor del dominio.

Para esta situación también encontramos el caso en el que los profesores en formación consideran que la tabla presentada en la situación 3 sí se puede considerar como una función, como es el caso de Mariana (Figura 14). Ella considera que el dominio de una función no necesariamente deben ser números reales, y que la situación planteada es una función ya que está cumpliendo el argumento que para cada elemento del dominio (variable nombre) le corresponde un solo elemento del rango (variable adeudo).

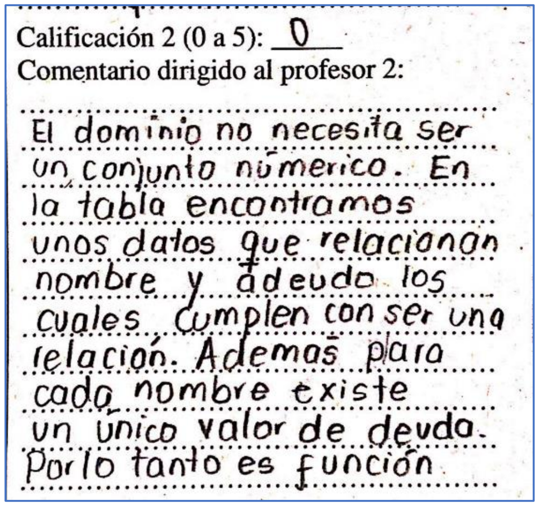

Calificación 2 (0 a 5): 0
Comentario dirigido al profesor 2:
El dominio no necesita ser un conjunto númerico. En la tabla encontramos unos datos que relacionan nombre y adeudo los cuales cumplen con ser una relación. Ademas para cada nombre existe un único valor de deuda. Por lo tanto es función.

Figura 14. Respuesta de Mariana a la situación tres

En este apartado se describieron aspectos referentes al proceso de negociación durante la implementación y puesta en común del taller diagnóstico inicial. En el siguiente apartado se hace referencia a algunos significados de la función que surgieron de este primer taller.

4.1.1.3 Significados iniciales de la función. En la Tabla 3 se resumen los principales significados de la función que exhibieron los integrantes de la CoP, rescatando las evidencias de las profesoras en formación Angélica, Mariana y Tania, en el taller de significados iniciales. En este taller, como se mencionó en el apartado 4.1.1. (i), el objetivo no era indagar sobre el pensamiento didáctico y orquestal, por ello, en este capítulo se hace mención de los significados asociados al pensamiento matemático.

Los resultados muestran que los profesores en formación identificaron como características de la función la existencia de dos conjuntos los cuales están relacionados de manera que cumplan la relación de unicidad, no obstante, como fue el caso de las tres profesoras en formación, no dan importancia a especificar cuál de los dos conjuntos está en función del otro.

También se identificó la idea de que los profesores en formación admiten la prueba de la recta vertical para indicar que una gráfica en el plano cartesiano representa una función, lo que da paso para identificar que, para ellos en una representación gráfica siempre el dominio va a ser el eje horizontal (*x*) y el rango es el eje vertical (y).

En estas primeras ideas que exhibieron los profesores en formación se evidenciaron también diferentes dificultades que estos presentan al momento de definir una función, por ejemplo, el caso de las profesoras Angélica y Mariana que presentaron dificultad para identificar un conjunto de pares ordenados como una función.

Otras dificultades fueron las presentadas por Angélica y Mariana. Por una parte, Angélica dejó ver que presenta confusión entre la definición de función y la definición de función inyectiva, ya que en su hoja de trabajo dejó ver que en una función a cada elemento del rango le debe corresponder un solo elemento de su dominio y, por otra parte, Mariana dejó ver que toda función se debe poder representar gráficamente en el plano cartesiano.

Como se pudo ver anteriormente, los significados con los que iniciaron los profesores en formación en el trabajado colaborativo dentro de la CoP, marcaron varias ideas y dificultades que reporta la literatura y que fuimos mencionando a lo largo del ítem anterior (ii), para lo cual desde nuestra perspectiva genera cierta inquietud ya que como se mencionó en el apartado 1.1, los profesores en formación para poder cursar el curso de didáctica del cálculo ya han pasado por un proceso de formación teórica.

Tabla 3

Significados iniciales del pensamiento matemático: características de la función

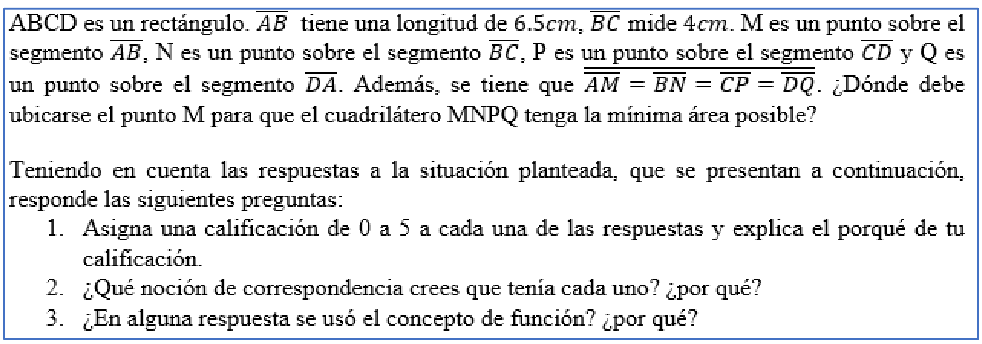
<table>
<tr><th>Angélica</th><th>Tania</th><th>Mariana</th></tr>
<tr><td colspan="2">La prueba de la línea vertical se usa para identificar si una gráfica es una función.</td><td>Toda función se puede representar gráficamente en el plano cartesiano (conjunto de pares ordenados).</td></tr>
<tr><td colspan="2">En la representación gráfica de una función los valores del dominio corresponden al eje horizontal (x) y los valores del rango corresponden al vertical (y).</td><td>En una función a cada elemento del dominio le debe corresponder un solo elemento del rango.</td></tr>
<tr><td>No siempre las funciones se pueden representar por medio de una expresión algebraica.</td><td>En una función a cada elemento del dominio le debe corresponder un solo elemento del rango.</td><td></td></tr>
<tr><td>En una función a cada elemento del rango le debe corresponder un solo elemento del dominio.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

4.1.2 Taller 2. Reflexión y negociación (variación). En el segundo taller se presenta una situación problema con cuatro soluciones dadas por algunos profesores de matemáticas, con el fin de que los profesores en formación identificaran en esas respuestas los conceptos matemáticos utilizados y discutieran sobre las ventajas y limitaciones de los recursos utilizados por quienes dieron las respuestas.

Al igual que en el taller de significados iniciales, se usó el modelo de pregunta planteado por Juarez, Arredondo y Pluvinage (2014), en el que se ofrecen un conjunto de respuestas a un problema, con el fin de promover la reflexión por parte de los profesores. Las respuestas presentadas en la hoja de trabajo también fueron retomadas de Olvera-Martínez (2015), quien lo aplicó con profesores de bachillerato de Ciudad de México.

4.1.2.1 Análisis previo del taller de reflexión y negociación (variación). El segundo taller tenía como objetivo confrontar al profesor en formación con su pensamiento variacional por medio del acercamiento dinámico y algebraico de una función cuadrática. El tiempo previsto para este taller fue de 120 minutos, de los cuales en 60 se llevaría a cabo el desarrollo de los incisos propuestos en la hoja de trabajo y en los otros 60 se realizaría la puesta en común de sus reflexiones.

La actividad del taller de variación fue planteada tal como aparece en la Figura 15. Por medio de estas preguntas se quería confrontar el pensamiento matemático del profesor en formación al momento de evaluar diferentes respuestas dadas que involucran acercamientos dinámicos y algebraicos de la función.


ABCD es un rectángulo. $\overline{AB}$ tiene una longitud de $6.5cm$, $\overline{BC}$ mide $4cm$. M es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$, N es un punto sobre el segmento $\overline{BC}$, P es un punto sobre el segmento $\overline{CD}$ y Q es un punto sobre el segmento $\overline{DA}$. Además, se tiene que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$. ¿Dónde debe ubicarse el punto M para que el cuadrilátero MNPQ tenga la mínima área posible?

Teniendo en cuenta las respuestas a la situación planteada, que se presentan a continuación, responde las siguientes preguntas:

1. Asigna una calificación de 0 a 5 a cada una de las respuestas y explica el porqué de tu calificación.
2. ¿Qué noción de correspondencia crees que tenía cada uno? ¿por qué?
3. ¿En alguna respuesta se usó el concepto de función? ¿por qué?

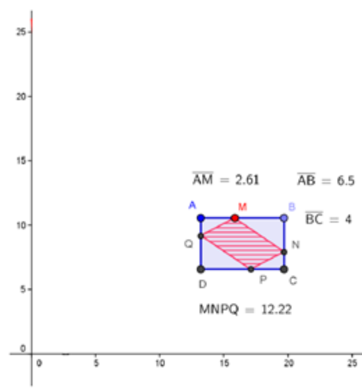
Figura 15. Preguntas y situación del taller sobre variación

La primera respuesta entregada del problema es la presentada en la Figura 16. Sobre ella, se esperaba que el profesor en formación identificara que “Laura” estaba presentando una aproximación empírica (usando GeoGebra) a la solución del problema. Además, se creía que ellos validarían esa respuesta usando también el software. En esa respuesta se observa que por medio de la visualización de la representación gráfica en GeoGebra y la representación tabular, se logró encontrar de forma aproximada la ubicación del punto M para que el cuadrilátero MNPQ tuviera mínima área. A pesar de no ser una respuesta justificada teóricamente, se esperaba que el profesor en formación reflexionara sobre el papel que jugó el software matemático interactivo GeoGebra para el entendimiento del problema.

También se estimaba que el profesor en formación identificara la noción de correspondencia que está inmersa en la situación, la cual cosiste en identificar que cuando el punto M se mueve, el segmento AM varia y los valores del área del cuadrilátero MNPQ también varían.

Respuesta de Laura

Observé los valores de la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de MNPQ que se obtenían cuando el punto M se movía sobre el segmento $\overline{AB}$. En la representación geométrica en Geogebra observé que cuando la longitud del segmento AM crece, el área del cuadrilátero MNPQ disminuye hasta llegar a un punto (mínimo) en el que él área comienza a aumentar. Ubiqué de manera aproximada el punto mínimo en la representación geométrica y encontré que la longitud del segmento $\overline{AM}$ está entre $2.61, 2.62\ y\ 2.63cm$ y el área aproximada de MNPQ es $12{,}22cm^2$. Adicional, en la hoja de cálculo registré valores de la relación entre la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de MNPQ y comprobé sus valores mínimos.



Hoja de Cálculo

	A	B
1	x(S)	y(S)
2	2.01	12.98
3	2.11	12.75
4	2.21	12.57
5	2.31	12.42
6	2.41	12.31
7	2.51	12.25
8	2.61	12.22
9	2.71	12.23
10	2.81	12.29
11	2.91	12.38
12	3.01	12.51
13	3.11	12.69
14	3.21	12.9
15	3.31	13.15
15	3.41	13.44
17		

Calificación:

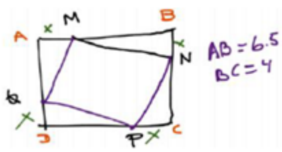
Figura 16. Respuesta de la profesora Laura al problema del rectángulo

En la segunda respuesta presentada (Figura 17), se muestra una representación geométrica (a lápiz y papel) y una justificación algebraica del problema. Se esperaba que el profesor en formación identificara que por medio de la representación gráfica del problema se estaba admitiendo una relación entre los valores QP, MN, PN, QM y una variable *x* que depende de la ubicación del punto M.

Se estimaba que el profesor en formación identificara que, aunque se intentó dar una justificación algebraica, quien da la respuesta cae en el error de considerar el cuadrilátero

MNPQ como un rectángulo y tampoco llega a alguna conclusión. Podemos inferir que esto se debe a que en la representación estática que se muestra, aparentemente se forma un rectángulo al unir los puntos M, N, P y Q, lo que se esperaba no ocurriría realizando una representación dinámica por medio de un software.

Respuesta de Paola



Voy a sacar las expresiones algebraicas de los lados del cuadrilátero QMPN.
Sea QP=MN=$\sqrt{(6.5-x)^2+x^2}$; utilizando el teorema de Pitágoras ya que son triángulos rectángulos por construcción.
$PN = \sqrt{x^2+(4-x)^2} = QM.$

$$\rightarrow \text{el área del cuadrilátero } MNPQ = PN.MN$$
$$\rightarrow \square MNPQ = \left(\sqrt{x^2+(4-x)^2}\right)\left(\sqrt{(6.5-x)^2+x^2}\right)$$
$$= \sqrt{(x^2+16-2x+x^2)(42.25-13x+x^2+x^2)}$$
$$= \sqrt{(2x^2-2x+14)(2x^2-13x+42.25)}$$

Calificación:

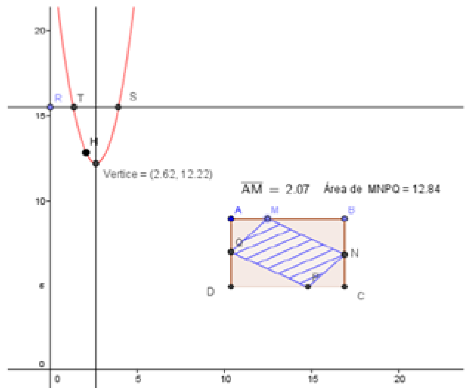
Figura 17. Respuesta de la profesora Paola al problema del rectángulo

En la Figura 18 vemos la tercera respuesta presentada por otro profesor (Paola). En esta respuesta se pretendía que el profesor en formación diera cuenta de la relación de correspondencia entre los valores del segmento AM y el área del cuadrilátero MNPQ que se identificó por medio de la representación geométrica, gráfica y tabular. Además, se esperaba que pudiera identificar que, al relacionar las dos variables antes mencionadas por medio de una herramienta de GeoGebra, estas representaban una función cuadrática.

Del procedimiento mostrado en la respuesta se puede notar que el gráfico arrojado por el software es una parábola cóncava hacia arriba y que posteriormente se procedió a identificar el vértice de la parábola para así encontrar el mínimo de la función. No obstante, el profesor en formación debe dar cuenta de que, aunque la respuesta dada es válida, en ella hizo falta dar condiciones para poder hablar en términos de una función. Por ejemplo, que el dominio de la función va a variar entre 0 y 4 cm ya que la longitud máxima que puede tomar el segmento AM es el valor del lado más pequeño del rectángulo dado, es decir, 4 cm.

Respuesta de Gerardo

En Geogebra realicé la representación geométrica y en una hoja de cálculo registré los valores del segmento $\overline{AM}$ y el área de MNPQ a medida que se movía el punto M. Al realizar el gráfico de estos valores identifiqué que se trataba de una parábola. Posteriormente, tracé una perpendicular al eje vertical que intersecaba la parábola en dos puntos, luego tracé la mediatriz de esos dos puntos y en su intersección con la parábola ubiqué el vértice con coordenadas (2.62,12.22).



Calificación:

Figura 18. Respuesta del profesor Gerardo al problema del rectángulo

Por último, encontramos la respuesta mostrada en la Figura 19. Para esta, al igual que la tercera respuesta mostrada al profesor en formación, se puede evidenciar que el procedimiento para resolver el problema primero fue encontrar una función que lo representara, con la diferencia que, en esta, la función fue encontrada algebraicamente. Se esperaba que el profesor en formación identificara que se encontró una relación de correspondencia con una variable *x*, no obstante, no se clarifica dicha variable a que corresponde y que condiciones tiene y que a pesar de que el procedimiento es correcto, el no dejar claridad sobre la variable *x* todo se vuelve inconsistente.

Se esperaba que, durante el análisis realizado a cada una de las respuestas presentadas anteriormente, se dieran reflexiones alrededor del pensamiento didáctico y orquestal del profesor en formación. Respecto al pensamiento didáctico, se esperaba que los integrantes de la CoP reflexionaran sobre el planteamiento de la situación y las estrategias (heurísticas) que usaron para solucionar el problema, si estas fueron de ayuda para el entendimiento y solución de este. De igual manera, que reflexionaran sobre las metodologías de enseñanza y las formas de evaluar respuestas.

Respuesta de Isabel

Área de los 4 triángulos rectángulo

$$= x(4-x) + (6.5-x)(x)$$
$$= 4x - x^2 + 6.5x - x^2$$
$$= 10.5 - 2x^2$$

Ahora el área del rectángulo $ABCD = 4(6.5) = 26cm^2$

$\therefore$ El área del cuadrilátero $= 26 - (10.5x - 2x^2)$

$= 26 - 10.5x + 2x^2$(restamos el área de los 4triangulos rectángulos al área total)

$= 2x^2 - 10.5x + 26$(Expresión para el área del cuadrilátero MNPQ

$$f(x) = 2x^2 - 10.5x + 26$$

Dado que es una parábola que abre hacia arriba, el vértice es el punto mínimo.

$$\rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10.5)}{2(2)} = \frac{10.5}{4} = 2.625$$
$$\rightarrow f\left(\frac{10.5}{4}\right) = 2(2.625)^2 - 10.5(2.625) + 26$$
$$\rightarrow f(2.625) = 12.21875$$

$\therefore$Por lo tanto el área mínima de MNPQ es 12.21875 cuando $AM = 2.625$

Calificación:

Figura 19. Respuesta de la profesora Isabel al problema del rectángulo

Respecto al pensamiento orquestal, se esperaba que el profesor en formación reflexionara sobre si los recursos utilizados en las respuestas de los profesores (tecnología, lápiz y papel) fueron necesarios y suficientes para abordar la situación.

4.1.2.2 Implementación y negociación de significados del taller de reflexión (variación). El proceso de intervención del segundo taller se llevó a cabo durante 120 minutos como se tenía previsto. Cada uno de los profesores en formación tuvo acceso a un computador que contaba con el software GeoGebra. Tuvieron un tiempo de 90 minutos para desarrollar la hoja de trabajo y durante los siguientes 30 minutos se procedió a realizar la puesta en común de la misma.

4.1.2.2.1 Negociaciones del pensamiento matemático. En este apartado recuperamos evidencias que dan cuenta de la noción de variación que los profesores en formación tenían, de cómo esta se fue transformando con el desarrollo del taller, así como las discusiones que se posibilitaron dentro de la CoP.

En la respuesta que da Angélica sobre la respuesta mostrada en la (Figura 16), se puede evidenciar el valor que ella le da a la representación geométrica y tabular para abstraer los intervalos donde varían las magnitudes de la situación, tal como se puede evidenciar en la Figura 20.

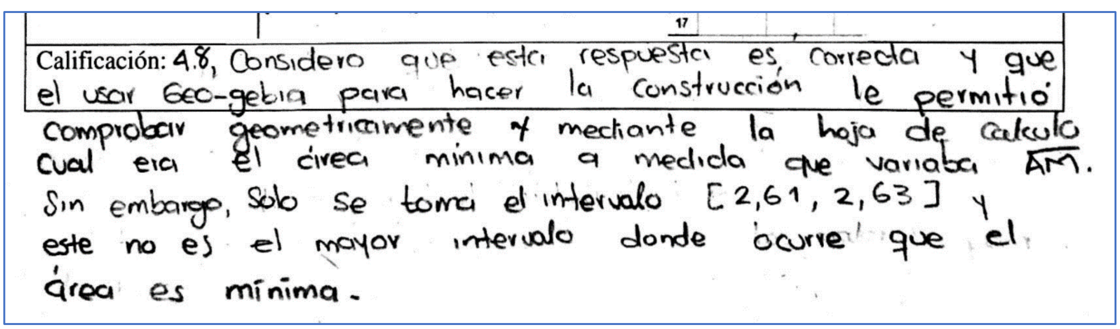
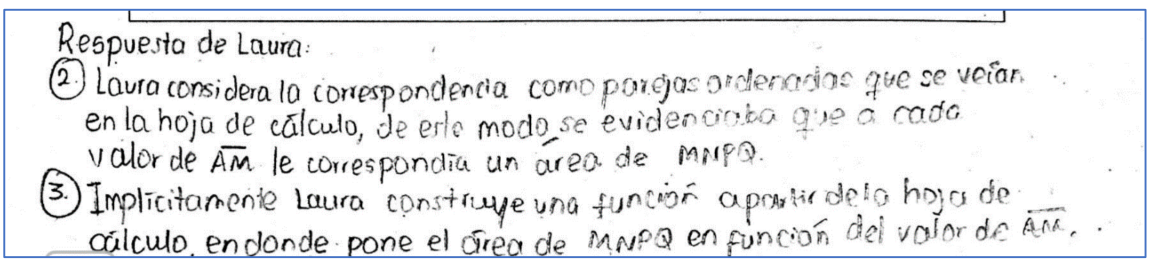

17
Calificación: 4.8, Considero que esta respuesta es correcta y que
el usar Geo-gebra para hacer la construcción le permitió
comprobar geometricamente y mediante la hoja de calculo
cual era el area minima a medida que variaba $\overline{AM}$.
Sin embargo, Solo se toma el intervalo [2,61, 2,63] y
este no es el mayor intervalo donde ocurre que el
área es mínima.

Figura 20. Respuesta de Angélica a la primera respuesta del taller de variación

Durante la puesta en común, Angélica ratifica lo escrito en su hoja de trabajo y adicionalmente muestra que, para ella, la noción de correspondencia se ve reflejada en la relación de variación que hay entre el segmento AM y el área del cuadrilátero MNPQ. A continuación, se puede ver la transcripción de lo dicho por Angélica:

> **Angélica:** Yo le puse 4,8 porque bueno, al igual que mi compañera también observé lo mismo que existe una relación entre el segmento AM como varia y pues el área del cuadrilátero y pues le puse 4,8 porque si ella va a dar una respuesta en intervalos que fue 2,61 y 2,63 no es tan precisa porque en GeoGebra se pueden ver más valores y es de 2,58 a 2,68 y está en 12,90.
>
> *(Episodio 4)*

Al igual que Angélica, en la Figura 21 se evidencia que Mariana le da valor a la representación tabular del problema para inferir la noción de correspondencia y de función que se refleja en la situación. Ella identificó la correspondencia que existe entre el valor del segmento AM y el área del cuadrilátero MNPQ como una relación de parejas ordenadas que cumple la propiedad de la unicidad, es decir, que a cada valor distinto que tome el segmento AM, le corresponde un solo valor del área del cuadrilátero MNPQ.



Respuesta de Laura:
(2) Laura considera la correspondencia como parejas ordenadas que se veían en la hoja de cálculo, de este modo se evidenciaba que a cada valor de $\overline{AM}$ le correspondía un área de MNPQ.
(3) Implícitamente Laura construye una función a partir de la hoja de cálculo, en donde pone el área de MNPQ en función del valor de $\overline{AM}$.

Figura 21. Respuesta 2 de Mariana a la primera respuesta del taller de variación

Como se evidenció en el Pensamiento Matemático de Angélica y Mariana, ellas identifican características de la función en representaciones geométricas y tabulares de relaciones entre dos variables. Desde la perspectiva de Steele & Hillen (2012), es importante que los profesores identifiquen y distingan las funciones de otras relaciones en sus diferentes representaciones ya que este es un aspecto importante para la enseñanza del concepto de función.

Las respuestas que dieron los integrantes de la CoP sobre la respuesta mostrada en la Figura 17, estuvieron centradas en el proceso algebraico y en los errores que se muestran en dicho proceso, un caso de ello es el de Mariana (Figura 22). Para ella, cuando se trabaja con funciones se puede limitar a trabajar con sus expresiones algebraicas ya que, mediante estas, el procedimiento que se esté realizando es más valido y mejor justificado. Con esta idea se puede ver una limitación en el Pensamiento Matemático de Mariana, ya que en términos de Hitt (2003), cuando un profesor se limita a trabajar con la representación algebraica de la función, difícilmente sus alumnos llegarán a una comprensión profunda del cálculo.

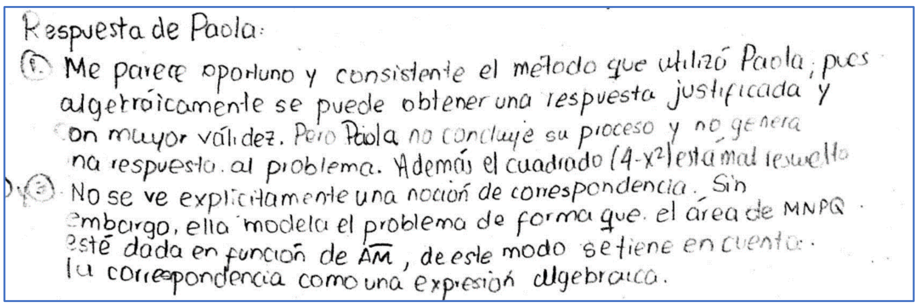

Respuesta de Paola:
① Me parece oportuno y consistente el método que utilizó Paola; pues algebráicamente se puede obtener una respuesta justificada y con mayor validez. Pero Paola no concluye su proceso y no genera una respuesta al problema. Además el cuadrado $(4-x^2)$ está mal resuelto
② No se ve explícitamente una noción de correspondencia. Sin embargo, ella modela el problema de forma que el área de MNPQ esté dada en función de $\overline{AM}$, de este modo se tiene en cuenta la correspondencia como una expresión algebraica.

Figura 22. Respuesta de Mariana a la segunda respuesta del taller de variación

Un caso en el que el centro de atención no fue el proceso algebraico y sus errores, fue el de Angélica. En la Figura 23 se puede ver que Angélica realizó un análisis de la situación planteada en la hoja de trabajo y evidenció que el cuadrilátero que se forma al unir los puntos M, N, P y Q no tiene las propiedades de un rectángulo, por lo tanto el área a encontrar no puede ser base por altura.

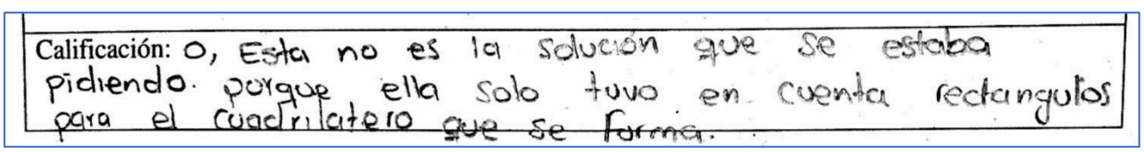

Calificación: 0, Esta no es la solución que se estaba pidiendo. porque ella solo tuvo en cuenta rectangulos para el cuadrilatero que se forma.

Figura 23. Respuesta de Angélica a la segunda respuesta del taller de variación

En las evidencias presentadas anteriormente, se muestra una dificultad que ya ha sido reportada por diferentes autores, como Ronau et al. (2014). Dicha dificultad tiene que ver con la poca importancia que le dan los profesores al papel del dominio en la caracterización de una función. No obstante, dentro de la CoP una de las integrantes, Tania, por medio de las respuestas de la Figura 24 y Figura 25 a la respuesta mostrada en la Figura 18 y la Figura 19 respectivamente, se puede evidenciar que para ella si es importante, cuando se trabaja con funciones, mencionar las características del dominio de esta. Tania argumenta que para hablar de la función cuadrática que está modelando la situación, es necesario hablar de las condiciones de los valores que puede tomar el segmento AM; es decir, se debe definir el dominio de la función.

