

Impacto del efecto Hall y la difusión ambipolar en la tasa de reconexión magnética
y la distribución de energía en la magnetocola terrestre

Gabriela Landinez Rangel

Trabajo de Investigación para optar al título de Físico

Director

Fabio Duvan Lora Clavijo

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

Tabla de Contenido

Introducción	13
1. Procesos magnetohidrodinámicos no ideales	21
1.1. Ley de Ohm generalizada	22
1.2. Efecto Hall	23
1.3. Difusión ambipolar	25
2. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica	27
2.1. Ecuación general de transporte	27
2.2. Ecuaciones de transporte para un fluido conductor	29
2.3. Ecuaciones para los campos electromagnéticos	30
2.4. Formulación conservativa	30
3. Código MAGNUS	33
3.1. Descripción general del código	33
3.1.1. Método de volúmenes finitos	34
3.1.2. Métodos de alta resolución para la captura de choques	35
3.1.3. Condición de Courant-Friedrichs-Levy	35
3.1.4. Normalización de las ecuaciones	36

Efecto Hall y difusión ambipolar en la tasa de reconexión magnética	3
3.2. Inclusión del efecto Hall y la difusión ambipolar	37
3.3. Modificación del paso de tiempo	43
4. Resultados	47
4.1. Efecto Hall en el GEM	47
4.2. Difusión ambipolar en el GEM	51
4.3. Reconexión en la magnetocola terrestre	57
4.3.1. Dato inicial	60
4.3.2. Morfología de la hoja de corriente	62
4.3.3. Tasa de reconexión	69
4.3.4. Distribución de energía	71
5. Conclusiones	75
Referencias bibliográficas	79
Apéndices	91

Lista de Figuras

- Figura 1. Transformador de la planta nuclear de Salem, EE.UU. dañado por sobrecalentamiento durante la tormenta solar de 1989 (*Imagen superior*). Transformadores de las centrales eléctricas de Lethabo y Matimba en África del sur durante la tormenta solar de 2003 (*Imagen inferior*). Imágenes tomadas y adaptadas de Vijapurapu (2013). 16
- Figura 2. Esquema simple de una hoja de corriente entre líneas de campo con sentido opuesto. De acuerdo con el sistema de coordenadas, el campo magnético se sitúa en el plano xy y la hoja de corriente en el plano xz . 23
- Figura 3. Esquema de la estructura multiescala de la región de difusión. En gris se representa la región de difusión de los iones, donde estos se desacoplan del campo magnético y se desvían produciendo un flujo de iones (flecha con líneas discontinuas cortas). Al interior de esta región, en blanco, se encuentra la región de difusión de los electrones. Allí, los electrones también se desacoplan del campo magnético y hay un flujo de electrones hacia afuera de la región (flecha con líneas discontinuas largas). Imagen tomada y adaptada de Birn and Priest (2007). 25
- Figura 4. Representación gráfica del algoritmo que sigue MAGNUS. 46

- Figura 5. Flujo reconectado en función del tiempo para el dato inicial del GEM *reconnection challenge*. El flujo no empieza en cero debido a la perturbación que se aplica al campo magnético a tiempo inicial. 50
- Figura 6. Comparación del flujo reconectado entre las simulaciones MHD resistiva y MHD resistiva+ambipolar con diferentes valores del parámetro K_A . 52
- Figura 7. Comparación del flujo reconectado entre las simulaciones MHD resistiva+Hall y MHD resistiva+Hall+ambipolar con diferentes valores del parámetro K_A . 53
- Figura 8. Hoja de corriente para la simulación MHD resistiva+Hall+ambipolar con $K_A = 0.005$. La secuencia de imágenes muestra tres tiempos diferentes a partir del momento en el que el flujo reconectado empieza a presentar un crecimiento anómalo. 54
- Figura 9. Hoja de corriente para la simulación MHD resistiva+Hall+ambipolar con $K_A = 0.01$. En la secuencia de imágenes se observa la aparición del plasmoide en el centro del dominio. 54
- Figura 10. Densidad de corriente en un tiempo computacional $t = 20.5$ para las simulaciones MHD resistiva, MHD resistiva+Hall, MHD resistiva+ambipolar y MHD resistiva+Hall+ambipolar (con $K_H = 1.0$ y $K_A = 0.01$). 55
- Figura 11. Ilustración de una sección de la magnetosfera terrestre. Imagen tomada y adaptada de Moldwin (2008). 57

Figura 12. Esquema del proceso de reconexión magnética durante el ciclo de Dungey.

La reconexión magnética ocurre inicialmente entre la línea 1 del IMF y la línea 9 del campo magnético terrestre. Como resultado, se obtienen dos líneas de campo abiertas, $2'$ y 2^* . El flujo del viento solar implica que lo mismo sucede con las líneas $3'$, 3^* , $4'$, 4^* , $5'$, 5^* , $6'$ y 6^* . Durante el proceso de reconexión las líneas abiertas $6'$ y 6^* , que son casi antiparalelas, se reconectan para formar una línea de campo geomagnético cerrada y una línea de campo interplanetaria, las líneas 7 y 8 respectivamente. Cuando ocurre la reconexión, el plasma es expulsado de la hoja de corriente hacia las regiones donde están las líneas 7 y 8, fuera de la región delimitada por el cuadro azul. Imagen tomada y adaptada de Moldwin (2008).

59

Figura 13. Formación de un plasmóide tras la reconexión de líneas de campo en la magnetocola terrestre. Imagen tomada y adaptada de Birn and Priest (2007).

60

Figura 14. Comparación de los mapas de temperatura en $t = 8t_a$ (panel izquierdo) y $t = 12t_a$ (panel derecho).

65

Figura 15. Comparación de los mapas de densidad de corriente j_z en $t = 8t_a$ (panel izquierdo) y $t = 12t_a$ (panel derecho).

66

Figura 16. Comparación de los mapas de velocidad u_x en $t = 8t_a$ (panel izquierdo) y $t = 12t_a$ (panel derecho).

67

Figura 17. Comparación de los mapas de velocidad u_y en $t = 8t_a$ (panel izquierdo) y $t = 12t_a$ (panel derecho).

68

Figura 18. Tasas de reconexión adimensionales para los cuatro tipos de simulaciones:

MHD resistiva, MHD resistiva+ambipolar, MHD resistiva+Hall y MHD resistiva+Hall+ambipolar

(con $K_H = 0.2$ y $K_A = 0.01$).

71

Figura 19. Evolución de la energía magnética medida en el punto del dominio ubicado en

la intersección de las líneas $y = 0$ y $x = 10l_a$.

72

Figura 20. Evolución de la energía cinética medida en el punto del dominio ubicado en la

intersección de las líneas $y = 0$ y $x = 10l_a$.

73

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Ecuaciones macroscópicas de transporte	91
Apéndice B. Formulación conservativa	104
Apéndice C. Análisis dimensional de los coeficientes η_H y η_A	113

Resumen

Título: Impacto del efecto Hall y la difusión ambipolar en la tasa de reconexión magnética y la distribución de energía en la magnetocola terrestre *

Autor: Gabriela Landinez Rangel **

Palabras Clave: Clima espacial, Magnetohidrodinámica, Reconexión magnética, Efecto Hall, Difusión ambipolar.

Descripción: Los procesos físicos que ocurren en la magnetosfera terrestre determinan cómo la masa y la energía del Sol afectan la Tierra, por lo que el estudio de la magnetosfera y su interacción con el viento solar es fundamental para comprender y predecir el clima espacial. Parte de esta interacción ocurre a través del proceso de reconexión magnética que se da en la magnetocola terrestre, donde el valor de la tasa de reconexión es una cantidad de interés debido a su relación con las perturbaciones geomagnéticas. Sin embargo, existe un problema abierto en torno al tema, pues se desconoce el fenómeno responsable de que la tasa tenga un valor del orden de 0.1. En el presente trabajo se realiza una comparación sistemática de simulaciones con efecto Hall y difusión ambipolar, con el fin de determinar su impacto en el valor de la tasa de reconexión. Las simulaciones numéricas son obtenidas a partir de la inclusión y modificación de subrutinas en MAGNUS, un código magnetohidrodinámico con el cual se estudian cuatro casos: resistivo, resistivo+Hall, resistivo+ambipolar, resistivo+Hall+ambipolar. Los resultados de esta tesis muestran que, para el modelo propuesto en el *Geospace Environmental Modeling reconnection challenge*, la presencia del efecto Hall produce un aumento significativo del flujo reconectado. La difusión ambipolar produce aumentos en el flujo respecto al caso únicamente resistivo, pero no tan grandes como los obtenidos con el efecto Hall. Finalmente, los cuatro casos de simulación se estudian usando otro

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Doctorado en Física.

modelo con magnitudes físicas características de la magnetocola terrestre. Allí las tasas de reconexión alcanzan valores cercanos a 0.1 para el caso resistivo+Hall+ambipolar seguido del resistivo+Hall, indicando que el efecto Hall es fundamental para obtener tasas con este valor, pero que también la difusión ambipolar juega un papel relevante.

Abstract

Title: Impact of Hall effect and ambipolar diffusion on the magnetic reconnection rate and energy distribution in the Earth's magnetotail *

Author: Gabriela Landinez Rangel **

Keywords: Space weather, Magnetohydrodynamics, Magnetic reconnection, Hall effect, Ambipolar diffusion.

Description: Physical processes that occur in the Earth's magnetosphere determine how the mass and energy of the Sun affect the Earth, therefore, the study of the magnetosphere and its coupling with the solar wind is crucial to understand and predict space weather. Part of this interaction occurs through the magnetic reconnection process that takes place in the Earth's magnetotail, where the value of the reconnection rate is a quantity of interest due to its relationship with geomagnetic disturbances. However, there is an open problem regarding this topic, as the phenomenon responsible for the reconnection rate having a value of the order of 0.1 is still unknown. In this study, a systematic comparison of simulations with the Hall effect and ambipolar diffusion is performed to determine their impact on the reconnection rate value. The numerical simulations are obtained by implementing and modifying subroutines in MAGNUS, a magnetohydrodynamic code in which four cases are studied: resistive, resistive+Hall, resistive+ambipolar, resistive+Hall+ambipolar. The results of this thesis show that, for the model proposed in the Geospace Environmental Modeling reconnection challenge, the presence of the Hall effect produces a significant increase in the reconnected flow. Ambipolar diffusion produces an increase in flux with respect to the solely resistive case, but they are not as large as those obtained with the Hall effect. Finally, the four simulation cases are studied using another model with characteristic physical magnitudes of the mag-

* Bachelor thesis.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Ph.D.

netotal. The reconnection rates reach values close to 0.1 for the resistive+Hall+ambipolar case followed by the resistive+Hall case, indicating that the Hall effect is essential to obtain rates of 0.1, but that ambipolar diffusion also plays a relevant role.

Introducción

Los primeros intentos científicos por explicar fenómenos meteorológicos se deben a Aristóteles, quien en su obra recopiló información acerca de procesos atmosféricos a los que atribuyó como principal responsable al Sol. Hoy en día es bien sabido que así como el Sol afecta el clima en la Tierra, también es responsable del clima espacial que afecta los campos magnéticos planetarios, pero también los sistemas espaciales¹ y, en general, cualquier tipo de red eléctrica que opere en el espacio o la Tierra. El término *clima espacial* se refiere al conjunto de condiciones y fenómenos que, en su mayoría originados por la actividad solar, afectan los sistemas espaciales y terrestres, tanto tecnológicos como biológicos (Moldwin, 2008). Por *clima espacial* también se entiende a la disciplina que a través de la observación, el análisis, el modelado y la simulación, busca comprender y predecir los fenómenos del Sol y el medio interplanetario, así como su impacto en otros sistemas (Lilensten and Belehaki, 2009).

Los fenómenos que se originan en el Sol y dan lugar al clima espacial se propagan por el espacio a través de un plasma al que Eugene Parker denominó viento solar (Parker, 1959). Su propagación causa que el medio interplanetario se llene de un plasma turbulento en el que parámetros como la densidad, la velocidad, la temperatura y la intensidad del campo magnético

¹ Un sistema espacial es un conjunto de elementos situados en el espacio y en la Tierra que interactúan entre sí con el objetivo de proporcionar servicios como entretenimiento, navegación, observación y meteorología (Rodríguez, 2014).

umentan abruptamente causando tormentas geomagnéticas² (Moldwin, 2008; Khazanov, 2016), durante las cuales el campo geomagnético es perturbado y se presenta un proceso conocido como reconexión magnética.

La *reconexión magnética* es una reordenación topológica del campo magnético que convierte la energía magnética en energía del plasma (Zweibel and Yamada, 2009). Este proceso suele describirse en términos del cambio de conectividad de las líneas de campo, que permite la liberación de energía magnética almacenada en el sistema. Así, esta energía se transforma principalmente en energía cinética, la cual es responsable de los diferentes mecanismos de aceleración de partículas, que son a su vez los principales impulsores del clima espacial (Priest and Forbes, 2000; Birn et al., 2012).

Como consecuencia de la reconexión en la magnetocola, se produce la aparición de auroras polares, una de las principales y más llamativas muestras del clima espacial en las zonas de alta latitud, sin embargo su aparición no se limita a estas regiones. En 1859, la tormenta conocida como el evento Carrington fue responsable de la presencia de auroras en zonas de media y baja latitud como México, Cuba, Jamaica, Panamá e incluso Colombia (Cárdenas et al., 2016). Sumado a esto, en Estados Unidos las corrientes geomagnéticamente inducidas por la tormenta fueron lo suficientemente intensas como para permitir a operadores telegráficos transmitir mensajes de Portland a Boston sin utilizar otra fuente de corriente (Boteler, 2006).

² Una tormenta geomagnética es una alteración del campo magnético terrestre provocada por la entrada de grandes cantidades de energía en la magnetosfera, que ingresan con la llegada de partículas provenientes de eyecciones de masa coronal (Bothmer and Daglis, 2007).

Pese a lo anterior, los efectos de las tormentas geomagnéticas son en general negativos. Por ejemplo, en 1972 tras la llegada de una tormenta se presentó la detonación de minas submarinas en Hai Phong, Vietnam³. En 1989 otra tormenta fue responsable del gran apagón de Quebec, Canadá, debido a cortocircuitos e incendios en los transformadores de su planta hidroeléctrica (Bolduc, 2002), y también se presentaron pérdidas por sobrecalentamiento de un transformador en la planta nuclear de Salem, Estados Unidos (ver Figura 1). Este tipo de incidentes es muy común debido a que las corrientes producidas por las variaciones del campo magnético producen sobreintensidad y tensiones excesivas que saturan los dispositivos eléctricos. Incluso cuando estas corrientes fluyen hacia el suelo pueden causar procesos electroquímicos en las tuberías que provocan la corrosión de los metales (Pirjola, 2005).

Sumado a lo anterior, las tormentas geomagnéticas representan un riesgo para la infraestructura y operación de satélites, la propagación de señales, tienen implicaciones en el cambio climático y la salud humana. Recientemente, a principios del 2022, el proyecto Starlink de la empresa SpaceX perdió 38 de 49 satélites debido a condiciones del clima espacial causadas por una tormenta (Fang et al., 2022). En la atmósfera, las emisiones de rayos UV, rayos X y partículas provenientes del Sol que se precipitan durante las tormentas, producen variaciones en la temperatura, la distribución de densidad, el número de electrones, las tasas de ionización y la conductividad (Zolesi and Cander, 2014), lo cual afecta principalmente la propagación de señales (Khazanov,

³ El mecanismo de detonación de las minas submarinas puede responder a señales magnéticas, acústicas y de presión. La Marina de los Estados Unidos atribuyó su detonación a perturbaciones magnéticas, y de acuerdo con Knipp et al. (2018) lo anterior es consistente con los impactos de la tormenta.



Figura 1. Transformador de la planta nuclear de Salem, EE.UU. dañado por sobrecalentamiento durante la tormenta solar de 1989 (*Imagen superior*). Transformadores de las centrales eléctricas de Lethabo y Matimba en África del sur durante la tormenta solar de 2003 (*Imagen inferior*). Imágenes tomadas y adaptadas de Vijapurapu (2013).

2016; Nwankwo and Chakrabarti, 2018), pero también tiene implicaciones en el cambio climático.

En este ámbito, las partículas energéticas ionizan las moléculas neutras de la atmósfera y producen radicales químicamente activos, los cuales pueden contribuir al aumento de gases de efecto invernadero y tener implicaciones en el balance de ozono de la atmósfera (Sinnhuber et al., 2012; Mironova et al., 2015). Por último, en cuanto a las consecuencias del clima espacial en la salud, diversas investigaciones han proporcionado evidencia de la relación entre la actividad geomagnética y la salud humana, dando origen a la heliobiología, una ciencia que estudia los efectos del clima espacial en sistemas biológicos (Palmer et al., 2006; Zenchenko and Breus, 2021).

Entonces, a excepción de las auroras, las consecuencias de una tormenta geomagnética son peligrosas y hasta ahora no existen modelos que permitan predecir sus efectos (Cid et al., 2014; Khazanov, 2016). Es por ello que el clima espacial es un campo de investigación en auge, sin

embargo, su estudio es un problema complejo porque requiere de la interacción entre muchos sistemas. Solo en la magnetocola se presentan procesos que todavía no se entienden por completo, como lo es la reconexión magnética.

Es necesario enfatizar en que el fenómeno de reconexión está estrechamente ligado con la ocurrencia de tormentas geomagnéticas. De hecho, la aparición de auroras es consecuencia directa de la reconexión de campos magnéticos en la magnetocola y la posterior aceleración y precipitación de partículas hacia la Tierra (Birn et al., 2012). Lo anterior porque en la magnetocola se forma una hoja de corriente que juega un papel crucial en la dinámica de la reconexión. Más allá de eso, la tasa de reconexión de la magnetocola parece ser un parámetro que controla la amplitud de las perturbaciones geomagnéticas (Nakamura et al., 2018).

El valor de la tasa de reconexión ofrece información sobre qué tan rápido se da el proceso, cuánto flujo magnético se reconecta y cuánta energía magnética se libera para convertirse en energía cinética que acelera el plasma (Hesse and Cassak, 2020). Es por ello que la tasa de reconexión magnética ha sido estudiada de forma observacional, experimental, teórica y numérica, sin embargo existe un problema abierto en torno al tema: la tasa adimensional sugerida por numerosas observaciones y simulaciones es de aproximadamente 0.1 independiente del sistema en cuestión (Cassak et al., 2017; Hesse and Cassak, 2020), un valor mucho más grande que el predicho por los modelos teóricos clásicos de Sweet (Sweet, 1958b,a), Parker (Parker, 1957, 1963) y Petschek (Petschek, 1964). Esto sugiere dos cosas: Primero, por ser independiente del sistema en cuestión, la tasa de reconexión podría depender de procesos que ocurren a pequeñas escalas y tienen que ver con la interacción de partículas que conforman un plasma, más no con parámetros globales

característicos del sistema físico. Segundo, las suposiciones para derivar los modelos clásicos de reconexión no son adecuadas para modelar la reconexión en un ambiente real.

En ambientes como la magnetocola terrestre, el comportamiento del plasma se rige por las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) resistiva, la cual considera el plasma como un único fluido conductor con resistividad ohmica finita diferente de cero, que eventualmente conduce a la reconexión. Pese a lo anterior, un modelo únicamente resistivo omite fenómenos físicos que se presentan en la naturaleza, como lo son el efecto Hall y la difusión ambipolar. Teniendo en cuenta que las suposiciones de los modelos clásicos de reconexión solo tienen en cuenta la resistividad, la clave para explicar un valor de 0.1 en las tasas de reconexión podría estar en el estudio de otros procesos como el desacople de partículas producido por el efecto Hall. Con esta motivación el proyecto *Geospace Environmental Modeling (GEM) reconnection challenge* (Birn et al., 2001) estudió la reconexión magnética en presencia de este efecto. Los autores que participaron en el GEM verificaron que todos los modelos con efecto Hall presentaban tasas de reconexión similares, razón por la cual se argumentó que el efecto Hall era responsable de la reconexión con esta tasa. Sin embargo, trabajos como los realizados por Karimabadi et al. (2004); Bessho and Bhattacharjee (2005) y Bessho and Bhattacharjee (2007) demostraron que incluso en ausencia de este efecto la reconexión también tiene una tasa similar.

Lo anterior da cabida a la pregunta de si otro efecto juega un papel clave en el valor de la tasa de reconexión. Este efecto podría ser el de difusión ambipolar, el cual es sumamente importante en la astrofísica del plasma de nubes moleculares y contribuye significativamente a los eventos de calentamiento del medio interestelar (Falgarone et al., 2015; Zweibel, 2015). Hasta ahora, las

simulaciones han demostrado que este último produce una disminución del grosor de la hoja de corriente que favorece la obtención de tasas de reconexión rápidas (Ethan and Lazarian, 1999; Heitsch and Zweibel, 2003; Ni et al., 2015). Pese a esto, el impacto directo de la difusión ambipolar en la tasa de reconexión ha sido poco estudiado, en particular en la magnetocola terrestre.

Motivados por lo anterior, el propósito de este trabajo es hacer una comparación sistemática de simulaciones con los términos asociados al efecto Hall y la difusión ambipolar en las ecuaciones de la MHD resistiva. Esto con el fin de determinar cuál es el impacto de dichos fenómenos en el comportamiento de la reconexión magnética, y en específico en lo relacionado con el flujo reconectado y la tasa de reconexión. Para responder a lo anterior el trabajo de investigación se divide en tres partes. Primero, se deducen las ecuaciones de la MHD resistiva con los términos asociados al efecto Hall y la difusión ambipolar. Luego, se construyen subrutinas en el código MAGNUS para la inclusión de estos nuevos términos. Finalmente, se simula una hoja de corriente con valores característicos de la magnetocola terrestre, donde se determina el impacto del efecto Hall y la difusión ambipolar en la tasa de reconexión, la conversión de energía magnética a cinética y otras variables de la hoja de corriente como la temperatura y la velocidad del plasma.

La organización del documento es la siguiente: En el capítulo 1 se presenta una breve descripción del efecto Hall y la difusión ambipolar. En el capítulo 2 se presenta el sistema de ecuaciones. En el capítulo 3 se presenta una descripción general de los métodos numéricos que utiliza MAGNUS, y una descripción detallada de la inclusión y modificación de subrutinas en el código. En el capítulo 4 se presentan los resultados, donde se verifica la implementación del efecto Hall con el modelo del GEM, y por primera vez se estudia la difusión ambipolar en este mismo mo-

delo. Además, se describe el proceso de reconexión en la magnetocola terrestre y se presentan los resultados de las simulaciones realizadas para este caso. Por último, en el capítulo 5 se sintetizan todos los resultados de la investigación.

