

CAOS Y EL CONJUNTO DE CANTOR

WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2007

CAOS Y EL CONJUNTO DE CANTOR

WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN

**Trabajo presentado para optar el título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS**

**Directora
SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2007

A MI AMÁ y A NOELIA.

Agradecimientos

Agradezco a Dios, padre y madre, creador de la Vida. Gracias por permitirme llegar a clarificar el sentido de la existencia en la historia y entender la presencia divina en las luchas de los pueblos que trabajan incansablemente por su liberación y autodeterminación.

Agradezco a los profesores por la excelente calidad humana en que nos han formado, por compartir su experiencia personal y por permitirnos conocer sus singularidades.

Muchas gracias.

TITLE: CHAOS AND CANTOR´S SET*

AUTHOR: WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN**

KEY WORDS: DYNAMICAL SYSTEM, SHIFT FUNCTION, CANTOR´S SET, CHAOS.

DESCRIPTION

This work consists of an analysis about the behavior of shift function dynamics in code space (homeomorphic to the Cantor´ s set) and specially, it shows these symbolic dynamics are chaotic. It proposes an alternative proof to that found in the literature, that means an original and simple contribution.

There are several ways of relating the Cantor´ s set to the chaotic dynamics within some dynamic systems, what raises some concern: ¿What´ s the role of Cantor´ s set in this behavior? Is always present Cantor´ s set in the chaotic dynamics of any system? If the Cantor´ s set is the space of the dynamic system, Is it chaotic? We aim at getting the answers based on the Holmgren´ s book [H].

We listed the basic topology definitions and propositions, metric spaces and the theory of dynamic systems needed to understand the dynamics of the functions. Some other chaotic dynamic systems are mentioned such as the logistic function and the Cantor´ s set, and the tent function and interval $[0, 1]$, and the relationship of these systems with the space of the codes are established.

Finally, some comparisons between the symbolic dynamics and the dynamics of the tent function and the logistic function are established; those functions are studied in other monographs and texts.

*Degree Work

** FACULTY OF SCIENCES, MATHEMATICS LICENCIATURE.
DIRECTORA SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA.

TITULO: CAOS Y EL CONJUNTO DE CANTOR*

AUTOR: WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN**

PALABRAS CLAVES: SISTEMAS DINÁMICOS, FUNCIÓN SHIFT, CAOS, CONJUNTO DE CANTOR.

DESCRIPCIÓN

Este trabajo consiste en un estudio sobre el comportamiento que presentan las dinámicas de la función shift en el espacio de los códigos (homeomorfo al conjunto de Cantor), y en especial, se demuestra que estas dinámicas simbólicas son caóticas. Se propone una prueba alternativa a la que aparece en la literatura, lo que significa un sencillo aporte original.

Hay diversas formas de relacionar el conjunto de Cantor con las dinámicas caóticas de ciertos sistemas dinámicos, lo que nos genera algunas inquietudes: ¿qué participación tiene el conjunto de Cantor en este comportamiento? ¿El conjunto de Cantor estará siempre presente en las dinámicas caóticas de cualquier sistema? Si el conjunto de Cantor es el espacio del sistema dinámico, ¿será caótico? Apoyados en el libro de Richard Holmgren [H] se intenta dar respuestas a estos interrogantes.

Se recoge un listado de las definiciones y proposiciones básicas de topología, espacios métricos y de la teoría de los sistemas dinámicos, necesarios para entender las dinámicas de las funciones. Se mencionan otros sistemas dinámicos caóticos, como la función logística y el conjunto de Cantor, y la función tienda y el intervalo $[0, 1]$ y se establece la relación de estos sistemas con el espacio de los códigos.

Por último, se hacen algunas comparaciones entre las dinámicas simbólicas y las dinámicas de la función tienda y la función logística, funciones estudiadas en otras monografías y textos.

*Trabajo de Grado

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTORA SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA.

Contenido

Introducción	1
1. Preliminares	4
1.1. Espacios métricos	4
1.2. Conjunto de Cantor	9
1.3. Espacio de los códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$	10
2. Dinámicas de una función	12
2.1. Sistemas dinámicos	12
2.2. Conjugación topológica	13
2.3. Caos	14
3. Dinámicas simbólicas	21
3.1. La función <i>shift</i>	23
3.2. Dinámicas en Σ^2	24
3.3. Caos en las dinámicas simbólicas	27
4. Otras funciones caóticas	29
4.1. Función tienda	29
4.2. Familia logística	30
4.3. Conclusión	34

Introducción

La complejidad es una palabra que se encuentra de moda en el mundo científico y en la vida común de los espacios académicos. El filósofo colombiano Dr. Carlos E. Maldonado [M] caracteriza la complejidad en tres caminos distintos: la complejidad como método, la complejidad como ciencia y la complejidad como cosmovisión.

La complejidad como método se refiere a la obra de Edgar Morin [Mo] conocida precisamente con el nombre del *método*. Maldonado considera la obra de Morin como: “una hermenéutica del mundo, la naturaleza y la vida. Más que una forma de pensamiento es una actitud general frente al universo”. Morin presenta una forma distinta de ver la realidad; donde el azar, la incertidumbre, la inestabilidad, lo incierto, lo inesperado, la interdependencia y la irreversibilidad de los procesos, son factores que tienen un peso importante en las dinámicas de la vida, el universo, el medio ambiente, la sociedad. Trata de superar la racionalidad de Newton y Descartes, la cual consiste en ver el universo como un *mecano* y que todo el movimiento del universo y la naturaleza se puede determinar por expresiones matemáticas o leyes generales.

Morin explica la diferencia entre el pensamiento complejo expuesto en el método y el *caos determinista*. Esta diferencia permite aproximarnos a la definición de caos desde las matemáticas. Morin dice: “Los fenómenos de la *teoría del caos* o de *caos determinista* se refieren a muchos sistemas que existen en la naturaleza cuyo comportamiento va cambiando con el transcurrir del tiempo (sistemas dinámicos). Dichos fenómenos aparecen cuando los sistemas se hacen extremadamente sensibles a sus condiciones iniciales de posición, velocidad, etc, de modo que alteraciones muy pequeñas en sus causas son capaces de provocar grandes diferencias en sus efectos. Como consecuencia de ello, no es posible predecir

con exactitud cómo se comportarán dichos sistemas más allá de cierto tiempo, por lo que parecen no seguir ninguna ley, parecen regidos por el azar”. Ésta es una característica del caos en sistemas dinámicos que se conoce como *sensibilidad a condiciones iniciales*.

Sigue diciendo: “Los investigadores han encontrado que los sistemas dinámicos con éstas características, presentan pautas de regularidad colectiva aunque no es posible distinguir el comportamiento individual de cada uno de sus componentes”. Esta característica se expresa en matemáticas en el hecho de que los puntos periódicos del sistema son densos en el espacio. Quiere decir que, aunque el comportamiento de las dinámicas sean caóticas e impredecibles, el caos admite un comportamiento regulado al interior.

Sin embargo, Morin advierte: “Todos los estudios pertenecientes al campo de los sistemas dinámicos no tienen nada que ver con lo que se entiende por caos y azar en términos *filosóficos*. Intentan estudiar fenómenos muy difíciles de formular matemáticamente dentro de un marco determinista”. En ésta opinión, Morin se aleja del concepto de caos determinista.

Según Maldonado, la complejidad como ciencia está directamente relacionada con las investigaciones de centros especializados en ciencias de la complejidad. La complejidad como ciencia está fuertemente marcada por el lenguaje matemático, físico y biológico. Las categorías que configuran la complejidad como ciencia son: sistemas complejos y comportamientos complejos, caos, atractores(fijos, periódicos y extraños), autoorganización, rupturas de simetría y bifurcaciones, estados de equilibrio, estados caóticos, estructuras disipativas, sistemas abiertos, sinergia, bucles de retroalimentación, recursividad, emergencia.

En este trabajo nos queremos acercar al concepto de *caos determinista* o de *sistemas dinámicos caóticos*. El caos supone en su definición matemática que las funciones (definidas en espacios métricos) sean sensibles a condiciones iniciales, admitan un orden en su sistema, es decir, permite comportamientos regulares y periódicos en muchos puntos del espacio, y en último lugar, que sea imposible descomponer el sistema en sus partes (subsistemas), pues el sistema como un todo muestra propiedades colectivas que sólo existen o tienen sentido para el todo y no para las partes.

El objetivo principal de este trabajo es analizar el papel que tiene el conjunto de Cantor en las dinámicas caóticas de algunos sistemas ya estudiados. Asumimos el espacio de los códigos como conjunto de Cantor [E]. Lo central es demostrar que efectivamente Cantor como espacio métrico de un sistema dinámico, acompañado de la función shift, es caótico (capítulo 3). Haciendo uso de la proposición 3.1, se presenta una prueba *alternativa* a la que aparece en la literatura, de las proposiciones 3.8, 3.9 y 3.10, lo que significa un sencillo aporte original. En el capítulo 4, se mencionan otros sistemas dinámicos caóticos, como la función logística h_r y el conjunto de Cantor, y la función tienda en el intervalo $[0, 1]$ y se establece la relación de estos sistemas con Cantor. Para estudiar lo anterior, en los capítulos 1 y 2 se recoge un listado de las definiciones y proposiciones básicas de topología, espacios métricos y de la teoría de los sistemas dinámicos, necesarios para entender las dinámicas de las funciones.