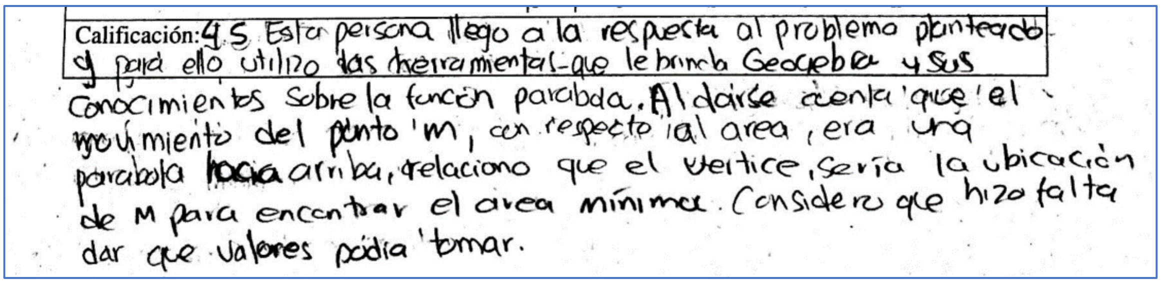

Calificación: 4.5 Esta persona llego a la respuesta al problema planteado y para ello utilizo las herramientas que le brinda Geogebra y sus conocimientos sobre la función parabola. Al darse cuenta que el movimiento del punto M, con respecto al area, era una parabola hacia arriba, relaciono que el vertice, sería la ubicación de M para encontrar el area minima. Considero que hizo falta dar que valores podía tomar.

Figura 24. Respuesta de Tania a la tercera respuesta del taller de variación

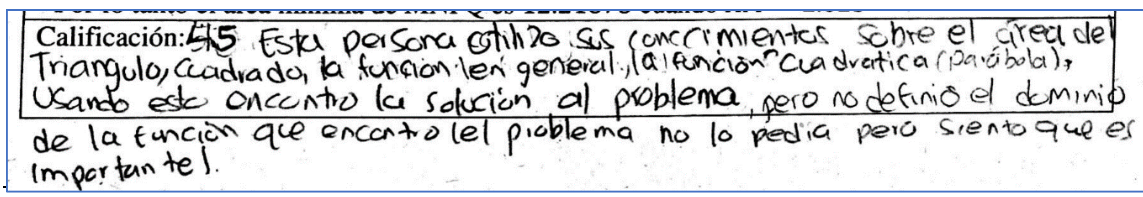

Calificación: 4.5 Esta persona utilizo sus conocimientos sobre el área de Triangulo, Cuadrado, la función en general, la función cuadratica (parábola), Usando esto encontro la solución al problema, pero no definio el dominio de la función que encontro (el problema no lo pedia pero siento que es importante).

Figura 25. Respuesta de Tania a la cuarta respuesta del taller de variación

En el pensamiento matemático de los integrantes de la CoP, por medio del taller de variación, se pudo evidenciar que estos identifican la noción de correspondencia y de función por medio de las diferentes representaciones de la función, geométrica, gráfica, y principalmente la algebraica.

La Tabla 4 presenta los significados alrededor del pensamiento matemático correspondientes al taller de variación.

Tabla 4

Significados asociados al pensamiento matemático en el taller de variación

Angélica	Mariana	Tania
Identifica la correspondencia entre variables por medio de la representación gráfica y tabular.	Considera que la representación algebraica de una función permite justificar y dar más validez a un procedimiento	Concibe importante determinar bajo que dominio una relación se puede considerar función.
	Identifica la variación de dos magnitudes en la representación tabular.	
	Reconoce que una función debe cumplir la propiedad de la unicidad.	

4.1.2.2.2 Negociaciones del Pensamiento Didáctico. Sobre el Pensamiento Didáctico, los significados negociados se centraron sobre la valoración que los integrantes de la CoP dieron a las respuestas de los profesores y a la argumentación de por qué la asignación de sus calificaciones.

Desde el modelo R-y-A, en el Pensamiento didáctico se consideran las concepciones que los profesores tienen en torno a las metodologías de enseñanza y a las formas de evaluar. Allí se establece que, es la evaluación del aprendizaje uno de los aspectos más conflictivos para los profesores, ya que suele suceder que no tienen claro los aspectos sobre los cuales van a centrar su atención.

En el pensamiento didáctico de Mariana, se puede evidenciar la importancia que tiene para ella el proceso algebraico y el valor que le da al software GeoGebra (al igual que Angélica (ver (Episodio 4) como herramienta para validar y resolver un problema. Veamos lo que dijo Mariana referente a la respuesta mostrada en la Figura 16:

> **Mariana:** Pues yo le coloqué 3.5 porque me parece necesario el uso del software, pero pues ella no hace nada más para corroborar la respuesta. Por ejemplo, yo realicé el diagrama en GeoGebra y me arroja valores desde 2,57 hasta 2,67, que sigue dando la misma área y pues ella simplemente da una aproximación de 2,61 a 2,63. O sea, pienso que ella debió utilizar

esto para generar una hipótesis y para mirar qué era lo que pasaba con el área, para poder dar un soporte más algebraico y no solo con el uso de GeoGebra.

(Episodio 5)

Alrededor de esta idea, Dick y Hollebrands (2011) comentan sobre la importancia que tiene la tecnología como medio para fomentar hábitos de resolución de problemas. Dicha importancia hace alusión a que cuando se aplica tecnologías, la solución del problema adquiere otro significado.

Por otro lado, en las hojas de trabajo y durante la puesta en común, se encontró que la única profesora en formación que dio cuenta del error que se observa en la respuesta presentada en la Figura 17, fue Angélica. En su hoja de trabajo (Figura 23) deja ver que asigna una calificación de cero porque el procedimiento que se muestra en parte está bien, sin embargo, no se están considerando todos los posibles cuadriláteros que se forman.

En el pensamiento reflexivo de Angélica se evidencia una coordinación entre su Pensamiento Matemático y su Pensamiento didáctico. Para ella realizar evaluación sobre la respuesta mostrada, acude a su Pensamiento Matemático para identificar las falencias y fortalezas que se presentan en los procedimientos mostrados.

Durante la puesta en común, los profesores en formación presentaron argumentos del porqué de la asignación de sus calificaciones altas a la Figura 27. La moderadora 2 al ver que no se reflexionaba alrededor de lo que se quería con esta respuesta, indagó un poco más a los integrantes por medio de una serie de preguntas, a lo que Angélica respondió:

Moderadora 2: Según esa respuesta, cuando ella está encontrando el área del cuadrilátero que se forma por dentro, ¿cómo está tomando esa área?
Integrantes 1: Como un rectángulo
Moderadora 2: y, ¿eso es un rectángulo? Verifiquen en GeoGebra, muevan los puntos, ¿Es un rectángulo?
Angélica: No siempre
Moderadora 2: ¿Qué nota le pondrían?

Angélica: cero ¿no? , independientemente de si los cálculos están bien o están mal, no tiene por qué hallar el área como un rectángulo.

(Episodio 6)

Se infiere que las observaciones dadas por los profesores en formación a la respuesta dos, tiene que ver con la representación estática que se muestra del problema. Zbiek y Heid (2011) mencionan que las tecnologías permiten crear ambientes en los que el estudiante puede entender mejor el trabajo “a mano” y aprender nuevos métodos para resolver problemas.

Para la respuesta tres mostrada en la Figura 18, nuevamente se ve la concepción del valor que los integrantes le dan al software como herramienta para validar y resolver un problema. En la transcripción que se presenta a continuación, se evidencia el valor que Angélica y Tania (Figura 24) le dieron al Software:

Tania: Yo le puse 4.5, porque él (profesor Gerardo), llegó a la respuesta y a lo que ella usó una herramienta de GeoGebra se dio cuenta que era una parábola y usó que, pues como la parábola abría hacia arriba entonces el punto mínimo iba a estar en el vértice, y usó totalmente el programa para hallarlo, y no puse 5 porque ya hay una función pero pues no definió el dominio de la función. [Posterior a este comentario se dieron otras reflexiones]
Angélica: Bueno yo le pues 4.8… porque él (profesor Gerardo) hizo un procedimiento válido, dio una respuesta correcta, pero sin embargo no especificó bien que el vértice de la parábola es encontrar el área mínima del cuadrilátero, o sea dio la respuesta, pero no dijo por qué esa era.

(Episodio 7)

Alrededor de la cuarta respuesta (Figura 19), todos los profesores en formación coincidieron que, de las cuatro respuestas presentadas, esta es la respuesta más correcta y por lo tanto asignaron calificaciones altas. No obstante, consideran que a la respuesta le hicieron falta ciertas condiciones. Angélica considera que, para plantear la solución de un problema, se deben dejar claras y explicitas las condiciones de este, ya sea por medio de su representación gráfica o por medio de representación geométrica. Veamos lo que dijo Angélica durante la puesta en común:

Angélica: Yo le puse 4.8 porque de todos modos a ellos les estaban dando como unas condiciones y ella planteó fórmulas, y pues para usar fórmulas uno debe tomarlas como de alguna parte, ella usó (4-x) pero dónde están esos valores, yo considero que le faltó un dibujo o una representación gráfica, no exactamente una gráfica de función pero si al menos el dibujo para ver de dónde sacó esos valores, o sea le puse 4.8 por eso, hizo todo el procedimiento correcto pero le hizo falta.

(Episodio 8)

En el pensamiento didáctico de los profesores en formación durante el taller de variación, se evidenció que una de las estrategias que estos tienen en cuenta para validar y resolver un problema, es el uso del software GeoGebra. Por medio de este, ellos apoyan sus argumentos para evaluar las respuestas presentadas. Otra de las estrategias para resolver problemas que se pudo evidenciar, fue la de expresar de forma explícita las condiciones del problema, ya sea por su representación gráfica o su representación geométrica.

Se presentan en la Tabla 5 los significados asociados al pensamiento didáctico correspondientes al taller de variación.

Tabla 5

Significados asociados al pensamiento didáctico en el taller de variación

Angélica	Mariana	Tania
Concibe el uso del software GeoGebra como herramienta para validar y resolver problemas.		
Considera que la representación geométrica y gráfica de una función es buena estrategia para abordar un problema.	Concibe la representación algebraica como herramienta fundamental para resolver problemas.	

4.1.2.2.3 Negociaciones del Pensamiento Orquestal. Se retoman aquí, evidencias sobre la forma como los participantes del CoP asumen el uso de los diferentes recursos (en este caso GeoGebra) para desarrollar la actividad matemática del aula.

Angélica deja ver que por medio del software GeoGebra se pueden precisar mejor las conjeturas dadas a un problema. En el (Episodio *4*, Angélica cuestiona la respuesta mostrada en la Figura 16 ya que menciona que por medio del software hubiese podido precisar mejor los intervalos en los que puede estar el área máxima del cuadrilátero.

De igual forma, para la respuesta mostrada en la Figura 17, Angélica resalta la importancia del software debido a que por medio de la representación dinámica del problema que se puede hacer en este, se pueden visualizar las propiedades de los objetos matemáticos tratados. Al respecto, Tania coincide diciendo, que es a través del software que se facilita identificar el dominio de la función. A continuación, se puede ver la transcripción fiel de lo que dijeron las profesoras en formación durante la puesta en común:

> **Angélica:** Digamos, yo pienso que, en este caso, para la respuesta dos (Figura 17), GeoGebra sirve, porque uno puede dar cuenta que el cuadrilátero interno no es un rectángulo. Si uno hiciera la construcción a mano, uno lo cuadra para que quede rectángulo, pero, en GeoGebra uno se da cuenta que no en todos los puntos es un rectángulo. O sea, son cositas que ayudan, como tal no le van a solucionar el problema, pero ayudan a solucionarlo.
> **Tania:** Ayuda a observar el dominio de la función.
>
> *(Episodio 9)*

Esta idea que se acaba de exponer alrededor de la tecnología es apoyada desde la teoría por Santos-Trigo & Reyes-Rodríguez (2011). Estos autores mencionan que, mediante la tecnología, los profesores tienen la oportunidad de examinar el modelo creado desde diferentes perspectivas, con el objetivo de identificar un conjunto de relaciones y conjeturas.

Por su parte, Mariana considera que el uso del software GeoGebra sirve para inferir la respuesta del problema y no para dar solución a este. Mariana realiza reflexiones del software en torno a las discusiones y reflexiones sobre aspectos didácticos de la función que se habían dado previamente por medio de exposiciones en los encuentros con la CoP. Ella considera que el uso del software debe ser regulado ya que este no puede reemplazar el razonamiento que cada uno debe hacer para abordar el problema. Durante la puesta en común, Mariana expresó lo siguiente:

> **Mariana:** Aquí como también hemos hablado en todas las exposiciones, es el hecho de no abusar del programa como para que toda la respuesta se base en el programa, porque estoy como reemplazando el análisis que debería hacer yo misma…
>
> *(Episodio 10)*

En términos de Pea (1985) y Moreno-Armella (2002), Mariana admite el uso de la tecnología como amplificador; es decir, las tecnologías son un complemento al pensamiento o razonamiento del estudiante. Por el contrario, para Tania la tecnología funciona como reorganizador, que, en términos de los mismos autores, significa que el pensamiento del estudiante se ve afectado por la tecnología ya que su uso hace que cambie las acciones para abordar el problema.

En la Figura 24 se puede evidenciar que Tania considera que el procedimiento mostrado en la Figura 18, es válido ya que los argumentos están basados en lo visualizado en el software.

Como se pudo dar evidencia, para los integrantes de la CoP el uso de las tecnologías como recurso para la resolución de problemas es bastante aceptado, no obstante, no todos le dan la misma funcionalidad. Se resumen a continuación en la Tabla 6, los significados alrededor del pensamiento orquestal obtenidos del taller de variación.

Tabla 6

Significados asociados al pensamiento orquestal en el taller de variación

Angélica	**Mariana**	**Tania**
Considera que el software GeoGebra es una herramienta poderosa para identificar características de los problemas.	Reconoce el software GeoGebra como amplificador ya que permite dar hipótesis ante la solución de un problema más no para dar solución a este.	Reconoce el software GeoGebra como reorganizador ya que su uso hace que el estudiante cambie las acciones para abordar el problema.

4.1.3 Taller 3. Reflexión y negociación (función). Para el taller tres se retomaron dos situaciones problema de Fiallo y Parada (2018). Se realizaron adecuaciones a la metodología propuesta por estos autores con la finalidad de adaptarla a dinámicas de las CoP donde se posibilite el intercambio de significados y reflexión alrededor de la función.

4.1.3.1 Análisis previo del taller de reflexión y negociación (función). Este taller tuvo como objetivo confrontar a los profesores en formación con sus conocimientos matemáticos alrededor del significado de la función y las características de diversos tipos de funciones que surgen de problemas de la realidad. Adicional a esto, se quería confrontar el pensamiento reflexivo de los profesores en formación a partir de su experiencia desarrollando los dos problemas propuestos en la hoja de trabajo.

Se tenían previstos 180 minutos para el desarrollo del taller, de los cuales en los primeros 60 minutos se llevaría a cabo el desarrollo de la parte I de la hoja de trabajo y en los siguientes 60 minutos la puesta en común de la misma. En el tiempo restante se estimaba terminar la parte II del taller junto con su puesta en común.

Para cada uno de los dos problemas presentados en la hoja de trabajo, se quería que el profesor en formación contestara las preguntas propuestas e identificara sus fortalezas y/o debilidades conceptuales del tema bajo estudio. Con esto se pretendía que por medio del trabajo colaborativo y el intercambio de hojas de trabajo pudieran reforzar sus conocimientos en relación con los de los demás integrantes de la CoP.

El primero de los dos problemas es el presentado en la Figura 26. Para la solución de este, se esperaba que los profesores en formación tuviesen un nivel de complejidad alto ya que este no se puede representar por medio de una función tradicional (polinómicas o racionales) sino que requiere de trabajar con una función denominada parte entera.

1. En Bucaramanga, en un minutero de telefonía celular se cobra $100 por minuto o fracción.

   a) ¿Cuánto cuesta una llamada de 25 s, 1 min, 1 min 01 s, 1 min 30 s, 2 min 15 s, 2 min 59 s, 4 min 00 s, 5 min 36 s, 9 min 50 s, 23 min 48 s, 1h 15 min 32 s?
   b) Halla la función que representa la interdependencia entre el costo de la llamada y el tiempo.

Figura 26. Primera situación taller de reflexión (función)

Se estimaba que, para dar solución al problema de manera algebraica, los profesores en formación recurrieran a la elaboración de diferentes representaciones como lo son: verbales, gráficas y tablas. Según lo reporta Fiallo y Parada (2018), se esperaba que una primera dificultad que pueden presentar los profesores en formación es, la de interpretar el tiempo en los términos dados.

Para el ítem a), se esperaba que los profesores en formación realizaran los cálculos para cada uno de los tiempos que se pide calcular el costo de la llamada. De aquí, se estimaba que identificaran que el costo de la llamada está en función de la cantidad de minutos o de segundos.

Para dar respuesta al inciso b), se esperaba que al querer generalizar el proceso del ítem a), el profesor en formación identificara que el costo que se va a pagar por cada llamada siempre va a ser un múltiplo de 100. No obstante, con esto no es suficiente para llegar a plantear una expresión algebraica, ya que probablemente un primer planteamiento de la expresión que representa la función será $f(x) = 100x$ por ser la función lineal una de las más trabajadas por los estudiantes, según Steele y Hillen (2012). Otro acercamiento que pueden realizar los profesores en formación es definir una función por partes, es decir, definir una función, con dominio diferente para diferentes intervalos como lo mostramos a continuación:

$$f(x) = \begin{cases} 100 & si\ 0 < x \leq 1 \\ 200 & si\ 1 < x \leq 2 \\ & . \\ & . \\ & . \\ 100n & si\ n-1 < x \leq n \end{cases}$$

No obstante, se esperaba que el profesor en formación que lograra plasmar la anterior representación de la función también lograra identificar que dicha representación se puede representar por medio de la expresión $f(x) = 100[\![x]\!]$, donde *x* son minutos y pertenecen a los números reales positivos. En el caso de tomar el dominio como segundos, la expresión algebraica que representa el problema sería $f(x) = 100\left[\!\left[\frac{x}{60}\right]\!\right]$.

En la segunda situación, la cual se presenta en la Figura 27, se esperaba que el profesor en formación identificara la interdependencia que hay entre las variables el número de años transcurridos a partir de 2014 y la población colombiana, adicional a esto, deberían identificar que existe otra dependencia entre la población de un año y el año inmediatamente anterior.

Para llegar a alguna conjetura, se estimaba que más que realizar operaciones para responder a las preguntas planteadas, los profesores en formación identificaran los patrones y relaciones que enmarcan el problema. Por ejemplo, para responder al inciso a), se esperaba que plantearan sus respuestas numéricas dejando planteadas las expresiones para así poder identificar el patrón. Por ejemplo, para el año 2020 se podía proceder de la siguiente manera:

$0 \rightarrow 2.014 \rightarrow 47'.661.790$

$1 \rightarrow 2.015 \rightarrow 47'.661.791 + 47'.661.790 * (0{,}01) = 47'.661.790 * (1 + 0{,}01)$

$= 47'.661.790 * (1{,}01)$

$2 \rightarrow 2016 \rightarrow 47'.661.790 * (1{,}01) + 47.661.790 * (1{,}01) * (0.01)$

$= 47.661.790 * (1{,}01)(1 + 0.01) = 47'.661.790 * (1{,}01) * (1{,}01)$

$= 47.661.790 * (1{,}01)^2$

$3 \rightarrow 2017 \rightarrow 47.661.790 * (1{,}01)^2 + 47.661.790 * (1{,}01)^2(0{,}01) = 47.661.790 * (1{,}01)^3$

$4 \rightarrow 2018 \rightarrow 47.661.790 * (1{,}01)^3 + 47.661.790 * (1{,}01)^3(0{,}01) = 47.661.790 * (1{,}01)^4$

$5 \rightarrow 2019 \rightarrow 47.661.790 * (1{,}01)^4 + 47.661.790 * (1{,}01)^4(0{,}01) = 47.661.790 * (1{,}01)^5$

$6 \rightarrow 2020 \rightarrow 47.661.790 * (1{,}01)^5 + 47.661.790 * (1{,}01)^5(0{,}01) = 47.661.790 * (1{,}01)^6$

Es decir, por medio del anterior análisis, se puede conjeturar que al transcurrir n número de años después del 2014 (dominio), la población (rango) se puede representar por medio de la función $c(n) = 47'661.790 * (1{,}01)^n$.

2. Según datos suministrados por el DANE, al finalizar 2014 la población colombiana era de 47'661.790. Se estima que el promedio de crecimiento sea del 1% aproximadamente.

   a) ¿Cuántos colombianos existirán finalizando el presente año? ¿En 2050? Explica tus respuestas.
   b) Halla la función que representa la interdependencia entre el año y la población colombiana. Explica tu procedimiento.

Figura 27. Segunda situación taller de reflexión (función)

Según lo reportado por Fiallo y Parada (2018), se esperaba que, si los profesores en formación no escribían de forma organizada y desglosada la obtención de los datos de la población de acuerdo con el año, es poco probable que puedan generalizar con alguna expresión algebraica de la función que representa la situación.

En la parte II del taller de reflexión y negociación sobre la función (Figura 28) por medio del diseño de un plan de clase se buscaba reflexionar sobre las preguntas presentadas en la Figura 4. Con esto se esperaba ver como los profesores en formación después de pasar por el desarrollo y puesta en común de la primera parte del taller, lograban plasmar su pensamiento reflexivo en el diseño de clase.

PARTE II:
Diseñar un plan de clase para un curso de Cálculo Diferencial en el cual el tema principal sea introducir el concepto de función; tener en cuenta las dos situaciones planteadas en la **PARTE I** y las reflexiones que se dieron en la puesta en común de estas. Para el diseño del plan de clase tener en cuenta lo siguiente:

- Objetivos de la clase
- Desarrollo de la clase (de qué manera llevará a cabo la clase para cumplir con los objetivos de enseñanza propuestos)
- Recursos didácticos (reflexionar sobre el uso de la tecnología)

Figura 28. Parte II del taller de reflexión (función)

Se estimaba que los profesores en formación reflexionaran y realizaran los ajustes que consideraran convenientes a la parte I de la hoja de trabajo de tal manera que pudieran adecuar dichas situaciones a un plan de clase en el que introdujeran el concepto de función en un curso de Cálculo Diferencial. Para ello, les pedimos reflexionar sobre los recursos utilizados para el desarrollo de la clase, principalmente, si es conveniente el uso de las tecnologías digitales para tener una mejor comprensión de los problemas por parte de los que serían sus estudiantes.

4.1.3.2 Implementación y negociación de significados del taller de reflexión (función).

La implementación y negociación de significados del taller referente a la función se llevó a cabo durante 180 minutos como se esperaba. Estos 180 minutos fueron distribuidos en dos días. El primer día durante 120 minutos se llevó a cabo el desarrollo de la parte I de la hoja de trabajo junto con su puesta en común. En esta parte se trabajó la solución de las situaciones de forma individual y posterior a esto se dio un espacio donde los profesores en formación pudieron reflexionar en relación con las respuestas de otro integrante de la comunidad.

Las hojas de trabajo fueron intercambiadas acorde a las diferentes respuestas presentadas. Por cuestión de tiempo no se dio el espacio para llegar a una solución conjunta por parte de la comunidad y quedó como trabajo individual reflexionar sobre las negociaciones dadas durante la implementación.

El segundo día, durante 60 minutos se llevó el desarrollo de la parte II. A continuación, se describen algunas reflexiones y significados de las integrantes de la CoP durante la implementación del taller.

4.1.3.2.1 Negociaciones del Pensamiento Matemático. En este apartado se presentan evidencias de las reflexiones dadas en el trabajo, tanto individual como colaborativo, que realizaron los integrantes de la CoP alrededor del significado de la función.

En respuesta al ítem a) de la Figura 26, los integrantes de la CoP realizaron el procedimiento esperado desde el análisis previo. Angélica trabajó con el tiempo en segundos, así que, ella identificó intervalos en los que la llamada tenía el mismo costo y así, encontró el valor de la llamada para los tiempos estipulados, como se puede apreciar en la Figura 29.

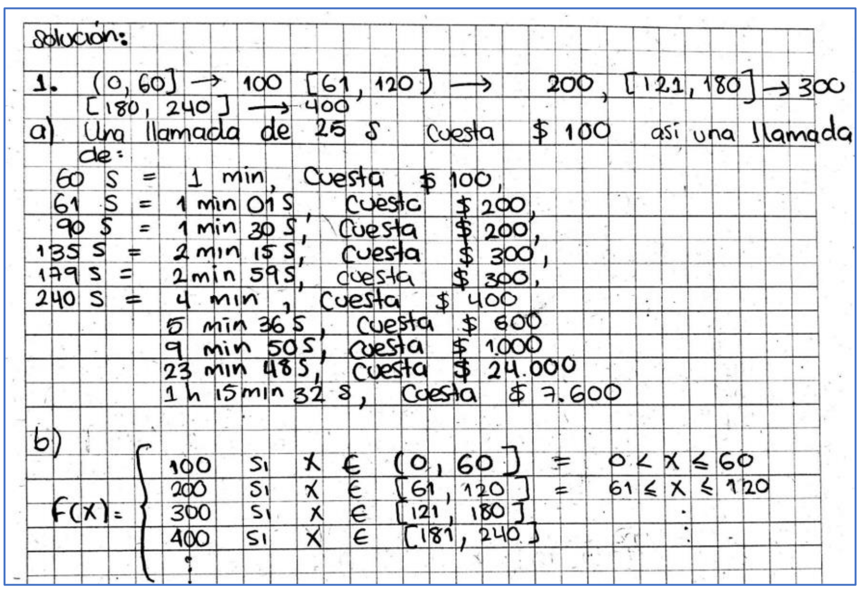

Solución:
1. (0, 60] → 100 [61, 120] → 200, [121, 180] → 300
[180, 240] → 400
a) Una llamada de 25 s cuesta $ 100 así una llamada de:
60 s = 1 min, Cuesta $ 100,
61 s = 1 min 01 s, Cuesta $ 200,
90 s = 1 min 30 s, Cuesta $ 200,
135 s = 2 min 15 s, Cuesta $ 300,
179 s = 2 min 59 s, cuesta $ 300,
240 s = 4 min, Cuesta $ 400
5 min 36 s, Cuesta $ 600
9 min 50 s, Cuesta $ 1.000
23 min 48 s, Cuesta $ 24.000
1 h 15 min 32 s, Cuesta $ 7.600
b)
$$f(x) = \begin{cases} 100 & \text{si } x \in (0, 60] = 0 < x \leq 60 \\ 200 & \text{si } x \in [61, 120] = 61 \leq x \leq 120 \\ 300 & \text{si } x \in [121, 180] \\ 400 & \text{si } x \in [181, 240] \\ \vdots & \end{cases}$$

Figura 29. Respuesta de Angélica a la situación uno del taller de función

Como se esperaba desde el análisis previo, los profesores en formación trabajaron con las diferentes representaciones de la función que modela la situación de la Figura 26. En el caso de Angélica, trabajó con la representación verbal y algebraica del problema. Ella planteó una función por partes donde para diferentes intervalos de tiempo, calculó el costo de la llamada.