1. Procesos magnetohidrodinámicos no ideales

Basados en la aproximación de que iones y electrones se mueven juntos a lo largo de las líneas de campo, el plasma se simula en múltiples escenarios a través del modelo de un solo fluido. Incluso en presencia de neutrales, se puede asumir que todos los componentes del plasma están fuertemente acoplados por colisiones y el modelo de un solo fluido sigue siendo adecuado. Sin embargo, en numerosas ocasiones las colisiones entre partículas no son suficientes para acoplar por completo a todas las especies del plasma.

En las regiones de difusión, donde la reconexión magnética tiene lugar, la aproximación de un solo fluido deja de ser válida: los iones se desacoplan del campo magnético y dejan de moverse en conjunto con los electrones. Asimismo, hay regiones donde el gas neutro del plasma se separa de las partículas cargadas. Como resultado aparecen velocidades relativas entre las especies del plasma, que a grandes escalas se manifiestan como procesos no ideales (Khomenko, 2020). Es así como estos procesos representan la interacción de especies cargadas, no solo entre sí, sino también con neutrales y con el campo magnético.

Por fortuna, aun cuando el plasma se modela como un único fluido es posible adoptar un enfoque para tratar con los efectos producidos por la interacción entre sus especies. Este enfoque, en lugar de incluir más fluidos en el sistema, se fundamenta en el uso de una ley de Ohm generalizada cuyos términos adicionales contienen la información necesaria para describir un plasma donde las diferentes especies no están fuertemente acopladas.

1.1. Ley de Ohm generalizada

La ley de Ohm generalizada permite acoplar la dinámica del fluido y de los campos electromagnéticos teniendo en cuenta procesos magnetohidrodinámicos no ideales más allá de la resistividad ohmica. Según esta ley, para un marco de referencia en el que el fluido se mueve con velocidad \mathbf{u} , se tiene que (Bittencourt, 2013; Ballester et al., 2018)⁴

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \eta_H (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \eta_A [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico, \mathbf{B} el campo magnético y \mathbf{j} la densidad de corriente. η es la resistividad ohmica, η_H y η_A son el coeficiente de Hall y de difusión ambipolar, definidos como⁵

$$\eta_H = K_H \cdot \frac{1}{ne}, \quad (2)$$

$$\eta_A = K_A \cdot \frac{1}{\rho^2 \sqrt{T}}, \quad (3)$$

⁴ Para el propósito de este trabajo solo se consideran los términos adicionales asociados al efecto Hall y la difusión ambipolar, para un caso más general aparecen otros términos en la ecuación (1). Algunos de los términos que se desprecian son la variación temporal de \mathbf{j} y los términos no lineales tanto de \mathbf{j} como \mathbf{u} , cantidades que se asume corresponden a pequeñas perturbaciones del sistema.

⁵ La expresión para el coeficiente de Hall se encuentra fácilmente en la literatura, para el caso de la difusión ambipolar se utiliza una expresión similar a la usada por Ni et al. (2015) en la cromosfera solar.

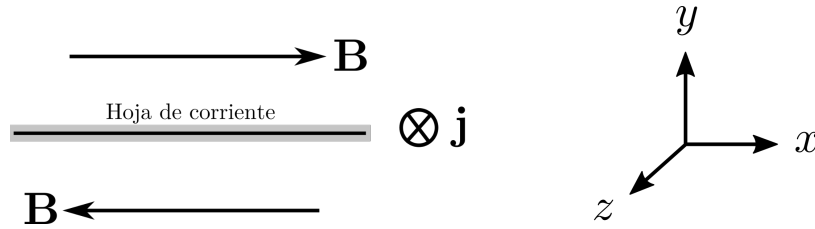


Figura 2. Esquema simple de una hoja de corriente entre líneas de campo con sentido opuesto. De acuerdo con el sistema de coordenadas, el campo magnético se sitúa en el plano xy y la hoja de corriente en el plano xz .

donde n es la densidad de número, e la carga del electrón, ρ la densidad de masa y T la temperatura del plasma. K_H y K_A son parámetros que dependen de las frecuencias de colisión entre partículas y del grado de ionización del plasma, y en función de estos parámetros el impacto del efecto Hall y de la difusión ambipolar puede variar (Viganò et al., 2019).

1.2. Efecto Hall

El efecto Hall se refiere a la aparición de un campo eléctrico por separación de cargas en un conductor. En el caso del plasma, esta separación ocurre como consecuencia del desacople entre iones y electrones que tiene lugar en la región de difusión, donde se desarrolla una estructura multiescala basada en las longitudes características propias de cada especie (Birn and Priest, 2007). Teniendo en cuenta una configuración inicial de campo magnético como la de la Figura 2, el término de Hall en la ecuación (1) implica la aparición de campos eléctricos en el plano xy donde ocurre la reconexión. Esto genera corrientes adicionales que pueden afectar la estructura de la hoja de corriente inicial así como los campos magnéticos y su evolución temporal (Morales, 2020).

Para clarificar el concepto de estructura multiescala en la hoja de corriente se debe tener en cuenta que fuera de la región de difusión tanto los electrones como los iones están congelados

en el campo magnético. Allí, el comportamiento del plasma y los campos electromagnéticos está gobernado por la MHD ideal, y la ausencia de resistividad en la ley de Ohm, $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$, permite demostrar que el flujo magnético que pasa a través de cualquier circuito cerrado, que sea comóvil al fluido, es constante (Schnack, 2009). Si se consideran tubos de flujo infinitamente delgados, determinados por cada línea de campo magnético, lo anterior implica que las líneas de campo magnético no pueden cambiar su conectividad, además, como los diferentes tubos de flujo no se pueden mezclar, el plasma solo se mueve a lo largo de dichos tubos pero no a través de ellos (Kivelson et al., 1995; Schnack, 2009). A una distancia del orden de la longitud de inercia del ion, el movimiento de los iones se desacopla del de los electrones, de tal forma que solo estos últimos permanecen congelados en el campo magnético. En esta zona los electrones se aceleran hasta que se desacoplan del campo magnético en una región más pequeña, de la escala de inercia del electrón, donde finalmente tiene lugar la reconexión (Biskamp et al., 1997; Shay et al., 1998).

Como se muestra en la Figura 3, este proceso da lugar a la aparición de un campo magnético cuadrupolar fuera del plano de reconexión. Este campo, además de ser característico del efecto Hall, también sugiere que las ondas dominantes en la región son de *Whistler*, un modo de onda en el sistema que es introducido por el efecto Hall (Deng and Matsumoto, 2001). Tanto la estructura cuadrupolar del campo como las ondas de *Whistler* se han detectado en la magnetocola y la magnetopausa terrestre (Deng and Matsumoto, 2001; Contel et al., 2016). Asimismo, numerosas observaciones han reportado la estructura multiescala de la región de difusión y el desacople de iones y electrones en estas zonas de reconexión (Nagai et al., 2001; Øieroset et al., 2001; Mozer et al., 2002, 2005; Zenitani et al., 2012; Torbert et al., 2017).

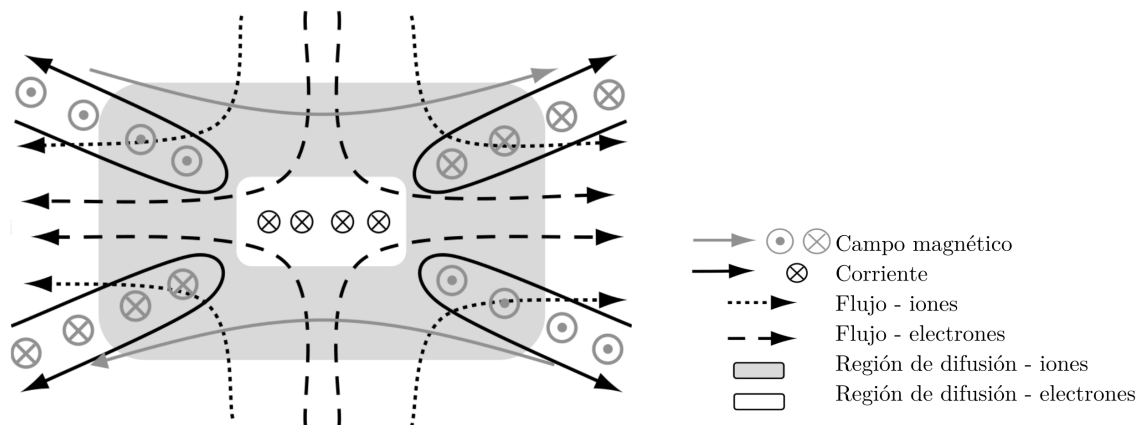


Figura 3. Esquema de la estructura multiescala de la región de difusión. En gris se representa la región de difusión de los iones, donde estos se desacoplan del campo magnético y se desvían produciendo un flujo de iones (flecha con líneas discontinuas cortas). Al interior de esta región, en blanco, se encuentra la región de difusión de los electrones. Allí, los electrones también se desacoplan del campo magnético y hay un flujo de electrones hacia afuera de la región (flecha con líneas discontinuas largas). Imagen tomada y adaptada de Birn and Priest (2007).

1.3. Difusión ambipolar

La idea de la difusión ambipolar surgió en la década de 1950 al tratar el problema del colapso gravitacional de nubes moleculares en presencia de un campo magnético. En este contexto se creía que los campos magnéticos impedían la formación estelar: mientras el campo estuviera congelado en la nube, esta no podría colapsar y dar origen a estrellas. En consecuencia, era necesario proponer un mecanismo para que la materia de la nube, que es principalmente gas neutro, se deslizara a través de las líneas de campo y finalmente colapsara.

Con esta motivación, Mestel and Spitzer Jr (1956) argumentaron que, cuando la densidad de un plasma parcialmente ionizado es lo suficientemente baja, el acoplamiento entre iones y el gas neutro se reduce debido a la ausencia de colisiones. Gracias a este desacople el gas neutro presenta

un movimiento relativo respecto a los iones y ya no está congelado en el campo magnético. Así, en astrofísica, la difusión ambipolar⁶ se refiere al desacople entre neutrales y partículas cargadas (Zweibel, 2015).

A diferencia del efecto Hall, el término ambipolar genera campos eléctricos en el plano xz de la Figura 2. Como consecuencia, afecta a las corrientes perpendiculares al plano de reconexión, lo que de acuerdo con Morales (2020) implica que el proceso de difusión ambipolar no puede producir reconexión magnética. Sin embargo, sí puede relajar la configuración del campo magnético disminuyendo la energía magnética y convirtiéndola en calor a través de un proceso de disipación.

Es sumamente importante resaltar que si bien el efecto Hall sí genera corrientes en el plano donde ocurre la reconexión, no contribuye directamente a ella debido a que sigue congelando el campo magnético al flujo de electrones (Priest and Forbes, 2000). En general, por la forma que tienen tanto el término de Hall como el de difusión ambipolar, ambos tienden a cero en los puntos nulos de la región de difusión, donde el campo magnético se hace cero. Así, ambos efectos, a diferencia de la resistividad ohmica, preservan la topología del campo magnético y no desencadenan reconexión. Sin embargo, sí pueden promover su aparición y afectar su tasa con efectos como el adelgazamiento de la hoja de corriente y la formación de plasmoides (Zweibel, 2015; Nóbrega-Siverio et al., 2020).

⁶ En otros contextos, también relacionados con el plasma, el término *difusión ambipolar* se refiere a la difusión conjunta de portadores de carga tanto positivos como negativos (Simon, 1955; Bittencourt, 2013).

2. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica

La MHD es un modelo matemático para la interacción de bajas frecuencias⁷ entre los fluidos conductores y los campos electromagnéticos (Schnack, 2009). Este modelo acopla ecuaciones para la dinámica de fluidos junto con las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm para describir completamente el comportamiento del plasma, el cual se puede considerar en múltiples escenarios astrofísicos y en buena aproximación, como un único fluido conductor. En este caso las ecuaciones de transporte para cada especie individual se sustituyen por ecuaciones de transporte para todo el plasma. Estas últimas son equivalentes al conjunto de ecuaciones original, excepto por la pérdida de información de algunos parámetros individuales, ya que variables como la densidad y la velocidad de cada especie se sustituyen por valores promedio (Bittencourt, 2013).

2.1. Ecuación general de transporte

Para calcular los valores promedio es necesario conocer la función de distribución del sistema, cuya dependencia respecto a las variables independientes posición y velocidad está dada a través de la ecuación de Boltzmann (Bittencourt, 2013)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{\text{col}}. \quad (4)$$

⁷ En este contexto, por bajas frecuencias se entiende a los movimientos tales que $v^2/c^2 \ll 1$, donde v es la rapidez característica del fluido y c es la velocidad de la luz (Schnack, 2009). De acuerdo con esto, los intervalos de tiempo característicos de la MHD son mucho más largos que el tiempo que tarda la luz en transitar por el sistema.

$(\delta f_\alpha / \delta t)_{col}$ representa la tasa de cambio de la función de distribución f_α debido a colisiones, \mathbf{v} la velocidad y \mathbf{a} la aceleración. Considerando que esta última se debe a una fuerza de Lorentz externa al sistema, y que además el término de colisiones es igual a cero, la ecuación (4) se puede reescribir como

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} [q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot \nabla_v f_\alpha = 0. \quad (5)$$

Luego, la función de distribución del sistema se puede obtener resolviendo la ecuación anterior. Afortunadamente no es necesario hacerlo ya que las ecuaciones que gobiernan las variables macroscópicas de interés se pueden derivar sin resolverla.

Sea $\chi = \chi(\mathbf{v})$ una propiedad del plasma que depende de la velocidad, si la ecuación (5) se multiplica por una función χ y se integra sobre todo el espacio de velocidades, el resultado es una ecuación que describe la variación del promedio de χ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \langle [q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = 0, \quad (6)$$

donde n_α es la densidad de número de la especie α en el plasma. Puesto que χ es una función cualquiera de la velocidad, lo que se obtiene es una ecuación que describe la evolución de cantidades macroscópicas. Por ello, a (6) se le conoce como la ecuación general de transporte.

2.2. Ecuaciones de transporte para un fluido conductor

Para hacer un tratamiento del plasma bajo la aproximación de un solo fluido, las variables macroscópicas como la densidad de masa ρ , la densidad de corriente \mathbf{j} y la velocidad media \mathbf{u} se definen teniendo en cuenta las contribuciones de cada especie. Con esto, al hacer $\chi = m_\alpha$, $\chi = m_\alpha \mathbf{v}$, $\chi = m_\alpha v^2/2$ y sumar sobre todas las especies, de la ecuación (6) se obtienen (ver Apéndice 1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} + (\gamma - 1) \{ \eta j^2 - \eta_A \mathbf{j} \cdot [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \}, \quad (9)$$

donde ρ es la densidad de masa, \mathbf{u} la velocidad media, \mathbf{j} la densidad de corriente, \mathbf{B} el campo magnético, p la presión del fluido, γ el coeficiente adiabático, η la resistividad óhmica y η_A el coeficiente difusión ambipolar.

2.3. Ecuaciones para los campos electromagnéticos

Para el campo eléctrico y magnético las ecuaciones son la ley de Faraday y la ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (11)$$

donde se ha despreciado el término de las corrientes de desplazamiento debido a la aproximación de bajas velocidades (Schnack, 2009). Además en todo momento se debe garantizar que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, lo que a su vez garantiza la inexistencia de monopolos magnéticos.

2.4. Formulación conservativa

Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones, MAGNUS discretiza la parte espacial con el método de volúmenes finitos. Debido a lo anterior es necesario escribir el conjunto de

ecuaciones en su forma conservativa (ver Apéndice 2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} + P \mathbf{I} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ (E + P) \mathbf{u} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} [B^2 \mathbf{u}_H - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_H) \mathbf{B}] \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_0} (B^2 \mathbf{u}_A) \right\} = -\nabla \cdot \left(\frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_H) \\ + \nabla \cdot (\mathbf{u}_A \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_A) = -\eta \nabla \times \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (15)$$

Las letras P y E representan la presión y la densidad de energía del sistema, las cuales se definen como

$$P = p + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (16)$$

$$E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \rho e, \quad (17)$$

donde p es la presión del fluido, $B^2/2\mu_0$ la presión magnética y e la energía interna. Esta última se relaciona con la presión del fluido a través de la ecuación de estado

$$p = (\gamma - 1)\rho e. \quad (18)$$

Además, los coeficientes de Hall y de difusión ambipolar se reemplazan por las velocidades \mathbf{u}_H y \mathbf{u}_A , definidas como

$$\mathbf{u}_H = -\eta_H \mathbf{j}, \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_A = \eta_A (\mathbf{j} \times \mathbf{B}). \quad (20)$$

Esto se hace con el fin de escribir los términos Hall y ambipolar como contribuciones a los flujos de las ecuaciones.

Las ecuaciones (12)-(15) conforman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineal, que en general no tiene solución analítica a menos de que las ecuaciones se simplifiquen. De allí surge la importancia de aplicar métodos numéricos para resolver el sistema y poder simular la reconexión magnética en presencia de fenómenos como el efecto Hall y la difusión ambipolar.

3. Código MAGNUS

MAGNUS (Navarro et al., 2017) resuelve las ecuaciones de la MHD resistiva en el régimen newtoniano para el estudio de propagación de ondas en la atmósfera solar. Hasta la fecha se ha usado para simular la aparición de una gota de plasma en un agujero de la corona (Navarro et al., 2019), la conducción térmica en la formación de chorros en la cromosfera (Navarro et al., 2021), la propagación de ondas de Alfvén torsionales en una atmósfera estratificada (Wandurraga et al., 2021), y recientemente se desarrolló una adaptación del código para simular la propagación de ondas sísmicas (Landinez et al., 2021). En el presente trabajo la utilidad de MAGNUS se extiende más allá de la atmósfera solar para simular el fenómeno de reconexión magnética en la magnetocola terrestre, no solo bajo los efectos de la resistividad ohmica, sino también del efecto Hall y la difusión ambipolar. La Figura 4, ubicada al final del capítulo, muestra un diagrama de flujo del algoritmo usado por el código y a continuación se presenta una descripción general de sus métodos numéricos.

3.1. Descripción general del código

Para resolver las ecuaciones MAGNUS utiliza el método de líneas, cuyo objetivo es reemplazar las derivadas espaciales con aproximaciones algebraicas de tal forma que la única variable independiente sea el tiempo (Schiesser and Griffiths, 2009). Así, en cada nodo de la malla numérica se obtiene un sistema de ecuaciones ordinarias que se aproxima al sistema de ecuaciones parciales original. Esto se traduce en un problema de valores iniciales con condiciones de frontera que se puede resolver numéricamente aplicando un método iterativo de integración en el tiempo,

para lo cual MAGNUS cuenta con diferentes integradores de la familia Runge-Kutta.

La discretización espacial de las ecuaciones se realiza aplicando el método de volúmenes finitos en conjunto con los métodos de alta resolución para la captura de choques. Estos últimos incluyen aproximadores de Riemann para calcular flujos, y reconstructores de variables, métodos diseñados para reproducir las discontinuidades de la solución que aparecen debido a la no linealidad de las ecuaciones (Rezzolla and Zanotti, 2013).

Cabe añadir que cuando las ecuaciones de la MHD se resuelven numéricamente, la acumulación de errores hace que la divergencia del campo magnético crezca en el tiempo. Para evitar la aparición de monopolos magnéticos por acumulación de error, MAGNUS utiliza el método FCT (*Flux Constrained Transport*), el cual consiste en una discretización especial de la ecuación de Faraday haciendo uso de los flujos numéricos.

3.1.1. Método de volúmenes finitos. El método de volúmenes finitos transforma las ecuaciones diferenciales parciales, que representan leyes de conservación, en ecuaciones algebraicas discretas sobre volúmenes finitos (Darwish and Moukalled, 2021). Para ello, las ecuaciones conservativas se integran sobre los volúmenes en los que se divide el dominio y se aplica el teorema de Gauss para convertir las integrales de volumen en integrales de superficie. Luego estas integrales se discretizan al reescribirlas como una suma de flujos sobre las caras de cada volumen. Como resultado aparecen promedios de los flujos a lo largo de cada una de las direcciones espaciales. Dichos promedios están dados en puntos sobre las interceldas (interfaces que separan puntos de la malla numérica) y no en los puntos de la malla.

3.1.2. Métodos de alta resolución para la captura de choques. Para continuar con la discretización se requiere calcular los flujos en las interceldas con la información de las variables en los nodos de la malla. Para ello, las variables conocidas en cada punto de la malla se pueden entender como funciones a trozos a izquierda y derecha de las interceldas, definiendo así un problema de Riemann en cada interfaz (Toro, 2013). Para resolver este problema MAGNUS utiliza el aproximador de Riemann HLLE (Harten et al., 1983; Einfeldt, 1988), el cual forma parte de los esquemas de alta resolución para la captura de choques. Los aproximadores ofrecen una fórmula para calcular los flujos de cada variable del sistema, en el caso del HLLE la fórmula requiere de velocidades características del sistema y variables conservativas a izquierda y derecha de la intercelda. MAGNUS aproxima dichas variables con reconstructores como Minmod y MC (*Monotonized Central*) Beta.

3.1.3. Condición de Courant-Friedrichs-Levy. La condición de Courant-Friedrichs-Levy establece que el parámetro $C_{CFL} = u\Delta t/\Delta x$ debe ser menor o igual a 1 (Schiesser and Griffiths, 2009). Esto implica que la distancia que recorre una onda durante un periodo de tiempo sea menor, o igual, que la distancia Δx entre los elementos de la malla espacial. Es así como el número C_{CFL} define un límite para el paso de tiempo Δt para cualquier velocidad u y cualquier resolución espacial Δx .

Siguiendo la condición de Courant-Friedrichs-Levy, el paso de tiempo en MAGNUS se

elige como (Navarro et al., 2017)

$$\Delta t = C_{CFL} \times \min \left(\frac{\Delta x}{|\lambda_{ijk}^{n,x}|}, \frac{\Delta y}{|\lambda_{ijk}^{n,y}|}, \frac{\Delta z}{|\lambda_{ijk}^{n,z}|} \right), \quad (21)$$

donde $\lambda_{ijk}^{n,d}$ es la velocidad de la onda más rápida que se propaga en dirección d en el nivel de tiempo n . Así, el paso de tiempo se adapta en cada nivel. Con respecto al valor del parámetro C_{CFL} , en general se elige un valor pequeño para no perder información entre pasos de tiempo consecutivos. Sin embargo, como el único criterio para establecer su valor es la condición de Courant-Friedrichs-Levy, es posible elegir cualquier valor menor o igual a 1.