Capítulo 1

Preliminares

Para el estudio de los sistemas dinámicos debemos cerciorarnos de que el conjunto del sistema esté dotado de alguna métrica. La métrica permite entender y analizar las dinámicas de una función en el espacio. Por ejemplo, las condiciones que definen si un sistema dinámico es *caótico* se basan en este concepto.

Algunas definiciones de gran utilidad en las matemáticas están basadas en el concepto de distancia. A continuación se presentan algunos resultados básicos de topología o análisis, la mayoría sin prueba, que se podemos encontrar en [H] o [B].

1.1. Espacios métricos

Definición 1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica o distancia sobre X si cumple la siguientes condiciones:*

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$.

iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$.

*La pareja (X, d) se denomina **espacio métrico**, a los elementos de X le llamaremos puntos.*

Ejemplo. La pareja (\mathbb{R}, d_u) es un espacio métrico conformado por el conjunto de los números reales y la métrica usual definida como $d_u(x, y) =: |x - y|$, para $x, y \in \mathbb{R}$. La métrica d_u cumple con los axiomas de la definición 1.1.

Recordemos que si una métrica está definida sobre un conjunto, podemos definir una topología para el espacio métrico usando dicha métrica, y por tanto, podemos decidir cuáles subconjuntos son abiertos, cuáles son cerrados, cuándo una sucesión converge en el espacio y qué funciones son continuas en el espacio.

Definición 1.2. Sea (X, d) espacio métrico.

- i. Un subconjunto U de X es **abierto**, si para cada $x \in U$, existe $\epsilon > 0$ tal que si $d(x, y) < \epsilon$ implica que $y \in U$.
- ii. Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. El conjunto $B(x; \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ se denomina **bola abierta** con centro en x y radio ϵ .
- iii. Un subconjunto S de X es **acotado**, si existen $x \in X$ y $\epsilon > 0$ tales que $S \subset B(x; \epsilon)$.
- iv. Sea $S \subset X$. El punto $x \in X$ es un **punto de acumulación (o punto límite)** de S , si toda bola abierta con centro en x contiene un punto de S , distinto de x .
- v. Un subconjunto S de X es **cerrado**, si contiene todos sus puntos de acumulación.
- vi. Un subconjunto S de X es **perfecto** si todos sus puntos son de acumulación.
- vii. Sea S subconjunto de X . S es **denso** en X , si para cada punto $x \in X$, se tiene que toda bola abierta con centro en x contiene un punto de S .
- viii. Sea x_1, x_2, x_3, \dots una sucesión de puntos de X . Decimos que una sucesión **converge** a x en X si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, entonces $d(x, x_n) < \epsilon$.
- ix. Sea $\{x_n\}$ sucesión en X . Se considera otra sucesión $\{n_i\}$ constituida por enteros positivos de modo que $n_1 < n_2 < \dots$. La sucesión $\{x_{n_i}\}$ se llama **subsucesión** de $\{x_n\}$.

x. Sean (X, d) espacio métrico, $S \subset X$ y $\mathcal{C} = \{C_n\}$ una colección de conjuntos abiertos de X . \mathcal{C} es un **cubrimiento abierto** de S , si $S \subset \bigcup \mathcal{C}$.

xi. Sea X es un espacio métrico **compacto**, si toda sucesión de puntos de X admite una subsucesión convergente en X , (o, equivalentemente, si todo cubrimiento abierto de X admite un subcubrimiento finito).

xii. Sean (X, d_1) , (Y, d_2) espacios métricos.

La función $f : X \rightarrow Y$ es **continua** en $x \in X$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ y $d_1(x, y) < \delta$ entonces $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Proposición 1.1. El conjunto U es abierto si y solo si para cada $x \in U$, existe $\epsilon > 0$ tal que la bola abierta $B(x; \epsilon) \subset U$.

Proposición 1.2. Toda bola abierta es un conjunto abierto.

De aquí en adelante, llamaremos a toda bola abierta simplemente como *bola*.

Proposición 1.3. Un conjunto es abierto si y solo si su complemento es cerrado.

Definición 1.3. Sea S un subconjunto no vacío de (X, d) . Entonces, (S, d) es un espacio métrico. El subespacio hereda la métrica de X .

Proposición 1.4. Sea (X, d) espacio métrico y $S \subset X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. S es denso en X .

ii. Para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $y \in S$ tal que $d(x, y) < \epsilon$

iii. Todo conjunto abierto no vacío en X contiene un punto de S .

Recordemos ahora lo que significa una topología sobre un conjunto y la forma cómo una métrica induce una topología.

Definición 1.4. Sea X un conjunto no vacío y τ una familia de subconjuntos de X (es decir, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$). Se dice que τ es una **topología** sobre X , si cumplen las siguientes axiomas:

i. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$

ii. Si A y $B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

iii. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de τ , entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

El par (X, τ) se llama **espacio topológico**. Los elementos de τ se llaman **abiertos**.

Definición 1.5. Sea (X, τ) espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \tau$ (familia de abiertos). Se dice que \mathcal{B} es una **base** de τ , si todo abierto es unión de elementos de \mathcal{B} .

Proposición 1.5. Si \mathcal{B} es una base de τ , entonces \mathcal{B} es una topología sobre X .

La topología generada por \mathcal{B} se nota $\tau_{\mathcal{B}}$.

Proposición 1.6. Sea (X, d) espacio métrico.

La familia de bolas $\mathcal{B}_d =: \{B(a; r) \mid a \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ es una base de topología. La topología generada por la métrica d se nota τ_d .

Definición 1.6. Se dice que (X, d) es un espacio **totalmente desconexo**, si admite una base de abierto-cerrados (es decir, cada elemento de la base es abierto y cerrado a la vez).

Proposición 1.7. Sean (X, d_1) , (Y, d_2) espacios métricos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. La función $f : X \rightarrow Y$ es continua en X .

ii. Si para todo U abierto en Y : $f^{-1}(U)$ es abierto en X .

iii. Si para todo C cerrado en Y : $f^{-1}(C)$ es cerrado en X .

iv. Para cualquier sucesión x_1, x_2, x_3, \dots en X que converge a un punto x^* , se tiene que $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ converge a $f(x^*)$.

Definición 1.7. Sean X y Y espacios métricos.

La función $\varphi : X \rightarrow Y$ es un **homeomorfismo**, si φ es biyectiva y bicontinua, es decir, φ y φ^{-1} son continuas. En tal caso, decimos que X e Y son homeomorfos.

Si existe un homeomorfismo entre dos espacios métricos quiere decir que poseen las mismas propiedades topológicas o son esencialmente lo mismo como espacios topológicos.

Proposición 1.8. Sean X y Y espacios métricos y $\varphi : X \rightarrow Y$ homeomorfismo, entonces,

- i.* el conjunto U en X es abierto si y solo si el conjunto $\varphi(U)$ es abierto en Y ;
- ii.* el conjunto B es cerrado en X si y solo si el conjunto $\varphi(B)$ es cerrado en Y ;
- iii.* el conjunto A es denso en X si y solo si el conjunto $\varphi(A)$ es denso en Y ;
- iv.* la sucesión x_1, x_2, x_3, \dots en X converge a x si y solo si la sucesión $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots$ converge a $\varphi(x)$ en Y .

Demostración. *i.* Como U es abierto en X y φ^{-1} continua, por la proposición 1.7, $(\varphi^{-1})^{-1}(U) = \varphi(U)$ es abierto. Ahora, si la imagen $\varphi(U)$ es abierto en Y y como φ es continua, entonces por la proposición 1.7, $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U$ es abierto.

ii. Análogo a (*i.*)

iii. Sea V abierto no vacío en Y . Como φ es continua, entonces por la proposición 1.7, $\varphi^{-1}(V)$ es abierto en X . Por hipótesis, A es denso en X , por tanto $\varphi^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. Aplicando φ , tenemos que $\varphi(\varphi^{-1}(V)) \cap \varphi(A) \neq \emptyset$, entonces, $V \cap \varphi(A) \neq \emptyset$. Por la proposición 1.4, parte iii, $\varphi(A)$ es denso en Y .

Ahora, sea U abierto no vacío en X . Por la parte *i.* de esta misma proposición, tenemos que $\varphi(U)$ es abierto en Y . Entonces $\varphi(U) \cap \varphi(A) \neq \emptyset$ porque $\varphi(A)$ es denso en Y . Aplicando φ^{-1} , tenemos que $\varphi^{-1}[\varphi(U) \cap \varphi(A)] = U \cap A \neq \emptyset$. Por la proposición 1.4, parte iii, A es denso en X .

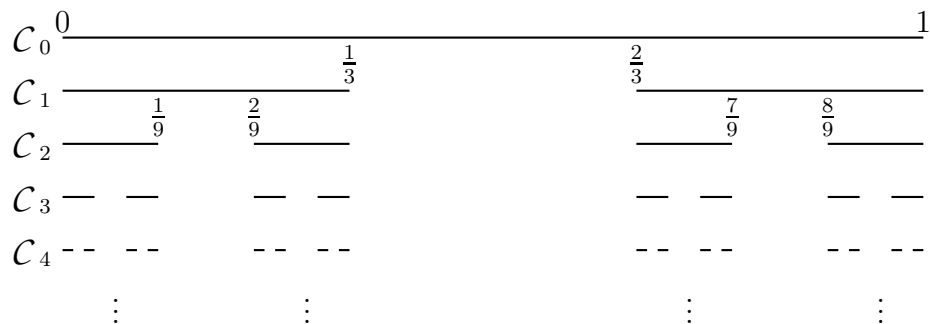
iv. Como φ es continua, por la proposición 1.7, parte *iv.*, podemos afirmar directamente que la sucesión $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots$ converge a $\varphi(x)$. En el otro sentido, sea x_1, x_2, x_3, \dots sucesión de puntos de X . Sabemos que la sucesión de imágenes $\varphi(x_i)$ converge a $\varphi(x^*)$, y como φ^{-1} es continua, entonces podemos decir que $\varphi^{-1}(\varphi(x_i)) = x_i$ converge a $\varphi^{-1}(\varphi(x^*)) = x^*$. □

1.2. Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor \mathcal{C} , como espacio métrico y topológico, tiene un papel central en las *dinámicas caóticas* de ciertos sistemas. Por tanto, es necesario recordar algunos aspectos importantes de este conjunto.