Desde el análisis previo, la representación a la que se esperaba que llegara Angélica, es la siguiente: $f(x) = 100\left[\!\left[\frac{x}{60}\right]\!\right]$.

Una dificultad que viene presentado Angélica desde los anteriores talleres es la poca importancia que le da al dominio de las funciones. No obstante, en la puesta en común de este taller, Angélica reflexiona que si hubiese realizado una representación gráfica al igual que su compañera (Tania), hubiese sido más fácil identificar el dominio y el rango de dicha función. Angélica comentó lo siguiente:

> **Angélica:** Yo representé la función solo analíticamente, pero pues veo que mi compañero sí hizo una gráfica y también la representó analíticamente y pues veo que es como más útil porque cuando yo la hice, sí estaba segura de que era así, pero, por ejemplo, no podía ver ni el dominio ni el rango, y considero que con la gráfica es más fácil.
>
> *(Episodio 11)*

La idea plasmada por Angélica durante la puesta en común es ratificada por Ronau et al. (2014), quienes mencionan que de las diferentes maneras que se puede representar una función, la representación gráfica es clave para evidenciar propiedades de esta.

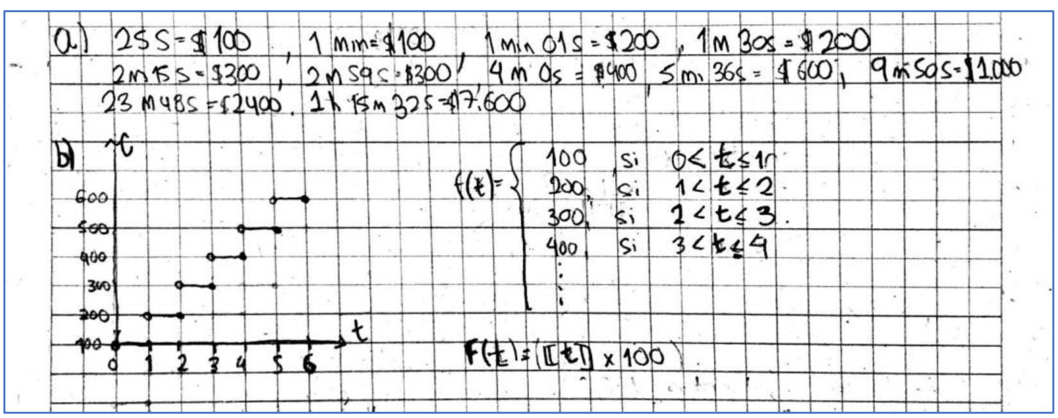


Figura 30. Respuesta de Tania a la situación uno del taller de función

A diferencia de Angélica, Tania interpretó el tiempo de las llamadas en minutos y construyó la representación gráfica de la función que representa la situación y a partir de esta, construyó la representación algebraica de la misma. Ella identificó que estás representaciones corresponden a una función parte entera, como se evidencia en la Figura 30.

En la segunda situación (Figura 27), los profesores en formación presentaron dificultad para identificar la dependencia que había entre el crecimiento de la población de un año especifico y la población del año anterior.

En el caso de Tania y Angélica (Figura 31 y Figura 32), identificaron que la población de cierto año iba a depender únicamente de la población inicial, es decir, de la población del año 2014. Por ejemplo, como para el año 2020 habrán transcurrido 6 años a partir del 2014, la población para este año sería la población inicial más el 6% de la misma, es decir, $47'661.790 + 47'661.790 * (0{,}06)$, lo que indica que siempre va a depender de la población del año 2014. A raíz de esta interpretación, las dos profesoras en formación lograron plasmar una expresión algebraica de la función que representa la situación, la cual depende únicamente de la población inicial y los años transcurridos; y no de la dependencia de la población del año anterior.

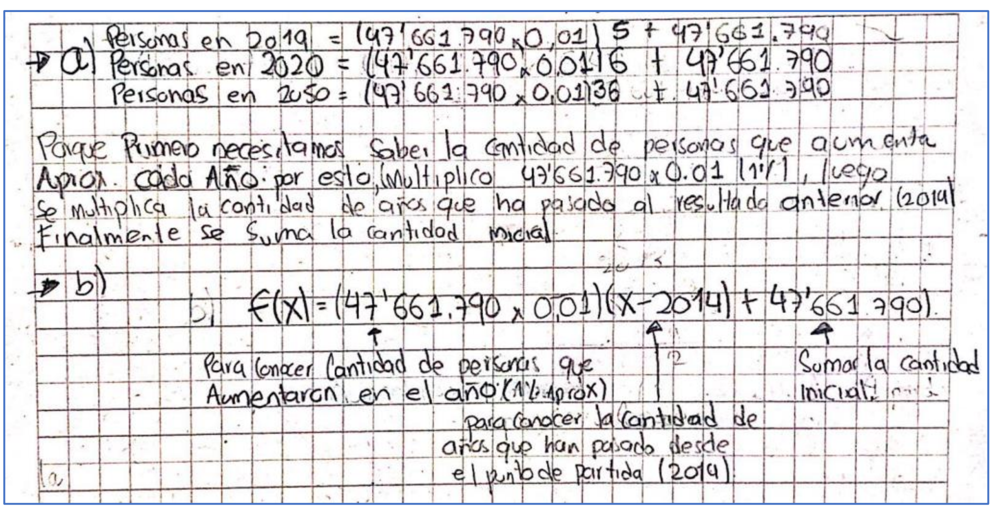


Figura 31. Respuesta de Tania a la situación 2 del taller de función.

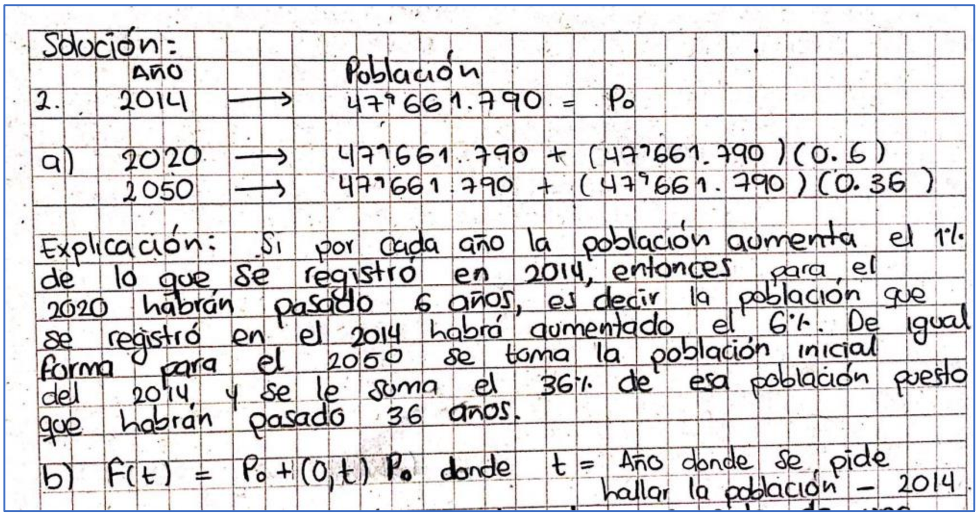
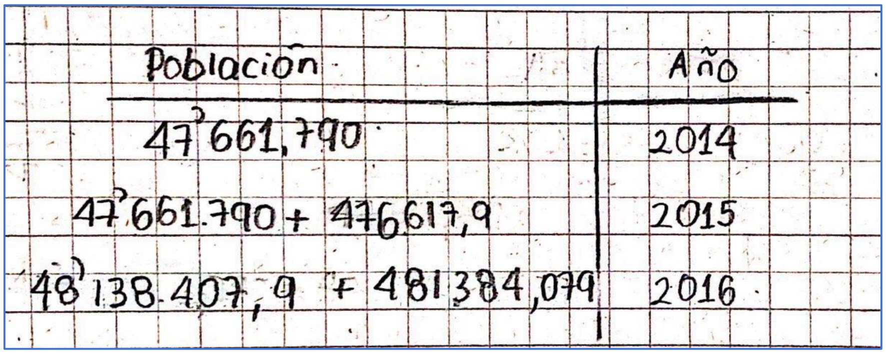

Solución:
Año → Población
2. 2014 → 47'661.790 = P_0
a) 2020 → 47'661.790 + (47'661.790)(0.6)
2050 → 47'661.790 + (47'661.790)(0.36)
Explicación: Si por cada año la población aumenta el 1% de lo que se registró en 2014, entonces para el 2020 habrán pasado 6 años, es decir la población que se registró en el 2014 habrá aumentado el 6%. De igual forma para el 2050 se toma la población inicial del 2014 y se le suma el 36% de esa población puesto que habrán pasado 36 años.
b) $F(t) = P_0 + (0,t)\,P_0$ donde t = Año donde se pide hallar la población − 2014

Figura 32. Respuesta de Angélica a la situación 2 del taller de función

Un caso contrario fue el de Mariana (Figura 33), ella no presentó dificultad para identificar que el crecimiento de la población de un año determinado dependía de la población del año anterior, no obstante, tal como se esperaba desde el análisis previo, al dar un trabajo aritmético a los datos, no logró identificar el patrón de comportamiento de los datos. En sus reflexiones presentadas en la Figura 34, Mariana deja ver que se le dificultó encontrar como se comportaba la relación entre el número de años transcurridos y la población inicial en el 2014, debido a que eran años muy grandes y que el comportamiento de los datos no era lineal.

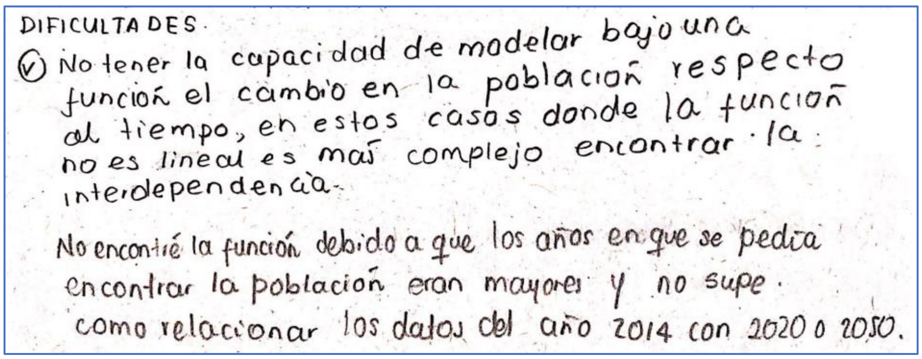
Esta dificultad presentada por Mariana se asocia a la falta de definir mecanismos de constantificación[*] que le posibilitaran la identificación del cambio que un valor sufre para convertirse en otro, que en términos de López-Acosta (2016), es una condición necesaria para poder generalizar un patrón de comportamiento de una secuencia.

[*] Mecanismos de constantificación: son estrategias y razonamientos que dan sustento y permiten elegir de manera significativa sobre el comportamiento de los sistemas, así como para determinar hasta qué orden de variación es necesario considerar para la predicción. (López-Acosta y Montiel 2017. p.921)



Población	Año
47'661.790	2014
47'661.790 + 476617,9	2015
48'138.407,9 + 481384,079	2016

***Figura* 33.** Respuesta de Mariana a la situación 2 del taller de función



DIFICULTADES.
No tener la capacidad de modelar bajo una
función el cambio en la población respecto
al tiempo, en estos casos donde la función
no es lineal es más complejo encontrar la
interdependencia.

No encontré la función debido a que los años en que se pedía
encontrar la población eran mayores y no supe
como relacionar los datos del año 2014 con 2020 o 2050.

Figura 34. Reflexiones de Mariana a la situación 2 del taller de función

Durante el desarrollo de la actividad matemática de este taller, los integrantes de la CoP realizaron un trabajado colaborativo en pro del desarrollo de su Pensamiento Matemático. Se presentaron significados negociados alrededor de la escogencia del dominio para la función que representaba las situaciones, así como el uso de diferentes representaciones para identificar características de esta. También, se presentaron significados negociados sobre las dificultades presentadas alrededor de la identificación de las relaciones entre las variables de cada una de las situaciones.

La Tabla 7 resume los significados asociados al pensamiento matemático pertenecientes al taller de función.

Tabla 7

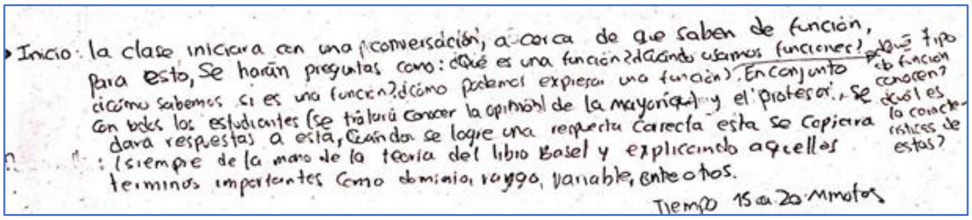
Significados asociados al pensamiento matemático en el taller de función

Angélica	Mariana	Tania
Considera que, al trabajar con relaciones de cambio entre variables, es necesario dejar claras las características de la variable independiente.	Considera que la representación algebraica de una función es más importante que las otras.	Evidencia que la representación gráfica de una función facilita encontrar la expresión algebraica de la misma.
Reconoce que la representación gráfica de una función facilita la identificación de su dominio y su rango.	Cuando trabaja con variables que toman valores muy grandes y que no representan una relación lineal, reconoce que es más complicado evidenciar un patrón de comportamiento para encontrar una expresión algebraica de la función que representa ciertos datos.	Considera relevante el uso de las representaciones gráfica y algebraica para representar situaciones de la vida real.

4.1.3.2.2 Negociaciones del Pensamiento Didáctico. Dentro del Pensamiento Didáctico se desarrolla el conocimiento didáctico, que en términos de Gómez (2007), son los conocimientos y habilidades que tiene un profesor para el análisis didáctico de un tema matemático, procedimiento que debe realizar para el diseño de actividades de la actividad matemática objetivo de la clase.

En la segunda parte del taller de función se dieron reflexiones sobre las estrategias de enseñanza que los integrantes de la CoP tuvieron en cuenta al momento del diseño del plan de clase solicitado en la Figura 28. Particularmente, para el pensamiento didáctico y orquestal se presenta evidencia del plan de clase diseñado por la profesora en formación Tania.

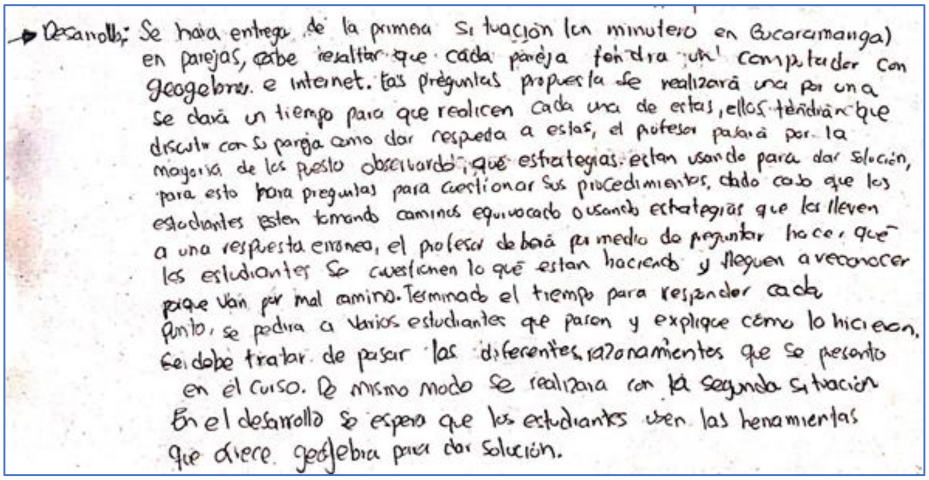
Para cumplir con el objetivo propuesto en su plan de clase, comprender el concepto de función y las características de esta a partir de dos situaciones reales, Tania adoptó una metodología distribuida en tres momentos: inicio (Figura 35), desarrollo(Figura 36) y finalización (Figura 37).



Inicio: la clase iniciara con una conversación, acerca de que saben de función, para esto, se harán preguntas como: ¿Qué es una función? ¿Cuándo usamos funciones? ¿Qué tipo de función conocen? ¿cuál es la característica de estas? ¿cómo sabemos si es una función? ¿cómo podemos expresar una función? En conjunto con todos los estudiantes (se tratará conocer la opinión de la mayoría) y el profesor, se dara respuestas a esta, cuando se logre una respuesta correcta esta se copiara (siempre de la mano de la teoría del libro Basel y explicando aquellos terminos importantes como dominio, rango, variable, entre otros.

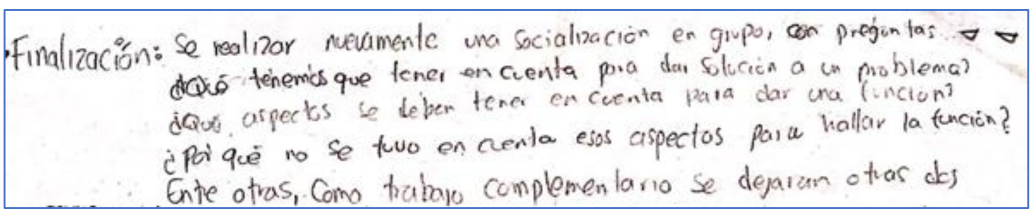
Tiempo 15 a 20 minutos

Figura 35. Diseño del plan de clase de Tania: Inicio



Desarrollo: Se hara entrega de la primera situación (un minutero en Bucaramanga) en parejas, cabe resaltar que cada pareja tendra un computador con geogebra e internet. Las preguntas propuesta se realizará una por una se dará un tiempo para que realicen cada una de estas, ellos tendrán que discutir con su pareja como dar respuesta a estas, el profesor pasará por la mayoría de los puestos observando que estrategias estan usando para dar solución, para esto hara preguntas para cuestionar sus procedimientos, dado caso que los estudiantes esten tomando caminos equivocado o usando estrategias que los lleven a una respuesta erronea, el profesor deberá por medio de preguntar hacer que los estudiantes se cuestionen lo que estan haciendo y lleguen a reconocer porque van por mal camino. Terminado el tiempo para responder cada punto, se pedira a varios estudiantes que pasen y expliquen cómo lo hicieron. Se debe tratar de pasar los diferentes razonamientos que se presento en el curso. De mismo modo se realizara con la segunda situación. En el desarrollo se espera que los estudiantes usen las herramientas que ofrece geogebra para dar solución.

Figura 36. Diseño del plan de clase de Tania: Desarrollo



Finalización: Se realizar nuevamente una socialización en grupo, con preguntas ¿Qué tenemos que tener en cuenta para dar solución a un problema? ¿Qué aspectos se deben tener en cuenta para dar una función? ¿Por qué no se tuvo en cuenta esos aspectos para hallar la función? Entre otras, Como trabajo complementario se dejaron otras dos

Figura 37. Diseño del plan de clase de Tania: Finalización

En el inicio, Tania plantea utilizar los conocimientos previos de los estudiantes para identificar las características de la función que vayan surgiendo y a raíz de esto y con la ayuda del libro de texto, Tania planea realizar una explicación general del concepto de función para consolidarlo y corregir las ideas plasmadas por los estudiantes.

En el Pensamiento Didáctico de Tania se evidencia que tiene presente diferentes estrategias para llegar a plantear el concepto de función. La primera, es aprovechar los conocimientos previos de los estudiantes y la segunda, utilizar como medio el libro de texto para realizar una explicación general. Desde Parada (2011), las explicaciones del profesor son consideradas como un aspecto del Pensamiento Didáctico que permite que el profesor haga las matemáticas más comprensibles para el estudiante.

En la segunda parte del plan, el desarrollo, Tania planea desarrollar las dos situaciones planteadas en la hoja de trabajo del taller 2. Para ello, la estrategia de enseñanza que utiliza Tania tiene como protagonista al profesor. Ella plantea que las situaciones sean trabajadas por cada uno de los estudiantes y que el profesor sea el encargado de identificar las estrategias de resolución de problemas que estén usando y de este modo, poder cuestionar sus procedimientos para ratificarle que va por buen camino o para direccionarlo en el caso que esté haciendo procedimientos erróneos. En términos de Polya (1945), esta estrategia utilizada por Tania es una de las tareas que debe cumplir el profesor para evitar que el estudiante se desvíe en el camino de la solución.

Del mismo modo, desde Moreno (2017) se ratifica un desarrollo en el Pensamiento Didáctico de Tania. La autora menciona que cuando el profesor dentro de su Pensamiento Didáctico cuestiona a los estudiantes para identificar sus dificultades, lo va haciendo consiente de las suyas y de qué manera actuar en estas situaciones para poder superarlas.

Y por último en el plan de clase diseñado por Tania, la finalización, ella propone como estrategia, socializar con todos los estudiantes sobre las heurísticas utilizadas para resolver el problema, así como generalizar los aspectos de la función que se deben tener en cuenta cuando se trabajan situaciones reales.

Esta última estrategia utilizada por Tania para hacer que los estudiantes se acerquen a la comprensión del concepto de función, desde el punto de vista de Polya (1945), es el último paso que se debe realizar en la resolución de problemas ya que es por medio de este, que se pueden integrar y analizar los diferentes acercamientos a la solución de este, así como los argumentos y justificaciones de las conjeturas generadas durante la exploración de los problemas.

En el plan de clase diseñado por Tania, se evidencia un gran desarrollo de su Pensamiento Didáctico, ya que se puede evidenciar que ha sido permeado por las reflexiones dadas durante las discusiones sobre aspectos didácticos del cálculo, particularmente sobre la resolución de problemas, que se habían dado durante los encuentros con la CoP.

A continuación, en la Tabla 8 se presentan los significados de Tania asociados al pensamiento didáctico resultado del taller de función.

Tabla 8

Significados asociados al pensamiento didáctico de Tania en el taller de función

Tania
Considera que identificar las estrategias que los estudiantes utilizan para abordar problemas es clave para orientarlo en la solución del problema.
Propone la socialización de las heurísticas y procedimientos realizados por los estudiantes como paso final en la resolución de problemas ya que, de este modo, se pueden generalizar diferentes aspectos que se tenían como objetivos.

4.1.3.2.3 Negociaciones del Pensamiento Orquestal. Desde el modelo de Reflexión-y-Acción (R-y-A), se requiere ver como los profesores de matemáticas en formación usan los diferentes recursos con los que cuentan en el aula de clase, para lograr caracterizar su Pensamiento Orquestal.

En este apartado, se presentan significados alrededor del Pensamiento Orquestal de Tania reflejados en el plan de clase que diseñó (Figura 35, Figura 36 y Figura 37).

Durante los tres momentos --inicio, desarrollo y finalización-- de la metodología implementada por Tania en el plan de clase, se rescata la pregunta y el uso del software GeoGebra como recursos propuestos para promover la actividad matemática.

Tania propone utilizar la pregunta como recurso para indagar sobre los conocimientos previos del estudiante y como medio para hacer que el estudiante argumente cada uno de sus procedimientos. Por ejemplo, en el inicio plantea cuestionar al estudiante por medio de preguntas como: ¿qué es una función?, ¿cómo sabemos si es una función?, ¿qué tipos de funciones conocen?, y ¿qué características tiene una función?, esto con la intención de conocer sus presaberes.

Por otro lado, el uso de las tecnologías digitales, GeoGebra, es utilizado por Tania con la intención de aprovechar las herramientas que este ofrece. Ella propone hacer uso de dicho recurso desde el primer momento en que los estudiantes se enfrentarían a las situaciones planteadas en su diseño de clase. Desde el punto de vista de Dick y Hollebrands (2011), es importante que el profesor promueva el uso de las tecnologías digitales en la resolución de problemas ya que por medio de este recurso se pueden analizar las condiciones del problema y posteriormente implementar una estrategia de resolución.

En general, el uso del software GeoGebra se ha convertido en un recurso propio de la Comunidad de Practica por ser parte del repertorio compartido que se ha adquirido en cada uno de los encuentros. Desde la discusión y reflexión sobre aspectos didácticos del cálculo, se han proporcionado lecturas de trabajos que incorporan el uso de este recurso con las que se ha tenido como objetivo, reflexionar sobre su uso y en qué momento es necesaria su incorporación.

Por medio de la Tabla 9 se resumen los significados del taller de función asociados al pensamiento orquestal de Tania.

Tabla 9

Significados asociados al pensamiento orquestal de Tania en el taller de función

Tania
Estima que el uso de la pregunta y las herramientas que ofrece el software funcionan como recursos para promover la actividad matemática en el aula.

4.1.4 Taller 4. Reflexión y negociación (función y límite). Para el taller de reflexión: función y límite, se retomó una situación de Fiallo y Parada (2018), para la cual por medio de los acercamientos a lápiz y papel; y el uso del software GeoGebra se buscaba abordarla. Esta situación se planteó para que los profesores en formación seleccionaran y usaran estrategias de la resolución de problemas para llegar al desarrollo de un modelo matemático. También, se buscaba que alrededor de la experiencia en la solución del problema, los profesores en formación reflexionaran sobre los tres pensamientos (Matemático, Didáctico y Orquestal).

4.1.4.1 Análisis previo del taller de reflexión y negociación (función y límite). Con el cuarto taller se tenía como objetivo generar reflexiones en los profesores en formación alrededor de las nociones de aproximación y tendencia.

La hoja de trabajo está diseñada en dos partes. Para la primera parte que estaba compuesta de la situación mostrada en la Figura 38, se estimaba trabajar sobre un lapso de 90 minutos y se quería enfrentar al profesor en formación con sus dominios conceptuales y sus estrategias para la resolución de problemas. También, se pretendía que, por medio del trabajo colaborativo, en parejas discutieran y reflexionaran sobre las soluciones dadas a la situación y llegaran a una solución conjunta.

1.1. Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas.

Figura 38. Situación del taller cuatro (función y límite)

A su vez, el problema estaba compuesto de dos ítems. En el primer ítem (Figura 39) se quería que los profesores en formación modelaran matemáticamente, identificaran y seleccionaran las características relevantes del problema. En la comprensión de este, se esperaba que los profesores en formación, según lo reportado por Fiallo y Parada (2018), presentaran algunas dificultades.

Según lo anterior, contesta:
a) ¿Qué cantidad de medicamento quedaba en su sistema circulatorio al cabo de los 10 días? Justifica tu respuesta.
b) ¿Y si la jugadora hubiera tomado la medicina durante un año, qué cantidad de medicamento quedaría en su sistema circulatorio? ¿Y al cabo de ***n*** días? Justifica tus respuestas.
c) ¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo? Justifica tu respuesta.