3.1.4. Normalización de las ecuaciones. En MAGNUS las ecuaciones se reescriben definiendo valores característicos para la longitud, la densidad y la velocidad. De tal forma que (Navarro et al., 2017)

$$l \rightarrow \frac{l}{l_a}, \quad \rho \rightarrow \frac{\rho}{\rho_a}, \quad u \rightarrow \frac{u}{u_a}. \quad (22)$$

Con esto se puede calcular valores característicos para el tiempo t_a , el campo magnético B_a , la presión p_a , la resistividad η_a , el coeficiente de Hall η_{Ha} y el coeficiente ambipolar η_{Aa} , como

$$\begin{aligned} t_a &= l_a/u_a, & B_a &= u_a \sqrt{\mu_0 \rho_a}, & p_a &= \rho_a u_a^2, \\ \eta_a &= l_a u_a \mu_0, & \eta_{Ha} &= l_a \sqrt{\mu_0 / \rho_a}, & \eta_{Aa} &= l_a / u_a \rho_a. \end{aligned} \quad (23)$$

Con estas expresiones el sistema de ecuaciones se reescribe de la misma forma, excepto por la desaparición de la constante μ_0 , la cual deja de aparecer en la evolución de las ecuaciones en el código. Así, MAGNUS evoluciona con ecuaciones adimensionales y luego se utilizan las expresiones (22) y (23) para dar dimensión a las variables, con la ventaja de que los resultados se escalan de acuerdo al sistema físico. Para mayor claridad sobre cómo realizar un análisis dimensional ver la sección 3.1 de Landínez et al. (2021) y el Apéndice 3, donde se derivan las expresiones para η_{Ha} y η_{Aa} .

3.2. Inclusión del efecto Hall y la difusión ambipolar

La inclusión del efecto Hall y la difusión ambipolar en las ecuaciones de la MHD resistiva modifica la ecuación de energía (14) e inducción (15). Como parte de este trabajo se implementaron dos subrutinas en MAGNUS en las cuales se calculan los flujos adicionales debidos a cada efecto. A continuación se describe la inclusión de ambos efectos en el código.

En coordenadas, las ecuaciones de evolución para la energía y el campo magnético, (14) y (15), se escriben como ⁸

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[(E + P)u_j - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})B_j \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} [B^2 u_j^H - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}^H)B_j] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} (B^2 u_j^A) - \left[\nabla \cdot \left(\frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) \right]_j, \end{aligned} \quad (24)$$

⁸ La permeabilidad magnética μ_0 no aparece en las ecuaciones (24) y (25) porque MAGNUS resuelve el sistema de ecuaciones adimensional.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j B_i - B_j u_i) - \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j^H B_i - B_j u_i^H) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j^A B_i - B_j u_i^A) - [\nabla \times \eta \mathbf{j}]_i. \end{aligned} \quad (25)$$

En ambas ecuaciones los tres primeros términos del lado derecho corresponden a flujos, mientras que el último término es de fuente. Como MAGNUS ya resuelve las ecuaciones MHD resistivas, solo es necesario sumar el segundo y tercer término de cada ecuación a los flujos numéricos en el código.

Antes de proceder, se debe tener en cuenta que con el método del volúmenes finitos las ecuaciones se discretizan como (Navarro et al., 2017)

$$\begin{aligned} \frac{dU_{(i,j,k)}}{dt} = & -\frac{F_{(i+1/2,j,k)}^x - F_{(i-1/2,j,k)}^x}{\Delta x} \\ & -\frac{F_{(i,j+1/2,k)}^y - F_{(i,j-1/2,k)}^y}{\Delta y} \\ & -\frac{F_{(i,j,k+1/2)}^z - F_{(i,j,k-1/2)}^z}{\Delta z} + S_{(i,j,k)}, \end{aligned} \quad (26)$$

donde \mathbf{U} es el vector de variables conservativas $\rho, \mathbf{u}, E, \mathbf{B}$, los vectores \mathbf{F}^i corresponden a flujos a lo largo de cada dirección espacial y \mathbf{S} el vector que contiene términos de fuente. Además, en la ecuación (26), el 1/2 en los subíndices (i, j, k) se utiliza para representar la cara entre celdas en una dirección dada. Por ejemplo, el subíndice $(i + 1/2, j, k)$ representa la cara entre celdas en la dirección i , es decir, la intercelda entre los puntos (i, j, k) y $(i + 1, j, k)$.

Con la inclusión del efecto Hall y la difusión ambipolar, MAGNUS calcula cada vector \mathbf{F}^i

como la suma

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j,k} = \mathbf{F}_{i\pm 1/2,j,k}^{HLL E} + \mathbf{F}_{i\pm 1/2,j,k}^H + \mathbf{F}_{i\pm 1/2,j,k}^A, \quad (27)$$

donde $\mathbf{F}^{HLL E}$ es el flujo numérico para la parte MHD ideal, el cual se calcula usando el método HLL E de alta resolución para la captura de choques. \mathbf{F}^H y \mathbf{F}^A son los flujos debidos a los términos de Hall y ambipolar. Estos últimos se calculan en diferentes subrutinas y luego se suman a los flujos que se calculan con el esquema HLL E a lo largo de cada dirección espacial. Así, la expresión (27) tiene la misma forma para $\mathbf{F}_{i,j\pm 1/2,k}$ y $\mathbf{F}_{i,j,k\pm 1/2}$.

Como ejemplo se considera el caso para el vector $\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^x$. De acuerdo con la expresión (27) se tiene que

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^x = F_{i+1/2,j,k}^{x HLL E} + F_{i+1/2,j,k}^{x H} + F_{i+1/2,j,k}^{x A}. \quad (28)$$

Para calcular $F_{i\pm 1/2,j,k}^{x H}$ y $F_{i\pm 1/2,j,k}^{x A}$ se utilizan los términos de Hall y ambipolar que aparecen en la ecuación (25). Así, para la componente B_x del campo magnético se obtiene ($i = x$ y $j = x$):

$$F_{B_x}^{x H} = u_x^H B_x - B_x u_x^H = 0, \quad (29)$$

$$F_{B_x}^{x A} = u_x^A B_x - B_x u_x^A = 0, \quad (30)$$

donde cada una de las variables está evaluada en las interceldas de acuerdo con (28).

Para el caso de la componente B_y ($i = y$ y $j = x$):

$$F_{B_y}^{xH} = u_x^H B_y - B_x u_y^H, \quad (31)$$

$$F_{B_y}^{xA} = u_x^A B_y - B_x u_y^A. \quad (32)$$

Para el caso de la componente B_z ($i = z$ y $j = x$):

$$F_{B_y}^{xH} = u_x^H B_z - B_x u_z^H, \quad (33)$$

$$F_{B_y}^{xA} = u_x^A B_z - B_x u_z^A. \quad (34)$$

De forma análoga, para la ecuación de energía se tiene que

$$F_E^{xH} = B^2 u_x^H - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}^H) B_x, \quad (35)$$

$$F_E^{xA} = B^2 u_x^A. \quad (36)$$

A partir de lo anterior es evidente que, en todos los casos, la modificación de los flujos requiere del cálculo de las componentes de \mathbf{u}_H y \mathbf{u}_A . Por tratarse de una modificación en los flujos, se requiere el valor de dicha velocidad en las interceldas. Teniendo en cuenta que \mathbf{u}_H se define

como el producto entre el coeficiente de Hall y la densidad de corriente, el primer paso consiste en calcular las componentes de la densidad de corriente j_i . Para ello se utiliza la ley de Ampère, según la cual

$$j_x = \partial_y B_z - \partial_z B_y, \quad (37)$$

$$j_y = \partial_z B_x - \partial_x B_z, \quad (38)$$

$$j_z = \partial_x B_y - \partial_y B_x. \quad (39)$$

Algunos autores proponen esquemas donde, en cada intercelda, las derivadas normales se calculan de manera diferente a las derivadas tangenciales (Tóth et al., 2008; Strumik and Stasiewicz, 2017). En esta tesis se presenta un nuevo esquema, en el que las expresiones (37)-(39) se calculan usando el módulo de derivadas implementado en MAGNUS, el cual calcula las derivadas a lo largo de cada dirección usando un esquema de diferencias finitas de segundo orden. Así, en cada punto de la malla las derivadas se aproximan numéricamente utilizando diferencias finitas centrales, o bien, desbalanceadas hacia adelante o hacia atrás.

Para un esquema de diferencias finitas de segundo orden, la derivada $\partial_x B_{i,j,k}$ se puede aproximar usando expansiones de series de Taylor truncadas. En particular, se tiene que

$$B_{i+1,j,k} = B_{i,j,k} + \Delta x B'_{i,j,k} + \frac{\Delta x^2}{2} B''_{i,j,k} + \Delta(O^3), \quad (40)$$

$$B_{i-1,j,k} = B_{i,j,k} - \Delta x B'_{i,j,k} + \frac{\Delta x^2}{2} B''_{i,j,k} - \Delta(O^3), \quad (41)$$

donde $\Delta(O^3)$ es el error de truncamiento que incluye términos de orden superior. Combinando estas expresiones se obtiene que

$$B'_{i,j,k} = \frac{B_{i+1,j,k} - B_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + \Delta(O^2). \quad (42)$$

Lo anterior constituye una expresión para el operador primera derivada con error de segundo orden. Cabe resaltar que este esquema de diferencias finitas es central, pues requiere los valores de la función en los puntos $(i+1, j, k)$ y $(i-1, j, k)$. Como consecuencia, solo funciona para puntos que no están ubicados en los extremos de la malla. Para estos últimos se utilizan diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás, las cuales utilizan los valores de la función en (i, j, k) , $(i \pm 1, j, k)$ y $(i \pm 2, j, k)$. Así, para los extremos se tiene que

$$B'_{i=0,j,k} = -\frac{B_{i+2,j,k} - 4B_{i+1,j,k} + 3B_{i,j,k}}{2\Delta x} + \Delta(O^2), \quad (43)$$

$$B'_{i=N_x,j,k} = \frac{B_{i-2,j,k} - 4B_{i-1,j,k} + 3B_{i,j,k}}{2\Delta x} + \Delta(O^2). \quad (44)$$

De forma análoga MAGNUS calcula las derivadas parciales respecto a las otras direcciones.

Una vez hecho esto, cada componente de la velocidades \mathbf{u}_H y \mathbf{u}_A se puede obtener en cada nodo de la malla como

$$(u_x^H)_{i,j,k} = -(\eta^H)_{i,j,k}(j_x)_{i,j,k}, \quad (45)$$

$$(u_x^A)_{i,j,k} = (\eta^A)_{i,j,k} [(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x]_{i,j,k}, \quad (46)$$

y de forma análoga para las componentes u_y^H , u_z^H , u_y^A y u_z^A .

Finalmente, se define la velocidad en la intercelda como

$$(u^H)_{i+1/2,j,k} = \frac{(u^H)_{i,j,k} + (u^H)_{i+1,j,k}}{2}, \quad (47)$$

$$(u^A)_{i+1/2,j,k} = \frac{(u^A)_{i,j,k} + (u^A)_{i+1,j,k}}{2}, \quad (48)$$

y de forma análoga para $(u^H)_{i,j+1/2,k}$, $(u^H)_{i,j,k+1/2}$, $(u^A)_{i,j+1/2,k}$ y $(u^A)_{i,j,k+1/2}$. Así también se pueden calcular las componentes del campo magnético en las interceldas.

3.3. Modificación del paso de tiempo

Debido a la introducción de nuevos modos de onda en el sistema, el paso de tiempo dado por la ecuación (21) requiere modificaciones. Para ello se realiza un análisis dimensional de cada uno de los términos en la ecuación de inducción.

Para el término de Hall se tiene que

$$\frac{B_o}{t_o} = \eta_H \frac{j_o B_o}{x_o} = \eta_H \frac{B_o^2}{x_o^2}, \quad (49)$$

donde x_o representa una longitud característica dada por la resolución espacial de la simulación en

cada dirección. En consecuencia, el tiempo característico está dado por

$$t_o = \frac{x_o^2}{B_o \eta_H} = \frac{x_o}{\frac{B_o \eta_H}{x_o}}. \quad (50)$$

El denominador de la última fracción corresponde a una rapidez del modo asociado con el efecto Hall, en este caso de las ondas de *whistler* (Huba, 2003). Siguiendo lo propuesto por Tóth et al. (2008) y Strumik and Stasiewicz (2017), con este término se define una nueva rapidez

$$\lambda_H = |u| + |c_f| + C \frac{B_o \eta_H}{x_o}, \quad (51)$$

donde u es la velocidad del fluido y c_f la velocidad magnetosónica rápida. De acuerdo con Tóth et al. (2008), para el paso de tiempo no es necesario incluir la rapidez exacta de las ondas de *whistler*, sino que se puede emplear una velocidad reducida para garantizar la estabilidad de las simulaciones. En este caso C es una constante que permite definir una rapidez reducida o ampliada del término Hall. Así, la libertad para escoger el parámetro C permite ajustar el paso de tiempo de una mejor manera dependiendo del sistema físico que se simule.

En cada nivel de tiempo MAGNUS evalúa la rapidez λ_H en todos los puntos del dominio y elige la mayor. Luego, el paso de tiempo se calcula como

$$\Delta t_H = C_{CFL} \times \left(\frac{\Delta x}{\lambda_{H \ i,j,k}^{n,x}} + \frac{\Delta y}{\lambda_{H \ i,j,k}^{n,y}} + \frac{\Delta z}{\lambda_{H \ i,j,k}^{n,z}} \right). \quad (52)$$

El mismo procedimiento se realiza para el término ambipolar. En este caso se obtiene que

$$\lambda_A = u + c_f + \frac{B_o^2 \eta_A}{x_o}, \quad (53)$$

y el paso de tiempo se calcula como

$$\Delta t_A = C_{CFL} \times \left(\frac{\Delta x}{\lambda_{A \ i,j,k}^{n,x}} + \frac{\Delta y}{\lambda_{A \ i,j,k}^{n,y}} + \frac{\Delta z}{\lambda_{A \ i,j,k}^{n,z}} \right). \quad (54)$$

En la subrutina para el paso de tiempo, MAGNUS calcula (21), (52), (54) y elige el menor. Puesto que λ_H y λ_A involucran resoluciones espaciales en su denominador, las expresiones (52) y (54) tienen un paso de tiempo proporcional al cuadrado de la resolución espacial. Como consecuencia el paso de tiempo se hace mucho más pequeño, produciendo un aumento significativo en el costo computacional y limitando la elección de una resolución espacial alta.

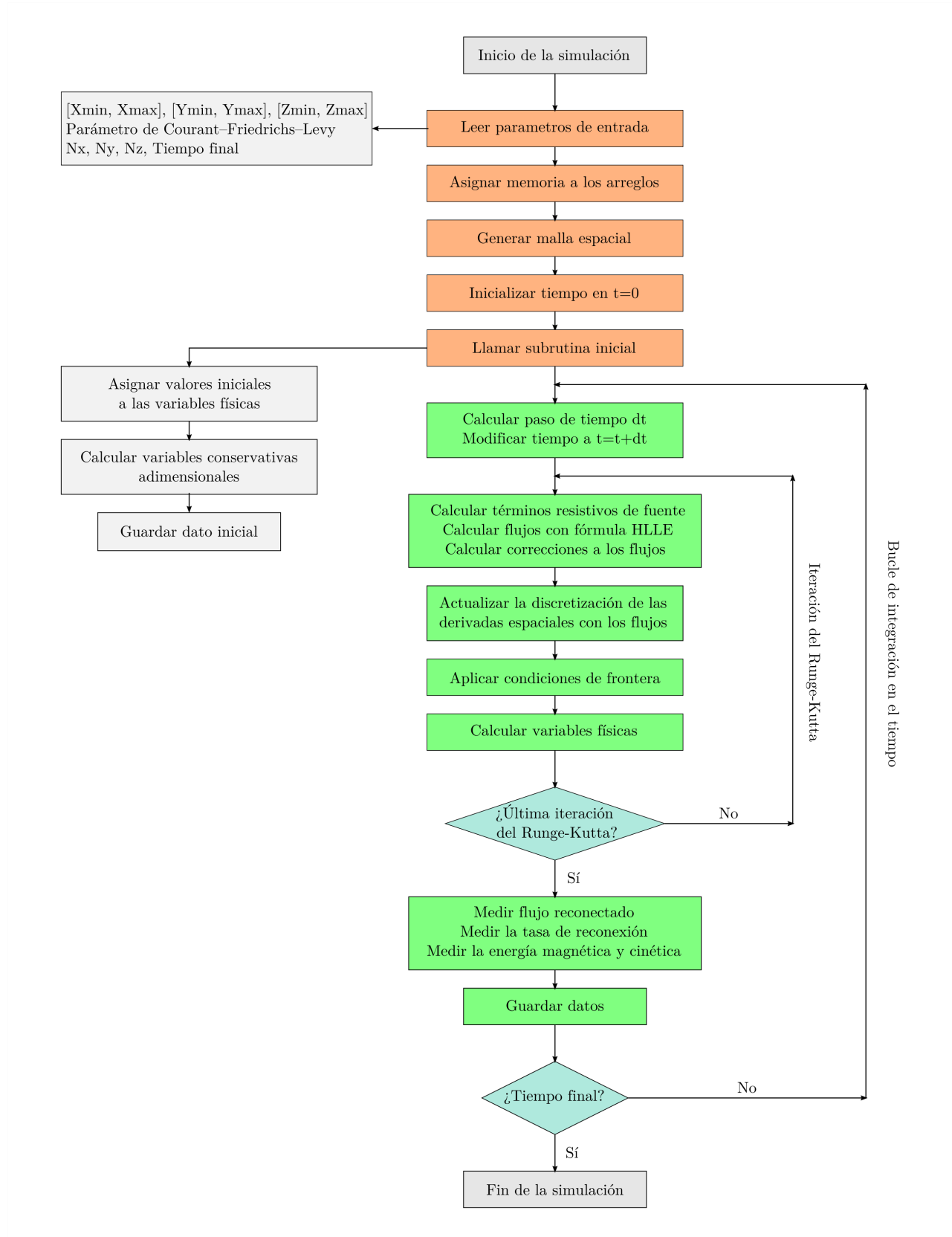


Figura 4. Representación gráfica del algoritmo que sigue MAGNUS.

4. Resultados

4.1. Efecto Hall en el GEM

Una de las pruebas numéricas que se lleva a cabo tras la implementación del efecto Hall es la propuesta por el proyecto GEM *magnetic reconnection challenge*. Inicialmente, este proyecto se diseñó para que diferentes autores simularan la reconexión magnética en dos dimensiones con un conjunto específico de condiciones iniciales y de frontera. Los autores que participaron en el proyecto no solo utilizaron códigos MHD, sino también PIC⁹ e híbridos¹⁰, cuyas especificaciones y resultados se presentaron en una serie de artículos (Birn and Hesse, 2001; Hesse et al., 2001; Kuznetsova et al., 2001; Ma and Bhattacharjee, 2001; Otto, 2001; Pritchett, 2001; Shay et al., 2001). Los resultados más importantes del proyecto se sintetizaron en Birn et al. (2001), donde se evidencia que los modelos con efecto Hall tienen tasas de reconexión similares.

La solución analítica para este problema no se conoce, sin embargo, desde la publicación del proyecto múltiples autores han reproducido sus resultados, por lo que comúnmente se utiliza como *benchmark test* (Tóth et al., 2008; Strumik and Stasiewicz, 2017). En la presente investigación el

⁹ Las simulaciones *particle in cell* (PIC) se utilizan para modelar el comportamiento cinético del plasma, no como un fluido sino como una colección de partículas que interactúan y exhiben un comportamiento colectivo. En general, estos códigos resuelven las ecuaciones de Maxwell junto con ecuaciones para el movimiento de macropartículas, las cuales representan numerosas partículas del plasma que se mueven en conjunto a una misma velocidad (Pukhov, 2015).

¹⁰ Los modelos híbridos utilizan la aproximación cinética de los códigos PIC junto con la de fluido de la MHD. Por ejemplo, tratan los electrones como fluido y los iones cinéticamente (Muñoz et al., 2018). O bien, utilizan la MHD para modelar la dinámica del plasma a gran escala, mientras que la dinámica en la región de difusión se simula con códigos PIC (Yamada et al., 2010).

GEM se utiliza para verificar la implementación del término de Hall en MAGNUS, pero también se llevan a cabo simulaciones con difusión ambipolar. Si bien no existen otras investigaciones que estudien este proceso en el GEM, esto permite verificar que la ejecución del código no se interrumpa por algún error en la programación del término ambipolar.

De acuerdo con lo propuesto en el GEM, el sistema parte del reposo con componentes del campo magnético

$$B_x = \tanh(2z) + \delta B_x, \quad (55)$$

$$B_y = 0, \quad (56)$$

$$B_z = \delta B_z, \quad (57)$$

donde las perturbaciones δB_x y δB_z están definidas como

$$\delta B_x = \frac{0.05\pi}{L_z} \cos\left(\frac{2\pi x}{2L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2L_z}\right), \quad (58)$$

$$\delta B_z = \frac{0.1\pi}{L_x} \sin\left(\frac{2\pi x}{2L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2L_z}\right). \quad (59)$$

La densidad inicial del sistema está dada por

$$\rho = 1.2 - [\tanh(2z)]^2, \quad (60)$$

y la presión del fluido por $p = \rho/2$. La resistividad es un parámetro libre en las simulaciones debido

a que en el GEM no solo participaron códigos MHD. En este caso se establece una resistividad constante en todo el dominio, con un valor $\eta = 0.005$. Para el coeficiente de Hall, $\eta_H = K_H/ne$, se asume que $K_H = 0.0$ cuando las simulaciones son únicamente resistivas y $K_H = 1.0$ en presencia del efecto Hall. También se asume que la razón carga masa es igual a la unidad, de tal forma que al multiplicar por la masa del electrón tanto en el numerador como el denominador se obtiene que $\eta_H = 1/\rho$.

El dominio computacional es $[-L_x, L_x] \times [-L_z, L_z] \times [-L_y, L_y]$, con $L_x = 12.8$, $L_z = 6.4$ y $L_y = 0.2$. En este volumen las ecuaciones son discretizadas en una malla numérica con $N_x = 64$, $N_z = 128$ y $N_y = 4$. Las condiciones de frontera son periódicas en dirección x , salientes en y y entrantes en z . Cabe añadir que se utiliza el reconstructor de variables MC Beta con $\beta = 1.2$ y un Runge-Kutta de segundo orden para la integración en el tiempo, con un parámetro $C_{CFL} = 0.2$ para determinar el paso de tiempo.