Iniciamos realizando el clásico proceso de construcción del conjunto de Cantor. En un primer paso, tomamos el intervalo $[0, 1]$, lo dividimos en tres partes iguales y removemos el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ - *el tercio medio del intervalo* $[0, 1]$ -, obteniendo dos intervalos cerrados $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$. En el siguiente paso, removemos los tercios medios de los intervalos cerrados anteriores, es decir, suprimimos los intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, obteniendo los intervalos cerrados $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $[\frac{8}{9}, 1]$.

Continuamos el mismo proceso, removiendo los tercios medios de todos los intervalos cerrados resultantes en el paso anterior. El conjunto de puntos que quedan después de repetir este proceso indefinidamente, es conocido como el *conjunto de Cantor*. El conjunto de Cantor usualmente se construye por medio de procesos iterativos. Ilustramos gráficamente el proceso.



Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$, $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $\mathcal{C}_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ y así sucesivamente. El conjunto de Cantor se define como:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathcal{C}_i$$

Al dotar de la métrica usual al conjunto de Cantor, como subespacio de (\mathbb{R}, d_u) , este conjunto se constituye en espacio métrico.

En [E] se realiza un estudio del conjunto de Cantor, donde se resaltan las características importantes de este conjunto, se describen las propiedades métricas y topológicas y se explica su relación con el espacio de los códigos. También, nos ilustra algunas aplicaciones en los fractales.

En [E] se demuestran algunos resultados interesantes, tales como que el conjunto de Cantor es un espacio métrico acotado, no numerable, de medida cero, cerrado y completo.

Podemos definir una topología para el espacio de Cantor proveniente de la métrica usual tal como se describió anteriormente en la proposición 1.6. La particularidad de Cantor como espacio topológico consiste en que es el único (salvo homeomorfismo) espacio métrico compacto, perfecto y totalmente desconexo, a la vez.

En [E] se estudia el espacio de los códigos con la misma rigurosidad que el conjunto de Cantor. Uno de los resultados importantes de este estudio, para interés nuestro, es que “el espacio de los códigos no es más sino otra versión del conjunto de Cantor”; es decir, el espacio de Cantor y el espacio de los códigos son homeomorfos. El espacio de los códigos es el que se utilizará en este trabajo para explicar la relación de Cantor con el *caos*.

1.3. Espacio de los códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$

Definición 1.8. Para $N \in \mathbb{N}$, sea $\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$, *el espacio de los códigos es el conjunto $\Sigma^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma\}$ formado por todas las sucesiones de \mathbb{N} en Σ .*

Cada código está formado por símbolos de Σ . $\Sigma^{\mathbb{N}}$ también es conocido como el conjunto de los símbolos o de las palabras semi-infinitas.

Un caso especial del espacio de los códigos es cuando tenemos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \equiv 2^{\mathbb{N}}$ donde los códigos son palabras de 0's y 1's. Un punto de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ es una palabra semi-infinita de la forma $x = 11000101\dots$, $x = 0000\dots$, $x = 010010001\dots$

Notación. Los códigos que tienen una cifra o un número finito de cifras que se repiten indefinidamente, podemos denotarlos y abreviar su expresión con una línea horizontal por encima de las cifras repetidas. Ejemplo: $111\dots \equiv \overline{1}$, $1010\dots \equiv \overline{10}$ y $101000\dots \equiv 101\overline{0}$.

Métrica en $\Sigma^{\mathbb{N}}$

En el conjunto de los códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$ se define la siguiente métrica,

$$d(x, y) = d(x_1x_2x_3 \dots, y_1y_2y_3 \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N + 1)^i}$$

En [E] se demuestra que efectivamente la función d cumple las condiciones de la definición de métrica 1.1. De modo que $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio métrico que llamaremos el *espacio de los códigos*. Como toda métrica induce una topología, en [E], también se demuestra que el espacio de los códigos posee las mismas propiedades topológicas que caracterizan el espacio de Cantor.

Al dotar a $\Sigma^{\mathbb{N}}$ de una métrica, podemos hablar de distancia entre códigos y podemos trabajar con conjuntos abiertos, sucesiones, funciones continuas, etc.

Capítulo 2

Dinámicas de una función

2.1. Sistemas dinámicos

En este capítulo se presenta un resumen de definiciones y conceptos básicos relacionados con los sistemas dinámicos discretos. La palabra *discreto* se utiliza para diferenciarlos de los sistemas dinámicos continuos, basados en ecuaciones diferenciales.

Definición 2.1. *Un sistema dinámico es una función $f : X \rightarrow X$ definida en un espacio métrico (X, d) , el cual denotamos por $\{X; f\}$. La **órbita** de un punto $x \in X$ es la sucesión de puntos del espacio que se obtienen iterando la función indefinidamente. Se denota por $O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots\}$, donde $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{n \text{ veces}}$.*

Las órbitas pueden presentar diversos comportamientos. Pueden ser órbitas divergentes, acotadas, no acotadas, convergentes a un punto del espacio o convergentes al infinito (si son funciones reales). Las dinámicas de una función se refieren al comportamiento de las órbitas de la función en el espacio. El interés del estudio de los sistemas dinámicos es explorar, analizar y comprender las dinámicas de la función en el espacio métrico.

Las siguientes definiciones facilitan el estudio de las dinámicas de una función.

Definición 2.2. *Sea $\{X; f\}$ sistema dinámico. Si $f(x) = x$ para $x \in X$, decimos que x es **punto fijo** de f , en este caso, la órbita $O_f(x) = \{x, x, \dots, x, \dots\}$. Un punto x es **punto eventualmente fijo** de f , si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N : f^{n+1}(x) = f^n(x)$.*

Definición 2.3. Sea $\{X; f\}$ un sistema dinámico.

- i. Un **punto periódico** de f es un punto $x \in X$ tal que $f^n(x) = x$, para algún $n \in \mathbb{N}$.
En tal caso n es llamado un periodo de x y el

$$\min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\},$$

se llama el **periodo principal** de x .

- ii. La órbita de un punto periódico de f es conocida como el **ciclo** de f . El periodo principal de un ciclo de f es el número de puntos distintos contenidos en el ciclo. Un periodo de un ciclo de f es el periodo de un punto en el ciclo.

- iii. Un punto x es un punto **eventualmente periódico** con periodo k , si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N: f^{n+k}(x) = f^n(x)$.

Definición 2.4. Sean $\{X; f\}$ sistema dinámico y x^* un punto fijo de f .

- i. El punto x^* es un punto fijo **atractor**, si existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall y \in B(x^*; \epsilon)$, se tiene que $O_f(y)$ converge a x^* .
- ii. El punto x^* es un punto fijo **repulsor**, si existe $\epsilon > 0$ y $C > 1$ tal que

$$d(f(x^*), f(y)) \geq Cd(x^*, y), \quad \forall y \in B(x^*; \epsilon).$$

2.2. Conjugación topológica

Cuando las dinámicas de una función son idénticas a las de otra función, decimos que están conjugadas topológicamente; formalmente:

Definición 2.5. Sean $\{X; f\}$, $\{Y; g\}$ sistemas dinámicos. Decimos que f y g están **conjugadas topológicamente**, si existe un homeomorfismo $\tau : X \rightarrow Y$ tal que $\tau \circ f = g \circ \tau$.
En este caso, τ es una conjugación topológica de f y g .

La conjugación topológica se puede ilustrar mediante un diagrama conmutativo como sigue:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Para afirmar que las dinámicas de dos sistemas dinámicos tienen el mismo comportamiento, se requiere que las funciones cumplan dos condiciones: primero, asegurarnos de que los espacios métricos sean homeomorfos; segundo, que satisfagan la siguiente igualdad $\tau \circ f = g \circ \tau$, que garantiza que las dinámicas de los dos sistemas sean idénticas.

Teorema 2.1. *Sea $\{X; f\}$ y $\{Y; g\}$ sistemas dinámicos y $\tau : X \rightarrow Y$ una conjugación topológica de f y g , entonces,*

- i. $\tau^{-1} : Y \rightarrow X$ también es una conjugación topológica de f y g .*
- ii. $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$ para todo número natural n*
- iii. p es un punto periódico de f si y solo si $\tau(p)$ es un punto periódico de g . Además, el periodo principal de p y $\tau(p)$ es el mismo.*

Demostración. Ver [H]. □

Si se tiene un sistema dinámico y se establece una conjugación topológica con otro sistema dinámico *caótico*, podemos afirmar que este sistema dinámico también es caótico. Veamos la definición formal de *caos*.

2.3. Caos

La definición de caos permite caracterizar el comportamiento caótico de las órbitas de un sistema dinámico. A continuación presentamos algunas proposiciones y comentarios de interés para nuestro estudio.