Figura 39. Primer ítem parte I taller de reflexión (función y límite)

La primera dificultad hace referencia a la interpretación de la palabra “filtrar” ya que los estudiantes no comprenden si esta hace referencia a que el porcentaje de medicamento que se filtra se queda o se expulsa del cuerpo. La segunda dificultad es la interpretación de la expresión “2 tabletas de 220 miligramos” ya que hay una tendencia a interpretar que las dos tabletas contienen 220 mg; y lo correcto es que cada una contiene 220 mg, es decir, las dos sumarian 440 mg. Por último, la tercera dificultad hace alusión a que una de las interpretaciones que pueden hacer los profesores en formación, es la de considerar que la cantidad de medicamento en el cuerpo se comporta de forma lineal, por lo tanto, proceden a realizar una regla de tres para dar respuesta al ítem a), lo que indicaría que no están dando cuenta que el porcentaje de medicamento que va quedando en el cuerpo depende de la toma inmediatamente anterior.

Se esperaba que para dar solución a los ítems b) y c) el profesor en formación recurriera a generalizar el procedimiento que haya realizado en el ítem a).

Para la comprensión correcta de la situación, se estimaba que el profesor en formación identificara la relación que existe entre la cantidad de medicamento en el cuerpo y el número de tomas del antiinflamatorio y que en dicha relación la cantidad de medicamento en el cuerpo está en función del número de tomas.

En la Tabla 10 se muestra el procedimiento que se esperaba los profesores en formación realizaran para encontrar la cantidad de medicamento en el cuerpo después de transcurrir n días. Para la primera toma la jugadora tendrá el 100% (440mg) de la cantidad de medicamento en su cuerpo. Para la siguiente toma la cantidad de medicamento será la suma de la nueva dosis (440mg) y el 40%=0,4 de la cantidad de medicamento que tenía el cuerpo en la toma anterior, y de igual forma se va comportando para las siguientes tomas. La clave para llegar a encontrar un patrón del comportamiento de cantidad de medicamento es dejar expresado de manera explícita el procedimiento de cada una de las tomas.

Tabla 10

Análisis esperado para el problema del taller de función y límite

Número de toma del antiinflamatorio	**Cantidad de medicamento en el cuerpo (mg)**
1	$= 2 * (220)$ $= 440$
2	$= 440 + 440 * (0,4)$ $= 440\,(1 + 0,4) = 440\,(0,4^0 + 0,4^1)$ $= 616$
3	$= 440 + 440\,(0,4^0 + 0,4^1) * (0,4)$ $= 440(0,4^0 + 0,4^1 + 0,4^2)$ $= 686,4$
4	$= 440 + 440(0,4^0 + 0,4^1 + 0,4^2) * (0,4)$ $= 440(0,4^0 + 0,4^1 + 0,4^2 + 0,4^3)$ $= 714,56$

5	$= 440 + 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3) * (0{,}4)$ $= 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4)$ $= 725{,}824$
6	$= 440 + 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4) * (0{,}4)$ $= 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4 + 0{,}4^5)$ =730,3296
7	$= 440 + 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4 + 0{,}4^5) * (0{,}4)$ $= 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4 + 0{,}4^5 + 0{,}4^6)$ =732,13184
8	$= 440 + 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4 + 0{,}4^5 + 0{,}4^6) * (0{,}4)$ $= 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4 + 0{,}4^5 + 0{,}4^6 + 0{,}4^7)$ =732.852736
9	$= 440 + 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4 + 0{,}4^5 + 0{,}4^6 + 0{,}4^7) * (0{,}4)$ $= 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4 + 0{,}4^5 + 0{,}4^6 + 0{,}4^7 + 0{,}4^8)$ =733.1410944
10	$= 440 + 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4 + 0{,}4^5 + 0{,}4^6 + 0{,}4^7 + 0{,}4^8) * (0{,}4)$ $= 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + 0{,}4^2 + 0{,}4^3 + 0{,}4^4 + 0{,}4^5 + 0{,}4^6 + 0{,}4^7 + 0{,}4^8 + 0{,}4^9)$ $= 733{,}2564378$
n	=440$(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + \cdots + 0{,}4^{n-1})$

Se esperaba que con el análisis mostrado en la Tabla 10, el profesor en formación diera cuenta que cuanto más se vaya aumentando el número de tomas, la cantidad de medicamento en el cuerpo va a tender a cierto número, y que a partir del último término encontrado en el análisis, se puede concluir con el siguiente procedimiento analítico:

$$Cantidad\ de\ medicamente\ para\ la\ toma\ n = 440(0{,}4^0 + 0{,}4^1 + \cdots + 0{,}4^{n-1})$$

$$= 440\left[\sum_{i=0}^{n-1}(0{,}4)^i\right]$$

$$= 440\left[\frac{1-(0{,}4)^n}{1-(0{,}4)}\right]$$

$$= 440\left[\frac{1-(0{,}4)^n}{0{,}6}\right]$$

$$= \frac{2200}{3} = 733{,}\overline{3333}$$

Para el anterior procedimiento, el profesor en formación debe comprender que la suma de los n primeros términos de toda progresión geométrica de razón r, viene dada por: $\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{1-r^n}{1-r}$, y que cuando n tiende a infinito, el término $1-(0,4)^n$ tiende a 1. En términos de límites, cuando n pertenece a los números naturales, la respuesta al ítem c) se puede dar de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} 440\left(\frac{1-(0,4)^n}{0,6}\right) = 733,\overline{333}$$

Es decir, cuando la cantidad de tomas de medicamento sea muy grande, la cantidad de medicamento en el cuerpo va a tender a $733,\overline{333}$mg.

1.2. Abre el archivo de GeoGebra T4_Act-1.3.ggb. Mueve el deslizador ***n*** con la flecha derecha del teclado hasta llegar a 50. Después de la exploración responde las siguientes preguntas.

a) ¿Qué representa el punto P? Explica tu respuesta
b) Utiliza la gráfica para explicar lo que sucede en el nivel de medicamento.
c) Encuentra una fórmula que modele algebraicamente el problema. Explica cómo la hallaste.
d) ¿A qué valor tiende la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo? ¿Por qué?

Figura 40. Segundo ítem parte I taller de reflexión (función y límite)

Con el segundo ítem del problema (Figura 40), se quería que el profesor en formación por medio de la representación dinámica del problema en el software matemático interactivo GeoGebra, verificara o evaluara las inferencias realizadas en el primer ítem del problema. Por ejemplo, si para el primer ítem el profesor en formación infirió que la relación entre las variables número de tomas de medicamento y cantidad de medicamento en el cuerpo es lineal, por medio de la representación dinámica puede dar cuenta que dicha representación no corresponde a una línea continua, sino a una sucesión de puntos que se puede mirar como una función cuyo dominio son los números naturales.

En la segunda parte del taller para la que se esperaba tardar un tiempo de 30 minutos, se quería confrontar al profesor en formación con su pensamiento reflexivo por medio de las preguntas presentadas en la Figura 3 y la Figura 4. Para el pensamiento matemático se quería que los profesores en formación dieran cuenta de las dificultades y fortalezas que presentaron alrededor del desarrollo de la primera parte del taller, particularmente sobre las nociones de aproximación y tendencia, esto con la intención de que puedan reflexionar y trabajar dentro de la CoP sobre las dificultades que presentan alrededor de dichas temáticas.

Para el pensamiento didáctico se quería que los profesores en formación identificaran sus estrategias (entendimiento del problema, diseño y ejecución de un plan) para abordar el problema, con la finalidad de que reflexionaran si bajo esas mismas estrategias pueden ayudar a acercar las nociones de aproximación y tendencia a los estudiantes para que sean más comprensibles para ellos.

Para el pensamiento orquestal, se quería que los profesores en formación reflexionaran alrededor de los recursos utilizados para plantear el problema y para el desarrollo de este. Por ejemplo, si las preguntas planteadas en la hoja de trabajo son suficientes o innecesarias para que al abordar el problema sea comprensible. Al igual con el uso del software GeoGebra, se esperaba que los profesores en formación reflexionaran alrededor de su uso, si fue de apoyo para comprender mejor el problema, o si por lo contrario consideran que no es necesario para el desarrollo de este.

4.1.4.2 Implementación y negociación de significados del taller de reflexión (función y límite). La implementación y puesta en común del taller de función y límite, se llevó a cabo en el tiempo que se estimaba desde el análisis previo. En la primera parte, los profesores en formación de manera individual se enfrentaron a la solución de la situación planteada en la hoja de trabajo.

Posteriormente los integrantes trabajaron colaborativamente en parejas, compartiendo y reflexionando sobre las respuestas de cada uno y llegando a una solución conjunta del problema. Para concluir la primera parte del taller, se generó un espacio de negociación de significados donde los integrantes de la CoP plantearon sus soluciones y reflexionaron sobre estas. Por último, los profesores en formación reflexionaron sobre su pensamiento matemático, didáctico y orquestal respondiendo a las preguntas de la parte II.

A continuación, en términos del pensamiento reflexivo, se presentan evidencias del proceso de negociación que se dio durante la implementación de la hoja de trabajo correspondiente al taller de función y límite.

4.1.4.2.1 Negociaciones del Pensamiento Matemático. En el pensamiento matemático del profesor en formación es importante que estén claros y sean de su completo dominio los contenidos matemáticos, particularmente, cuando se quiere trabajar la temática de funciones y límites, es importante tener presente de que trata las nociones de aproximación y tendencia, las cuales son interpretadas como:

> **Aproximación:** Una variable que toma sus valores en un conjunto numérico, puede aproximarse a un cierto número si los errores absolutos que se cometen, considerando los valores de la variable como aproximaciones del número, son cada vez menores. (Blázquez, S. y Ortega, T, 2002).

Tendencia: La variable tiende a un número cuando los valores son aproximaciones del número y además se aproximan más que cualquier otro valor, es decir, cualquier aproximación se puede mejorar con valores de la variable. (Blázquez, S. y Ortega, T, 2002).

En el desarrollo de la situación planteada en la hoja de trabajo, los profesores en formación dieron evidencia de algunas de las dificultades que se esperaba se presentaran desde el análisis previo, no obstante, posteriormente en el trabajo colaborativo estas se pudieron suplir.

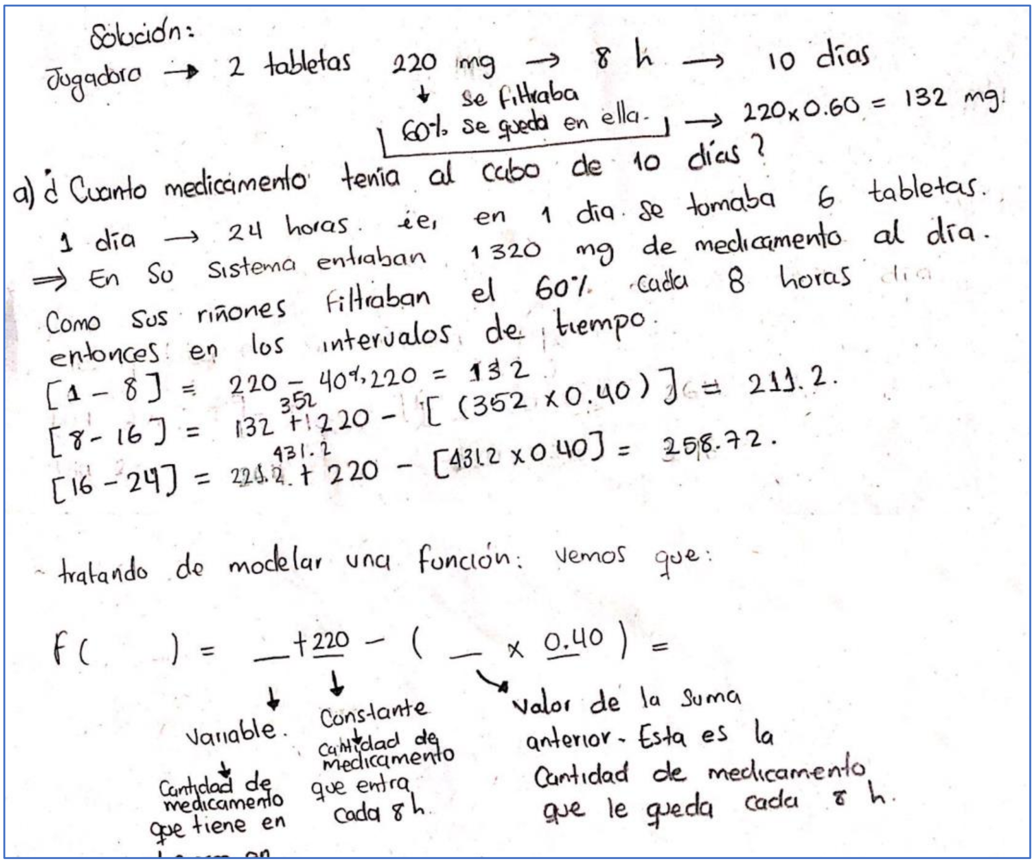

Solución:
Jugadora → 2 tabletas 220 mg → 8 h → 10 días
↓ se filtraba
60% se queda en ella. → 220 x 0.60 = 132 mg.
a) ¿Cuanto medicamento tenía al cabo de 10 días?
1 día → 24 horas. i.e, en 1 día se tomaba 6 tabletas.
⇒ En su sistema entraban 1320 mg de medicamento al día.
Como sus riñones filtraban el 60% cada 8 horas
entonces en los intervalos de tiempo.
[1 – 8] = 220 – 40%.220 = 132
[8 – 16] = 132 + 220 – [(352 x 0.40)] = 211.2.
[16 – 24] = 211.2 + 220 – [431.2 x 0.40] = 258.72.
- tratando de modelar una función: vemos que:
f( ) = __ + 220 – (__ x 0.40) =
Variable. → Cantidad de medicamento que tiene en
Constante → Cantidad de medicamento que entra cada 8 h.
valor de la suma anterior. Esta es la Cantidad de medicamento que le queda cada 8 h.

Figura 41. Respuesta de Angélica a la parte I del taller de límites

En la Figura 41 se puede ver que Angélica tuvo diferentes errores de interpretación. El primero fue, interpretar que la suma de las dos tabletas era 220 miligramos. El segundo fue considerar que el 60% de medicamento que filtraban los riñones permanecía en el cuerpo; y el tercero, fue interpretar que cuando la jugadora ingería las nuevas dos pastillas, el cuerpo expulsaba inmediatamente el 40%. En esta misma figura (Figura 41), se evidencia que Angélica identificó que la representación algebraica que modela la situación planteada siempre iba a depender del valor del medicamento que permanecía en el cuerpo en la toma anterior.

Durante la puesta en común del trabajo colaborativo (Episodio 12), Angélica dejo ver que, al trabajar con otro de los integrantes de la CoP, pudo darse cuenta de que la interpretación que le dio al problema estaba errada. Tanto Angélica como el otro integrante de la comunidad, habían caído en el error de interpretar que la cantidad de medicamento que quedaba en el cuerpo era el 60% de lo que ingería la jugadora, no obstante, durante la negociación de significados que se dio entre los dos, pudieron razonar nuevamente el problema y corregir su error.

A continuación, se puede encontrar lo que Angélica y otro integrante de la CoP, pudieron negociar:

> **Angélica:** Bueno, al principio cuando estaba sola yo tomé 220 como si fueran las dos tabletas y él (Integrante 1) una tableta 220…
> **Integrante 1:** Yo resolví el problema diferente porque yo no le puse atención a lo de los riñones y qué papel cumplían, entonces yo pensaba que filtraban era que el 60% lo absorbía los riñones y el 40% lo desechaba y era, al contrario.
> **Moderadora 2:** entonces, ¿no sabían la función de los riñones?
> **Angélica:** Es que ese filtraba, yo pensaba que absorben, no le puse cuidado al organismo. Otra cosa es que al principio yo también vi que la función se comporta como la función de Fibonacci, dependía del nuevo valor, dependía del valor anterior, pero no supe como plantearla, igual todavía no la hemos planteado porque aún estoy en dudas, bueno el primer y segundo valor ya se asemejan con lo que teníamos allá (hace alusión a lo del software y la hoja de trabajo de ellos), y pues bueno vamos por buen camino…
> *(Episodio 12)*

Por medio de la puesta en común se evidenció la importancia que tiene para los integrantes de la CoP los espacios de intercambio de significados.

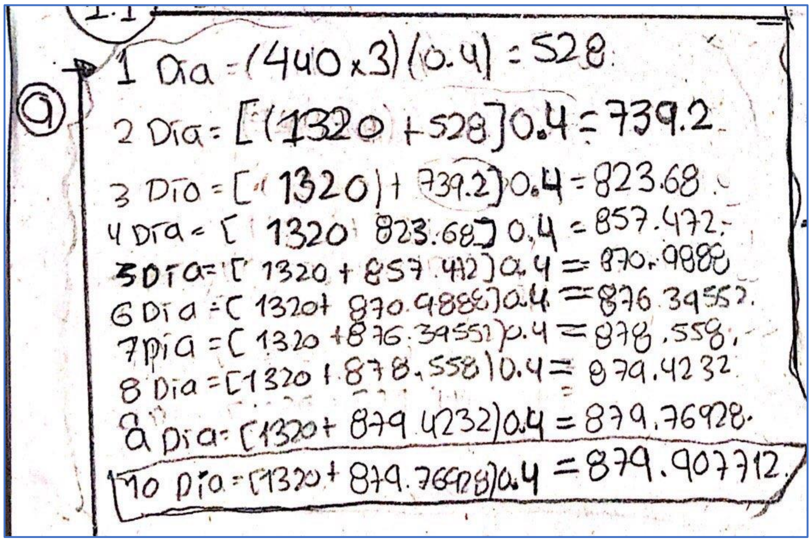


Figura 42. Respuesta de Tania a la parte I del taller de límites

Por su parte Tania, también dejó en evidencia algunos errores de interpretación de la situación (Figura 42). El primer error fue considerar que el porcentaje de medicamento que iba quedando en el cuerpo, 40%, afectaba diariamente y no por cada toma, lo que la llevó a caer en un nuevo error; Tania consideró que cuando la jugadora ingería el medicamento, el cuerpo expulsaba inmediatamente el 60% de dicha cantidad.

Nuevamente durante la puesta en común se evidencia la importancia del trabajo colaborativo para generar negociaciones. Veamos lo que Tania pudo negociar por medio del trabajo con uno de los integrantes de la CoP:

> **Integrante 1:** Personalmente a mí me sirvió para poder aclarar una duda acerca del problema pues porque individualmente me di cuenta de que maté a la muchacha de sobredosis, entonces si me sirvió y con GeoGebra aún más, pero todavía estamos encontrando el patrón, o sea sabemos hasta la tercera toma, pero estamos tratando de generalizar para poder no tener que hacer hasta 10.
> **Tania:** Yo había tomado era por día, y en realidad es cada ocho horas y no que apenas entra entonces el riñón ya lo filtró todo.
>
> *(Episodio 13)*

A diferencia de Angélica y Tania, Mariana logró una interpretación correcta de todos los datos de la situación. Como se puede ver en la Figura 43, Mariana identificó que el cuerpo está expulsando el 60% del medicamento por lo que el sistema circulatorio se queda con el 40%. Ella también identificó que cada ocho horas los riñones filtran un porcentaje referente a la cantidad de medicamento que ya se tiene en el cuerpo, mas no de lo que se acaba de ingerir, no obstante, en su hoja de trabajo se ve que ella tuvo una confusión, ya que al parecer durante las primeras ocho horas el cuerpo no realizó ningún cambio.

En la Figura 43 se puede evidenciar también, que, Mariana por medio de cálculos aritméticos logró indicar el valor hacia dónde va a tender la cantidad de medicamento en el cuerpo conforme pasa el tiempo, no obstante, ella no logró generalizar su análisis para llegar a encontrar una expresión que modelara algebraicamente el problema, dificultad que presentó desde el taller de función (taller 3).

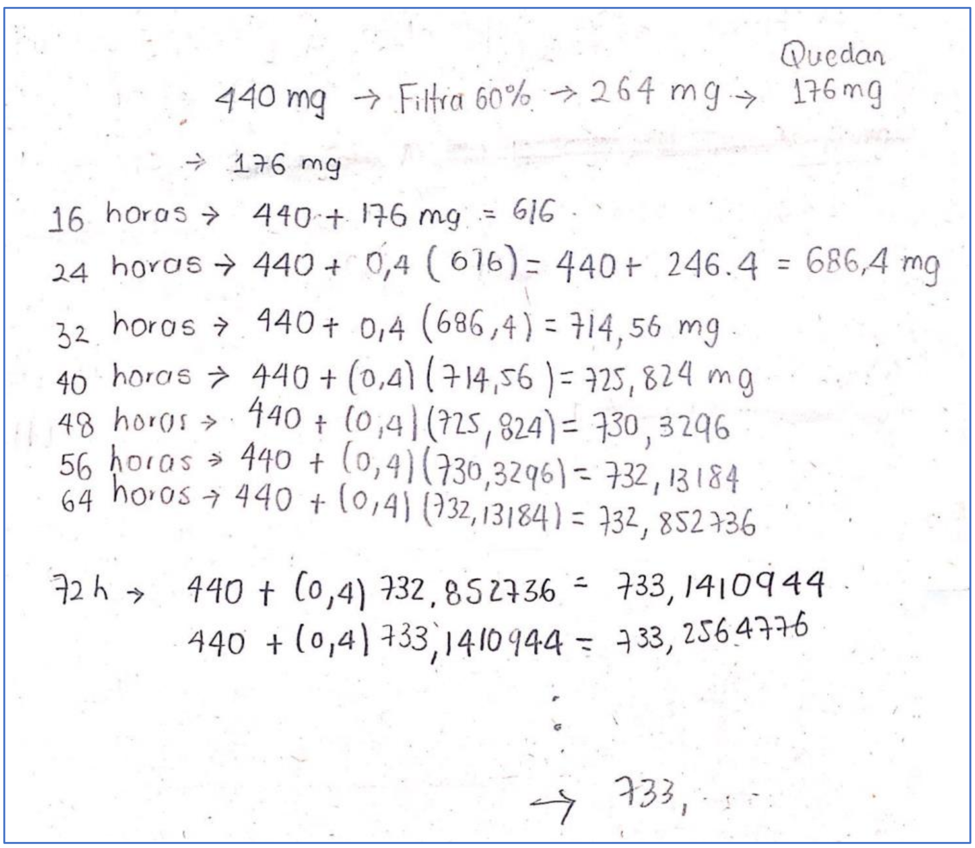

Quedan
440 mg → Filtra 60% → 264 mg → 176 mg
→ 176 mg
16 horas → 440 + 176 mg = 616
24 horas → 440 + 0,4 (616) = 440 + 246.4 = 686,4 mg
32 horas → 440 + 0,4 (686,4) = 714,56 mg
40 horas → 440 + (0,4) (714,56) = 725,824 mg
48 horas → 440 + (0,4) (725,824) = 730,3296
56 horas → 440 + (0,4) (730,3296) = 732,13184
64 horas → 440 + (0,4) (732,13184) = 732,852736
72 h → 440 + (0,4) 732,852736 = 733,1410944
440 + (0,4) 733,1410944 = 733,2564776
→ 733, ...

Figura 43. Respuesta de Mariana al ítem 1 de la parte I del taller de límites

En Mariana también se vio reflejado el producto del trabajo colaborativo. Durante la puesta en común (Episodio 14), ella dejó ver que el trabajar con su compañero le facilitó identificar el patrón de comportamiento de los datos (Figura 44), dificultad que había tenido al trabajar la situación de forma individual. Mariana expresó lo siguiente:

> **Mariana:** Nosotros inicialmente habíamos tomado bien los datos, el 40% de lo anterior era haciendo la suma con 440 y pues yo hice bastantes datos y llegaba a que era 733, se acercaba a 733 pero pues no había construido una formula general y al juntarnos (integrante de la CoP) comenzamos en 440 y llegamos a la formula.
>
> *(Episodio 14)*

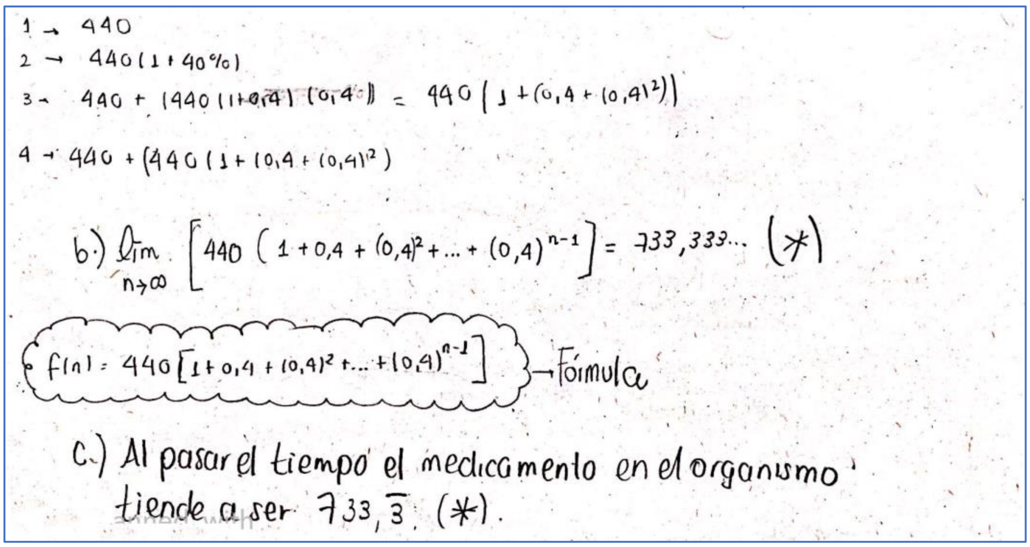


Figura 44. Respuesta de Mariana al ítem 2 de la parte I del taller de límites

Según lo esperado desde el análisis previo, Mariana junto con su compañero lograron encontrar la expresión algebraica que representa la cantidad de medicamento en el cuerpo al haber ingerido *n* tomas del antiinflamatorio, no obstante, no concluyeron con que la suma de los n primeros términos de toda progresión geométrica de razón r, viene dada por: $\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{1-r^n}{1-r}$, es decir, para ellos $f(n) = 440\left[\sum_{i=0}^{n-1}(0,4)^i\right]$ sería $f(n) = 440\left(\frac{1-(0,4)^n}{0,6}\right)$.

En la Figura 44 también se evidencia que, Mariana y su compañero aluden a la noción de tendencia para hablar de la cantidad de medicamento en el cuerpo en términos de límites. Ellos plantearon que cuando el número de tomas del medicamento tiende a infinito, la cantidad de medicamento en el cuerpo va a tender a $733,\overline{33}$ miligramos.

Dentro de la CoP se vieron reflejadas diferentes interpretaciones y soluciones de la situación. Como se mostró anteriormente, la solución a la que llegó Mariana durante su trabajo colaborativo fue bastante acertada y la más completa dentro de la CoP, por ello, Mariana fue la encargada de generalizar el procedimiento para todos los integrantes y por medio de la ayuda de todos, se logró concluir con la progresión geométrica. De igual forma, se dieron reflexiones alrededor del dominio de la función donde identificaron que son los valores que puede tomar n, son números naturales.