En la Figura 5 se muestra el flujo reconectado para dos ejecuciones del código: MHD resistiva y MHD resistiva+Hall. En ambos casos el flujo se calcula en cada paso de tiempo como

$$\text{Flujo reconectado} = \int_{N_x/2}^{N_x} B_z(x, N_y/2, N_z/2) dx. \quad (61)$$

Al finalizar la simulación se observa que con efecto Hall el flujo reconectado alcanza un valor de 3.3, aproximadamente seis veces más grande que solo con resistividad. Este resultado concuerda cualitativa y cuantitativamente con los presentados en el GEM, tanto para códigos MHD como PIC (ver figura 1 de Birn et al. (2001), en $t = 30$ el caso Hall MHD alcanza un flujo reconectado de

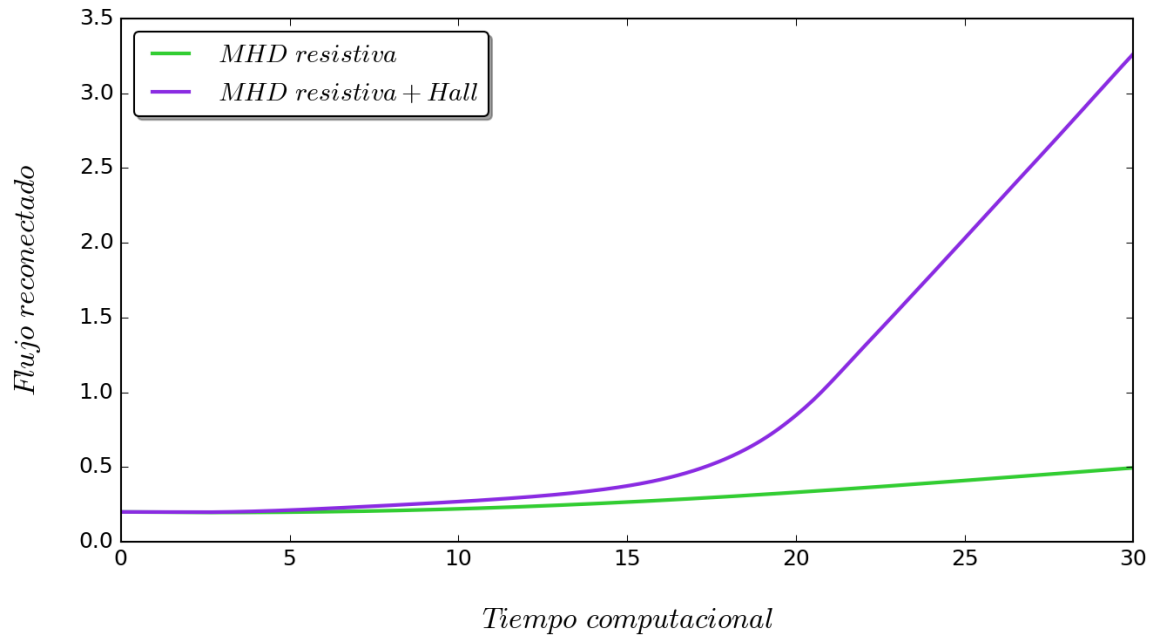


Figura 5. Flujo reconectado en función del tiempo para el dato inicial del GEM *reconnection challenge*. El flujo no empieza en cero debido a la perturbación que se aplica al campo magnético a tiempo inicial.

aproximadamente 3.2. En el panel inferior de la figura 1 de Pritchett (2001), también se puede ver que el flujo reconectado alcanza un valor ligeramente superior a 3.0, esta vez para una simulación PIC).

Estos resultados también coinciden con los presentados por otros autores que han usado el GEM como *benchmark test*. Por ejemplo, en la simulación cinética de Schmitz and Grauer (2006) la curva alcanza un valor ligeramente superior a 3.0, similar a la simulación MHD de Tóth et al. (2008) (ambas en un tiempo $t = 30$). Lo anterior difiere ligeramente con los resultados presentados por Strumik and Stasiewicz (2017), cuya simulación MHD presenta una serie de sobresaltos en $t = 25$, y en $t = 30$ el flujo reconectado alcanza un valor de 2.5, ligeramente menor al de las simu-

laciones mencionadas anteriormente y a los resultados presentados en la Figura 5. Con respecto a las simulaciones solo con resistividad, los resultados de Birn et al. (2001), Tóth et al. (2008) y Strumik and Stasiewicz (2017), también concuerdan con los presentados en la Figura 5, donde el flujo reconectado alcanza un valor de 0.5.

4.2. Difusión ambipolar en el GEM

En esta sección se utiliza el mismo dato inicial para estudiar el impacto que tiene la difusión ambipolar en el flujo reconectado. Para ello se realizan dos tipos de simulaciones: MHD resistiva+ambipolar y MHD resistiva+Hall+ambipolar. Para el coeficiente ambipolar, $\eta_A = K_A/\rho^2\sqrt{T}$, donde K_A es un parámetro inversamente proporcional al grado de ionización, se prueban tres valores: $K_A = 0.001$, $K_A = 0.005$ y $K_A = 0.01$, siendo este último el que responde a un menor grado de ionización del plasma. El parámetro de Hall se mantiene igual, con $K_H = 1.0$ en las simulaciones MHD resistiva+Hall+ambipolar.

En la Figura 6 se presenta el flujo reconectado de la simulación MHD resistiva en comparación con las simulaciones MHD resistiva+ambipolar. Como resultado se obtiene que el flujo reconectado crece con el valor de K_A , obteniendo un aumento de aproximadamente 7% para $K_A = 0.001$, 38% para $K_A = 0.005$ y 75% para $K_A = 0.01$. Al comparar con la Figura 5 se puede ver que el aumento del flujo reconectado es mucho mayor con el efecto Hall, sin embargo, los anteriores porcentajes indican que la difusión ambipolar también contribuye al flujo reconectado. Además, su aumento podría ser mayor si se consideran otros valores para el parámetro K_A .

De forma análoga, en la Figura 7 se compara el flujo reconectado de las simulaciones MHD resistiva+Hall+ambipolar con las MHD resistiva+Hall. Para $K_A = 0.001$ y $K_A = 0.005$, la combina-

ción del efecto Hall y la difusión ambipolar provoca un crecimiento anómalo del flujo reconectado (ver curva morada y azul de la Figura 7 en los tiempos $t = 27$ y $t = 24$, respectivamente). Este crecimiento anómalo está seguido de la aparición de NaN (*not a number*) en el cálculo del flujo reconectado, razón por la cual se detiene la ejecución del código. Pese a lo anterior, en ambos casos, la presencia del efecto ambipolar aumenta el flujo reconectado en un 4% y 32% antes de que la simulación deje de ejecutarse. Finalmente, para el caso con $K_A = 0.01$ el flujo reconectado crece más rápido hasta alcanzar un aumento del 143% en el tiempo $t = 18$ y después se mantiene aproximadamente estacionario hasta finalizar la simulación.

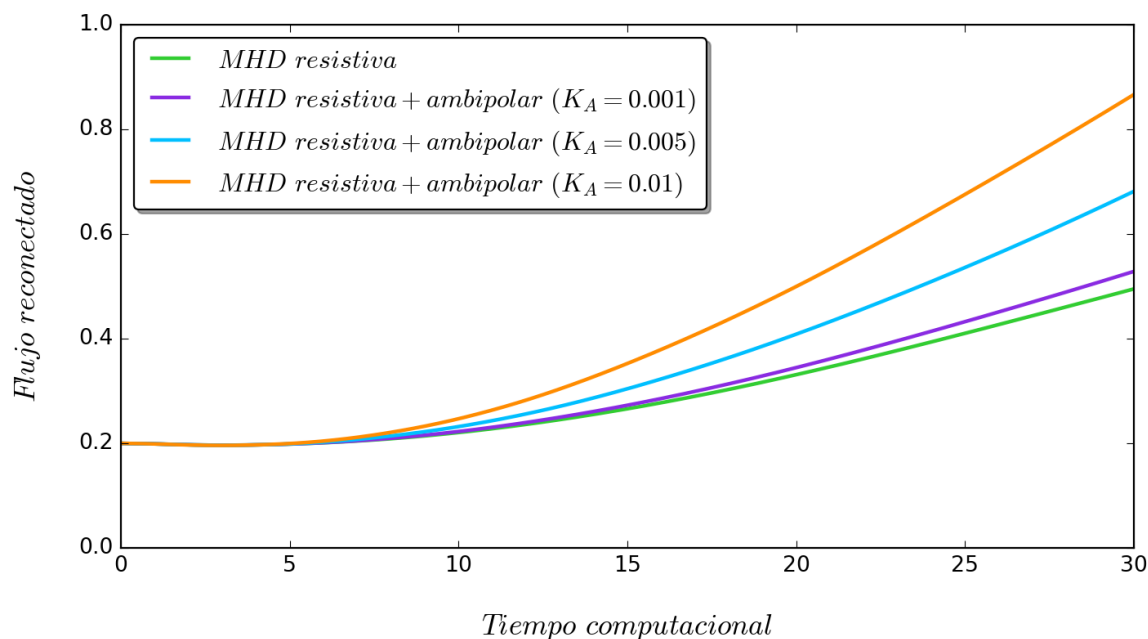


Figura 6. Comparación del flujo reconectado entre las simulaciones MHD resistiva y MHD resistiva+ambipolar con diferentes valores del parámetro K_A .

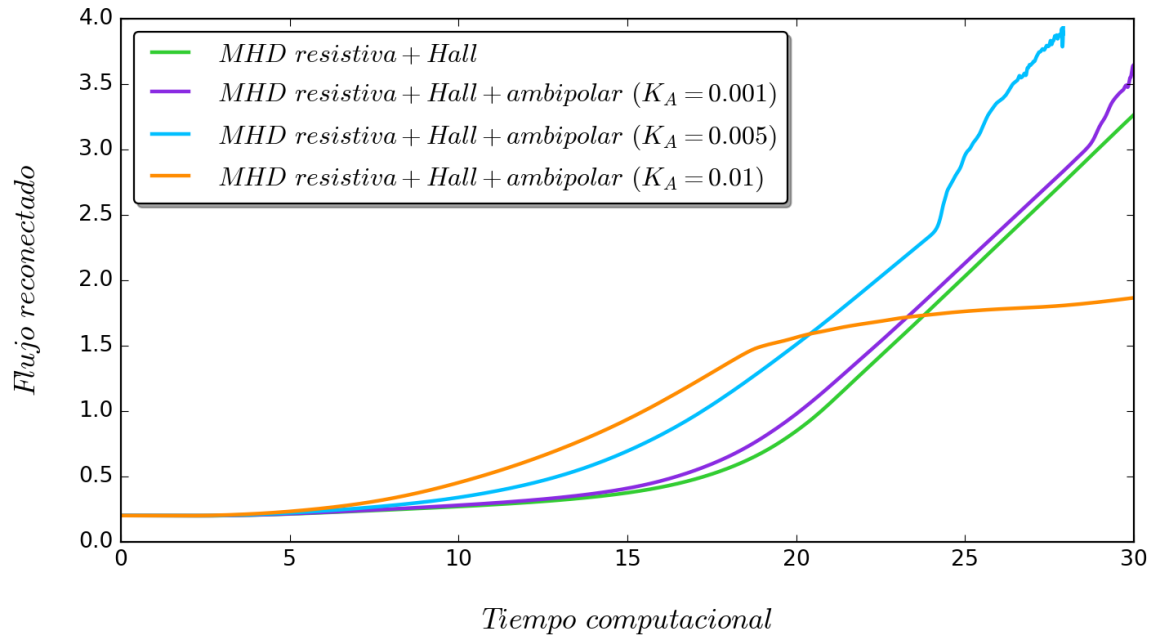


Figura 7. Comparación del flujo reconectado entre las simulaciones MHD resistiva+Hall y MHD resistiva+Hall+ambipolar con diferentes valores del parámetro K_A .

Para entender mejor el comportamiento de las curvas en las simulaciones anteriores, es necesario observar el comportamiento 2D de la hoja de corriente. Con esto se encuentra que, para $K_A = 0.001$ y $K_A = 0.005$, la combinación del efecto Hall y la difusión ambipolar provoca que la hoja de corriente se infle en los extremos hasta ocupar casi todo el dominio, además se presenta una especie de cizallamiento que provoca la ruptura de la hoja (en la Figura 8 se muestra una secuencia de imágenes que evidencia lo anterior). Es importante resaltar que, tanto para $K_A = 0.001$ como $K_A = 0.005$, este fenómeno en la hoja de corriente coincide con el crecimiento anómalo del flujo reconectado y provoca que la simulación se detenga antes de llegar al tiempo final. Finalmente, para el caso de $K_A = 0.01$, el flujo reconectado que se mantiene aproximadamente estacionario

coincide con la aparición de un plasmóide que se empieza a formar en $t = 18$, como se muestra en la Figura 9.

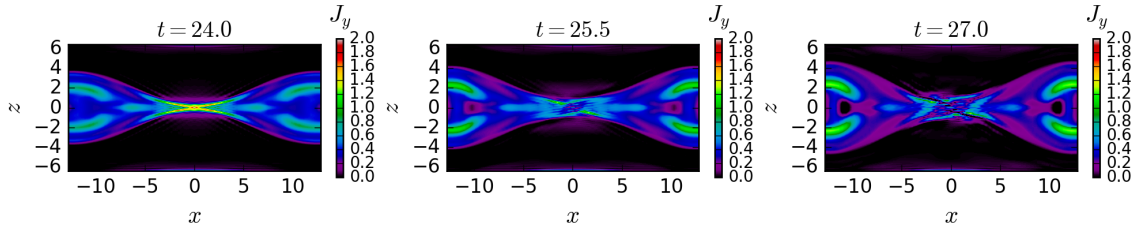


Figura 8. Hoja de corriente para la simulación MHD resistiva+Hall+ambipolar con $K_A = 0.005$. La secuencia de imágenes muestra tres tiempos diferentes a partir del momento en el que el flujo reconectado empieza a presentar un crecimiento anómalo.

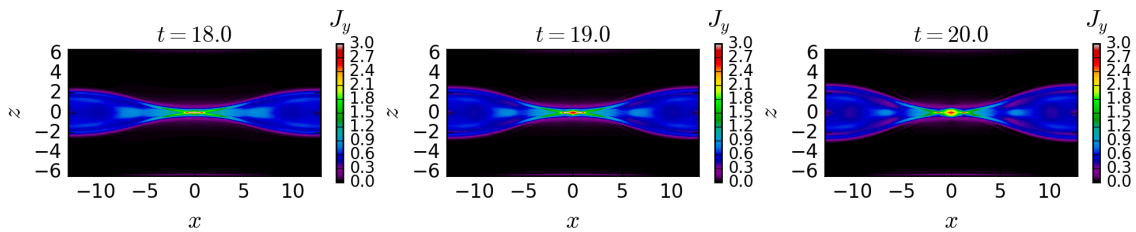


Figura 9. Hoja de corriente para la simulación MHD resistiva+Hall+ambipolar con $K_A = 0.01$. En la secuencia de imágenes se observa la aparición del plasmóide en el centro del dominio.

Ahora bien, con el fin de ilustrar las diferencias más notables entre los diferentes tipos de simulaciones, en la Figura 10 se muestra la densidad de corriente en un tiempo de aproximadamente $t = 20.5$ para los cuatro tipos de simulaciones usando $K_H = 1.0$ para el término de Hall y $K_A = 0.01$ para el término ambipolar.

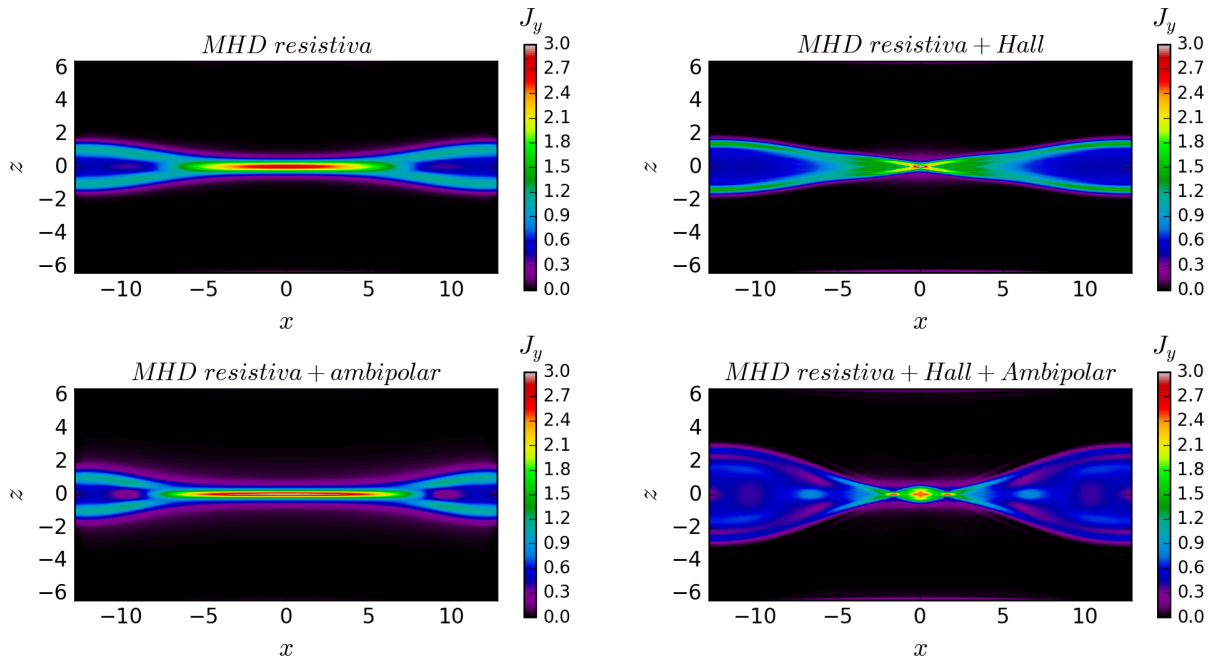


Figura 10. Densidad de corriente en un tiempo computacional $t = 20.5$ para las simulaciones MHD resistiva, MHD resistiva+Hall, MHD resistiva+ambipolar y MHD resistiva+Hall+ambipolar (con $K_H = 1.0$ y $K_A = 0.01$).

Para el caso de la MHD resistiva se observa una hoja de corriente alargada casi del orden de la escala de longitud externa global. Al incluir el término ambipolar, se presenta un adelgazamiento de la hoja, en comparación con el caso únicamente resistivo, resultado que concuerda con las simulaciones de (Ni et al., 2015), en donde la presencia de difusión ambipolar también causa un rápido adelgazamiento de la hoja en la cromosfera solar.

Para la simulación MHD resistiva+Hall, la densidad de corriente se concentra en una región en forma de x ubicada en el centro del dominio, resultado que concuerda con los presentados por Strumik and Stasiewicz (2017). Sin embargo, difiere de los de Tóth et al. (2008), cuya simulación con efecto Hall presentan un comportamiento asimétrico, tiene dos regiones de reconexión y un

plasmoide, resultado que no se obtiene con MAGNUS para ningún tiempo de la simulación. Finalmente, la combinación del efecto Hall con la difusión ambipolar, sí produce la formación de un plasmoide en el centro del dominio.

Es preciso resaltar que durante todas las pruebas numéricas realizadas con los parámetros especificados al inicio del capítulo, la formación de un plasmoide solo se obtiene con la combinación del efecto Hall y la difusión ambipolar. Si la resolución espacial se aumenta, este resultado también se presenta en el caso resistivo y el resistivo+Hall. Sin embargo, requiere de un mayor tiempo computacional y también de ejecución del código, ya que el aumento de la resolución disminuye significativamente el paso de tiempo. Esto sugiere que la combinación de ambos efectos tiene como consecuencia la formación temprana de plasmoides sin la exigencia de una alta resolución espacial.

4.3. Reconexión en la magnetocola terrestre

La interacción del campo geomagnético con el viento solar da lugar a la aparición de una capa de corriente eléctrica, conocida como magnetopausa. La región entre la Tierra y dicha capa recibe el nombre de magnetosfera (ver Figura 11), donde el campo magnético terrestre es dominante. Debido a la llegada continua de viento solar, el tamaño y la forma de la magnetosfera cambian, pero en general siempre resulta siendo una cavidad donde las líneas de campo terrestre que dan al Sol se comprimen mientras que las del otro lado se estiran, formando la magnetocola que se puede extender cientos de radios terrestres (Birn and Priest, 2007).

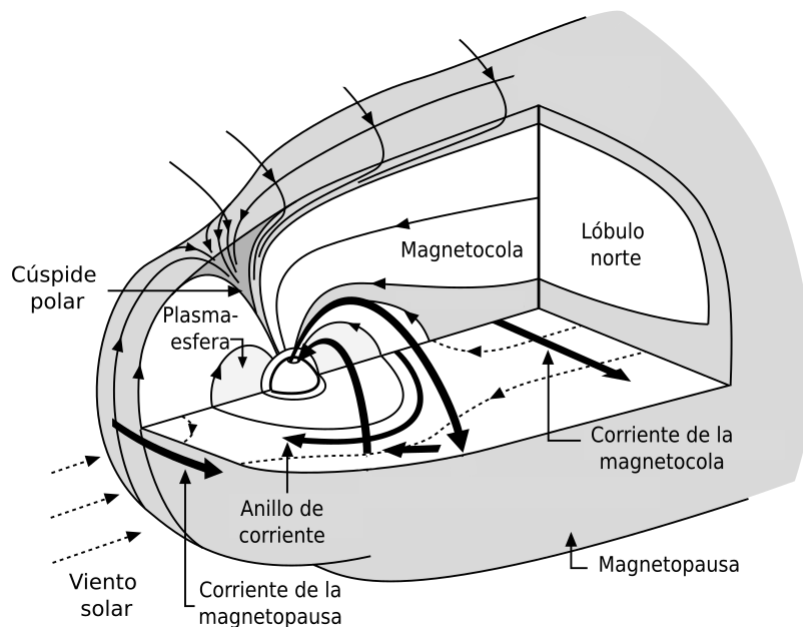


Figura 11. Ilustración de una sección de la magnetosfera terrestre. Imagen tomada y adaptada de Moldwin (2008).

La magnetocola consta principalmente de tres regiones: dos lóbulos magnéticos y una lámina de plasma que se ubica entre ellos (Moldwin, 2008). Los lóbulos contienen líneas de campo

abierto¹¹ que tienen sentido contrario: en el caso del lóbulo norte las líneas de campo apuntan hacia la Tierra, mientras que las líneas de campo magnético del lóbulo sur apuntan en dirección opuesta. Son estos campos magnéticos de sentido opuesto los que dan lugar a la aparición de una hoja de corriente denominada lámina de plasma neutral (Bothmer and Daglis, 2007; Moldwin, 2008).