Definición 2.6. Un sistema dinámico $\{X; f\}$ es **sensible a condiciones iniciales**, si existe $\delta > 0$ (constante de sensibilidad) tal que para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $y \in X$ y existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $d(x, y) < \epsilon$ y $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

La sensibilidad a condiciones iniciales significa que si en el espacio se toma un punto cualquiera, entonces se puede encontrar otro punto tan cercano a él como se quiera, que al iterar la función simultáneamente en los dos puntos, en algún momento la distancia entre sus órbitas será mayor que una constante dada.

Definición 2.7. Un sistema dinámico $\{X; f\}$ es **topológicamente transitivo**, si dados dos conjuntos abiertos cualesquiera U y V en X tales que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, para cualesquiera dos conjuntos abiertos U y V en X , existe $z \in X$ tal que si $z \in U$ entonces $f^n(z) \in V$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

La definición de transitividad topológica significa que dados dos abiertos cualesquiera del espacio, existe una órbita que los “visita” a ambos. En términos de distancia tenemos:

Proposición 2.1. Un sistema dinámico $\{X; f\}$ es topológicamente transitivo, si y solo si para cualesquiera dos puntos x y y de X y para todo $\epsilon > 0$, existe $z \in X$ tal que $d(z, x) < \epsilon$ y $d(f^n(z), y) < \epsilon$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $\{X; f\}$ es topológicamente transitivo, tomemos $x, y \in X$, $\epsilon > 0$ y consideremos las bolas $B(x; \epsilon)$ y $B(y; \epsilon)$. Como $B(x; \epsilon)$, $B(y; \epsilon)$ son conjuntos abiertos (proposición 1.2), entonces existe $z \in X$ tal que $z \in B(x; \epsilon)$ y $f^n(z) \in B(y; \epsilon)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, $d(z, x) < \epsilon$ y $d(f^n(z), y) < \epsilon$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, sean U, V conjuntos abiertos en X . Por la proposición 1.1, para cada $x \in U$, $y \in V$, existe $\epsilon, \delta > 0$ tal que $B(x; \epsilon) \subset U$ y $B(y; \delta) \subset V$. Si tomamos $\gamma = \min\{\epsilon, \delta\}$, las bolas $B(x; \gamma) \subset U$ y $B(y; \gamma) \subset V$. Por hipótesis, tenemos que existe $z \in X$, tal que $d(z, x) < \gamma$ y $d(f^n(z), y) < \gamma$, para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, $z \in B(x; \gamma)$ y $f^n(z) \in B(y; \gamma)$, por tanto, existe $z \in X$ tal que $z \in U$ y $f^n(z) \in V$, para algún $n \in \mathbb{N}$. \square

Proposición 2.2. Sea $\{X; f\}$ un sistema dinámico, si existe una órbita $O_f(x)$ densa en X , entonces el sistema es topológicamente transitivo.

Demostración. Claramente, dados abiertos U, V cualesquiera en X , tenemos que U, V intersecan a $O_f(x)$ porque la órbita es densa en el espacio (proposición 1.4), luego existe una órbita que los “visita” a ambos. \square

La recíproca es cierta si X es compacto ([D]).

Existen diferentes formas de caracterizar el caos en sistemas dinámicos. En este trabajo utilizaremos la definición que se encuentra en [D].

Definición 2.8. *Un sistema dinámico $\{X; f\}$ se dice **caótico** si cumple:*

- i. El conjunto de los puntos periódicos es denso en X .*
- ii. $\{X; f\}$ es topológicamente transitivo.*
- iii. El sistema $\{X; f\}$ es sensible a condiciones iniciales.*

En [H] se hacen algunos comentarios acerca de esta definición. Los sistemas caóticos presentan una cierta regularidad y variedad en el espacio. La regularidad se evidencia en el hecho que podemos encontrar un punto periódico en cualquier bola, sin importar lo pequeña que sea. Además, pequeños cambios en la posición inicial, puede producir resultados muy diferentes en la iteraciones de la función. De otro lado, si escogemos un abierto cualquiera, podemos encontrar un punto en otro abierto cualquiera tal que la órbita de este punto terminará pasando por el primer abierto.

Teorema 2.2. *Sean $\{X; f\}$ sistema dinámico, X conjunto infinito y f función continua en X . Si el sistema es topológicamente transitivo y el conjunto de los puntos periódicos del sistema es denso en X , entonces $\{X; f\}$ es caótico.*

Demostración. Ver [A.M.M.]. \square

Recordemos que si dos sistemas están conjugadas topológicamente, entonces las dinámicas de éstas tienen el mismo comportamiento. De alguna manera quiere decir, por ejemplo, que los puntos periódicos en un espacio, presentarán un comportamiento similar en el espacio homeomorfo. Ahora, si uno de los sistemas es topológicamente transitivo podemos afirmar

que el espacio homeomorfo también lo es. Lo mismo ocurre con el carácter caótico de los sistemas dinámicos.

Teorema 2.3. *Sea $\{X; f\}$ y $\{Y; g\}$ sistemas dinámicos y $\varphi : X \rightarrow Y$ una conjugación topológica de f y g , entonces,*

- i. Los puntos periódicos de f son densos en X si y solo si los puntos periódicos de g son densos en Y .*
- ii. f es topológicamente transitiva en X si y solo si g lo es en Y .*
- iii. f es caótica en X si y solo si g es caótica en Y .*

Demostración. La prueba se hace en un solo sentido, porque el procedimiento en el otro sentido es análogo.

i. Sea V abierto no vacío en Y . Por la Proposición 1.7, tenemos que $\varphi^{-1}(V)$ es abierto en X porque φ es continua en X . Ahora, como $\varphi^{-1}(V)$ es abierto en X y los puntos periódicos de f son densos en X , entonces existe por lo menos un punto periódico p de f tal que $p \in \varphi^{-1}(V)$ (Proposición 1.4) y por el teorema 2.1, $\varphi(p)$ es periódico en Y y $\varphi(p) \in V$.

ii. Sean U, V abiertos en Y , por la proposición 1.7, tenemos que $\varphi^{-1}(U)$ y $\varphi^{-1}(V)$ son abiertos en X puesto que φ es continua en X . Como $\{X; f\}$ es topológicamente transitivo, por la definición 2.7, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n [\varphi^{-1}(U)] \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Nótese que los elementos que están en la intersección pertenecen a X y su imagen bajo φ pertenecerán a Y .

Por el teorema 2.1, φ^{-1} es una conjugación topológica y cumple que $f^n \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ g^n$. Reemplazándolo en la expresión anterior,

$$\varphi^{-1} \circ [g^n(U)] \cap \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset,$$

aplicando la función φ tenemos,

$$\varphi \circ \varphi^{-1} \circ [g^n(U)] \cap \varphi \circ \varphi^{-1}(V) \neq \emptyset,$$

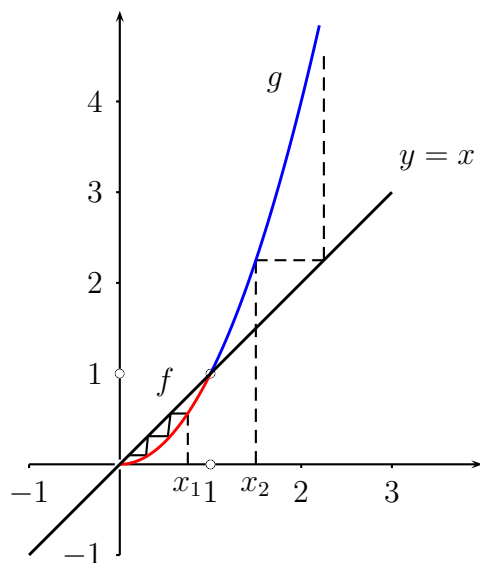
de donde obtenemos,

$$g^n(U) \cap (V) \neq \emptyset, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

iii. Si f y g son funciones continuas, entonces por el teorema 2.2 y por *ii.* y *iii.* de este teorema, la prueba es directa. En [R] podemos encontrar detalles para el caso más general, porque la sensibilidad a condiciones iniciales no se preserva siempre bajo conjugaciones topológicas. \square

Si los espacios de los sistemas $\{X; f\}$ y $\{Y; g\}$ son *compactos*, entonces la propiedad de ser sensibles a condiciones iniciales si se preserva bajo conjugaciones topológicas.

Ejemplo. Consideremos las funciones $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ definida por $f(x) = x^2$ y $g : (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ donde $g(x) = x^2$. Demostraremos que la función f no es sensible a condiciones iniciales y que la función g si lo es. La función $\tau(x) = \frac{1}{x}$ es una conjugación topológica entre f y g . Este ejemplo permite mostrar que la sensibilidad a condiciones iniciales no se preserva bajo conjugación topológica. En efecto, geoméricamente:



Primero, probaremos que la función g es sensible a condiciones iniciales. Vamos a requerir de las siguientes afirmaciones:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{2^n}{n} > 1.$
2. $\forall x, y \in (1, \infty) : x^m \cdot y^n > 1,$ para todo $n, m \in \mathbb{N}.$
3. $x^m - y^m = (x - y) \sum_{i=1}^m x^{m-i} \cdot y^{i-1}.$

Combinando las expresiones anteriores, obtenemos lo que nos interesa:

Para $m \in \mathbb{N}$, $|x^m - y^m| = |x - y| \left| \sum_{i=1}^m x^{m-i} \cdot y^{i-1} \right| > m|x - y|$ porque la suma tiene m términos, cada uno mayor que 1, por lo tanto,

$$|x^m - y^m| > m|x - y|, \forall m \in \mathbb{N} \text{ y } x, y \in (1, \infty).$$

4. La órbita $O_g(x) = \{x, g(x), g^2(x), \dots, g^n(x), \dots\} = \{x, x^2, x^4, \dots, x^{2^n}, \dots\} = \{x^{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, la cual es una sucesión divergente puesto que $x > 1$.