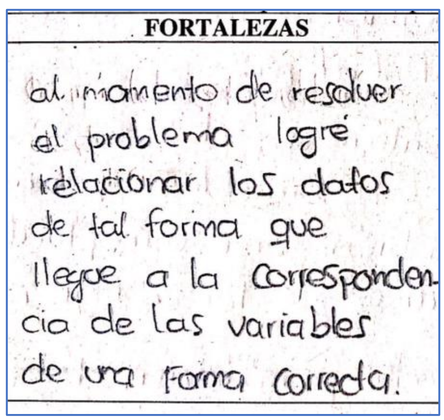


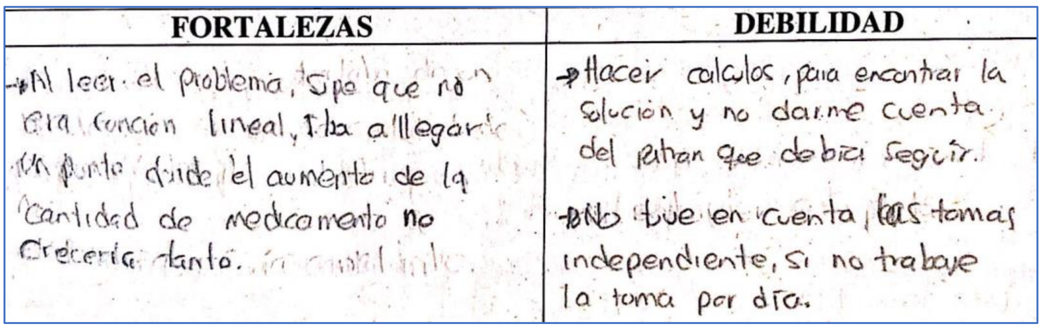
Figura 45. Reflexiones de Angélica ante la solución de la situación del taller de límites

Posterior a la generalización de la solución de la situación, los profesores en formación identificaron las debilidades y fortalezas que habían presentado para la solución de esta. Angélica identificó (Figura 45) que tuvo fortalezas en evidenciar la relación de correspondencia que existía entre las variables de la situación y de eso se presentó la evidencia en la Figura 41.

Por su parte, en la Figura 46 se muestra que, Tania identificó que una de sus fortalezas fue evidenciar que la función que representaba la situación no era una función lineal ya que, en cierto punto de la toma de antiinflamatorio, la cantidad de medicamento no iba a crecer tanto.

También identifico que sus debilidades se centraron en haber interpretado que la cantidad de medicamento iba a depender de cada día y no de cada toma y en recurrir a realizar cálculos aritméticos para llegar a una solución.

Para concretar este apartado, en la Tabla 11 se resumen los significados sobre el pensamiento matemático pertenecientes al taller de función y límite.



FORTALEZAS	DEBILIDAD
→Al leer el problema, supe que no era función lineal, iba a llegar a un punto donde el aumento de la cantidad de medicamento no crecería tanto.	→Hacer calculos, para encontrar la solucion y no darme cuenta del patron que debia seguir. →No tuve en cuenta las tomas independiente, si no trabaje la toma por día.

Figura 46. Reflexiones de Tania ante la solución de la situación del taller de límites

Tabla 11

Significados asociados al pensamiento matemático en el taller de función y límite

Angélica	Tania	Mariana
No reconoce como cantidades relacionadas varían conjuntamente.		Identifica la variación conjunta de cantidades relacionadas.
		Considera que la representación algebraica de una función es más importante que las otras.

4.1.1.1.1 Negociaciones del Pensamiento Didáctico. Desde el modelo de Reflexión-y-Acción se considera que cuando el profesor en formación se cuestiona sobre las diferentes maneras de acercar los conocimientos matemáticos a los estudiantes, se da el pensamiento didáctico.

En este caso, los profesores en formación reflexionaron sobre su comprensión y las estrategias usadas para abordar la situación planteada en la parte I por medio de las preguntas de la Figura 3 y Figura 4, de tal modo que dieran cuenta si estas estrategias las podían utilizar para realizar una adaptación curricular e implementar dicha situación a sus estudiantes de tutorías.

Tanto Angélica como Tania y Mariana consideraron que el planteamiento de la situación puede generar algunos conflictos al momento de su comprensión. Angélica y Mariana Figura 47 y Figura 48 respectivamente) consideran que se requiere saber contextualizar la situación sino podría interpretarse de una forma errónea, por ejemplo, la expresión filtrar el medicamento.

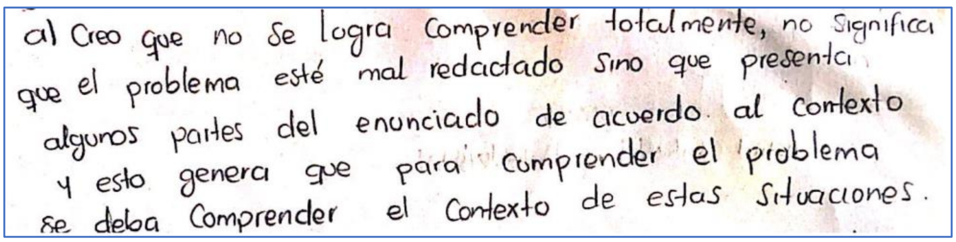

a) Creo que no se logra comprender totalmente, no significa que el problema esté mal redactado sino que presenta algunos partes del enunciado de acuerdo al contexto y esto genera que para comprender el problema se deba comprender el contexto de estas situaciones.

Figura 47. Respuesta de Angélica al ítem a) de la parte II del taller de límites

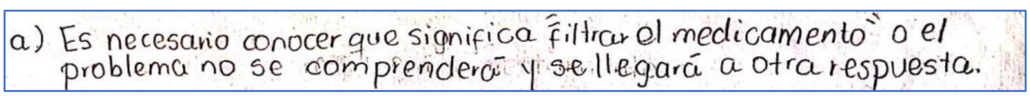

a) Es necesario conocer que significa "filtrar el medicamento" o el problema no se comprenderá y se llegará a otra respuesta.

Figura 48. Respuesta de Mariana al ítem a) de la parte II del taller de límites

Por otro lado, Tania considera que el planteamiento de nuevas preguntas puede orientar mejor para la interpretación y solución de la situación (Figura 49). Ella considera que las preguntas deben estar orientadas a indagar sobre la cantidad de medicamento en un determinado número de tomas mas no por número de días, ya que esto puede llevar a que el estudiante interprete que la cantidad de medicamento en el cuerpo va a variar respecto al número de días y no respecto a número de tomas, dificultad que Tania presentó al momento de abordar la situación (Figura 42).

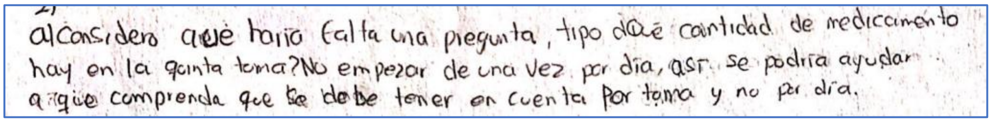

a) Considero que haría falta una pregunta, tipo ¿qué cantidad de medicamento hay en la quinta toma? No empezar de una vez por día, así se podría ayudar a que comprenda que se debe tener en cuenta por toma y no por día.

Figura 49. Respuesta de Tania al ítem a) de la parte II del taller de límites

Respecto a las estrategias utilizadas por las profesoras en formación, Angélica y Tania centraron sus estrategias en realizar cálculos aritméticos y como se puede ver en Figura 50 y Figura 51, las dos reconocieron que dicha estrategia no funciona para llegar a la solución del problema. Por el contrario, Mariana enuncia algunas estrategias que la llevaron a abordar el problema y a poder encontrar una fórmula que representara los datos de la situación. En la Figura 52 se muestra que para Mariana es importante que: i) se tenga una comprensión del problema; ii) se listen los datos proporcionados por el problema; iii) analizar los datos para generar un patrón de comportamiento de los datos; y, iv) concluir con la fórmula que representa el problema.

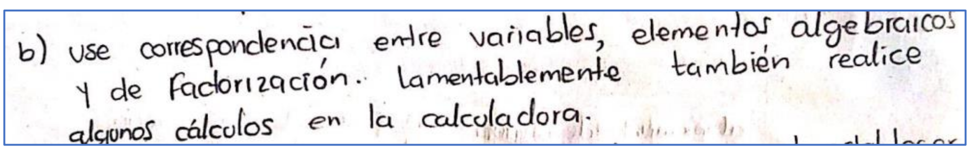

b) use correspondencia entre variables, elementos algebraicos y de factorización. Lamentablemente también realice algunos cálculos en la calculadora.

Figura 50. Respuesta de Angélica al ítem b) de la parte II del taller de límites

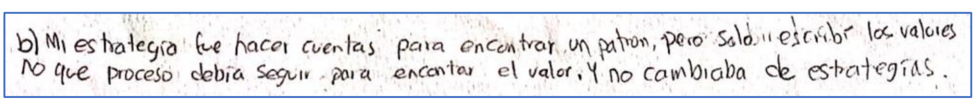

b) Mi estrategia fue hacer cuentas para encontrar un patron, pero sólo escribí los valores no que proceso debía seguir para encontar el valor, y no cambiaba de estrategias.

Figura 51. Respuesta de Tania al ítem b) de la parte II del taller de límites

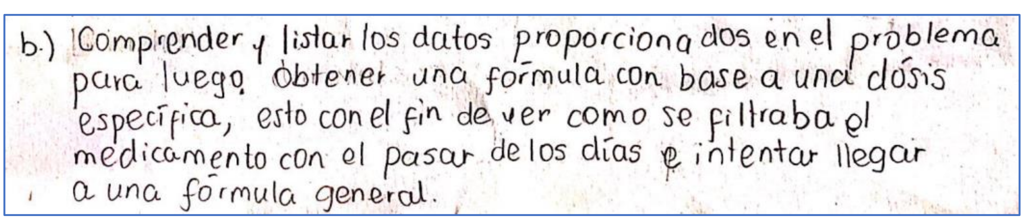

b.) Comprender y listar los datos proporcionados en el problema para luego obtener una fórmula con base a una dósis específica, esto con el fin de ver como se filtraba el medicamento con el pasar de los días e intentar llegar a una fórmula general.

Figura 52. Respuesta de Mariana al ítem b) de la parte II del taller de límites

Se evidenció una conexión entre el pensamiento didáctico y el pensamiento matemático de las profesoras en formación. Angélica y Tania que tomaron como estrategia realizar cálculos aritméticos, mostraron dificultad en su pensamiento matemático y, por otro lado, Mariana que desplegó una serie de estrategias para abordar la situación, mostró buenos resultados en el desarrollo de su pensamiento matemático.

Para la adaptación de la situación al contexto de sus estudiantes tutorados, los profesores en formación centraron la atención en los recursos a utilizar, por lo tanto, retomamos sus reflexiones en el siguiente apartado.

Por medio de la Tabla 12, se presentan los significados del pensamiento didáctico emergentes del taller de función y límite.

Tabla 12

Significados asociados al pensamiento didáctico en el taller de función y límite

<table>
<tr><th>Angélica</th><th>Mariana</th><th>Tania</th></tr>
<tr><td colspan="2">Es importante que cuando se trabajan problemas del mundo real se realice una buena contextualización de este.</td><td>Propone generar preguntas en el proceso de resolución de problemas para orientar a los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>Reconoce que para identificar patrones de comportamiento en una situación no es buena estrategia realizar procedimientos aritméticos.</td><td></td><td>Reconoce que para identificar patrones de comportamiento en una situación no es buena estrategia realizar procedimientos aritméticos.</td></tr>
</table>

4.1.5.2.1 Negociaciones del Pensamiento Orquestal. En la primera parte de la hoja de trabajo se le proponía al profesor en formación abordar la situación desde el uso del Software interactivo GeoGebra. Retomamos evidencias de las reflexiones mostradas en la puesta en común y en el desarrollo de las preguntas de la parte II (Figura 3 y Figura 4).

En el (Episodio 12 se evidencia que para Angélica el uso del software fue de gran ayuda para corroborar el razonamiento que estaba haciendo al momento de abordar la situación. De igual forma, en la Figura 53 ella deja ver que tanto el uso del software como el momento en el que este se le presenta al estudiante (posterior al razonamiento a lápiz y papel), son pertinentes ya que ayuda a comprender lo que no se había logrado comprender o a corroborar lo que ya se tenía.

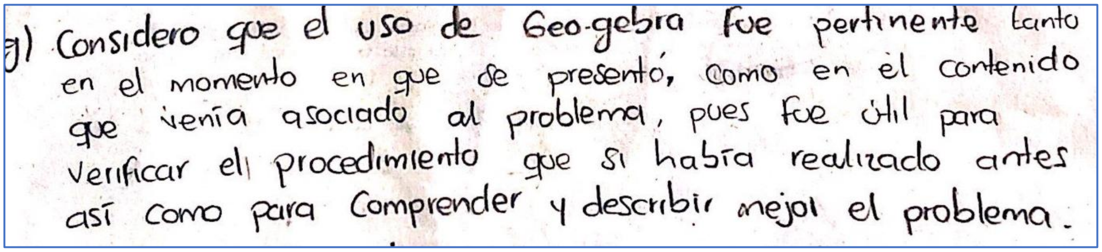
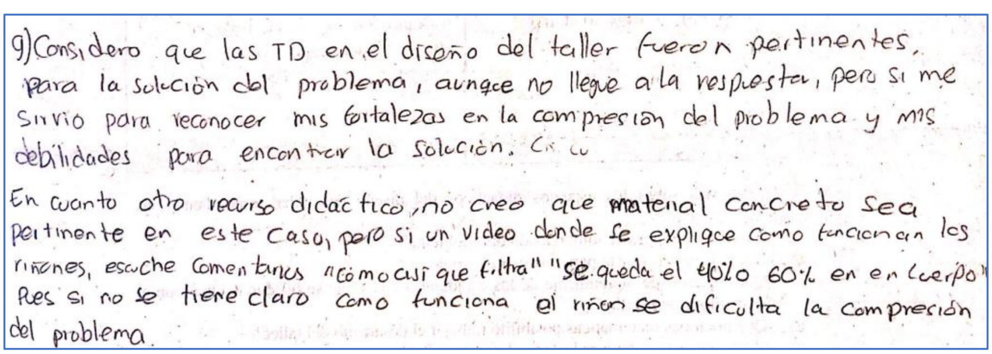

g) Considero que el uso de Geo-gebra fue pertinente tanto en el momento en que se presentó, como en el contenido que venía asociado al problema, pues fue útil para verificar el procedimiento que si había realizado antes así como para comprender y describir mejor el problema.

Figura 53. Respuesta de Angélica al ítem g) de la parte II del taller de límites

Al igual que Angélica, en la Figura 54 se evidencia que Tania considera que el uso del software fue pertinente y que la utilización de este ayuda a evidenciar las fortalezas y debilidades que ha tenido durante el razonamiento a lápiz y papel. Tania adicionalmente considera que, el uso de material concreto no sería pertinente para esta situación, pero plantea la utilización de un video donde se pueda ayudar con el contexto del problema. Esta reflexión de Tania se asocia con la dificultad que presentaron algunos integrantes de la CoP, como fue el caso de Angélica, en relación con la interpretación de la expresión “sus riñones filtraban”. Tania considera que, si se presentara un video donde se muestre la función que tienen los riñones en el cuerpo humano, no se presentarían dificultades en la comprensión del problema.


g) Considero que las TD en el diseño del taller fueron pertinentes, para la solución del problema, aunque no llegué a la respuesta, pero si me sirvio para reconocer mis fortalezas en la compresion del problema y mis debilidades para encontrar la solución.

En cuanto otro recurso didáctico, no creo que material concreto sea pertinente en este caso, pero si un video donde se explique como funcionan los riñones, escuche comentarios "cómo así que filtra" "se queda el 40% 60% en el cuerpo" Pues si no se tiene claro como funciona el riñon se dificulta la comprención del problema.

Figura 54. Respuesta de Tania al ítem g) de la parte II del taller de límites

Por otra parte, Mariana consideró que el uso que se le dio al software en esta situación no es pertinente ya que por medio de este no se facilita encontrar la "fórmula" representativa de los datos de la situación (Figura 55). Se evidencia aquí que, el pensamiento orquestal de Mariana está conectado con su pensamiento matemático ya que, para Mariana la solución del problema se centra en la expresión algebraica que representa el problema y el uso del software no proporciona ayuda para ello.

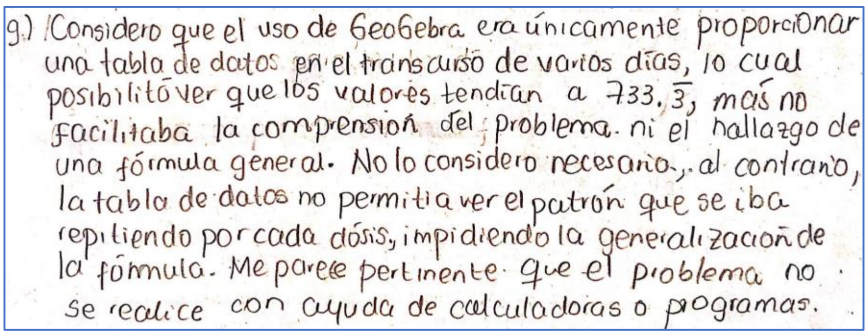

g.) Considero que el uso de GeoGebra era únicamente proporcionar una tabla de datos en el transcurso de varios días, lo cual posibilitó ver que los valores tendían a $733,\overline{3}$, más no facilitaba la comprensión del problema. ni el hallazgo de una fórmula general. No lo considero necesario., al contrario, la tabla de datos no permitía ver el patrón que se iba repitiendo por cada dósis, impidiendo la generalización de la fórmula. Me parece pertinente que el problema no se realice con ayuda de calculadoras o programas.

Figura 55. Respuesta de Mariana al ítem g) de la parte II del taller de límites

En el pensamiento orquestal de las profesoras en formación se evidenciaron diferencias, mientras para Angélica y Tania el uso de recursos tecnológicos es adecuado para la solución de este tipo de problemas, para Mariana no aporta más que información de los datos del problema que no son útiles para encontrar una fórmula.

Tabla 13

Significados asociados al pensamiento orquestal en el taller de función y límite

<table>
<tr><th>Angélica</th><th>Tania</th><th>Mariana</th></tr>
<tr><td colspan="2">Por medio de GeoGebra se pueden verificar razonamientos que se han realizado a lápiz y papel.</td><td>Considera que el uso del software GeoGebra no sirve como herramienta para solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td></td><td>Plantea el uso de videograbaciones para contextualizar los problemas.</td><td></td></tr>
</table>

La Tabla 13 resume los significados que emergieron en el taller de función y límite alrededor del pensamiento orquestal.

4.1.5 Taller 5. Reflexión y negociación (función y derivada). Por medio del problema de optimización conocido como "la caja sin tapa" recuperado de Fiallo y Parada (2018), en este taller se pretendía abordar la noción de derivada. Se realizaron algunas adecuaciones a la estructura y la manera de abordar el problema adaptándolo a las características de los integrantes de la CoP.

4.1.5.1 Análisis previo del taller de reflexión y negociación (función y derivada). El objetivo de este taller fue desarrollar el pensamiento reflexivo de los profesores en formación en torno al concepto de derivada desde su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente a una curva.

La hoja de trabajo correspondiente a este taller estuvo compuesta de dos partes y se esperaba que su implementación y la puesta en común del mismo tuvieran una duración de dos horas.

Con la primera parte del taller (Figura 56) y durante 30 minutos, se esperaba que el profesor en formación por medio de diferentes estrategias abordara el problema presentado. Por tratarse de un problema común del cálculo diferencial, Fiallo y Parada (2018) reportan que los estudiantes tienden a encontrar la expresión que representa el problema, la derivan y la igualan a cero para encontrar el valor máximo del volumen. No obstante, al momento de la puesta en común de cada una de las estrategias usadas, no logran poner en evidencia el nivel de comprensión del problema.

1. Resuelve individualmente el siguiente problema:

1.1. A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm x 4 dm se construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la altura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? **¿Por qué?** **Explica** tu procedimiento y tu respuesta.

Figura 56. Problema taller de reflexión (función y derivada)

Posterior a los primeros 30 minutos, se esperaba que los profesores en formación que no hubiesen logrado comprender el enunciado del problema, lo lograran por medio de la simulación en 2D y 3D del problema en GeoGebra. Adicionalmente, por medio de las preguntas mostradas en la Figura 57, se buscaba que identificaran las magnitudes variables del problema y qué relación hay entre estas.

1.2. Abre el archivo de GeoGebra T13_Act-1.3.ggb y anima el punto P.

- **a)** De qué magnitud o magnitudes variables depende el volumen de la caja? **¿Por qué?**
- **b)** ¿Qué valores puede tomar la altura? **¿Por qué?**
- **c)** ¿Qué valores puede tomar la anchura? **¿Por qué?**
- **d)** ¿Qué valores puede tomar la profundidad? **¿Por qué?**
- **e)** ¿Qué valores puede tomar el volumen? **¿Por qué?**
- **f)** ¿Qué relación hay entre la anchura y la altura? **¿Por qué?**
- **g)** ¿Qué relación hay entre la profundidad y la altura? **¿Por qué?**
- **h)** Representa algebraicamente el volumen en función de la altura.
- **i)** ¿Cuáles son las dimensiones de la altura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? **¿Por qué?**

Figura 57. Preguntas sobre la simulación del problema del taller cinco

Para finalizar la primera parte del taller, se esperaba que en parejas compartieran y encontraran diferencias en las respuestas de cada uno y llegaran a una solución conjunta. Posteriormente, se quería que contrarrestaran dicha solución con la presentada en un archivo de GeoGebra, la cual muestra la representación de la función cubica que modela el problema. Con esto se buscaba que los profesores en formación al ingresar la ecuación encontrada comprendan que tanto esa (en el caso de estar bien) como la presentada en GeoGebra, modelan la variación del volumen en función de la altura y de igual manera, se esperaba que identificaran las diferencias y similitudes en torno al dominio y al rango de las dos. Lo anterior permite que vean la necesidad de restringir el dominio de funciones que modelan situaciones que corresponden a la vida real.

En el caso de no haber encontrado alguna función que represente el problema, por medio de las diferentes herramientas (expresión algebraica, hoja de cálculo) del software matemático interactivo y la guía de las preguntas mostradas en la Figura 58, se esperaba que tuvieran un acercamiento a dicha función y a encontrar el volumen máximo de la caja basados en argumentos matemáticos válidos.

2.2 Explora con tu compañero el archivo de GeoGebra T13_Act-1.5.ggb. y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué representa el punto V? **¿Por qué?**
b) Escribe en le barra de entrada la fórmula que representa el volumen en función de la altura.
c) Traza la recta tangente por el punto V a la gráfica que representa el volumen en función de la altura (en la barra de entrada escribe `Tangente[V,h]`; si la función del volumen tiene otro nombre, escríbelo en lugar de h). Halla la pendiente de esta recta (escoge la opción *pendiente*, da clic en el punto V y en la recta). ¿Qué representa la pendiente? **Explica** tu respuesta.
d) ¿Cómo es el comportamiento de la *recta tangente* y de su *pendiente* antes y después del valor de la altura que genera el mayor volumen? ¿Qué significa este comportamiento en la función que representa el volumen en función de la altura? **Justifica** tu respuesta.
e) Registra en la *Hoja de cálculo* 30 valores cercanos a la pendiente (m) por la derecha y por la izquierda del valor de la altura que genera el mayor volumen.
f) ¿A qué valor tiende la pendiente de la reta tangente cuando te aproximas al valor de la altura que genera el mayor volumen? Escribe una **conjetura** al respecto y **demuéstrala.**
g) ¿Cuál es el volumen máximo? **¿Por qué?**

Figura 58. Preguntas orientadoras del archivo de GeoGebra T13_Act-1.5.ggb

Se esperaba que, al finalizar la reflexión entre los integrantes de la CoP, estos puedan realizar el siguiente razonamiento para dar respuesta a la pregunta g mostrada en la Figura 58. La función que modela el problema de la caja es $v(x) = (6-2x)(4-2x)x = 4x^3 - 20x^2 + 24x$, siendo x el lado de los cuadrados recortados en cada esquina de la hoja rectangular y la profundidad de la caja,$(6-2x)$ la altura de la base de la caja y $(4-2x)$ la anchura de la base. De este modo, la altura y la anchura dependen de la profundidad de la caja y por ser 4dm el lado de tamaño más pequeño, el dominio de la función $v(x)$ es $x \in (0,2)$. Como la función está representando el volumen de la caja, el máximo volumen lo podemos encontrar en un punto crítico de la función, es decir, los puntos de x donde la función tenga una recta tangente horizontal (pendiente 0, esto es, donde la derivada es igual a 0):

$$v(x) = 4x^3 - 20x^2 + 24x$$

$$v'(x) = 12x^2 - 40x + 24$$

$$v'(x) = 0$$

$$12x^2 - 40x + 24 = 0$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-40) \pm \sqrt{40^2 - 4(12)(24)}}{2(12)}$$

$$x_1 \approx 2{,}55$$

$$x_2 \approx 0{,}78$$

De este modo, x_1 se descarta por no pertenecer al dominio de la función. Veamos si cuando la profundidad de la caja es $x_2 \approx 0{,}78$ se encuentra el máximo volumen. Para ello, se puede evaluar por el criterio de la primera derivada. Veamos que ocurre al evaluar la primera derivada en un valor antes, y un valor después del punto crítico:

$$v'(0{,}5) = 12(0{,}5)^2 - 40(0{,}5) + 24 = 7 > 0$$

$$v'(0{,}8) = 12(0{,}8)^2 - 40(0{,}8) + 24 = -0{,}32 < 0$$

Por lo tanto, la función $v(x)$ en los $x \in (0\,, 0.78)$ es creciente, y en los $x \in (0.78\,, 2)$la función es decreciente, por lo tanto, cuando la profundidad es $x \approx 0{,}78$, el volumen de la caja es máximo y es igual a $v(0{,}78) \approx 4(0{,}78)^3 - 20(0{,}78)^2 + 24(0{,}78) \approx 8{,}45$.

En la segunda parte del taller por medio de las preguntas presentadas en la Figura 3 y Figura 4, se buscaba que los profesores en formación se cuestionaran sobre su pensamiento analítico y crítico al momento de argumentar sus respuestas al problema de la primera parte, al igual que sobre sus estrategias para dar solución a este. Se quería que por medio de su experiencia al abordar el problema reflexionaran sobre los recursos utilizados. Por ejemplo, ya que una de las modificaciones que realizamos a la secuencia de actividades tomadas de Fiallo y Parada (2018) fue la de quitar la primera parte en la que se trabaja con material concreto a ensayo y error, se esperaba que el profesor en formación al reflexionar sobre los recursos utilizados y propuestos en la hoja de trabajo reflexionara si además del uso de la tecnología, el uso de material concreto ayudaría a favorecer la construcción de la actividad matemática.