El proceso de reconexión en la magnetosfera terrestre fue descrito por Jim Dungey, quien estaba interesado en estudiar la aceleración de partículas en dicha región (Dungey, 1961). De acuerdo a su modelo, en el lado diurno de la Tierra el proceso de reconexión con el campo magnético interplanetario (IMF) hace que en la magnetopausa las líneas de campo magnético terrestre se dividan en dos líneas de campo abiertas (con un extremo conectado al hemisferio norte o sur de la Tierra, y el otro al IMF como se muestra en la Figura 12). Estas líneas son arrastradas por el flujo del viento solar hacia el lado nocturno de la Tierra, donde forman la magnetocola. Allí, el proceso de reconexión hace que las líneas se vuelvan a reconectar para formar una línea de campo magnético cerrada que eventualmente circula hacia el lado diurno de la Tierra para completar y reiniciar este ciclo (Kivelson et al., 1995; Moldwin, 2008).

¹¹ El fenómeno de reconexión entre el campo magnético interplanetario transportado por el viento solar y el campo magnético de la Tierra es el responsable de generar las líneas de campo con un extremo unido a la Tierra y otro extremo extendiéndose hacia el espacio interplanetario. Es por ello que comúnmente reciben el nombre de líneas de campo abierto, sin embargo, las líneas que se extienden por el espacio interplanetario finalmente están unidas al Sol.

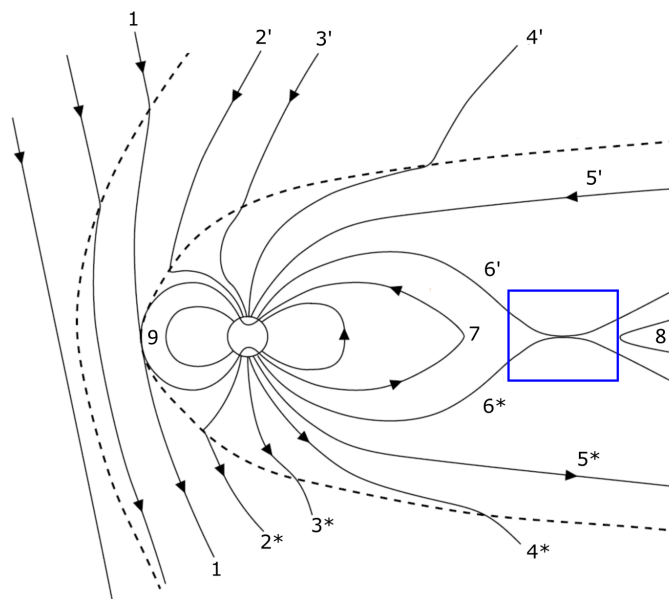


Figura 12. Esquema del proceso de reconexión magnética durante el ciclo de Dungey. La reconexión magnética ocurre inicialmente entre la línea 1 del IMF y la línea 9 del campo magnético terrestre. Como resultado, se obtienen dos líneas de campo abiertas, 2' y 2*. El flujo del viento solar implica que lo mismo sucede con las líneas 3', 3*, 4', 4*, 5', 5*, 6' y 6*. Durante el proceso de reconexión las líneas abiertas 6' y 6*, que son casi antiparalelas, se reconectan para formar una línea de campo geomagnético cerrada y una línea de campo interplanetaria, las líneas 7 y 8 respectivamente. Cuando ocurre la reconexión, el plasma es expulsado de la hoja de corriente hacia las regiones donde están las líneas 7 y 8, fuera de la región delimitada por el cuadro azul. Imagen tomada y adaptada de Moldwin (2008).

Es de suma importancia resaltar que, de acuerdo al ciclo de Dungey, la reconexión magnética de la magnetocola equilibra por completo la reconexión en la magnetopausa. Sin embargo, esto es inconsistente con el comportamiento real de la magnetosfera, ya que cada proceso de reconexión ocurre en un entorno diferente (Priest and Forbes, 2000; Birn and Priest, 2007). Por ejemplo, en la magnetocola es común que se presente la formación de plasmoides (Birn and Priest, 2007; Honkonen et al., 2011), como se ilustra en la Figura 13.

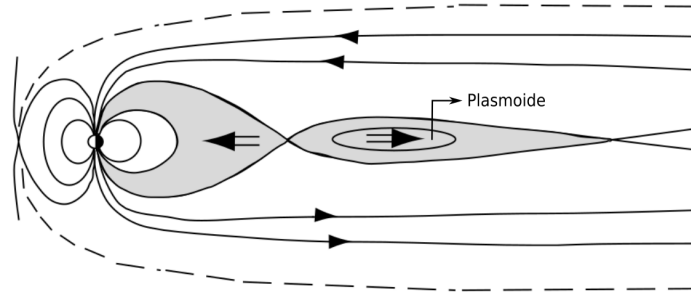


Figura 13. Formación de un plasmóide tras la reconexión de líneas de campo en la magnetocola terrestre. Imagen tomada y adaptada de Birn and Priest (2007).

4.3.1. Dato inicial. Teniendo en cuenta el proceso de reconexión descrito anteriormente, el dato inicial se selecciona con el fin de simular una región de reconexión como la delimitada por el cuadro azul de la Figura 12. Además, se busca simular el proceso desde la formación de la hoja de corriente. Es por ello que, a diferencia del GEM, se utilizan valores de densidad y presión constante y no se aplican perturbaciones al campo magnético. Con esto se garantiza que a tiempo inicial la hoja de corriente no esté formada y que el flujo reconectado sea inicialmente cero. Para desencadenar la reconexión se hace uso de una resistividad localizada en el centro del dominio, la cual establece un único sitio de reconexión como el que se muestra en el cuadro azul de la Figura 12.

El sistema parte del reposo con componentes del campo magnético (Shibata et al., 2022)

$$B_x = B \tanh(y/w), \quad (62)$$

$$B_y = 0, \quad (63)$$

$$B_z = B / \cosh(y/w), \quad (64)$$

donde $B = 3.92$ y $w = 0.5$. La densidad y la presión inicial del sistema son constantes y están dadas por $\rho = 1.0$ y $p = 1.0$. La resistividad es localizada y está dada por la función

$$\eta = \eta_0 \cdot \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{y^2 + (x - h_\eta)^2}}{w_\eta} \right)^2 \right], \quad (65)$$

con $\eta_0 = 0.01$, $h_\eta = 15.0$ y $w_\eta = 1.0$. Finalmente, para el coeficiente Hall y ambipolar se tiene que $K_H = 0.2$ y $K_A = 0.01$.

El dominio computacional es $[0, L_x] \times [-L_y/2, L_y/2] \times [-L_z/2, L_z/2]$ siendo $L_x = 30.0$, $L_y = 15.0$ y $L_z = 0.15$. Este volumen se discretiza con una malla numérica con $N_x = 800$, $N_y = 400$ y $N_z = 4$. Las condiciones de frontera son periódicas en dirección x , entrantes en y y salientes en z . En este caso se utiliza el reconstructor de variables Minmod y nuevamente un Runge-Kutta de segundo orden para la integración en el tiempo, con un parámetro $C_{CFL} = 0.2$ para determinar el paso de tiempo. Además, se emplean los siguientes valores característicos de la magnetocola: $l_a = 6371.0 \times 10^3$ [m], lo cual equivale a un radio terrestre, $\rho_a = 8.0 \times 10^{-22}$ [kg/m³], $v_a = 3.0 \times 10^5$ [m/s] y $j_a = 10.0$ [nA/m²].

Finalmente, con las especificaciones anteriores nuevamente se realizan cuatro tipos de simulaciones: MHD resistiva, MHD resistiva+Hall, MHD resistiva+ambipolar y MHD resistiva+Hall+ambipolar. Es importante resaltar que para hacer las simulaciones sistemáticas lo único que varía en cada tipo de simulación es la presencia y/o ausencia del efecto Hall y la difusión ambipolar, la cual se controla con los parámetros K_H y K_A . El dato inicial, las condiciones de frontera, el dominio computacional, la resolución espacial, el parámetro C_{CFL} y los métodos numéricos son

exactamente iguales en todos los tipos de simulación.

4.3.2. Morfología de la hoja de corriente. Primero se estudian los efectos de los términos Hall y ambipolar en la hoja de corriente, en la Figura 14, 15, 16 y 17 se presentan mapas de temperatura¹², densidad de corriente y componentes de la velocidad. Para cada una de estas variables se muestran dos paneles, a izquierda en el tiempo $t = 8t_a$ y a derecha $t = 12t_a$. Además, cada panel contiene cuatro mapas correspondientes con los cuatro tipos de simulaciones.

En la Figura 14 para la distribución de temperatura se observa que el centro es la región más caliente del dominio, en particular en los casos resistivo y resistivo+ambipolar, en los cuales esta zona alcanza la temperatura más alta de aproximadamente $8.0 [keV]$ en el tiempo $t = 12t_a$. Para las simulaciones resistiva+Hall y resistiva+Hall+ambipolar la región central no es tan caliente, pero sí se presenta un mayor calentamiento en los extremos del dominio, en particular en presencia del término ambipolar, donde la temperatura está alrededor de los $4.8 [keV]$ en el tiempo $t = 12t_a$. En general, las temperaturas obtenidas en todos los casos coinciden con las mediciones de la misión espacial MMS¹³ (*Magnetospheric Multiscale*), según las cuales la temperatura de los iones varía entre los $3.0 - 6.0 [keV]$ (Lu et al., 2020).

Además de lo anterior, los mapas de temperatura revelan que en presencia del término de

¹² La temperatura no es una magnitud que evoluciona en MAGNUS, pero se puede calcular con los datos de densidad y presión como $T = m_i p / k_B \rho$, expresión que se deriva de la ley de gases ideales. m_i es la masa del ión, en este caso un protón, y k_B la constante de Boltzmann.

¹³ La MMS es una misión de la NASA compuesta por cuatro naves espaciales que vuelan en formación piramidal con el objetivo de estudiar la reconexión magnética en el lado diurno y nocturno de la magnetosfera terrestre. Para más información dirigirse a: <https://mms.gsfc.nasa.gov/index.html>

Hall desaparece la simetría del sistema. En ambos paneles de la Figura 14 se muestra un leve cizallamiento de la hoja de corriente que solo se presenta en los casos resistivo+Hall y resistivo+Hall+ambipolar. En el capítulo anterior se mencionó que este fenómeno también se presenta en las pruebas numéricas con el dato inicial del GEM, pero únicamente para el caso resistivo+Hall+ambipolar con ciertos valores del parámetro K_A . Como ahora se presenta en el caso resistivo+Hall+ambipolar, pero también en el caso resistivo+Hall, el cizallamiento podría deberse al valor de K_H escogido para las simulaciones. Para futuras investigaciones es necesario hacer un estudio más profundo de los coeficientes K_H y K_A , así como de sus implicaciones en el sistema físico y en la ejecución de las simulaciones.

En la Figura 15 se presentan mapas de color para la densidad de corriente j_z , los cuales verifican que en los casos resistivo y resistivo+ambipolar se presentan hojas de corriente alargadas que, en concordancia con lo observado en las simulaciones de difusión ambipolar en el GEM, presentan mayor alargamiento cuando se incluye este efecto. En presencia del efecto Hall los cuadros inferiores del panel izquierdo de la Figura 15 muestran que la densidad de corriente se concentra en una región en forma de x ubicada en el centro del dominio, nuevamente en concordancia con lo observado en las simulaciones del GEM. Luego, con la evolución del sistema estas regiones se estiran, pero no producen hojas de corriente tan alargadas como en los otros casos. A excepción del caso resistivo, los demás casos del panel derecho de la Figura 15 muestran que la densidad de corriente exhibe un comportamiento extraño en los extremos del dominio, que probablemente se debe a la forma en la que MAGNUS calcula las derivadas del campo magnético para computar la corriente en los términos de Hall y ambipolar. Para ello se pueden implementar algoritmos más

robustos en el cálculo de las componentes de la densidad de corriente, en los cuales la corriente se calcule directamente en las interceldas y no en los puntos del dominio.

Con respecto a las velocidades del plasma, la Figura 16 muestra la componente u_x , donde se ve claramente la presencia de dos flujos con sentido opuesto que salen de la zona central hacia los extremos del dominio, mostrando que el plasma es acelerado hacia afuera de la hoja de corriente. Este efecto es una de las principales consecuencias de la reconexión y es utilizado no solo como indicador del proceso, sino también para la identificación del sitio de reconexión en la magnetocola (Birn and Priest, 2007). Es por ello que este tipo de diagramas en la velocidad es característico de la reconexión magnética. Además, es consistente con los diagramas de las simulaciones PIC de Nakamura et al. (2018), realizadas para modelar un evento de reconexión detectado por MMS. El panel derecho de la Figura 16 muestra que la velocidad de los flujos es mayor en presencia de la difusión ambipolar y el efecto Hall, donde se pueden ver regiones que alcanzan los 1000 [km/s]. En general, los valores de velocidad están en el rango de mediciones de la MMS en la magnetocola, donde el plasma alcanza velocidades entre los 500 – 1000 [km/s] (Lu et al., 2020).

Ahora bien, para la componente u_y de la velocidad, la Figura 17 muestra que el plasma se desplaza hacia la hoja de corriente, presentando velocidades positivas en la región inferior del dominio y velocidades negativas en la región superior. Hacia los extremos del dominio, donde se abre la hoja de corriente, esta distribución de las velocidades cambia: se presentan velocidades negativas en la región inferior y positivas en la superior. Esto indica que si bien en el centro del dominio el plasma ingresa a la región de difusión, también es expulsado hacia afuera de ella en concordancia con el esquema que se tiene de la reconexión magnética.

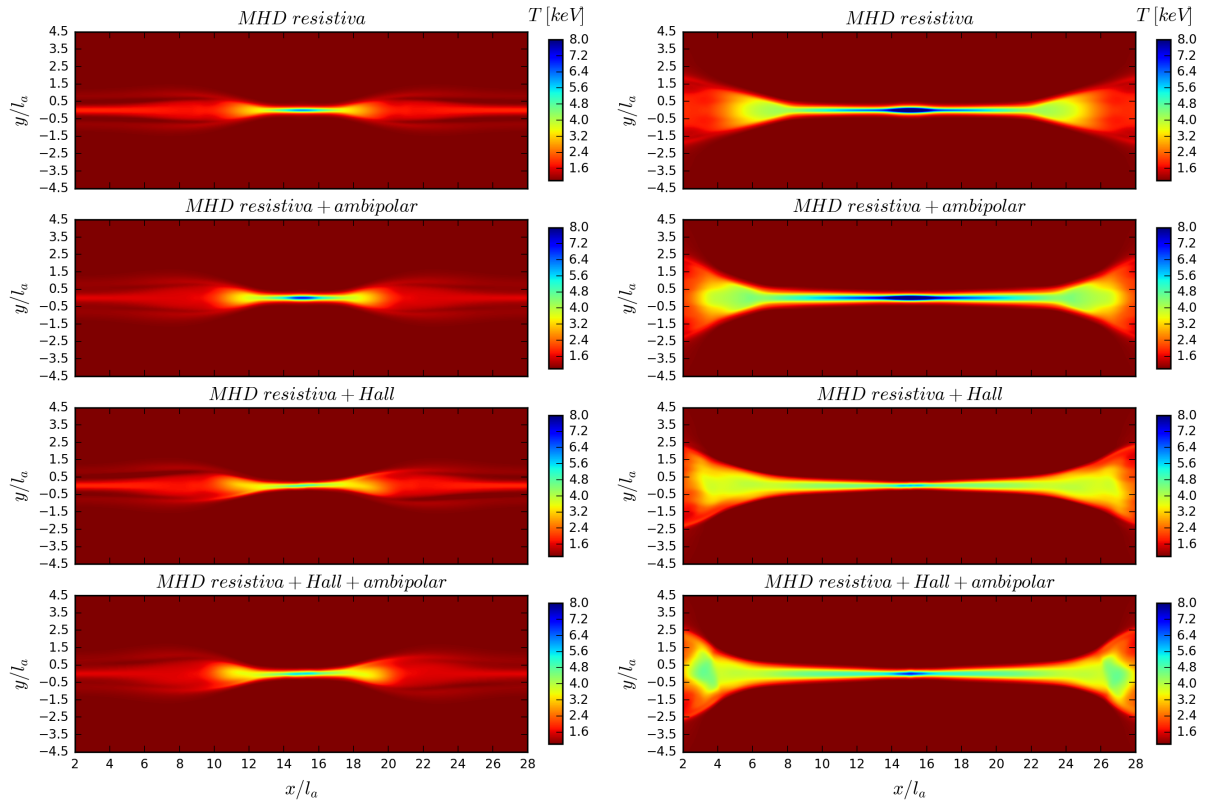


Figura 14. Comparación de los mapas de temperatura en $t = 8t_a$ (panel izquierdo) y $t = 12t_a$ (panel derecho).

Por último, la Figura 17 también revela que durante la evolución del sistema, las regiones del plasma con mayores velocidades tienden a localizarse en los extremos de la hoja de corriente. Allí, la distribución de colores indica que hay cambios abruptos de la velocidad, tanto en magnitud como en dirección. Este tipo de comportamiento puede desencadenar turbulencia y ser otro de los mecanismos que contribuya a la aceleración del plasma, no solo en la magnetocola sino también en otras regiones como la magnetopausa (Price et al., 2016).

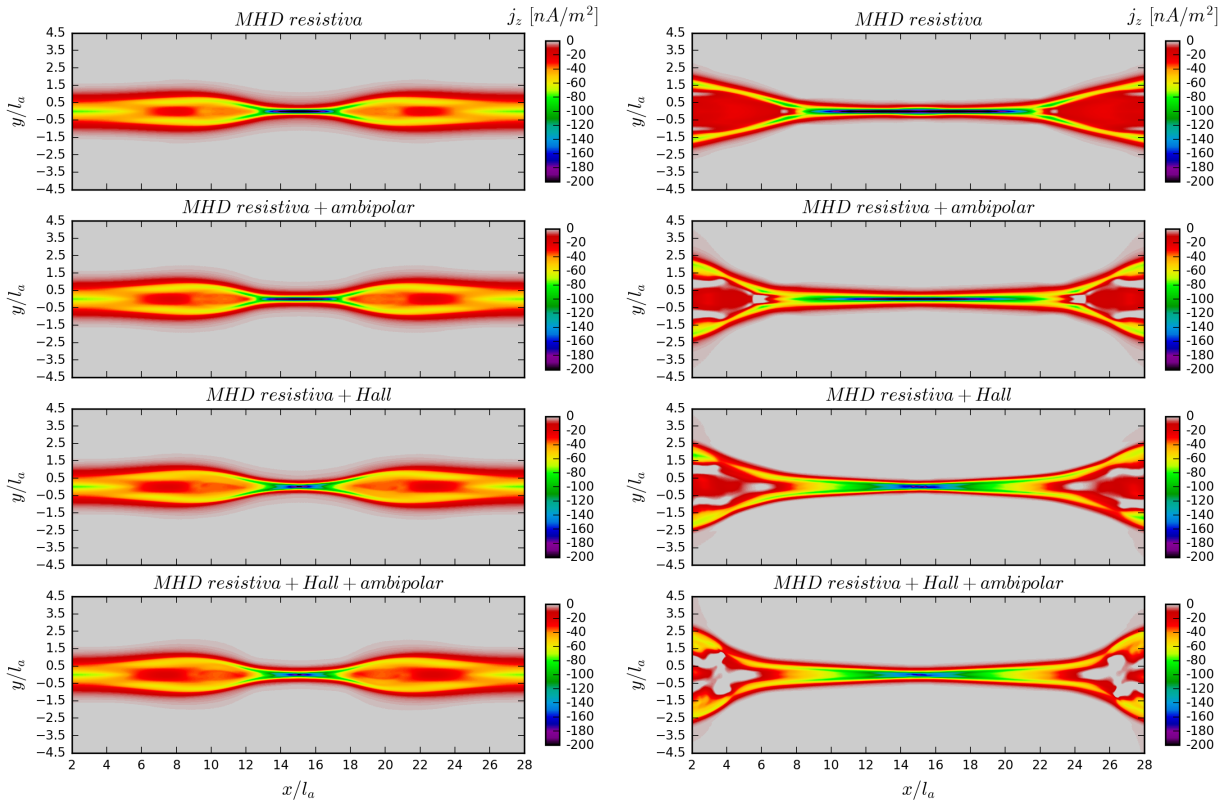


Figura 15. Comparación de los mapas de densidad de corriente j_z en $t = 8t_a$ (panel izquierdo) y $t = 12t_a$ (panel derecho).

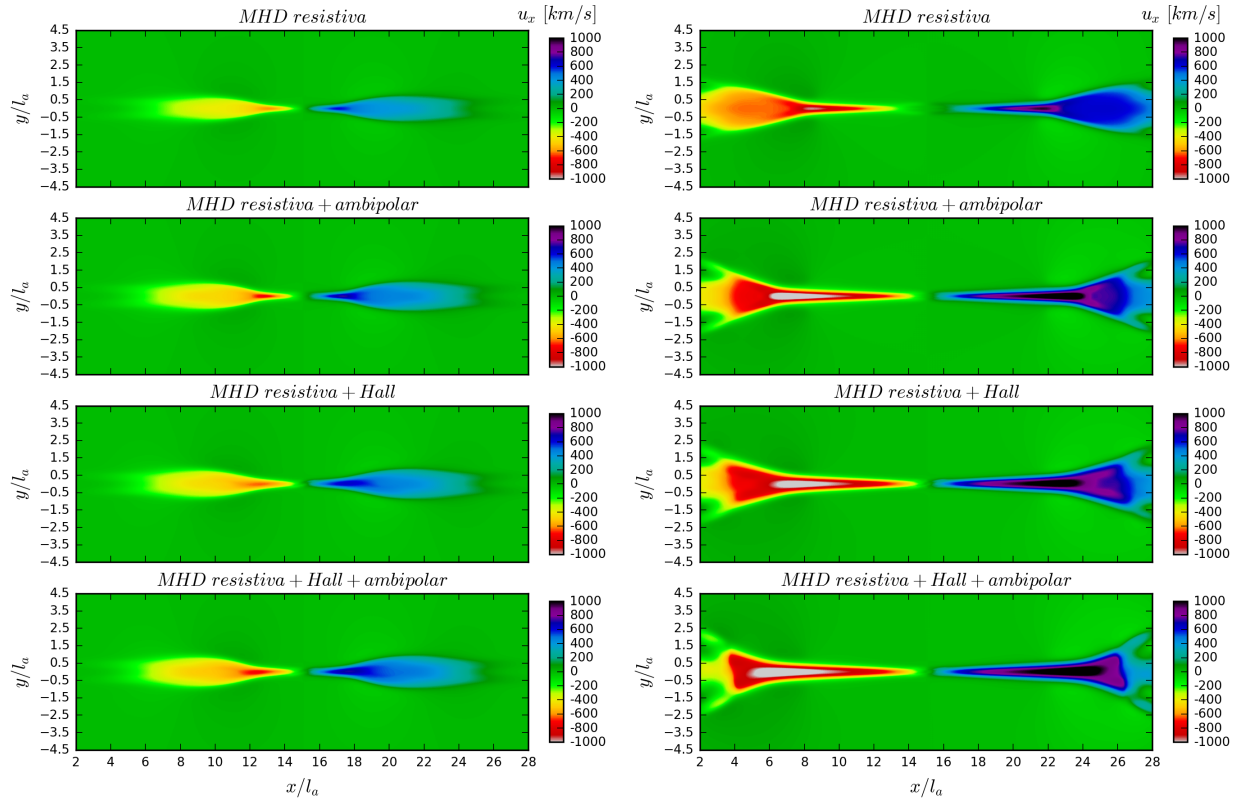


Figura 16. Comparación de los mapas de velocidad u_x en $t = 8t_a$ (panel izquierdo) y $t = 12t_a$ (panel derecho).