Para $\delta = 1$, sea $x \in (1, \infty)$ y $\epsilon > 0$, por la propiedad arquimediana, podemos encontrar un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Tomando $y = x + \frac{1}{k} \in (1, \infty)$, donde $d(x, y) = |x - y| = \frac{1}{k} < \epsilon$. Ahora, si consideramos la distancia,

$$d[g^k(x), g^k(y)] = |x^{2^k} - y^{2^k}| = |x - y| \left| \sum_{i=1}^{2^k} x^{2^k-i} \cdot y^{i-1} \right| > \frac{2^k}{k} > \delta.$$

Así, de acuerdo a la definición 2.6 concluimos que g es sensible a condiciones iniciales.

Probemos, ahora, que la función f no es sensible a condiciones iniciales, para lo cual consideraremos las siguientes desigualdades:

1. Si $\delta > 0$, tenemos que, $\forall \psi > 0 : \delta < \delta + \psi \Rightarrow \delta - \psi < \delta$.
2. Para todo $x \in (0, 1) : 0 < \dots < x^{2^n} < x^{2^{n-1}} < \dots < x^4 < x^2 < x < 1$. La órbita $O_f(x)$ tiende "rápidamente" hacia 0, aunque no puede converger porque 0 no pertenece al conjunto.
3. Como f es una función estrictamente creciente, tenemos que si $0 < a < b < \delta < 1$, entonces $0 < a^{2^n} < b^{2^n} < \delta^{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por definición 2.6, debemos mostrar que para todo $\delta > 0$, podemos encontrar $x \in (0, 1)$ y $\epsilon > 0$, tal que para todo $y \in (0, 1)$ con $d(x, y) < \epsilon$, se cumple $d[f^n(x), f^n(y)] \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, desde el primer momento de haber iterado la función f sobre x y y , la distancia deberá ser siempre menor que δ .

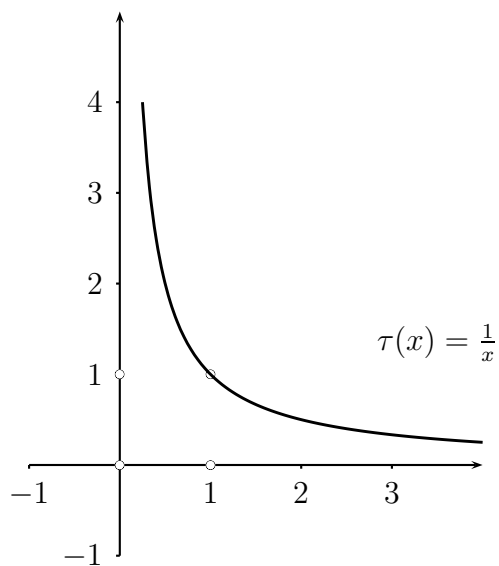
Consideramos $0 < \delta < 1$ ya que el espacio del sistema es $(0, 1)$. Sea δ , tomamos $x < \delta$ y $\epsilon = |x - \delta|$. Si $y \in (0, 1)$, tal que $d(x, y) < \epsilon$, podemos considerar dos casos: $0 < x < y < \delta$ o $0 < y < x < \delta$.

Utilizando las desigualdades anteriores, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 x < y < \delta &\Rightarrow x^{2^n} < y^{2^n} < \delta^{2^n}, \\
 &\Rightarrow x^{2^n} - x^{2^n} < y^{2^n} - x^{2^n} < \delta^{2^n} - x^{2^n}, \\
 &\Rightarrow 0 < y^{2^n} - x^{2^n} < \delta^{2^n} - x^{2^n} < \delta, \\
 &\Rightarrow 0 < y^{2^n} - x^{2^n} < \delta, \\
 &\Rightarrow |y^{2^n} - x^{2^n}| < \delta.
 \end{aligned}$$

De igual manera, para el caso $0 < y < x < \delta$ tenemos que $|x^{2^n} - y^{2^n}| < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, f no es sensible a condiciones iniciales.

Faltaría demostrar que τ es una conjugación topológica entre f y g . Claramente, se puede asegurar que $\tau(x) = \frac{1}{x}$ establece una correspondencia biunívoca entre $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ y sabemos que la función τ es continua en $(0, 1)$. También, tenemos que $\tau^{-1} = \tau$, por lo tanto, τ es un homeomorfismo entre $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.



Es claro que: $(\tau \circ f)(x) = \frac{1}{x^2} = (g \circ \tau)(x)$.

Capítulo 3

Dinámicas simbólicas

Recordemos que el espacio de los códigos (homeomorfo al conjunto de Cantor) es también conocido como el espacio de los símbolos. De ahí que se hable en los textos de *dinámicas simbólicas*. En esta parte trataremos de presentar una descripción lo más completa posible de aspectos centrales de las dinámicas simbólicas; entre esos, la relación directa de Cantor con el caos. Iniciamos recordando la definición del conjunto de los códigos y la métrica que lo acompaña.

Espacio de los códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$

El espacio de los códigos es la pareja de $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d)$; donde $\Sigma^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma\}$ con $\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, para algún $N \in \mathbb{N}$. Como $\Sigma^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas las sucesiones de símbolos de Σ , el conjunto de los códigos también se puede expresar como $\Sigma^{\mathbb{N}} = \{x_1x_2x_3\dots \mid x_i \in \Sigma, \forall i \in \mathbb{N}\}$. La métrica se define como $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}$ para $x = x_1x_2x_3\dots$, $y = y_1y_2y_3\dots$ códigos de $\Sigma^{\mathbb{N}}$. Diremos que dos códigos $x = x_1x_2\dots$ y $y = y_1y_2\dots$ son iguales, si $x_i = y_i, \forall i \in \mathbb{N}$.

En [E] se hace una descripción gráfica de las bolas en el espacio de los códigos y se presenta una proposición que permite caracterizar la distancia entre dos códigos “ceranos”. Se retoma este resultado porque es una proposición de gran utilidad para este trabajo.

Proposición 3.1. *x y y coinciden en sus primeros k -símbolos si y solo si $d(x, y) < \frac{1}{(N+1)^k}$, donde x, y son códigos de $\Sigma^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Suponemos que $x = x_1x_2x_3x_4 \dots x_k \dots$ y $y = y_1y_2y_3y_4 \dots y_k \dots$ son códigos que coinciden en sus primeras k -cifras, es decir, $x_i = y_i$, para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, entonces,

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{k+i} - y_{k+i}|}{(N+1)^{k+i}} \\
 &< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N}{(N+1)^{k+i}} \\
 &= \frac{N}{(N+1)^k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^i} \\
 &= \frac{N}{(N+1)^k} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} - 1 \right] \\
 &= \frac{1}{(N+1)^k},
 \end{aligned}$$

por tanto,

$$d(x, y) < \frac{1}{(N+1)^k}.$$

Recíprocamente, supongamos que $d(x, y) < \frac{1}{(N+1)^k}$, pero suponemos que x y y *no coinciden en sus primeras k -cifras*. Entonces debe existir un $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $x_l \neq y_l$. Sea $j = \min\{l \in \{1, 2, \dots, k\} \mid x_l \neq y_l\}$.

Como, $j \leq k$, entonces,

$$\frac{1}{(N+1)^k} \leq \frac{1}{(N+1)^j} \leq \frac{1}{(N+1)^{j-1}}, \quad \text{siendo } N \text{ un entero positivo.}$$

Según lo anterior, los códigos x y y coinciden hasta en la $j-1$ -cifra, pero *no coinciden en la j -ésima cifra*. Como $x_j \neq y_j$ por la definición de j , se tiene que $|x_i - y_i| \geq 1$, por tanto, $\frac{|x_j - y_j|}{(N+1)^j} \geq \frac{1}{(N+1)^j}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} \\
 &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} + \frac{|x_j - y_j|}{(N+1)^j} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{i+j} - y_{i+j}|}{(N+1)^{j+i}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{|x_j - y_j|}{(N+1)^j} \\
&\geq \frac{1}{(N+1)^j} \\
&\geq \frac{1}{(N+1)^k}.
\end{aligned}$$

Tenemos que,

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} = 0, \text{ puesto que } x_i = y_i \text{ para } i \in \{0, 1, \dots, j-1\},$$

y como

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_{i+j} - y_{i+j}|}{(N+1)^{j+i}} \geq 0.$$

Entonces, $d(x, y) \geq \frac{1}{(N+1)^k}$, cuando x y y no coinciden en las primeras k -cifras, lo cual es una contradicción. \square

3.1. La función *shift*

Definición 3.1. La función $\sigma : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$, a la que llamaremos función **shift**, se define como:

$$\sigma(x_1x_2x_3x_4 \dots) = x_2x_3x_4 \dots$$

La función shift le “corta” la primera cifra x_1 al código y corre las demás cifras un lugar a la izquierda (vista del lector). Al iterar k -veces la función shift lo que hacemos es “cortarle” las primeras k cifras al código x , quedando $\sigma^k(x) = x_{k+1}x_{k+2} \dots$

Proposición 3.2. La función *shift* es sobreyectiva, pero es no inyectiva.