4.1.5.2 Implementación y negociación de significados del taller de reflexión (función y derivada). El proceso de negociación de significados del taller de función y derivada se llevó a cabo según lo previsto desde el análisis previo. Los profesores en formación trabajaron de manera individual el problema planteado y posteriormente compartieron sus procedimientos con otro de los integrantes de la CoP. Durante el trabajo colaborativo los profesores en formación identificaron similitudes y diferencias con el procedimiento del otro compañero logrando concluir la actividad por medio del segundo archivo de GeoGebra.

Se dieron reflexiones sobre las diferentes estrategias de abordar el problema, así como el uso de diferentes recursos al momento de implementar dicha situación a estudiantes que cursan cálculo diferencial. A continuación, se presentan evidencias del proceso de negociación promovido dentro de la CoP en términos de las tres categorías del pensamiento reflexivo.

4.1.5.2.1 Negociaciones del Pensamiento Matemático. Dentro del pensamiento matemático del profesor es importante que los conceptos y conocimientos matemáticos sean de su completo dominio.

Cuando se trabajan aplicaciones de la derivada, según Fiallo y Parada (2018), es común encontrar procedimientos con los “cinco pasos” (encontrar la función, derivarla, igualarla a cero, hallar los puntos críticos, encontrar máximos y mínimos), no obstante, los profesores deben enfatizar en la importancia de interpretar geométricamente la definición de derivada.

En el desarrollo de la primera parte de la hoja de trabajo, donde los profesores en formación se enfrentaron de forma individual a la solución de la situación planteada, se encontró que la mayoría utilizaron los cinco pasos mencionados anteriormente, como fue el caso de las tres profesoras en formación casos de estudio. En la Figura 59 se evidencia el procedimiento realizado por Tania. Ella parte de la representación geométrica del problema identificando allí la variable independiente x, la cual hace referencia a la altura de la caja. Después de identificar dicha variable relaciona el largo y el ancho en función de esta, ya teniendo las magnitudes en función de la variable independiente, encuentra la función volumen, la deriva, la iguala a cero, encuentra los valores de x para la cual la derivada es igual a cero y encuentra cual arroja el volumen máximo; la cual deja en evidencia un procedimiento totalmente mecánico.

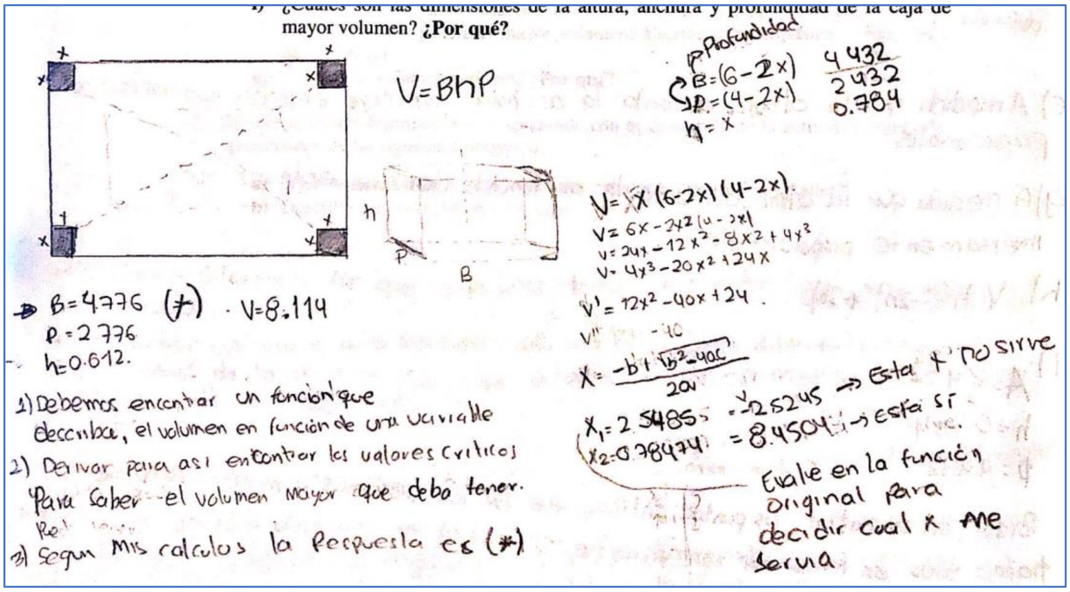
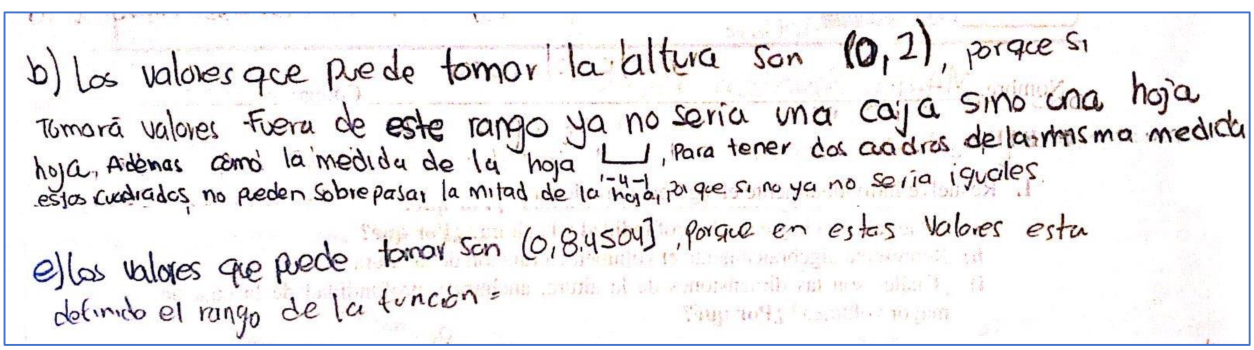


Figura 59. Respuesta de Tania al ítem 1.1. de la parte I del taller de derivadas

En esta primera parte los profesores en formación no reflexionaron sobre el dominio y rango de la función con la cual trabajaron, no obstante, en el ítem 1.2. al trabajar con la representación dinámica del problema, concluyeron con el dominio y rango de esta. En la Figura 60 se evidencia que en repuesta al ítem b), Tania reconoce que la variable independiente *x* puede tomar valores entre 0 y 2 ya que la medida menor de la caja es 4. De igual forma, identifica en el ítem e) que el rango de la función es mayor a 0 y menor igual a 8,4504 ya que este es el mayor volumen de la caja.


b) Los valores que puede tomar la altura son (0, 2), porque si tomará valores fuera de este rango ya no sería una caja sino una hoja, Además como la medida de la hoja es 4, para tener dos cuadros de la misma medida estos cuadrados no pueden sobrepasar la mitad de la hoja, porque si no ya no sería iguales.

e) los valores que puede tomar son (0, 8.4504], porque en estos valores esta definido el rango de la función.

Figura 60. Respuesta de Tania al ítem 1.2. de la parte I del taller de derivadas

En el trabajo colaborativo surgieron significados alrededor de la interpretación geométrica de la derivada. Por ejemplo, en respuesta al ítem c) de la parte 2.2., Mariana identificó que la pendiente representa la razón de cambio del volumen respecto a la variación de la altura (Figura 61); Angélica identificó que la pendiente representa el valor de la derivada en los diferentes puntos del dominio (Figura 62).

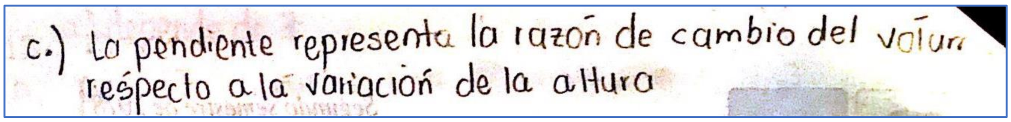

c.) La pendiente representa la razón de cambio del volum
respecto a la variación de la altura

Figura 61. Respuesta de Mariana al ítem c) de la parte 2.2. del taller de derivadas

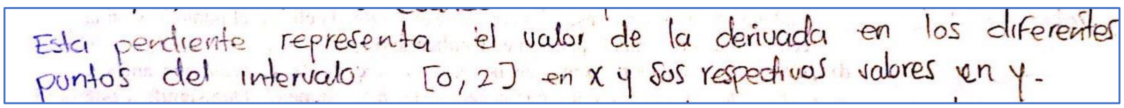

Esta pendiente representa el valor de la derivada en los diferentes
puntos del intervalo [0, 2] en x y sus respectivos valores en y.

Figura 62. Respuesta de Angélica al ítem c) de la parte 2.2. del taller de derivadas

Por su parte Tania, desde la figura 52 se mostró que ella recurrió a igualar la derivada de la función volumen a 0 para encontrar el volumen máximo de la caja sin dar argumentos. En la Figura 63, se evidencia que Tania logró identificar la relación de su procedimiento con la interpretación geométrica de la derivada. Tania menciona que cuando la pendiente de la recta tangente se hace 0, es porque en ese punto del dominio la recta tangente es horizontal y es allí donde se encuentra el máximo de la función.

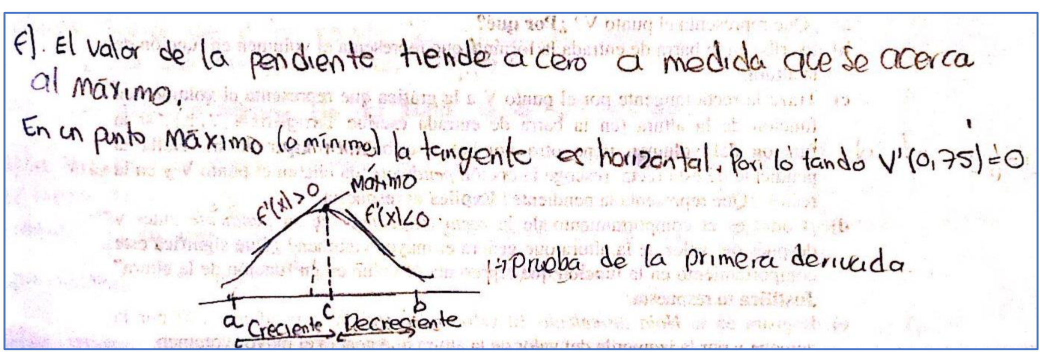


Figura 63. Respuesta de Tania al ítem f) de la parte 2.2. del taller de derivadas

Con el desarrollo del taller de función y derivada, los profesores en formación mostraron un desarrollo en su pensamiento matemático, pasaron de realizar procedimientos mecánicos sin argumentos a argumentar desde una interpretación geométrica de la derivada.

En la Tabla 14 se sintetizan los significados alrededor del pensamiento matemático emergentes del taller de función y derivada.

Tabla 14

Significados asociados al pensamiento matemático en el taller de función y derivada

<table>
<tr><th>Angélica</th><th>Mariana</th><th>Tania</th></tr>
<tr><td colspan="3">Interpreta la derivada desde su representación geométrica por medio de representaciones dinámicas en GeoGebra.</td></tr>
</table>

4.1.5.2.2 Negociaciones del Pensamiento Didáctico. En el pensamiento didáctico de los profesores en formación se vieron reflejados significados alrededor de las diferentes maneras de abordar el problema y en qué momento del estudio de la derivada es relevante trabajar con este tipo de problemas.

Una de las primeras estrategias a las que acudieron los profesores en formación es recurrir a sus conocimientos previos de cálculo diferencial (cálculo 1). En el (Episodio 15) se evidencia que, Angélica reconoce que su primera estrategia fue recurrir a sus conocimientos previos, no obstante, también reconoce que no es buena estrategia el tratar de recordar cosas de memoria.

> **Angélica:** Pues cuando yo lo empecé a hacer me acordé de lo que vi en cálculo 1 y cuando abrí GeoGebra ya tuve como la oportunidad de mirar hasta dónde variaba la altura, que si le doy valores de 0 a una magnitud eso me va a afectar los otros, entonces como que si es una gran ayuda en cuanto a mirar como de dónde a dónde está el dominio de la función. Considero que no es buena estrategia recordar de memoria lo que ya sabía, se debe incentivar a los estudiantes a que interpreten y analicen con razonamiento matemático.
>
> *(Episodio 15)*

Otra de las estrategias utilizadas por los profesores en formación fue la de recurrir a la representación geométrica de la situación para interpretarla, tal como se evidenció en la respuesta de Tania de la Figura 59.

Alrededor de las diferentes metodologías para abordar la situación, los profesores en formación reflexionaron sobre el momento de intervención del software y su intención. En la Figura 64 se muestra que Mariana considera importante el uso del software al iniciar a abordar la situación ya que este ayuda a que el estudiante evidencie las relaciones de correspondencia entre las variables.

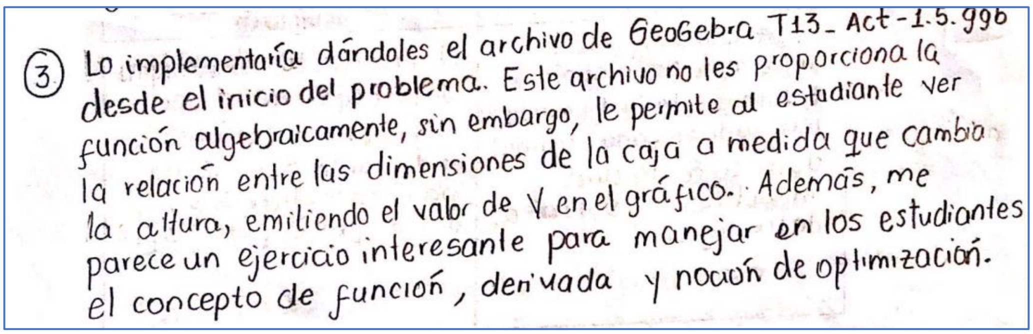

3. Lo implementaría dándoles el archivo de GeoGebra T13_ Act-1.5.gg6
desde el inicio del problema. Este archivo no les proporciona la
función algebraicamente, sin embargo, le permite al estudiante ver
la relación entre las dimensiones de la caja a medida que cambia
la altura, emitiendo el valor de V en el gráfico. Además, me
parece un ejercicio interesante para manejar en los estudiantes
el concepto de función, derivada y noción de optimización.

Figura 64. Respuesta de Mariana al ítem 3 de la parte II del taller de derivadas

Por otro lado, Tania rescata la importancia del uso de este tipo de situaciones para introducir el concepto de derivada y contextualizar al estudiante con las situaciones con las que se pueden encontrar en el diario vivir y los beneficios de saber resolverlas por medio de herramientas matemáticas. En el (Episodio 16) se muestra que, durante la puesta en común, Tania resalta que uno de los beneficios de saber resolver este tipo de problemas es, en este caso particular, minimizar gastos en materiales para la construcción de cajas donde se quiera obtener un mayor volumen de cierta cosa.

Tania: En cuanto al uso de las tecnologías me parece muy bueno, considero que el ejercicio de la caja seria para cuando los estudiantes no supieran que es la derivada, para que los estudiantes vean como el uso, porque ellos siempre van a preguntar y ¿esto para qué lo uso? Y eso para qué me sirve en la vida. Y pues por medio de esto podemos decirles, bueno tenemos la opción de solamente hacer un cálculo que puede tardar 5 minutos o ponernos a gastar materiales haciendo cajas para encontrar la solución.

(*Episodio 16*)

Por medio de la Tabla 15, se presentan los significados del pensamiento didáctico emergentes del taller de función y derivada.

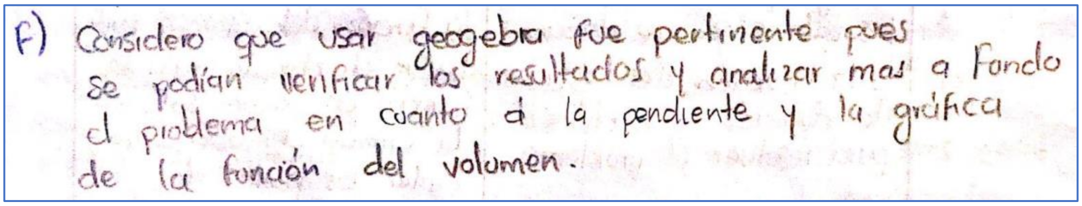
Tabla 15

Significados asociados al pensamiento didáctico en el taller de función y derivada

Angélica	Mariana	Tania
Reconoce que el abordar un problema de forma mecánica no es buena estrategia para llegar a su solución.	Como estrategia para identificar características de un problema propone el uso de GeoGebra.	Propone la representación gráfica como estrategia para interpretar los problemas.
		Rescata la importancia del uso de situaciones del contexto real para promover interés en el estudiante en la resolución de problemas de la vida real por medio de herramientas matemáticas.

4.1.5.2.3 Negociaciones del Pensamiento Orquestal. En las reflexiones dadas dentro de la comunidad de práctica, se encontraron significados asociados a la importancia y las funciones que brinda el software interactivo GeoGebra y sobre el planteamiento de nuevos recursos para trabajar la situación planteada con estudiantes de primer nivel de la universidad.

Tanto Angélica ((Episodio 15 y Figura 65) como Tania (Episodio 16) y Mariana (Figura 64), consideraron que el uso del software fue pertinente para el desarrollo de la actividad. Angélica al igual que en anteriores talleres, deja ver que, GeoGebra facilita la identificación de aspectos de los problemas como lo es el dominio de las funciones. Mariana a diferencia del taller anterior, consideró importante el software por la representación dinámica que se puede realizar del problema.

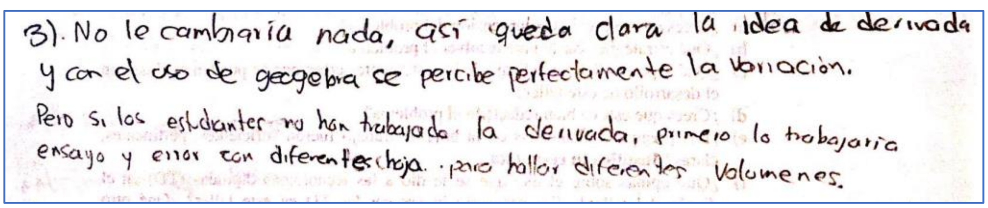


F) Considero que usar geogebra fue pertinente pues se podían verificar los resultados y analizar mas a fondo el problema en cuanto a la pendiente y la gráfica de la función del volumen.

Figura 65. Respuesta de Mariana al ítem 3 de la parte II del taller de derivadas

Angélica y Tania plantearon trabajar con un recurso diferente a los planteados en la hoja de trabajo (Episodio 17) y Figura 66). Ellas consideran que antes de que el estudiante se enfrente a la solución algebraica de la situación, se podría considerar trabajar a ensayo y error armando diferentes cajas con material concreto. Desde el punto de vista de Fiallo y Parada (2018), el uso de este recurso ayuda a que los estudiantes consideren que, desde una hoja con ciertas dimensiones, se pueden obtener diferentes volúmenes de una caja.

> **Angélica:** ¿qué sí usaría otro recurso? …. Por ejemplo, con el método de Alberth (ensayo y error) se podría también poner a un estudiante a ensayar con material concreto y pues que ellos miren cuando le cabe a la caja, pero pues sería muy engorroso, también tendríamos que hacer como mucho para que ellos sepan, y pues con GeoGebra sería más fácil porque pueden hacer muchos valores en muy poco tiempo.
>
> *(Episodio 17)*



3). No le cambiaría nada, así queda clara la idea de derivada y con el uso de geogebra se percibe perfectamente la variación.
Pero si los estudiantes no han trabajado la derivada, primero lo trabajaría ensayo y error con diferentes hoja. para hallar diferentes Volumenes.

Figura 66. Respuesta de Tania al ítem 3 de la parte II del taller de derivadas

La Tabla 16 resume, en términos del pensamiento orquestal, los significados emergentes del taller de función y derivada.

Tabla 16

Significados asociados al pensamiento orquestal en el taller de función y derivada

<table>
<tr><th>Angélica</th><th>Tania</th><th>Mariana</th></tr>
<tr><td colspan="2">Considera que el software GeoGebra es una herramienta potente para identificar características de los problemas.</td><td>Concibe importante el uso del software GeoGebra por las representaciones dinámicas que se pueden realizar en este.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Propone el uso de material concreto para abordar problemas.</td><td></td></tr>
</table>

4.1.6 Taller 6. Significados finales de la función y su enseñanza. El último taller de reflexión corresponde a los significados finales de la función. Para este se retomaron algunas situaciones del taller de significados iniciales de la función y un plan de clase retomado de Hitt (2003). En la primera parte (A) se realiza el análisis previo correspondiente a las preguntas de la hoja de trabajo. En la parte B se hace una descripción de la implementación y el proceso de negociación del taller; y, en la parte C, se describen los significados negociados por medio de los talleres, de las tres profesoras en formación tomadas como casos de estudio.

4.1.6.1 Análisis previo del taller de significados finales. Este taller se diseñó con el objetivo de recoger todas las reflexiones que los profesores en formación realizaron dentro de las dinámicas de la CoP durante la implementación de cada uno de los talleres. Se estimaba que el taller se llevara a cabo durante 90 minutos para posteriormente realizar en 30 minutos la puesta en común de la misma.

En el primer ítem se presenta el mismo enunciado del ítem uno del taller de significados iniciales y las situaciones mostradas en la Figura 5 y Figura 7. Se escogieron dichas situaciones dado que durante la implementación y la puesta en común del primer taller se reflejaron dificultades al momento de identificar si dichas situaciones eran funciones o no lo eran. Se considera que, por tratarse del último taller después de haber pasado por diferentes momentos de reflexión alrededor del significado de la función, para este taller las respuestas y las reflexiones deben ser más concretas y más cercanas a lo que se planteó en el análisis a priori del primer taller.

En el segundo ítem del taller se presenta el plan de clase mostrado en el APÉNDICE A, el cual fue tomado de un estudio realizado por Hitt (2003). Dicho plan surgió de una experiencia con profesores de enseñanza media, a quienes se les solicitó que diseñaran un plan de clase del tema que ellos quisieran; para el diseño los profesores no podían usar apuntes o libros de texto.

Se diseñaron las preguntas mostradas en la Figura 67 con el objetivo de que el profesor en formación identificara si en el plan de clase se ven reflejados los tres pensamientos planteados en el modelo R-y-A. También se quería que, identificara de qué forma desarrolló el pensamiento reflexivo el profesor y si le realizaría alguna modificación a dicha planeación.

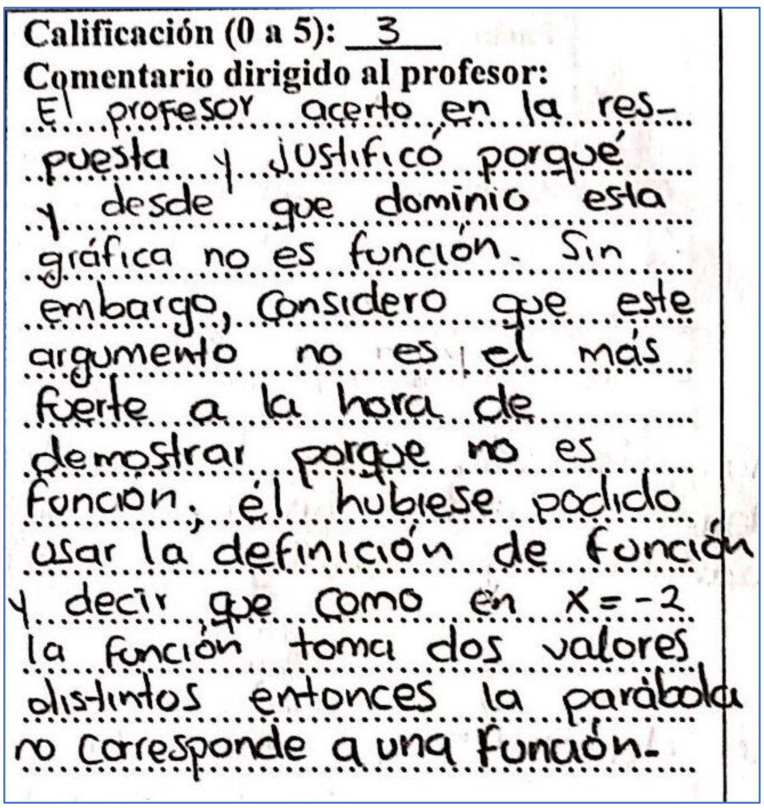
a) ¿Cuál es el objetivo del profesor?
b) ¿Qué conceptos matemáticos quiere trabajar el profesor?
c) ¿Qué debilidades y fortalezas identificas que el profesor tuvo en la planeación de la clase?
d) ¿Qué estrategias didácticas usó el profesor en su preparación? ¿Crees que las usó de la manera adecuada?
e) ¿Qué recursos tuvo en cuenta el profesor al momento de preparar la clase? ¿Qué otro recurso didáctico se podría incorporar? **Justifica**
f) Si tuvieras que implementar este diseño de clase con estudiantes que cursan cálculo diferencial ¿Le cambiarias algo? ¿Qué? ¿Por qué?

Figura 67. Preguntas asociadas al plan de clase del APÉNDICE A

4.1.6.2 Implementación y negociación de significados del taller de significados finales. El taller de significados finales de la función se llevó a cabo durante las dos horas previstas.

Los profesores en formación inicialmente desarrollaron la hoja de trabajo y posteriormente se realizó la puesta en común y el proceso de negociación de sus significados. Se describen a continuación, los significados de las tres profesoras en formación, en términos de su pensamiento reflexivo, evidenciados en este taller.

4.1.6.2.1 Negociaciones del Pensamiento Matemático. Dentro del pensamiento matemático se rescatan los significados asociados a diferentes aspectos de la función tales como: la existencia de dos conjuntos que están relacionados y que dicha relación cumple la propiedad de la unicidad, es decir, a cada elemento del conjunto llamado dominio, le corresponde un solo elemento del conjunto llamado recorrido; e identificar funciones en sus diferentes representaciones y notaciones.



Calificación (0 a 5): 3

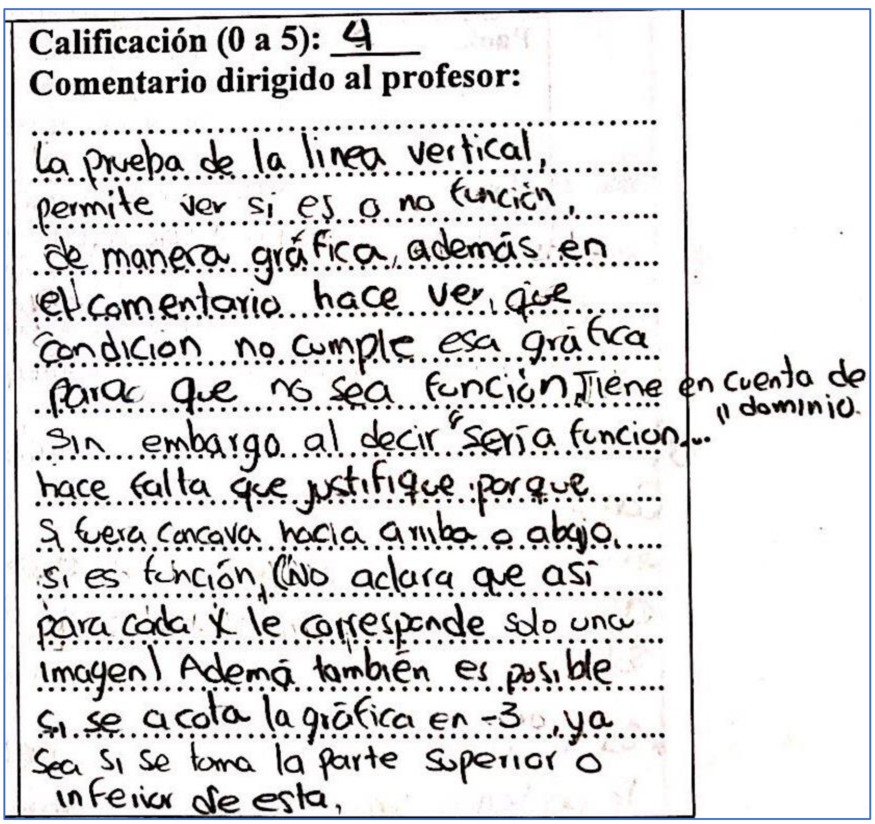
Comentario dirigido al profesor:

El profesor acerto en la respuesta y justificó porqué y desde que dominio esta gráfica no es función. Sin embargo, considero que este argumento no es el más fuerte a la hora de demostrar porque no es funcion, él hubiese podido usar la definición de función y decir que como en $x=-2$ la función toma dos valores distintos entonces la parábola no corresponde a una función.