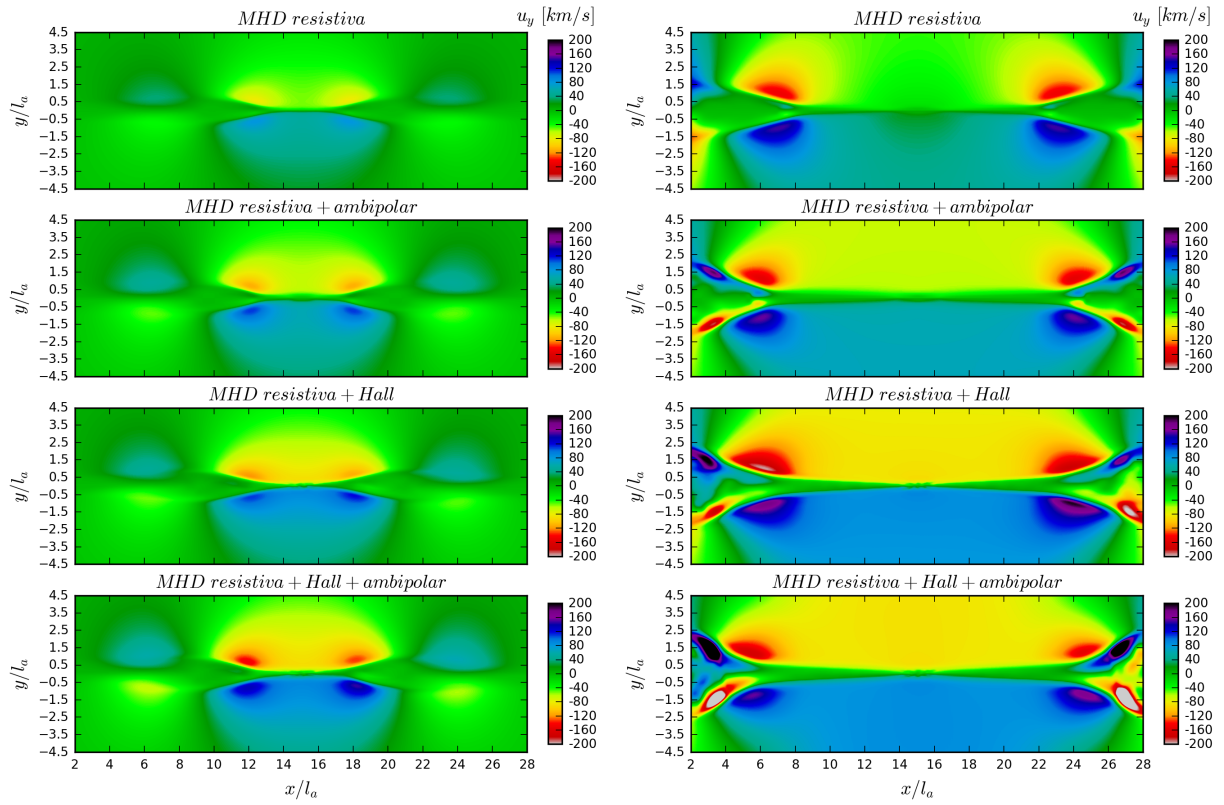


Figura 17. Comparación de los mapas de velocidad u_y en $t = 8t_a$ (panel izquierdo) y $t = 12t_a$ (panel derecho).

4.3.3. Tasa de reconexión. Para estas simulaciones se calcula la tasa de reconexión adimensional definida como v/v_A , siendo v la velocidad de entrada del plasma en la región de difusión y v_A la velocidad de Alfvén, también en la entrada (Priest and Forbes, 2000). Si bien es imposible determinar el volumen y la ubicación exacta de la región de difusión, la resistividad localizada ubicada en el centro del dominio implica que se tiene un único sitio de reconexión también localizado en el centro. Con base en esto, la entrada de la región de difusión se puede considerar como el punto del dominio con coordenadas $(N_x/2, N_{yi}, N_z/2)$, siendo N_{yi} un punto cercano a la línea $y = 0$ ($N_y/2$), pero no sobre ella porque allí el campo magnético es nulo. De esta manera, para todas las simulaciones la tasa de reconexión se calcula como

$$\text{Tasa de reconexión} = \frac{v(N_x/2, N_{yi}, N_z/2)}{v_A(N_x/2, N_{yi}, N_z/2)}, \quad (66)$$

con el punto N_{yi} definido en MAGNUS como¹⁴

$$N_{yi} = \text{int} \left(\frac{y - y_{min}}{dy} \right), \quad (67)$$

donde $y = 0.5$ y $y_{min} = -L_y/2$ de acuerdo al dominio computacional establecido para las simulaciones. Cabe aclarar que las velocidades se computan usando solo las componentes del plano xy ,

¹⁴ $\text{int}()$ es una función de Fortran. Su entrada es el real que ingresa entre paréntesis y su salida es el entero más grande cuya magnitud no exceda la magnitud de la entrada.

es decir, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ y $v_A = B/\sqrt{\rho}$ con $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$.

La gráfica para la tasa de reconexión en función del tiempo para los cuatro tipos de simulaciones se presenta en la Figura 18. Los resultados muestran que bajo la ejecución de un grupo de simulaciones sistemático, el caso resistivo+Hall+ambipolar alcanza una tasa de reconexión de 0.1, seguido del caso resistivo+Hall que alcanza un valor muy cercano. Esto pone en evidencia que las simulaciones con efecto Hall presentan tasas de reconexión similares y que el término de Hall es, en efecto, un fenómeno importante para obtener tasas de reconexión de 0.1. Más allá de eso, los resultados también muestran que el término ambipolar podría jugar un papel importante, ya que si bien el efecto Hall predomina al subir las tasas de reconexión en comparación con el caso únicamente resistivo, es la combinación de efecto Hall y difusión ambipolar la que permite alcanzar un valor de 0.1, comparable con lo que se ha observado en la magnetocola, donde las observaciones de la MMS muestran valores entre 0.15 – 0.2 (Nakamura et al., 2018). Asimismo, otras observaciones realizadas por la MMS en la magnetopausa corresponden a valores de aproximadamente 0.1 (Chen et al., 2017).

Cabe destacar que en todas las simulaciones la tasa de reconexión alcanza su máximo alrededor del tiempo $t = 7t_a$, a excepción de la MHD resistiva+Hall donde la curva deja de aumentar tan rápidamente en este tiempo y alcanza su máximo en aproximadamente $t = 11t_a$. Después de alcanzar su máximo, el valor en las simulaciones con difusión ambipolar tiende a disminuir levemente y luego se estabiliza adquiriendo un comportamiento cuasi-estacionario. Este comportamiento es similar al observado en el flujo reconectado en las simulaciones realizadas para estudiar la difusión ambipolar en el GEM (ver Figura 7). Además, el término ambipolar también parece influir en

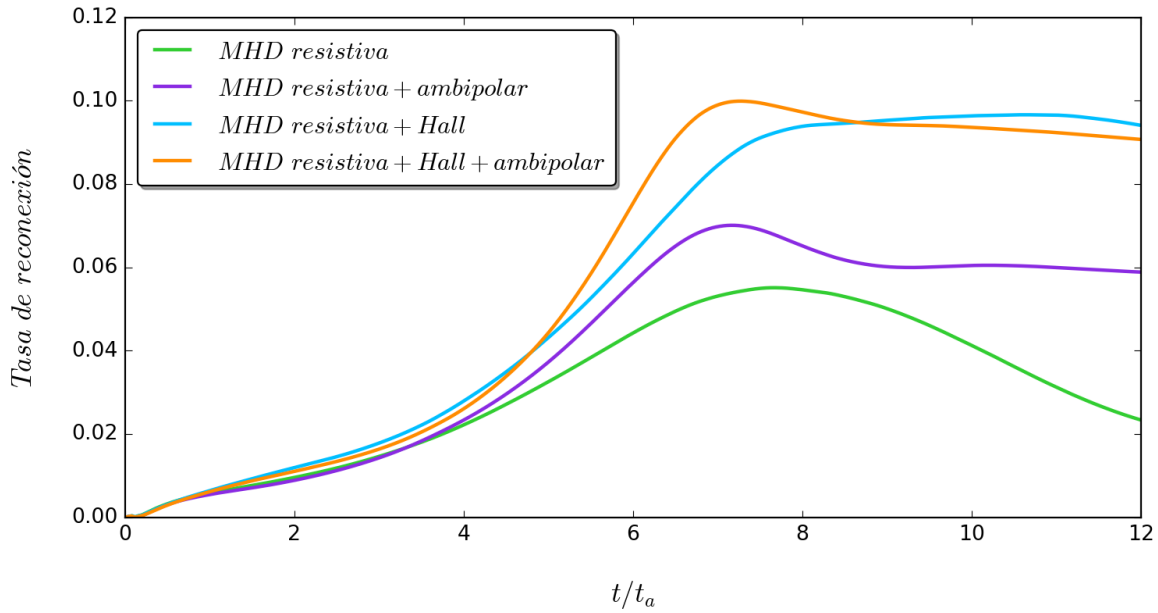


Figura 18. Tasas de reconexión adimensionales para los cuatro tipos de simulaciones: MHD resistiva, MHD resistiva+ambipolar, MHD resistiva+Hall y MHD resistiva+Hall+ambipolar (con $K_H = 0.2$ y $K_A = 0.01$).

que la tasa de reconexión aumente más rápido, es por ello que en las simulaciones con difusión ambipolar el máximo en la tasa aparece antes, un efecto que también ha sido reportado por otros autores (ver caso C del modelo I y el caso F del modelo II en la figura 5 de Ni et al. (2015), donde los casos que incluyen difusión ambipolar alcanzan su valor máximo antes, en comparación con los casos que no tienen difusión ambipolar).

4.3.4. Distribución de energía. Más allá del problema de la tasa de reconexión magnética, la comunidad científica también estudia cómo se distribuye la energía durante el proceso de reconexión (Hesse and Cassak, 2020), por lo que surgen preguntas como ¿qué parte de la energía magnética se convierte en energía cinética? Para responder a lo anterior, en la Figura 19 y la Figura 20 se presenta la evolución de la energía magnética y la energía cinética medidas por

un detector del dominio. De forma similar a la tasa de reconexión, este detector corresponde a un punto con coordenadas $(N_{xi}, N_y/2, N_z/2)$, donde

$$N_{xi} = \text{int} \left(\frac{x - x_{min}}{dx} \right), \quad (68)$$

con $x_{min} = 0.0$ y $x = 10.0$.

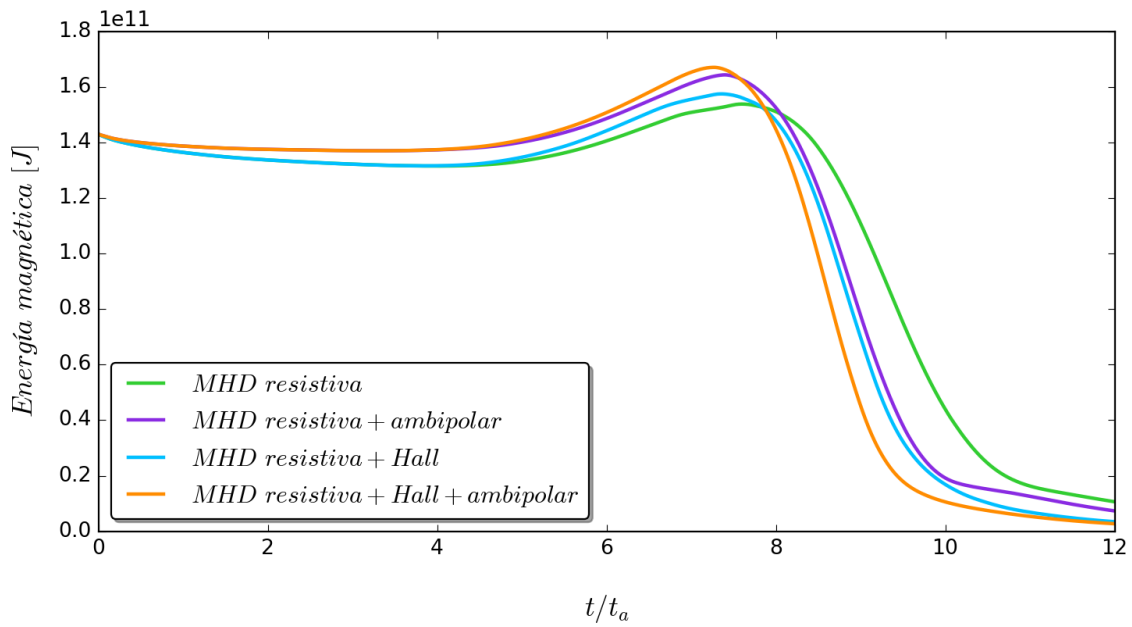


Figura 19. Evolución de la energía magnética medida en el punto del dominio ubicado en la intersección de las líneas $y = 0$ y $x = 10l_a$.

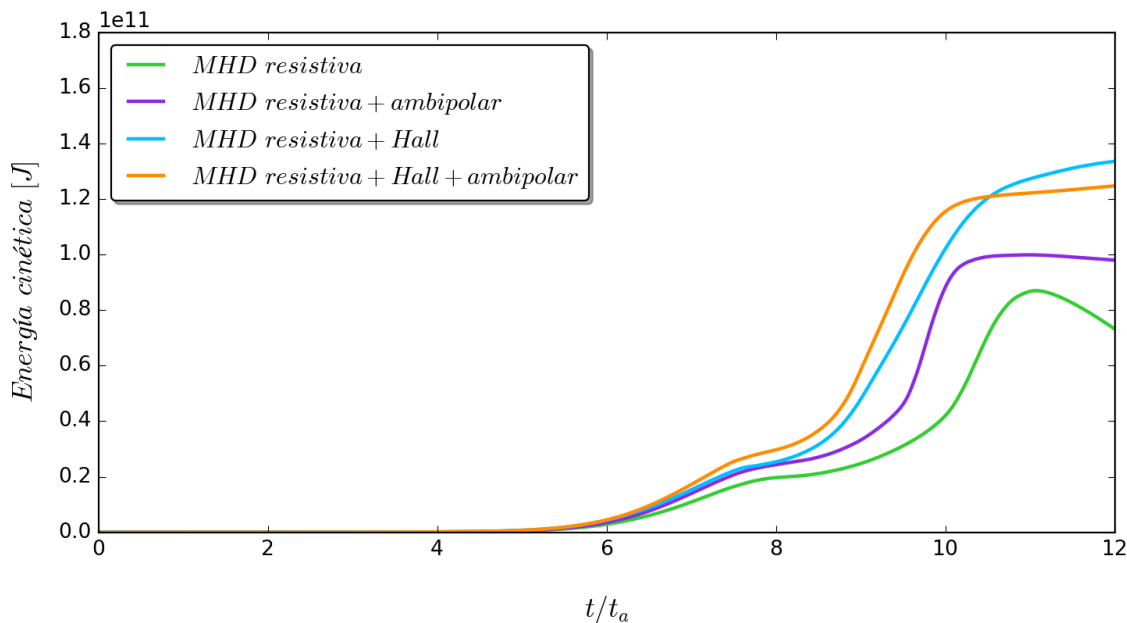


Figura 20. Evolución de la energía cinética medida en el punto del dominio ubicado en la intersección de las líneas $y = 0$ y $x = 10l_a$.

A partir de las figuras se puede ver que la energía cinética empieza en cero para los cuatro tipos de simulaciones, en concordancia con el dato inicial (el sistema parte del reposo para todos los casos). Desde el tiempo inicial hasta $t = 5t_a$ hay una ligera disminución de la energía magnética que no resulta en un aumento perceptible de la energía cinética, porque muy probablemente también hay conversión de energía magnética a interna, o bien, disipación por calentamiento de Joule. A partir del tiempo $t = 5t_a$ aumenta la energía cinética, y coincide con un aumento de la energía magnética que va desde $t = 5t_a$ hasta $t = 7t_a$, tiempo en el cual probablemente hay pérdidas en la energía interna. Finalmente, desde $t = 7t_a$ hasta el final de la simulación, el comportamiento de las curvas es consistente con el proceso de reconexión magnética: la energía cinética aumenta, mientras la energía magnética disminuye. Las simulaciones MHD resistiva+Hall y MHD

resistiva+Hall+ambipolar alcanzan los valores más altos de energía cinética, seguidos por la MHD resistiva+ambipolar y la MHD resistiva. Esto sugiere que el término de Hall no solo tiene efectos en la tasa de reconexión sino también en la aceleración de partículas.

Teniendo en cuenta que la energía magnética empieza con un valor de aproximadamente 1.4×10^{11} [J], y al finalizar la simulación solo los casos resistivo+Hall y resistivo+Hall+ambipolar alcanzan valores cercanos en la energía cinética entre $1.2 - 1.4 \times 10^{11}$ [J], se infiere que el efecto Hall y su combinación con la difusión ambipolar influyen en que haya una conversión más eficiente de energía magnética a cinética. En los casos resistivo y resistivo+ambipolar, la falta de energía cinética al finalizar la simulación probablemente se debe a una mayor conversión en energía interna o en calor en comparación con los otros casos de estudio.

5. Conclusiones

Para este trabajo se reprodujo la deducción de las ecuaciones macroscópicas de transporte para un fluido conductor a partir de la ecuación general de transporte. Luego, con la consideración de una ley de Ohm generalizada, que contiene los términos de la ley resistiva más términos asociados al efecto Hall y la difusión ambipolar, las ecuaciones se modificaron y se escribieron en forma conservativa.

Para solucionar el sistema de ecuaciones se empleó MAGNUS. Puesto que el código resolvía las ecuaciones de la MHD resistiva, fue necesario construir subrutinas que permitieran calcular todos los términos relacionados con el efecto Hall y la difusión ambipolar en los flujos numéricos, para así solucionar el nuevo sistema de ecuaciones. La inclusión de estos efectos en MAGNUS también requirió de modificaciones en la subrutina que calcula el paso de tiempo. En torno a este tema se presenta un problema: la presencia del término de Hall en el código produce una disminución significativa del paso de tiempo, de forma que el tiempo de ejecución de las simulaciones es excesivo, en especial cuando se requiere una alta resolución espacial.

Una vez implementadas y modificadas las subrutinas necesarias en MAGNUS, se implementó el dato inicial y las condiciones de frontera propuestas por el proyecto *GEM magnetic reconnection challenge*, diseñado para estudiar el efecto Hall en la reconexión magnética y empleado por otros autores como *benchmark test*. Teniendo en cuenta que se obtuvieron los mismos resultados del *test*, se validó la programación del término de Hall en el código. El término de difusión ambipolar se programó de forma análoga y, si bien no se realizó un *benchmark test* para este

efecto, por primera vez se estudió el impacto de la difusión ambipolar en el problema propuesto por el GEM.

En la prueba numérica del GEM se realizaron cuatro tipos de simulaciones apagando y prendiendo los términos de Hall y difusión ambipolar en el código de forma sistemática, lo que quiere decir que el dato inicial, las condiciones de frontera, el dominio computacional, la resolución espacial y claramente los métodos numéricos fueron los mismos para todas las simulaciones. Los cuatro tipos fueron: resistiva, resistiva+Hall, resistiva+ambipolar y resistiva+Hall+ambipolar. La resistividad se mantuvo constante en todas las simulaciones y solo cambiaron los parámetros de Hall y ambipolar, K_H y K_A , en función del término que se prendía o apagaba en cada simulación. Los resultados de esta prueba mostraron que la inclusión del efecto Hall produce un aumento significativo en el flujo reconectado en comparación con las simulaciones resistiva y resistiva+ambipolar. Asimismo, la inclusión de la difusión ambipolar produce aumentos cuando se compara con el caso resistivo, sin embargo, no superan el caso resistivo+Hall. Finalmente, la combinación de efectos en las simulaciones resistiva+Hall+ambipolar produce un flujo reconectado muy similar al caso resistivo+Hall, a excepción del caso con $K_A = 0.01$, en el cual el flujo reconectado permanece estacionario debido a la formación de un plasmoide.

Con el fin de determinar el impacto del efecto Hall y la difusión ambipolar en la tasa de reconexión de la magnetocola, se implementó en el código un dato inicial con una configuración simple de campo magnético para la formación de la hoja de corriente, sin perturbaciones en las componentes de la velocidad ni el campo, pero con resistividad localizada en el centro del dominio y valores característicos de longitud, densidad y velocidad de la magnetocola terrestre. Luego, se

realizaron los cuatro tipos de simulaciones mencionados anteriormente, lo cual permitió hacer un estudio completamente sistemático de los resultados.

En este grupo de simulaciones, el caso resistivo+Hall+ambipolar es el único que alcanza un máximo de 0.1 en la tasa de reconexión, seguido por el caso resistivo+Hall que alcanza un valor muy cercano. Lo anterior muestra el efecto Hall es el fenómeno predominante a la hora de aumentar las tasas de reconexión y obtener valores cercanos a 0.1. No obstante, es de suma importancia resaltar que el fenómeno de difusión ambipolar también podría ser relevante para el valor de la reconexión, ya que es la combinación de efecto Hall y difusión ambipolar la que permite alcanzar un valor máximo de 0.1 en la tasa de reconexión, siendo este un valor muy cercano a lo observado en la magnetocola por la misión MMS. Es por ello que, para futuras investigaciones, resulta lógico estudiar el efecto del término ambipolar en la tasa de reconexión con la elección de otros parámetros K_A . Asimismo se pueden considerar otros parámetros K_H para el efecto Hall, sin embargo, por ahora su elección está limitada debido al problema del paso de tiempo que presenta MAGNUS con este efecto.