Prueba. Sea $y = y_1y_2 \dots$ y consideramos un código $x = x_1y_1y_2 \dots$, tenemos que $\sigma(x) = y_1y_2 \dots = y$, donde $x_1 \in \Sigma$. La función σ es no inyectiva porque $\sigma(\bar{0}) = \sigma(\bar{10})$. \square

Proposición 3.3. La función σ es continua en $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $x = x_1x_2x_3x_4 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Por la propiedad arquimediana, para ese ϵ , podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon$. Al aplicarle la función *shift*, tenemos que $\sigma(x) = x_2x_3x_4 \dots x_kx_{k+1} \dots$

Por la proposición 3.1, los códigos que coinciden con $\sigma(x)$ en las primeras k -cifras, es decir de x_2 hasta x_{k+1} , estarán a una distancia menor de $\frac{1}{(N+1)^k}$.

Si tomamos $\delta = \frac{1}{(N+1)^{k+1}}$, los códigos que cumpla la condición $d(x, y) < \delta$ serán de la forma $y = x_1x_2x_3 \dots x_kx_{k+1}y_1y_2 \dots$, donde el código y coincide con x en las primeras $k+1$ cifras. Entonces,

$$\begin{aligned} d(\sigma(x), \sigma(y)) &= d(\sigma(x_1x_2x_3x_4 \dots x_kx_{k+1}x_{k+2} \dots), \sigma(x_1x_2x_3 \dots x_kx_{k+1}y_1y_2 \dots)) = \dots \\ &\dots = d(x_2x_3x_4 \dots x_kx_{k+1}x_{k+2} \dots, x_2x_3 \dots x_kx_{k+1}y_1y_2 \dots) < \frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, σ es continua en $\Sigma^{\mathbb{N}}$. □

Definición 3.2. Una **palabra finita** w es una sucesión finita de símbolos de Σ , es decir de la forma $w = w_1w_2 \dots w_n$, donde $w_i \in \Sigma, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Una palabra finita estrictamente no pertenece al espacio de los códigos.

Proposición 3.4. Los códigos de la forma $w\bar{0}$ son densos en $\Sigma^{\mathbb{N}}$. (Los códigos $w\bar{0}$ son códigos que inician con una palabra finita y “finalizan” con 0’s.)

Demostración. Sea $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $\epsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, podemos encontrar un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon$. El código $z = x_1x_2 \dots x_k000 \dots$ coincide con x en sus primeras k -cifras, siendo $w = x_1x_2 \dots x_k$ una palabra finita que finaliza en 0’s. Por la proposición 3.1, $d(z, x) < \frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon$. Por lo tanto, por la (proposición 1.4, los puntos de la forma $w\bar{0}$ son densos en $\Sigma^{\mathbb{N}}$. □

Nota. De la misma forma podemos demostrar que los códigos de la forma $w\bar{1}, w\bar{0}\bar{1}, w\bar{1}\bar{0}\bar{1}$ son densos en $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

3.2. Dinámicas en Σ^2

Las dinámicas simbólicas constituyen la forma común de nombrar las dinámicas de la función *shift* definida de manera natural para el espacio de los códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$. La pareja $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; \sigma\}$ es un sistema dinámico.

Aunque podemos continuar mencionando aspectos del espacio de los códigos para $\Sigma^{\mathbb{N}}$, nos interesa analizar el caso especial de Σ^2 , porque este espacio nos permite estudiar las relaciones de Cantor con otras funciones que presentan comportamiento caótico en sus dinámicas. Como mencionamos, los códigos de Σ^2 son palabras de 0's y 1's, por ejemplo, códigos como $000\dots 011001\dots 11010010\dots 10111\bar{0}$ o $\bar{1}10\bar{1}$.

Teniendo en cuenta la definición 1.8, la distancia entre dos códigos x y y que pertenecen a Σ^2 es $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{3^i}$. Si x y y coinciden en sus k -primeras cifras, entonces por la proposición 3.1, la distancia entre ellos será $d(x, y) < \frac{1}{3^k}$.

Las dinámicas de la función *shift* en Σ^2 pueden ser completamente comprendidas. Podemos identificar fácilmente los puntos fijos y los puntos eventualmente fijos. En efecto, los puntos fijos son los códigos $\bar{0}$ y $\bar{1}$ porque $\sigma(\bar{0}) = \bar{0}$ y $\sigma(\bar{1}) = \bar{1}$. Además, si $\sigma(x) = x$ entonces $x_2x_3x_4\dots = x_1x_2x_3\dots$ lo que implica que $x_1 = x_2 = x_3 = \dots$.

Los puntos eventualmente fijos son los códigos de la forma $w\bar{0}$ y $w\bar{1}$ que están formados por una palabra finita en la parte inicial.

Los puntos periódicos son fáciles de reconocer porque son sucesiones ciclicas de 0's y 1's. Los puntos periódicos son códigos de la forma $x = x_1x_2\dots x_kx_1x_2\dots x_k\dots = \overline{x_1x_2\dots x_k}$ tal que $\sigma^k(x) = x$ para $k \in \mathbb{N}$. Los puntos periódicos de periodo 1 son los mismos puntos fijos; los puntos periódicos de periodo 2 son fácilmente identificables porque corresponden a las parejas que se pueden formar con el 0 y el 1. Es decir, $\bar{01}$, $\bar{10}$, $\overline{00}$ y $\overline{11}$, aunque, $\overline{00} = \bar{0}$ y $\overline{11} = \bar{1}$. (Obsérvese que $\bar{0}$ y $\bar{1}$ son de periodo principal 1, pero los códigos que satisfacen $f^2(x) = x$ son exactamente $\bar{01}$, $\bar{10}$, $\overline{00}$ y $\overline{11}$), por lo tanto, el sistema $\{\Sigma^2; \sigma\}$ tiene 2 códigos periódicos de periodo 1, 4 códigos periódicos de periodo 2, y seguramente, 8 códigos periódicos de periodo 3. En efecto, los códigos periódicos de periodo 3 son: $\overline{000}$, $\overline{001}$, $\overline{010}$, $\overline{011}$, $\overline{100}$, $\overline{101}$, $\overline{110}$ y $\overline{111}$.

Los puntos eventualmente periódicos los podemos reconocer porque tienen una palabra finita en la parte inicial de los puntos periodicos, es decir, son de la forma $w\overline{x_1x_2\dots x_k}$. Por la proposición 3.4 podemos asegurar que los puntos eventualmente fijos y los puntos eventualmente periodicos son densos en $\{\Sigma^2; \sigma\}$.

Proposición 3.5. *La función shift tiene 2^n puntos periódicos de periodo n en Σ^2 .*

Demostración. La prueba se hace por inducción. La función shift tiene dos códigos periódicos de periodo 1, que son los puntos fijos antes señalados, luego, se cumple para $n = 1$. Suponemos que se cumple para $n = k$, es decir, que la función shift tiene 2^k puntos periódicos de periodo k . Faltaría demostrar que se cumple para $n = k + 1$. Vemos que cada uno de los 2^k códigos periódicos de periodo k consta de k cifras que se repiten indefinidamente, y como estamos trabajando sobre Σ^2 , con cada uno de estos códigos podemos construir solo dos nuevos códigos periódicos de periodo $k + 1$, agregándoles un 0 o un 1 en la parte inicial. Si realizamos el mismo procedimiento con cada uno de los 2^k códigos periódicos de periodo k , obtendremos el doble de los estos, es decir, $2(2^k) = 2^{k+1}$ códigos periódicos de periodo $k + 1$. \square

Proposición 3.6. *Los códigos de Σ^2 que no son periódicos ni eventualmente periódicos son densos en Σ^2 .*

Demostración. En esta prueba utilizamos el código *Morse* formado por bloques que 0's y 1's de la siguiente manera:

$$\underbrace{0\ 1}_{\text{bloques de 1}} \quad \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{bloques de 2}} \quad \underbrace{000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111}_{\text{bloques de 3}} \dots$$

Sea $x \in \Sigma^2$ y $\epsilon > 0$, por la propiedad arquimediana, podemos hallar un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon$.

$$\text{Haciendo } y = x_1 \dots x_k \underbrace{0\ 1}_{\text{de 1}} \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{\text{bloques de 2}} \underbrace{000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111}_{\text{bloques de 3}} \dots$$

Claramente, y es un código que no es periódico ni eventualmente periódico y además $d(x, y) < \frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon$. Por la proposición 1.4, los códigos que no son periódicos ni eventualmente periódicos son densos en Σ^2 . \square

Proposición 3.7. *El punto $\bar{1}$ es un punto fijo repulsor de $\{\Sigma^2; \sigma\}$.*

Demostración. Por la definición 2.4, tomamos un número positivo $\frac{1}{3^2} \leq \epsilon < \frac{1}{3}$, tal que para todo $y \in B(\bar{1}; \epsilon)$ y por la proposición 3.1, que y coincide con $\bar{1}$ en la primera cifra, pero no coinciden en la segunda cifra, es decir, $\frac{1}{3^2} \leq d(\bar{1}, y) < \frac{1}{3}$.

Aplicando la función *shift*, tenemos que $\sigma(y)$ y $\sigma(\bar{1}) = \bar{1}$ no coincidirán en la primera cifra, por la proposición 3.1,

$$d(\sigma(\bar{1}), \sigma(y)) \geq \frac{1}{3} > d(\bar{1}, y) \geq \frac{1}{9},$$

Como $0 < \frac{1}{9} \leq d(\bar{1}, y) < \frac{1}{3}$ entonces $3 < \frac{1}{d(\bar{1}, y)} \leq 9$, así $1 < \frac{1}{3d(\bar{1}, y)} \leq 3$ (Propiedades de desigualdades). Haciendo $C = \frac{1}{3d(\bar{1}, y)} > 1$, comprobamos que $Cd(\bar{1}, y) = \frac{1}{3}$. Sustituyendo esta igualdad en la expresión anterior, concluimos que,

$$d(\sigma(\bar{1}), \sigma(y)) \geq Cd(\bar{1}, y)$$

□

Nota. De igual forma podemos demostrar que el punto $\bar{0}$ es un punto fijo repulsor.