Figura 68. Respuesta de Angélica a la situación 1 del taller de significados finales

En la situación 1 mostrada en la Figura 5, los integrantes de la CoP dejaron ver significados asociados al concepto de función reflejado en su representación gráfica. En la Figura 68 se puede ver que Angélica reconoce que la prueba de la recta vertical es válida para identificar si una gráfica en el plano cartesiano es función o no lo es, mas no es válida para demostrarlo. Ella da importancia a la escogencia de los conjuntos que están relacionando las variables y a la propiedad de la unicidad. Por ejemplo, cuando el dominio es el eje *x* del plano cartesiano, para el elemento $x = -2$ corresponden dos valores diferentes en el eje *y* y por lo tanto, dicha relación no puede ser función.

Al igual que Angélica, en la Figura 69 y Figura 70 se evidencia que para Tania y Mariana respectivamente, también es relevante el identificar en una relación el conjunto de salida (dominio). Ellas hacen alusión a que la concavidad de la parábola no es relevante, que lo relevante es aclarar qué elementos pertenecen al dominio de la función y que estos cumplan la propiedad de la unicidad.

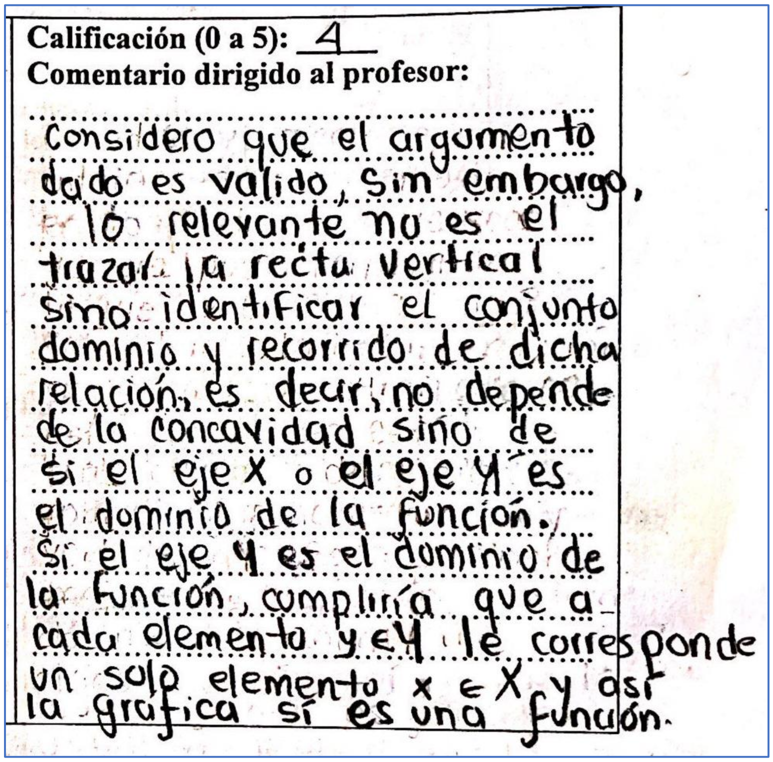


Calificación (0 a 5): 4

Comentario dirigido al profesor:

La prueba de la linea vertical, permite ver si es o no función, de manera gráfica, además en el comentario hace ver que condicion no cumple esa gráfica parac que no sea función. Tiene en cuenta de el dominio. Sin embargo al decir "sería funcion..." hace falta que justifique porque si fuera concava hacia arriba o abajo. si es función, (No aclara que así para cada x le corresponde solo una imagen) Además también es posible si se acota la gráfica en -3, ya sea si se toma la parte superior o inferior de esta,

Figura 69. Respuesta de Tania a la situación 1 del taller de significados finales



Calificación (0 a 5): 4
Comentario dirigido al profesor:
Considero que el argumento dado es valido, sin embargo, lo relevante no es el trazar la recta vertical sino identificar el conjunto dominio y recorrido de dicha relación, es decir, no depende de la concavidad sino de si el eje X o el eje Y es el dominio de la función. Si el eje Y es el dominio de la función, cumpliría que a cada elemento $y \in Y$ le corresponde un solo elemento $x \in X$ y así la gráfica sí es una función.

Figura 70. Respuesta de Mariana a la situación 1 del taller de significados finales

En las tres profesoras en formación se reflejó la importancia que tiene la selección del dominio en una relación representada gráficamente, que lo relevante no es el hecho de utilizar una recta vertical para identificar si una gráfica es o no función, sino que, importa la definición que hay detrás de dicha prueba.

En la situación 2 las profesoras en formación coincidieron en que la afirmación que se presenta en la respuesta es válida, sin embargo, no se dan argumentos que justifiquen dicha afirmación. También identificaron que, esa notación puede representar una función que va de un número real a una pareja ordenada. En el caso de Mariana (Figura 71), consideró que sí se trata de una función ya que al tomar como dominio los $x \in \mathrm{R}$ y mandarlo a un conjunto de llegada donde pertenecen las parejas ordenadas $(1,2-x)$, se estaría cumpliendo de que a cada elemento del dominio le correspondería un elemento del rango. Se rescata de la respuesta de

Mariana la afirmación que hace de que no toda función puede representarse en el plano cartesiano.

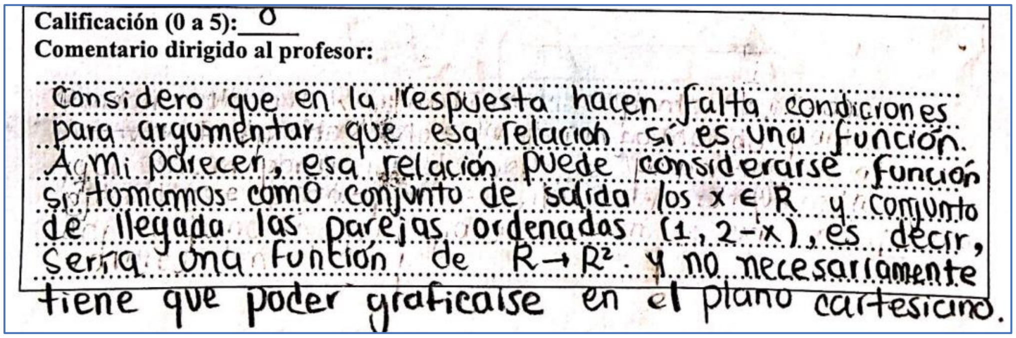

Calificación (0 a 5): 0
Comentario dirigido al profesor:
Considero que en la respuesta hacen falta condiciones para argumentar que esa relación sí es una función. A mi parecer, esa relación puede considerarse función si tomamos como conjunto de salida los $x \in \mathbb{R}$ y conjunto de llegada las parejas ordenadas $(1, 2-x)$, es decir, sería una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. y no necesariamente tiene que poder graficalse en el plano cartesiano.

Figura 71. Respuesta de Mariana a la situación 2 del taller de significados finales

Por otra parte, en la segunda parte del taller los profesores en formación identificaron debilidades y fortalezas del pensamiento reflexivo del profesor que diseñó el plan de clase presentado en el APÉNDICE A. Durante el proceso de negociación los integrantes de la CoP dieron cuenta de la dificultad que tuvo el profesor al plantear la situación de la edad de Juan y de su padre, misma dificultad que reportó Hitt (2003). Veamos lo que dijo Angélica y Mariana al respecto:

> **Angélica:** Si nos ponemos a realizar la situación que planteó el profesor, no estaríamos hablando de una función sino de una ecuación. Él da una condición de que la edad del padre es igual al doble de la de Juan dentro de 5 años, la respuesta va a ser única. [hacen comentarios entre los integrantes]
> **Mariana:** creo que no nos habíamos dado cuenta de eso porque no nos preocupamos por analizar la situación. En lo que el profesor desarrolla también presenta otro error, la expresión algebraica que representa el enunciado no es ye (y) igual a dos equis (*x*) más cinco, sino, ye (y) igual a dos, abro paréntesis, equis (*x*) más cinco, cierro paréntesis.
> *(Episodio 18)*

En la transcripción anterior se da evidencia de la fortaleza del pensamiento matemático de Angélica. Ella tiene claro de que existen diferencias entre una ecuación y una función. Inferimos que este significado mostrado por Angélica en la puesta en común fue de gran importancia para los demás integrantes de la CoP ya que, se evidenció que estos no habían dado importancia a dicho aspecto. Al igual que lo mencionado por Mariana, no es lo mismo tener $y = 2x + 5$ que $y = 2(x + 5)$.

A continuación, en la Tabla 17 se presentar los significados finales de la función asociados al pensamiento matemático.

Tabla 17

Significados asociados al pensamiento matemático en el taller de significados finales

Angélica	**Mariana**	**Tania**
Admite la prueba de la recta vertical para identificar si una gráfica es función o no lo es, dando importancia a la escogencia del dominio.		
Reconoce que una función debe cumplir la propiedad de la unicidad.	Concibe importante determinar bajo que dominio una relación se puede considerar función.	
Reconoce que una ecuación es diferente de una función.	Reconoce que no toda función puede representarse gráficamente.	

4.1.6.2.2 Negociaciones del Pensamiento Didáctico. En este apartado de las negociaciones asociadas al pensamiento didáctico, se presentan evidencias de las reflexiones dadas por los integrantes de la CoP ante el planteamiento de la clase que diseñó un profesor de matemáticas. Se centra el proceso de negociación en las reflexiones alrededor de la utilización de la resolución de problemas como metodología para generar actividad matemática en el aula de clase.

Las tres profesoras en formación, Angélica, Tania y Mariana coincidieron en que el objetivo de la clase era la enseñanza de la función lineal a partir de situaciones del contexto real.

Angélica identificó unas estrategias utilizadas por el profesor para llevar a cabo su clase (Figura 72). Ella considera que la primera estrategia consistió en otorgarle a los estudiantes un problema para que lo explorara y llegara a su solución algebraica. La segunda estrategia consistió en realizar preguntas a los estudiantes para que lograran realizar otras representaciones de la función que representaba el problema. La tercera consistió en generalizar aspectos teóricos de la función y por último plantear un nuevo problema para repasar lo visto en clase. En la hoja de trabajo Angélica no especificó su punto de vista alrededor de las estrategias trazadas por el profesor, no obstante, durante la puesta en común si lo hizo, mismo que fue compartido por Tania:

> **Angélica:** Bueno, pues considero que con la metodología empleada por el profesor se puede lograr cumplir un objetivo de clase, pero antes que eso, creo que la selección de los problemas es bastante importante, como ya había mencionado antes, es un problema con el que no se puede trabajar el tema de funciones y otra cosa que es importante, no está contextualizado a la vida real, como por ejemplo, la edad del padre no puede ser negativa y también cuando Juan tenga un año la edad del padre será 7 años.
> **Tania:** Estoy de acuerdo con Angélica, él quiso como empezar diferente, empezar desde la exploración de los estudiantes, pero no tuvo en cuenta si algún estudiante no lo podía hacer; y nunca concluyó, quiso trabajar todos los temas, los dio superficialmente, pero nunca concluyó con las propiedades de las funciones.
>
> *(Episodio 19)*

Se evidencia en Angélica y Tania que, comparten el utilizar ejemplos ligados a la vida real para la enseñanza de las funciones, no obstante, para ellas el utilizar un problema de este tipo requiere de tener mucho cuidado a la hora de su selección; se deben seleccionar problemas acordes a la temática a enseñar y que no generen datos incoherentes en el contexto real.

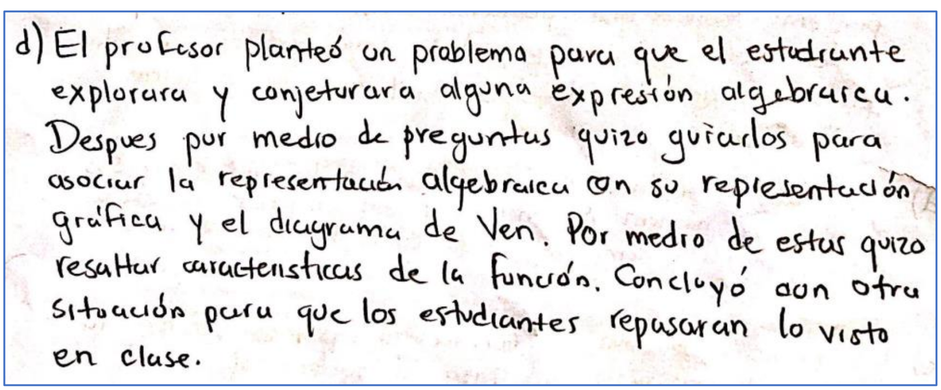

d) El profesor planteó un problema para que el estudiante explorara y conjeturara alguna expresión algebraica. Despues por medio de preguntas quizo guiarlos para asociar la representación algebraica con su representación gráfica y el diagrama de Ven. Por medio de estas quizo resaltar características de la función. Concluyó con otra situación para que los estudiantes repasaran lo visto en clase.

Figura 72. Respuesta de Angélica para el ítem d) de la parte II del taller final

Es importante que los profesores en formación den cuenta de estos aspectos ya que, desde lo reportado por Hitt (2003), cuando un profesor hace este tipo de acercamientos a los estudiantes produce en ellos una concepción limitada y errónea del conocimiento matemático.

Por su parte Mariana también consideró que, la metodología (Figura 73) utilizada por el profesor fue buena, sin embargo, ella alude a un aspecto fundamental del pensamiento didáctico del profesor. En el (Episodio 20 Mariana rescata la importancia de realizar una buena planeación en la que el profesor tenga en cuenta que no todos los estudiantes llegarán a lo que él desea y que, para ello, se deberían implementar ideas como las propuestas en la teoría de la resolución de problemas.

> **Mariana:** independientemente de los errores matemáticos que tuvo el profesor, considero que el profesor planteó una buena metodología, pero nunca menciona qué estrategias utilizaría si algún estudiante no logra llegar a lo que él quiere. Según lo que recuerdo de algunos textos que leímos, hubiera sido importante que involucrara algunas ideas de la resolución de problemas.
>
> *(Episodio 20)*

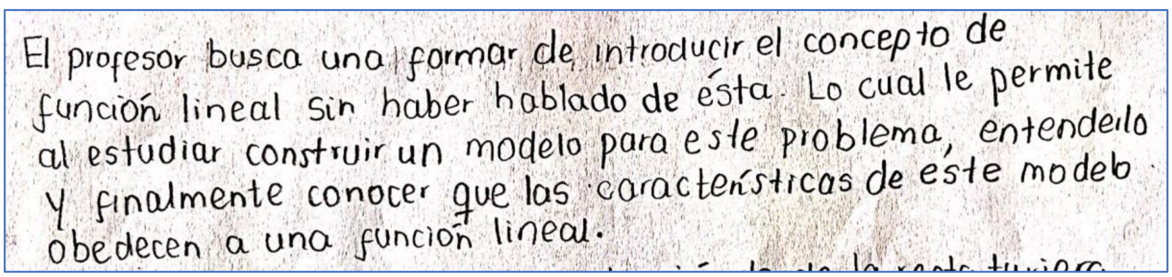

El profesor busca una forma de introducir el concepto de función lineal sin haber hablado de ésta. Lo cual le permite al estudiar construir un modelo para este problema, entenderlo y finalmente conocer que las características de este modelo obedecen a una función lineal.

Figura 73. Respuesta de Mariana para el ítem d) de la parte II del taller final

Las respuestas y reflexiones dadas por las profesoras en formación dejan ver que, en su pensamiento didáctico prevalece la importancia de la buena selección de estrategias de enseñanza, en este caso, la selección de problemas del contexto real y que, una buena metodología de enseñanza está más allá de simplemente decidir trabajar con situaciones problemas.

Por medio de la Tabla 18 se registran los significados del pensamiento didáctico procedentes del taller de significados finales.

Tabla 18

Significados asociados al pensamiento didáctico en el taller de significados finales

Angélica	**Tania**	**Mariana**
Identifica la importancia de seleccionar problemas acordes a la temática a enseñar y contextualizados con la vida real.		Considera que en la planeación de una clase se debe tener en cuenta las diferentes dificultades que un estudiante puede presentar.

4.1.6.2.3 Negociaciones del Pensamiento Orquestal. Las negociaciones realizadas alrededor del pensamiento orquestal se centraron en los recursos utilizados por el profesor para diseñar el plan se clase. Los profesores en formación reflexionaron sobre los recursos utilizados y plantearon el uso de nuevos recursos para emplearlos a favor de la actividad matemática.

En el caso de las tres profesoras en formación, Mariana, Tania y Angélica, identificaron que los recursos utilizados por el profesor fueron: el problema, las preguntas y el pizarrón. Sobre el problema seleccionado realizaron algunas reflexiones y observaciones, por ejemplo, en el (Episodio 19 Angélica y Tania muestran la importancia del seleccionar problemas que ayuden a cumplir con el objetivo de clase y no que por el contrario lo desvíen.

Sobre las preguntas realizadas por el profesor para orientar la actividad matemática, Tania considera que el papel que deben jugar las preguntas en el aula de clase es el de orientar al estudiante para que logre llegar a la solución de los problemas planteados. Ella también plantea que este tipo de preguntas pueden ser como las desarrolladas a lo largo de los talleres de intervención en el curso didáctica del cálculo, idea que deja ver que los recursos utilizados dentro de las intervenciones en la comunidad de práctica se convirtieron en repertorio compartido para los integrantes.

le cambiaria la ultima parte de inducir a función inyectiva creciente y continua. En cambio reforzaria más el concepto de función lineal, trabajaria las caracteristicas de esta, sus propiedades, sus elementos. Como hallar la expresión algebraica desde una gráfica. Además diseñaria preguntas que ayuden al estudiante a encontrar la expresión algebraica, no solo dar el problema, como aquellas propuesta en los talleres trabajados a lo largo del curso.

Figura 74. Respuesta de Tania para el ítem f) de la parte II del taller final

Alrededor de otros recursos que pudieron incorporarse en el diseño del plan, las tres profesoras en formación coincidieron en el uso de las tecnologías digitales. Mariana lo incorporaría como un apoyo para identificar características de las funciones lineales (Figura 75), por ejemplo, que ocurre con las funciones $y=mx+b$ cuando los parámetros m y b varían. Tania lo propone para trabajar desde allí el modelado de la situación y a partir de ello identificar características que ayudarían a su solución (Figura 76).

(e) Utiliza el tablero. Para complementar la actividad podría hacerse uso de GeoGebra con el objetivo de que los estudiantes puedan graficar varias funciones lineales $(y=mx+b)$ en el mismo plano y poder identificar los cambios en la gráfica cuando m y b varían.

Figura 75. Respuesta de Mariana para el ítem e) de la parte II del taller final

e) Recursos que usó, fue el problema, las preguntas y pasos que planteó. Utilizaria las TD, para modelar la situación y esto ayudará a los estudiantes, a reconocer las variables de la situación, la relación que existe entre ellas y así poder llegar a la representación algebraica.

Figura 76. Respuesta de Tania para el ítem e) de la parte II del taller final

Finalmente, en la Tabla 19 se resumen los significados alrededor del pensamiento orquestal en el taller de significados finales de la función y su enseñanza.

Tabla 19

Significados asociados al pensamiento orquestal en el taller de significados finales

Angélica	Mariana	Tania
Considera que el software GeoGebra es una herramienta potente para identificar características de los problemas.		
		Estima que el uso de la pregunta y las herramientas que ofrece el software funcionan como recursos para promover la actividad matemática en el aula.

4.1.7 Significados negociados en los talleres sobre la función y su enseñanza. Al abordar los seis talleres propuestos, los profesores en formación desarrollaron su pensamiento reflexivo negociando significados sobre la función y su enseñanza. A continuación, se describen los significados negociados por la CoP, en términos del pensamiento reflexivo, rescatando evidencias de las profesoras en formación Angélica, Mariana y Tania las cuales se presentaron en los anteriores apartados.

4.1.7.1 Significados asociados al Pensamiento Matemático. Durante el proceso de negociación se generaron diferentes ideas sobre el significado de la función, por lo que para el reporte de significados negociados sobre el pensamiento matemático se tendrán en cuenta cuatro de las cinco grandes ideas sobre la función planteadas por Cooney et. Al (2010): IDEA 1: el concepto de función; IDEA 2: covariación y tasa de cambio; IDEA 3: familia de funciones, e; IDEA 5: múltiples representaciones. Las anteriores ideas fueron descritas en el apartado 2.2.2.1.

Sobre la gran idea 1, el concepto de función, desde un inicio los profesores en formación exhibieron la idea de que las funciones deben cumplir la propiedad de la unicidad. No obstante, en el caso de Tania (Figura 9), no dio importancia a especificar cómo se deben relacionar los conjuntos, es decir, no dio importancia a garantizar cuál conjunto es el dominio y cuál es el recorrido de la función.; y en el caso de Angélica (Episodio 3), presentó confusión con la definición de función y la definición de función inyectiva, es decir, consideraba que para que una relación pueda ser función, a cada elemento del recorrido también le debe corresponder un solo elemento del dominio.

En el desarrollo e implementación de los talleres se evidenció que los profesores en formación seguían dando la importancia a la propiedad de la unicidad para definir una función (Mariana, Figura 21). En los significados finales se reflejó el proceso de negociación que hubo alrededor de la importancia del dominio de las funciones. En la Figura 68, Figura 69 y Figura 70 se evidencia que para Angélica, Tania y Mariana respectivamente, es importante esclarecer cómo se relacionan los conjuntos de una relación para saber bajo qué dominio se debe cumplir la propiedad de la unicidad.

Alrededor de la gran idea 2, covariación y tasa de cambio, los significados negociados estuvieron reflejados en los talleres 2,3,4 y 5 ya que en estos se trabajaron problemas asociados a las funciones como medio para describir la variación de magnitudes relacionadas.

En el taller 4 los profesores en formación presentaron dificultad para identificar cómo cantidades relacionadas variaban conjuntamente. Angélica (Figura 41) y Tania (Figura 42) mostraron dificultades en la comprensión del enunciado y por ende dificultad para representar la variación conjunta de las variables. Por el contrario, Mariana presentó gran habilidad para describir variación de magnitudes por medio de procedimientos aritméticos (Figura 43), pero si dificultad para generalizar dicha descripción.

Por medio de las dinámicas de trabajo colaborativo posibilitadas dentro de la CoP, los profesores en formación negociaron significados sobre la gran idea 2. En el (Episodio 12) y el (Episodio 13) se evidencia como por medio del trabajo con otro integrante de la CoP, Angélica y Tania respectivamente, negocian significados sobre la interpretación del problema planteado en la hoja de trabajo. Al igual, en el (Episodio 14) Mariana también negocia significados con otro integrante de la CoP sobre la generalización de la descripción de variación de magnitudes.

Como reflejo del proceso de negociación del taller 4, en el taller 5 los profesores en formación mostraron habilidad para describir de forma algebraica cómo variaban dos magnitudes relacionadas sin tener dificultades en la interpretación del enunciado (Figura 59).

En relación con la tasa de cambio, en el taller 5 (función y derivada) se evidenció que, inicialmente los profesores en formación realizaron procedimientos mecánicos para encontrar la razón de cambio y optimizar el volumen de la caja. Se identificó un proceso de negociación en el trabajo de intercambio de significados entre dos integrantes de la CoP. En la Figura 61, Figura 62 y Figura 63 se evidencia el nuevo significado que tiene la derivada en su representación geométrica para Mariana, Angélica y Tania respectivamente. Pasaron de optimizar una función de forma mecánica a reconocer que la derivada representa la pendiente de la recta tangente en todo punto sobre una curva.

Alrededor de la gran idea 3, familia de funciones, se evidenciaron significados sobre la función parte entera y logística. En la Figura 29 se evidencia que Angélica representó una función por partes para modelar el problema del minutero y no identificó las propiedades de la función parte entera para generalizarla, proceso que Tania logró hacer desde un inicio (Figura 30). En el proceso donde se permitió el intercambio de hojas de trabajo para reflexionar alrededor de las respuestas de otro integrante, Angélica logró negociar por medio de la hoja de trabajo de Tania, propiedades de la función parte entera (Episodio 11), tales como el dominio y el rango de esta.

En el taller de función y límite se evidenció un intercambio de significados alrededor de la progresión geométrica vista como una función logística. En un primer trabajo individual, Angélica (Figura 41), Tania (Figura 42) y Mariana (Figura 43) mostraron dificultad para evidenciar propiedades de la función logística que representaba el problema propuesto. Mediante el trabajo en equipo, Mariana logró evidenciar propiedades del problema que la llevaron a plantear la progresión geométrica (Episodio 14) y Figura 44) y durante la puesta en común socializó sus resultados y con los demás integrantes de la CoP negociaron la función logística final y propiedades de esta, tales como el dominio y el recorrido.

El uso de múltiples representaciones, la gran idea 5, se vio negociada durante cada uno de los talleres. Inicialmente se identificaron ideas como, el uso de la prueba de la recta vertical para indicar si una representación gráfica es una función (Angélica, Figura 10) (Tania, Figura 9), al igual que, considerar que en una gráfica en el plano cartesiano, siempre el eje x es el dominio de la función (Tania, (Episodio *1)*). Después de las negociaciones dadas en cada uno de los talleres, los profesores en formación dejaron ver en el taller de significado finales, que la prueba de la recta vertical tiene algunas limitaciones. Por ejemplo, en la Figura 68, Figura 69 y Figura 70 se evidencia que para Angélica, Tania y Mariana respectivamente, el uso de la prueba de la recta vertical depende de la escogencia del dominio, es decir, en la situación donde se presenta la parábola horizontal, si se considera el eje y como los valores del dominio de la función, dicha representación gráfica sí se considera función.