En este trabajo de investigación no solo se estudió el impacto del efecto Hall y la difusión ambipolar en la tasa de reconexión, sino también en la conversión de energía magnética a cinética y en las distribuciones de temperatura, velocidad y densidad de corriente durante la evolución del sistema. Los resultados para la evolución de energía corroboran el hecho de que el proceso de reconexión convierte energía magnética en energía del plasma que acelera las partículas y que esta conversión se da de forma más eficiente en presencia del efecto Hall y de su combinación con la difusión ambipolar. Asimismo, los diagramas de velocidad son consistentes con el esquema de

reconexión, ya que muestran el ingreso de plasma en la región de reconexión y también la aparición de flujos con sentido opuesto que salen de esta región, indicando que el plasma es acelerado hacia afuera de la hoja de corriente, con velocidades dentro del rango medido por la misión MMS en la magnetocola.

Finalmente, como parte del proceso de aprendizaje para la parte computacional de esta tesis, se publicó el artículo *First steps on modelling wave propagation in isotropic-heterogeneous media: numerical simulation of P SV waves* en la revista *European Journal of Physics*, en el cual se desarrolló una adaptación de MAGNUS para simular ondas sísmicas. Actualmente se encuentra en curso la escritura de otro artículo con los resultados de este trabajo, y para futuras investigaciones se desea implementar un modelo más completo de la magnetosfera, que tenga en cuenta una región amplia de la magnetocola y su acople con el campo magnético interplanetario. Lo anterior requiere de métodos computacionales más sofisticados, por lo que en primer lugar es necesario llevar a cabo una paralelización del código MAGNUS con MPI (*Message Passing Interface*) y GPUs (*Graphics Processing Units*).

Referencias Bibliográficas

- Ballester, J. L., Alexeev, I., Collados, M., Downes, T., Pfaff, R. F., Gilbert, H., Khodachenko, M., Khomenko, E., Shaikhislamov, I. F., Soler, R., et al. (2018). Partially ionized plasmas in astrophysics. *Space Science Reviews*, 214(2):1–149.
- Bessho, N. and Bhattacharjee, A. (2005). Collisionless reconnection in an electron-positron plasma. *Physical review letters*, 95(24):245001.
- Bessho, N. and Bhattacharjee, A. (2007). Fast collisionless reconnection in electron-positron plasmas. *Physics of Plasmas*, 14(5):056503.
- Birn, J., Artemyev, A. V., Baker, D., Echim, M., Hoshino, M., and Zelenyi, L. (2012). Particle acceleration in the magnetotail and aurora. *Space science reviews*, 173(14):49–102.
- Birn, J., Drake, J., Shay, M., Rogers, B., Denton, R., Hesse, M., Kuznetsova, M., Ma, Z., Bhattacharjee, A., Otto, A., et al. (2001). Geospace environmental modeling (gem) magnetic reconnection challenge. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3715–3719.
- Birn, J. and Hesse, M. (2001). Geospace environment modeling (gem) magnetic reconnection challenge: Resistive tearing, anisotropic pressure and hall effects. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3737–3750.
- Birn, J. and Priest, E. R. (2007). *Reconnection of magnetic fields: magnetohydrodynamics and collisionless theory and observations*. Cambridge University Press.

- Biskamp, D., Schwarz, E., and Drake, J. F. (1997). Two-fluid theory of collisionless magnetic reconnection. *Physics of Plasmas*, 4(4):1002–1009.
- Bittencourt, J. A. (2013). *Fundamentals of plasma physics*. Springer Science & Business Media.
- Bolduc, L. (2002). Gic observations and studies in the hydro-québec power system. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 64(16):1793–1802.
- Boteler, D. (2006). The super storms of august/september 1859 and their effects on the telegraph system. *Advances in Space Research*, 38(2):159–172.
- Bothmer, V. and Daglis, I. A. (2007). *Space weather: physics and effects*. Springer Science & Business Media.
- Cárdenas, F. M., Sánchez, S. C., and Domínguez, S. V. (2016). The grand aurorae borealis seen in colombia in 1859. *Advances in Space Research*, 57(1):257–267.
- Cassak, P., Liu, Y.-H., and Shay, M. (2017). A review of the 0.1 reconnection rate problem. *Journal of Plasma Physics*, 83(5).
- Chen, L.-J., Hesse, M., Wang, S., Gershman, D., Ergun, R., Burch, J., Bessho, N., Torbert, R., Giles, B., Webster, J., et al. (2017). Electron diffusion region during magnetopause reconnection with an intermediate guide field: Magnetospheric multiscale observations. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 122(5):5235–5246.

- Cid, C., Palacios, J., Saiz, E., Guerrero, A., and Cerrato, Y. (2014). On extreme geomagnetic storms. *Journal of Space Weather and Space Climate*, 4:A28.
- Contel, O. L., Retinò, A., Breuillard, H., Mirioni, L., Robert, P., Chasapis, A., Lavraud, B., Chust, T., Rezeau, L., Wilder, F., et al. (2016). Whistler mode waves and hall fields detected by mms during a dayside magnetopause crossing. *Geophysical Research Letters*, 43(12):5943–5952.
- Darwish, M. and Moukalled, F. (2021). *The finite volume method in computational fluid dynamics: an advanced introduction with OpenFOAM® and Matlab®*. Springer.
- Deng, X. and Matsumoto, H. (2001). Rapid magnetic reconnection in the earth's magnetosphere mediated by whistler waves. *Nature*, 410(6828):557–560.
- Dungey, J. W. (1961). Interplanetary magnetic field and the auroral zones. *Physical Review Letters*, 6(2):47.
- Einfeldt, B. (1988). On godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on numerical analysis*, 25(2):294–318.
- Ethan, T. and Lazarian, A. V. (1999). Reconnection in the interstellar medium. *The Astrophysical Journal*, 511(193):203.
- Falgarone, E., Momferratos, G., and Lesaffre, P. (2015). The intermittency of ism turbulence: What do the observations tell us? In *Magnetic Fields in Diffuse Media*, pages 227–252. Springer.
- Fang, T.-W., Kubaryk, A., Goldstein, D., Li, Z., Fuller-Rowell, T., Millward, G., Singer, H. J.,

- Steenburgh, R., Westerman, S., and Babcock, E. (2022). Space weather environment during the spacex starlink satellite loss in february 2022. *Space Weather*, 20(11):e2022SW003193.
- Harten, A., Lax, P. D., and Leer, B. v. (1983). On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM review*, 25(1):35–61.
- Heitsch, F. and Zweibel, E. G. (2003). Fast reconnection in a two-stage process. *The Astrophysical Journal*, 583(1):229.
- Hesse, M., Birn, J., and Kuznetsova, M. (2001). Collisionless magnetic reconnection: Electron processes and transport modeling. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3721–3735.
- Hesse, M. and Cassak, P. (2020). Magnetic reconnection in the space sciences: Past, present, and future. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 125(2):e2018JA025935.
- Honkonen, I., Palmroth, M., Pulkkinen, T. I., Janhunen, P., and Aikio, A. (2011). On large plasmoid formation in a global magnetohydrodynamic simulation. In *Annales Geophysicae*, volume 29, pages 167–179. Copernicus GmbH.
- Huba, J. D. (2003). Hall magnetohydrodynamics-a tutorial. *Space Plasma Simulation*, pages 166–192.
- Karimabadi, H., Krauss-Varban, D., Huba, J., and Vu, H. (2004). On magnetic reconnection regimes and associated three-dimensional asymmetries: Hybrid, hall-less hybrid, and hall-mhd simulations. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 109(A9).

Khazanov, G. V. (2016). *Space weather fundamentals*. CRC Press.

Khomenko, E. (2020). Multi-fluid extensions of mhd and their implications on waves and instabilities. In *Topics in Magnetohydrodynamic Topology, Reconnection and Stability Theory*, pages 69–116. Springer.

Kivelson, M. G., Kivelson, M. G., and Russell, C. T. (1995). *Introduction to space physics*. Cambridge university press.

Knipp, D. J., Fraser, B. J., Shea, M., and Smart, D. (2018). On the little-known consequences of the 4 august 1972 ultra-fast coronal mass ejecta: Facts, commentary, and call to action. *Space Weather*, 16(11):1635–1643.

Kuznetsova, M. M., Hesse, M., and Winske, D. (2001). Collisionless reconnection supported by nongyrotropic pressure effects in hybrid and particle simulations. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3799–3810.

Landinez, G., Rueda, S., and Lora-Clavijo, F. D. (2021). First steps on modelling wave propagation in isotropic-heterogeneous media: numerical simulation of p–sv waves. *European Journal of Physics*, 42(6):065001.

Lilensten, J. and Belehaki, A. (2009). Developing the scientific basis for monitoring, modelling and predicting space weather. *Acta Geophysica*, 57(1):1.

Lu, S., Wang, R., Lu, Q., Angelopoulos, V., Nakamura, R., Artemyev, A., Pritchett, P., Liu, T.,

- Zhang, X.-J., Baumjohann, W., et al. (2020). Magnetotail reconnection onset caused by electron kinetics with a strong external driver. *Nature communications*, 11(1):1–7.
- Ma, Z. and Bhattacharjee, A. (2001). Hall magnetohydrodynamic reconnection: The geospace environment modeling challenge. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3773–3782.
- Mestel, L. and Spitzer Jr, L. (1956). Star formation in magnetic dust clouds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 116(5):503–514.
- Mironova, I. A., Aplin, K. L., Arnold, F., Bazilevskaya, G. A., Harrison, R. G., Krivolutsky, A. A., Nicoll, K. A., Rozanov, E. V., Turunen, E., and Usoskin, I. G. (2015). Energetic particle influence on the earth's atmosphere. *Space Science Reviews*, 194(1):1–96.
- Moldwin, M. (2008). *An introduction to space weather*. Cambridge University Press Cambridge.
- Morales, P. A. G. (2020). *Modeling of non-ideal magnetohydrodynamic effects in the solar atmosphere*. PhD thesis, Universidad de La Laguna (Islas Canarias, España).
- Mozer, F., Bale, S., McFadden, J., and Torbert, R. (2005). New features of electron diffusion regions observed at subsolar magnetic field reconnection sites. *Geophysical research letters*, 32(24).
- Mozer, F., Bale, S., and Phan, T. (2002). Evidence of diffusion regions at a subsolar magnetopause crossing. *Physical review letters*, 89(1):015002.

- Muñoz, P., Jain, N., Kilian, P., and Büchner, J. (2018). A new hybrid code (chief) implementing the inertial electron fluid equation without approximation. *Computer Physics Communications*, 224:245–264.
- Nagai, T., Shinohara, I., Fujimoto, M., Hoshino, M., Saito, Y., Machida, S., and Mukai, T. (2001). Geotail observations of the hall current system: Evidence of magnetic reconnection in the magnetotail. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A11):25929–25949.
- Nakamura, T. K., Genestreti, K., Liu, Y.-H., Nakamura, R., Teh, W.-L., Hasegawa, H., Daughton, W., Hesse, M., Torbert, R., Burch, J., et al. (2018). Measurement of the magnetic reconnection rate in the earth's magnetotail. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 123(11):9150–9168.
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F., and González, G. A. (2017). Magnus: a new resistive mhd code with heat flow terms. *The Astrophysical Journal*, 844(1):57.
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F., Murawski, K., and Poedts, S. (2021). Thermal conduction effects on formation of chromospheric solar tadpole-like jets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 500(3):3329–3334.
- Navarro, A., Murawski, K., Wójcik, D., and Lora-Clavijo, F. (2019). Numerical simulations of the emerging plasma blob into a solar coronal hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489(2):2769–2774.

- Ni, L., Kliem, B., Lin, J., and Wu, N. (2015). Fast magnetic reconnection in the solar chromosphere mediated by the plasmoid instability. *The Astrophysical Journal*, 799(1):79.
- Nóbrega-Siverio, D., Martinez-Sykora, J., Moreno-Insertis, F., and Carlsson, M. (2020). Ambipolar diffusion in the bifrost code. *Astronomy & Astrophysics*, 638:A79.
- Nwankwo, V. U. and Chakrabarti, S. K. (2018). Effects of space weather on the ionosphere and leo satellitesâ€™ orbital trajectory in equatorial, low and middle latitude. *Advances in Space Research*, 61(7):1880–1889.
- Øieroset, M., Phan, T., Fujimoto, M., Lin, R., and Lepping, R. (2001). In situ detection of collisionless reconnection in the earth’s magnetotail. *Nature*, 412(6845):414–417.
- Otto, A. (2001). Geospace environment modeling (gem) magnetic reconnection challenge: Mhd and hall mhdâ€™ constant and current dependent resistivity models. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3751–3757.
- Palmer, S., Rycroft, M., and Cermack, M. (2006). Solar and geomagnetic activity, extremely low frequency magnetic and electric fields and human health at the earthâ€™s surface. *Surveys in Geophysics*, 27(5):557–595.
- Parker, E. (1959). Extension of the solar corona into interplanetary space. *Journal of Geophysical Research*, 64(11):1675–1681.
- Parker, E. N. (1957). Sweet’s mechanism for merging magnetic fields in conducting fluids. *Journal of Geophysical Research*, 62(4):509–520.

- Parker, E. N. (1963). The solar-flare phenomenon and the theory of reconnection and annihilation of magnetic fields. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 8:177.
- Petschek, H. E. (1964). Magnetic field annihilation. *NASA Special Publication*, 50:425.
- Pirjola, R. (2005). Effects of space weather on high-latitude ground systems. *Advances in Space Research*, 36(12):2231–2240.
- Price, L., Swisdak, M., Drake, J. F., Cassak, P., Dahlin, J., and Ergun, R. (2016). The effects of turbulence on three-dimensional magnetic reconnection at the magnetopause. *Geophysical Research Letters*, 43(12):6020–6027.
- Priest, E. and Forbes, T. (2000). *Magnetic reconnection*. Cambridge University Press.
- Pritchett, P. (2001). Geospace environment modeling magnetic reconnection challenge: Simulations with a full particle electromagnetic code. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3783–3798.
- Pukhov, A. (2015). Particle-in-cell codes for plasma-based particle acceleration. *arXiv preprint arXiv:1510.01071*.
- Rezzolla, L. and Zanotti, O. (2013). *Relativistic hydrodynamics*. Oxford University Press.
- Rodríguez, F. D. (2014). Sistemas espaciales: aplicaciones y servicios. *Cuadernos de estrategia*, (170):53–92.

- Schiesser, W. E. and Griffiths, G. W. (2009). *A compendium of partial differential equation models: method of lines analysis with Matlab*. Cambridge University Press.
- Schmitz, H. and Grauer, R. (2006). Kinetic vlasov simulations of collisionless magnetic reconnection. *Physics of plasmas*, 13(9):092309.
- Schnack, D. D. (2009). *Lectures in magnetohydrodynamics: with an appendix on extended MHD*. Springer.
- Shay, M., Drake, J., Rogers, B., and Denton, R. (2001). Alfvénic collisionless magnetic reconnection and the hall term. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3759–3772.
- Shay, M. A., Drake, J. F., Denton, R. E., and Biskamp, D. (1998). Structure of the dissipation region during collisionless magnetic reconnection. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 103(A5):9165–9176.
- Shibata, K., Takasao, S., and Reeves, K. K. (2022). Numerical study on excitation of turbulence and oscillation in above-the-loop-top region of a solar flare. *arXiv preprint arXiv:2212.05802*.
- Simon, A. (1955). Ambipolar diffusion in a magnetic field. *Physical Review*, 98(2):317.
- Sinnhuber, M., Nieder, H., and Wieters, N. (2012). Energetic particle precipitation and the chemistry of the mesosphere/lower thermosphere. *Surveys in Geophysics*, 33(6):1281–1334.
- Strumik, M. and Stasiewicz, K. (2017). Multidimensional hall magnetohydrodynamics with isotro-

- pic or anisotropic thermal pressure: Numerical scheme and its validation using solitary waves. *Journal of Computational Physics*, 330:846–862.
- Sweet, P. (1958a). The production of high energy particles in solar flares. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 8(2):188–196.
- Sweet, P. A. (1958b). The neutral point theory of solar flares. In *Electromagnetic phenomena in cosmical physics*, volume 6, page 123.
- Torbert, R. B., Burch, J., Argall, M. R., Alm, L., Farrugia, C. J., Forbes, T. G., Giles, B., Rager, A., Dorelli, J., Strangeway, R. J., et al. (2017). Structure and dissipation characteristics of an electron diffusion region observed by mms during a rapid, normal-incidence magnetopause crossing. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 122(12):11–901.
- Toro, E. F. (2013). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media.
- Tóth, G., Ma, Y., and Gombosi, T. I. (2008). Hall magnetohydrodynamics on block-adaptive grids. *Journal of Computational Physics*, 227(14):6967–6984.
- Viganò, D., Martínez-Gómez, D., Pons, J. A., Palenzuela, C., Carrasco, F., Miñano, B., Arbona, A., Bona, C., and Massó, J. (2019). A simflowny-based high-performance 3d code for the generalized induction equation. *Computer Physics Communications*, 237:168–183.
- Vijapurapu, S. K. (2013). Contingency analysis of power systems in presence of geomagnetically induced currents. *College of Engineering, University of Kentucky*, Master’s thesis.

- Wandurraga, P. C., Navarro, A., and Lora-Clavijo, F. D. (2021). Torsional alfvén waves propagation in a stratified solar atmosphere. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 45(174):52–66.
- Yamada, M., Kulsrud, R., and Ji, H. (2010). Magnetic reconnection. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):603.
- Zenchenko, T. A. and Breus, T. K. (2021). The possible effect of space weather factors on various physiological systems of the human organism. *Atmosphere*, 12(3):346.
- Zenitani, S., Shinohara, I., and Nagai, T. (2012). Evidence for the dissipation region in magnetotail reconnection. *Geophysical research letters*, 39(11).
- Zolesi, B. and Cander, L. R. (2014). *Ionospheric prediction and forecasting*. Springer.
- Zweibel, E. G. (2015). Ambipolar diffusion. In *Magnetic Fields in Diffuse Media*, pages 285–309. Springer.
- Zweibel, E. G. and Yamada, M. (2009). Magnetic reconnection in astrophysical and laboratory plasmas. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 47:291–332.

Apéndices

Apéndice A. Ecuaciones macroscópicas de transporte

Ecuaciones para un fluido con múltiples especies

Las ecuaciones macroscópicas de transporte se obtienen a partir de la ecuación general de transporte

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \langle (q_\alpha [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]) \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = 0, \quad (69)$$

variando la función χ .

Ecuación de continuidad. Si $\chi = m_\alpha$, entonces

$$\langle \chi \rangle_\alpha = m_\alpha, \quad (70)$$

$$\langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha = m_\alpha \langle \mathbf{v} \rangle_\alpha = m_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \quad (71)$$

Para lo cual se ha tenido en cuenta que $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{c}_\alpha$, siendo \mathbf{c}_α la velocidad relativa entre la velocidad \mathbf{v} de una partícula y la velocidad promedio \mathbf{u}_α de las partículas de la especie alfa. Claramente $\langle \mathbf{c}_\alpha \rangle = 0$ y $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}_\alpha$. Con esto la ecuación general de transporte se reescribe como

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha m_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0. \quad (72)$$

Nótese que $\nabla_v \chi = 0$, por ello el tercer término de la ecuación (69) ha desaparecido.

Teniendo en cuenta que la densidad de masa de cada especie se define como $\rho_\alpha = n_\alpha m_\alpha$, de la ecuación (72) se obtiene la ecuación de continuidad para la masa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0. \quad (73)$$

Ecuación de movimiento. Si $\chi = m_\alpha \mathbf{v}$, entonces

$$\langle \chi \rangle_\alpha = m_\alpha \mathbf{u}_\alpha, \quad (74)$$

$$\langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha = m_\alpha \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle_\alpha, \quad (75)$$

con lo que la ecuación general de transporte se reescribe como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha \langle (q_\alpha [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \rangle_\alpha = 0, \quad (76)$$

y se hace necesario analizar cada término por separado.

Para el primer término se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) &= \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}_\alpha) + \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha) \\ &= \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}_\alpha) - \mathbf{u}_\alpha (\nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha)). \end{aligned} \quad (77)$$

Para el segundo término se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho_\alpha \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle_\alpha) &= \nabla \cdot \rho_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{c}_\alpha \rangle \mathbf{u}_\alpha + \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle) \\ &= \nabla \cdot \rho_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle).\end{aligned}\quad (78)$$

Nótese que

$$\nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho_\alpha u_{\alpha x} \mathbf{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_\alpha u_{\alpha y} \mathbf{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_\alpha u_{\alpha z} \mathbf{u}_\alpha), \quad (79)$$

y al aplicar regla de Leibniz

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) &= \rho_\alpha \left(u_{\alpha x} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial x} + u_{\alpha y} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial y} + u_{\alpha z} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial z} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial (\rho_\alpha u_{\alpha x})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_\alpha u_{\alpha y})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho_\alpha u_{\alpha z})}{\partial z} \right) \mathbf{u}_\alpha.\end{aligned}\quad (80)$$

Luego, la ecuación (78) se reescribe como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho_\alpha \langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle_\alpha) &= \rho_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + (\nabla \cdot \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot (\rho_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle) \\ &= \rho_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + (\nabla \cdot \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha,\end{aligned}\quad (81)$$

donde se ha definido $\mathbf{P}_\alpha = \rho_\alpha \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle$ como el tensor de presión cinética. Este se puede descomponer como $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{\Pi}_\alpha + p_\alpha \mathbf{I}$, siendo $\mathbf{\Pi}_\alpha$ el tensor de viscosidad y p la presión escalar.

Definiendo $\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$, para el tercer término se tiene que

$$\begin{aligned} -n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_v \mathbf{v} \rangle_\alpha &= -n_\alpha \left\langle \left(F_x \frac{\partial}{\partial v_x} + F_y \frac{\partial}{\partial v_y} + F_z \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \mathbf{v} \right\rangle_\alpha \\ &= -n_\alpha \langle F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z} \rangle_\alpha. \end{aligned} \quad (82)$$

A partir de lo anterior es claro que $-n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_v \mathbf{v} \rangle_\alpha = -n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha \rangle_\alpha$.