3.3. Caos en las dinámicas simbólicas

Demostraremos el comportamiento caótico de las dinámicas simbólicas. Probaremos que el sistema $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; \sigma\}$ cumple las tres condiciones que definen el caos en sistemas dinámicos de la definición 2.8, densidad de los puntos periódicos en el espacio, la transitividad topológica y la sensibilidad a condiciones iniciales.

Proposición 3.8. *Los puntos periódicos son densos en $\Sigma^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $\epsilon > 0$, por la propiedad arquimediana, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon$. Tomamos el código $y = \overline{x_1 x_2 \dots x_k} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ un punto periódico de $\Sigma^{\mathbb{N}}$; por la proposición 3.1, $d(x, y) < \frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon$, por lo tanto, por la proposición 1.4 el conjunto de los puntos periódicos es denso en $\Sigma^{\mathbb{N}}$. □

Proposición 3.9. *$\{\Sigma^{\mathbb{N}}; \sigma\}$ es sensible a condiciones iniciales.*

Demostración. Consideremos $\delta = \frac{1}{N+2}$, $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $\epsilon > 0$, entonces por la propiedad arquimediana $\frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

Podemos encontrar un código $y \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ que coinciden con x en las k -primeras cifras, pero no coincide en la $k+1$ -cifra, es decir $y_i = x_i$, para $i \in \{1, \dots, k\}$ y $y_{k+1} \neq x_{k+1}$, entonces, por la proposición 3.1,

$$d(x, y) < \frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon.$$

Si iteramos k -veces simultáneamente la función σ en los códigos x y y , tendremos que $\sigma^k(x)$ y $\sigma^k(y)$ no coincidirán en la primera cifra, entonces usando nuevamente la proposición 3.1, tenemos que:

$$d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) \geq \frac{1}{N+1} > \frac{1}{N+2} = \delta.$$

□

Proposición 3.10. $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; \sigma\}$ es topológicamente transitivo.

Demostración. Sea $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon$.

Podemos encontrar un código $z = x_1x_2 \dots x_k y_1 y_2 \dots y_k z_1 z_2 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que

$$d(z, x) < \frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon \quad \text{y} \quad d(\sigma^k(z), y) < \frac{1}{(N+1)^k} < \epsilon, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{N}.$$

En las desigualdades se utiliza la proposición 3.1 y nótese que $\sigma^k(z) = y_1 y_2 \dots y_k z_1 z_2 \dots$. Por la proposición 2.1, el sistema $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; \sigma\}$ es topológicamente transitivo. □

En resumen hemos demostrado que:

Corolario. El sistema $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; \sigma\}$ es un sistema dinámico caótico.

Cabe anotar aquí, que la prueba de las proposiciones 3.8, 3.9 y 3.10 proporcionan una demostración de que el sistema $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; \sigma\}$ es caótico, diferente a la demostración que aparece en [H], lo que constituye un sencillo aporte original del presente trabajo.

Capítulo 4

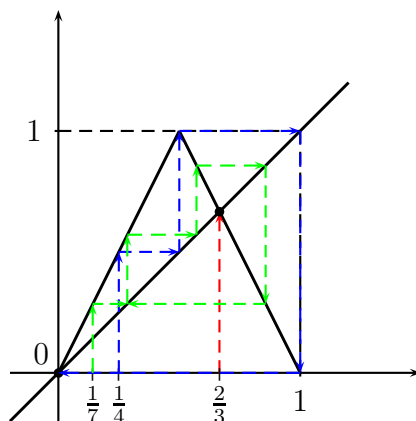
Otras funciones caóticas

4.1. Función tienda

En [G], se estudian las dinámicas de la función tienda definida en el intervalo $[0, 1]$. Se demuestra que el sistema dinámico $\{[0, 1]; T\}$ es un sistema caótico. Recordemos que la función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ se define de la siguiente manera:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1-x), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Observando la gráfica de la función, hacemos una breve descripción del comportamiento de las órbitas de algunos puntos de $[0, 1]$ bajo la función tienda.



Observamos que los puntos 0 y $\frac{2}{3}$ son los puntos fijos porque son los únicos que satisfacen $T(x) = x$. Los puntos $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ son puntos eventualmente fijos. Los puntos $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$ son

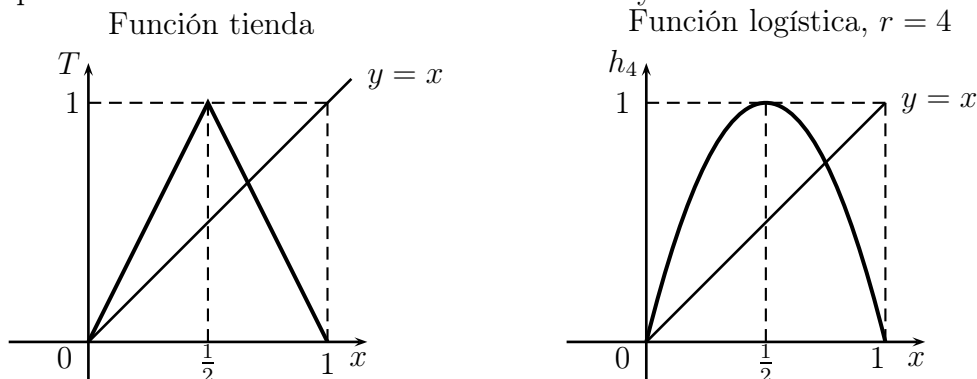
puntos periódicos aunque todos estén en la órbita de cualquiera de ellos. Y el punto $\frac{1}{7}$ es un punto eventualmente periódico. Sin embargo, en [G] se puede encontrar un análisis muy completo de las dinámicas de la función tienda.

En el capítulo 3 demostramos que el sistema $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; \sigma\}$ es caótico. A pesar de que estos dos sistemas comparten la cualidad de ser caóticos, sus dinámicas son *distintas* porque los espacios métricos de los sistemas no son homeomorfos, es decir, no tienen las mismas propiedades topológicas; por ejemplo, el espacio de Cantor es *totalmente desconexo* y el intervalo $[0, 1]$ es *conexo*. Por lo tanto, no es posible encontrar una conjugación topológica entre la función tienda y la función shift.

4.2. Familia logística

La función logística, $h_r(x) = rx(1 - x)$, $r \in \mathbb{R}^+$ es un modelo que describe con mejor exactitud el crecimiento poblacional de especies biológicas que otros modelos matemáticos. Si tenemos una población inicial de x individuos, al cabo de un año, la población será de $h_r(x)$ individuos. Entonces, al cabo de n años, vamos a tener una población de $h_r^n(x)$ individuos. La gráfica de $h_r(x)$ es una parábola que se abre hacia abajo e interseca el eje x en los puntos 0 y 1 y tiene el vértice en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{r}{4})$. En [H] podemos encontrar un estudio y una descripción muy completa de los diferentes aspectos de la función logística h_r .

Antes de proseguir, primero, queremos establecer la relación entre la función Logística (cuando $r = 4$) y la función tienda. Si comparamos la gráfica de las funciones podemos intuir que las dinámicas de las dos funciones son muy similares en el intervalo $[0, 1]$.



Para comprobar que efectivamente las dinámicas de las dos funciones son idénticas en el intervalo $[0, 1]$, recurrimos al concepto de conjugación topológica.

Proposición 4.1. *La función $\tau(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2}x)$ es una conjugación topológica entre la función tienda y h_4 en el intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. Debemos, primero, mostrar que la función $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo, es decir que τ es biyectiva y bicontinua.

τ es diferenciable en $[0, 1]$ y $\tau'(x) = \pi \sin(\frac{\pi}{2}x) \cos(\frac{\pi}{2}x)$, luego τ' existe en todo el intervalo $(0, 1)$ y por tanto, τ es continua en $[0, 1]$. Además, τ' es estrictamente positiva, por tanto, τ es inyectiva y como $\tau([0, 1]) = [0, 1]$ entonces es sobreyectiva. De manera análoga, podemos mostrar que $\tau^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(\sqrt{x})$ es continua en $[0, 1]$.