Otra idea identificada desde el principio fue la dificultad para identificar conjuntos de pares ordenados como una función. Por ejemplo, Mariana consideró representar gráficamente en el plano cartesiano el conjunto de pares ordenados (Figura 12), por lo que al realizarle la prueba de la recta vertical no la cumplía. De aquí se evidencia que, para Mariana toda función puede representarse de forma gráfica. En el taller de significados finales, Mariana analizó e identificó que el conjunto de pares ordenados pude considerarse función porque está cumpliendo la propiedad de la unicidad y que no necesariamente por ser función, debe poder representarse gráficamente en el plano cartesiano (Figura 71).

Se evidenció también que, una de las representaciones de la función que es más usada por los profesores en formación, es la algebraica. Mariana dejó ver desde los primeros talleres que la representación algebraica permite dar más validez y mejor justificación a un procedimiento (Figura 22). Durante el proceso de negociación Mariana fue mostrando la importancia que tienen otras representaciones de la función, tal como la representación tabular (Figura 33), sin embargo, siempre pensando en utilizar propiedades de estas representaciones para llegar a una representación algebraica.

Otro significado reflejado alrededor de los diferentes tipos de representaciones de la función fue el evidenciado en Tania. Ella rescata la importancia de las propiedades de la representación gráfica para a partir de ellas lograr encontrar la respectiva representación algebraica (Figura 30). Dicho significado fue adoptado por Angélica (Episodio 11) por medio del intercambio de hojas de trabajo. Angélica evidenció la importancia que tiene el identificar propiedades de una representación de una función para lograr relacionarla con otra de sus representaciones.

Del proceso de negociación de significados alrededor del pensamiento matemático, se logró que los profesores en formación reconocieran que la función debe cumplir la propiedad de la unicidad, que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del recorrido. También, concibieron importante determinar bajo que dominio una relación se puede considerar función. Con relación a la representación gráfica de la función, los profesores en formación admitieron que la prueba de la recta vertical es válida siempre y cuando se determine el conjunto de salida y de llegada. Otro significado común que se pudo lograr fue, que se interpretara la derivada desde su representación geométrica como herramienta para encontrar máximos y mínimos de una función.

4.1.7.2 Significados asociados al Pensamiento Didáctico. El proceso de negociación permitió que los profesores en formación, al desarrollar las situaciones propuestas en las hojas de trabajo, fueran conscientes de los posibles interrogantes y dificultades que se pueden presentar en el aula de clase por parte de los estudiantes. Los significados estuvieron asociados a la metodología de la resolución de problemas y las diferentes estrategias para hacer estos más comprensibles por los estudiantes.

Los profesores en formación rescatan la importancia de trabajar problemas del contexto real para la enseñanza de las funciones (Episodio 16). Un primer significado asociado a la implementación de la metodología de la resolución de problemas en el aula de clase es, seleccionar problemas que se ajusten al contexto real y que sean acordes a la temática a enseñar (Angélica, Figura 72) (Tania, (Episodio 19), de igual manera, que en el proceso de la implementación del problema se realice una buena contextualización del problema. Angélica y Tania a raíz de su experiencia solucionando uno de los problemas propuestos (Figura 41 y Figura 42), reflexionaron sobre la necesidad de guiar al estudiante por medio de preguntas para que logre una buena contextualización del problema, de lo contrario, podrían realizar una mala interpretación de este (Figura 47, Figura 48 y Figura 49).

Otro significado que se evidenció estuvo relacionado con la necesidad de realizar planeaciones de clase en donde se tengan en cuenta las diferentes posibles dificultades que pueden presentar los estudiantes al momento de abordar un problema; dicho significado resultó de reflexionar sobre la planeación del profesor de matemáticas sobre la función lineal que se les presentó en el taller 6 (Mariana, (Episodio 20).

Algunas de las dificultades que se pueden evidenciar en la resolución de problemas están asociadas a las diferentes estrategias utilizadas para la solución de este. El proceso de reflexión que se dio dentro de la CoP, permitió que los profesores en formación negociaran significados alrededor de sus estrategias para resolver problemas. Una primera estrategia es la de recurrir a los conocimientos previos para resolver de forma mecánica un problema. Angélica (Episodio 15) reconoció que dicha estrategia no es conveniente y que se debe incentivar a los estudiantes a que recurran a hacer interpretaciones y análisis basados en razonamiento matemáticos.

Otra estrategia que está relacionada a la identificación de patrones de comportamiento es, primero realizar una comprensión del problema para poder listar los datos de forma explícita y posteriormente evidenciar el comportamiento de estos (Mariana, Figura 52). Este significado fue negociado por Angélica y Tania quienes inicialmente habían adoptado la estrategia de realizar cálculos aritméticos para identificar patrones. Ellas reconocieron que su estrategia no es conveniente para abordar este tipo de situaciones porque no es posible evidenciar patrones de comportamiento de los datos (Figura 50 y Figura 51).

Los significados antes expuestos dan cuenta de posibles situaciones que los profesores en formación van a encontrar en el aula y que requieren de reflexión para tener control de ellas con secuencias de enseñanza que permitan orientar a los estudiantes de la mejor forma.

4.1.7.3 Significados asociados al Pensamiento Orquestal. El proceso de negociación de significados relacionado al pensamiento orquestal generó en los profesores en formación la necesidad de reflexionar sobre los recursos suficientes y necesarios para enfrentar las posibles dificultades de aprendizaje que pueden presentar los estudiantes en el aula de clase.

Por medio de sus propias dificultades al desarrollar las hojas de trabajo propuestas, los profesores en formación reflexionaron sobre el uso de diferentes recursos para la enseñanza de temáticas relativas al cálculo diferencial, principalmente sobre el uso del software interactivo GeoGebra.

Inicialmente se evidenciaron diferentes significados sobre el uso de GeoGebra en la resolución de problemas. Algunos profesores en formación consideraban importante el uso de GeoGebra por sus diferentes aportes a la interpretación del problema y para validar procedimientos realizados a lápiz y papel (Angélica, (Episodio 9*)* (Tania, Figura 54). Otros profesores en formación consideraban irrelevante el uso de GeoGebra porque este no generaba la solución algebraica de los problemas (Mariana, Figura 55).

Se infiere que, el desarrollo de los talleres llevó a que se negociaran los significados iniciales y que el uso de GeoGebra se convirtiera en parte del repertorio compartido de la comunidad. En el taller de significados finales, los profesores en formación propusieron la implementación del software como recurso para llevar a cabo una clase sobre la enseñanza de la función lineal por medio de problemas. Mariana (Figura 75) consideró la incorporación de GeoGebra como herramienta para evidenciar características de las funciones lineales. Tania (Figura 76) da importancia al software debido a sus herramientas para poder modelar las situaciones y así evidenciar aspectos relevantes que ayuden a su solución.

Otros recursos negociados por los integrantes de la CoP que fueron propuestos para incorporarlos a la resolución de problemas son las preguntas y el material concreto. El uso de la pregunta es propuesto como recurso para direccionar al estudiante en situaciones donde presente dificultades (Tania, Figura 74) y el uso de material concreto es propuesto como recurso para modelar situaciones, de tal manera que el estudiante sea consiente desde un contexto real, de las características del problema (Angélica, (Episodio 17)(Tania, Figura 66).

5. Conclusiones

Se recuerda que para dar respuesta a la pregunta ¿qué significados sobre el concepto de función y su enseñanza, negocia una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación?, y para cumplir con el objetivo de caracterizar el pensamiento reflexivo de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación que negocia significados de la función, se considera la comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación que pertenecen a un curso de didáctica del cálculo del segundo semestre académico del 2018.

Las conclusiones de esta investigación se presentan en términos del pensamiento reflexivo de los profesores en formación de quienes se presentaron evidencias. De igual forma, a la par se dejará en evidencia algunos posibles aspectos que quedan abiertos para posibles investigaciones.

Angélica, Tania, y Mariana identificaron algunas dificultades al reflexionar en la puesta en común de cada uno de los talleres de reflexión y negociación. Este proceso se dio gracias al compromiso mutuo que se reflejaba en cada uno de los integrantes y el acompañamiento de las moderadoras de la CoP. Angélica en los primeros encuentros con la comunidad mostraba una participación periférica, no obstante, al finalizar los encuentros ella se caracterizaba por mantener una participación plena y en la mayoría de las discusiones, tomaba un papel de moderadora. Tania y Mariana siempre se mostraron comprometidas con la comunidad manteniendo una participación plena en cada una se las sesiones.

A continuación, se presentan los significados negociados en términos de los tres componentes del pensamiento reflexivo de los profesores en formación, en especial, se describen los progresos que se observaron en torno al dominio de los significados de la función y su enseñanza, así como las diferentes estrategias y recursos utilizados para resolver problemas.

5.1 Significados negociados en el Pensamiento Matemático

Con relación al pensamiento matemático de los profesores en formación, desde el primer hasta el último taller de reflexión y negociación, se observó un desarrollo alrededor de los significados de la función. Específicamente, este desarrollo se evidenció en las negociaciones descritas a continuación.

Angélica partió con la concepción de que una función debe cumplir la propiedad de que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango y que a cada elemento del rango le corresponde un único elemento del dominio, es decir, Angélica confundía la definición de función con la definición de función inyectiva. Ella finalizó concibiendo la función como una relación de correspondencia de variables que únicamente debe cumplir la primera condición antes mencionada. Mariana tuvo un gran desarrollo con relación a las diferentes formas de representar una función. Ella partió de la idea de que la representación algebraica tiene mayor validez que las otras representaciones y a medida de las intervenciones concibió importante las otras representaciones para evidenciar características de las funciones. Por su parte Tania, negoció significados sobre la escogencia del dominio de la función en su representación gráfica. Ella concebía siempre el dominio como el eje x y el rango como el eje y del plano cartesiano y terminó considerando que una gráfica se puede considerar función dependiendo de la escogencia del dominio.

A partir del análisis, se identificó que, en las dinámicas de negociación de significados permitidas dentro de la comunidad de práctica, los profesores en formación pudieron lograr:

- Reconocer la importancia del concepto de función como base de temáticas asociadas al cálculo diferencial.

- Comprender y reconocer las características de una función desde sus diferentes representaciones.
- Identificar en diferentes contextos, cómo cantidades relacionadas varían conjuntamente.
- Estudiar el concepto de límite desde las nociones de tendencia y aproximación.
- Interpretar la derivada desde su representación geométrica para identificar máximos y mínimos de una función.

A partir de lo anterior, se concluye que, un profesor en formación que hace parte de una comunidad de práctica en donde se posibilitan diferentes dinámicas para la negociación de significados puede lograr afianzar sus conocimientos matemáticos. Se considera que, los talleres permitieron que los profesores en formación recordaran contenidos de cálculo diferencial y desde otra perspectiva reconstruyeran los contenidos que no habían quedado claros.

En los primeros significados de los integrantes de la CoP se evidenció un reflejo de lo que comúnmente se enseña en la asignatura cálculo diferencial, una enseñanza basada en libros de texto en donde prevalecen los ejercicios mecánicos. Se concluye que, el trabajo colaborativo entre los profesores en formación y las moderadoras de la CoP posibilitó el desarrollo de pensamiento matemático a partir de la resolución de problemas y dejar de lado metodologías tradicionales.

La CoP fue un espacio en el que los profesores en formación pudieron compartir sus significados y reflexiones recibiendo enriquecimientos por parte de los demás profesores en formación y de la profesora e investigadora que cumplían el papel de moderadoras de la CoP.

5.2 Significados negociados en el Pensamiento Didáctico

La enseñanza del cálculo diferencial se convirtió en un reto para los profesores debido al alto grado de perdida de la asignatura. Como conclusión se puede decir que, el conformar como comunidad de práctica un curso de profesores de matemáticas que están siendo formados posibilita reflexiones sobre posibles situaciones que pueden encontrar en su futura actividad docente. En este caso, los profesores en formación tuvieron un acercamiento a estas dificultades desde una mirada de sus propias dificultades al desarrollar los talleres planteados en el capítulo anterior.

Desde el inicio de los encuentros de la CoP, los profesores en formación identificaron en ellos mismos las debilidades y las fortalezas de las estrategias que usaban para resolver problemas. Fue interesante evidenciar que posterior a cada uno de los espacios de negociación, los profesores en formación intentaban incorporar los significados de los demás integrantes.

Angélica, Mariana y Tania inicialmente identificaron que presentaron dificultades en la resolución de problemas asociadas a las estrategias que utilizaban para abordarlos. A raíz de esto, Angélica logró negociar que, es importante seleccionar buenos problemas del contexto real acordes a la temática a enseñar y que no vayan a generan incoherencias; Mariana logró negociar que, es importante realizar planeaciones de clase en donde se tengan en cuenta las diferentes dificultades que puedan presentar los estudiantes; y, Tania logró negociar que, la utilización de problemas del contexto real en el aula de clase es importante ya que se puede incentivar a los estudiantes a resolver problemas de la vida diaria por medio de herramientas matemáticas.

A partir de la investigación realizada, los profesores en formación negociaron significados en el Pensamiento Didáctico de la siguiente manera:

- El Cambio de una metodología tradicional a una metodología basada en la resolución de problemas permitió que los profesores en formación ampliaran el panorama de enseñanza de la función.

- Tienen en cuenta las diferentes representaciones de la función para identificar características de los problemas y así lograr la solución de este.
- La dinámica de que los profesores en formación resolvieran los talleres como si fueran estudiantes permitió que a raíz de sus propias dificultades negociaran los siguientes significados:
    - Es importante identificar la importancia de seleccionar problemas acordes a la temática a enseñar y contextualizados con la vida real.
    - En las planeaciones de clase se deben tener en cuenta las diferentes dificultades que un estudiante puede presentar al abordar los problemas planteados.
    - Es importante el uso de situaciones del contexto real para promover interés en el estudiante en la resolución de problemas de la vida real por medio de herramientas matemáticas.
- Consideran la metodología de la resolución de problemas para las planeaciones de clase que giran en torno a la enseñanza de la función.

La participación en la CoP permitió que los integrantes comprendieran su papel como futuros profesores de matemáticas y supieran cómo gestionar dentro del aula de clase el proceso de resolución de problemas.

5.3 Significados negociados en el Pensamiento Orquestal

El uso de diferentes recursos, principalmente las tecnologías digitales, ofrecen nuevas oportunidades a los estudiantes para tomar acciones matemáticamente significativas, esto se debe a que los estudiantes por medio de estas pueden formular conjeturas y pruebas (NCTM, 2009).

En torno al pensamiento orquestal se pudo evidenciar que, desde un inicio Angélica y Tania aceptaban el uso de GeoGebra para abordar problemas, por el contrario, Mariana dejaba ver que su uso no era necesario y se conformaba con el razonamiento a lápiz y papel.

A partir del estudio realizado, los profesores en formación negociaron significados sobre el Pensamiento Orquestal a partir de los talleres de la siguiente manera:

- Admiten el uso de las tecnologías digitales (GeoGebra) en la resolución de problemas ya sea para evidenciar características de este o para comprobar razonamientos.
- Proponen el uso de diferentes recursos tales como el material concreto y las videograbaciones con el objetivo de que el estudiante se acerque de forma física a las condiciones del problema.
- Conciben el uso de la pregunta como recurso para orientar a los estudiantes en el proceso de resolución de problemas promoviendo así la actividad matemática en el aula.

Se concluye que, el uso de GeoGebra se convirtió en un recurso que hace parte del repertorio compartido de los integrantes de la CoP ya que su uso fue un significado negociado al finalizar la implementación de los talleres. Además, consideran relevante su uso para el diseño de actividades que involucran la enseñanza de las funciones.

5.4 Reflexiones finales

Las evidencias mostradas en este documento dan cuenta del impacto que generan las dinámicas de comunidades de práctica en un curso de formación de profesores. Por una parte, la oportunidad de reflexionar sobre los objetos matemáticos y la didáctica que los rodea y, por otra parte, reducir la brecha entre la teoría y la práctica desde la formación inicial de profesores.

La participación en la comunidad de práctica promueve en los profesores en formación la necesidad de seguir reflexionando y negociando sobre otros conceptos matemáticos y sus diferentes maneras de enseñarlos, ya que, por medio de esta reflexión, se logra dar cuenta de las dificultades que se pueden presentar a la hora de la enseñanza (como profesores) y el aprendizaje (sus futuros estudiantes) de dichos conceptos.

Se considera que, la disposición que tenga cada uno de los profesores en formación a la hora de realizar las actividades propuestas para trabajar con la comunidad de práctica infiere en los resultados logrados en cada uno. Los integrantes que siempre estuvieron comprometidos con la comunidad lograron reconstruir mayores significados alrededor de la función y su enseñanza.

Finalmente, se deja expuesto un interrogante que surge de los datos recolectados y que no fueron tenidos en cuenta para el reporte de resultados de esta investigación: ¿Cómo la negociación de significados del pensamiento reflexivo, por medio del desarrollo de los talleres, influye en las primeras prácticas de los profesores en formación?

Referencias bibliográficas

Acevedo-Rincón, J. (2018). *Aprendizagens profissionais docentes do (futuro) professor de Matemática situadas em um estágio interdisciplinar***.** (Tesis de Doctorado). Universidad Estatal de Campinas (Unicamp), Campinas.

Amaya, E. y Fiallo, J. (2019). *Significados sobre la demostración matemática en una comunidad de práctica de clase.* XV Conferencia interamericana de Educación Matemática. Medellín: Universidad de Medellín.

Amaya, T. Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática,* Volumen 28, pp. 111-144.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8(30), 67-84.

Botello, I. (2013). *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación*. (Tesis de Maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Boyer, C. (1986). *Historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Universidad.

Burgos, M., Y Flores, P. (2017). Reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza de las funciones. *Revista de Educación Matemática*, 97, (65-74).

Carlson, M. y Oehrtman, M. (2005). Research sampler 9: Key aspects of knowing and learning the concept of function. *Mathematical Association of America*. Recuperado de http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html

Castañeda, S. (2014). (2014). *Matemáticas fundamentales para estudiantes de ciencias.* Colombia: Universidad del Norte.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE/Horsori.

Cooney, T., Beckmann, S., y Lloyd, G. (2010). *Developing essential understanding of functions for teaching mathematics in Grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cuevas, C. y Pluvinage, F. (2009). Cálculo y Tecnología. *El Cálculo y su Enseñanza*, 1 (1), 45-59.

Cullen, C. J., Hertel, J. T., & John, S. (2013). Investigating extrema with GeoGebra. *Mathematics Teacher,* 107(1), 68-72.

Cyrino, M. (2013). *Formação de professores que ensinam matemática em comunidades de prática.* VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática Uruguay, pp. 5199-5201.

Dewey, J. (1989). Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo. Barcelona: Paidós.

Dick, T. P. & Hollebrands, K. F. (2011). Focus in high school mathematics: Technology support reasoning and sense making. Reston, VA: National Council of Teachers Mathematics.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America Notes*, 25, 85-106.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Elliott, J. (1993). El cambio educativo desde la investigación-acción, Madrid: Morata.

Escuela de Matemáticas. (2010). *Proyecto educativo que soporta la reforma del programa de Licenciatura en Matemáticas*. Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content-knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), 94–116

Flores. P. (1998) Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos. *Revista de didáctica de las matemáticas,* Volumen 17, pp. 37-50.

Fiallo, J, E, y Parada, S, E, (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación. Curso de Precálculo Mediado por GeoGebra*. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Figueiredo, C., Contreras, L., & Blanco, L. (2012*). La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos.* Educación matemática. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v24n1/v24n1a4.pdf

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Disertación doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Hitt F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Editor), *Investigaciones en Educación Matemática* Vol. I (pp. 245-264). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Hitt F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 123-134.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Huang, R. y Kulm, G. (2012). Prospective middle grade mathematics teachers' knowledge of algebra for teaching. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31 (4), 417-430.

Juárez, M. (2004). Reseña de “una revisión de las comunidades de práctica y sus recursos informáticos en internet” de Ettiene Wenger. Revista Mexicana de Investigación Educativa, enero-marzo, 235-244. ISSN 1450-6666. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14002015

Kastberg, S. y Leatham, K. (2005). Research on graphing calculators at the secondary level: Implications for mathematics teacher education. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 5(1), 25–37

Larson, R. y Edwards, B. (2006). Cálculo con Geometría Analítica. Cap. 1 : *Preparación para el cálculo* (pp. 2-40). 8a. Ed. México: Mc Graw Hill.

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10, 53-62.

López-Acosta, L. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional*. Tesis de Maestría. México: Cinvestav.

López-Acosta, Luis; Montiel, Gisela (2017). *La predicción como articuladora del pensamiento algebraico y el pensamiento y lenguaje variacional*. En Serna, Luis Arturo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 918-926). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

MEN. (2014). *Lineamientos de Calidad para las licenciaturas en educación*. Colombia. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-357233_recurso_1.pdf.

Moreno, D. (2015). *Procesos de interpretación y acción de profesores que participan en una comunidad de práctica en la que se realiza el diseño curricular de un curso de precálculo*. (Tesis de Maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.

Moreno, S. (2017). *Prácticas Profesionales tempranas en la formación inicial de profesores de Matemáticas.* (Tesis de Maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.

Moreno-Armella, L. (2002). *Instrumentos matemáticos computacionales*. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 81-86). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teacher of Mathematics (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning. Reston*, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Olvera-Martínez. (2015). *El uso de herramientas digitales en el estudio de funciones y el desarrollo de competencia matemática para la enseñanza*. (Tesis de Doctorado). Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Parada, S. (2009). *Reflexión sobre la práctica profesional: actividad matemática promovida por el profesor en su salón de clases*. (Tesis de maestría). Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, México.

Parada, S. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: Un modelo de desarrollo profesional*. (Tesis de Doctorado). Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Parada, S. y Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 17(1), pp. 83-113. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v17n1/v17n1a5.pdf

Pea, R. D. (1985). Beyond Amplification: Using the Computer to Reorganize Mental Functioning. *Educational Psychologist*, 20(4), 167-182.

Polya, G. (1945). *How to Solve it*. Princeton : Princeton University Press.

Purcell, E. J. y Varberg, D. (2000*).* Calculus with Analytic Geometry. *Cap. 2 : Functions and limits*. *Englewood Cliffs*, NJ: Prentice Hall.

Robert, A. y Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics* 59 : 269–298

Ronau, R., Meyer, D., y Crites, T. (2014). Putting Essential Understanding of Functions into Practice in Grades 9-12. Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics.*

Santos-Trigo, M. (2010). *La Función Cuadrática. Enfoque de Resolución de Problemas*. México, D.F.: Trillas.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education* (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Santos-Trigo, M. y Reyes-Rodríguez, A. (2011). Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(3), 313-336.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner*. Londres: Temple Smith.

Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos*. Buenos Aires: Paidós.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform, *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Steele, M. D. y Hillen, A. F. (2012). The content-focused methods course: A model for integrating pedagogy and mathematics content. *Mathematics Teacher Educator*, 1(1), 53-70.

Stewart, J. (2001). Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Cap. 1*: Funciones y modelos* (pp. 10-77). Bogotá, Colombia: Thompson Editores. 2ª. Ed.

Trouche, L. (2004) Managing Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Student's Command Process Through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281307.

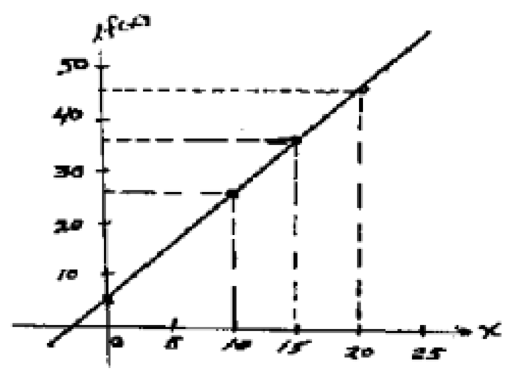
Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85.

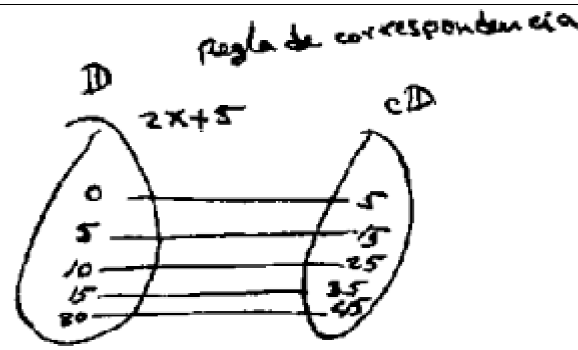
Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge University Press, Cambrigde.

Zbiek, R.M. y Heid, M. K. (2011). Using technology to make sense of symbols and graphs and to reason about general cases. En T. Dick & K. Hollebrands (Eds.), Focus on Reasoning and Sense Making: *Technology to support reasoning and sense making* (pp. 19–31). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zill, D y Wright, W. (2011). *Cálculo Transcendentes tempranas*. Cuarta edición. México. Editorial Mc Graw Hill.

APÉNDICE A. Plan de clase: Taller 6

Propuesta del profesor (transcripción fiel)
Que el alumno determine la representación algebraica del siguiente problema: "La edad del padre de Juan es el doble de la edad de esté dentro de cinco años" **y** = edad del padre de Juan: (Variable dependiente). **x** = edad de Juan: (Variable Independiente) Modelo algebraico. Y=2x+5 logrando que el alumno Indique esto; tan solo una de sus compañeros enuncio dicho problema. con lo que ellos mismos determinaron que la edad del Padre estaba en función de la edad del Hijo. Estableciendo la Representación Algebraica del Problema; podremos asignarle a Juan una Serie de edades de la siguiente forma: Si Juan no ha nacido ¿cual es la edad de su padre? y= f(x) f(x)=2x+5 f(0)=2(0)+5=5 años Así que para cuando Juan tiene, 10, 15 y 20 años ¿cual será la edad del Padre? para cuando Juan tiene 10 años, la edad de su padre es de 25 Años. f(10)=2(10)+5=20+5=25 -para cuando Juan tiene 15 años la edad de su padre será de 35 años. f (15) =2(15) +5=30+5=35 - para cuando Juan cumpla 20 años mayor de edad la edad de su padre Será de: 45 años Por medio del ejemplo anterior lo podremos interpretar gráficamente por medio de parejas ordenadas (x, f(x)) donde: x=edad de Juan. f(x)= edad del Padre. Obteniendo los siguientes puntos y, denotándolos por: F(x)= {(0,5) (10,25) (15,35) (20,45)} Elaborando una gráfica en el sistema cartesiano. de la forma:  Obteniendo el siguiente Diagrama Sagital:



De tal forma que la gráfica obtenida corresponde a una gráfica de una línea Recta a la cual Se le llamara “función lineal”

De la misma forma observará que para cada valor de x le corresponde al menos una de f(x), con lo que se le puede inducir que corresponde a una función Inyectiva; los valores del D (Dominio) van de uno menor a uno mayor de tal forma que decimos que la función es Creciente, y como para cada valor que el asignemos a x, existe un valor para f(x), con lo cual la definimos como Continua para $\forall x \exists f(x)$
-continua.
Podremos dejar que el alumno encuentre y grafique
-la analogía de grados Centígrados a grados Farenhai.
Graficándola y enunciando una serie de Características de esté ejemplo.
-“Un móvil desarrolla una velocidad de cinco veces su distancia recorrida, menos cuatro metros en un tiempo determinado” etcétera.