Al reemplazar los tres términos en la ecuación (76), y cancelar términos iguales de signo opuesto, se obtiene

$$\rho_\alpha \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_\alpha) + \rho_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha - n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha \rangle_\alpha = 0. \quad (83)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha \rangle_\alpha &= n_\alpha \langle q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rangle_\alpha \\ &= n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) \\ &= \rho_{q\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (84)$$

siendo $\rho_{m\alpha}$ la densidad de masa y $\rho_{q\alpha}$ la densidad de carga, (83) se reescribe como

$$\rho_{m\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_\alpha) + \rho_{m\alpha} (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha - \rho_{q\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = 0. \quad (85)$$

Ecuación de presión. Si $\chi = m_\alpha v^2/2$, entonces

$$\langle \chi \rangle_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \langle v^2 \rangle_\alpha, \quad (86)$$

$$\langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \langle v^2 \mathbf{v} \rangle_\alpha. \quad (87)$$

Con esto la ecuación general de transporte se reescribe como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \rangle_\alpha \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \mathbf{v} \rangle_\alpha \right) - \frac{n_\alpha}{2} \langle \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_v v^2 \rangle_\alpha = 0, \quad (88)$$

y nuevamente se hace necesario analizar cada término por separado.

Tenido en cuenta que $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{c}_\alpha$, el primero término se puede descomponer como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \rangle_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle c_\alpha^2 \rangle_\alpha \right). \quad (89)$$

La velocidad relativa \mathbf{c}_α está asociada con el movimiento térmico de las partículas. En virtud de lo anterior, la ecuación (89) se puede reescribir en términos de la presión, p_α , y el número de grados de libertad, N , como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \rangle_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \quad (90)$$

Para el segundo término se tiene que $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = u_\alpha^2 + 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha + c_\alpha^2$, en consecuencia

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \mathbf{v} \rangle_\alpha \right) &= \nabla \cdot \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle (u_\alpha^2 + 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha + c_\alpha^2)(\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{c}_\alpha) \rangle_\alpha \right) \\ &= \nabla \cdot \left[\frac{\rho_\alpha}{2} (u_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha + 2\mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle + \mathbf{u}_\alpha \langle c_\alpha^2 \rangle + \langle c_\alpha^2 \mathbf{c}_\alpha \rangle) \right] \\ &= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \mathbf{u}_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle + \frac{\rho_\alpha}{2} \langle c_\alpha^2 \mathbf{c}_\alpha \rangle \right]. \end{aligned} \quad (91)$$

Para los dos últimos términos se tiene que $\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle = \mathbf{P}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha$ y $\rho_\alpha \langle c_\alpha^2 \mathbf{c}_\alpha \rangle / 2 = \mathbf{q}_\alpha$, siendo \mathbf{q}_α el vector de flujo de calor y \mathbf{P}_α el tensor de presión definido anteriormente. En ausencia de flujo de calor, (91) se reescribe como

$$\nabla \cdot \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \mathbf{v} \rangle_\alpha \right) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{P}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \right]. \quad (92)$$

Para el tercer término de la ecuación (88) se tiene que $\nabla_v v^2 = \nabla_v (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla_v) \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$,

luego

$$-\frac{n_\alpha}{2} \langle \mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_v v^2 \rangle_\alpha = -n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{v} \rangle_\alpha. \quad (93)$$

Finalmente, sustituyendo los términos (90), (92) y (93) en (88), se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{P}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \right] - n_\alpha \langle \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{v} \rangle_\alpha = 0, \quad (94)$$

donde

$$\langle \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{v} \rangle_\alpha = q_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\alpha. \quad (95)$$

Luego, (94) se reescribe como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{P}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \right] - \rho_{q\alpha} \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (96)$$

Ecuaciones para un único fluido conductor

Se definen los siguientes parámetros macroscópicos totales:

Densidad de masa

$$\rho_m = \sum_\alpha \rho_{m\alpha} = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha. \quad (97)$$

Densidad de carga

$$\rho_q = \sum_\alpha \rho_{q\alpha} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha. \quad (98)$$

Velocidad media (se define de tal forma que la densidad total de momento corresponda a

la suma de las densidades de momento de cada especie)

$$\rho_m \mathbf{u} = \sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}, \quad (99)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}{\rho_m}. \quad (100)$$

Densidad de corriente eléctrica

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u} + \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = \rho \mathbf{u} + \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}. \quad (101)$$

donde se ha tenido en cuenta una *velocidad de difusión* \mathbf{w}_{α} , la cual se define como la velocidad media de cada especie medida por un marco de referencia que se mueve con la velocidad media del fluido, esto es

$$\mathbf{w}_{\alpha} = \mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\alpha} - \frac{1}{\rho_m} \sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}. \quad (102)$$

Tensor de presión cinética

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}. \quad (103)$$

Para esta definición se ha tenido en cuenta que, además de $\mathbf{c}_{\alpha} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_{\alpha}$, es necesario definir una velocidad $\mathbf{c}_{\alpha 0} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, tal que el presión de tensor cinética $\mathbf{P}_{\alpha} = \rho_{\alpha} \langle \mathbf{c}_{\alpha} \mathbf{c}_{\alpha} \rangle$, también se pueda definir como $\mathbf{P}_{\alpha} = \rho_{\alpha} \langle \mathbf{c}_{\alpha 0} \mathbf{c}_{\alpha 0} \rangle$ respecto a una velocidad \mathbf{u} y no \mathbf{u}_{α} .

Presión cinética escalar

$$p = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} w_{\alpha}^2, \quad (104)$$

donde N es el número de grados de libertad.

Ecuación de continuidad. Al sumar sobre todas las especies se obtiene

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \sum_{\alpha} \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) = 0, \quad (105)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0. \quad (106)$$

Ecuación de movimiento. Al sumar sobre todas las especies se obtiene

$$\sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} \right] = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) - \sum_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{P}_{\alpha}, \quad (107)$$

$$\sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} \right] = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P} + \sum_{\alpha} \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}). \quad (108)$$

Para reescribir el primer término se tiene en cuenta la ecuación de continuidad, de forma que

$$\sum_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \left[\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \sum_{\alpha} \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) \right] = 0. \quad (109)$$

Así, al primer término de (108) se le puede sumar la expresión anterior,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} \right] &= \sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} \right] \\ &+ \sum_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \left[\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \sum_{\alpha} \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) \right], \end{aligned} \quad (110)$$

y usando la regla de Leibniz se reescribe de forma compacta como

$$\sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} \right] = \sum_{\alpha} \left[\frac{\partial (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_{\alpha})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) \right]. \quad (111)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{u}_{\alpha} = \mathbf{u} + \mathbf{w}_{\alpha}$, el lado derecho de la igualdad se puede reescribir y finalmente se obtiene

$$\sum_{\alpha} \rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\alpha} \right] = \frac{\partial (\rho_m \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u} \mathbf{u}) + \sum_{\alpha} \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}). \quad (112)$$

Finalmente, al reemplazar en la ecuación (108) se obtiene que

$$\frac{\partial (\rho_m \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (113)$$

$$\rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] + \mathbf{u} \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) \right] = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (114)$$

$$\rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (115)$$

De forma que en ausencia de viscosidad y teniendo en cuenta que el plasma es globalmente neutro,

la ecuación se reduce a

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (116)$$

siendo p la presión cinética escalar.

Ecuación de presión. En este caso se tiene que

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \langle v^2 \rangle_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \langle v^2 \mathbf{v} \rangle_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha} n_{\alpha} \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rangle_{\alpha} = 0, \quad (117)$$

y cada termino de la ecuación se reescribe para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{2} p \right) + \nabla \cdot \left(\frac{N}{2} p \mathbf{u} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_m u^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_m u^2 \mathbf{u} \right) \\ + \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \quad (118)$$

Luego, la expresión (118) se reescribe con la ecuación de continuidad y de momento de forma que se simplifique a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{2} p \right) + \nabla \cdot \left(\frac{N}{2} p \mathbf{u} \right) + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \rho_q \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}). \quad (119)$$

Es sumamente importante enfatizar en que los dos primeros términos a la derecha de la igualdad no se cancelan debido a que $\mathbf{j} \neq \rho_q \mathbf{u}$. Para entender lo anterior es necesario retomar la definición

para la densidad de corriente eléctrica (101),

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u} + \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}, \quad (120)$$

donde $\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$ corresponde a la corriente de carga de conducción y $\rho \mathbf{u}$ a la de convección. De forma que si se denota con \mathbf{j} a la corriente de conducción, se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{2} p \right) + \nabla \cdot \left(\frac{N}{2} p \mathbf{u} \right) + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{u} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \quad (121)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{2} p \right) + \nabla \cdot \left(\frac{N}{2} p \mathbf{u} \right) + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{j} \cdot [\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]. \quad (122)$$

El término $\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ corresponde al campo eléctrico medido por un marco de referencia comóvil al fluido y está dado por la ley de Ohm

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \eta_H (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \eta_A [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]. \quad (123)$$

Entonces, al usar esta ley, la expresión (122) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{2} p \right) + \nabla \cdot \left(\frac{N}{2} p \mathbf{u} \right) + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = \eta j^2 - \eta_A \mathbf{j} \cdot [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (124)$$

donde el término de Hall se cancela debido al producto $\eta_H \mathbf{j} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$.

Finalmente, al despreciar la viscosidad del tensor de presiones y tener en cuenta que el número de grados de libertad se relaciona con el coeficiente adiabático a través de la relación $\gamma - 1 = N/2$, de la expresión (124) se obtiene que

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} + (\gamma - 1) \{ \eta j^2 - \eta_A \mathbf{j} \cdot [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \}. \quad (125)$$

Apéndice B. Formulación conservativa

Las ecuaciones macroscópicas de transporte para un único fluido conductor

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (126)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (127)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} + (\gamma - 1) \{ \eta j^2 - \eta_A \mathbf{j} \cdot [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \}, \quad (128)$$

deben estar en forma conservativa para ser resueltas numéricamente por MAGNUS. En este apéndice las ecuaciones (126), (127) y (128) se emplean, junto con la leyes de Maxwell y la ley de Ohm, para construir el sistema de ecuaciones de evolución para la densidad de masa, el momento, la densidad de energía y el campo magnético.

Ecuación de evolución para la densidad de masa

La ecuación (126) no requiere de modificaciones

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (129)$$

Ecuación de evolución para la densidad de momento

Para reescribir (127) nótese que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} &= \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})],\end{aligned}\tag{130}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) &= \mathbf{u} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\ (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \mathbf{u} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})].\end{aligned}\tag{131}$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \mathbf{u} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] &= \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) &= \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p.\end{aligned}\tag{132}$$

El término asociado con la densidad de fuerza magnética $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ se puede reescribir usando la ley de Ampère-Maxwell (con la aproximación de bajas velocidades) como

$$\begin{aligned}\mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\ (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i &= \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} (\nabla \times \mathbf{B})_j B_k = \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} B_k \partial_l B_m.\end{aligned}\tag{133}$$

Usando las propiedades del Levi-Civita y la delta de Kronecker (133) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i &= \frac{1}{\mu_0} (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) B_k \partial_l B_m \\
 &= \frac{1}{\mu_0} (\delta_{kl} \delta_{im} B_k \partial_l B_m - \delta_{km} \delta_{il} B_k \partial_l B_m) \\
 &= \frac{1}{\mu_0} (B_l \partial_l B_i - B_m \partial_i B_m).
 \end{aligned} \tag{134}$$

Para continuar reescribiendo nótese que $\partial_l (B_l B_i) = B_l (\partial_l B_i) + B_i (\partial_l B_l)$, pero $\partial_l B_l = 0$ debido a que la divergencia del campo magnético es nula. Además, $2B_m \partial_i B_m = \partial_i B^2 = \partial_l B^2 \delta_{il}$. Con lo anterior (134) nuevamente se reescribe como

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i &= \frac{1}{\mu_0} \left[\partial_l (B_l B_i) + \frac{1}{2} \partial_l B^2 \delta_{il} \right] = \frac{1}{\mu_0} \partial_l \left(B_l B_i + \frac{1}{2} B^2 \delta_{il} \right), \\
 \mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left(\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbf{I} \right).
 \end{aligned} \tag{135}$$

Finalmente, con la expresión (135), (132) se reescribe como

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u}\mathbf{u} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}\mathbf{B} + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \mathbf{I} + p \mathbf{I} \right) = 0, \tag{136}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u}\mathbf{u} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}\mathbf{B} + p \mathbf{I} \right) = 0, \tag{137}$$

donde

$$P = p + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (138)$$

es la presión total, es decir, la del fluido más la presión magnética.

Ecuación de evolución para la densidad de energía

Para obtener una ecuación de evolución para la densidad de energía del sistema se considera que

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \rho e, \quad (139)$$

donde e es la energía interna del sistema que se relaciona con la presión del fluido a través de

$$p = (\gamma - 1)\rho e. \quad (140)$$

Luego, se deben obtener ecuaciones de evolución para cada uno de los términos en (139).

En primer lugar, para el término de energía cinética nuevamente se parte de la ecuación (127) pero con el operador lagrangiano

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (141)$$

de forma que (127) se convierte en

$$\begin{aligned}\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \\ \rho \mathbf{u} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \mathbf{u} \cdot \nabla p.\end{aligned}\quad (142)$$

Luego, el primer y segundo término de la ecuación se reescriben como

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) - \frac{1}{2} u^2 \frac{D\rho}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{1}{2} \rho u^2 \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (143)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{j}) = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) = -\mathbf{j} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (144)$$

para obtener

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{1}{2} \rho u^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{j} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \mathbf{u} \cdot \nabla p. \quad (145)$$

El segundo término de la ecuación (145) se puede reescribir usando la regla de Leibniz tal como se ha hecho en múltiples cálculos antes. De forma que usando la ley de Ohm

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \eta_H (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \eta_A [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (146)$$

la expresión (145) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \mathbf{u} \right) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) \\ = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \eta j^2 + \eta_A \mathbf{j} \cdot [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \end{aligned} \quad (147)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 \mathbf{I} + p \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{u} \right] \\ + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \eta j^2 + \eta_A \mathbf{j} \cdot [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] + p \nabla \cdot \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (148)$$

donde el término del efecto Hall se cancela debido al producto $\mathbf{j} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$.

En segundo lugar, para el término de energía cinética se utiliza la ecuación de Faraday, de forma que

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (149)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (150)$$

En tercer lugar, para el término de energía interna se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (151)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho e) = \frac{-\gamma}{\gamma-1} p \nabla \cdot \mathbf{u} + \eta j^2 - \eta_A \mathbf{j} \cdot [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (152)$$

donde se ha hecho uso de la ecuación (128) para la evolución de la presión. Reescribiendo se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) = -\nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) - p \nabla \cdot \mathbf{u} + \eta j^2 - \eta_A \mathbf{j} \cdot [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]. \quad (153)$$

Sumando las expresiones (148), (150) y (153) se obtiene que

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + p \right) \mathbf{u} \right] - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}), \quad (154)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho e \right) \mathbf{u} \right] + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right\}. \quad (155)$$

Finalmente, para eliminar el campo eléctrico de las ecuaciones, el término $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ nuevamente se reescribe con la ley de Ohm para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot \left\{ [(E + P) \mathbf{u}] - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B} + \frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right. \\ \left. + \frac{\eta_H}{\mu_0} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{\eta_A}{\mu_0} [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} \right\}, \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ [(E + P)\mathbf{u}] - \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})\mathbf{B} - \frac{\eta_H}{\mu_0} [B^2\mathbf{j} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{j})\mathbf{B}] \right. \\ \left. + \frac{\eta_A}{\mu_0} [B^2\mathbf{j} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{j})\mathbf{B}] \times \mathbf{B} \right\} - \nabla \cdot \left(\frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right), \end{aligned} \quad (157)$$

que en términos de las velocidades $\mathbf{u}_H = -\eta_H\mathbf{j}$ y $\mathbf{u}_A = \eta_A(\mathbf{j} \times \mathbf{B})$ resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ (E + P)\mathbf{u} - \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})\mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0} [B^2\mathbf{u}_H - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_H)\mathbf{B}] \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_0}(B^2\mathbf{u}_A) \right\} = -\nabla \cdot \left(\frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right). \end{aligned} \quad (158)$$

Ecuación de evolución para el campo magnético

La ecuación de Faraday se reescribe con la ley de Ohm como

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \{ -(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta\mathbf{j} + \eta_H(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \eta_A[(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \}, \quad (159)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times [\eta_H(\mathbf{j} \times \mathbf{B})] \\ &+ \nabla \times \{ \eta_A[(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \} - \nabla \times \eta\mathbf{j}, \end{aligned} \quad (160)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{u}_H \times \mathbf{B}) \\ &+ \nabla \times (\mathbf{u}_A \times \mathbf{B}) - \nabla \times \eta\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (161)$$

Puesto que

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{B}), \quad (162)$$

el primer término a la izquierda de la ecuación (159), junto con los términos de Hall y de difusión ambipolar se puede escribir como flujos, así

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_H\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}_H) \\ + \nabla \cdot (\mathbf{u}_A\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}_A) = -\nabla \times \eta \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (163)$$

Apéndice C. Análisis dimensional de los coeficientes η_H y η_A

Puesto que todos los términos aditivos de una ecuación tienen las mismas unidades, al dividir cada término por cierto conjunto de constantes y/o variables, cuyo producto tenga las mismas unidades, cualquier ecuación se puede volver adimensional. Es así como las ecuaciones evolucionan en MAGNUS, luego, las magnitudes adimensionales que resultan de la evolución del sistema se pueden escalar con cantidades que sí tienen dimensiones y que dependen del sistema físico que se está simulando.

Para hacer un análisis dimensional de los coeficientes η_H y η_A , se parte de la ecuación de inducción

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_H\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}_H) \\ + \nabla \cdot (\mathbf{u}_A\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}_A) = -\eta \nabla \times \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (164)$$

y se analiza cada término teniendo en cuenta que, para dar unidades a la ecuación, $l \rightarrow l_a l$, $t \rightarrow t_a t$, entonces, $\partial_i \rightarrow l_a \partial_i$ y $\partial_t \rightarrow t_a \partial_t$. De forma análoga para el campo magnético $\mathbf{B} \rightarrow B_a \mathbf{B}$, la velocidad $\mathbf{u} \rightarrow u_a \mathbf{u}$, y las demás variables. Así, para el primer término de la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{B_a}{t_a} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{u_a \sqrt{\mu_0 \rho_a}}{l_a / u_a} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{u_a^2 \sqrt{\mu_0 \rho_a}}{l_a} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (165)$$

donde se ha usado que $B_a = u_a \sqrt{\rho_a \mu_0}$ y $t_a = l_a / u_a$. De forma análoga, para el segundo término y

el término resistivo se tiene que

$$\nabla \cdot (\mathbf{uB} - \mathbf{Bu}) = \frac{u_a B_a}{l_a} \nabla \cdot (\mathbf{uB} - \mathbf{Bu}) = \frac{u_a^2 \sqrt{\mu_0 \rho_a}}{l_a} \nabla \cdot (\mathbf{uB} - \mathbf{Bu}), \quad (166)$$

$$\eta \nabla \times \mathbf{j} = \frac{\eta_a B_a}{l_a^2 \mu_0} \eta \nabla \times \mathbf{j} = \frac{(l_a u_a \mu_0)(u_a \sqrt{\mu_0 \rho_a})}{l_a^2 \mu_0} \eta \nabla \times \mathbf{j} = \frac{u_a^2 \sqrt{\mu_0 \rho_a}}{l_a} \eta \nabla \times \mathbf{j}, \quad (167)$$

donde se ha usado que $\eta_a = l_a u_a \mu_0$ (Navarro et al., 2017).

Así, para que la ecuación de inducción sea adimensional se debe dividir cada término aditivo entre el factor $u_a^2 \sqrt{\mu_0 \rho_a} / l_a$. Esto se hace en MAGNUS dividiendo cada magnitud física entre las magnitudes características del sistema dadas a través de l_a , ρ_a , u_a y constantes como la permeabilidad magnética μ_0 . Con la inclusión de los términos Hall y ambipolar en el código, se hace necesario determinar expresiones para η_{Ha} y η_{Aa} que permitan quitar las dimensiones a los coeficientes de Hall y de difusión ambipolar η_H y η_A .

Teniendo en cuenta que los términos de la ecuación de inducción tienen dimensiones dadas por el factor $u_a^2 \sqrt{\mu_0 \rho_a} / l_a$, resulta lógico que ocurra lo mismo en los términos que contienen a η_H y η_A . Para estos términos de la ecuación se tiene que

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_H) = \frac{\mathbf{u}_{Ha} B_a}{l_a} \nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_H), \quad (168)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_A \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_A) = \frac{\mathbf{u}_{Aa} B_a}{l_a} \nabla \cdot (\mathbf{u}_A \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_A). \quad (169)$$

Teniendo en cuenta que las variables \mathbf{u}_H y \mathbf{u}_A están definidas como

$$\mathbf{u}_H = -\eta_H \mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_A = \eta_A (\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \quad (170)$$

con la densidad de corriente dada por

$$\mathbf{j} \rightarrow \frac{B_a}{l_a \mu_0} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (171)$$

las expresiones (168) y (169) se reescriben como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_H) &= \frac{\eta_H a B_a^2}{l_a^2 \mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_H) \\ &= \frac{\eta_H a u_a^2 \rho_a}{l_a^2} \nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_H), \end{aligned} \quad (172)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u}_A \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_A) &= \frac{\eta_A a B_a^3}{l_a^2 \mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{u}_A \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_A) \\ &= \frac{\eta_A a u_a^3 \rho_a \sqrt{\mu_0 \rho_a}}{l_a^2} \nabla \cdot (\mathbf{u}_A \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}_A). \end{aligned} \quad (173)$$

Como los términos (172) y (173) deben tener ciertas dimensiones para que la ecuación sea

consistente, se deben satisfacer las siguientes igualdades

$$\frac{\eta_{Ha} u_a^2 \rho_a}{l_a^2} = \frac{u_a^2 \sqrt{\mu_0 \rho_a}}{l_a}, \quad \frac{\eta_{Aa} u_a^3 \rho_a \sqrt{\mu_0 \rho_a}}{l_a^2} = \frac{u_a^2 \sqrt{\mu_0 \rho_a}}{l_a}. \quad (174)$$

Despejando, finalmente se obtiene que

$$\eta_{Ha} = l_a \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_a}}, \quad \eta_{Aa} = \frac{l_a}{u_a \rho_a}. \quad (175)$$