Nos queda por mostrar la condición $\tau \circ T = h_4 \circ \tau$ que nos asegura que las dinámicas de los dos sistemas son idénticas. Primero, consideramos la parte $\tau \circ T$ para los dos casos de la función tienda utilizando identidades trigonométricas elementales:

$$\tau \circ T(x) = \tau [T(x)] = \begin{cases} \sin^2(\frac{\pi}{2}(2x)) = \sin^2(\pi x), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \sin^2[\frac{\pi}{2}(2(1-x))] = \sin^2(\pi - \pi x) = \sin^2(\pi x), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$\tau \circ T(x) = \sin^2(\pi x)$, para cada $x \in [0, 1]$. Del otro lado,

$$\begin{aligned} h_4 \circ \tau(x) &= h_4 [\tau(x)] \\ &= 4 \sin^2(\frac{\pi}{2}x) \left[1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}x) \right] \\ &= 4 \sin^2(\frac{\pi}{2}x) \cos^2(\frac{\pi}{2}x) \\ &= \left[2 \sin(\frac{\pi}{2}x) \cos(\frac{\pi}{2}x) \right]^2 \\ &= \left[\sin(2(\frac{\pi}{2}x)) \right]^2 \\ &= \sin^2(\pi x). \end{aligned}$$

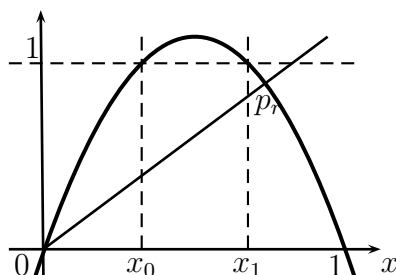
Por lo tanto, $\tau \circ T = h_4 \circ \tau$. □

Teorema 4.1. *La función $h(x) = 4x(1-x)$ es caótica en $[0, 1]$.*

Demostración. Como el sistema $\{[0, 1]; T\}$ es caótico ([G]) y la función τ es una conjugación topológica entre T y h_4 , por el teorema 2.3 podemos concluir que h_4 es caótica. □

Familia logística $h_r(x) = rx(1 - x)$ cuando $r > 4$

Los puntos fijos de h_r son: 0 y $p_r = \frac{r-1}{r}$. 1 y $\frac{1}{r}$ son puntos eventualmente fijos porque $h_r(1) = 0$ y $h_r(\frac{1}{r}) = p_r$, como $r > 4$, tenemos que $h(\frac{1}{2}) > 1$, $h_r(0) = 0$ y $h_r(1) = 0$. Por el teorema del valor intermedio, podemos asegurar que existe $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ y $x_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ tal que $h_r(x_0) = h_r(x_1) = 1$, entonces, $h_r^2(x_0) = h_r^2(x_1) = 0$. Por lo tanto, x_0 y x_1 son puntos eventualmente fijos. La gráfica nos permite visualizar los datos anteriores.



La gráfica de la función logística nos muestra que el conjunto de puntos en $[0, 1]$ para los cuales $h(x)$ no está en $[0, 1]$ son los puntos que cumplen la desigualdad $h(x) > 1$, es decir, los puntos que están en el intervalo (x_0, x_1) . Si resolvemos la ecuación $h_r(x) = rx(1 - x) = 1$, obtenemos los valores de x_0 y x_1 , la solución de la ecuación cuadrática es $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}$.

Para cada número natural n , definimos:

$$\Lambda_n = \{x \mid h_r^n(x) \in [0, 1]\},$$

$$\Lambda_1 = \{x \mid h_r(x) \in [0, 1]\} = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, 1\right].$$

Λ_1 es el conjunto de los puntos que quedan en el intervalo $[0, 1]$ después de iterar una vez la función logística, por lo tanto, podemos generalizar diciendo que Λ_n son los puntos de $[0, 1]$ que permanecen en el intervalo después de iterar n veces la función. Intuimos que el conjunto Λ_{k+1} se forma removiendo los intervalos abiertos de Λ_k cuyos puntos escapan del intervalo $[0, 1]$. El procedimiento anterior es muy familiar al empleado para construir el conjunto de Cantor \mathcal{C} . En efecto, el conjunto $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ es homeomorfo al conjunto de Cantor (Ver [H]). Es decir, \mathcal{C} y Λ tienen las mismas propiedades topológicas.

Nota. En este momento es pertinente recordar que el conjunto lleno de Julia de un sistema dinámico cualquiera se define como el conjunto de puntos cuyas órbitas están acotadas. Como vimos, las órbitas de los puntos de Λ permanecen en el intervalo $[0, 1]$ bajo la función logística. El conjunto Λ son los puntos que permanecerán en el intervalo $[0, 1]$ bajo cualquier número de iteraciones de la función h_r . Por lo tanto, Λ es el conjunto de Julia del sistema $\{[0, 1]; h_r\}$. De igual forma, el conjunto lleno de Julia del sistema $\{[0, 1]; T\}$ es el mismo intervalo $[0, 1]$, es decir, las órbitas nunca escapan del espacio.

Teorema 4.2. Para $r > 4$, sea $h_r(x) = rx(1-x) = 1$ y $\Lambda = \{x \mid h_r^n(x) \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}\}$, entonces, el sistema $\{\Lambda; h_r\}$ es caótico.

Demostración. Ver [H]. □

La demostración se encuentra suficientemente explicada en [H]. El autor advierte que la demostración para $4 < r < 2 + \sqrt{5}$ es muy difícil y no la realiza. Expone la demostración para el caso $r > 2 + \sqrt{5}$. Sin embargo, el procedimiento que utiliza para demostrar que el sistema $\{\Lambda; h_r\}$ es caótico no es directo, es decir, no emplea de primera mano la definición 2.8 de caos, lo que hace es establecer una conjugación topológica entre las dinámicas de la función logística y las dinámicas simbólicas, las cuales hemos demostrado que son caóticas, y por el teorema 2.3, se afirma que el sistema $\{\Lambda; h_r\}$ es caótico.

La conjugación topológica es una función $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma^2$ conocida como *función itinerante*. En [H] se demuestra que ψ es una función biyectiva y bicontinua y cumple la condición de $\psi \circ h = \sigma \circ \psi$, donde ψ se define como:

$$\psi(x) = s_1 s_2 s_3 \dots \in \Sigma^2, \text{ con } s_i = \begin{cases} 0, & \text{si } h^{i-1}(x) \in I_0 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}\right], \\ 1, & \text{si } h^{i-1}(x) \in I_1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, 1\right]. \end{cases}$$

Ejemplo. Si $r = 5$ y $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Entonces, $h^0(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \in I_0$, $h^1(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \in I_1$, $h^2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 0 \in I_0$ (punto fijo), y por tanto, $\psi(x) = 01\bar{0}$.

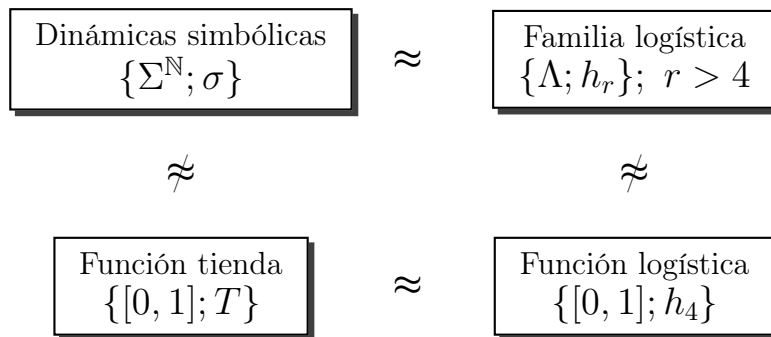
Al establecer la conjugación topológica entre $\{\Lambda; h_r\}$ y $\{\Sigma^2; \sigma\}$ estamos afirmando que las dinámicas de los dos sistemas son idénticas, es decir, las dinámicas de las funciones h_r y σ presentan el *mismo comportamiento* en el conjunto de Cantor a pesar de que las funciones

son muy distintas. Como vimos en el capítulo anterior, las dinámicas simbólicas son muy fáciles de entender y estudiar pues se trata de códigos formados por símbolos de 0's y 1's. Pero, aún así, las dinámicas de la función logística que describen el crecimiento de una población de una manera complicada son esencialmente iguales a las sencillas dinámicas simbólicas.

4.3. Conclusión

El conjunto de Cantor representa una gran veta de oro para las matemáticas. Es un conjunto que podemos explotar indiscriminadamente sin riesgo de que logremos estudiarlo completamente, pues puede seguir ofreciéndonos sorpresas y datos interesantes. El estudio realizado en esta monografía es un primer ejercicio de acercarnos a dimensionar el papel importante que tiene el conjunto de Cantor en el mundo de los sistemas dinámicos caóticos. El concepto de caos es un tema interesante por explorar y estudiar, no sólo en los sistemas dinámicos sino en los fractales.

Cantor junto con la función shift constituye un sistema dinámico caótico y por otra parte Cantor es el conjunto lleno de Julia del sistema dinámico $\{[0, 1]; h_r\}$, además $\{\Lambda; h_r\}$ es caótico para $r > 4$. Queda pendiente mirar qué participación tiene el conjunto de Cantor en la función tienda, si es que existe relación alguna. Ilustramos la relación entre los sistemas dinámicos estudiados en este trabajo en el siguiente diagrama; todos corresponden a sistemas dinámicos caóticos.



Bibliografía

- [B] Barnsley, Michael. *Fractals Everywhere*, Georgia Institute of Technology and Iterated Systems, INC., Academic press, INC., (1988), 6–146.
- [D] Devaney, Robert. *An Introduction Chaotic Dynamical Systems*, 2da. edición, Addison-Wesley, (1989).
- [E] Estévez, Edgar. *El Espacio de los Códigos*, monografía, Universidad Industrial de Santander, (1994), 5–35.
- [G] Gómez, Nayibe. *Introducción al Caos a partir de los sistemas dinámicos discretos*, monografía, Universidad Industrial de Santander, (2006), 34–59.
- [H] Holmgren, Richard. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer, 2da. edición, (1996), 1–122.
- [A.M.M.] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G. y Stacey P. *On Devaney's definitions of chaos*, American mathematical monthly, (1992), 332-334.
- [M] Maldonado, Carlos. *Visiones sobre la complejidad*, No 1, Universidad El Bosque, 2da. edición, Kimpres Ltda, (2001), 1–42.
- [Mo] Morin, Edgar. *Educación en la era planetaria*, Gedisa, 1era. Edición, (2003), 49–64.
- [R] Robinson, C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, (1995)